UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cristiano Arceno

MERCADO DE AÇÕES: UMA ABORDAGEM NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Florianópolis

2019

Cristiano Arceno

MERCADO DE AÇÕES: UMA ABORDAGEM NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Arceno, Cristiano
Mercado de Ações: Uma abordagem no âmbito da educação financeira / Cristiano Arceno ; orientador, Vinícius Viana Luiz Albani, 2019.
90 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós Graduação em Matemática, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Educação Financeira. 3. Ações. 4. Juros. 5. Investimento. I. Albani, Vinícius Viana Luiz . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

MERCADO DE AÇÕES: UMA ABORDAGEM NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA
por
Cristiano Arceno

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

Prof^{a}. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalvez
Coordenadora do Curso

Banca Examinadora

Vinicius V. da Cruz Albani

Prof. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani
UFSC
Orientador

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
UFSC

Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves
UFSC

Cleverson R. da Luz

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz
UFSC

Florianópolis, 24 de maio de 2019.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor Vinícius Viana Luiz Albani, pela contribuição na elaboração deste trabalho.

Aos professores da banca examinadora pelas valiosas sugestões.

À minha esposa, Fabiana Rodrigues, por sua total compreensão e apoio incondicional durante todo o curso.

A UFSC e ao PROFMAT pela oportunidade de cursar um mestrado.

RESUMO

O presente trabalho disserta sobre o mercado de ações no cenário brasileiro e sua possível contribuição para uma educação financeira desenvolvida no ensino básico. Devido ao sistema capitalista dominante em nosso país se faz necessária uma educação voltada para os interesses da população no que diz respeito à economia e ao bom uso do dinheiro. Neste trabalho serão mostradas as principais propriedades do mercado de ações na bolsa de valores e a matemática que permeia este mecanismo financeiro, propondo a utilização dessa relação no ambiente escolar. Tendo em vista que mais da metade da população brasileira está endividada e que a caderneta de poupança em si não é tão atrativa, o referido trabalho propõe educação financeira, através do conhecimento do mercado de ações, no ensino básico.

Palavras-chave: Educação Financeira. Ações. Juros. Investimento.

ABSTRACT

This work discusses the Brazilian stock market and its possible contribution to a financial education developed in basic education. Due to the dominant capitalist system in our country it becomes necessary education aimed at the interests of the population with regard to the economy and the good use of money. This work will show the main properties of the stock market in the stock exchange and the mathematics that permeates this financial mechanism, proposing the use of this relation in the school environment. Considering that more than half of the Brazilian population is indebted and that the savings account itself is not so attractive, this work proposes financial education, through knowledge of the stock market, in basic education.

Keywords: Financial Education. Actions. Interest. Investment.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Percebe-se atualmente um considerável desajuste no que tange a organização financeira das famílias brasileiras. A educação financeira, que estimula o saudável controle sobre a renda familiar e auxilia no alcance dos objetivos materiais de fundamental utilidade, ainda é tratada de maneira superficial nos lares e nas escolas do Brasil.

Esta situação gera cidadãos endividados, sem controle sobre suas rendas e consequentemente torna a sociedade capitalista um campo ainda mais difícil de trilhar. Pais conhecedores deste efeito avassalador tentam preparar seus filhos para que não sofram dificuldades financeiras, mas é necessário que a escola esteja mais atenta a estas questões e forneça meios de formar jovens e adultos efetivamente conscientizados em relação a seus gastos.

Orientar os estudantes no sentido de conseguirem enfrentar os problemas relacionados ao sistema financeiro e, ainda, de conquistarem autonomia para que conduzam suas vidas com qualidade é fundamental nos dias de hoje, visto que, segundo (NAVARRO; MASSARO, 2013), até mesmo algumas doenças psicológicas têm suas origens justamente na falta de controle sobre as finanças pessoais.

A aposentadoria, fase tão importante, onde despesas pessoais e custo com tratamentos médicos costumam ser maiores é tratada, geralmente, como algo garantido pelo governo, sem a noção do quanto se precisa contribuir para se obter uma renda satisfatória no futuro.

Entretanto, isso não é um problema apenas do povo brasileiro, mas um desafio mundial. Como mencionado na reportagem de 25 de janeiro de 2019 da BBC (disponível em www.bbc.com), a maioria das pessoas acredita que tem um plano para a aposentadoria, mas há uma grande lacuna entre a expectativa e a realidade. As pessoas que poupam, quando conseguem, economizam de pouquinho em pouquinho, deixando o dinheiro, muitas vezes, “embaixo do colchão”, ao invés de investirem. Poucos acreditam que têm capital suficiente para, por exemplo, entrar no mercado de ações.

Sabemos que no Brasil, a maioria da população não tem renda suficiente para as necessidades básicas como alimentação, moradia, transporte e vestimenta, impossibilitando-a de investir. Porém, com educação financeira efetiva nas escolas e nos lares pode-se instruir não apenas os que já tem condições de investir, mas estimular o desejo de ascensão social dos mais carentes.

Assim, por tudo que foi dito acima e por pensar que uma vida de investimento oferece mais benefícios do que simplesmente economizar é que propomos neste trabalho uma introdução ao mercado de ações no ensino básico, abarcando a matemática com enfoque na educação financeira. Um estudo que além de todo contexto matemático pertinente, simule situações, favoreça o raciocínio e, principalmente, oriente os alunos para uma vida de investimento.

No primero capítulo deste trabalho trataremos da consciência necessária para se almejar uma vida de investimento e de qualidade financeira, discutindo situações hipotéticas mediante aplicações de baixo risco, como a caderneta de poupança.

No segundo capítulo deste trabalho faremos uma abordagem panorâmica do sistema financeiro brasileiro, buscando destacar o lugar do mercado de ações nessa engrenagem econômica. Serão abordados aspectos importantes do Mercado de Capitais, salientando os principais termos usados no mercado de ações. Destacaremos o título de capital chamado *ação* e sua utilidade no ambiente financeiro.

No terceiro capítulo abordaremos os conceitos matemáticos atrelados ao mercado de ações e suas atribuições no contexto social, apresentando um caminho, com o mínimo de conteúdo necessário, para a exposição deste assunto em sala de aula. Daremos ênfase às diversas propriedades relacionadas a juros, buscando associar o currículo escolar a uma oportunidade de esclarecimento sobre os fundos de investimento, especialmente o de ações.

No último capítulo faremos a transposição didática, para a sala de aula, de alguns elementos do sistema de investimentos em ações, no objetivo de compor formas de aprendizado e de educação financeira. Elaboraremos um projeto de ensino de modo a introduzir os conceitos pertinentes ao mercado de ações, com auxílio de instrumentos tecnológicos, como programas de cunho geométrico e simuladores.

Salientamos que o intuito deste trabalho não é incentivar a especulação e o risco inconsequente atrás de lucros, mas sim, o entendimento das propriedades matemáticas envolvidas no mercado de ações e proporcionar um esclarecimento, no ensino básico, sobre opções de investimento que requerem estudo e educação financeira apropriada.

1 O VALOR DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Este capítulo, que usa como principal referência a coleção "Educação Financeira nas Escolas" do Ministério da Educação, aborda a educação financeira como meio de promover a cidadania.

Através da cultura do planejamento individual ou familiar, da precaução diante das diversas situações econômicas, da poupança, do investimento inteligente e do consumo consciente se pode contribuir para uma sociedade mais equilibrada.

1.1 CONSCIÊNCIA DO SISTEMA FINANCEIRO

Por muito tempo tenta-se relacionar dinheiro à felicidade. Será que se tivermos muito dinheiro teremos a felicidade ou poderemos comprá-la? O professor britânico Angus Deaton, que ganhou o prêmio Nobel de Economia em 2015 relacionando consumo, pobreza e bem-estar no mundo, concluiu que o dinheiro não necessariamente traz felicidade, porém, sua falta pode aumentar as angústias existenciais.

Mas o que cada pessoa pode dizer sobre isso está de acordo com sua própria realidade. Há os que trabalham muitas horas por dia motivados por suas necessidades financeiras ou por anseio de acumular mais renda e há os que conseguem equilibrar tempo de trabalho com tempo de lazer sem necessariamente ter altos rendimentos. Mas aí vem a pergunta: Como chegar em um patamar onde se consiga viver tranquilo e com dinheiro suficiente para as oscilações da vida? Não há uma resposta específica, mas pelo menos um alicerce; a educação financeira.

O mundo é repleto de símbolos financeiros e que muitas vezes descontextualizados confundem as pessoas em suas decisões em relação ao uso da renda. Ser crítico diante de tantas investidas do comércio e das alternativas de investimento é um dos grandes desafios da atualidade.

Infelizmente, o consumo por grande parte da população é orientado por padrões sociais, pela moda vigente ou por propagandas irresistíveis e não por projetos de vida. A insaciável necessidade de consumir não favorece uma vida de planejamento, causando transtornos individuais e, consequentemente, males coletivos.

É imprescindível que se entenda que o descontrole financeiro de um indivíduo fomenta o endividamento e o prejuízo de pessoas próximas e de empresas que vendem sem receber. Além disso, quando este indivíduo é chefe de família, influencia negativamente seus entes e incentiva a formação de mais gastadores e não poupadores em seu lar.

Por isso, se faz necessária uma educação financeira efetiva em sala de aula, que contribua para uma orientação adequada aos estudantes em relação as suas atividades econômicas e que os mesmos levem esta educação para o âmbito familiar.

A necessidade de compreensão, por parte do aluno, de como opera o sistema financeiro se justifica também pelos benefícios inerentes ao próprio conhecimento deste universo matemático do cotidiano e que envolve e altera profundamente a vida das pessoas. Pois, pessoas equilibradas financeiramente e que agem com consciência diante das situações atuais tornam suas trajetórias de vida muito mais autônomas e saudáveis, contribuindo para uma sociedade menos suscetível a desordens econômicas.

Fazer entender que o aluno é parte de um contexto, no sentido de situá-lo na engrenagem do sistema econômico e, lhe mostrar que suas decisões financeiras podem contribuir positivamente para algo maior, estimula-o para a realidade de seu dia a dia. A capacitação deste indivíduo, através da educação financeira, torna-o sujeito protagonista na sociedade.

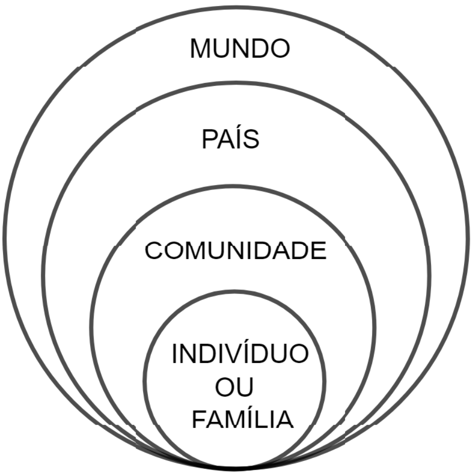


Figura 1 – O indívíduo ou família dentro de um contexto econômico.

Como ilustrado na Figura 1, o indivíduo está dentro de um grande conjunto suscetível aos movimentos econômicos globais. Sendo que os elementos desse conjunto influenciam, mediante suas decisões financeiras, as sociedades modernas em um todo. Por exemplo, o preço do petróleo que é influenciado atualmente pelo mercado internacional, influi, entre outros fatores, nas políticas econômicas relacionadas ao transporte de cargas de um país. Com isso, até mesmo quem não possui automóvel é afetado.

No caminho inverso, por exemplo, quando famílias pagam suas contas em dia, menos empresas são lesadas na comunidade, podendo as mesmas gerar mais renda e empregos. Isso auxilia o país no aumento de sua produção industrial e o favorece em assuntos econômicos internacionais.

É comum pensar apenas em si mesmo quando se quer poupar ou investir. Mas estar consciente do contexto em que se está inserido ajuda a agir em prol da coletividade e com mais responsabilidade.

1.1.1 A Condição Atual de Cada Um

Quando consideramos o tempo, percebemos que as pessoas hoje vivem mais e por isso precisam organizar suas finanças com mais qualidade. O que temos hoje é resultado do que fizemos no passado e o que teremos no futuro será o resultado do que fizermos hoje.

Se questionarmos a cada pessoa o quanto ela tem de capital financeiro agora e o que fez para consegui-lo teremos as mais variadas respostas. É fundamental, contudo, que se promova a reflexão sobre as decisões que podem ser tomadas em relação a esse capital. Gastar comprando o quê? Poupar tudo e sacrificar o desejo de consumo? Investir parte, mas em que tipo de investimento? Estas questões sacodem preliminarmente os pensamentos de qualquer um que precisa agir em relação ao bom uso de suas rendas.

Em exemplos simples do cotidiano podemos perceber o poder de decisão que está nas mãos do indivíduo.

Exemplo 1.1. Fabiana fez uma compra de 50 reais e tem a opção de parcelar ou pagar à vista. Sabendo que ela tem apenas 50 reais em sua carteira, que é o que restou de seu orçamento, e ainda um cartão de crédito, o que seria mais vantajoso? Pagar à vista em dinheiro ou parcelar no cartão?

A reposta para o exemplo acima pode variar. Mas o que podemos pensar é: Havia a necessidade dela fazer uma compra que comprometia o que sobrou de seu orçamento? Por que não guardar para uma emergência ou investir esse valor?

Se havia necessidade de comprar, ela está no limite de suas finanças. Se não havia, ela dá indícios de um descontrole financeiro.

Fazer anotações, mesmo de pequenos gastos, é um bom começo para quem quer ser mais organizado em suas finanças. Um orçamento doméstico, que sirva para análise, contribui significativamente na tomada de decisões financeiras.

Definição 1.1. ***Orçamento***
É a parte de um plano financeiro estratégico que compreende a previsão de receitas e despesas futuras para a administração de determinado período de tempo.

Geralmente, um orçamento pode ser representado por meio de uma tabela. Mas antes de darmos um exemplo é preciso deixar definidos os tipos de receitas e despesas que ocorrem no cotidiano.

Definição 1.2. ***Receita***
É a entrada monetária que ocorre em uma entidade (empresa, família, etc.), em geral sob a forma de dinheiro ou de créditos representativos de direitos.

Existem as receitas fixas que são aquelas com presença constante no orçamento e seu valor geralmente não varia significativamente como, por exemplo, salários, aluguéis e aposentadorias. Há também as receitas variáveis que são aquelas com presença inconstante no orçamento e variam consideravelmente como, por exemplo, as comissões e os serviços extras.

Com o valor total das receitas é possível buscar o equilíbrio das contas, dimensionando com razoabilidade até onde pode ir o valor total das despesas.

Definição 1.3. ***Despesas***
São saídas de recursos financeiros (dinheiro que sai) em oposição às entradas (dinheiro que entra).

Existem as despesas fixas que são aquelas com presença constante no orçamento e geralmente não sofrem alterações abruptas como, por exemplo, aluguéis, financiamentos e condomínio.

Há também as despesas variáveis que são aquelas com presença constante no orçamento e que podem sofrer alterações significativas como, por exemplo, gastos com alimentação, combustível e lazer. Existem ainda as despesas eventuais que são aquelas que não tem presença constante, mas que ocorrem eventualmente como, por exemplo, gastos com consertos de utensílios e tratamentos de saúde.

Daremos abaixo um exemplo de orçamento doméstico mensal e o gráfico com o percentual de cada despesa em relação ao total de receita:

RECEITAS	DESPESAS
Salário: R\$ 2000, 00	Luz: R\$ 150, 00
Serviço Extra: R\$ 500, 00	Água: R\$ 100, 00
	Internet: R\$ 100, 00
	Alimentação: R\$ 850, 00
	Aluguel: R\$ 1100, 00
	Lazer: R\$ 200, 00

Tabela 1 – Exemplo de orçamento doméstico.

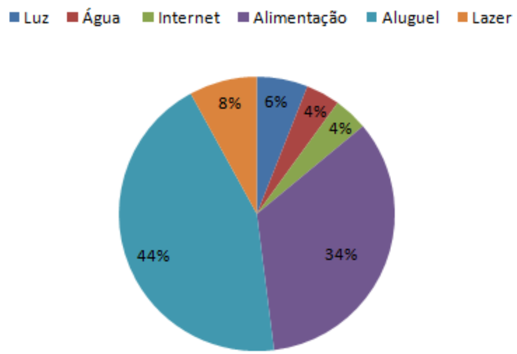


Figura 2 – O percentual de despesa em relação ao total de receita.

Analisando as informações da Tabela 1 e da Figura 2 pode-se decidir o que fazer para economizar. Ter também a noção de onde estão os maiores gastos e verificar se podem ser reduzidos. Sendo organizado e propondo estimativas, o indivíduo tem mais opções e mais segurança nas decisões a serem tomadas.

Por isso, para começar a melhorar o orçamento é preciso desejar ter mais receita do que despesa. Isso motiva mudanças de comportamento e provoca uma disciplina mais apurada diante dos gastos cotidianos. Ter mais receita significa colocar as contas em dia, viver com tranquilidade e não ser surpreendido com despesas eventuais. E pode ainda impulsionar uma vida de investimento e de qualidade financeira.

Especialistas em finanças, por exemplo, aconselham que a parte de alimentação de uma família não deve ultrapassar um terço da receita. O mesmo é sugerido para os gastos com habitação (aluguel, financiamento ou condomínio).

Exemplo 1.2. Se uma família tem renda líquida de 3000 reais mensais, o ideal é que as compras com alimentação não ultrapassem 1000 reais.

1.1.2 Receita x Despesa

No Brasil a maioria das famílias já é deficitária. Isso quer dizer que estão endividadas e com dificuldades de conseguir recursos para sair desta situação. Segundo a Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor, divulgada em 5 de fevereiro de 2019 pela Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC), o percentual de famílias endividadas no Brasil aumentou de $59,8\%$ em dezembro de 2018 para $60,1\%$ em janeiro de 2019.

A receita de muitas dessas famílias é inferior às suas despesas, o que acaba acarretando situações de muito estresse e inadimplência. De acordo com a mesma pesquisa, 25% das famílias estão com contas atrasadas e $9,5\%$ não terão condições de pagar suas dívidas, que giram, principalmente, em torno do cartão do crédito. Dívidas desse tipo é a principal despesa em $78,4\%$ das famílias brasileiras.

Há aquelas que conseguem empréstimos com parentes e outras que apelam à instituições financeiras. Mas isso pode custar muito caro, por causa das taxas de juros que operam no mercado.

Definição 1.4. ***Juro***
É a atualização financeira de um capital e a remuneração cobrada pelo empréstimo, geralmente, de dinheiro. É expresso como um percentual sobre o valor emprestado (taxa de juro) e pode ser calculado de duas formas: juros simples ou juros compostos.

As definições de juros simples e juros compostos serão vistas no Capítulo 3. Mas daremos alguns exemplos para provocar o raciocínio.

Exemplo 1.3. João tomou R\$ $1000,00$ emprestado de um banco com taxa de juros compostos de 6% ao mês. Se tiver que quitar sua dívida após 2 meses terá que pagar R\$ $1123,60$.

Por outro lado, quando uma família ou indivíduo apresenta mais receita do que despesas tem a oportunidade de investir e pode aumentar ainda mais os seus ganhos.

Exemplo 1.4. Pedro investiu R$ 1000,00 em um fundo de investimento que paga 8% ao ano sobre valor aplicado. Se Pedro resgatar o que investiu após 1 ano receberá R$ 1080,00.

Pode-se questionar o porquê de tanta diferença nas taxas de juros quando se toma emprestado e quando se investe. Uma das principais funções dos bancos comerciais é emprestar dinheiro. Para isso, eles arrecadam valores das pessoas por meio de poupanças e outras aplicações financeiras. Essa arrecadação tem um custo, conhecido como taxa de captação. Para cobrir suas despesas e obter lucro, os bancos, quando emprestam ou financiam, cobram taxas de juros maiores que essa taxa de captação. A diferença entre as duas taxas é chamada de *spread bancário*.

As explicações mais aceitas para grandes spreads estão relacionadas ao risco de inadimplência que as instituições têm ao emprestar dinheiro e aos grandes lucros almejados pelas mesmas. Isso se torna mais extremo quando se considera o uso do cheque especial e o cartão de crédito. Os juros chegam a passar, em média, de 300% ao ano no cheque especial e cartão de crédito. Quando se opta em pagar o valor mínimo de uma fatura de cartão de crédito, por exemplo, isso significa pegar um empréstimo com taxas de juros altíssimas.

O dinheiro tomado emprestado ou investido tem um preço e esse preço é a taxa de juros. Quando se investe em um fundo de aplicações financeiras de um banco, por exemplo, o que ocorre é um empréstimo à instituição que paga juros sobre o dinheiro investido de acordo com um período de tempo pré-estabelecido. Essa taxa paga é chamada de taxa nominal de juros. Entretanto, como ilustrado na Figura 3, este mesmo dinheiro captado pela instituição é oferecido a juros bem maiores a quem precisa de empréstimo.

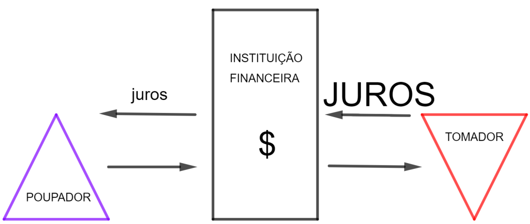


Figura 3 – A diferença entre juros pagos e juros cobrados.

Para que um investidor tenha consciência do real ganho de suas aplicações é importante que ele calcule a taxa real de juros.

Definição 1.5. ***Taxa Real de Juros***
É a taxa nominal de juros descontada a taxa de inflação.

Exemplo 1.5 Maria aplicou R$ 1000,00 em um investimento à taxa de 10% ao ano. Após 2 anos, com uma taxa de inflação de 5% ao ano, sacou R$ 1210,00. Seu capital aumentou 21%. Mas considerando a taxa de inflação, o valor de compra de seu dinheiro, na hora do saque, foi de R$ 1097,50. Ou seja, a taxa real de juros foi de 9,75% nos dois anos.

Vamos entender os valores expressos nesse exemplo, fazendo alguns cálculos básicos:

Se R$ 1000,00 são aplicados por dois anos à taxa de 10% ao ano, então

$$1000.(1+0,1).(1+0,1) = 1210.$$

Se a inflação, que segundo (PADOVEZE, 2007), é o aumento dos preços de vários bens e serviços que reduz o poder de aquisição da moeda, foi de 5% ao ano, então em dois anos a taxa foi de

$$(1+0,05).(1+0,05) = 1,1025.$$

Ou seja, uma taxa de inflação de 10,25% ao biênio.

Agora, considere x o valor, em reais, que capitalizado à taxa de 10,25% ao biênio atinge um montante de R$ 1210,00 após dois anos. Assim:

$$x.(1,1025) = 1210,00 \Rightarrow x \cong 1097,50.$$

Portanto, o poder de compra perdido por causa da inflação, provocou uma taxa real de juros de apenas 9,75% nos dois anos.

Poderíamos também ter calculado a taxa real de juros de uma outra maneira. Considerando i_r, i_n e i_f as taxas real, nominal e de inflação, respectivamente, basta fazermos:

$$1+i_r = \frac{1+i_n}{1+i_f} = \frac{1,21}{1,1025} \cong 1,0975 \Leftrightarrow i_r \cong 0,0975.$$

Ou seja, uma taxa real de juros de 9,75% ao biênio.

Saber distinguir entre rendimento nominal e rendimento real é fundamental para que se analisem as vantagens ou desvantagens de, por exemplo, se aplicar dinheiro na tradicional caderneta de poupança.

1.1.3 Caderneta de Poupança

A caderneta de poupança é uma forma de investimento de baixo risco cuja operação é regida por regras específicas estabelecidas pelo governo federal.

Existem duas regras para remuneração de acordo com a Medida Provisória 567 de 03 de maio de 2012 (convertida na lei 12.703 de 07 de agosto de 2012):

1) Para os depósitos anteriores à Medida Provisória a remuneração é a TR - Taxa Referencial (taxa mensal criada em 1991 para servir de referência para a taxa de juros no Brasil) mais 0,5 ponto percentual ao mês.

2) Para os depósitos posteriores à Medida Provisória a remuneração passa a ser de TR mais 70% da meta da taxa da Selic (taxa básica de juros - definida pelo Banco Central) sempre que a meta for igual ou menor que 8,5%. Caso a meta da taxa Selic seja superior a 8,5% a remuneração das cadernetas permanece como TR mais 0,5 ponto percentual ao mês.

O rendimento da poupança é calculado mensalmente de acordo com a data do depósito, ou seja, é capitalizado somente a cada 30 dias.

Exemplo 1.6. Quem aplicou R$ $1000,00$ na caderneta de poupança em 2 de janeiro de 2017 viu seu dinheiro crescer cerca de 6,61% em 31 de dezembro de 2017 e obteve um saldo aproximado de R$ $1066,10$ (Selic acima de 8,5% ao ano até setembro, de 8,15% ao ano em outubro, de 7,40% ao ano em novembro e dezembro e TR anual de 0,60%). Considerando que a inflação de 2017 foi de 2,95%, houve um ganho real de 3,55% sobre o valor investido. De fato, sendo i_r, i_n e i_f as taxas real, nominal e de inflação, respectivamente, basta fazermos:

$$1 + i_r = \frac{1 + i_n}{1 + i_f} = \frac{1,0661}{1,0295} \cong 1,0355 \Leftrightarrow i_r \cong 0,0355.$$

Ou seja, 3,55% de ganho real.

Mas nem sempre a caderneta de poupança gera lucros.

Exemplo 1.7. Quem aplicou R$ 1000, 00 na caderneta de poupança em 2 de janeiro de 2015 viu seu dinheiro crescer cerca de 8,15% em 31 de dezembro de 2015 e obteve um saldo aproximado de R$ 1081, 50 (Selic acima de 8,5% ao ano, durante todo o ano, e TR anual de 1,80%). Considerando que a inflação de 2015 foi de 10,67%, houve uma perda real de 2,28% sobre o valor investido em um ano. De fato, sendo i_r, i_n e i_f as taxas real, nominal e de inflação, respectivamente, basta fazermos:

$$1 + i_r = \frac{1 + i_n}{1 + i_f} = \frac{1,0815}{1,1067} \cong 0,9772 \Leftrightarrow i_r \cong -0,0228.$$

Ou seja, 2,28% de perda real.

A caderneta de poupança é considerada de baixo risco, pois até um determinado limite a pessoa tem seu investimento garantido pelo Fundo Garantidor de Créditos (associação civil que administra mecanismos de proteção a correntistas, poupadores e investidores). Essa proteção garante que, mesmo que a instituição financeira decrete falência, o investidor receba o dinheiro que aplicou até esse limite. A partir de maio de 2013, esse valor passou a ser de R$ 250.000, 00 por CPF. Além da caderneta de poupança, outras opções também são garantidas, como o crédito em conta corrente, CDB e RDB.

Os investimentos de baixo risco pagam taxas mais baixas porque é pequena a probabilidade de que o retorno obtido na aplicação seja diferente daquilo que é esperado.

Já os investimentos de risco requerem um pouco mais de estudo e disciplina financeira. Existem vários desse tipo, como o mercado de câmbio e os contratos futuros, mas buscaremos especialmente, nos próximos capítulos, destacar e entender o investimento no mercado de ações.

2 O SISTEMA FINANCEIRO

Este capítulo fornecerá uma explanação sobre o sistema financeiro no Brasil. Serão abordadas definições, evolução histórica e o modo organizacional, buscando localizar a posição do mercado de ações dentro desse sistema e estudar suas principais peculiaridades. A ideia é que, com uma linguagem simples e figuras ilustrativas, se obtenha o mínimo necessário de conhecimento para se utilizar o conceito de ações no âmbito da educação financeira. As principais referências usadas foram os livros (CAVALCANTI, 2009), (VIDOR, 2016) e (ASSAF NETO, 2008).

2.1 CICLO ECONÔMICO

Para entendermos melhor como age o mercado de ações é preciso primeiramente observar como se dá o funcionamento da economia em nossa sociedade moderna. Agentes econômicos tais como as famílias, as empresas e o governo interagem formando um ciclo de transferência de valores. As famílias entram com o trabalho, a renda e os capitais. As empresas produzem e fornecem o que as famílias necessitam ou desejam consumir e o governo taxa as famílias e as empresas por essas atividades. O ciclo é bem fechado quando os impostos cobrados pelo governo retornam em forma de melhorias na estrutura geral do país. Assim, como ilustrado na Figura 4, o desafio de qualquer economia de um país é aumentar sua potencialidade dentro deste ciclo e dar aberturas estratégicas em relação ao capital estrangeiro quando isso contribuir para a sociedade.

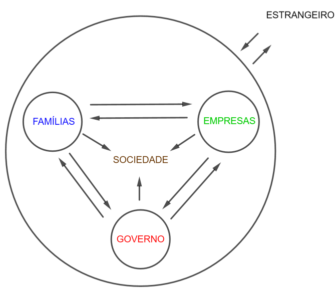


Figura 4 – Ciclo Econômico.

No entanto, apesar das diversas necessidades de consumo das famílias, existem aquelas que resolvem consumir menos para guardar seu dinheiro, preocupadas com o cenário futuro. Neste exercício de controle surge o conceito de poupança, que pode ser feito de várias formas. Inversamente a isso existem aquelas famílias que consomem além de suas condições financeiras e se tornam devedoras dentro dessa engrenagem econômica. Essas famílias chamadas de agentes deficitários já são maioria no Brasil.

Entretanto, se uma família deixou de comprar para poupar, esse valor guardado poderia estar disponível para investimento e até mesmo para ser usado pelos que estão endividados. A grande dificuldade é ajustar os valores poupados com os valores necessitados, pois 1 real poupado não soluciona o problema de quem deve 2 reais.

No intuito de organizar essa situação surgiram instituições especializadas em intermediar a relação entre poupadores e deficitários. Tomando emprestado dos que poupam e emprestando para os que devem, como ilustrado na Figura 5. Com o tempo essas instituições foram se desenvolvendo e oferecendo outros serviços, instrumentos e organizações do mercado.

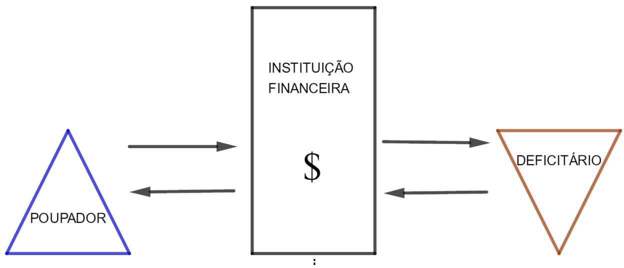


Figura 5 – Relação entre poupador e deficitário.

Portanto, podemos estabelecer a seguinte definição:

Definição 2.1. ***Sistema Financeiro***
É o conjunto de instituições e instrumentos que viabilizam o fluxo financeiro entre poupadores e os tomadores na economia.

Esse sistema reduz o risco de colapso no ciclo econômico e se aprimora através das peculiaridades das demandas financeiras. É baseado, principalmente, em quatro mercados financeiros (ilustrado na Figura 6): mercado de crédito, mercado monetário, mercado de câmbio e mercado de capitais.

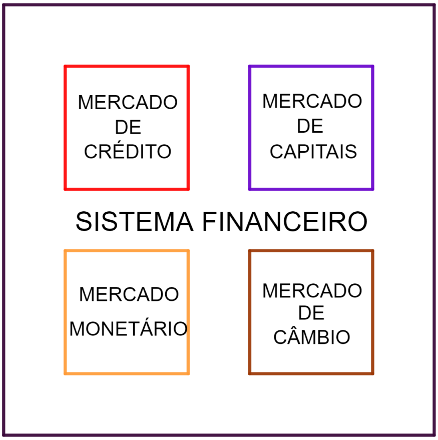


Figura 6 – Os mercados do sistema financeiro.

Geralmente, o cidadão comum brasileiro tem mais familiaridade ou é induzido ao mercado de crédito e por isso as suas atitudes econômicas giram mais em torno da caderneta de poupança tradicional, financiamentos ou empréstimos.

No que se segue, trataremos do mercado de capitais, especificamente os títulos de capitais (ações), com o intuito de promover esclarecimentos e fazer disso uma ferramenta de educação financeira para alunos do ensino básico.

2.1.1 Mercado de Capitais

Definição 2.2. ***Mercado de Capitais***
Mercado de capitais é o segmento do mercado financeiro em que são criadas as condições para que as empresas captem recursos diretamente dos investidores, através da emissão de instrumentos financeiros.

Para compreendermos o mercado de capitais é importante destacar as diferenças entre ele e o mercado de crédito. No mercado de crédito há uma intermediação de instituições financeiras que assumem riscos no processo de captação de empréstimo de recursos. Já no mercado de capitais, como ilustrado na Figura 7, os recursos são transferidos diretamente entre as partes envolvidas. As instituições, nesse processo, atuam como prestadoras de serviço (assessorando, estruturando as operações, distribuindo valores, etc.)

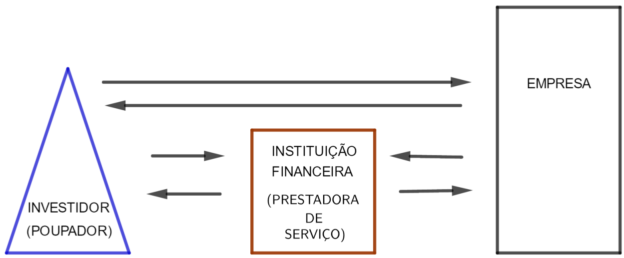


Figura 7 – O mercado de capitais.

Quando, no mercado de capitais, um investidor empresta seus recursos, ele obtém títulos que representam as condições firmadas no negócio. Esses títulos são chamados de valores mobiliários (que definiremos detalhadamente mais adiante). Existem títulos de dívidas e patrimoniais ou de capitais. O título de capital torna o investidor em sócio do negócio com os mesmos direitos e deveres. O mais comentado título de capital em noticiários, mas nem por isso bem conhecido, é o de *ações*.

Para que haja *ações* disponíveis no mercado é necessário que, por exemplo, uma empresa opte pelo uso do mercado de capitais como fonte de captação de recursos, abrindo seu capital e emitindo títulos a serem negociados publicamente em bolsa de valores. Esses investimentos são considerados de risco, pois o próprio investidor assume as incertezas pela participação no empreendimento, já que as instituições financeiras atuam como prestadoras de serviços.

Até 1964, no Brasil, pouco se investia em títulos públicos ou privados. A partir desse ano houve importantes reformas econômicas no cenário brasileiro. Com edição de novas leis ocorreu a reestruturação do mercado financeiro. As mais importantes dessas leis foram a Lei 4.537/64 que instituiu a correção monetária, a Lei 4.595/64 que reformulou o sistema de intermediação financeira e a Lei 4.728/65 que disciplinou e definiu medidas para a evolução do mercado de capitais.

Incentivos foram dados, em 1967, para que as pessoas investissem no mercado acionário, como a utilização, de parte do imposto de renda devido, na aquisição de quotas de fundos de ações de companhias abertas. Assim, houve uma grande demanda por ações e intensa especulação financeira entre 1970 e 1971. No decorrer do tempo outros incentivos foram dados, como isenção fiscal de alguns ganhos obtidos nas operações. Mas apesar das tentativas governamentais de estimular o mercado positivamente, na década de 70 não se obteve os retornos esperados. No final dos anos 80 ocorreu com mais vigor o processo de internacionalização do mercado e em meados dos anos 90 o investimento estrangeiro começou a atuar com mais participação no mercado de capitais brasileiro.

Isso provocou uma relação maior entre investidores acostumados com valores mobiliários fora do Brasil e o mercado interno brasileiro. Maiores exigências dos investidores sobre a segurança das operações fomentaram a criação da Lei 10.303/01, que dispõe sobre os valores mobiliários, e a formação do Novo Mercado pela BM&FBOVESPA.

Portanto, por trás do mercado de capitais existem leis, fiscalizações e um operador que asseguram a regularidade dos processos envolvidos.

Segundo o Banco Central do Brasil, o órgão normativo (responsável pela definição de políticas e diretrizes gerais do sistema financeiro nacional) do mercado de capitais é o Conselho Monetário Nacional (CMN). Este órgão foi criado pela Lei 4595/64 com o objetivo de promover progresso econômico no Brasil e é composto atualmente por três membros: Ministro da Fazenda (Presidente), Ministro do Planejamento e Presidente do Banco Central.

Já a entidade supervisora (responsável por fiscalizar e exercer funções executivas) do mercado de capitais é a Comissão de Valores Mobiliários (CVM), autarquia federal criada em 1976 pela Lei 6.385 com a incumbência de disciplinar e desenvolver o mercado de valores mobiliários.

2.1.2 Valor Mobiliário

A lei que vigora atualmente no Brasil e que regulariza e expressa o que são valores mobiliários é a Lei 10.303/01. Segundo o artigo 2° desta lei são valores mobiliários:

I - as ações, debêntures e bônus de subscrição;

II - os cupons, direitos, recibos de subscrição e certificados de desdobramento relativos aos valores mobiliários referidos no inciso II;

III - os certificados de depóstitos de valores mobiliários;

IV - as cédulas de debêntures;

V - as cotas de fundos de investimento em valores mobiliários ou de clubes de investimento em quaisquer ativos;

VI - as notas comerciais;

VII - os contratos futuros, de opções e outros derivativos, cujos ativos subjacentes sejam valores mobiliários;

VIII - outros contratos derivativos independentemente dos ativos subjacentes; e

IX - quando ofertados publicamente, quaisquer títulos ou contratos de investimento coletivo que gerem direito de participação, de parceria ou remuneração, inclusive resultante da prestação de serviços, cujos rendimentos advém do esforço de empreendedor ou de terceiros.

Podemos perceber que há vários tipos de valores mobiliários, mas nosso interesse nesse trabalho é estudar especificamente o título emitido por companhia chamado *ação*.

2.1.2.1 Ações

Definição 2.3. ***Ação***
Ação é a menor parcela do capital social das companhias ou sociedades por ações que concede aos seus titulares todos os direitos e deveres de um sócio, no limite das ações possuídas.

As ações são principalmente escriturais, sem emissão de comprovantes físicos, mantidas em contas de instituições financeiras (prestadoras de serviços) contratadas pelas empresas que ofertam esses títulos e negociadas em bolsa de valores. Os dois principais tipos de ações são:

Ação Ordinária (ON): Confere ao titular o direito a voto nas assembléias de acionistas.

Ação Preferencial (PN): Geralmente não dá direito a voto, mas garante prioridade na distribuição de dividendos ou no reembolso de capital.

O retorno financeiro oriundo da posse de ações é, geralmente, obtido de três formas: com o aumento do valor de mercado das ações, com os dividendos (parte do lucro de uma empresa distribuídos em dinheiro), sem cobrança de impostos e com os juros sobre o capital próprio, com cobrança de 15% de imposto de renda sobre o valor a receber. Esses valores a serem distribuídos aos acionistas dependem de uma série de fatores que envolvem o desempenho da empresa.

Exemplo 2.1. Quem possuía 800 ações, no valor de R\$ 19, 35 cada, da empresa Suzano Papel e Celulose SA em 24/11/17 (data de aprovação dos pagamentos), recebeu R\$ 124, 44 em 11/12/17, referente aos juros sobre o capital próprio. Com as mesmas 800 ações, já no valor unitário de R\$ 33, 45 em 28/03/18 (data de aprovação dos pagamentos), o titular dessas ações recebeu, em relação a dividendos, a quantia de R\$ 153, 78 em 09/05/18.

O que chama mais a atenção no Exemplo 2.1 é a variação do valor da ação da Suzano em apenas quatro meses. De R\$ 19, 35 para R\$ 33, 45. Uma variação de aproximadamente 72,87%. Isso se deu pela notícia da suposta fusão entre as empresas Suzano e Fibria Celulose SA. Assim, a Suzano tornar-se-ia uma gigante global no mercado de celulose e consequentemente suas ações dispararam.

A variação dos valores das ações de uma empresa é responsável pelos ganhos ou prejuízos de um investidor. A qualquer momento, as ações podem ser colocadas a venda, de acordo com os interesses de quem a possui.

Exemplo 2.2. Quem comprou 400 ações da JBS SA em 11/07/17 por R\$ 6, 50 cada e as vendeu em 02/10/18 obteve lucro de 43,08%, pois as mesmas chegaram a valer R\$ 9, 30 nessa data. Nesse caso, houve retomada nos valores das ações após os problemas envolvendo o dono da empresa e o então Presidente da República em um escândalo político.

Exemplo 2.3. Quem adquiriu 500 ações da Wiz Soluções e Corretagem de Seguros por R\$ 10, 98 em 02/03/18 e as vendeu por R\$ 8, 05 em 02/10/18 amargou prejuízo de 26,68%. A desvalorizão das ações se deu principalmente pela não conclusão dos acordos de negócios da empresa com a Caixa Econômica Federal.

Observando os Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3 reforçamos a ideia de que os resultados de um investimento em ações estão fortemente ligados ao modo de gestão das empresas, aos condicionamentos gerais da economia interna/externa e ao retrato da política vigente.

Mas para que todas essas transações exemplificadas ocorram com eficiência é necessário um operador do mercado de capitais que, no Brasil, é a Bolsa de Valores B3. Entidade que além de toda função de organizar, manter, controlar e garantir sistemas ideais para as negociações, serve de termômetro da economia da nação.

2.2 BOLSA DE VALORES

Definição 2.4. ***Bolsa de Valores***
É um mercado organizado que funciona regularmente como sistema centralizado e multilateral de negociação e que possibilita o encontro e a interação de ofertas de compra e de venda de valores mobiliários.

A criação da primeira Bolsa de Valores do mundo, no sentido mais próximo de como a conhecemos foi, provavelmente, na cidade de Bruges, na Bélgica em 1487. Comerciantes reuniam-se nesta cidade na casa de um senhor chamado Van der Burse para negociar.

No Brasil, por muitos séculos, as negociações foram realizadas por corretores que aliciavam compradores e vendedores pelas ruas. Apenas em 1845, na cidade do Rio de Janeiro, criou-se um lugar fixo para a sede de uma bolsa de valores no Brasil. Em 1895 foi fundada a Bolsa de Fundos Públicos de São Paulo, mas em 1967 passou a ser chamada de Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA). A partir daí várias bolsas foram criadas e se espalharam pelo país.

No entanto, em 2000, um acordo de unificação estabeleceu a Bovespa como a Bolsa do Brasil.

Já em 2008, houve a fusão entre a Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) e a Bovespa, originando a BM&FBOVESPA. E recentemente, em 2017, houve a fusão da BM&FBOVESPA com a CETIP (Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos), criando a B3, uma das maiores bolsas de mercado de capitais do mundo.

Existem três fases de negociações na bolsa de valores:

- A pré-negociação, que abrange os serviços de informação ao mercado e as vendas de sinais e cotações.

- A negociação, onde os investidores mediante as corretoras (instituições prestadoras de serviços) enviam suas ordens de compra ou venda para o pregão eletrônico.

- E a pós-negociação, onde ocorrem a compensação, a liquidação e a custódia.

Contudo, é o preço real de uma ação que atrai ou afasta um determinado investidor. Assim, a divulgação e a análise técnica da ação é de suma importância para uma tomada de decisão. A introdução de índices (indicadores de desempenho de um conjunto de ações) como o cálculo da média ponderada das ações, na década de 70, inovou o cotidiano do mercado. Hoje o Ibovespa é o principal índice utilizado e envolve cálculos mais complexos que a média ponderada.

A matemática atrelada ao mercado de ações será o assunto do Capítulo 3.

3 BASES DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Neste capítulo utilizaremos como referências básicas os livros (QUANDT, 2010) e (ASSAF NETO, 2012). Trataremos de noções básicas referentes à matemática financeira, propondo o conhecimento de técnicas de cálculos relacionados a juros e o entendimento dos principais conceitos que envolvem negociações com dinheiro. Além de situações clássicas serão dados exemplos que habituem o leitor com o mercado de ações.

3.1 NOÇÕES BÁSICAS

É no vasto território de busca por recompensa mediante um capital investido ou emprestado que se assenta a matemática financeira. Quando um dinheiro é investido ou emprestado por um determinado tempo ocorrem práticas de remunerações e atualizações. Essas práticas são os juros (Definição 1.4).

Assim, os elementos básicos que envolvem juros, podem ser definidos como:

Definição 3.1. ***Capital Inicial ou Principal***
É a quantia de dinheiro envolvida (investida ou emprestada) no início da operação financeira.

Definição 3.2. ***Montante***
É o total de dinheiro relativo ao empréstimo em um momento posterior ao início do processo.

Definição 3.3. ***Taxa de Juros***
É o percentual incidente sobre o capital inicial (juros simples) ou sobre o capital atualizado (juros compostos) por um período de tempo determinado.

Denotaremos, a partir daqui, juros por J, capital inicial por C, montante por M, taxa de juros por i e período de tempo por t.

Exemplo 3.1. Uma aplicação de R\$ $900,00$, na caderneta de poupança, rendeu R\$ $5,40$ de juro em um mês. Qual a taxa de juros mensal correspondente?

Solução: Seja i a taxa de juros em um mês.

Temos que $C = 900$ e $J = 5,40$. Logo

$$i = \frac{J}{C} = \frac{5,40}{900} = 0,006.$$

Portanto, a taxa foi de $0,6\%$ em um mês.

Exemplo 3.2. Quem comprou 400 ações, a R$ 3,90 cada, da empresa CCX Carvão da Colômbia S.A no dia 08/11/18 investiu R$ 1575,93 (incluído R$ 15,93 de custos operacionais). Se o comprador vendeu essas mesmas ações, em 16/11/18 a R$ 5,33 cada, recebeu R$ 2114,09 (já descontado R$ 17,91 de custos operacionais). Qual o percentual de rendimento desse investimento?
Solução: Temos que $C = 1575,93$ e $J = (2114,09 - 1575,93) = 538,16$. Logo,

$$i = \frac{J}{C} = \frac{538,16}{1575,93} \cong 0,3415.$$

Portanto, o rendimento foi de $34,15\%$ em uma semana.

Observação 3.1. É bom frisar que, no Exemplo 3.2, o investimento é a própria compra das ações, onde o comprador se torna sócio da empresa e a remuneração não é fixada, podendo haver prejuízo ao invés de ganho.

De fato, se o investidor tivesse esperado um mês para vender suas ações da CCXC3, não teria lucrado absolutamente nada. Basta olharmos a Figura 8 para termos essa conclusão.

Figura 8 – O preço da ação CCXC3 após um mês de sua compra.
Disponível em: http://www.google.com.br (CCXC3). Acesso em: 26 dez. 2018.

Compra e venda de ações em curto prazo, como mostrado no Exemplo 3.2, são práticas dos chamados *traders*. São investidores que especulam o mercado na busca de alta rentabilidade em poucas horas (day trade) ou em algumas semanas (swing trade). Day trade não é aconselhável para quem está começando a investir em ações, sendo um campo explorado por traders profissionais, que acompanham as variações de preços continuamente. Já quem opera swing trade, estuda tendências de mercado, faz análise de gráficos e histórico de cotações antes de tomar alguma decisão. Tendências de alta e de baixa no preço de ações será assunto da Subseção 3.5.3 deste capítulo.

Observação 3.2. No Exemplo 3.1 a taxa de juros em relação ao tempo está bem estabelecida, pois aplicações em caderneta de poupança são capitalizadas a cada mês com juros pré-fixados. Já no Exemplo 3.2 a taxa de juros foi eventual, pois não se pode prever com total segurança as variações que ocorrem no valor de uma ação. Muitos fatores influenciam o comportamento dos investidores no sentido de comprarem ou venderem e isso compromete o preço de uma ação. Essas alterações podem acontecer a cada momento durante o horário de pregão da Bolsa de Valores.

Outro fato importante é que a taxa de juros sempre estará associada a um determinado período de tempo. As taxas mais comuns são as anuais (a.a. - ao ano), as mensais (a.m. - ao mês), as diárias (a.d. - ao dia), as bimestrais (a.b. - ao bimestre), as trimestrais (a.t. - ao trimestre) e as semestrais (a.s. - ao semestre).

Podemos determinar expressões matemáticas que relacionem montante, capital, taxa de juros e período de tempo. Assim será fácil resolver vários problemas de ordem financeira.

3.2 JUROS SIMPLES

No regime de juros simples os juros são calculados apenas sobre o capital inicial a cada período de tempo a que se refere a uma taxa fixada. Assim, dados um capital inicial C e uma taxa i referente a um período de tempo t, a cada intervalo de tempo t o capital é acrescido de iC juros. Temos assim:

Data inicial	$M_0 = C$
Após 1 período de capitalização	$M_1 = C + iC = C(1+i)$
Após 2 períodos de capitalização	$M_2 = C(1+i) + iC = C(1+2i)$
Após 3 períodos de capitalização	$M_3 = C(1+2i) + iC = C(1+3i)$
$\vdots$	$\vdots$
Após n períodos de capitalização	$M_n = C(1+ni)$

Observação 3.3. Os sucessivos valores de M são os termos de uma progressão aritmética de razão iC e primeiro termo C. Logo, graficamente, os pontos do plano de coordenadas $(0, M_0), (1, M_1), (2, M_2), (3, M_3)$, etc., estão em linha reta.

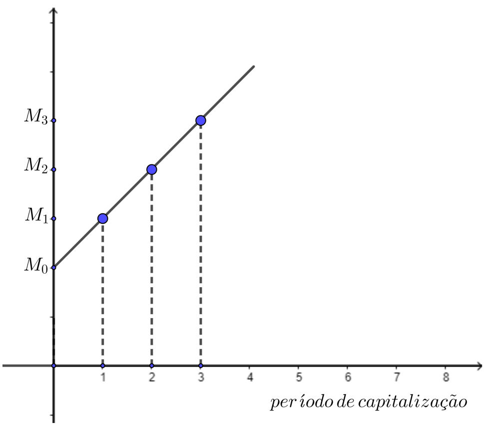


Figura 9 – O gráfico de uma capitalização simples.

Assim, se $M = C(1+ni)$ então

$$J = M - C = Cni,$$

sendo n o número de períodos de capitalização, tal que esse período se refere à taxa. Portanto, se a taxa é mensal, n deve ser o número de meses do processo de capitalização; se a taxa é anual, n deve ser expresso em anos e assim por diante.

Exemplo 3.3. Qual o total de juros a serem pagos pelo atraso de dois meses de uma dívida de R\$ 1500,00, à taxa de 0,33% a.d., com capitalização simples?

Solução: Temos que $C = 1500$, $i = 0,0033$, $n = 60$. Logo

$$J = 1500 \cdot 60 \cdot 0,0033 = 297.$$

Portanto, o total de juros é de R\$ $297,00$.

Observação 3.4. Para efetuar os cálculos no Exemplo 3.3, a taxa foi colocada na forma decimal e os meses foram convertidos em dias considerando a convenção matemática de mês comercial de 30 dias. Isso foi necessário pois a taxa era diária.

Os juros simples têm aplicações práticas restritas. Seu uso limita-se principalmente às operações de curto prazo, sendo utilizados, basicamente, para o cálculo de valores monetários. Um exemplo onde isso ocorre é na cobrança de juros de mora por atraso de pagamento. Geralmente o valor do juros de mora é cobrado mediante um tempo de capitalização que não é um múltiplo inteiro do período de referência, portanto é necessário introduzir nos cálculos uma taxa equivalente à taxa fixada que esteja de acordo com o tempo transcorrido. Por isso, antes de darmos exemplos dessa situação, vamos estabelecer o que são taxas equivalentes no regime de juros simples.

Definição 3.4. ***Taxas Equivalentes (Juros Simples)***
Dizemos que duas taxas de juros i_1 e i_2 referidas respectivamente a períodos p_1 e p_2, são equivalentes se, para um intervalo de tempo $T = n_1p_1 = n_2p_2$, as duas taxas produzem os mesmos juros, qualquer que seja o capital inicial C.

Afirmamos que as taxas equivalentes em regime de juros simples são proporcionais.

De fato, se i_1 e i_2 são equivalentes, então $Cn_1i_1 = Cn_2i_2$ e portanto $\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$. Mas da definição temos que $\frac{n_2}{n_1} = \frac{p_1}{p_2}$, de modo que $\frac{i_1}{i_2} = \frac{p_1}{p_2}$, ou $\frac{i_1}{p_1} = \frac{i_2}{p_2}$.

Portanto, no regime de juros simples, duas taxas equivalentes são proporcionais.

Exemplo 3.4. Qual a taxa mensal equivalente (para juros simples) à taxa de 6% a.a.?

Solução: Seja i_m a taxa mensal pedida.

Como o ano tem 12 meses, segue que

$$\frac{i_m}{1} = \frac{0,06}{12} \Rightarrow i_m = 0,005 \text{ ou } 0,5\%\, a.m.$$

Exemplo 3.5. Se uma prestação de R\$ 197,00 é paga com 5 dias de atraso, e os juros de mora são cobrados à taxa de 6% a.m., em regime de juros simples, qual o valor pago?

Solução: Seja i_d a taxa diária equivalente.
Considerando o mês comercial de 30 dias, segue que

$$\frac{i_d}{1} = \frac{0,06}{30} \Rightarrow i_d = 0,002.$$

Assim, sendo $M = C(1 + ni)$, temos

$$M = 197 \cdot (1 + 5(0,002)) = 198,97.$$

Ou seja, o valor pago é de R\$ 198,97.

Exemplo 3.6. Um boleto bancário foi pago com 4 dias de atraso e por isso foram cobrados juros de mora de 9% a.m. Se o valor pago foi de R\$ 161,92, qual o valor original do boleto?

Solução: Seja i_d a taxa diária equivalente.
Considerando o mês comercial de 30 dias, segue que

$$\frac{i_d}{1} = \frac{0,09}{30} \Rightarrow i_d = 0,003.$$

Assim, sendo $M = C(1 + ni)$, temos

$$161,92 = C(1 + 4(0,003)) \Rightarrow C = 160.$$

Ou seja, o valor original era de R\$ 160,00.

Exemplo 3.7. Um boleto bancário no valor de R\$ 150,00 foi pago com 8 dias de atraso e por isso foram cobrados acréscimos. Se houve uma multa por atraso de 2% sobre a dívida e juros de mora de 3% a.m., quantos reais foram pagos no total?

Solução: Vamos calcular primeiramente o valor da multa:

$$\frac{2}{100} \cdot 150 = 3.$$

Agora, seja i_d a taxa diária equivalente. Considerando o mês comercial de 30 dias, segue que

$$\frac{i_d}{1} = \frac{0,03}{30} \Rightarrow i_d = 0,001.$$

Assim, sendo $J = Cni$, segue que

$$J = 150 \cdot 8 \cdot 0,001 = 1,2.$$

Portanto, foram pagos no total: $150 + 3 + 1,2 = 154,2$.
Ou seja, R\$ $154,20$.

Exemplo 3.8. No dia 01/11/18 Pedro emprestou R\$ $1100,00$ a seu irmão por 1 mês à taxa de juros de 10% a.m. No mesmo dia Pedro também comprou 100 ações da Companhia Energética de Minas Gerais por R\$ $1100,00$. Após os 30 dias, Pedrou recebeu o que havia emprestado acrescido dos juros e vendeu suas ações por R\$ $1250,00$. Qual investimento obteve o maior retorno financeiro?

Solução: Vamos calcular o valor do empréstimo acrescido dos juros:

$$M = 1100(1 + 1 \cdot 0,1) = 1210.$$

Logo, a venda das ações obteve o maior retorno financeiro.

Como dito antes, o regime de juros simples tem aplicações restritas, pois capitaliza apenas o capital inicial. Na próxima seção abordaremos os chamados juros compostos, usados de maneira ampla no sistema financeiro.

3.3 JUROS COMPOSTOS

O valor do dinheiro está relacionado ao tempo. Se o dinheiro estiver "embaixo do colchão" não renderá juros e, inevitavelmente perderá o seu poder de compra. Isso acontece no regime de juros simples quando o período de tempo não é curto. Suponha que 100 reais são emprestados por dois meses à taxa de 10% ao mês. Um mês após o empréstimo, a dívida de juros é de 10 reais. Mas esse valor ficará sem capitalização (parado) e ao final do segundo mês a dívida de juros será de 20 reais, ou seja, a dívida total será de 120 reais. Se os juros do primeiro mês fossem capitalizados (dinheiro não parado), à mesma taxa, obter-se-ia ao final do segundo mês, um valor total de 121 reais.

Essa é a ideia de juros compostos, ou popularmente chamados juros sobre juros, pois a cada período de capitalização a que se refere a taxa, os juros são incorporados ao montante e sobre eles passam a incidir juros nos períodos subsequentes.

Na capitalização em juros compostos os montantes são relativos a cada período de capitalização. Se $M_0 = C$ é o capital inicial e M_n é o montante correspondente após n períodos de capitalização à taxa i, temos que:

Data inicial	$M_0 = C$
Após 1 período de capitalização	$M_1 = C(1+i)$
Após 2 períodos de capitalização	$M_2 = C(1+i)^2$
Após 3 períodos de capitalização	$M_3 = C(1+i)^3$
$\vdots$	$\vdots$
Após n períodos de capitalização	$M_n = C(1+i)^n$

Portanto, no regime de juros compostos, o montante gerado após n períodos de capitalização à taxa i é dado por

$$M_n = C(1+i)^n.$$

Observação 3.5. Os sucessivos montantes de uma capitalização composta são os termos de uma progressão geométrica de razão $1+i$ e primeiro termo $M_0 = C$. Portanto, se ligarmos os pontos do plano de coordenadas $(0, M_0), (1, M_1), (2, M_2), (3, M_3)$, etc., formamos o gráfico de uma função exponencial.

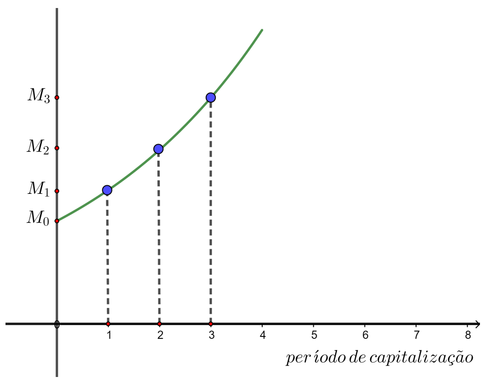


Figura 10 – O gráfico de uma capitalização composta.

Podemos também, como no regime de capitalização simples, obter uma expressão para os juros na capitalização composta, fazendo a diferença entre o montante e o capital aplicado em n períodos de capitalização:

$$J_n = M_n - C = C(1+i)^n - C = C((1+i)^n - 1).$$

Exemplo 3.9. Se um capital de R\$ $1500,00$ é depositado por 6 meses em uma caderneta de poupança à taxa de $0,5\%$ a.m., qual será o montante?

Solução: Temos que $C = 1500$, $i = 0,005$, $n = 6$.
Assim, sendo $M_n = C(1+i)^n$, temos

$$M_6 = 1500(1+0,005)^6 \cong 1545,57.$$

Portanto, o montante será de R\$ $1545,57$.

Exemplo 3.10. Um poupador quer investir por 2 anos em CDB (Certificado de Depósito Bancário) à taxa de 10% a.a. Se o montante esperado pelo poupador é de R\$ $5000,00$, sem considerar o imposto de renda, qual o capital que deve ser investido?

Solução: Temos que $M_2 = 5000$, $i = 0,1$, $n = 2$.
Assim, sendo $M_n = C(1+i)^n$, temos

$$5000 = C(1+0,1)^2 \Rightarrow C \cong 4132,23.$$

Portanto, o capital deve ser de R\$ $4132,23$.

Exemplo 3.11. Quantos meses, aproximadamente, serão necessários para que R\$ $998,00$ produzam um montante de R\$ $1100,00$ quando aplicados em uma caderneta de poupança à taxa de de $0,5\%$ a.m.?

Solução: Temos que $M_n = 1100$, $i = 0,005$, $C = 998$.
Assim, sendo $M_n = C(1+i)^n$, temos

$$\begin{array}{rcl} 1100 & = & 998(1+0,005)^n \\ (1,005)^n & \cong & 1,102204409 \\ n\log(1,005) & \cong & \log(1,102204409) \\ n & \cong & \dfrac{\log(1,102204409)}{\log(1,005)} \\ n & \cong & 19,51. \end{array}$$

Portanto, serão necessários, aproximadamente, 20 meses.

Exemplo 3.12. Um poupador fez dois investimentos em janeiro de 2018. Aplicou R$ 2000,00 na caderneta de poupança e comprou 200 ações das Industrias Romi SA por R$ 1500,00. Após um ano foi sacado o montante de R$ 2123,36 gerado na poupança e vendidas as ações por R$ 1600,00. Qual investimento teve o maior rendimento em relação ao capital aplicado?

Solução: Basta compararmos a taxa de juros de cada investimento:

Em relação à poupança temos:

$$i = \frac{J}{C} = \frac{123,36}{2000} = 0,06168 \,\text{ou}\, 6,168\%.$$

Em relação às ações temos:

$$i = \frac{J}{C} = \frac{100}{1500} \cong 0,06666 \,\text{ou}\, 6,666\%.$$

Portanto, as ações tiveram maior rendimento.

Chamamos novamente a atenção para o fato de que, em relação às ações, não há capitalização pré-estabelecida, e sim uma valorização ou desvalorização do título, diferentemente da poupança que estabelece capitalizações bem previsíveis. Para efeito de cálculo e comparação, vamos verificar qual foi a taxa de juros mensal em relação ao investimento na caderneta de poupança do exemplo acima:

Seja i_m a taxa mensal pedida.
Usando a fórmula dos juros compostos temos:

$$\begin{aligned}
2123,36 &= 2000(1+i_m)^{12} \\
(1+i_m)^{12} &= 1,06168 \\
(1+i_m) &= \sqrt[12]{1,06168} \\
(1+i_m) &\cong 1,005000173 \\
i_m &\cong 0,005000173.
\end{aligned}$$

Portanto, a taxa mensal da caderneta de poupança foi de aproximadamente $0,5\%$.

Comparando as taxas mensal e anual da caderneta de poupança do Exemplo 3.12 constatamos que elas não são proporcionais. De fato, no regime de juros compostos as taxas equivalentes são associadas de outro modo.

Definição 3.5. ***Taxas Equivalentes (Juros Compostos)***
Dizemos que duas taxas de juros i_n e i_k referidas respectivamente a períodos p_n e p_k, são equivalentes se, a partir do mesmo capital inicial, produzirem o mesmo montante, no mesmo espaço de tempo.

Seja C um capital qualquer, T um espaço de tempo e i_n e i_k duas taxas. Seja i_n referida a um período p_n, de forma que $T = np_n$ e i_k referida a um período p_k, de modo que $T = kp_k$, com n e k inteiros. Portanto, se i_n e i_k são equivalentes, geram o mesmo montante, logo:

$$\begin{aligned} C(1+i_n)^n &= C(1+i_k)^k \\ (1+i_n)^n &= (1+i_k)^k \\ 1+i_n &= (1+i_k)^{\frac{k}{n}} \\ i_n &= (1+i_k)^{\frac{k}{n}} - 1. \end{aligned}$$

Exemplo 3.13. Qual a taxa bimestral equivalente à taxa de 10% a.m.?
Solução: Seja i_b a taxa bimestral pedida.

Como a taxa bimestral é aplicada uma vez enquanto a mensal é aplicada duas vezes, temos

$$\begin{aligned} (1+i_b)^1 &= (1+0,1)^2 \\ (1+i_b) &= 1,21 \\ i_b &= 0,21. \end{aligned}$$

Portanto, a taxa bimestral equivalente é 21% a.b.

Exemplo 3.14. Qual a taxa anual equivalente à taxa de 1% a.m.?

Solução: Seja i_a a taxa anual pedida. Como a taxa anual é aplicada uma vez, enquanto a mensal é aplicada doze vezes, temos:

$$\begin{aligned} (1+i_a)^1 &= (1+0,01)^{12} \\ (1+i_a) &\cong 1,12682503 \\ i_a &\cong 0,12682503. \end{aligned}$$

Portanto, a taxa anual equivalente é $12,68\%$ a.a.

Observação 3.6. Se houver mudança nas taxas de juros durante o processo, podemos calcular uma taxa média relacionada, ou seja, uma taxa que produziria o mesmo montante final.

Exemplo 3.15. Um capital C é aplicado na caderneta de poupança, durante um ano, à taxa de $0,6\%$ ao mês nos 3 primeiros meses e à taxa de $0,5\%$ ao mês no restanto do tempo. Qual a taxa mensal média do investimento?

Solução: Sejam M_3 o montante gerado nos 3 primeros meses e M_{12} o montante final.
Temos que $M_3 = C(1+0,006)^3$. Logo, este montante será capitalizado no restante do tempo à taxa de $0,5\%$ a.m.
Assim, $M_{12} = C(1+0,006)^3(1+0,005)^9$.
Sendo i a taxa média, devemos ter

$$\begin{aligned}
C(1+i)^{12} &= C(1+0,006)^3(1+0,005)^9 \\
(1+i)^{12} &= (1,006)^3(1,005)^9 \\
(1+i) &= (1,006)^{\frac{1}{4}}(1,005)^{\frac{3}{4}} \\
(1+i) &= [(1,006)(1,005)^3]^{\frac{1}{4}} \\
(1+i) &\cong 1,005249907 \\
i &\cong 0,005249907.
\end{aligned}$$

Portanto, a taxa média é de aproximadamente $0,52\%$ a.m.

Exemplo 3.16. Um capital de R\$ 2100,00 é aplicado na caderneta de poupança à taxa de $0,5\%$ a.m. por 9 meses. Após esse tempo o montante gerado é usado na compra de 300 ações da empresa EcoRodovias. Depois de 3 meses as mesmas ações são vendidas por R\$ 2750,00. Se o capital continuasse na poupança, qual deveria ser a taxa mensal média para gerar o mesmo valor da venda das ações?

Solução: Sejam M_9 o montante gerado nos 9 primeros meses e M_{12} o montante final.
Temos que $M_9 = 2100(1+0,005)^9 \cong 2196,41$. Logo, este valor é o novo capital que deve gerar M_{12}.
Seja i_3 a taxa mensal após os 9 primeiros meses.
Assim, $2750,00 = 2196,41(1+i_3)^3 \Leftrightarrow i_3 \cong 0,077803924$.
Sendo i a taxa média, devemos ter

$$\begin{aligned}
C(1+i)^{12} &= C(1+0,005)^9(1+0,077803924)^3\\
(1+i)^{12} &= (1,005)^9(1,077803924)^3\\
(1+i) &= (1,005)^{\frac{3}{4}}(1,077803924)^{\frac{1}{4}}\\
(1+i) &= [((1,005)^3(1,077803924)]^{\frac{1}{4}}\\
(1+i) &\cong 1,022726446\\
i &\cong 0,022726446.
\end{aligned}$$

Portanto, a taxa média deveria ser de $2,2726\%$ a.m.

Exemplo 3.17. Se uma prestação de R$ 200,00 é paga com 15 dias de atraso, e os juros de mora são cobrados à taxa de 6% a.m., em regime de juros simples, qual o valor pago? E se fossem cobrados em regime de juros compostos?

Solução: Sejam i_1 a taxa de juros diária equivalente em capitalização simples e i_2 a taxa de juros diária equivalente em capitalização composta.
Assim, para o regime de juros simples e considerando o mês comercial de 30 dias, segue que

$$\frac{i_1}{1} = \frac{0,06}{30} \Rightarrow i_1 = 0,002.$$

Logo,

$$M = 200(1 + 15(0,002)) = 206,00.$$

Para o regime de juros compostos segue que

$$(1+i_2)^{30} = (1+0,06)^1 \Leftrightarrow (1+i_2) \cong 1,001944184 \Leftrightarrow i_2 \cong 0,001944184.$$

Logo,

$$M = 200(1 + 0,001944184)^{15} \cong 205,91.$$

Portanto, no regime de juros simples o valor cobrado seria de R$ 206,00 e no de juros compostos R$ 205,91.

Exemplo 3.18. Se uma prestação de R$ 200,00 é paga com 45 dias de atraso, e os juros de mora são cobrados à taxa de 6% a.m., em regime de juros simples, qual o valor pago? E se fossem cobrados em regime de juros compostos?

Solução: Sejam i_1 a taxa de juros diária equivalente em capitalização simples e i_2 a taxa de juros diária equivalente em capitalização

composta.
Assim, para o regime de juros simples e considerando o mês comercial de 30 dias, segue que

$$\frac{i_1}{1} = \frac{0,06}{30} \Rightarrow i_1 = 0,002.$$

Logo,

$$M = 200(1 + 45(0,002)) = 218,00.$$

Para o regime de juros compostos segue que

$$(1+i_2)^{30} = (1+0,06)^1 \Leftrightarrow (1+i_2) \cong 1,001944184 \Leftrightarrow i_2 \cong 0,001944184.$$

Logo,

$$M = 200(1 + 0,001944184)^{45} \cong 218,27.$$

Portanto, no regime de juros simples o valor cobrado seria de R\$ 218,00 e no de juros compostos R\$ 218,27.

Observação 3.7. Os Exemplos 3.17 e 3.18 são distinguidos apenas pelo tempo de atraso, o que alterou a ordem dos valores finais. No Exemplo 3.17 o regime de juros simples foi mais vantajoso para o credor, já no Exemplo 3.18 o regime de juros compostos obteve maior montante. Esses exemplos mostraram que os prazos são essenciais na escolha do regime.

Se um capital C é aplicado à taxa i por n períodos em regime de juros simples temos $M_n = C(1 + ni)$. Agora, se for no regime de juros compostos temos $M_n = C(1+i)^n$. Como $i > 0$, tem-se, para todo $n \geq 1$, $(1 + i)^n \geq (1 + ni)$, valendo a igualdade se e somente $n = 0$ ou $n = 1$ (desigualdade de Bernoulli).

Vamos demonstrar a desigualdade de Bernoulli por indução finita:

Considere $i \geq -1$.
Para $n = 0$ temos $(1 + i)^0 = (1 + 0i)$.
Para $n = 1$ temos $(1 + i)^1 = (1 + 1i)$.
Agora, suponha válida para $n \in \mathbb{N}$, ou seja $(1 + i)^n \geq (1 + ni)$.
Queremos provar que

$$(1 + i)^{n+1} \geq (1 + (n + 1)i).$$

De fato,

$(1+i)^{n+1} = (1+i)^n \cdot (1+i)$. Por hipótese de indução temos que

$(1+i)^n \cdot (1+i) \geq (1+ni) \cdot (1+i) = 1 + i + ni + ni^2 \geq (1 + (n+1)i)$,
pois $ni^2 \geq 0$.

Logo, por indução finita, se $i \geq -1$, então $(1+i)^n \geq (1+ni)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

A Figura 11 ilustra a distinção geométrica entre os dois regimes:

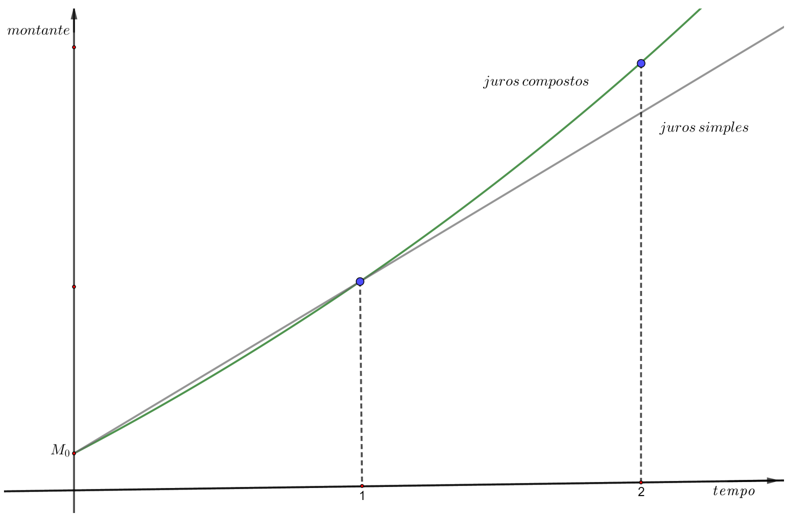


Figura 11 – Comparação dos juros.

É por isso que os juros simples são usados apenas em prazos inferiores ao prazo ao qual se refere a taxa de juros combinada.

3.4 FLUXO DE CAIXA

Um fluxo de caixa representa uma série de pagamentos (saídas) ou de recebimentos (entradas) que se estima ocorrer em um determinado intervalo de tempo. Podemos representá-lo através de um eixo horizontal, onde está fixado o período de tempo (dia, mês, ano, etc.), com setas para cima que indicam entradas e setas para baixo que indicam saídas.

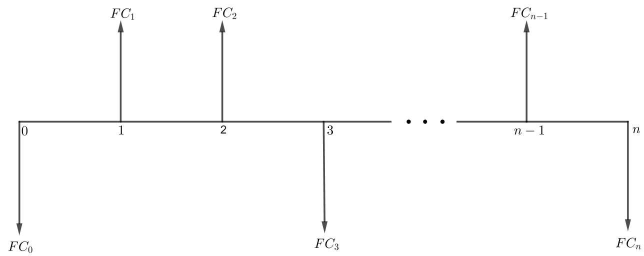
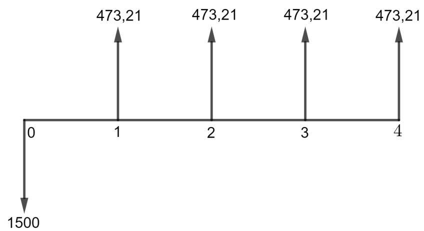


Figura 12 – Diagrama de Fluxo de Caixa.

Onde FC_n é o fluxo de caixa no tempo n e a data zero marca o início da contagem do tempo.

Exemplo 3.19. Uma geladeira é vendida em uma loja por R\$ 1500,00 à vista ou com taxa de juros de 10% a.m. em 4 prestações mensais de R\$ 473,21, com pagamento da primeira parcela um mês após a compra. Represente o diagrama de fluxo de caixa em relação à loja no caso da venda ser feita em prestações.

Solução:



No Exemplo 3.19 algumas questões matemáticas podem ser sugeridas: Como chegar no valor da prestação igual a R\$ 473,21? E se a dívida total fosse paga antecipadamente? E se houvesse uma entrada na data zero e o restante dividido em n parcelas iguais, qual seria o valor de cada prestação? Questões como essas nos levam a refletir sobre o valor do dinheiro em um determinado tempo.

Uma compra a prazo, em que a dívida seja quitada em n meses envolverá uma taxa de juros e $n+1$ datas: de 0 a n. Salientamos que o número de pagamentos não é necessariamente igual ao número de capitalizações. Entretanto, o último pagamento sempre coincide com a última data de capitalização. Outro fator importante é que capitais só podem ser comparados numa mesma data. Isso fortalece a ideia de que o dinheiro possui valores diferentes em datas diferentes.

Para entendermos melhor, vamos "transportar" os valores dos capitais (prestações) para uma mesma data, chamada de data focal. Para isso, utilizaremos o conceito de valor presente, que denotaremos por VP, e valor futuro, que denotaremos por VF.

Um capital C será equivalente no futuro, após n períodos de capitalização, a $M_n = C(1+i)^n$, sendo i a taxa de juros referida a cada um dos n períodos. Podemos dizer então, que $C = VP$ e $M_n = VF$, n períodos mais tarde. Assim, para avançar um capital n períodos, basta multiplicar por $(1+i)^n$ e, para recuá-lo n períodos, basta dividí-lo por $(1+i)^n$. Tanto o cálculo do valor presente, como o do valor futuro, devem ser processados, respectivamente, pelo somatório da atualização e capitalização de cada um dos termos de um fluxo de caixa.

Assim, sendo P_n o valor de cada um dos termos de um fluxo de caixa na data focal n, temos que:

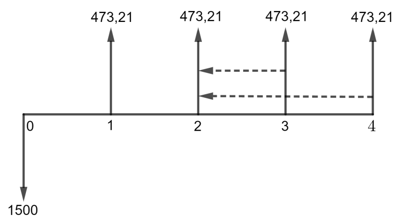
$$VP = \frac{P_0}{(1+i)^0} + \frac{P_1}{(1+i)} + \frac{P_2}{(1+i)^2} + \frac{P_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P_n}{(1+i)^n}$$

e

$$VF = P_0(1+i)^n + P_1(1+i)^{n-1} + P_2(1+i)^{n-2} + \cdots + P_{n-1}(1+i) + P_n(1+i)^0.$$

Exemplo 3.20. Considerando o Exemplo 3.19, suponha que o cliente negocie a quitação das duas últimas prestações no segundo mês após a compra. Qual o valor, referente às duas últimas prestações, a ser pago para a loja?

Solução: Vamos transportar os valores da terceira e quarta prestação para a data focal 2:



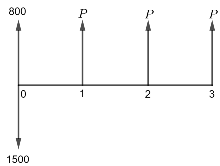
Seja VP_2 o valor da dívida na data 2, então

$$VP_2 = \frac{473,21}{(1+0,1)^1} + \frac{473,21}{(1+0,1)^2} \cong 430,19 + 391,08 = 821,27.$$

Portanto, o valor a ser pago será de R\$ 821, 27.

Exemplo 3.21. Ainda baseado no Exemplo 3.19, suponha que o cliente ofereça um pagamento, no ato da compra, de 800 reais e parcele o restante em 3 parcelas iguais. Considerando a mesma taxa de juros, qual seria o valor de cada prestação?

Solução: Um fluxo de caixa da loja pode ser elaborado da seguinte forma:



Onde P representa o valor de cada prestação.

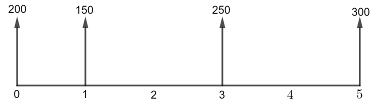
Como sabemos o valor à vista, podemos montar uma equação, transportando os valores de P para a data zero e somá-los com a entrada de 800 reais:

$$\begin{aligned}
1500 &= 800 + \frac{P}{(1+0,1)^1} + \frac{P}{(1+0,1)^2} + \frac{P}{(1+0,1)^3} \\
700(1,1)^3 &= P(1,1)^2 + P(1,1)^1 + P \\
700(1,1)^3 &= P[(1,1)^2 + (1,1)^1 + 1] \\
P &= \frac{700(1,1)^3}{(1,1)^2 + (1,1)^1 + 1} \\
P &\cong 281,48.
\end{aligned}$$

Portanto, o valor de cada prestação seria de R\$ 281, 48.

O exemplo acima nos dá uma ideia de como resolver a questão formulada, no início desta seção, referente ao Exemplo 19: Como chegar no valor da prestação igual a R\$ 473, 21? Deixamos a resolução deste problema a cargo do leitor.

Exemplo 3.22. Uma pessoa negociou o pagamento de um produto à taxa de 2% a.m. de acordo com o seguinte fluxo de caixa do credor (as datas se referem a meses e os valores são em reais):



Diante das informações do problema, qual o valor do produto à vista?

Solução: Seja VP o valor do produto na data zero. Como na data zero houve pagamento (entrada), não há o que transladar. Vamos recuar os valores das outras prestações para a data zero:

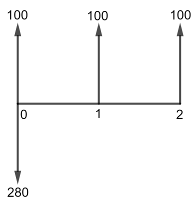
$$\begin{aligned} VP &= 200 + \frac{150}{(1+0,02)^1} + \frac{250}{(1+0,02)^3} + \frac{300}{(1+0,02)^5} \\ VP &\cong 200 + 147,06 + 235,58 + 271,72 = 854,36. \end{aligned}$$

Portanto, o valor do produto à vista é de R\$ 854,36.

Exemplo 3.23. Um produto é vendido em uma loja em duas condições:
a) Em três prestações mensais iguais de 100 reais, com a primeira paga no ato da compra.
b) Pagamento de 280 reais à vista.

Sabendo que a loja pratica, geralmente, taxa de juros de 5% a.m., qual condição de compra é mais vantajosa?

Solução: Um fluxo de caixa da loja, na condição a prazo, pode ser elaborado da seguinte forma:



Seja VP o valor do produto, na data zero, na condição a prazo.
Vamos recuar os valores das prestações para a data zero:

$$VP = 100 + \frac{100}{(1+0,05)^1} + \frac{100}{(1+0,05)^2} \cong 100 + 95,24 + 90,70 = 285,94.$$

Portanto, comprar o produto à vista é mais vantajoso.

Exemplo 3.24. Considerando o exemplo anterior, qual condição seria mais vantajosa se a taxa de juros praticada pela loja fosse de 10% a.m.?

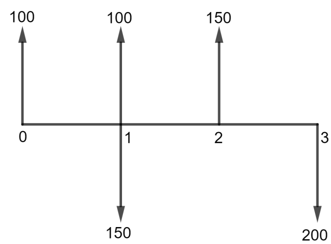
Solução: Seja VP o valor do produto, na data zero, na condição a prazo. Vamos recuar os valores das prestações para a data zero:

$$VP = 100 + \frac{100}{(1+0,1)^1} + \frac{100}{(1+0,1)^2} \cong 100 + 90,91 + 82,64 = 273,55.$$

Portanto, neste caso, comprar parcelado seria mais vantajoso.

Observação 3.8. Os Exemplos 3.23 e 3.24 mostram que a variação na taxa de juros altera a equivalência de capitais. Isso é importante, pois uma negociação vantajosa com uma certa taxa de juros pode ser menos atraente quando essa taxa é modificada.

Exemplo 3.25. Uma pessoa possui 100 reais em sua caderneta de poupança, que rende $0,6\%$ a.m., com previsão de depósitos e saques conforme o fluxo de caixa abaixo, no qual as datas se referem a meses e os valores estão em reais.



Qual o saldo em conta bancária dessa pessoa na última data?

Solução: Vamos avançar o valores de depósitos (entradas) e os de saques (saídas) para a data 3 e fazer a diferença entre eles.

Sejam E e S os valores dos depósitos e saques na data 3, respectivamente. Então

$$\begin{aligned}
E &= 100 \cdot (1+0,006)^3 + 100 \cdot (1+0,006)^2 + 150 \cdot (1+0,006)^1 \\
E &\cong 101,81 + 101,20 + 150,9 \\
E &\cong 353,91 \\
e & \\
S &= 150 \cdot (1+0,006)^2 + 200 \\
S &\cong 151,81 + 200 \\
S &\cong 351,81.
\end{aligned}$$

Assim, $E - S = 353,91 - 351,81 = 2,1$.

Portanto, o saldo da conta na última data será de R\$ 2,10.

Nos próximos exemplos utilizaremos, nos cálculos, duas fórmulas muito estudadas no ensino médio. A fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, dada por:

$$S_n = a_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right),$$

onde a_1, q e n são, respectivamente, o primeiro termo, a razão (diferente de 1) e a quantidade de termos da progressão geométrica.

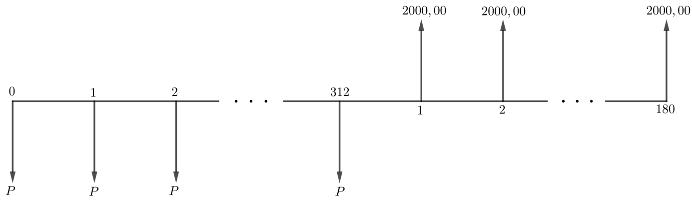
E a fórmula da soma de infinitos termos de uma progressão geométrica, dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q},$$

onde a_1 e q são, respectivamente, o primeiro termo e a razão da progressão geométrica, com $-1 < q < 1$.

Exemplo 3.26. Quantos reais deverão ser depositados mensalmente, por 26 anos, em um fundo de investimento que rende $0,5\%$ ao mês, para que se possa resgatar, a partir do primeiro mês após o último depósito, a quantia mensal de R\$ 2000,00, durante 15 anos? E se o resgate mensal de R\$ 2000,00 fosse por tempo indefinido?

Solução: Seja P o valor do depósito mensal. Um fluxo de caixa da primeira situação pode ser elaborado da seguinte forma (as datas se referem a meses):



Avançando os depósitos para a data 312 e recuando os resgates também para a data 312, obtemos a seguinte equação:

$$P(1,005)^{312} + P(1,005)^{311} + \cdots + P = \frac{2000}{(1,005)} + \cdots + \frac{2000}{(1,005)^{180}}.$$

Colocando P e 2000 em evidência, obtemos:

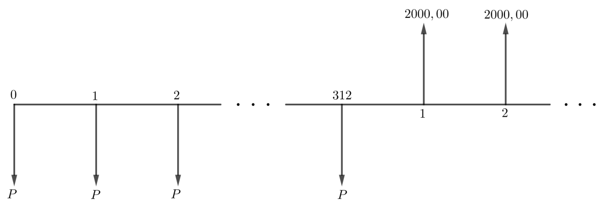
$$P(\underbrace{(1,005)^{312} + \cdots + 1}_{PG}) = 2000 \underbrace{\left(\frac{1}{(1,005)} + \cdots + \frac{1}{(1,005)^{180}} \right)}_{PG}.$$

Usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, obtemos:

$$\begin{aligned} P\left(1\left(\frac{(1,005)^{313}-1}{1,005-1}\right)\right) &= 2000\left(\frac{1}{1,005}\left(\frac{(\frac{1}{1,005})^{180}-1}{\frac{1}{1,005}-1}\right)\right) \\ P(752,81) &\cong 2000 \cdot 118,50 \\ P &\cong 314,82. \end{aligned}$$

Portanto, deverão ser depositados R\$ 314, 82 mensais durante 26 anos para que se possa resgatar, a partir do primeiro mês após o último depósito, a quantia mensal de R\$ 2000, 00, durante 15 anos.

E se o resgate mensal de R\$ 2000, 00 fosse por tempo indefinido, teríamos o seguinte fluxo de caixa:



Avançando os depósitos para a data 312 e recuando os resgates também para a data 312, obtemos a seguinte equação:

$$P(1,005)^{312} + P(1,005)^{311} + \cdots + P = \frac{2000}{(1,005)} + \frac{2000}{(1,005)^2} + \cdots .$$

Colocando P e 2000 em evidência, obtemos:

$$P(\underbrace{(1,005)^{312} + \cdots + 1}_{PG}) = 2000 \underbrace{\left(\frac{1}{(1,005)} + \frac{1}{(1,005)^2} + \cdots\right)}_{PG\ de\ infinitos\ termos}.$$

Usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica no primeiro membro e a fórmula da soma de infinitos termos de uma progressão geométrica no segundo membro da equação, obtemos:

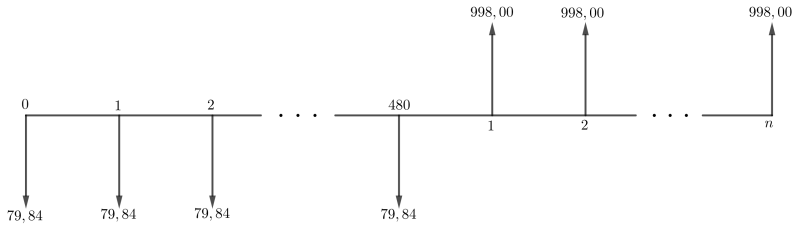
$$\begin{aligned} P\left(1\left(\frac{(1,005)^{313}-1}{1,005-1}\right)\right) &= 2000\left(\frac{\frac{1}{1,005}}{1-\frac{1}{1,005}}\right) \\ P(752,81) &\cong 2000 \cdot 200 \\ P &\cong 531,34. \end{aligned}$$

Portanto, deverão ser depositados R\$ 531,34 mensais durante 26 anos para que se possa resgatar, a partir do primeiro mês após o último depósito, a quantia mensal de R\$ 2000,00, por tempo indefinido.

Exemplo 3.27. Uma pessoa se aposentou aos 65 anos de idade, tendo depositado mensalmente, por 40 anos, em um fundo de previdência privada, a quantia de R\$ 79,84 (8% de R\$ 998,00) a juros de 0,4% a.m. Se o resgate mensal foi estipulado em R\$ 998,00, a partir do primeiro mês após o último depósito, até que idade esta pessoa receberá sua aposentadoria?

Solução:

Seja n a quantidade de meses de resgate.
Um fluxo de caixa do aposentado pode ser elaborado da seguinte forma (as datas se referem a meses e os valores em reais):



Avançando os depósitos para a data 480 e recuando os resgates também para a data 480, obtemos a seguinte equação:

$$79,84(1,004)^{480}+79,84(1,004)^{479}+\cdots+79,84=\frac{998}{(1,004)}+\cdots+\frac{998}{(1,004)^{n}}.$$

Colocando $79,84$ e 998 em evidência, obtemos:

$$79,84(\underbrace{(1,004)^{480}+\cdots+1}_{PG})=998\underbrace{\left(\frac{1}{(1,004)}+\cdots+\frac{1}{(1,004)^{n}}\right)}_{PG}.$$

Usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, obtemos:

$$79,84\left(1\left(\frac{(1,004)^{481}-1}{1,004-1}\right)\right)=998\left(\frac{1}{1,004}\left(\frac{(\frac{1}{1,004})^{n}-1}{\frac{1}{1,004}-1}\right)\right).$$

Logo,

$$79,84\cdot 1455,52\cong -249500\left(\left(\frac{1}{1,004}\right)^{n}-1\right).$$

Assim,

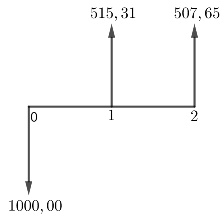
$$\left(\frac{1}{1,004}\right)^{n}\cong 0,5342336.$$

Portanto,

$$n\cong\frac{log(0,5342336)}{log(1)-log(1,004)}\cong 157,04.$$

Como 157,04 meses equivalem a 13,09 anos aproximadamente, temos que essa pessoa receberá sua aposentadoria até os 78 anos de idade.

Exemplo 3.28. Ana negociou o financiamento de uma dívida de R$ 1000,00, com um banco, pelo SAC (Sistema de Amortização Constante) de acordo com o seguinte fluxo de caixa do credor (as datas se referem a meses e os valores são em reais):



Qual a taxa de juros anual cobrada pelo banco?

Solução: Sejam i_a e i_m as taxas anual e mensal respectivamente. Vamos recuar os valores das prestações para a data zero:

$$1000 = \frac{515,31}{(1+i_m)^1} + \frac{507,65}{(1+i_m)^2}.$$

Seja $1 + i_m = x$. Então

$$1000 = \frac{515,31}{(x)^1} + \frac{507,65}{(x)^2} \Leftrightarrow 1000x^2 - 515,31x - 507,65 = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau temos que $x \cong 1,01531$. Ou seja, $i_m \cong 0,01531$.
Portanto, a taxa mensal cobrada pelo banco foi de $1,531\%$ a.m.

Agora, calculando a taxa anual equivalente, temos:

$$\begin{aligned}
(1+i_a)^1 &= (1+i_m)^{12} \\
(1+i_a)^1 &= (1+0,01531)^{12} \\
(1+i_a) &\cong 1,2 \\
i_a &\cong 0,2.
\end{aligned}$$

Portanto, a taxa anual cobrada pelo banco foi de 20% a.a.

No exemplo acima houve diminuição no valor da segunda prestação em relação à primeira. O SAC é um sistema que promove esta situação e é muito usado por bancos, principalmente em financiamentos de imóveis. Como a amortização é constante (valores iguais abatidos da dívida), o valor financiado em n meses é dividido em n parcelas de amortização e os juros são cobrados sobre o saldo devedor após cada abate. Assim, o valor da prestação na data n é dado pela amortização mais os juros sobre o saldo devedor na data $n-1$.

Vamos, como reforço, verificar os valores do Exemplo 3.28:

Valor financiado: R\$ $1000,00$.

Amortização: $\frac{1000}{2} = 500$.

Valor da 1ª prestação (amortização + juros sobre o saldo devedor na data zero): $500 + 1000 \cdot 0,01531 = 515,31$.

Valor da 2ª prestação (amortização + juros sobre o saldo devedor na data 1): $500 + 500 \cdot 0,01531 \cong 507,65$.

No caso de financiamentos de longo prazo é ideal montarmos uma planilha. Para o próximo exemplo, considere A_n, J_n, P_n e D_n como, respectivamente, a parcela de amortização, a parcela de juros, o valor da prestação e o saldo devedor na data n.

Exemplo 3.29. Um imóvel de R\$ $200.000,00$ foi comprado da seguinte forma: Uma entrada de R\$ $56.000,00$ e o restante financiado, por um banco, em 360 meses, a juros de 10% a.a., utilizando o SAC. Faça uma planilha de amortização com os valores das 6 primeiras prestações, sem considerar taxa de abertura de crédito, seguros, etc.

Solução: Vamos calcular primeiramente a taxa mensal equivalente: Sejam i_a e i_m as taxas anual e mensal respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}
(1+i_m)^{12} &= (1+i_a)^1 \\
(1+i_m)^{12} &= (1+0,1)^1 \\
(1+i_m) &\cong 1,00797414 \\
i_m &\cong 0,00797414.
\end{aligned}$$

Ou seja, $0,797414\%$ a.m. é a taxa mensal equivalente.

Agora, temos que o valor da amortização é dado por:

$$A_n = \frac{D_0}{n} \Rightarrow A_{360} = \frac{144.000}{360} = 400.$$

Portanto,

n	P_n	A_n	J_n	D_n
0	–	–	–	$144.000,00$
1	$1.548,28$	400	$1.148,28$	$143.600,00$
2	$1.545,09$	400	$1.145,09$	$143.200,00$
3	$1.541,90$	400	$1.141,90$	$142.800,00$
4	$1.538,71$	400	$1.138,71$	$142.400,00$
5	$1.535,52$	400	$1.135,52$	$142.000,00$
6	$1.532,33$	400	$1.132,33$	$141.600,00$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
360	?	400	?	–

De fato, temos:
Valor da 1ª prestação: $400 + 144000 \cdot 0,00797414 \cong 1548,28$.
Valor da 2ª prestação: $400 + 143600 \cdot 0,00797414 \cong 1545,09$.
Valor da 3ª prestação: $400 + 143200 \cdot 0,00797414 \cong 1541,90$.
Valor da 4ª prestação: $400 + 142800 \cdot 0,00797414 \cong 1538,71$.
Valor da 5ª prestação: $400 + 142400 \cdot 0,00797414 \cong 1535,52$.
Valor da 6ª prestação: $400 + 142000 \cdot 0,00797414 \cong 1532,33$.

Desafiamos o leitor a calcular os valores de outras prestações.

Exemplo 3.30. Um investidor comprou um lote de 100 ações da empresa TIM Brasil no dia 07/01/19 no valor de R$ 12,07 cada uma. Nos 4 dias subsequentes houve as seguintes variações no valor dessas ações:
a) no dia 8, aumento de $4,64\%$.
b) no dia 9, aumento de $2,77\%$.
c) no dia 10, queda de $3,76\%$.
d) no dia 11, queda de $1,52\%$.

De acordo com as informações acima, qual o valor que a ação atingiu no dia 11 e qual o percentual de valorização nesses 4 dias?

Solução: Seja VF o valor da ação no dia 11. Mediante as informações dadas, basta fazermos:

$$VF = 12,07 \cdot (1+0,0464) \cdot (1+0,0277) \cdot (1-0,0376) \cdot (1-0,0152) \cong 12,30.$$

Logo, a ação atingiu, em 11/01/19, o valor de R$ 12,30.

E a valorização nesses quatro dias foi de

$$\frac{12,30 - 12,07}{12,07} \cong 0,0190.$$

Ou seja, de $1,9\%$.

Exemplo 3.31. Considerando o exemplo anterior, suponha que o investidor, diante das variações de preço destacadas, tenha vendido suas ações no dia 11, no valor de R\$ 12,30 cada. Considere ainda que em cada transação foram cobradas as seguintes taxas operacionais:

• Corretagem de R\$ 10,00 mais $0,3\%$ sobre o valor da ordem de compra ou venda (cobrada pela Corretora de Ações).
• Emolumento de $0,0325\%$ sobre o valor da ordem de compra ou venda (cobrado pela Bolsa de Valores).

Sendo assim, construa um fluxo de caixa do investidor que represente as transações feitas.

Solução: Vamos calcular separadamente o valor de cada ordem, corretagem e emolumento de acordo com as informações dadas.

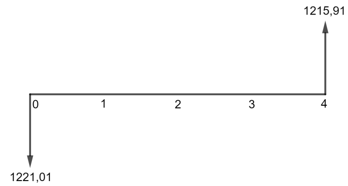
No dia 7 o valor da transação foi:
Valor de 100 ações + corretagem + emolumento:
100 ações $= 100 \cdot 12,07 = 1207$.
Corretagem $= 10 + 0,003 \cdot 1207 \cong 13,62$.
Emolumento$= 0,000325 \cdot 1207 \cong 0,39$.
Assim, o custo total da compra foi de:

$$1207 + 13,62 + 0,39 = 1221,01.$$

No dia 11 o valor obtido na transação foi:
Valor de 100 ações − corretagem − emolumento:
100 ações $= 100 \cdot 12,30 = 1230$.
Corretagem $= 10 + 0,003 \cdot 1230 = 13,69$.
Emolumento$= 0,000325 \cdot 1230 \cong 0,40$.
Assim, o valor total obtido na venda foi de:

$$1230 - 13,69 - 0,40 = 1215,91.$$

Baseados nos valores acima podemos construir o fluxo de caixa do investidor do seguinte modo (as datas se referem a dias e os valores estão em reais):



Nota-se facilmente que a estratégia utilizada pelo investidor não foi boa, pois ele acabou tendo prejuízo nestas transações financeiras. Apesar das ações terem valorizado, o valor da corretagem influenciou o resultado final. Essas taxas de corretagem variam de uma corretora para outra e é sempre importante considerar estes custos na hora de decidir por uma compra ou venda de ações.

Mas qual seria a estratégia correta? Não existe uma totalmente segura, entretanto há métodos matemáticos que ajudam a explorar o mercado de ações e a sugerir tomadas de decisões menos arriscadas. Este será o tema de nossa próxima seção.

3.5 AVALIAÇÃO DE AÇÕES

Como mencionado no Capítulo 2, as ações são valores mobiliários que representam uma fração do capital social de uma empresa. O investimento em ações é considerado de risco, pois são aplicações de renda variável em que os ganhos não são firmados no momento da aquisição, oscilando diariamente devido a diversos fatores.

Contudo, essas aplicações não deixam de ser um problema de matemática financeira e por isso instigam estudiosos a buscarem meios de avaliarem, com o menor risco possível, o potencial destes títulos.

Olhando de maneira simplista, as aplicações em ações podem ser representadas por fluxos de caixas nos quais é possível calcular a rentabilidade das operações. Esses fluxos representam especialmente os benefícios econômicos de caixa esperados, como a valorização dessas ações e os dividendos (parte do lucro líquido que as empresas distribuem aos portadores de ações periodicamente).

3.5.1 Aplicações em ações com prazo determinado

Uma aplicação em ações por determinado período n no qual não esteja prevista a distribuição de dividendos pode ser representada pelo seguinte fluxo de caixa:

Onde
VP = valor presente do fluxo de benefícios esperados de caixa ou preço de mercado da ação no momento da compra;
VF = valor futuro da ação ou preço de mercado esperado no momento da venda da ação.

A expressão matemática que coloca VP em função de VF é dada por:

$$VP = \frac{VF}{(1+\alpha)^n},$$

sendo α a taxa de retorno periódica esperada pelo investidor.

Podemos perceber claramente que esta expressão é a mesma que calcula o montante de uma capitalização em juros compostos em uma data n.

Exemplo 3.32. Suponha uma ação cujo valor de mercado atinja, em um determinado momento, R\$ $5,48$. Sendo de 6% ao mês a taxa de retorno esperada pelo investidor, pede-se:

a) Avaliar se é atrativa a compra desta ação pelo investidor prevendo-se que seu preço de mercado suba para R\$ $6,00$ ao final de um mês;

b) Se a compra for atrativa, suponha que o investidor tenha comprado 200 ações e que após um mês as tenha vendido por R\$ $6,00$ cada. Qual foi o percentual de lucro efetivo, considerando que em cada transação foram cobradas as seguintes taxas operacionais:

• Corretagem de R\$ $10,00$ mais $0,3\%$ sobre o valor da ordem de compra ou venda (cobrada pela Corretora de Ações).
• Emolumento de $0,0325\%$ sobre o valor da ordem de compra ou venda

(cobrado pela Bolsa de Valores).

c) Se o investidor estimar que o preço de mercado no momento da venda da ação seja de R$ $5,70$ ao final de um mês, qual o preço máximo que ele poderia oferecer, hoje, de forma a apurar uma valorização mínima de 6% a.m.?

Solução:

a)

Temos que $VP = \dfrac{VF}{(1+\alpha)^n}$, então

$$\begin{aligned} 5,48 &= \frac{6}{(1+\alpha)^1} \\ (1+\alpha) &= \frac{6}{5,48} \\ (1+\alpha) &\cong 1,0949 \\ \alpha &\cong 0,0949. \end{aligned}$$

O rendimento da ação nesta situação atinge $9,49\%$ no período, maior que o esperado pelo investidor. Logo, é atrativa a compra desta ação pelo investidor.

b) Vamos calcular separadamente o valor de cada ordem, corretagem e emolumento de acordo com as informações dadas.

Na compra o valor da transação foi:
Valor de 200 ações + corretagem + emolumento:

200 ações $= 200 \cdot 5,48 = 1096$.
Corretagem $= 10 + 0,003 \cdot 1096 \cong 13,29$.
Emolumento $= 0,000325 \cdot 1096 \cong 0,36$.
Assim, o custo total da compra foi de:

$$1096 + 13,29 + 0,36 = 1109,65.$$

Na venda o valor obtido na transação foi:
Valor de 200 ações − corretagem − emolumento:
200 ações $= 200 \cdot 6,00 = 1200$.
Corretagem $= 10 + 0,003 \cdot 1200 = 13,60$.
Emolumento $= 0,000325 \cdot 1200 = 0,39$.
Assim, o valor total obtido na venda foi de:

$$1200 - 13,60 - 0,39 = 1186,01.$$

Logo, o percentual de lucro foi de

$$\frac{1186,01 - 1109,65}{1109,65} \cong 0,0688.$$

Ou seja, de $6,88\%$. Ainda dentro da taxa de retorno esperada pelo investidor.

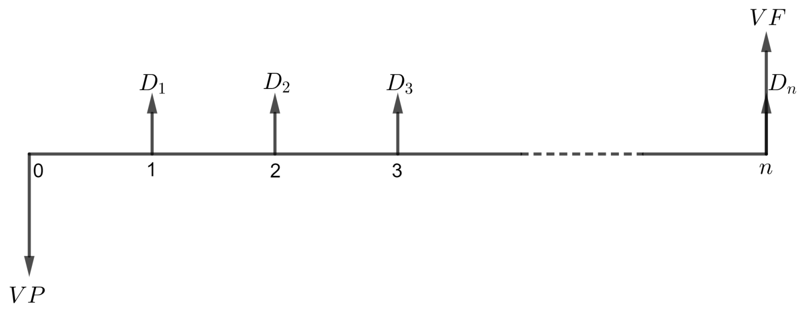
c)

Temos que $VP = \dfrac{VF}{(1+\alpha)^n}$, então

$$VP = \frac{5,70}{(1+0,06)^1} \cong 5,38.$$

Logo, o preço máximo que o investidor poderia oferecer, hoje, de forma a apurar a valorização mínima de 6% a.m. é de R\$ 5,38.

Quando em uma aplicação em ações, por determinado período n, há previsão de distribuição de dividendos, seu fluxo de caixa pode ser representado da seguinte forma:



Onde
$D_1, D_2, D_3, \cdots, D_n$ são os dividendos previstos de serem recebidos ao longo do período de aplicação (mês, bimestre, trimestre, semestre, ano, etc.). Desta forma, temos:

$$VP = \frac{D_1}{(1+\alpha)} + \frac{D_2}{(1+\alpha)^2} + \frac{D_3}{(1+\alpha)^3} + \cdots + \frac{D_n + VF}{(1+\alpha)^n}.$$

Que é o somatório da atualização dos valores de cada um dos termos do fluxo de caixa.

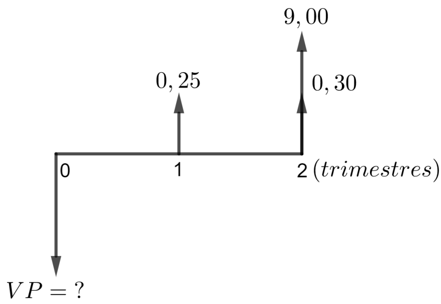
Exemplo 3.33. Suponha que um investidor tenha projetado em R\$ 0,25 e R\$ 0,30 os dividendos por ação a serem pagos, respectivamente, ao final de cada um dos próximos dois trimestres. Estimou ainda em R\$ 9,00 o valor de venda desta ação ao final do segundo trimestre e definiu em 8% a.t a taxa de retorno esperada para esta aplicação. Diante destas informações, pede-se:

a) O valor máximo a ser pago, hoje, por esta ação de forma que o investidor apure uma valorização de 8% ao trimestre.

b) Supondo as condições acima e estando o valor da ação, hoje, em R\$ 8,50, calcular a rentabilidade, sem considerar os custos operacionais, que se obteria na aquisição dessa ação.

Solução:

a)

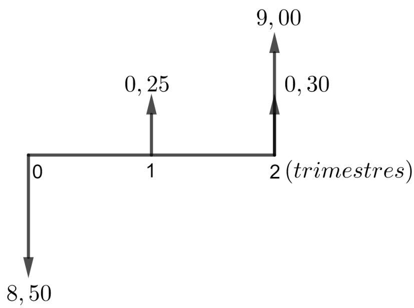


Temos que

$$VP = \frac{0,25}{(1+0,08)} + \frac{0,30+9,00}{(1+0,08)^2} \cong 8,20.$$

Portanto, para que se obtenha uma valorização de 8% ao trimestre, e considerando as previsões de dividendos trimestrais, o preço máximo a ser pago por esta ação, hoje, é de R$ 8, 20.

b)



Temos que

$$8,50 = \frac{0,25}{(1+\alpha)} + \frac{0,30+9,00}{(1+\alpha)^2}.$$

Seja $1+\alpha = x$. Então

$$8,50 = \frac{0,25}{(x)} + \frac{0,30+9,00}{(x)^2} \Leftrightarrow 8,50x^2 - 0,25x - 9,30 = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau temos que $x \cong 1,0608$. Ou seja, $\alpha = 0,0608$
Portanto, a rentabilidade que se obteria, sem considerar os custos operacionais, seria de $6,08\%$ ao trimestre.

Nos Exemplos 3.32 e 3.33 a rentabilidade das ações é "estimada" de acordo com as expectativas do investidor. Porém, sabemos que o rendimento em ações é aleatório. Não é possível estimar, sem riscos, o rendimento futuro de uma ação.

Entretanto, existem métodos de análise matemática de dados que são usados na avaliação de uma ação. Um desses métodos é o chamado *modelo econométrico*. Sua ferramenta básica é a regressão linear, que modula equações para estimar o valor de uma variável. Segundo (FONTE, 1994), a regressão linear é um caso onde se aplica a teoria dos *mínimos quadrados*, que é uma técnica matemática de adaptação, de valores dados, a uma "melhor reta". Ou seja, é um procedimento que busca o mínimo de uma função de duas variáveis (os coeficientes linear e angular da reta) construída a partir da distância entre os pontos experimentais e os pontos de uma reta.

Para mais detalhes sobre modelo econométrico, regressão linear e o método dos mínimos quadrados indicamos os livros (GUJARATI, 2000) e (FONTE, 1994).

Exemplo 3.34. Um investidor comprou 800 ações da empresa JBS S.A em janeiro de 2018 no valor de R$ 9,70 cada. Após seis meses recebeu dividendo de R$ 37,42 e em janeiro de 2019 vendeu essas ações por R$ 13,00 cada. Qual o percentual de lucro efetivo? Considere que em cada transação foram cobradas as seguintes taxas operacionais:

• Corretagem de R$ 10,00 mais $0,3\%$ sobre o valor da ordem de compra ou venda (cobrada pela Corretora de Ações).
• Emolumento de $0,0325\%$ sobre o valor da ordem de compra ou venda (cobrado pela Bolsa de Valores).

Solução:

Vamos calcular separadamente o valor de cada ordem, corretagem e emolumento de acordo com as informações dadas.

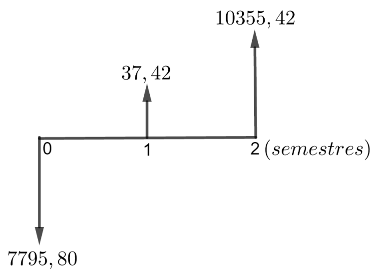
Na compra, o valor da transação foi de:
Valor de 800 ações + corretagem + emolumento:
800 ações $= 800 \cdot 9,70 = 7760$.
Corretagem $= 10 + 0,003 \cdot 7760 = 33,28$.
Emolumento $= 0,000325 \cdot 7760 \cong 2,52$.
Assim, o custo total da compra foi de:

$$7760 + 33,28 + 2,52 = 7795,80.$$

Na venda, o valor obtido na transação foi de:
Valor de 800 ações − corretagem − emolumento:
800 ações $= 800 \cdot 13,00 = 10400$.
Corretagem $= 10 + 0,003 \cdot 10400 = 41,20$.
Emolumento $= 0,000325 \cdot 10400 = 3,38$.
Assim, o valor total obtido na venda foi de:

$$10400 - 41,20 - 3,38 = 10355,42.$$

Assim,



Para calcularmos a rentabilidade, vamos considerar uma taxa semestral α e resolver a seguinte equação:

$$7795,80 = \frac{37,42}{(1+\alpha)} + \frac{10355,42}{(1+\alpha)^2}.$$

Seja $1 + \alpha = x$. Então

$$7795,80 = \frac{37,42}{(x)} + \frac{10355,42}{(x)^2} \Leftrightarrow 7795,80x^2 - 37,42x - 10355,42 = 0.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau temos que $x \cong 1,1549$. Ou seja, $\alpha = 0,1549$.

Portanto, a rentabilidade obtida foi de $15,49\%$ ao semestre.

Os exemplos acima mostraram que é fácil calcular a rentabilidade quando $n \leq 2$. Para grau de polinômio $n \geq 3$, a tarefa não é tão simples. Para encontrar as raízes ou valores aproximados das raízes quando o grau do polinômio é igual ou maior que 3 podemos utilizar o *método da bissecção*, que é um método de busca de raízes que bissecta repetidamente um intervalo e então seleciona um subintervalo contendo a raiz. Este procedimento é garantido pelo *Teorema do Valor Intermediário* que diz que se em uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}, y = f(x)$, temos um $f(a)$ e um $f(b)$ com sinais opostos, ou seja $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe pelo menos uma raiz no intervalo (a,b).

O método da bissecção é relativamente trabalhoso e lento, mas é uma ferramenta importante para entender o comportamento de uma função polinomial.

Para resoluções mais rápidas podemos usar calculadoras financeiras e aplicativos. Calculadoras na internet também fazem muito bem esse trabalho.

Exemplo 3.35. Suponha que um investidor tenha projetado em R$ 0,30 os dividendos por ação a serem pagos ao final de cada um dos próximos três trimestres. Estimou ainda em R$ 9,50 o valor de venda desta ação ao final do terceiro trimestre. Diante destas informações e supondo o valor de compra da ação, hoje, em R$ 8,50, calcular a rentabilidade, sem considerar os custos operacionais, que se obteria na aquisição dessa ação.

Solução:

Temos que

$$8,50 = \frac{0,30}{(1+\alpha)} + \frac{0,30}{(1+\alpha)^2} + \frac{0,30 + 9,50}{(1+\alpha)^3}.$$

Seja $1 + \alpha = x$. Então

$$8,50 = \frac{0,30}{(x)} + \frac{0,30}{(x)^2} + \frac{9,80}{(x)^3} \Leftrightarrow 8,50x^3 - 0,3x^2 - 0,3x - 9,80 = 0.$$

Resolvendo esta equação do terceiro grau em uma calculadora de equação polinomial (disponível em www.calculadoraonline.com.br) temos que $x \cong 1,0718$. Ou seja, $\alpha = 0,0718$.

Portanto, a rentabilidade que se obteria, sem considerar os custos operacionais, seria de $7,18\%$ ao trimestre.

Para instigar o leitor, ainda, apresentaremos um método iterativo para estimar as raízes de uma função com o auxílio de derivação; o chamado *Método de Newton.*

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável, toma-se um ponto arbitrário x_1, que é uma aproximação inicial para a raiz. Assim, calcula-se o ponto x_2, que é a interseção da reta tangente, ao gráfico de f no ponto $x = x_1$, com o eixo das abscissas. Como a equação desta reta tangente é dada por:

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1),$$

a interseção com o eixo das abscissas é dada por:

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Ou seja, dada a aproximação x_n, a próxima aproximação x_{n+1} é o ponto de interseção entre a reta tangente, ao gráfico de f no ponto $x = x_n$, e o eixo das abscissas. Assim, em notação matemática, este método é dado pela seguinte sequência recursiva:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

onde x_1 é a aproximação inicial dada, n é a n-ésima iteração do algoritmo e $f'(x_n)$ é a derivada da função f no ponto x_n.

Vamos, portanto, resolver novamente o Exemplo 3.35 com o Método de Newton:

Solução: Seja

$$f(x) = 8,50x^3 - 0,3x^2 - 0,3x - 9,80 \Rightarrow f'(x) = 25,50x^2 - 0,6x - 0,3.$$

Assim, considerando $x_1 = 1$ a aproximação inicial, vamos calcular até a quarta aproximação:

$$x_2 = 1 - \frac{(-1,9)}{(24,6)} \cong 1,077235772.$$

$$x_3 \cong 1,077235772 - \frac{(0,154243462)}{(28,6447997)} \cong 1,071851079.$$

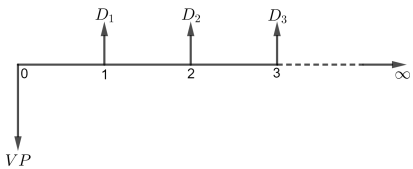
$$x_4 \cong 1,071851079 - \frac{(0,00078646)}{(28,35294011)} \cong 1,071823341.$$

Portanto, temos $x_4 \cong 1,0718$. O mesmo resultado obtido na calculadora.

Para aprender mais sobre os métodos de Newton e da bissecção indicamos os livros (BURDEN, 2003) e (CUNHA, 2003).

3.5.2 Aplicações em ações com prazo indeterminado

Há casos em que o prazo de investimento em ações é indeterminado, não se prevendo o momento da venda. Nesta situação, os únicos benefícios esperados a serem considerados no fluxo de caixa são os dividendos. Graficamente temos:



A expressão que calcula VP, neste caso, é dada por:

$$VP = \frac{D_1}{(1+\alpha)} + \frac{D_2}{(1+\alpha)^2} + \frac{D_3}{(1+\alpha)^3} + \cdots .$$

Supondo que os valores dos dividendos periódicos $D_1, D_2, D_3, \cdots$ se mantenham constantes a D ao longo do tempo, ou seja, $D = D_1 = D_2 = D_3 = \cdots$, tem-se:

$$VP = \frac{D}{(1+\alpha)} + \frac{D}{(1+\alpha)^2} + \frac{D}{(1+\alpha)^3} + \cdots .$$

Colocando D em evidência temos

$$VP = D\Big[\frac{1}{(1+\alpha)} + \frac{1}{(1+\alpha)^2} + \frac{1}{(1+\alpha)^3} + \cdots\Big].$$

Os valores entre colchetes são a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão positiva e menor que 1, neste caso $\dfrac{1}{(1+\alpha)}$, e primeiro termo também igual a $\dfrac{1}{(1+\alpha)}$. Assim, podemos calcular o valor dessa soma:

Do ensino médio, sabemos que a soma S_∞ dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão q, com $-1 < q < 1$ e primeiro termo a_1 é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Logo, considerando a duração indeterminada do fluxo de caixa de previsão de dividendos, temos

$$S_\infty = \frac{\dfrac{1}{(1+\alpha)}}{1 - \dfrac{1}{(1+\alpha)}} \Leftrightarrow S_\infty = \frac{1}{\alpha}.$$

Portanto,

$$VP = D\Big[\frac{1}{(1+\alpha)} + \frac{1}{(1+\alpha)^2} + \frac{1}{(1+\alpha)^3} + \cdots\Big] = D\Big[\frac{1}{\alpha}\Big] = \frac{D}{\alpha}.$$

Exemplo 3.36. Um investidor adquiriu um lote de ações, no valor de R\$ 12,50 cada, com prazo indeterminado para vendê-las. Se a taxa mínima esperada de retorno foi de 12% ao ano, sem considerar custos operacionais, avalie se o preço pago pela ação foi economicamente atrativo, prevendo-se um fluxo anual de dividendos iguais no valor de R\$ 1,00 por ação.

Solução: Temos que $VP = \dfrac{D}{\alpha}$, então

$$12,50 = \frac{1,00}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1,00}{12,50} \Leftrightarrow \alpha = 0,08.$$

Ou seja, 8% ao ano. Abaixo do esperado pelo investidor, logo o preço pago não foi atrativo.

Exemplo 3.37. Se um investidor espera uma taxa mínima de retorno de 15% ao ano, sem considerar custos operacionais, qual o preço máximo a ser pago por uma ação, com prazo de venda indeterminado, prevendo-se um fluxo anual de dividendos iguais no valor de R\$ 0,50 por ação?

Solução: Temos que $VP = \dfrac{D}{\alpha}$, então

$$VP = \frac{0,50}{0,15} \Leftrightarrow VP \cong 3,33.$$

Portanto, o valor máximo a ser pago é de R\$ 3,33.

Nos exemplos acima, consideramos aplicações em ações por prazo indeterminado e valores de dividendos inalterados ao longo do tempo. Entretanto, há situações onde ocorrem o crescimento periódico dos dividendos e, neste caso, utilizamos o chamado Modelo de Gordon para calcular o valor da ação.

Definindo a taxa de crescimento dos dividendos como k, com $k < \alpha$ (taxa de retorno) temos que o valor de VP é dado por

$$VP = \frac{D}{\alpha - k}.$$

Exemplo 3.38. O dividendo de uma determinada ação está fixado em R\$ 0,45 para o próximo ano. Está previsto também que estes dividendos irão crescer a uma taxa constante de 3% ao ano indefinidamente. Supondo que os acionistas dessa empresa esperam uma taxa mínima de retorno de 12% ao ano, sem considerar custos operacionais, determine o valor máximo a ser pago por esta ação.

Solução: Temos que $VP = \dfrac{D}{\alpha - k}$, então

$$VP = \frac{0,45}{0,12 - 0,03} \Leftrightarrow VP = 5.$$

Portanto, o valor máximo a ser pago é de R\$ 5,00.

Observação 3.9. O Modelo de Gordon, criado em 1956, por Myron J. Gordon e publicado pela primeira vez em 1959 (GORDON, 1959), é também chamado de *crescimento perpétuo* e não leva em conta os ganhos de capital. Considera que o fluxo de dividendos é perpétuo, pressupondo crescimento a uma taxa constante. É conveniente apenas para avaliar ações de empresas com chance de crescimento constante ao longo do tempo, em que os dividendos realmente serão distribuídos. Caso contrário, o modelo se torna ineficaz.

Outra ferramenta importante para a avaliação de ações e relativamente acessível a um estudante do ensino básico é a Análise Técnica de Investimento, que considera o gráfico do comportamento dos valores dos títulos dentro de um intervalo de tempo.

Ressaltamos que essa análise segue princípios e não teoremas matemáticos, logo só deve ser usada como mais um auxílio na decisão de compra ou venda de uma ação.

Alguns dos princípios da Análise Técnica estão baseados na ideia de que não é necessário saber o motivo exato da alteração dos preços, mas entender como eles se movem, ou seja, o importante é avaliar o momento mais interessante de comprar ou vender. Afinal, toda informação relevante, como a situação econômica de um país, o balanço das empresas, as ocorrências políticas, etc., acredita-se estar embutida no valor de mercado de uma ação.

O comportamento dos investidores em relação à venda ou à compra em um intervalo de tempo, embora faça os preços das ações oscilarem, produz uma tendência que cria situações de previsibildade no mercado. Como esse mercado é movimentado por pessoas suscetíveis à emoções, como a euforia do ganho ou o medo da perda, percebem-se padrões neste comportamento e consequentemente gráficos recorrentes são produzidos.

Para finalizarmos este capítulo, abordaremos sucintamente, uma pequena amostra do vasto campo da Análise Técnica de Ações.

3.5.3 Tendências

Ao analisar o comportamento do gráfico de uma ação podemos detectar padrões que evidenciam tendências. Essas tendências possuem características próprias que as definem. Temos a *tendência de alta* que é caracterizada por fundos ascendentes. Esses fundos são pontos de suporte, que indicam que há uma gama maior de compradores dispostos a comprar uma ação por um preço cada vez mais alto, dando continuidade à tendência de alta.

Geralmente é necessário, para se confirmar uma tendência de alta, que uma linha crescente passe por, no mínimo, três pontos (fundos). A Figura 13 apresenta um exemplo deste caso.

Figura 13 – Tendência de alta.
Disponível em: http://www.google.com.br (PETR4). Acesso em: 18 jan. 2019 (adaptado).

Já a *tendência de baixa*, como ilustrada na Figura 14, é caracterizada por topos descendentes. Esses topos são pontos de resistência, que indicam que há uma gama maior de vendedores dispostos a vender a um preço cada vez mais baixo, dando continuidade à tendência de baixa. Neste caso, uma linha decrescente ligando pontos (topos) cada vez mais baixos representa o movimento descendente.

Figura 14 – Tendência de baixa.
Disponível em: http://www.google.com.br (PETR4). Acesso em: 18 jan. 2019 (adaptado).

Um fator importante que deve estar acompanhado com a análise das linhas de tendência é o volume de negócios da ação na bolsa de valores. Quando isso é feito, as análises se tornam mais próximas da realidade e correm menos riscos de serem contagiadas por meras especulações de mercado.

Observação 3.10. Quando as linhas de tendência de alta (baixa), sofrem um rompimento, isso não indica necessariamente que haverá o início de uma tendência de baixa (alta). Isso significa o encerramento de uma tendência e o mercado pode estar apenas começando um período de consolidação, onde o movimento dos preços das ações fica com padrões bem definidos, respeitando níveis de suporte e resistência.

Esta subseção teve o intuito de mostrar que existem técnicas de análise geométrica do comportamento de ações. As *tendências* são apenas exemplos que introduzem muitas outras análises, que podem ser altamente sofisticadas para quem está iniciando no estudo do mercado de capitais. Mas como acontece com todo bom estudante, muitos aprendizados só são adquiridos na prática diária, com o devido interesse de evoluir.

Para saber mais sobre Análise Técnica de Ações indicamos o livro Análise de Investimentos (CVM, 2017).

4 MERCADO DE AÇÕES EM SALA DE AULA

Este capítulo mostrará inicialmente algumas das particularidades do funcionamento do mercado de ações e finalizará com um projeto de ensino, trilhando o caminho didático abordado nos capítulos anteriores.

4.1 CORRETORAS

Por muito tempo o pregão, que é o ambiente onde ocorrem as negociações de compra e venda de ações, foi feito em espaço físico da Bolsa de Valores. Mas a partir de 2009 o pregão presencial foi extinto, passando a ser exclusivamente por meios eletrônicos. Isso facilitou o acesso de mais pessoas aos títulos mobiliários, aumentando consideravelmente o volume de negócios e a velocidade das operações.

Contudo, a Bolsa de Valores continua sendo o operador do mercado de capitais, promovendo o ambiente eletrônico de negociações, sendo este acessível, por intermédio de corretoras regularmente credenciadas.

Essas corretoras, como ilustrado na Figura 15, são instituições financeiras que fazem a intermediação entre o investidor e a Bolsa de Valores. A principal função destas instituições é executar as ordens de compra ou venda de uma ação. Contudo, elas também auxiliam no acesso às informações sobre análises técnicas do mercado, oferecem suporte para esclarecimentos e disponibilizam instrumentos para negociação via internet, como o chamado *home broker* (que trataremos adiante). A remuneração das corretoras é feita por meio de cobrança de taxas operacionais (como vistas no Exemplo 3.34) e de custódia.

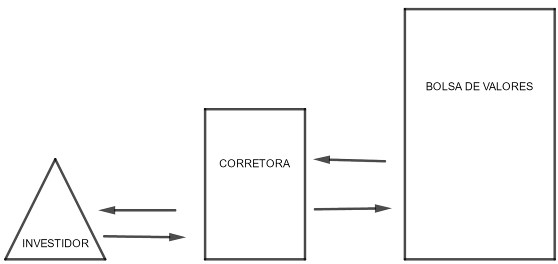


Figura 15 – A intermediação da corretora.

4.1.1 Home Broker

O *home broker* é uma plataforma oferecida pelas corretoras de valores que permite a compra e a venda de ações pela internet. Além disso, esta ferramenta fornece, entre outras coisas, informações sobre cotações, características dos ativos, rentabilidade atual e histórico de atuação do investidor no mercado.

A cotação das ações em um *home broker*, ilustrada na Figura 16, geralmente é divulgada através de painéis, juntamente com informações importantes que auxiliam na análise dos títulos.

Cada empresa possui uma sigla específica para cada tipo de ação. Por exemplo, PETR3 são as ações ordinárias da Petrobrás, já PETR4 são as ações preferenciais. A diferença entre esses dois tipos de ações foi comentada no Capítulo 2.

Painel de cotações

Índice Bovespa
0,52%
97.058,05

MINHA CARTEIRA

+ Editar painéis

Filtrar | Editar coluna | Exportar tabela

Visualizar: Tabela

Os filtros selecionados são: Produto: Todos Situação: Todos Mostrar apenas ativos que possuo: Não

Ativo ou empresa | Adicionar

Ordenado por: Recomendações | Minha ordenação

Ativo	Compra	Venda	Abertura	Preço Médio	Fechamento Anterior	Recomendações	Variação do Dia	Variação 12 Meses	Variação 30 Dias
ITUB4	R$ 37,36	R$ 37,37	R$ 37,35	R$ 37,48	R$ 37,54	Sem recomendação	-0,48%	24,24%	8,41%
MEAL3	R$ 6,83	R$ 6,84	R$ 6,76	R$ 6,82	R$ 6,75	Restricted	1,33%	-23,48%	-2,14%
BEEF3	R$ 5,59	R$ 5,60	R$ 5,46	R$ 5,56	R$ 5,44	Restricted	2,76%	-49,36%	12,47%
GFSA3	R$ 15,68	R$ 15,71	R$ 16,00	R$ 15,90	R$ 16,03	Restricted	-2,18%	-17,47%	-5,93%
ELET3	R$ 33,63	R$ 33,65	R$ 32,94	R$ 33,49	R$ 33,01	Market Perform	1,91%	85,54%	48,19%
ECOR3	R$ 11,08	R$ 11,09	R$ 10,68	R$ 11,02	R$ 10,61	Market Perform	4,52%	3,64%	19,89%
ROMI3	R$ 9,38	R$ 9,39	R$ 9,38	R$ 9,41	R$ 9,28	Market Perform	1,08%	27,27%	13,69%
WIZS3	R$ 7,72	R$ 7,73	R$ 7,75	R$ 7,76	R$ 7,77	Market Perform	-0,64%	-37,94%	10,44%
CYRE3	R$ 17,27	R$ 17,28	R$ 17,15	R$ 17,18	R$ 17,16	Market Perform	0,70%	33,84%	15,89%
CSNA3	R$ 10,32	R$ 10,33	R$ 10,39	R$ 10,40	R$ 10,32	Market Perform	0,10%	7,38%	17,25%
GGBR4	R$ 15,76	R$ 15,77	R$ 15,67	R$ 15,84	R$ 15,65	Outperform	0,77%	17,59%	7,20%
SUZB3	R$ 47,40	R$ 47,41	R$ 46,00	R$ 47,10	R$ 45,84	Outperform	3,47%	126,07%	22,24%
JBSS3	R$ 14,27	R$ 14,29	R$ 14,12	R$ 14,18	R$ 14,08	Outperform	1,49%	50,89%	21,51%
PETR4	R$ 25,44	R$ 25,45	R$ 25,40	R$ 25,43	R$ 25,43	Outperform	0,04%	44,21%	21,43%
CMIG4	R$ 14,37	R$ 14,38	R$ 14,23	R$ 14,40	R$ 14,23	Outperform	0,98%	135,96%	8,45%
AVON34	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Figura 16 – Painel de cotações.
Fonte: Home Broker da Corretora Itaú.

Depois de analisar o valor de mercado e decidir entre uma compra ou venda, o investidor utiliza o *home broker* para enviar uma ordem.

Os três principais tipos de ordens são:

• Ordem de mercado: deve ser executada a partir do momento em que for recebida pela corretora, pelo preço em vigor, especificando somente a quantidade e as características das ações.

• Ordem limitada: é a mais utilizada e deve ser executada somente a preço igual ou melhor do que foi estipulado pelo investidor.

• Ordem stop: estipula um nível de preço que, só quando é atingido na cotação, libera a ordem de compra ou venda.

Abaixo, na Figura 17, destacamos os tipos de ordens de venda.

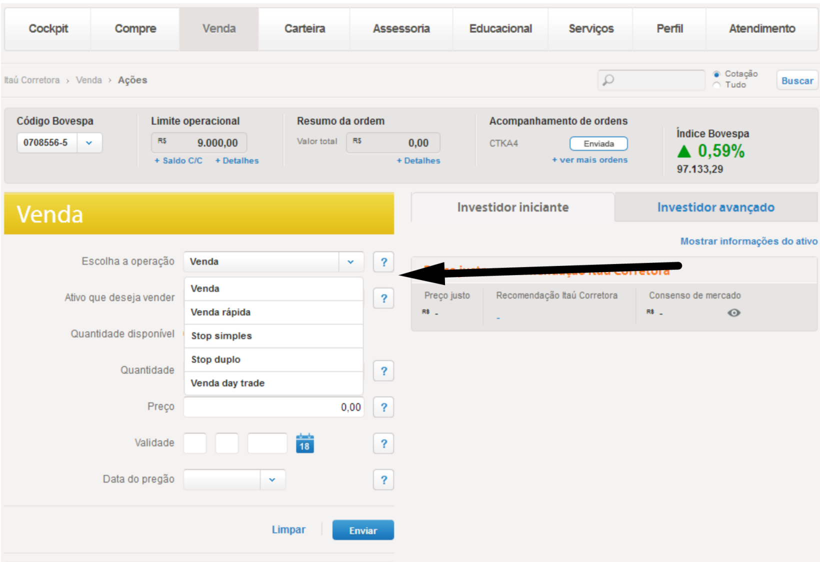


Figura 17 – Tipos de ordem de venda.
Fonte: Home Broker da Corretora Itaú (adaptado).

Para ter acesso a um *home broker* é preciso ter uma conta em uma corretora credenciada, mas existem simuladores gratuitos na internet que promovem o ambiente virtual de negociações. Esses programas como, por exemplo, o *Simulabolsa* (www.simulabolsa.com.br), ajudam a treinar e a aprender mais sobre o mercado de ações, pois, apesar de fornecerem um capital fictício, operam com as cotações atualizadas da Bolsa de Valores.

Ativo		Dia Compra	Hora Compra	Qtde	***Valor Compra	Valor Atual	*Total Compra	*Total Atual	*Lucro ou Prejuízo	%
ABCB4	ABC BRASIL PN	20/08/2018	11:48:21	500	14,92	19,20	7.460,00	9.600,00	2.140,00	28,69
ATOM3	ATOMPAR ON	10/09/2018	15:17:32	500	2,63	2,52	1.315,00	1.260,00	-55,00	-4,18
BBRK3	BR BROKERS ON	17/09/2018	14:18:25	500	0,33	6,83	165,00	3.415,00	3.250,00	1.969,70
CCXC3	CCX CARVAO ON	28/08/2018	11:55:15	500	3,99	3,46	1.995,00	1.730,00	-265,00	-13,28
ESTR4	ESTRELA PN	05/09/2018	12:15:23	500	10,50	12,48	5.250,00	6.240,00	990,00	18,86
IGBR3	GRADIENTE ON	16/10/2018	10:53:02	500	1,38	2,55	690,00	1.275,00	585,00	84,78
OIBR3	OI ON	22/11/2018	15:01:14	500	1,63	1,28	815,00	640,00	-175,00	-21,47

	*Total Compra	*Total Atual	*Lucro ou Prejuízo	%
TOTAL ATIVOS EM CARTEIRA	17.690,00	24.160,00	6.470,00	36,57

	*Disponível	*Em carteira	**Saldo Geral	**%
CONTA CORRENTE	82.256,63	24.160,00	106.416,63	6,42

Figura 18 – Carteira de ações de um simulador.
Fonte: Home Broker do simulador Simulabolsa.

Uma das grandes vantagens da composição de uma carteira em um simulador, como ilustrado na Figura 18, é que se pode explorar matematicamente as posições das ações, tratando as ordens de compra ou venda (Figura 19) com seriedade no intuito de se averiguar conceitos matemáticos importantes. Conceitos que serão cruciais em um investimento real.

Figura 19 – Ordem de compra de ações em um simulador.
Fonte: Home Broker do simulador Simulabolsa.

Olhando os simuladores como uma ferramenta de aprendizado, nada mais interessante que poder incluí-los em aulas de matemática. Sendo assim, a próxima seção trará um projeto de ensino sobre o mercado de ações no âmbito da educação financeira.

4.2 CAMINHO DIDÁTICO AO MERCADO DE AÇÕES

Para a elaboração de um projeto de ensino se faz necessário conhecermos previamente a turma para a qual estamos planejando as aulas, como isso não é possível, partiremos da premissa de que os estudantes já dominam o conhecimento prévio, necessário para avançarmos no conteúdo proposto. Esses saberes preliminares são os conceitos abordados no Capítulo 3 deste trabalho.

Sendo assim, este projeto será totalmente acessível a alunos do ensino médio, desde o 1º ano.

Ao trabalhar o mercado de ações, tema estimulador, instigamos os alunos a produzirem conhecimento, bem como resoluções matemáticas que necessitem de informações extrassala e meios tecnológicos.

Este projeto tem a previsão de ser realizado durante um mês, em 12 aulas de 45 minutos, de preferência no turno vespertino (no qual o pregão da bolsa está em andamento). Foi planejado para que aconteça a interação entre todos os estudantes da turma mediante atividades em grupos.

No final das atividades será proposta aos estudantes uma autoavaliação, procurando identificar se os objetivos previstos foram alcançados, bem como fazer uma avaliação geral deste projeto.

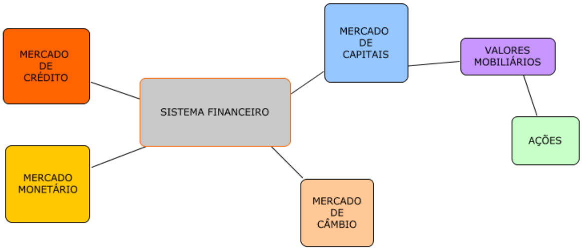
Objetivos Gerais: Transmitir aos estudantes características do mercado de ações, levando-os a desenvolverem a competência de análise crítica do valor do dinheiro e, deste modo, o aprimoramento em educação financeira.

Objetivos Específicos:

- Explorar o mercado de ações em sala de aula, mediante instrumentos tecnológicos;
- Utilizar noções de matemática financeira no estudo do mercado de ações;
- Analisar em grupo os resultados matemáticos obtidos;
- Desenvolver a matemática financeira para a resolução de problemas do cotidiano;
- Participar das atividades propostas em sala de aula.

Metodologia:

Na primeira aula será explanado sobre o sistema financeiro brasileiro, buscando o caminho mais didático para o entendimento do mercado de ações e como atuar nele. Desde o início serão ultilizados projetor e celulares com acesso à internet.



A segunda aula será usada para a apresentação do simulador de compra e venda de ações chamado *Simulabolsa*, disponível gratuitamente no endereço **www.simulabolsa.com.br**. Faremos um passo a passo explicativo de como se cadastrar e começar a operar.

Na terceira aula os alunos serão divididos em 6 grupos, levando em consideração a quantidade total de estudantes, ou seja, cada grupo terá o mesmo número de integrantes, exceto uns, caso a divisão igual não seja possível. Esta divisão será feita por sorteio dos nomes dos estudantes. Definiremos os Grupos A, B, C, D, E e F. O primeiro estudante sorteado irá para o grupo A, o segundo para o grupo B e assim, sucessivamente, repetindo o processo.

Cada grupo terá que analisar (pesquisar em sala e em casa com o auxílio da internet) empresas de setores específicos do mercado de ações:

Grupo A: Construção civil, bancos e serviços financeiros;
Grupo B: Petróleo, gás, petroquímicos e agronegócio;
Grupo C: Energia elétrica, saneamento, saúde e educação;
Grupo D: Transportes, logística, indústrias;
Grupo E: Siderurgia, mineração, papel e celulose;
Grupo F: Telecomunicação, tecnologia, consumo e varejo.

Também nesta aula os grupos farão suas inscrições no simulador. Para efeito de organização, cada grupo elegerá um integrante que será o responsável por acessar o programa.

A quarta aula será reservada para que os alunos debatam sobre o que estão pesquisando e comecem a operar no simulador. Não será definido o momento em que os grupos devem comprar ou vender ações. Essa decisão será exclusiva de cada grupo, de acordo com suas próprias análises. Contudo, será determinado que cada grupo construa, com o auxílio de programas computacionais como o *Geogebra* e o *Excel*, fluxo de caixa das movimentações efetuadas e gráficos que representem a quantidade de empresas em relação aos investimentos, além de um relatório de lucros ou prejuízos. Essas atividades deverão ser apresentadas a partir da décima aula.

Da quinta à oitava aula os grupos trabalharão no simulador, na internet e com os programas que auxiliem na construção de suas apresentações. Serão aulas de aplicações do conhecimento e de esclarecimento de dúvidas.

A nona aula será exclusivamente para o acabamento dos materiais de apresentação de cada grupo.

Na décima e na décima primeira aula, os grupos farão suas apresentações, comparando seus resultados e criando uma discussão sobre o que vivenciaram em todo o processo.

Para a décima segunda aula, além de debater dúvidas pendentes, será formulada uma ficha de autoavaliação em que cada estudante deverá assinalar a alternativa que melhor lhe convir, onde o professor poderá verificar se os objetivos foram alcançados.

Autoavaliação
Compreendi o que é mercado de ações?
( ) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente
Consegui cumprir as atividades propostas?
( ) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente
Estive atento às explicações do professor durante as aulas?
( ) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente
Participei das decisões do meu grupo?
( ) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente
Questionei o professor quando estive com dúvida?
( ) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente
Utilizarei os conhecimentos adquiridos em minha vida pessoal?
( ) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente
Respeitei a opinião dos colegas de grupo?
( ) Sim ( ) Não ( ) Parcialmente

Avaliação dos Alunos:

Sabendo que o que deve orientar a avaliação são os objetivos, o professor deve estabelecer com clareza o que pretende alcançar, ou seja, o que seus estudantes deverão ser capazes de realizar durante a execução das aulas.

Os alunos deverão conhecer tanto os objetivos quanto os critérios de avaliação. Desta forma, participam do processo avaliativo ativamente

Assim, o processo avaliativo referente ao projeto de ensino aplicado seguirá os seguinte critérios:

•P_1 : Participação durante a exposição do assunto e no decorrer das atividades (0 a 10 pontos). Entenda-se participação como questionamentos durante as aulas, cooperação nas atividades e colaboração com os colegas.

•P_2 : Apresentação dos resultados obtidos durante todo o processo na forma de fluxo de caixa, gráficos e relatórios (0 a 10 pontos).

A nota final NF referente ao desempenho dos alunos será dada por

$$NF = \frac{P_1 + 2P_2}{3}.$$

Diante do que foi descrito neste projeto de ensino, fica evidente a intenção de introduzir noções básicas do mercado de ações no currículo do ensino médio. Esta ideia, sem dúvida, pode ser aprimorada e trazer maiores despertamentos em sala de aula, propondo caminhos e um novo estímulo aos estudantes.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mesmo com tantas aplicações diretas em diversas situações, a matemática financeira é abordada de modo resumido nos currículos do ensino básico. Os livros didáticos, apesar de promoverem exercícios de prática de cálculos em relação a juros, usam comumente em suas contextualizações, valores de taxas que fogem à situação econômica atual e raramente trazem exemplos que façam comparações de investimentos. Sendo assim, apresentamos um trabalho que além de estimular o conhecimento do mercado de ações no âmbito da educação financeira, tentou mostrar exemplos com dados que estivessem mais próximos da realidade.

Segundo o balanço de janeiro de 2019 da B3, a bolsa de valores de São Paulo, 858 mil pessoas investem em ações no Brasil, isso equivale a $0,4\%$ da população aproximadamente. Comparado a outros países, como os Estado Unidos, esse número ainda é muito pequeno. Isso se deve, entre outros motivos, à baixa renda da maioria da população brasileira que não consegue economizar para investir. Para os que conseguem poupar, o conservadorismo impera em relação a investimentos, havendo a preferência, de grande parte, pela caderneta de poupança. Mas isso também é consequência da falta de abordagem do mercado de capitais em sala de aula.

Inúmeros exercícios didáticos podem ser elaborados na abordagem do mercado de ações para turmas do ensino médio, utilizando diversos conceitos matemáticos; da álgebra à geometria. Sendo os pormenores destes conceitos totalmente acessíves e de fácil compreensão por alunos do ensino básico.

E este foi o principal propósito deste trabalho; mostrar que é possível seguir um modelo didático com noções de matemática financeira para introduzir o mercado de ações em sala de aula, contribuindo para uma educação financeira efetiva.

REFERÊNCIAS

ASSAF NETO, Alexandre. **Mercado Financeiro**. São Paulo: Atlas, 2008.

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática Financeira e suas aplicações**. São Paulo: Atlas, 2012.

B3 - AÇÕES: Disponível em: <http://www.b3.com.br>

BURDEN, L. Richard, FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

CAVALCANTI, Franciso. **Mercado de Capitais: O que é, como funciona**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

COMITÊ NACIONAL DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA. **Educação Financeira nas Escolas: ensino médio**. Brasília: CONEF, 2013.

COMISSÃO DE VALORES MOBILÁRIOS. **Análise de Investimentos: Histórico, principais ferramentas, e mudanças conceituais para o futuro**. Rio de Janeiro: CVM, 2017.

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. São Paulo: UNICAMP, 2003.

FERREIRA, Vera Rita de Mello. **Decisões econômicas: você já parou para pensar?** São Paulo: Saraiva, 2007.

FONTE, Cidália Maria Parreira da Costa. **Ajustamento de observações utilizando o método dos mínimos quadrados**. Universidade de Coimbra, 1994.

GORDON, Myron J. **Dividends, Earnings, and Stock Prices**. The Review of Economics and Statistics, v. 41, n. 2, p. 99-105, 1959.

GUERRA, Fernando. **Matemática Financeira através da HP-12C**. Florianópolis: UFSC, 2013.

GUJARATI, Damodar N. **Econometria Básica**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2000.

MORGADO, Augusto César, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORGADO, Augusto César, WAGNER, Eduardo, ZANI, Sheila C. **Progressões e Matemática Financeira**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

NAVARRO, Conrado, MASSARO, André. **Dinheiro é um santo remédio - Cure sua vida financeira e nunca saia de forma**. São Paulo: Gente, 2013.

PADOVEZE, Clóvis Luís. **Manual de contabilidade básica: uma introdução à prática contábil**. São Paulo: Atlas, 2007.

QUANDT, Waldir. **Tópicos de Matemática Financeira**. Florianópolis: UFSC, 2010.

SAMANEZ, Carlos Patricio. **Matemática Financeira**. São Paulo: Person Prentice Hall, 2010.

VIDOR, George. **A história da CVM pelo olhar de seus ex-presidentes**. Rio de Janeiro: ANBIMA e BM&FBOVESPA, 2016.