



GABRIEL MENDES GIACOMELLI

**ABRIDGED NOTATION: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE  
GEOMETRIA ANALÍTICA**

**Santo André, 2019**





**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

**CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO**

**GABRIEL MENDES GIACOMELLI**

**ABRIDGED NOTATION: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE  
GEOMETRIA ANALÍTICA**

**Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Boero**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO GABRIEL MENDES GIACOMELLI  
E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. ANA CAROLINA BOERO.

**SANTO ANDRÉ, 2019**

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Mendes Giacomelli, Gabriel  
ABRIDGED NOTATION : UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE  
GEOMETRIA ANALÍTICA / Gabriel Mendes Giacomelli. — 2019.

117 fls. : il.

Orientadora: Ana Carolina Boero

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo  
André, 2019.

1. Geometria Analítica. 2. Abridged Notation. 3. Teorema de Pascal. 4.  
Teorema de Pappus. 5. Teorema de Brianchon. I. Boero, Ana Carolina. II.  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,  
2019. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 18 de Junho de 2019.

Assinatura do autor:

Assinatura do orientador:



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**  
**Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática**  
**em Rede Nacional**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 - Fone: (11) 4996-0017  
profmat@ufabc.edu.br

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Gabriel Mendes Giacomelli, realizada em 27 de março de 2019:

Prof.(a) Dr.(a) **Ana Carolina Boero** (Universidade Federal do ABC) – Presidente

Prof.(a) Dr.(a) **Eduardo Guéron** (Universidade Federal do ABC) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Alexandre LyMBERopoulos** (Universidade de São Paulo) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Daniel Miranda Machado** (Universidade Federal do ABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Gleiciane da Silva Aragão** (Universidade Federal de São Paulo) – Membro Suplente



Universidade Federal do ABC

---

Aos meus pais, irmãos, minha futura esposa e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.





---

## AGRADECIMENTOS

---

Gostaria de expressar os meus mais profundos agradecimentos aos meus pais, especialmente à minha mãe pelos momentos que me proporcionou quando novo, me deu responsabilidade e o exemplo que eu precisava, me incentivando e puxando para cima em momentos de dificuldade, passamos por muitas coisas e sem o seu incentivo não chegaria onde cheguei. Ao meu pai que apesar da distância em grande parte da minha vida, me proporcionou boas conversas.

Agradeço a toda a minha família, por cada um ter me ensinado um pouco, terem sido referências muito importantes sempre trabalhando muito e dando o melhor possível.

A UFABC, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

A minha orientadora Ana Carolina, que aceitou trabalhar comigo e me incentivou a escolher o tema que fosse mais próximo da minha personalidade. Agradeço pelas conversas e correções nesta dissertação.

A minha esposa Fabiana, minha companheira, a pessoa que esteve comigo o tempo todo e me inspirou para produzir esse trabalho, me deu força e paciência. Sou muito grato e feliz pelo seu apoio.

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



---

*“Sou um homem e não um animal selvagem” — voltou a assegurar-se Takezo, “e no instante em que me conscientizei dessa verdade, minha vida se tornou preciosa”. Pois enquanto não soubesse até onde conseguiria aprimorar-se como ser humano, enquanto não lograsse concluir esse aprimoramento, não se sentia disposto a abrir mão da vida.*

(Eiji Yoshikawa, *Musashi*)



---

## RESUMO

---

Propomos, nesta dissertação, incorporar a *Abridged Notation* (ou *Notação Abreviada*, em português) no ensino de Geometria Analítica na Educação Básica. Além de destacar suas vantagens e apontar suas limitações, mostramos a utilidade dessa notação ao apresentar demonstrações simples e elegantes de alguns resultados célebres da Matemática. Iniciamos o texto estabelecendo os fundamentos da Geometria Analítica Plana para, em seguida, introduzir o método da *Abridged Notation* e algumas aplicações interessantes, que culminam nos Teoremas de Pascal, Steiner e Brianchon. Com o intuito de oferecer uma ferramenta adicional de familiarização ao tema proposto, utilizamos o software GeoGebra para elaborar atividades que contemplam assuntos discutidos em capítulos anteriores. Por fim, apresentamos um plano de aula como sugestão para implementar essa proposta.

**Palavras-chave:** Geometria Analítica, *Abridged Notation*, Teorema de Pascal, Teorema de Pappus, Teorema de Steiner, Teorema de Brianchon



---

## ABSTRACT

---

We propose, in this dissertation, to incorporate *Abridged Notation* in the teaching of Analytic Geometry in Basic Education. In addition to highlighting its advantages and pointing out its limitations, we show the usefulness of this notation by presenting simple and elegant proofs of some celebrated theorems. We start the text by establishing the fundamentals of Plane Analytic Geometry and then introduce the Abridged Notation method and some interesting applications that culminate in Pascal, Steiner, and Brianchon Theorems. In order to provide an additional familiarization tool to the proposed theme, we use GeoGebra software to prepare activities that address subjects discussed in previous chapters. Finally, we present a lesson plan as a suggestion to implement this proposal.

**Keywords:** Analytic Geometry, Abridged Notation, Pascal's Theorem, Pappus's Theorem, Steiner's Theorem, Brianchon's Theorem





---

# CONTEÚDO

---

INTRODUÇÃO	1
1 SISTEMAS DE COORDENADAS	5
1.1 O plano cartesiano . . . . .	6
1.2 Retas no plano cartesiano . . . . .	9
1.3 Cônicas no plano cartesiano . . . . .	14
2 ABRIDGED NOTATION	23
2.1 Abridged Notation no estudo de retas . . . . .	23
2.2 Abridged Notation no estudo de cônicas . . . . .	29
2.3 Uma outra vantagem do método da Abridged Notation . . . . .	30
3 TEOREMAS DE PASCAL, STEINER E BRIANCHON	33
3.1 Teorema de Pascal . . . . .	33
3.1.1 Casos particulares do Teorema de Pascal . . . . .	42
3.1.2 Uma aplicação do Teorema de Pascal . . . . .	44
3.2 Teorema de Steiner . . . . .	46
3.3 Teorema de Brianchon . . . . .	50
4 ATIVIDADES	53
4.1 Atividades de Nível 1 . . . . .	53
4.1.1 Análise de $\alpha - k\beta = 0$ . . . . .	53
4.1.2 $\alpha - k\beta = 0$ com $k$ igual a 1 ou -1 . . . . .	55
4.1.3 Atividade envolvendo bissetrizes . . . . .	56
4.2 Atividades de Nível 2 . . . . .	58
4.2.1 Análise de $\alpha\beta - k\gamma\delta = 0$ . . . . .	58
4.2.2 Teorema de Brianchon . . . . .	59
4.2.3 Teorema de Pappus . . . . .	64
4.2.4 Teorema de Pascal . . . . .	65
4.3 Atividades de Nível 3 . . . . .	66
4.3.1 Teorema de Steiner . . . . .	66

4.3.2	Construção de cônicas através do Teorema de Pascal . . . . .	66
4.3.3	Por que o nome “cônica”? . . . . .	67
5	UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA . . . . .	75
5.1	Breves considerações sobre a BNCC . . . . .	75
5.2	Plano de Aula - Incorporando a Abridged Notation no Ensino Médio . . . . .	77
5.2.1	Aula 1: Apresentação do software GeoGebra . . . . .	78
5.2.2	Aulas 2 e 3: Introduzindo a Abridged Notation . . . . .	80
5.2.3	Aulas 4 e 5: Aprofundando em Abridged Notation . . . . .	80
5.2.4	Aulas 6, 7 e 8: Teoremas de Brianchon, Pappus e Pascal . . . . .	80
5.2.5	Aula 9: Reflexões . . . . .	80
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	83
A	OUTROS EXEMPLOS DE SISTEMAS DE COORDENADAS NO PLANO . . . . .	87
A.1	Coordenadas polares . . . . .	87
A.1.1	Transformação de coordenadas polares para cartesianas . . . . .	88
A.2	Coordenadas trilineares . . . . .	89
B	RETAS E CONJUGADO ISOGONAIS . . . . .	91
C	PONTOS E RETAS NO INFINITO . . . . .	97
D	O TEOREMA DE PASCAL COMO CONSEQUÊNCIA DO TEOREMA DE CHASLES . . . . .	99
E	O TEOREMA DE BRIANCHON COMO COROLÁRIO DO TEOREMA DE PASCAL . . . . .	101
E.1	Polo e polar . . . . .	101
E.2	Teorema de Brianchon . . . . .	103
F	5 PONTOS, 4 PONTOS, 3 PONTOS . . . . .	105
F.1	Pentágono . . . . .	105
F.2	Quadrilátero . . . . .	106
F.3	Triângulo . . . . .	107
G	COMPETÊNCIAS APONTADAS PELA BNCC . . . . .	109
G.1	Competências gerais da Educação Básica . . . . .	109
G.2	Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio . . . . .	110
H	MATERIAL COMPLEMENTAR AO PLANO DE AULA . . . . .	113

H.1	Lista de exercícios para treinar ferramentas do GeoGebra . . . . .	113
H.2	Questionário . . . . .	115
	Bibliografia	117



---

## INTRODUÇÃO

---

A Matemática é uma ciência que originalmente tinha duas funções: trabalhar com números e magnitudes. Desde o início existiam preocupações em fazer correlações entre os números e magnitudes geométricas, temos evidências dessas preocupações em antigos documentos da Mesopotâmia, Egito, China e Índia. Mesmo conseguindo vários avanços na Geometria da época, como aproximações de  $\pi$  para 3 ou 3,16, os antigos não conseguiram chegar em elementos essenciais para fazer essa correlação, como a ideia de coordenadas e equações de curvas.

Olhando para as contribuições mais próximas da atualidade, temos que fazer uma parada nos séculos XVI e XVII, mais especificamente em Pierre de Fermat<sup>1</sup> (1608-1665) e René Descartes<sup>2</sup> (1596-1650), dois homens que criaram de maneira independente a Geometria Analítica. A partir daí outros matemáticos passaram a se dedicar a esse tema, dentre eles os que citaremos nesse trabalho: Blaise Pascal (1623-1662), Jacob Steiner (1796-1863) e George Salmon (1819-1904).

Chegando na atualidade, a partir da Segunda Guerra Mundial<sup>3</sup>, o ensino de Matemática foi reformulado no Brasil, de forma a valorizar a representação geométrica de equações, ou seja, a Geometria Analítica. A partir de então esse tema se fez presente e ainda faz no cotidiano do ensino de Matemática e agora se encontra na etapa chamada Ensino Médio.

Esta dissertação, como o título indica, tratará sobre uma proposta de ensino para Geometria Analítica no Ensino Médio. O ensino de Geometria Analítica, hoje, se dá através de “fórmulas” que pouco fazem sentido para o aluno. Buscamos através desta dissertação mudar um pouco essa via de informações, nos instrumentalizando com o uso do GeoGebra e trazendo uma proposta ambiciosa que é a introdução da *Abridged Notation* (Notação Abreviada) no Ensino Médio.

---

1 Advogado com um interesse profundo em trabalhos de geometria da antiguidade clássica.

2 Filósofo que encontrou na Matemática a base para o pensamento racional.

3 <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/162247/Jos%C3%A9%20Lopes%20Valentim%20J%C3%BAnior.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

A Abridged Notation é uma notação matemática que usamos para abreviar equações de lugares geométricos no plano. A partir dessa nova notação abrimos aos alunos a reflexão sobre o fato da escolha dela ser significativa para podermos entender o ambiente matemático onde estamos nos colocando (acredito ser importante essa reflexão, para fazer o aluno entender que a Matemática é uma linguagem — coisa que não fica muito clara na cabeça deles).

Uma pergunta que poderia aparacer é: por que Abridged Notation? Veremos no decorrer desta dissertação que a Abridged Notation traz um ambiente propício e controlado para o ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio, onde os alunos podem desenvolver habilidades como raciocínio lógico (observando a relação entre a forma de escrever uma reta passando pela intersecção de outras duas e a própria equação dessas outras), reconhecimento de padrões (o aluno teria que identificar que um formato de equação pode representar vários tipos de curvas, mudando apenas o tipo de curva que cada termo significa), habilidade de representar adequadamente uma situação problema (pelo fato da notação ser diferente da qual estamos acostumados no Ensino Médio, o aluno teria que tomar autonomia para representar um problema/demonstração de maneira correta).

No Capítulo 1 abordaremos Geometria Analítica e conceitos básicos que serão utilizados no decorrer da dissertação. Daremos destaque para tipos de equações de retas e tipos de cônicas.

No Capítulo 2 apresentaremos a Abridged Notation, dando significado a essa nova notação. Nesse capítulo, apresentaremos a equação de um lugar geométrico que passa pela intersecção de outros dois (do mesmo tipo).

No Capítulo 3 contemplaremos aplicações da Abridged Notation para demonstrar o Teorema de Pascal, e como consequência, os Teoremas de Pappus, de Steiner e de Brianchon. Aqui daremos a oportunidade da Abridged Notation mostrar suas vantagens listadas acima.

No Capítulo 4 apresentaremos atividades sobre os temas citados nos capítulos anteriores. Importante salientar que essas atividades foram escolhidas nessa ordem por causa de seus níveis de cobrança (com relação à complexidade do conteúdo), níveis de exigência do conhecimento sobre o GeoGebra e grau de abstração, começando com atividades de fixação e compreensão de padrões até compreender partes, ou completamente, a demonstração de um teorema.

No Capítulo 5, montaremos uma sequência de nove aulas para o 3º ano do Ensino Médio. Nesse capítulo discutiremos sobre a BNCC, Base Nacional Comum Curricular, falaremos sobre sua relevância norteadora para a educação do país. Daremos informações importantes sobre o documento, como algumas habilidades e competências que os alunos devem desenvolver em cada etapa da vida algumas delas podem ser vistas no Apêndice G.

Por último, no Capítulo 6, faremos nossas considerações finais discutindo a importância do ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio e justificaremos por que a Abridged Notation não só é uma opção entre várias para o Ensino de Geometria Analítica, como também seria recomendável seu uso.

A escolha do tema Geometria Analítica se deu pois é uma das matérias de Matemática onde o aluno tem maior dificuldade, já que é passada para eles de maneira muito abstrata e descontextualizada, até mesmo para a própria Matemática. O nosso objetivo, então, seria buscar uma maneira diferente de tratá-la, mesmo que de maneira ainda abstrata, mas que despertasse a vontade do aluno em estudá-la. Dessa forma buscamos nesses teoremas, com o auxílio do Geogebra, um artifício visual onde o aluno pudesse ver claramente o que a equação que ele está montando representa. Com o auxílio do que será exposto nesta dissertação podemos também resolver algumas questões de vestibular para alguns alunos, se esse for o objetivo.





---

## SISTEMAS DE COORDENADAS

---

A Geometria Analítica é o ramo da Matemática que utiliza simbolismos e métodos algébricos para representar e resolver problemas geométricos. A ideia de relacionar lugares geométricos a equações surgiu (ainda que de forma não tão explícita) na tentativa de René Descartes de solucionar o seguinte problema, proposto por Pappus<sup>1</sup>.

**Problema** (Pappus). Sejam três (ou quatro) retas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (e  $d$ ). Dado um ponto  $P$ , denotamos por  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  (e  $PD$ ) as distâncias de  $P$  a essas retas. Queremos determinar o lugar geométrico de todos os pontos  $P$  tais que  $PA \cdot PB = (PC)^2$  (ou  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ).

De acordo com [10], ao trabalhar em uma solução para esse problema, Descartes sugeriu fixar a posição do ponto  $P$  por meio de dois valores,  $x = OA$  e  $y = AP$ , onde  $O = a \cap b$ . Ele foi capaz de escrever  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  (e  $PD$ ) em termos de  $x$  e  $y$  e, ao calcular  $PA \cdot PB = (PC)^2$  e  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , afirmou que as soluções para o problema em questão seriam cônicas.

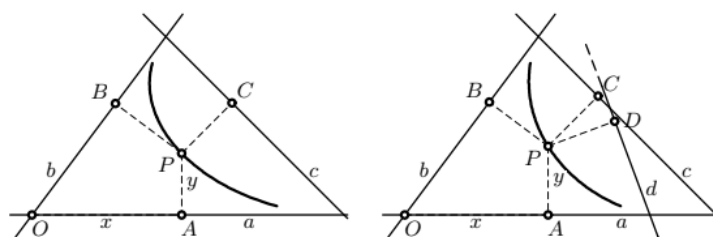


Figura 1: Problema de Pappus com 3 retas (à esquerda) e com 4 retas (à direita).

---

<sup>1</sup> Matemático grego do período helenístico, Pappus de Alexandria (290-350) criou vários teoremas precursores da Geometria Projetiva e foi também um importante pesquisador e autor de textos sobre cientistas da antiga civilização grega.

O Problema de Pappus é um problema sobre posição. Segundo [11], os teoremas da Geometria podem ser divididos em duas classes: teoremas sobre tamanho/magnitude de segmentos e teoremas sobre suas posições. Como exemplo de um teorema sobre tamanho de segmentos, citamos o Teorema de Pitágoras; um exemplo de teorema sobre posição seria “as três mediatrizes de um triângulo se cruzam em um único ponto”. Até a época de Descartes, as afirmações mais fáceis de serem exprimidas algebricamente versavam sobre o tamanho de segmentos, e não era fácil dar uma formulação algébrica a afirmações envolvendo posição de segmentos. Descartes propôs uma forma inédita de identificar lugares geométricos em um plano (e, também, no espaço). Em outras palavras, ele lançou as bases do que conhecemos hoje por Geometria Analítica e que foi responsável por extraordinários progressos na Matemática.

### 1.1 O PLANO CARTESIANO

Um elemento essencial da Geometria Analítica Plana é o uso sistemático de coordenadas (isto é, de números que determinam a posição de um ponto no plano). Nesta seção, consideraremos o mais simples e, também, o mais importante sistema de coordenadas: o sistema de coordenadas cartesianas. Outros exemplos de sistemas de coordenadas são dados no Apêndice A.

Uma reta é dita *orientada* quando escolhemos um sentido de percurso para ela, o qual será denominado *positivo*.



Figura 2: Reta orientada.

Em uma reta orientada, dizemos que o ponto  $B$  está à *direita* do ponto  $A$  (ou, equivalentemente, que o ponto  $A$  está à *esquerda* do ponto  $B$ ) quando o sentido de percurso de  $A$  para  $B$  for positivo.



Figura 3: Nesta reta orientada, o ponto  $B$  está à direita do ponto  $A$ .

Um *eixo* é uma reta orientada sobre a qual fixamos um ponto  $O$ , denominado a sua *origem*.

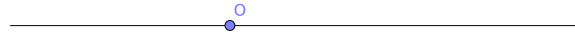


Figura 4: Eixo.

Todo eixo está em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais,  $\mathbb{R}$ : à origem fazemos corresponder o número  $x = 0$ ; a cada ponto  $X$  à direita da origem fazemos corresponder o número  $x = d(O, X)$ ; a cada ponto  $X$  à esquerda da origem fazemos corresponder o número  $x = -d(O, X)$ , onde  $d(O, X)$  denota a distância entre  $O$  e  $X$ .<sup>2</sup> Em cada caso, o número real  $x$  é dito a *coordenada* de  $X$  em relação ao eixo considerado.

Um *sistema de coordenadas cartesianas* para o plano consiste de um par ordenado de eixos com a mesma origem  $O$ . Denotaremos por  $Ox$  e  $Oy$  o primeiro e segundo eixos, respectivamente. Os eixos  $Ox$  e  $Oy$  são ditos *ortogonais* se formam ângulos retos entre si; caso contrário, são denominados *oblíquos*. Ao fixarmos um sistema de coordenadas cartesianas em um plano, obtemos o que é conhecido por *plano cartesiano*.

Note que, ao fixar um sistema de coordenadas cartesianas em um plano, o colocamos em correspondência biunívoca com o conjunto dos pares ordenados de números reais,  $\mathbb{R}^2$ : por cada ponto  $P$  do plano, traçamos retas paralelas aos eixos  $Ox$  e  $Oy$ ; essas retas intersectam os eixos  $Oy$  e  $Ox$ , respectivamente, em pontos  $M$  e  $N$ ; sendo  $x$  a coordenada de  $N$  em relação a  $Ox$  e  $y$  a coordenada de  $M$  em relação a  $Oy$ , fazemos corresponder a  $P$  o par ordenado  $(x, y)$ . Os números  $x$  e  $y$  são denominados as *coordenadas* de  $P$ , sendo  $x$  a sua *abscissa* e  $y$  a sua *ordenada* em relação a esse sistema de coordenadas.

---

<sup>2</sup> Admitimos fixada uma unidade de comprimento com a qual medimos a distância  $d(A, B)$  entre os pontos  $A$  e  $B$ .

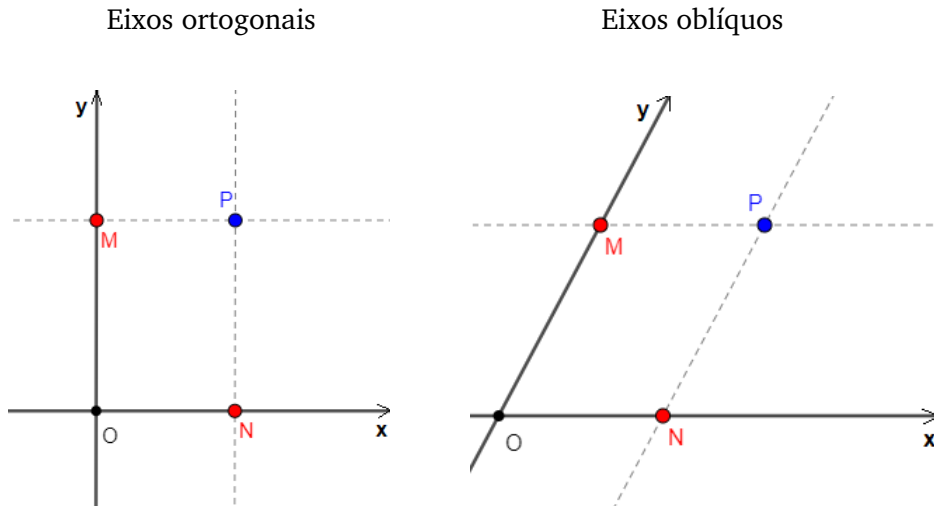


Tabela 1: Planos cartesianos.

Um sistema de coordenadas cartesianas decompõe o plano em quatro regiões chamadas *quadrantes*. O primeiro quadrante é constituído dos pontos que têm ambas coordenadas positivas; o segundo quadrante é formado pelos pontos que têm abscissa negativa e ordenada positiva; os pontos que constituem ao terceiro quadrante são aqueles que têm ambas coordenadas negativas; por fim, um ponto está no quarto quadrante se, e somente se, sua abscissa é positiva e sua ordenada, negativa.

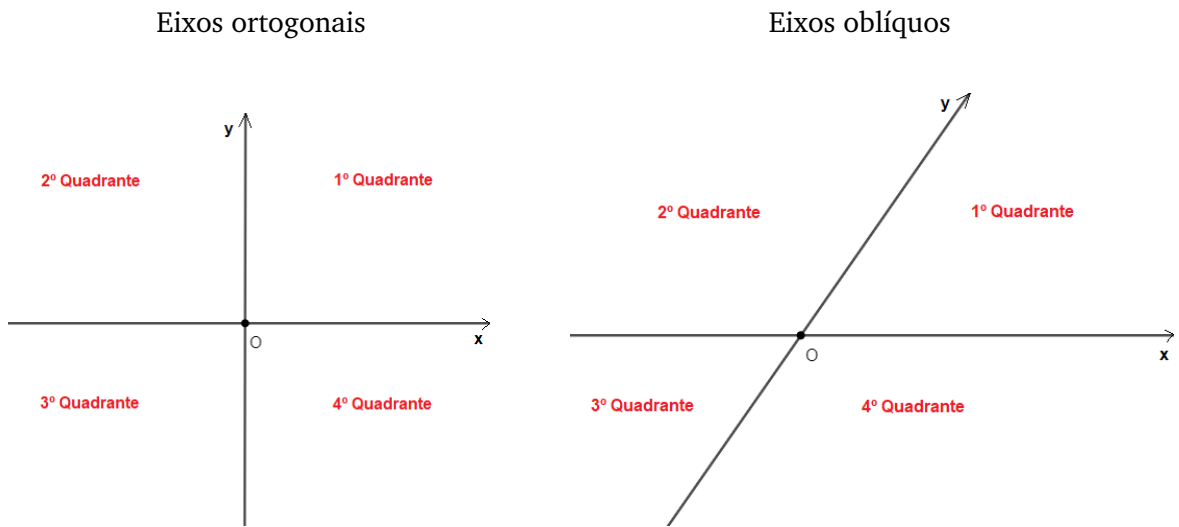


Tabela 2: Quadrantes.

**Exemplo 1.1.** Os pontos  $A = (2, 3)$ ,  $B = (-1, 4)$ ,  $C = (3, 0)$ ,  $D = (-2, -4)$ ,  $E = (0, -1)$  e  $F(2, -3)$  se localizam da seguinte maneira no plano cartesiano:

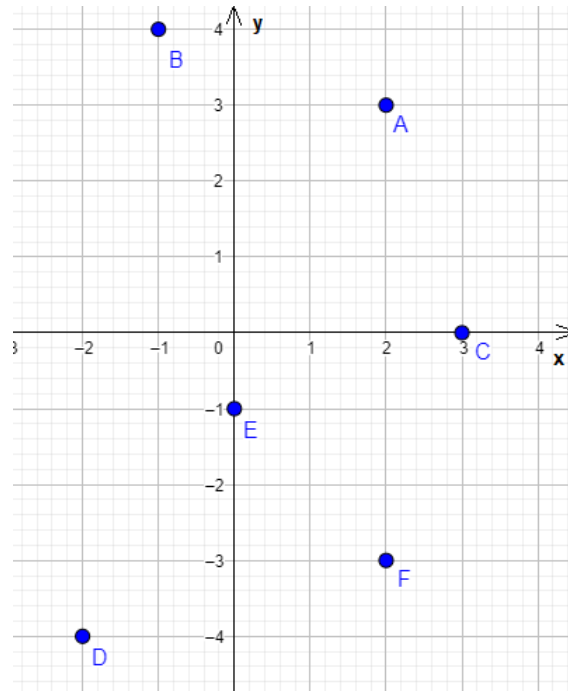
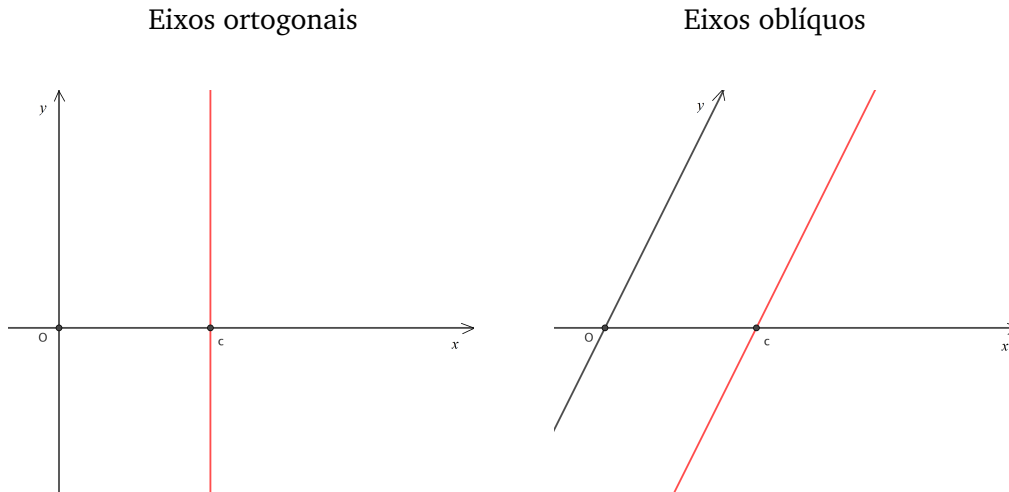


Figura 5: Localizando pontos no plano cartesiano.

## 1.2 RETAS NO PLANO CARTESIANO

Nesta seção, começaremos a explorar a relação entre lugares geométricos e equações no plano cartesiano.

A equação  $x = c$  é satisfeita por todos os pontos do plano cartesiano que têm abscissa  $c$ . Além disso, nenhum ponto que tem abscissa diferente de  $c$  a satisfaz. Uma vez que o conjunto dos pontos do plano cartesiano que têm abscissa  $c$  coincide com a reta paralela ao eixo  $Oy$  que intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de coordenada  $c$ , concluímos que  $x = c$  é a equação desta reta. Analogamente,  $y = c$  é a equação da reta paralela ao eixo  $Ox$  que intersecta o eixo  $Oy$  no ponto de coordenada  $c$ .

Tabela 3: A reta  $x = c$ .

Os exemplos acima mostram que retas paralelas a um eixo coordenado são representadas por equações do 1º grau nas variáveis  $x$  e  $y$ . Provaremos, a seguir, que isto vale para qualquer reta.

Sejam  $r$  uma reta não paralela a qualquer eixo coordenado e  $P = (x_0, y_0)$  um ponto sobre  $r$ . Se  $(x, y)$  denota as coordenadas de um ponto do plano cartesiano diferente de  $P$ , então esse ponto pertence a  $r$  se, e somente se, existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

ou seja, se, e somente se,

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

onde  $m$  denota a *inclinação* de  $r$ .<sup>3</sup> Logo,

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

é uma equação (do 1º grau nas variáveis  $x$  e  $y$ ) de  $r$ .

*Observações.*

1. Uma vez que  $r$  não é paralela ao eixo  $Oy$ , ela o intersecta em um ponto de coordenada  $n$ . Do fato de  $(0, n)$  pertencer a  $r$  segue que  $y - n = m(x - 0)$  ou seja,

$$y = mx + n.$$

Esta equação é denominada a *equação reduzida* de  $r$ .

<sup>3</sup> Se  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  são pontos distintos de uma reta  $r$ , definimos  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Um argumento de semelhança de triângulos mostra que  $Q = (x, y)$ ,  $Q \neq P_1$ , pertence à  $r$  se, e somente se,  $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$ .

2. Uma vez que  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , onde  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  são pontos de  $r$ , temos que

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

é uma equação de  $r$ .

**Exemplo 1.2.** Para obter uma equação da reta que passa pelos pontos  $A = (2, -1)$  e  $B = (1, -2)$ , podemos usar a equação  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ , com  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$  e  $y_2 = -2$ , obtendo  $y - (-1) = \frac{-2 - (-1)}{1 - 2}(x - 2)$ , que é equivalente a  $y = x - 3$ .

Esta última expressão destaca que a reta  $AB$  intersecta o eixo  $Oy$  no ponto de coordenada  $-3$  e, caso os eixos sejam ortogonais, o ângulo  $\alpha$  destacado na figura abaixo mede  $45^\circ$ .

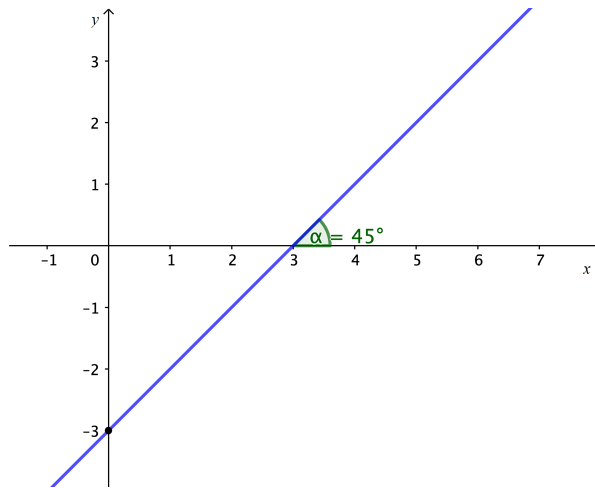


Figura 6: Equação reduzida.

Ao supor que  $r$  não é paralela a qualquer eixo temos que  $r$  intersecta  $Ox$  em um ponto de coordenada  $a$  e  $r$  intersecta  $Oy$  em um ponto de coordenada  $b$ . Quando  $a$  e  $b$  são não-nulos, fazendo  $P_1 = (a, 0)$  e  $P_2 = (0, b)$ , obtemos

$$y = \frac{b}{-a}(x - a).$$

Dividindo ambos os membros por  $b$  e reagrupando-os, obtemos a seguinte equação de  $r$ , denominada *segmentária*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

**Exemplo 1.3.** Já sabemos que  $y = x - 3$  é uma equação da reta que passa pelos pontos  $A = (2, -1)$  e  $B = (1, -2)$ . A equação segmentária de  $AB$  é obtida a partir de  $y = x - 3$  dividindo ambos os membros por  $-3$  e reagrupando-os:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-3} = 1.$$

Esta última expressão destaca que a reta  $AB$  intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de coordenada 3 e que  $AB$  intersecta o eixo  $Oy$  no ponto de coordenada  $-3$ .

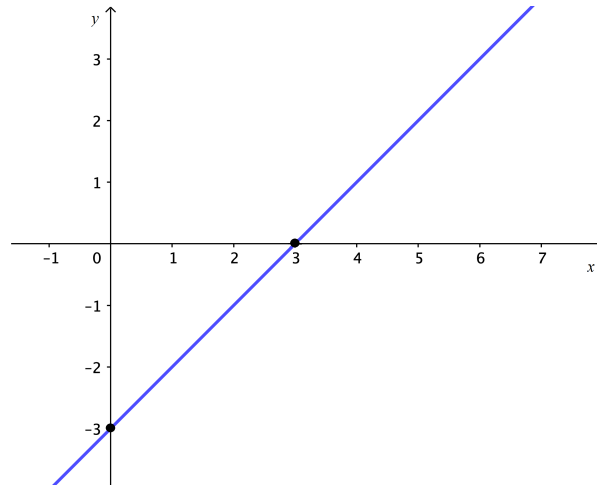


Figura 7: Equação segmentária.

Reciprocamente, toda equação do 1º grau nas variáveis  $x$  e  $y$  representa uma reta no plano cartesiano. Com efeito, seja  $ax + by + c = 0$  uma tal equação. Se  $b \neq 0$ , então  $ax + by + c = 0$  é equivalente a  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ , e já sabemos que a reta que intersecta o eixo  $Oy$  no ponto de coordenada  $-\frac{c}{b}$  e cuja inclinação é  $-\frac{a}{b}$  é representada por essa última equação. Se  $b = 0$ , então  $ax + by + c = 0$  é equivalente a  $x = -\frac{c}{a}$ , que representa uma reta paralela ao eixo  $Oy$ . Costumamos nos referir a  $ax + by + c = 0$  como uma *equação geral* da reta que ela representa.

*Observação.* Não é difícil notar que se uma equação do primeiro grau em duas variáveis é obtida a partir de outra pela multiplicação de uma constante, então as duas equações representam a mesma reta. Reciprocamente, se  $ax + by + c = 0$  e  $dx + ey + f = 0$  representam a mesma reta, então existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $dx + ey + f = k(ax + by + c)$ . Com efeito, suponha primeiramente que  $b$  e  $e$  sejam diferentes de 0. Como ambas equações representam a mesma reta, suas inclinações são iguais, ou seja,

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{e}. \quad (1.1)$$



Além disso, elas intersectam o eixo  $Oy$  no mesmo ponto, ou seja,

$$\frac{c}{b} = \frac{f}{e}. \quad (1.2)$$

Multiplicando  $ax + by + c = 0$  por  $\frac{e}{b}$ , obtemos

$$e\frac{a}{b}x + ey + e\frac{c}{b} = 0. \quad (1.3)$$

Substituindo (1.1) e (1.2) em (1.3), obtemos  $dx + ey + f = 0$ . Por fim, se  $b = 0$  ou  $e = 0$ , então  $b = 0$  e  $e = 0$ , uma vez que ambas representam a mesma reta (que, neste caso, será paralela ao eixo  $Oy$ ). Temos também que  $\frac{c}{a} = \frac{f}{d}$ . Multiplicando  $ax + c = 0$  por  $\frac{d}{a}$ , obtemos  $dx + f = 0$  (quando  $a, d \neq 0$ ).

Encerraremos esta seção apresentando um outro tipo de equação de reta cuja utilidade ficará ainda mais clara ao longo do texto.

Denotando por  $H$  o pé da perpendicular à reta  $r$  passando por  $O$ , por  $M = (0, b)$  e  $N = (a, 0)$  os pontos onde  $r$  intersecta, respectivamente, os eixos  $Oy$  e  $Ox$ , por  $\alpha$  o ângulo  $NOH$  e por  $\beta$  o ângulo  $HOM$ , temos que

$$a = \frac{p}{\cos \alpha} \quad (1.4)$$

e

$$b = \frac{p}{\cos \beta} \quad (1.5)$$

onde  $p = d(r, O) = d(H, O)$ .

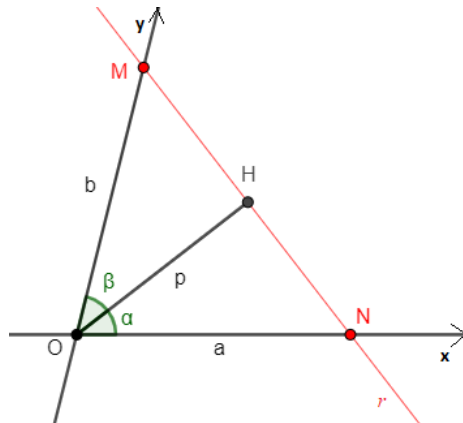


Figura 8: Obtendo a equação trigonométrica de  $r$ .

Substituindo (1.4) e (1.5) na equação segmentária de  $r$ ,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

obtemos

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0. \quad (1.6)$$

Note que se os eixos forem ortogonais, então  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  e (1.6) se torna

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0. \quad (1.7)$$

As equações (1.6) e (1.7) são denominadas *equações trigonométricas de  $r$* .

**Proposição 1.4.** *Se  $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0$  é a equação trigonométrica de uma reta  $r$  e  $P = (x_0, y_0)$  é um ponto do plano cartesiano, então  $d(P, r) = x_0 \cos \alpha + y_0 \operatorname{sen} \alpha - p$  se  $P$  e  $O$  estão em semiplanos opostos determinados por  $r$  e  $d(P, r) = -(x_0 \cos \alpha + y_0 \operatorname{sen} \alpha - p)$  se  $P$  e  $O$  estão no mesmo semiplano determinado por  $r$ .*

*Demonstração.* Seja  $s$  a reta paralela a  $r$  passando por  $P$ .

Se  $O$  não está entre  $r$  e  $s$ , então  $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p' = 0$  é a equação trigonométrica de  $s$ , onde  $p' = d(O, s)$ . Como  $P$  está sobre  $s$ , temos que  $p' = x_0 \cos \alpha + y_0 \operatorname{sen} \alpha$ . Se  $P$  e  $O$  estão em semiplanos opostos determinados por  $r$ , então  $d(P, r) = p' - p = x_0 \cos \alpha + y_0 \operatorname{sen} \alpha - p$ . Se  $P$  e  $O$  estão no mesmo semiplano determinado por  $r$ , então  $d(P, r) = p - p' = p - (x_0 \cos \alpha + y_0 \operatorname{sen} \alpha) = -(x_0 \cos \alpha + y_0 \operatorname{sen} \alpha - p)$ .

Se  $O$  está entre  $r$  e  $s$  (e, portanto,  $P$  e  $O$  estão no mesmo semiplano determinado por  $r$ ), então  $x \cos(\pi + \alpha) + y \operatorname{sen}(\pi + \alpha) - p' = 0$  é a equação trigonométrica de  $s$ , onde  $p' = d(O, s)$ . Como  $P$  está sobre  $s$ , temos que  $p' = x_0 \cos(\pi + \alpha) + y_0 \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -x_0 \cos \alpha - y_0 \operatorname{sen} \alpha$ . Neste caso,  $d(P, r) = p' + p = -x_0 \cos \alpha - y_0 \operatorname{sen} \alpha + p = -(x_0 \cos \alpha + y_0 \operatorname{sen} \alpha - p)$ .  $\square$

### 1.3 CÔNICAS NO PLANO CARTESIANO

Na seção anterior vimos que toda equação do 1º grau em duas variáveis representa uma reta no plano cartesiano. Os exemplos abaixo mostram que, no caso de uma equação do 2º grau em duas variáveis, há outras possibilidades.

**Exemplo 1.5.** A equação  $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 12 = 0$  representa uma circunferência.

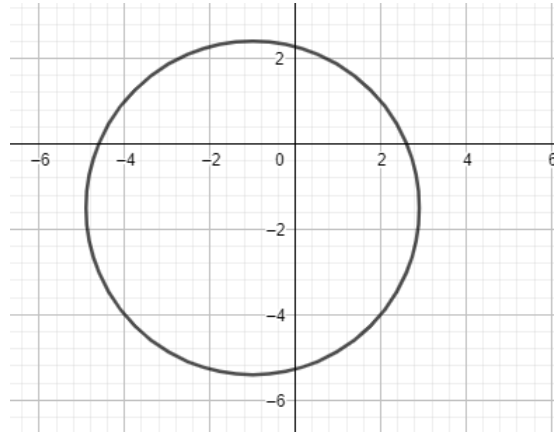


Figura 9:  $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 12 = 0$ .

Observe que esta equação pode ser escrita na forma  $(x + 1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{61}{4}$ .

**Exemplo 1.6.** A equação  $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$  representa uma elipse.

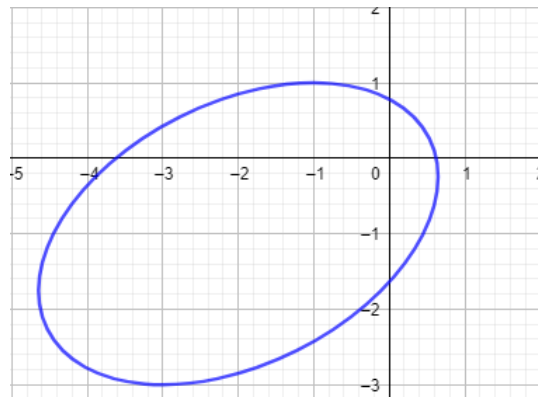


Figura 10:  $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$ .

**Exemplo 1.7.** A equação  $x^2 - 4xy + 2y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$  representa uma hipérbole.



Figura 11:  $x^2 - 4xy + 2y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$ .

**Exemplo 1.8.** A equação  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$  representa uma parábola.

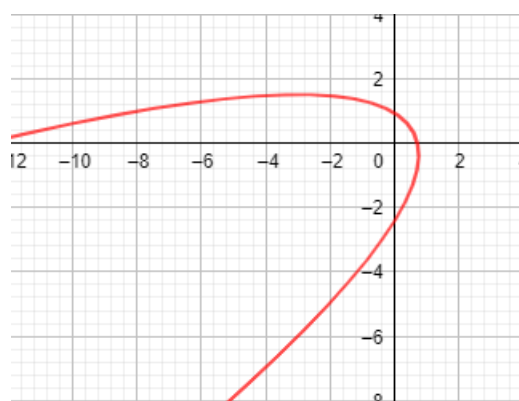


Figura 12:  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$ .

**Exemplo 1.9.** A equação  $2x^2 + 2xy - 4y^2 + x + 8y - 3 = 0$  representa um par de retas concorrentes.

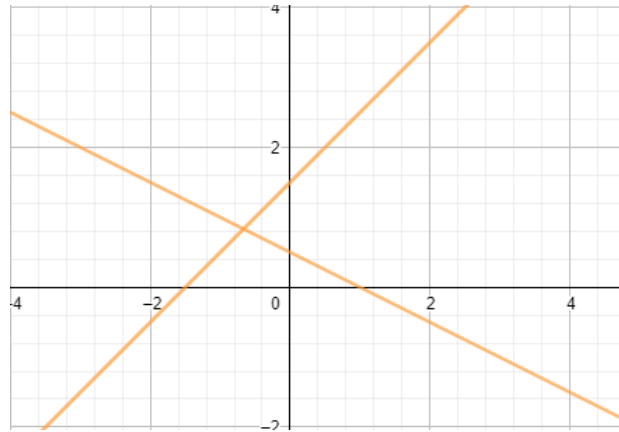


Figura 13:  $2x^2 + 2xy - 4y^2 + x + 8y - 3 = 0$ .

Observe que esta equação pode ser escrita na forma  $(x + 2y - 1)(2x - 2y + 3) = 0$ .

**Exemplo 1.10.** A equação  $2x^2 + 4xy + 2y^2 + x + y = 0$  representa um par de retas paralelas.

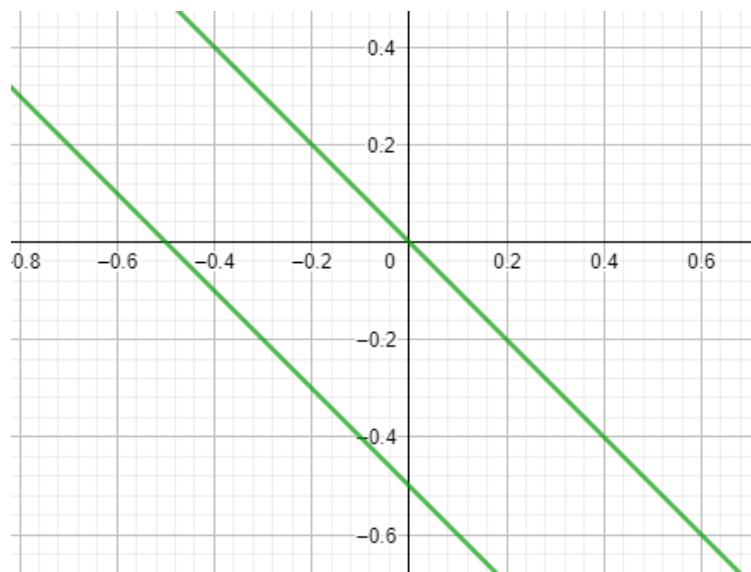


Figura 14:  $2x^2 + 4xy + 2y^2 + x + y = 0$ .

Observe que esta equação pode ser escrita na forma  $(x + y)[2(x + y) + 1] = 0$ .

**Exemplo 1.11.** A equação  $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  representa uma reta.

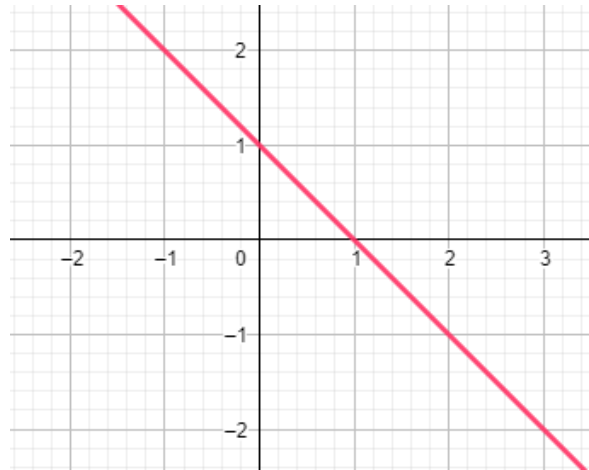


Figura 15:  $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ .

Observe que esta equação pode ser escrita na forma  $(x + y - 1)^2 = 0$ .

**Exemplo 1.12.** A equação  $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$  representa um ponto.

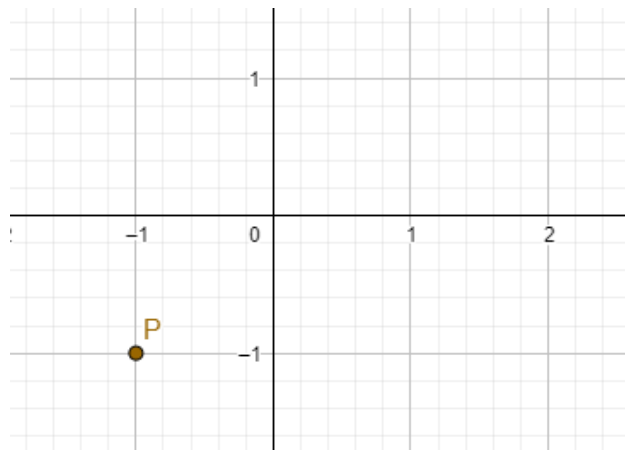


Figura 16:  $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$ .

Observe que esta equação pode ser escrita na forma  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$ .

**Exemplo 1.13.** A equação  $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 3 = 0$  representa o vazio.

Observe que ela pode ser escrita na forma  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + 1 = 0$ .

**Definição 1.14.** Suponha fixado um sistema de coordenadas cartesianas. Dada uma equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

denominamos *cônica* o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas a satisfazem.

É possível mostrar que os exemplos dados nesta seção ilustram todas as possibilidades para uma cônica (ou seja, que toda equação do 2º grau em duas variáveis representa um dos seguintes lugares geométricos: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas concorrentes, par de retas paralelas, reta, ponto ou vazio). Ao leitor interessado, sugerimos consultar [3] <sup>4</sup>.

**Proposição 1.15.** *Dados cinco pontos quaisquer do plano, três a três não colineares, existe uma única cônica que passa por eles.*

*Demonstração.* Começamos observando que por cinco pontos quaisquer do plano cartesiano passa pelo menos uma cônica. Com efeito, olhando para a equação  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ , podemos dividir ambos os membros por  $f$  (se  $f \neq 0$ ), obtendo  $a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + 1 = 0$ . Substituindo as coordenadas de cinco pontos nessa equação, teremos um sistema linear com cinco equações e cinco incógnitas, o qual admite solução.<sup>5</sup>

Suponha, agora, que esses cinco pontos sejam três a três não colineares. Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas de modo que o eixo das abscissas passe por dois desses pontos e o eixo das ordenadas passe por outros dois dentre os que restaram. Sejam  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ ,  $(0, y_1)$  e  $(0, y_2)$ , as coordenadas desses pontos e  $(x_3, y_3)$  as coordenadas do ponto remanescente (como podemos ver na Figura 17).

<sup>4</sup> Também é possível mostrar que qualquer circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas concorrentes, par de retas paralelas, reta e ponto do plano cartesiano, bem como o conjunto vazio, pode ser representado por uma equação do 2º grau em duas variáveis. Ao leitor interessado, sugerimos novamente [3].

<sup>5</sup> Observe que se  $f = 0$  teremos cinco incógnitas da mesma forma, porém a equação ficará da forma  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$ .

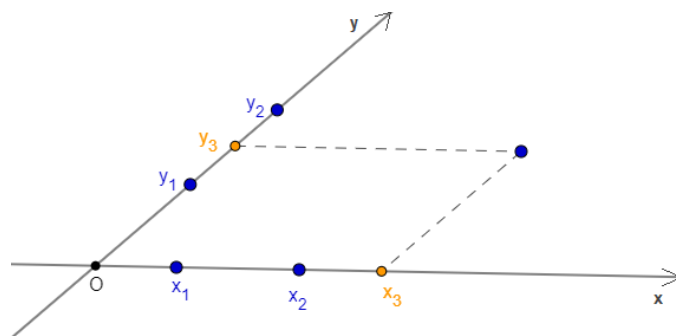


Figura 17: Sistema de coordenadas.

Se  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + 1 = 0$  é a equação de uma cônica que passa por esses cinco pontos, então

$$ax_1^2 + dx_1 + 1 = 0$$

$$ax_2^2 + dx_2 + 1 = 0$$

$$cy_1^2 + ey_1 + 1 = 0$$

$$cy_2^2 + ey_2 + 1 = 0$$

$$ax_3^2 + bx_3y_3 + cy_3^2 + dx_3 + ey_3 + 1 = 0.$$

Das duas primeiras equações segue que

$$a = \frac{1}{x_1x_2}, d = -\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}.$$

Da terceira e quarta equações segue que

$$c = \frac{1}{x_1x_2}, e = -\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}.$$

Utilizando a última equação determinamos o valor de  $b$  (pois, sendo esses pontos três a três não colineares, temos que  $x_3, y_3 \neq 0$ ). Isso determina a cônica.  $\square$

**Proposição 1.16.** *Uma cônica cujos os eixos coordenados são tangentes a ela admite equação na forma*

$$\left(\frac{x}{h} + \frac{y}{k} - 1\right)^2 + lxy = 0.$$



*Demonstração.* Seja  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  uma equação dessa cônica. Fazendo  $y = 0$ , obtemos  $ax^2 + dx + f = 0$ . Como o eixo  $Ox$  é tangente a ela, temos que esta equação tem uma única solução e, portanto,  $d^2 - 4af = 0$ . Logo,  $a = \frac{d^2}{4f}$  (quando  $f \neq 0$ ). Analogamente,  $e^2 - 4cf = 0$  e, portanto,  $c = \frac{e^2}{4f}$  (quando  $f \neq 0$ ). Disto segue que

$$d^2x^2 + 4fbxy + e^2y^2 + 4fdx + 4fey + 4f^2 = 0$$

é uma equação dessa cônica. Contudo, ela é equivalente a

$$(dx + ey + 2f)^2 + (4bf - 2de)xy = 0$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\left(\frac{d}{2f}x + \frac{e}{2f}y + 1\right)^2 + \frac{2bf - de}{2f^2}xy = 0.$$

Fazendo  $h = -\frac{2f}{d}$  (quando  $d \neq 0$ ),  $k = \frac{2f}{e}$  (quando  $e \neq 0$ ) e  $l = \frac{2bf - de}{2f^2}$  (quando  $f \neq 0$ ), segue a tese.  $\square$



---

## ABRIDGED NOTATION

---

Antes de falarmos sobre a *Abridged Notation* precisamos ressaltar as contribuições de Gabriel Lamé (1795-1870) <sup>1</sup> para com a Geometria Analítica. Lamé, em seu *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* (1818) fez duas grandes contribuições para a Geometria Analítica, que são: representar a equação inteira de um lugar geométrico por apenas uma letra, como por exemplo  $E = 0$  ou  $E' = 0$ ; se  $E = 0$  e  $E' = 0$  são equações de lugares geométricos teremos que  $mE + m'E' = 0$  será o mesmo lugar geométrico que passa pela intersecção dos dois primeiros.

O método da *Abridged Notation* (ou *Notação Abreviada*) consiste em representar polinômios em duas variáveis por uma única letra. Ao permitir que essas letras sejam combinadas, obtemos expressões de grau maior, que serão utilizadas para designar cônicas, cúbicas etc, assim como fez Lamé.

### 2.1 ABRIDGED NOTATION NO ESTUDO DE RETAS

Dada uma reta no plano cartesiano, podemos representá-la por sua equação na forma trigonométrica,  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ . Salmon, em [11], utiliza a letra grega  $\alpha$  como uma abreviação da expressão  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$ , de modo que a equação  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$  se reduza a  $\alpha = 0$ .

Nesta dissertação, utilizaremos letras minúsculas do alfabeto grego para abreviar *qualquer* polinômio do 1º grau em duas variáveis. Por exemplo, será permitido denotar expressões como  $ax + by + c$ ,  $y - mx - c$ ,  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$  por  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  etc. Assim,  $\alpha = 0$  pode representar uma equação geral, a equação reduzida ou a equação segmentária de uma

---

<sup>1</sup> Matemático e físico francês. Gabriel Lamé, a partir de 1832, virou professor da École Polytechnique em Paris.

dada reta, e não necessariamente sua equação na forma trigonométrica. Deixaremos explícito quando um formato específico for assumido.

Uma reta designada pela equação  $\alpha = 0$  será, muitas vezes, chamada de  $\alpha$ . Dadas duas retas concorrentes  $\alpha$  e  $\beta$ , denotaremos por  $\alpha \cap \beta$  o ponto onde elas se intersectam.

**Proposição 2.1.** *Sejam  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  retas concorrentes, onde  $\alpha = Ax + By + C$  e  $\beta = Dx + Ey + F$ .*

1. *Para cada  $k \in \mathbb{R}$ , a equação  $\alpha - k\beta = 0$  representa uma reta que passa pela intersecção de  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ .*
2. *Por outro lado, qualquer reta diferente de  $\beta = 0$  que passa pela intersecção de  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  pode ser representada por  $\alpha - k\beta = 0$ , para algum  $k \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.*

- (1) De fato, sendo  $\alpha$  e  $\beta$  polinômios do 1º grau em duas variáveis e  $k \in \mathbb{R}$ , temos que  $\alpha - k\beta$  é um polinômio do 1º grau em duas variáveis e, portanto,  $\alpha - k\beta = 0$  é a equação de uma reta. Além disso, se  $(x_0, y_0)$  são as coordenadas do ponto de intersecção das retas  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ , então  $Ax_0 + By_0 + C = 0$  e  $Dx_0 + Ey_0 + F = 0$ . Logo,  $(x_0, y_0)$  também satisfaz a equação  $\alpha - k\beta = 0$ , uma vez que  $\alpha - k\beta = (Ax + By + C) - k(Dx + Ey + F)$  e  $(Ax_0 + By_0 + C) - k(Dx_0 + Ey_0 + F) = 0 - k \cdot 0 = 0$ .
- (2) Com efeito, fixada uma tal reta, podemos tomar  $P = (x_1, y_1)$  um ponto sobre ela que não satisfaz  $\beta = 0$ , ou seja, tal que  $Dx_1 + Ey_1 + F \neq 0$ . Sendo  $k = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{Dx_1 + Ey_1 + F}$ , temos que  $\alpha - k\beta = 0$  é satisfeita por  $P$  e pelo ponto de intersecção de  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ , o que faz com que a reta fixada coincida com a representada por  $\alpha - k\beta = 0$ , já que elas possuem dois pontos em comum.  $\square$

*Observação.* Se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  são retas paralelas, então para todo  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha - k\beta$  é um polinômio do primeiro grau em duas variáveis, vale que  $\alpha - k\beta = 0$  é uma reta paralela às retas  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Exemplo 2.2.** Designando por  $\alpha$  a reta representada pela equação  $\alpha = 0$ , onde  $\alpha = x - 2y + 3$ , e por  $\beta$  a reta representada pela equação  $\beta = 0$ , onde  $\beta = x + 2y - 4$ , temos que a equação  $\alpha - k\beta = 0$  — ou seja,  $(x - 2y + 3) - k(x + 2y - 4) = 0$  — representa as seguintes retas quando  $k = 1$  e  $k = -2$ :

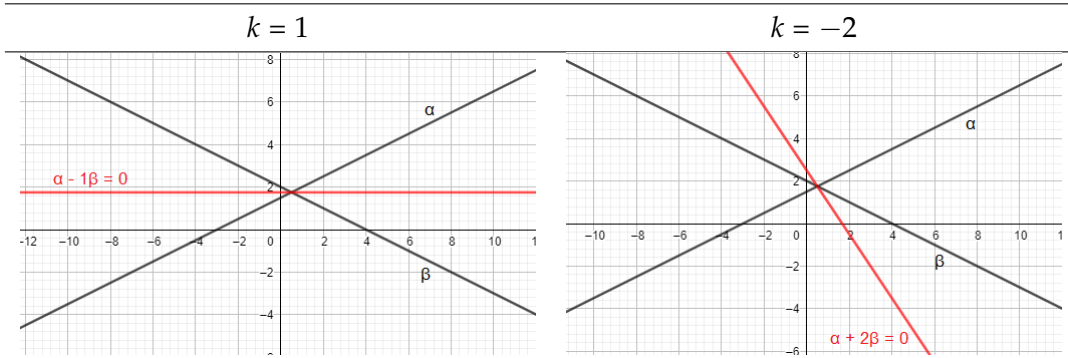


Tabela 4: Retas  $\alpha - 1\beta = 0$  e  $\alpha - (-2)\beta = 0$ .

Observe que se  $k = 0$ , então  $\alpha - k\beta = 0$  é a própria reta  $\alpha$ . Note também que quanto mais o  $k$  se distancia de 0, tanto pra valores positivos quanto pra negativos, a reta  $\alpha - k\beta = 0$  se aproxima de  $\beta$ .

**Exemplo 2.3.** Designando por  $\alpha$  a reta representada pela equação  $\alpha = 0$ , onde  $\alpha = x - 2y + 5$ , e por  $\beta$  a reta representada pela equação  $\beta = 0$ , onde  $\beta = x - 2y + 3$ , temos que a equação  $\alpha - k\beta = 0$  — ou seja,  $(x - 2y + 5) - k(x - 2y + 3) = 0$  — representa as seguintes retas quando  $k = -1$  e  $k = 0.6$ :

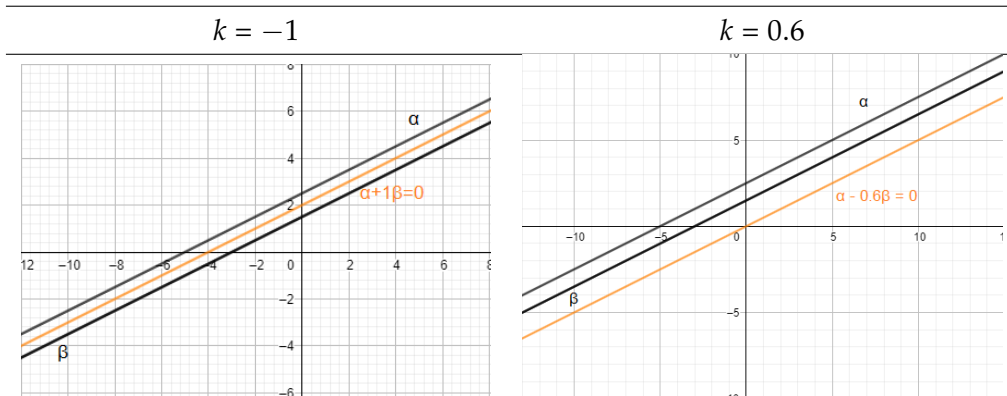


Tabela 5: Retas  $\alpha + \beta = 0$  e  $\alpha - 0.6\beta = 0$ .

*Observação.* Em vista da Proposição 1.4, se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  abreviam equações na forma trigonométrica de duas retas concorrentes e  $P = (x, y)$  está sobre a reta  $\alpha - k\beta = 0$ , então  $k = \pm \frac{d(P, \alpha=0)}{d(P, \beta=0)}$ . Se  $\alpha - k\beta = 0$  passa pelo interior do ângulo determinado por  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  que contém  $O$ , então  $k > 0$ ; se  $\alpha - k\beta = 0$  passa pelo interior do ângulo determinado por  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  ao qual  $O$  não pertence, então  $k < 0$ .

Da Proposição 2.1 segue que, a fim de concluir que uma reta  $\gamma = 0$  passa pelo ponto de intersecção das retas concorrentes  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ , basta encontrar  $r, s, t \in \mathbb{R}$

números reais não nulos tais que  $r\alpha + s\beta + t\gamma = 0$ .<sup>2</sup> Esta técnica, que será empregada nas demonstrações dos Teoremas 3.6 e 3.7, será ilustrada a seguir em dois exemplos simples.

**Lema 2.4.** *Se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  são equações na forma trigonométrica de duas retas concorrentes, então as bissetrizes dos ângulos determinados por elas têm equações  $\alpha - \beta = 0$  e  $\alpha + \beta = 0$ .*

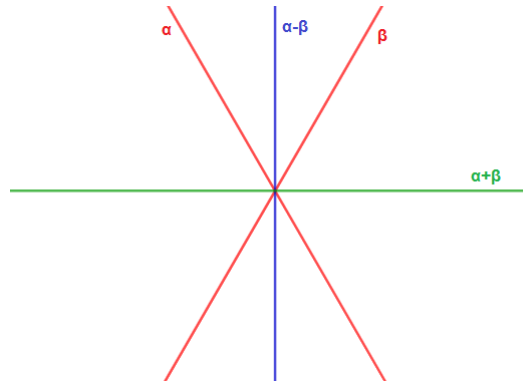


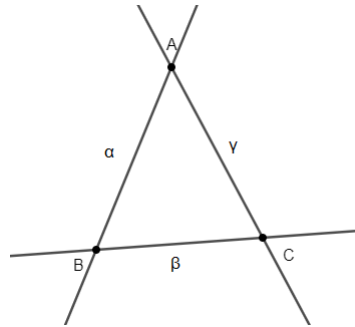
Figura 18: Bissetrizes dos ângulos determinados pelas retas  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ .

*Demonstração.* Observe que  $P$  pertence à bissetriz de um dos ângulos determinados pelas retas  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  se, e somente se,  $d(P, \alpha = 0) = d(P, \beta = 0)$ . De acordo com a Proposição 1.4,  $d(P, \alpha = 0) = \alpha$  ou  $d(P, \alpha = 0) = -\alpha$ .<sup>3</sup> Analogamente,  $d(P, \beta = 0) = \beta$  ou  $d(P, \beta = 0) = -\beta$ . Portanto, as bissetrizes dos ângulos determinados por elas têm equações  $\alpha - \beta = 0$  e  $\alpha + \beta = 0$ .  $\square$

**Exemplo 2.5.** Mostraremos que as bissetrizes internas de um triângulo se intersectam em um ponto, denominado o *incentro* desse triângulo. Para tanto, considere um triângulo  $ABC$  e sejam  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = 0$  equações na forma trigonométrica das retas que contém os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , respectivamente.

<sup>2</sup> De fato, se existem  $r, s, t \in \mathbb{R}$  não nulos tais que  $r\alpha + s\beta + t\gamma = 0$ , então  $\gamma = -\frac{r}{t}\alpha - \frac{s}{t}\beta$ . Como as coordenadas do ponto  $\alpha \cap \beta$  satisfazem  $-\frac{r}{t}\alpha - \frac{s}{t}\beta = 0$ , elas também satisfazem  $\gamma = 0$ . Logo, as retas  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = 0$  se intersectam em  $\alpha \cap \beta$ .

<sup>3</sup> Aqui, estamos utilizando a abreviação  $\alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$  e  $P = (x, y)$ .

Figura 19: Triângulo  $ABC$ .

Do Lema 2.4 segue que suas bissetrizes internas têm equações  $\alpha - \beta = 0$ ,  $\beta - \gamma = 0$  e  $\gamma - \alpha = 0$ .<sup>4</sup> Como  $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0$ , concluímos que elas se intersectam em um ponto.

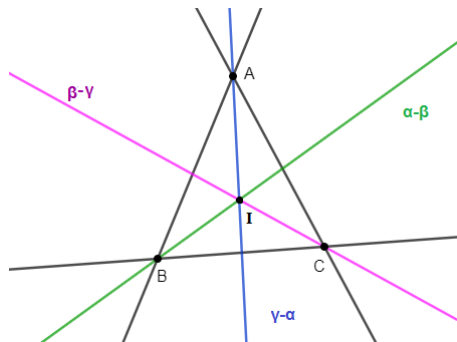


Figura 20: Bissetrizes se cruzando em um único ponto.

**Exemplo 2.6.** Mantendo a mesma notação do exemplo anterior, mostraremos agora que as bissetrizes externas de dois ângulos de um triângulo e a interna do terceiro ângulo se intersectam em um ponto, denominado um *ex-incentro* desse triângulo.

<sup>4</sup> Podemos supor, sem perda de generalidade, que a origem do sistema de coordenadas cartesianas fixado está no interior do triângulo  $ABC$ .

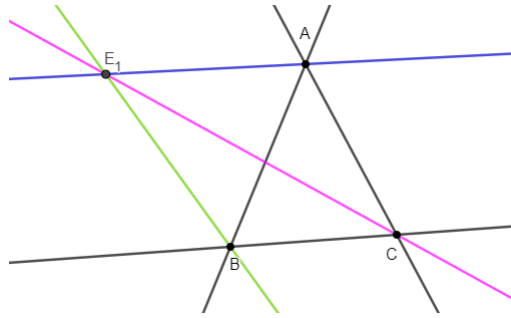


Figura 21: Um ex-incentro,  $E_1$ , do triângulo  $ABC$ .

Do Lema 2.4 segue que a bissetriz externa relativa ao vértice  $A$  é representada por  $\alpha + \gamma = 0$ , enquanto a bissetriz externa relativa ao vértice  $B$  é representada por  $\alpha + \beta$ . Por fim, a bissetriz interna relativa ao vértice  $C$  é representada por  $\beta - \gamma = 0$ . Como  $(\alpha + \gamma) - (\alpha + \beta) + (\beta - \gamma) = 0$ , concluímos que elas se intersectam em um ponto.

Para finalizar o assunto “bissetriz”, faremos um breve comentário sobre a Figura 22.

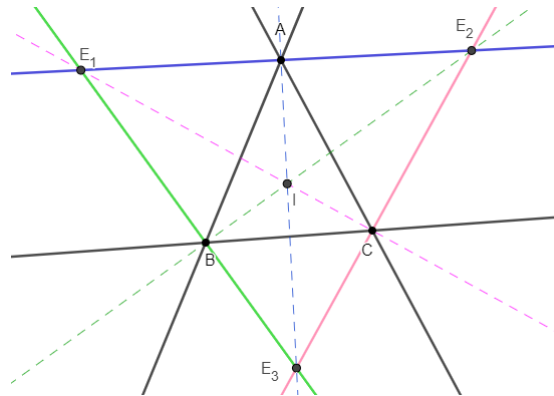


Figura 22: Triângulo  $E_1E_2E_3$ .

Observe, na imagem, a formação do triângulo  $E_1E_2E_3$ <sup>5</sup>. É possível mostrar que o incentro do triângulo  $ABC$  é, também, o incentro do triângulo  $E_1E_2E_3$ ?

<sup>5</sup> Onde  $E_1$  é o encontro entre as bissetrizes externas do triângulo  $ABC$  que passam pelos vértices  $A$  e  $B$ ,  $E_2$  é o encontro entre as bissetrizes externas do triângulo que passam pelos vértices  $A$  e  $C$  e  $E_3$  é o encontro das bissetrizes externas do triângulo que passam pelos vértices  $B$  e  $C$ .



## 2.2 ABRIDGED NOTATION NO ESTUDO DE CÔNICAS

As proposições apresentadas a seguir serão úteis para demonstrar os Teoremas de Pascal, Steiner e Brianchon no Capítulo 3 desta dissertação. Ambas apresentam maneiras de representar uma cônica via Abridged Notation.

**Proposição 2.7.** *Se  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$  e  $\delta = 0$  são equações das retas que contêm os lados de um quadrilátero e  $S = 0$  é uma cônica que passa pelos quatro vértices desse quadrilátero, então existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha\gamma - k\beta\delta = 0$  representa  $S = 0$ .*

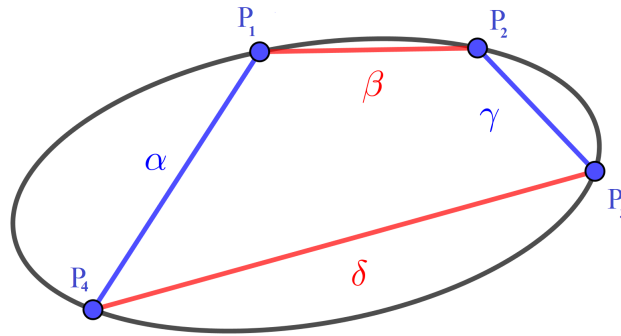


Figura 23: Cônica que circunscreve um quadrilátero.

*Demonstração.* Seja  $S = 0$  uma cônica que passa por  $P_1 = \alpha \cap \beta$ ,  $P_2 = \beta \cap \gamma$ ,  $P_3 = \gamma \cap \delta$  e  $P_4 = \delta \cap \alpha$ . Temos que provar que existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha\gamma - k\beta\delta = 0$  é uma equação de  $S = 0$ .

- Se  $S = 0$  coincide com a cônica  $\beta\delta = 0$ , basta tomar  $k = 1$ .
- Suponha que as cônicas  $S = 0$  e  $\beta\delta = 0$  sejam distintas. Tome  $P_5$  um ponto na primeira que não pertence à segunda, e nem ao quadrilátero em questão. Substituindo as coordenadas de  $P_5$  em  $\alpha\gamma - k\beta\delta = 0$ , encontramos  $k_0 \in \mathbb{R}$  que a satisfaz.

Note que:

- $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  são pontos que satisfazem  $\alpha\gamma - k\beta\delta = 0$  para todo  $k \in \mathbb{R}$ .
- $P_5$  satisfaz  $\alpha\gamma - k_0\beta\delta = 0$ .

Portanto, a cônica  $\alpha\gamma - k_0\beta\delta = 0$  passa por esses cinco pontos (três a três não colineares), assim como a cônica  $S = 0$ . Da Proposição 1.15 segue que ambas coincidem.  $\square$

**Proposição 2.8.** *Se  $\gamma = 0$  denota uma corda de uma cônica  $S = 0$ , então existe  $m$  um número real não negativo tal que  $S - m\gamma^2 = 0$  representa o par de retas tangentes à  $S = 0$  pelos pontos de intersecção de  $S = 0$  e  $\gamma = 0$ .*

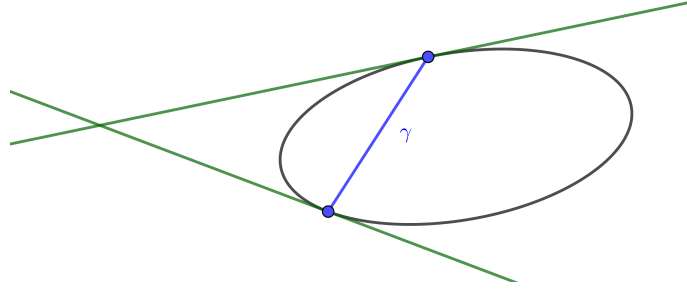


Figura 24: Corda e retas tangentes a uma cônica.

*Demonstração.* Da Proposição 1.16 segue que, em relação a um sistema de coordenadas cartesianas conveniente, é possível representar a cônica  $S = 0$  por uma equação da forma  $\gamma^2 + l\alpha\beta = 0$ , onde  $\gamma = 0$  representa a corda em questão,  $l \in \mathbb{R}$  e  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  representam as retas tangentes à  $S = 0$  pelos pontos de intersecção de  $S = 0$  e  $\gamma = 0$ . Logo, existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $S = m(\gamma^2 + l\alpha\beta)$  e, portanto,  $ml\alpha\beta = S - m\gamma^2$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $m \geq 0$ , uma vez  $-S = 0$  também representa a cônica em questão. Como o par de retas tangentes à  $S = 0$  pelos pontos de intersecção de  $S = 0$  e  $\gamma = 0$  tem equação  $ml\alpha\beta = 0$ , concluímos que ele também tem equação  $S - m\gamma^2 = 0$ .  $\square$

### 2.3 UMA OUTRA VANTAGEM DO MÉTODO DA ABRIDGED NOTATION

Mostramos que se

$$\alpha = 0, \beta = 0 \text{ e } \gamma = 0 \quad (2.1)$$

são equações na forma trigonométrica das retas que contém os lados de um triângulo, então as equações das bissetrizes internas dos ângulos desse triângulo são

$$\alpha - \beta = 0, \beta - \gamma = 0 \text{ e } \gamma - \alpha = 0. \quad (2.2)$$

De

$$(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0 \quad (2.3)$$

segue que elas se intersectam em um ponto.

Suponha que, em vez de interpretar (2.1) como equações na forma trigonométrica dos lados de um triângulo, as olhássemos como equações de circunferências secantes duas a duas na forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Neste caso, (2.2) representariam as cordas comuns a essas circunferências<sup>6</sup> e (2.3) nos diria que elas se intersectam em um ponto.

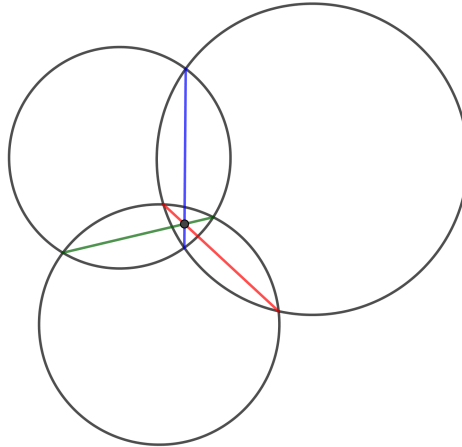


Figura 25: As cordas comuns às três circunferências se intersectam em um ponto.

Este simples exemplo ilustra uma outra vantagem do método da Abridged Notation: a demonstração de um resultado pode ser utilizada, *ipsis litteris*, para gerar novos teoremas — e o único esforço necessário para obtê-los reside em reinterpretar adequadamente as identidades envolvidas. Outros exemplos nessa direção podem ser encontrados em [2].

<sup>6</sup> De fato,  $\alpha - \beta$  é um polinômio do 1º grau em duas variáveis — e, portanto,  $\alpha - \beta = 0$  é uma equação de reta. Como os dois pontos de intersecção das circunferências  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  satisfazem a equação  $\alpha - \beta = 0$ , a reta representada por ela deve ser a (reta suporte da) corda determinada por esses dois pontos.



---

## TEOREMAS DE PASCAL, STEINER E BRIANCHON

---

Neste capítulo, utilizaremos o método da Abridged Notation para demonstrar os famosos teoremas de Pascal, Steiner e Brianchon.

### 3.1 TEOREMA DE PASCAL

Em 1639, Blaise Pascal<sup>1</sup> enunciou o famoso teorema que leva seu nome. Na obra *Essai pour les Coniques*, publicada em 1640, ele manifestou a intenção de escrever um tratado sobre as cônicas, no qual ele obteria os principais resultados de Apolônio<sup>2</sup> a partir de seu novo teorema. Esse tratado se perdeu, mas um esboço do mesmo foi lido por Leibniz<sup>3</sup>, que elaborou um resumo descrevendo suas principais seções.

O Teorema de Pascal é um teorema da Geometria Projetiva que foi demonstrado de várias formas distintas, o que mostra a importância e versatilidade da escolha da ferramenta para a demonstração do teorema, e nessa dissertação faremos uma demonstração via Abridged Notation. O teorema afirma que se um hexágono (não necessariamente convexo) está inscrito em uma cônica, então os três pontos de intersecção de seus lados opostos são colineares.

---

1 Matemático, físico, inventor, filósofo e teólogo que contribuiu decisivamente para a criação de dois novos ramos da matemática: a Geometria Projetiva e a Teoria das Probabilidades. Em Física, estudou a mecânica dos fluidos e esclareceu os conceitos de pressão e vácuo, ampliando o trabalho de Evangelista Torricelli. É ainda o autor de uma das primeiras calculadoras mecânicas, a Pascaline, e de estudos sobre o método científico.

2 Matemático e astrônomo grego, estudou problemas envolvendo curvas, principalmente cônicas.

3 Polímata, foi filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário. Junto com Newton, é um dos criadores do Calculo Diferencial e Integral.

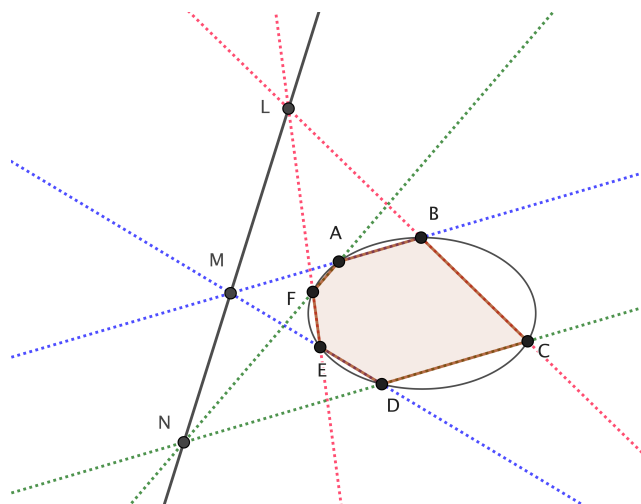


Figura 26: Teorema de Pascal.

Aqui, cabem três observações:

- A maneira como enunciamos o Teorema de Pascal assume tacitamente que os lados opostos do hexágono considerado não são paralelos. Após verificarmos a validade do resultado sob essa condição (Teorema 3.1), analisaremos o que ocorre quando o hexágono em questão possui lados opostos paralelos (Teoremas 3.2 e 3.3).
- Por “hexágono” entendemos uma sequência de seis pontos, de modo que três consecutivos não sejam colineares, ligados ciclicamente por seis segmentos de reta.
- Dizemos que dois lados de um hexágono são *opostos* se estes estão separados por outros dois lados. Nesta definição, não importa se o hexágono é convexo ou não. Num hexágono  $ABCDEF$ , os pares de lados opostos são  $AB$  e  $DE$ ;  $BC$  e  $EF$ ;  $CD$  e  $FA$ .

**Teorema 3.1** (Teorema de Pascal). *Se um hexágono de lados opostos não paralelos está inscrito em uma cônica, então os três pontos de intersecção de seus lados opostos são colineares.*

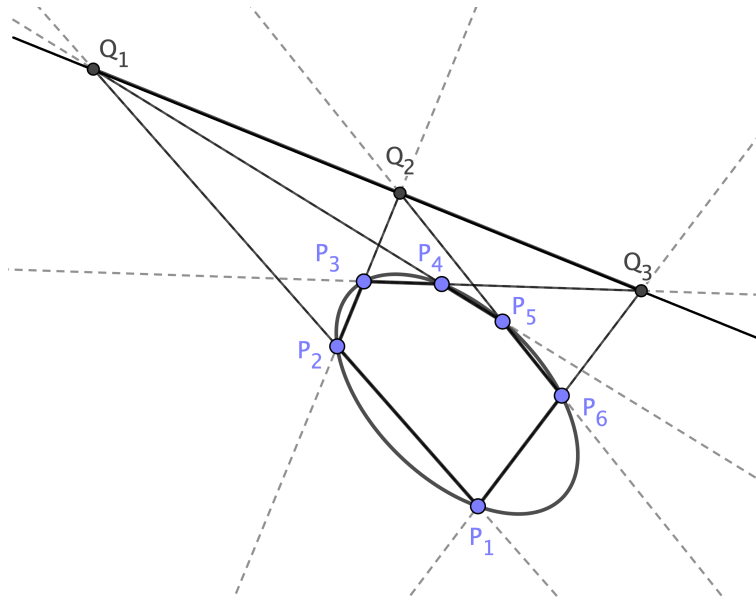


Figura 27: Teorema de Pascal.

*Demonstração.* A demonstração que apresentaremos baseia-se em [7].

Seja  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  um hexágono de lados opostos não paralelos inscrito em uma cônica  $S = 0$  e sejam  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0, \epsilon = 0$  e  $\zeta = 0$  equações das retas  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6$  e  $P_6P_1$ , respectivamente.

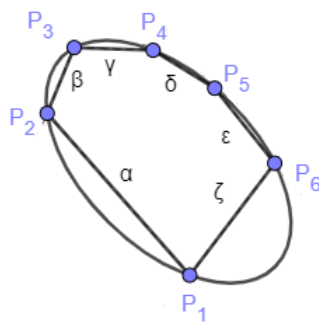


Figura 28: Hexágono de lados opostos não paralelos inscrito em uma cônica.

Observe que  $P_1P_2$  e  $P_4P_5$  são lados opostos desse hexágono, assim como  $P_2P_3$  e  $P_5P_6$  e, por último,  $P_3P_4$  e  $P_6P_1$ . Temos que provar que  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  são colineares, onde  $Q_1 = P_1P_2 \cap P_4P_5, Q_2 = P_2P_3 \cap P_5P_6$  e  $Q_3 = P_3P_4 \cap P_6P_1$ .

Represente por  $\theta = 0$  a reta que passa pelos pontos  $P_1$  e  $P_4$ .

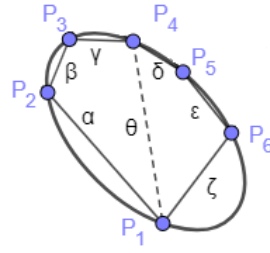


Figura 29: A reta  $\theta$ .

Da Proposição 2.7 segue que existem  $k_1, k_2, r, s \in \mathbb{R}, r, s \neq 0$ , tais que  $S = r(\alpha\gamma + k_1\beta\theta)$  e  $S = s(\delta\zeta + k_2\epsilon\theta)$ . Logo,

$$r(\alpha\gamma + k_1\beta\theta) = s(\delta\zeta + k_2\epsilon\theta).$$

Fazendo  $t = \frac{s}{r}$ , obtemos

$$\alpha\gamma + k_1\beta\theta = t(\delta\zeta + k_2\epsilon\theta)$$

ou seja

$$\theta(k_1\beta - tk_2\epsilon) = t\delta\zeta - \alpha\gamma. \tag{3.1}$$

Note que  $t\delta\zeta - \alpha\gamma = 0$  é uma cônica que passa pelos vértices do quadrilátero  $\delta\alpha\zeta\gamma$ .<sup>4</sup>

De (3.1) segue que  $t\delta\zeta - \alpha\gamma = 0$  é o par de retas  $\theta = 0$  e  $k_1\beta - tk_2\epsilon = 0$ . Como  $\theta = 0$  passa por  $\alpha \cap \zeta$  e  $\gamma \cap \delta$ , temos que  $k_1\beta - tk_2\epsilon = 0$  passa por  $\delta \cap \alpha = Q_1$  e  $\zeta \cap \gamma = Q_3$ . Obviamente,  $k_1\beta - tk_2\epsilon = 0$  também passa por  $Q_2 = \beta \cap \epsilon$ . Logo,  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  são colineares.

<sup>4</sup> Observe que essas quatro retas formam, de fato, um quadrilátero. Com efeito,  $\alpha = 0$  e  $\zeta = 0$  não são paralelas, pois são lados consecutivos do hexágono em questão, e o mesmo vale para  $\gamma = 0$  e  $\delta = 0$ ; além disso,  $\delta = 0$  e  $\alpha = 0$  não são paralelas, pois são lados opostos do hexágono considerado, e o mesmo vale para  $\zeta = 0$  e  $\gamma = 0$ .



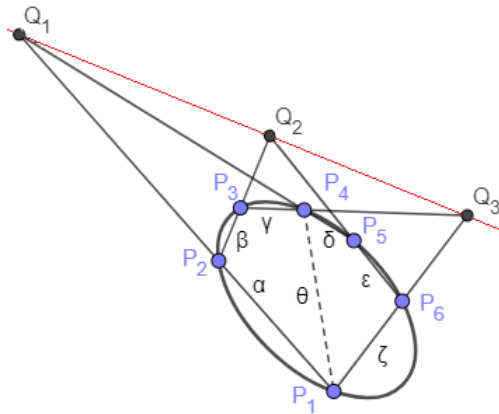


Figura 30:  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  são colineares.

□

O que ocorre se o hexágono possuir pelo menos um par de lados opostos paralelos? Estudaremos dois casos distintos: primeiro, quando há um único par de lados opostos paralelos; em seguida, quando há dois pares de lados opostos paralelos.

**Teorema 3.2** (Teorema de Pascal (segundo caso)). *Se um hexágono com um único par de lados opostos paralelos está inscrito em uma cônica, então os pontos determinados pela intersecção de cada par de lados opostos não paralelos estão sobre uma reta paralela aos lados paralelos desse hexágono.*

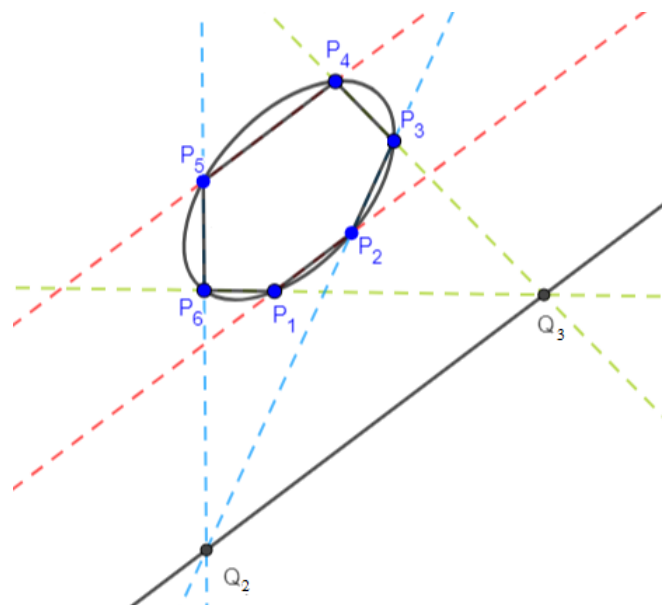


Figura 31: Segundo caso do Teorema de Pascal.

*Demonstração.* A demonstração que apresentaremos é bem parecida com a do Teorema 3.1.

Seja  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  um hexágono inscrito em uma cônica  $S = 0$  e sejam  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0, \epsilon = 0$  e  $\zeta = 0$  equações das retas  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6$  e  $P_6P_1$ , respectivamente. Suponha que as retas  $\alpha$  e  $\delta$  sejam paralelas, e que nem  $\beta$  e  $\epsilon$ , nem  $\gamma$  e  $\zeta$  o sejam.

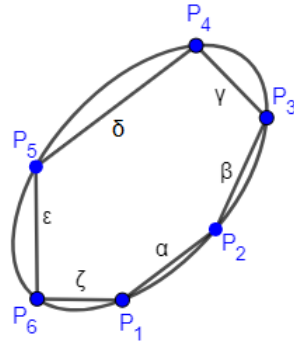


Figura 32: Hexágono inscrito em uma cônica com um único par de lados paralelos ( $\alpha$  e  $\delta$ ).

Observe que  $P_1P_2$  e  $P_4P_5$  são lados opostos desse hexágono, assim como  $P_2P_3$  e  $P_5P_6$  e, por último,  $P_3P_4$  e  $P_6P_1$ . Temos que provar que a reta  $Q_2Q_3$  é paralela às retas  $P_1P_2$  e  $P_4P_5$ , onde  $Q_2 = P_2P_3 \cap P_5P_6$  e  $Q_3 = P_3P_4 \cap P_6P_1$ .

Represente por  $\theta = 0$  a reta que passa pelos pontos  $P_3$  e  $P_6$ .

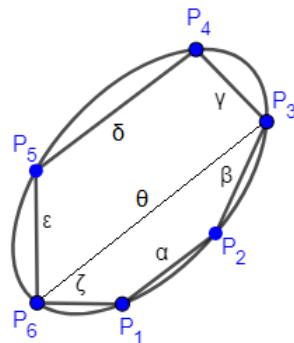


Figura 33: Hexágono inscrito em uma cônica com um único par de lados paralelos ( $\alpha$  e  $\delta$ ).

Da Proposição 2.7 segue que existem  $k_1, k_2, r, s \in \mathbb{R}, r, s \neq 0$ , tais que  $S = r(\gamma\epsilon + k_1\delta\theta)$  e  $S = s(\beta\zeta + k_2\alpha\theta)$ . Logo,

$$r(\gamma\epsilon + k_1\delta\theta) = s(\beta\zeta + k_2\alpha\theta).$$

Fazendo  $t = \frac{s}{r}$ , obtemos

$$\gamma\epsilon + k_1\delta\theta = t(\beta\zeta + k_2\alpha\theta)$$

ou seja

$$\theta(k_1\delta - tk_2\alpha) = t\beta\zeta - \gamma\epsilon. \tag{3.2}$$

Note que  $t\beta\zeta - \gamma\epsilon = 0$  é uma cônica que passa pelos vértices do quadrilátero formado pelas retas  $\beta\gamma\zeta\epsilon$ .<sup>5</sup>

De (3.2) segue que  $t\beta\zeta - \gamma\epsilon = 0$  é o par de retas  $\theta = 0$  e  $k_1\delta - tk_2\alpha = 0$ . Como  $\theta = 0$  passa por  $\beta \cap \gamma$  e  $\zeta \cap \epsilon$ , temos que  $k_1\delta - tk_2\alpha = 0$  passa por  $\gamma \cap \zeta = Q_3$  e  $\epsilon \cap \beta = Q_2$ . O fato de  $k_1\delta - tk_2\alpha = 0$  representar a equação de uma reta paralela a  $\alpha$  e a  $\delta$  encerra a demonstração.

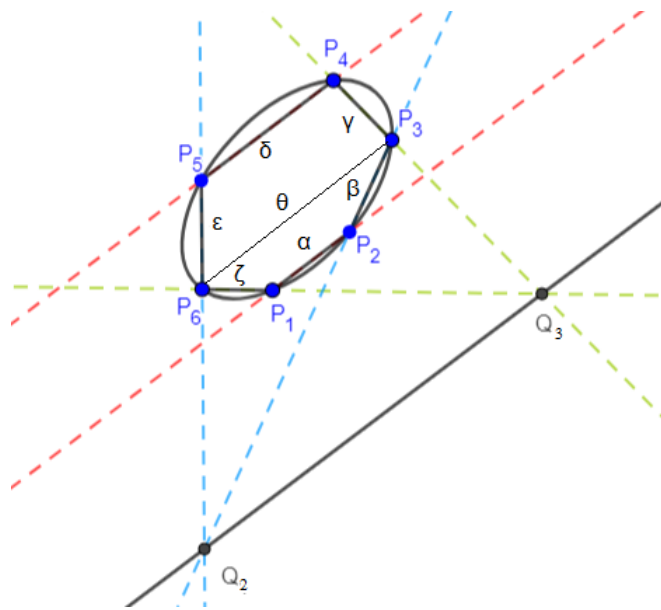


Figura 34: Pontos  $Q_2$  e  $Q_3$ .

□

<sup>5</sup> Observe que essas quatro retas formam, de fato, um quadrilátero. Com efeito,  $\beta$  e  $\gamma$  não são paralelas, bem como  $\zeta$  e  $\epsilon$ , pois são lados consecutivos do hexágono em questão; além disso,  $\gamma$  e  $\zeta$  não são paralelas, pois são lados opostos não paralelos do hexágono considerado.

**Teorema 3.3** (Teorema de Pascal (terceiro caso)). *Se um hexágono com dois pares de lados opostos paralelos está inscrito em uma cônica, então os lados opostos que constituem o terceiro par também são paralelos.*

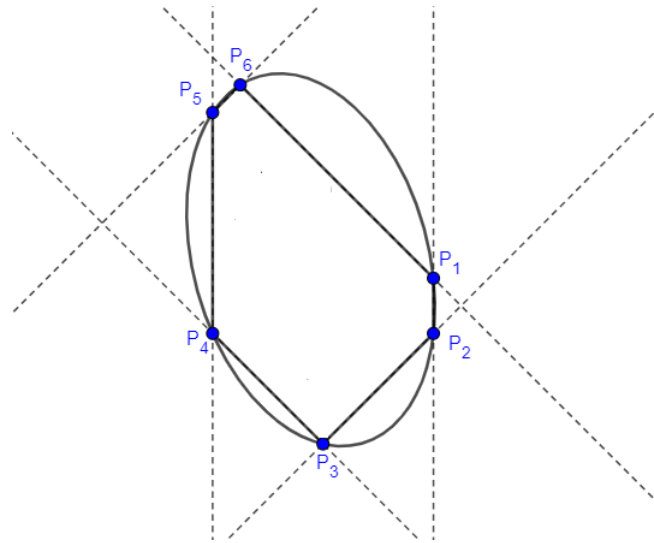


Figura 35: Terceiro caso do Teorema de Pascal.

*Demonstração.* A demonstração que apresentaremos baseia-se em [9].

Seja  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  um hexágono inscrito em uma cônica  $S = 0$ . Suponha que  $P_2P_3$  e  $P_5P_6$  sejam paralelos, bem como  $P_3P_4$  e  $P_6P_1$ . Temos que provar que  $P_1P_2$  e  $P_4P_5$  são paralelos.

Considere o sistema de coordenadas (possivelmente não ortogonal) dado pela Figura 36:

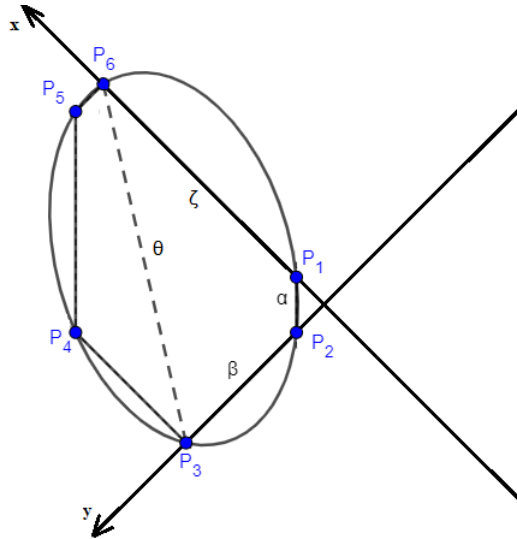


Figura 36: Terceiro caso do Teorema de Pascal.

Em relação a ele,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\zeta = 0$  e  $\theta = 0$  são equações de  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_6P_1$  e  $P_3P_6$ , respectivamente, onde:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \\ \beta &= y \\ \zeta &= x \\ \theta &= \frac{x}{c} + \frac{y}{d} - 1. \end{aligned}$$

Da Proposição 2.7 segue que existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha\theta - k\beta\zeta = 0$  representa a cônica  $S = 0$ . Logo,

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) \left(\frac{x}{c} + \frac{y}{d} - 1\right) = kxy$$

é uma equação de  $S = 0$ .

Como  $P_3P_4$  e  $P_6P_1$  são paralelos e  $P_3 = (c, 0)$ , temos que  $P_4 = (c, y_0)$ , para algum  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Note que  $y_0 \neq 0$ , uma vez que  $P_4 \neq P_3$ . Como  $P_4$  pertence à cônica em questão, temos que

$$\left(\frac{c}{a} + \frac{y_0}{b} - 1\right) \cdot \frac{y_0}{d} = kcy_0$$

ou seja

$$\frac{c}{a} + \frac{y_0}{b} - 1 = kcd.$$

Disto segue que  $P_4$  pertence à reta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = kcd,$$

que é paralela à  $\alpha = 0$ .

Analogamente,  $P_2P_3$  e  $P_5P_6$  são paralelos e  $P_6 = (0, d)$ . Logo,  $P_5 = (x_0, d)$ , para algum  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Como  $P_5$  pertence à cônica em questão, temos que

$$\left(\frac{x_0}{a} + \frac{d}{b} - 1\right) \cdot \frac{x_0}{c} = kx_0d$$

ou seja

$$\frac{x_0}{a} + \frac{d}{b} - 1 = kcd.$$

Disto segue que  $P_5$  também pertence à reta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = kcd.$$

Logo,  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = kcd$  é uma equação de  $P_4P_5$  e, portanto,  $P_1P_2$  e  $P_4P_5$  são paralelos.  $\square$

*Observação.* Se supormos que toda reta tem um ponto no infinito, que quaisquer duas retas paralelas compartilham do mesmo ponto no infinito e que existe uma única reta no infinito contendo todos os pontos no infinito de cada reta do plano, podemos unificar os enunciados dos três casos do Teorema de Pascal no seguinte: se um hexágono está inscrito em uma cônica, então os três pontos de intersecção de seus lados opostos são colineares.

De fato, se o hexágono em questão possuir um único par de lados paralelos, então a intersecção dos lados desse par é o ponto no infinito dessas duas retas. Como a reta de Pascal obtida utilizando ou outros dois pares de lados é paralela às do primeiro par, o ponto no infinito daquele pertence a ela.

No caso de haver dois pares de lados paralelos, a reta de Pascal neste caso é a reta no infinito. Como mostramos que o terceiro lado também deve ser paralelo, eles se intersectam no ponto no infinito, o qual pertence à reta no infinito.

Essa observação mostra a força da formulação “projetiva”, que evita casos particulares e excepcionais. Para mais detalhes, sugerimos consultar o Apêndice C.

### 3.1.1 Casos particulares do Teorema de Pascal

Note que o Teorema de Pascal não impõe restrição à cônica na qual o hexágono está inscrito — em outras palavras, nada impede que ela seja degenerada.

O caso em que a cônica em questão consiste de um par de retas concorrentes dá origem a um caso particular do Teorema de Pascal, denominado Teorema de Pappus.

**Corolário 3.4** (Teorema de Pappus). *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  duas retas no plano. Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos sobre  $\alpha$  que não pertencem a  $\beta$  e sejam  $D, E$  e  $F$  três pontos sobre  $\beta$  que não pertencem a  $\alpha$ . Se as retas  $AE, EC$  e  $CD$  intersectarem, respectivamente, as retas  $DB, BF$  e  $FA$  nos pontos  $L, M$  e  $N$ , então esses três pontos serão colineares.*

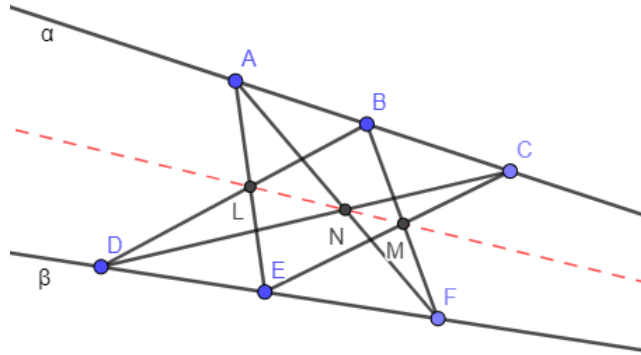


Figura 37: Teorema de Pappus.

*Demonstração.* Observe que o hexágono  $AECDBF$  está incrito na cônica degenerada  $\alpha\beta = 0$ . Do Teorema de Pascal segue que os três pontos de intersecção de seus lados opostos são colineares. Neste caso, temos que  $AE$  é oposto a  $DB$  e se cruzam no ponto  $L$ ;  $EC$  é oposto a  $BF$  e se cruzam no ponto  $M$ ;  $CD$  é oposto a  $FA$  e se cruzam no ponto  $N$ . Dessa forma,  $L, M$  e  $N$  são colineares.  $\square$

O caso em que a cônica em questão é uma circunferência leva ao seguinte resultado:

**Corolário 3.5.** *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $P$  um ponto em seu interior. Sejam  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, os pés das perpendiculares aos lados  $AC$  e  $BC$  passando por  $P$ . Se  $Q_1$  é o pé da perpendicular a  $BP$  passando por  $C$  e  $Q_2$  é o pé da perpendicular a  $AP$  passando por  $C$ , então as retas  $P_1Q_1$  e  $P_2Q_2$  se intersectam na reta  $AB$ .*

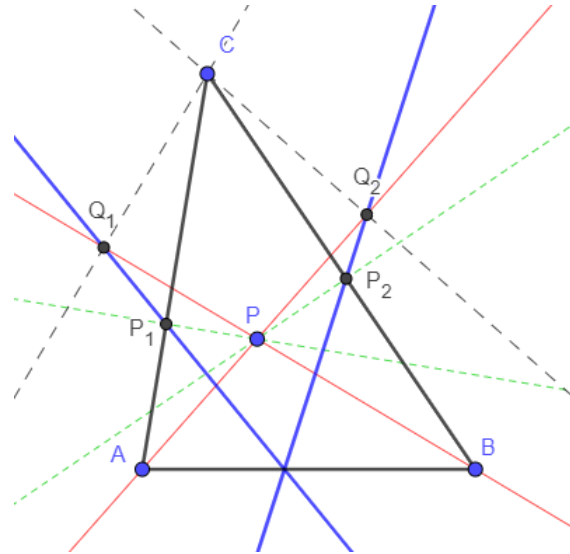


Figura 38:  $P_1Q_1$  e  $P_2Q_2$  se intersectam na reta  $AB$ .

*Demonstração.* Aplicando o Teorema de Pascal ao hexágono  $CP_1Q_1PQ_2P_2$  inscrito na circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento  $CP$  e tem  $CP$  como diâmetro, temos que  $P_1Q_1$  e  $P_2Q_2$  são lados opostos desse hexágono e  $AB$  é a sua reta de Pascal.

□

Outros casos particulares do Teorema de Pascal (a saber, quando o hexágono degenera-se para um pentágono, quadrilátero ou triângulo) são discutidos no Apêndice F.

### 3.1.2 Uma aplicação do Teorema de Pascal

O Teorema de Pascal funciona como base para um algoritmo que permite desenhar uma cônica passando por cinco pontos dados. A principal referência utilizada nesta seção é [1].

Comece tomando cinco pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$  no plano. Considere uma cônica que passa por eles e escolha arbitrariamente um sexto ponto  $P_6$  sobre essa cônica. Os passos abaixo permitirão determinar  $P_6$  a partir do Teorema de Pascal aplicado ao hexágono  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ .

1. Seja  $Q_1 = P_1P_2 \cap P_4P_5$ . Trace uma reta  $r$  passando por  $Q_1$ .



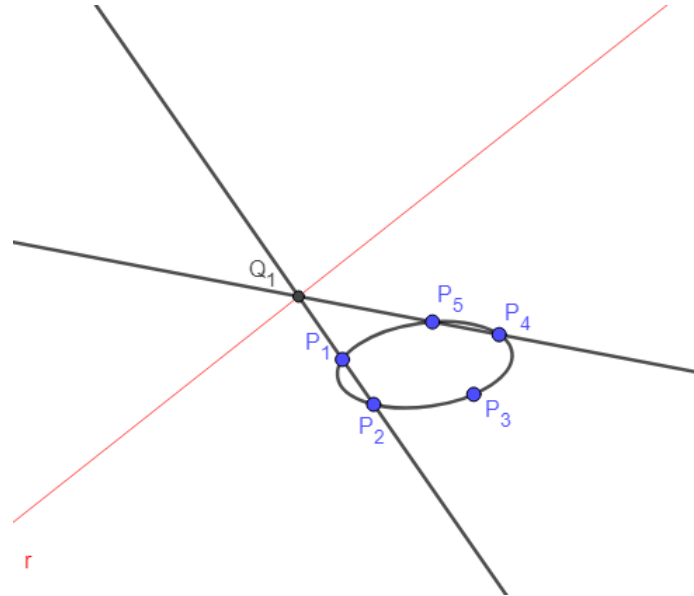


Figura 39: Reta  $r$ .

2. Seja  $Q_2$  a intersecção de  $r$  com  $P_2P_3$  e seja  $Q_3$  a intersecção de  $r$  com  $P_3P_4$ .

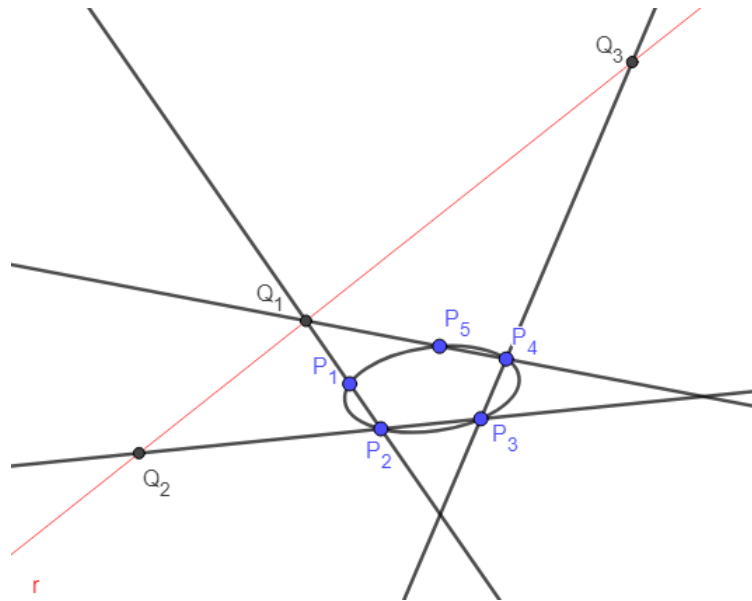


Figura 40:  $Q_2$  e  $Q_3$ .

3.  $P_6$  é dado pela intersecção das retas  $P_1Q_3$  e  $P_5Q_2$ .

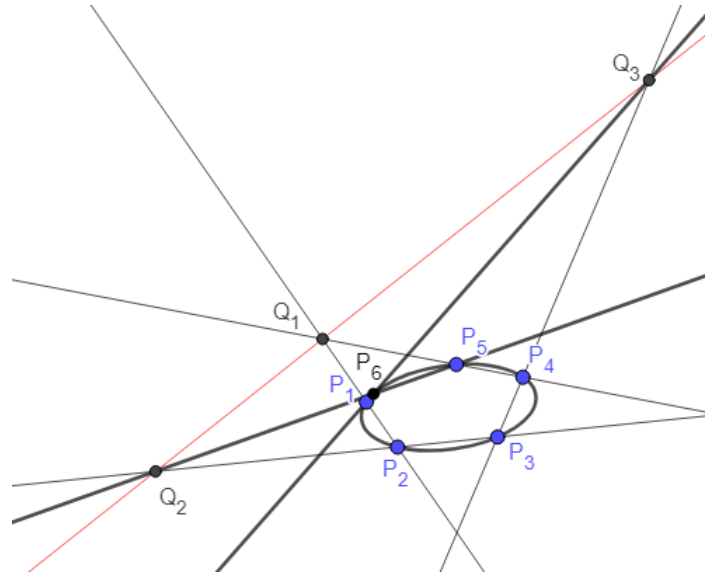


Figura 41:  $P_6$ .

4. Note que, para cada reta  $r$  escolhida, teremos um novo  $P_6$  na cônica, sendo possível traçá-la.

### 3.2 TEOREMA DE STEINER

**Teorema 3.6** (Teorema de Steiner<sup>6</sup>). *Sejam  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$  pontos sobre uma cônica. As três retas de Pascal que são obtidas a partir dos hexágonos  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ ,  $P_1P_4P_3P_6P_5P_2$  e  $P_1P_6P_3P_2P_5P_4$  se encontram em um único ponto, denominado ponto de Steiner.*

Antes de demonstrar este resultado, tentaremos elucidar seu enunciado. Faremos, inicialmente, uma imagem para cada hexágono e, depois, juntaremos as informações mais relevantes de cada uma delas em uma só.

Para o hexágono  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ , tome como referência a Figura 42.

<sup>6</sup> Matemático suíço, Jakob Steiner (1796-1863) trabalhou principalmente em Geometria, sendo considerado um dos maiores gênios da área desde Apolônio.

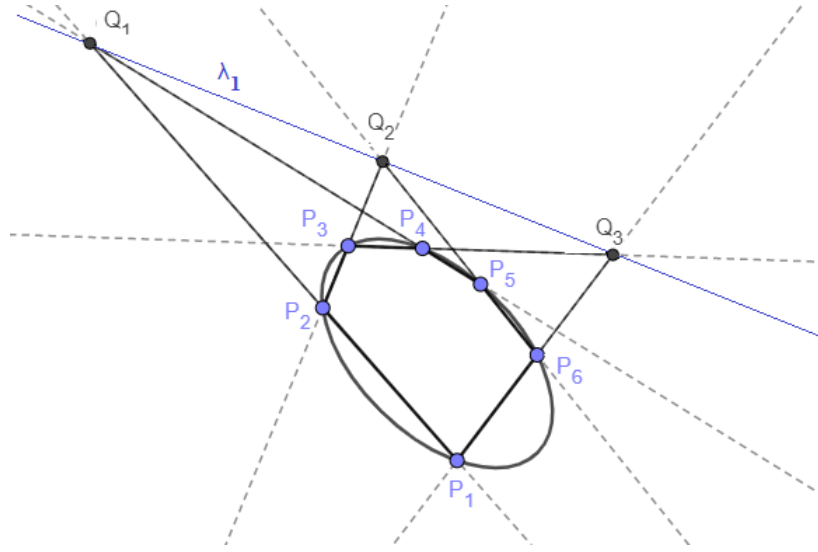


Figura 42: A reta de Pascal do hexágono  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ .

Para o hexágono  $P_1P_4P_3P_6P_5P_2$ , tome como referência a Figura 43.

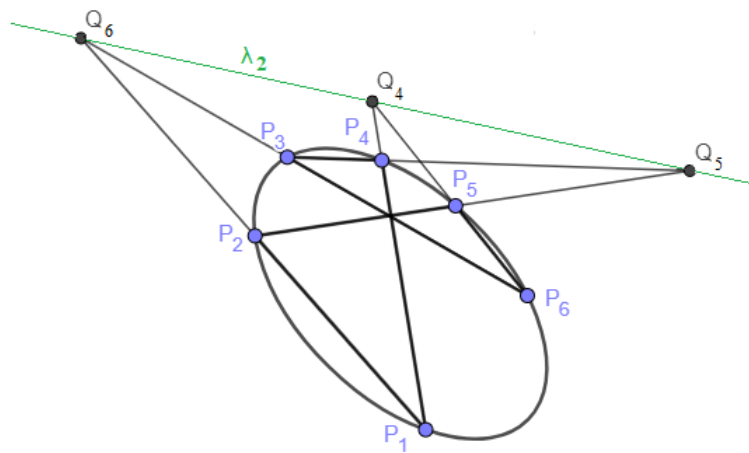


Figura 43: A reta de Pascal do hexágono  $P_1P_4P_3P_6P_5P_2$ .

Para o hexágono  $P_1P_6P_3P_2P_5P_4$ , tome como referência a Figura 44.

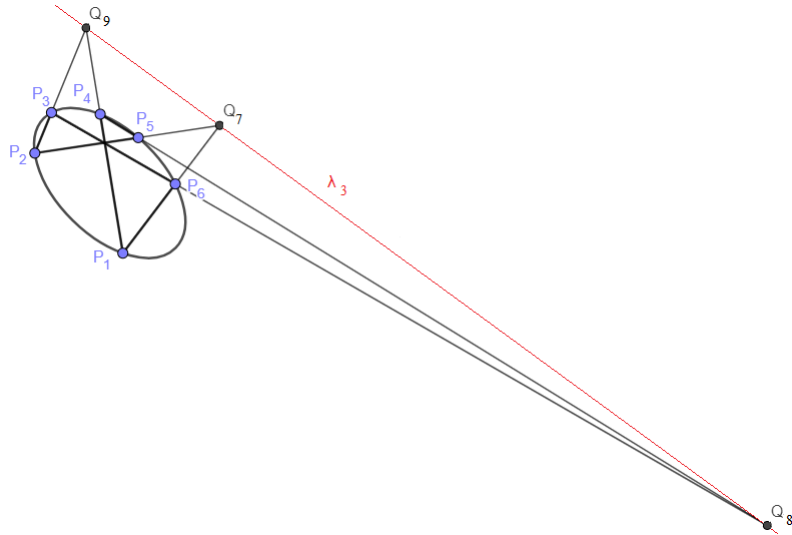


Figura 44: A reta de Pascal do hexágono  $P_1P_6P_3P_2P_5P_4$ .

O Teorema 3.6 afirma que as retas de Pascal  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  obtidas em cada caso se intersectam no ponto de Steiner.

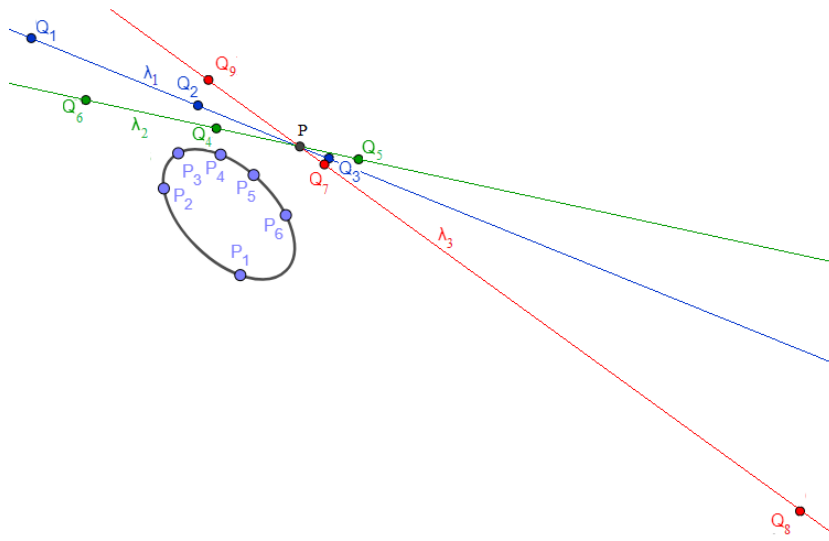


Figura 45: O ponto de Steiner  $P$ .

*Demonstração.* Sejam  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$  pontos sobre uma cônica  $S = 0$ . Dados  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  distintos,  $P_iP_j = 0$  representará uma equação da reta que passa pelos pontos  $P_i$  e  $P_j$ .

Como  $S$  circunscreve o quadrilátero  $P_1P_2P_3P_4$ , da Proposição 2.7 segue que existe  $k_1 \in \mathbb{R}$  tal que

$$S = P_1P_2 \cdot P_3P_4 - k_1P_1P_4 \cdot P_2P_3. \quad (3.3)$$

Analogamente, como  $S$  circunscreve o quadrilátero  $P_4P_5P_6P_1$ , existe  $k_2 \in \mathbb{R}$  tal que

$$S = P_4P_5 \cdot P_1P_6 - k_2P_1P_4 \cdot P_5P_6 \quad (3.4)$$

Por fim, uma vez que  $S$  também circunscreve o quadrilátero  $P_2P_5P_6P_3$ , existe  $k_3 \in \mathbb{R}$  tal que

$$S = P_2P_5 \cdot P_3P_6 - k_3P_2P_3 \cdot P_5P_6. \quad (3.5)$$

Partindo de (3.3) e (3.4) e refazendo os passos do Teorema de Pascal para o hexágono  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ , chegamos à conclusão de que

$$\lambda_1 = k_1P_2P_3 - k_2P_5P_6 = 0$$

é a reta de Pascal desse hexágono.<sup>7</sup>

Tomando, agora, (3.3) e (3.5) e refazendo os passos do Teorema de Pascal para o hexágono  $P_1P_4P_3P_6P_5P_2$ , chegamos à conclusão de que

$$\lambda_2 = k_3P_5P_6 - k_1P_1P_4 = 0$$

é a reta de Pascal desse hexágono.

Por fim, tomando (3.4) e (3.5) e refazendo os passos do Teorema de Pascal para o hexágono  $P_1P_6P_3P_2P_5P_4$ , chegamos à conclusão de que

$$\lambda_3 = k_2P_1P_4 - k_3P_2P_3 = 0$$

é a reta de Pascal desse hexágono.

Fazendo  $t_1 = \frac{k_2}{k_1}$ ,  $t_2 = \frac{k_1}{k_3}$  e  $t_3 = \frac{k_3}{k_2}$ , obtemos

$$\lambda_1 = P_2P_3 - t_1P_5P_6, \lambda_2 = P_5P_6 - t_2P_1P_4 \text{ e } \lambda_3 = P_1P_4 - t_3P_2P_3. \quad (3.6)$$

Como  $t_1t_2t_3 = 1$ , de (3.6) decorre que  $t_2t_3\lambda_1 + \lambda_2 + t_2\lambda_3 = 0$ , o que garante que as retas  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 = 0$  se cruzam em um ponto.  $\square$

<sup>7</sup> Escolhemos essas duas equações para trabalhar neste caso porque, em cada uma delas, aparecem três lados do hexágono considerado e o que não é — aqui,  $P_1P_4$  —, é comum a ambas.

## 3.3 TEOREMA DE BRIANCHON

**Teorema 3.7** (Teorema de Brianchon<sup>8</sup>). *As três diagonais opostas de um hexágono circunscrito a uma cônica se intersectam em um ponto.*

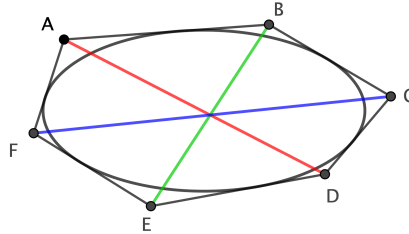


Figura 46: Teorema de Brianchon.

*Demonstração.* Seja  $ABCDEF$  um hexágono circunscrito a uma cônica  $S = 0$ . Temos que provar que as retas  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  se intersectam em um ponto.

Uma vez que as retas  $AB$  e  $DE$  são tangentes à  $S = 0$ , segue da Proposição 2.8 que existe  $l \in \mathbb{R}$  tal que o par de retas  $AB$  e  $DE$  é representado por

$$S - l^2\alpha^2 = 0 \quad (3.7)$$

onde  $\alpha = 0$  representa a corda que passa pelos pontos de tangência das retas  $AB$  e  $DE$  à  $S = 0$ .

Analogamente, existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que o par de retas  $BC$  e  $EF$  é representado por

$$S - m^2\beta^2 = 0 \quad (3.8)$$

onde  $\beta = 0$  representa a corda que passa pelos pontos de tangência das retas  $BC$  e  $EF$  à  $S = 0$ .

Por fim, existe  $n \in \mathbb{R}$  tal que o par de retas  $CD$  e  $FA$  é representado por

$$S - n^2\gamma^2 = 0 \quad (3.9)$$

onde  $\gamma = 0$  representa a corda que passa pelos pontos de tangência das retas  $CD$  e  $FA$  à  $S = 0$ .

<sup>8</sup> Matemático e químico francês, Charles Julien Brianchon (1783-1864) é conhecido por sua demonstração do Teorema de Brianchon.

De (3.7) e (3.8) segue que

$$(m\beta - l\alpha)(m\beta + l\alpha) = 0$$

representa o par de retas  $BE$  e  $GH$ , onde  $G = AB \cap EF$  e  $H = BC \cap DE$ .

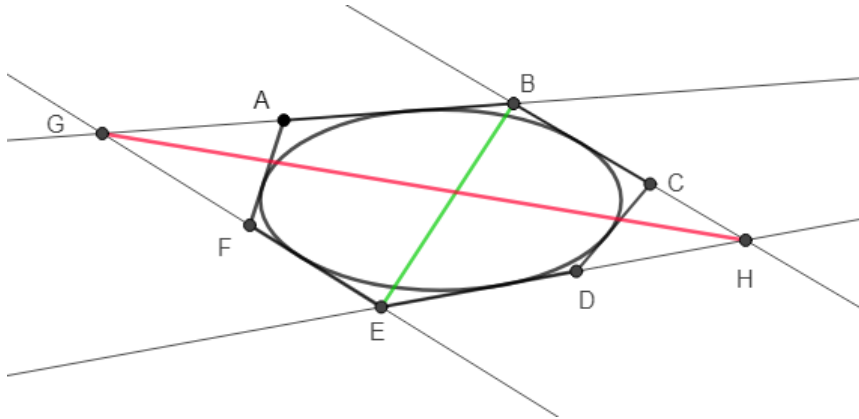


Figura 47: Par de retas  $BE$  e  $GH$ .

Analogamente,

$$(l\alpha - n\gamma)(l\alpha + n\gamma) = 0$$

representa o par de retas  $AD$  e  $JK$ , onde  $J = AB \cap CD$  e  $K = DE \cap FA$ .

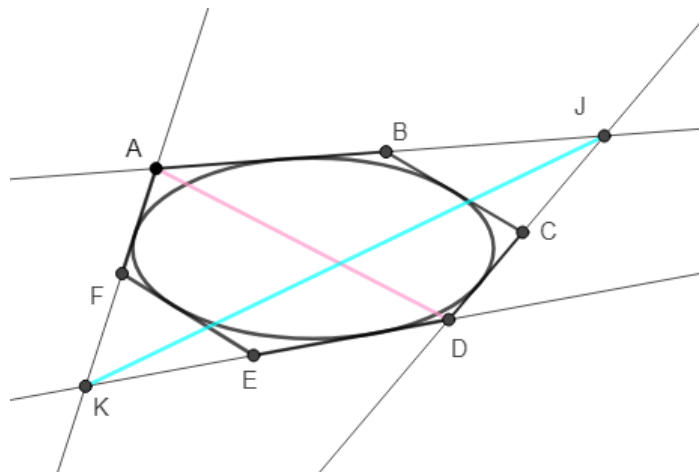


Figura 48: Par de retas  $AD$  e  $JK$ .

Por fim,

$$(n\gamma - m\beta)(n\gamma + m\beta) = 0$$

representa o par de retas  $CF$  e  $MN$ , onde  $M = BC \cap FA$  e  $N = CD \cap EF$ .

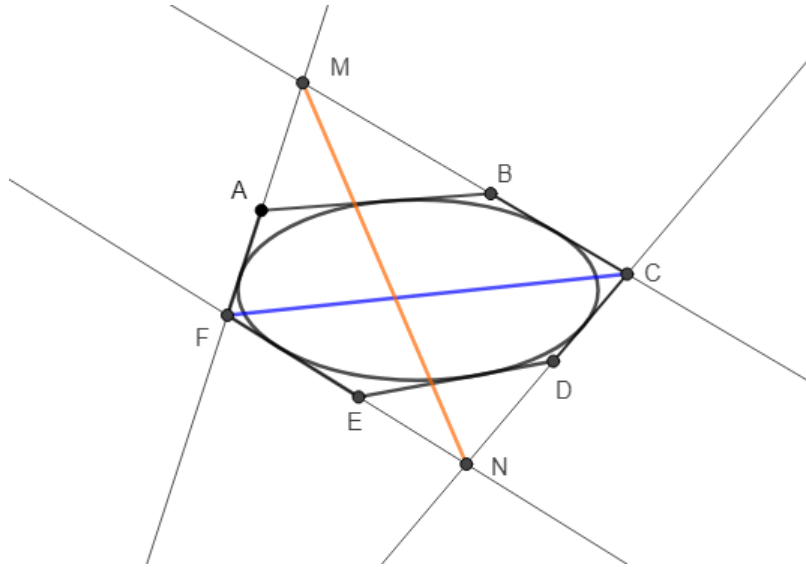


Figura 49: Par de retas  $CF$  e  $MN$ .

Podemos escolher os sinais de  $l$ ,  $m$  e  $n$  de modo que  $m\beta - l\alpha = 0$  represente  $BE$  e  $n\gamma - m\beta = 0$  represente  $CF$ . Neste caso, teremos que  $l\alpha - n\gamma = 0$  representará  $AD$  e, como

$$(m\beta - l\alpha) + (n\gamma - m\beta) + (l\alpha - n\gamma) = 0$$

concluimos que  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  se intersectam em um ponto.

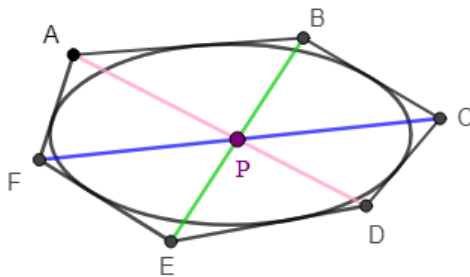


Figura 50:  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  se cruzam em um ponto  $P$ .

□



---

## ATIVIDADES

---

Com o intuito de oferecer uma ferramenta adicional de familiarização ao tema desta dissertação, utilizamos o software GeoGebra para elaborar atividades que contemplam assuntos discutidos em capítulos anteriores.

As atividades foram separadas em três níveis: as de Nível 1 são introdutórias, destinadas a alunos que tiveram pouco ou nenhum contato com o GeoGebra; as de Nível 2 pressupõem uma maior intimidade com software e buscam desenvolver habilidades mais refinadas; as de Nível 3, por sua vez, exigem alguma desenvoltura no uso do GeoGebra, maior capacidade de abstração e mais autonomia quanto ao próprio aprendizado.

### 4.1 ATIVIDADES DE NÍVEL 1

#### 4.1.1 Análise de $\alpha - k\beta = 0$

Os objetivos desta atividade são: auxiliar os alunos a compreenderem corretamente o enunciado da Proposição 2.1; estimulá-los a conjecturar com base no reconhecimento visual; elucidar a diferença entre uma conjectura e um teorema; apresentar aos alunos alguns comandos básicos do GeoGebra.

1. Peça para os alunos digitarem, na Barra de Entrada,  $u = 2x - y - 3$  e  $v = -7x + y - 6$ .<sup>1</sup>
2. Peça-lhes para digitarem, na Barra de Entrada,  $CurvaImplícita(u)$  e  $CurvaImplícita(v)$ , a fim de obter as retas  $u = 0$  e  $v = 0$ .

---

<sup>1</sup> Para facilitar o uso do GeoGebra, utilizaremos as letras  $u$  e  $v$ , em vez de  $\alpha$  e  $\beta$ .

3. Peça-lhes para digitarem  $u + kv = 0$  na Barra de Entrada, colocando um controle deslizante para  $k$ .
4. Destaque que, independentemente do valor de  $k$ ,  $u + kv = 0$  representa uma reta que passa pela intersecção das retas  $u = 0$  e  $v = 0$ .
5. Aponte que quando  $k$  se aproxima de 0, a reta  $u + kv = 0$  se aproxima da reta  $u = 0$ .
6. Aponte que quanto mais  $k$  se distancia de 0, mais a reta  $u + kv = 0$  se aproxima da reta  $v = 0$ .
7. Peça para os alunos habilitarem o rastro<sup>2</sup> de  $u + kv = 0$  e lhes pergunte se, com base no que estão vendo, seria razoável supor que toda reta que passa pela intersecção de  $u = 0$  e  $v = 0$  pode ser representada por  $u + kv = 0$ , para um certo valor de  $k$ . Aproveite a oportunidade para explicar o significado de “conjectura” e a diferença entre uma conjectura e um teorema.
8. Faça a seguinte pergunta aos alunos: se toda reta que passa pela intersecção de  $u = 0$  e  $v = 0$  pode ser representada por uma equação da forma  $u + kv = 0$  para algum  $k \in \mathbb{R}$ , como determinar esse valor de  $k$ ?

*Observação.* As tabelas abaixo apresentam o exemplo sugerido e outros três, caso o professor considere interessante repetir esta atividade com outros exemplos.

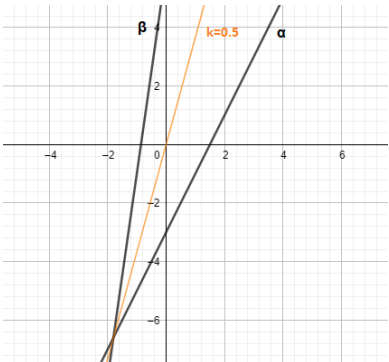
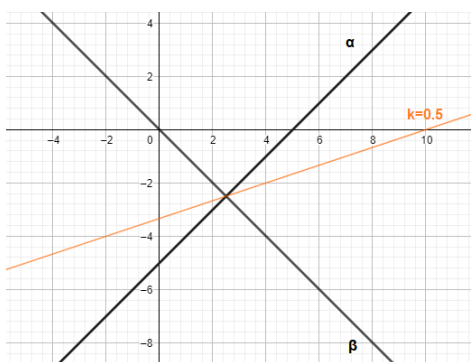
Exemplo 1	Exemplo 2
$\alpha = 2x - y - 3 = 0$	$\alpha = x - y - 5 = 0$
$\beta = -7x + y - 6 = 0$	$\beta = x + y = 0$
$\alpha - k\beta = (2x - y - 3) - k(-7x + y - 6) = 0$	$\alpha - k\beta = (x - y - 5) - k(x + y) = 0$
	

Tabela 6: Retas  $\alpha - k\beta = 0$  com  $k = 0.5$ .

- 2 Como sugestão, peça para os alunos colocarem  $u + kv = 0$  no estilo tracejado, e peça para os alunos diminuírem a velocidade do controle deslizante até o mínimo.

Exemplo 3	Exemplo 4
$\alpha = x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ - 1 = 0$ $\beta = x \cos 315^\circ + y \sin 315^\circ + 2 = 0$ $\alpha - k\beta = (x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ - 1)$ $-k(x \cos 315^\circ + y \sin 315^\circ + 2) = 0$	$\alpha = x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ - 3 = 0$ $\beta = x \cos 110^\circ + y \sin 110^\circ - 1 = 0$ $\alpha - k\beta = (x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ - 3)$ $-k(x \cos 110^\circ + y \sin 110^\circ - 1) = 0$

Tabela 7: Retas  $\alpha - k\beta = 0$  com  $k = 0.5$ .4.1.2  $\alpha - k\beta = 0$  com  $k$  igual a 1 ou -1

Nesta atividade, além de responder a questão proposta na Atividade 4.1.1, mostraremos que podemos utilizar a Abridged Notation para escrever as equações das bissetrizes de um ângulo de uma forma bastante simples, desde que as equações que estamos abreviando estejam na forma trigonométrica.

1. Peça para os alunos plotarem duas retas concorrentes por meio de suas equações na forma trigonométrica — por exemplo,  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ , onde  $\alpha = x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ - 2$  e  $\beta = x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ$ .
2. Peça-lhes para escolherem uma reta  $r$  que passa por  $\alpha \cap \beta$ .
3. Peça-lhes para escolherem um ponto  $P = (x_0, y_0)$  sobre  $r$ , diferente de  $\alpha \cap \beta$ .
4. Peça-lhes para digitarem, na Barra de Entrada,  $k = (x_0 \cos 60^\circ + y_0 \sin 60^\circ - 2)/(x_0 \cos 45^\circ + y_0 \sin 45^\circ)$ .
5. Peça-lhes para plotarem a reta  $\alpha - k\beta = 0$  e destaque que ela coincide com  $r$ .
6. Peça-lhes para calcularem  $d(P, \alpha)$  e  $d(P, \beta)$  e observe que  $|k| = \frac{d(P, \alpha)}{d(P, \beta)}$ . Destaque que isto poderia não ocorrer se as equações de  $\alpha$  e  $\beta$  não estivessem na forma trigonométrica.

7. Relembrando a definição de bissetriz como lugar geométrico, peça aos alunos para encontrarem os valores de  $k$  tais que  $\alpha - k\beta = 0$  representa as bissetrizes dos ângulos determinados por  $\alpha$  e  $\beta$ .
8. Peça-lhes para plotarem as retas  $\alpha - \beta = 0$  e  $\alpha + \beta = 0$  e conferirem que estas são, de fato, as bissetrizes dos ângulos determinados por  $\alpha$  e  $\beta$ .

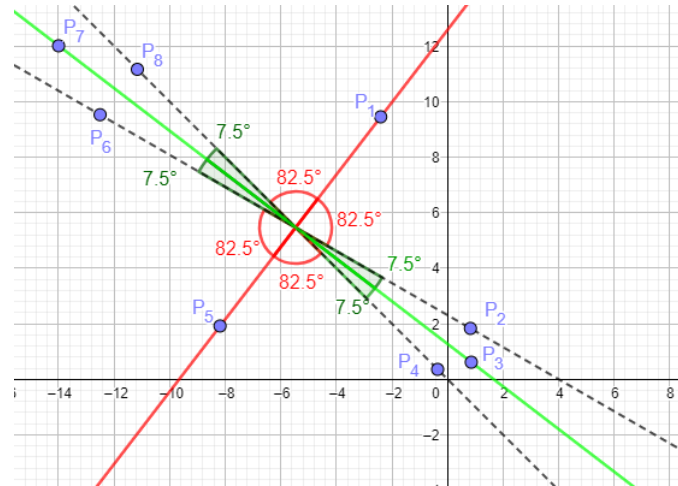


Figura 51: Verificando que  $\alpha - k\beta = 0$  com  $k = \pm 1$  são as bissetrizes dos ângulos determinados por  $\alpha$  e  $\beta$ .

#### 4.1.3 Atividade envolvendo bissetrizes

Esta atividade, que toma como referência a Atividade 4.1.2, tem como objetivo familiarizar os alunos com a Abridged Notation, destacando sua utilidade para produzir demonstrações simples de resultados aos quais eles já foram apresentados, exercitar o reconhecimento de padrões e a capacidade de argumentação.

1. Peça para os alunos digitarem, na Barra de Entrada,  $u = x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ - 5$ ,  $v = x \cos 135^\circ + y \sin 135^\circ - 5$  e  $w = x \cos 270^\circ + y \sin 270^\circ - 2$ .
2. Peça-lhes para digitarem, na Barra de Entrada,  $CurvaImplícita(u)$ ,  $CurvaImplícita(v)$  e  $CurvaImplícita(w)$ , a fim de obter as retas  $u = 0$ ,  $v = 0$  e  $w = 0$ .
3. Peça-lhes para digitarem, na Barra de Entrada,  $CurvaImplícita(u - v)$ ,  $CurvaImplícita(v - w)$  e  $CurvaImplícita(w - u)$ , a fim de obter as retas  $u - v = 0$ ,  $v - w = 0$  e  $w - u = 0$ .

4. Observe que as retas  $u - v = 0$ ,  $v - w = 0$  e  $w - u = 0$  são bissetrizes internas dos ângulos do triângulo determinado pelas retas  $u = 0$ ,  $v = 0$  e  $w = 0$ . Aproveite a ocasião para relembrar a noção de bissetriz como lugar geométrico e o significado da constante  $k$  discutido na atividade anterior.
5. Destaque que as retas  $u - v = 0$ ,  $v - w = 0$  e  $w - u = 0$  se intersectam em um ponto e pergunte se, em vista de suas equações “abreviadas”, isso era esperado.
6. Peça para os alunos digitarem, na Barra de Entrada,  $CurvaImplícita(u + v)$ ,  $CurvaImplícita(v + w)$  e  $CurvaImplícita(w + u)$ , a fim de obter as retas  $u + v = 0$ ,  $v + w = 0$  e  $w + u = 0$ .
7. Observe que as retas  $u + v = 0$ ,  $v + w = 0$  e  $w + u = 0$  são bissetrizes externas dos ângulos do triângulo determinado pelas retas  $u = 0$ ,  $v = 0$  e  $w = 0$ .
8. Destaque que as retas  $w + u = 0$ ,  $u + v = 0$  e  $v - w = 0$  se intersectam em um ponto. Peça para os alunos explicarem por que isso acontece.
9. Pergunte se, neste ponto, eles conseguiriam concluir (e justificar) que as bissetrizes externas de dois ângulos quaisquer de um triângulo e a interna do terceiro ângulo se intersectam em um ponto.

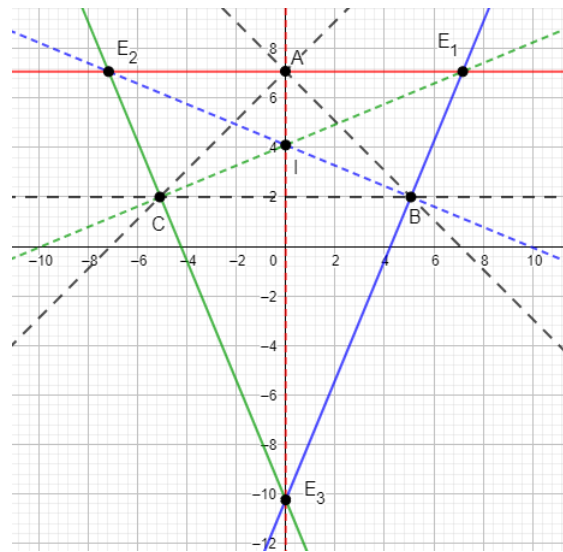


Figura 52: Triângulo  $ABC$  e suas bissetrizes.

10. A fim de aguçar a curiosidade dos alunos, mencione a seguinte propriedade do incentro e dos exincentros: o incentro é o centro de uma circunferência que

tangencia os três lados do triângulo e cada excentro é o centro de uma circunferência que tangencia um lado do triângulo e as extensões dos outros dois.

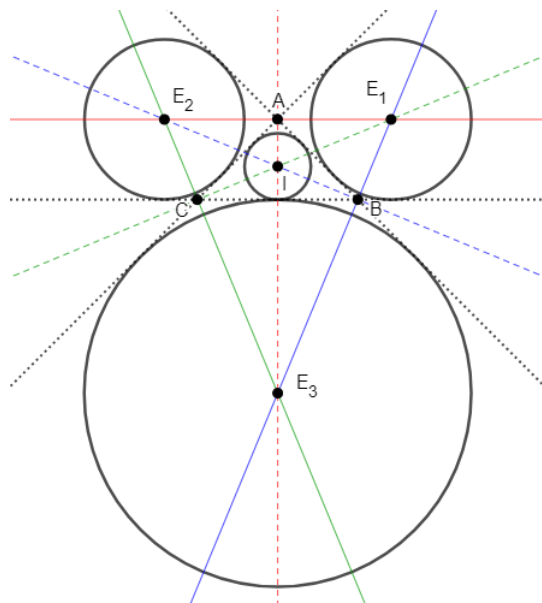


Figura 53: Propriedade do incentro e dos excentros.

## 4.2 ATIVIDADES DE NÍVEL 2

### 4.2.1 Análise de $\alpha\beta - k\gamma\delta = 0$

O objetivo desta atividade é destacar uma possibilidade de representar uma cônica utilizando a Abridged Notation.

1. Peça para os alunos plotarem uma cônica utilizando o comando *Cônica por Cinco Pontos*.
2. Peça-lhes para escolherem quatro pontos sobre ela, vértices de um quadrilátero.
3. Peça-lhes para obterem equações  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$  e  $\delta = 0$  dos lados desse quadrilátero.<sup>3</sup>
4. Peça-lhes para plotarem a cônica  $\alpha\gamma - k\beta\delta = 0$ , utilizando um controle deslizante para  $k$ .

<sup>3</sup> Como sugestão, peça para os alunos escolherem pontos com coordenadas inteiras para que as equações não fiquem muito estranhas.

- Peça-lhes para animarem o controle deslizante, observando que para algum valor de  $k$ ,  $\alpha\gamma - k\beta\delta = 0$  coincide com a cônica plotada no primeiro passo desta atividade.

#### 4.2.2 Teorema de Brianchon

Esta atividade tem como objetivo auxiliar os alunos a terem uma compreensão correta do enunciado do Teorema de Brianchon. Para isso, trabalharemos separadamente com quatro exemplos de cônicas (circunferência, elipse, hipérbole e parábola). As ferramentas do GeoGebra utilizadas na construção dessas cônicas ajudarão a relembrar suas definições como lugar geométrico.

- Escreva na lousa o enunciado do Teorema de Brianchon.
- Peça para os alunos plotarem uma circunferência no GeoGebra utilizando o comando *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*.
- Peça-lhes para fixarem três pontos no exterior da circunferência (na Figura 54, estes são os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ ) e, após selecionar o comando *Reta Tangente*, cliquem em um desses pontos e depois na circunferência, repetindo o processo até acabarem os pontos.

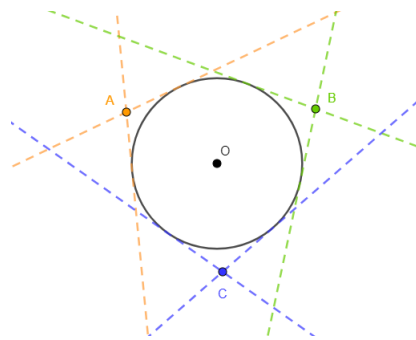


Figura 54: Montagem de um hexágono circunscrito à circunferência.

- Peça-lhes para usarem o comando *Intersecção de Dois Objetos*, de modo a obter os outros três vértices do hexágono circunscrito à circunferência (na Figura 55, estes são os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ ).

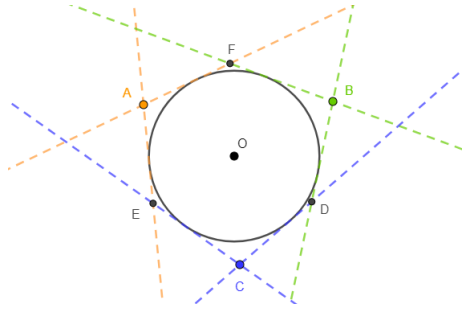


Figura 55: Obtendo um hexágono circunscrito à circunferência.

5. Peça-lhes para construirmos as diagonais opostas do hexágono obtido no passo anterior (na Figura 56, as diagonais opostas são  $d_1 = AD$ ,  $d_2 = BE$  e  $d_3 = CF$ ).

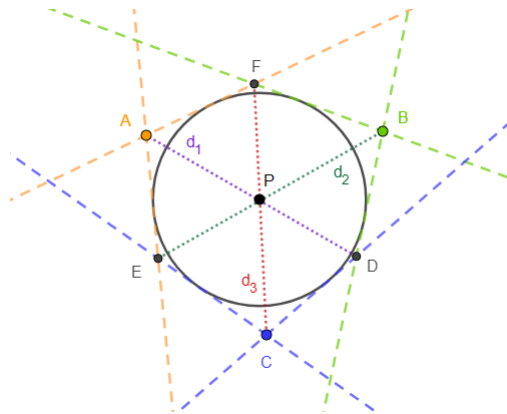


Figura 56: Teorema de Brianchon em uma circunferência.

6. Observe que  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  se cruzam em um ponto, como afirma o Teorema de Brianchon. Por último, diga para os alunos brincarem com os pontos, para verem o que acontece com o ponto de intersecção das diagonais opostas (mexendo um pouco, eles vão perceber que nem sempre esse ponto se encontrará dentro da circunferência).
7. Agora, ao invés de uma circunferência, peça para os alunos montarem uma elipse com focos  $F_1$  e  $F_2$  utilizando o comando *Ellipse*, escolherem três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  como na Figura 57 e traçarem as retas tangentes à elipse passando por  $A$ ,  $B$  e  $C$ .



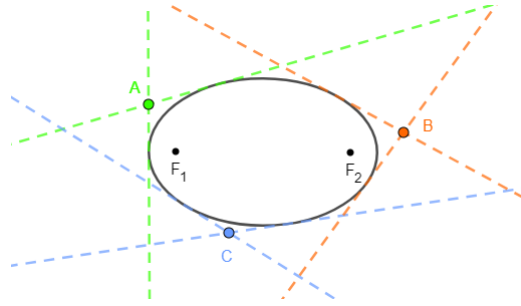


Figura 57: Montagem de um hexágono circunscrito à elipse.

8. Peça-lhes para obterem as intersecções  $D$ ,  $E$  e  $F$  e as diagonais opostas  $d_1 = AD$ ,  $d_2 = BE$  e  $d_3 = CF$  como na Figura 58.

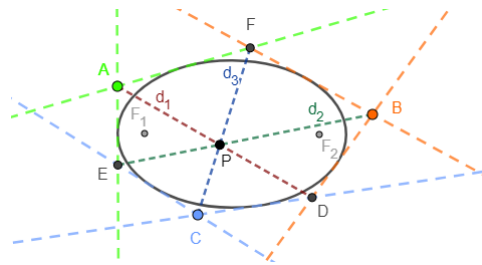


Figura 58: Teorema de Brianchon em uma elipse.

9. Observe que  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  se cruzam em um ponto como afirma o Teorema de Brianchon.
10. Agora, peça para os alunos montarem uma hipérbole com focos  $F_1$  e  $F_2$  utilizando o comando *Hipérbole*, escolherem três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  (que admitam tangentes que os contenham) como na Figura 59 e traçarem as retas tangentes à hipérbole passando por  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

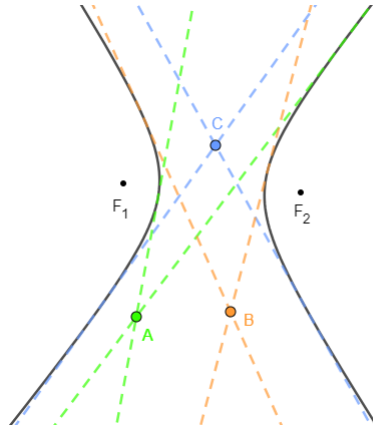


Figura 59: Montagem de um hexágono circunscrito à hipérbole.

11. Peça-lhes para obterem as intersecções  $D$ ,  $E$  e  $F$  e as diagonais opostas  $d_1 = AD$ ,  $d_2 = BE$  e  $d_3 = CF$  como na Figura 60.

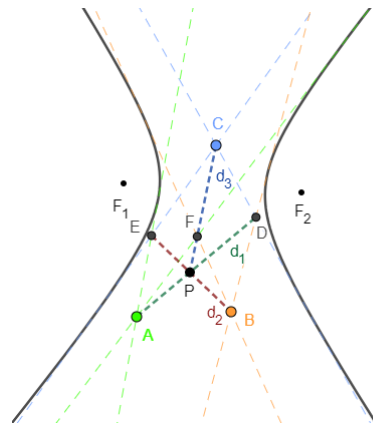


Figura 60: Teorema de Brianchon em uma hipérbole.

12. Observe que  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  se cruzam em um ponto, como afirma o Teorema de Brianchon. Note ainda que, neste caso, o hexágono não é convexo e o ponto  $P$  se encontra fora do segmento  $CF$ , porém ainda se encontra na reta  $CF$ .
13. Por fim, peça para os alunos montarem uma parábola com foco  $F_1$  e diretriz qualquer utilizando o comando *Parábola*, escolherem os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  como na Figura 61 e traçarem as retas tangentes à parábola passando por  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

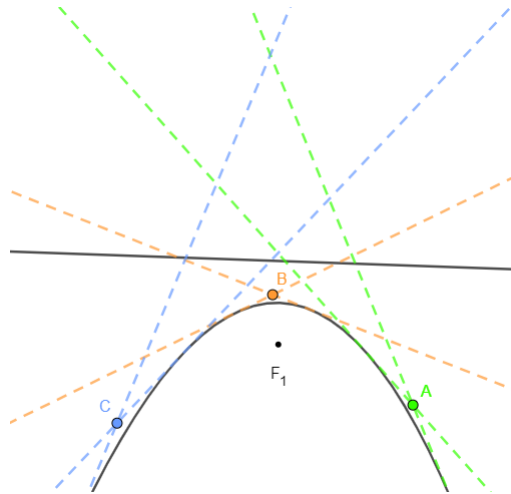


Figura 61: Montagem de um hexágono circunscrito à parábola.

14. Peça-lhes para obterem as intersecções  $D$ ,  $E$  e  $F$  e as diagonais opostas  $d_1 = AD$ ,  $d_2 = BE$  e  $d_3 = CF$  como na Figura 62.

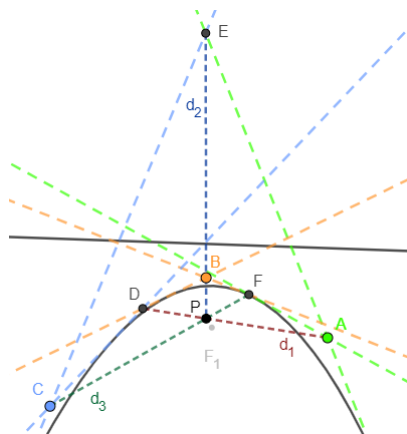


Figura 62: Teorema de Brianchon em uma parábola.

15. Observe que  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  se cruzam em um ponto, como afirma o Teorema de Brianchon.

## 4.2.3 Teorema de Pappus

Os objetivos desta atividade são desenvolver a capacidade de expressar adequadamente um fenômeno observado e estimular o reconhecimento de padrões por experimentação.

1. Dê, para os alunos, as equações  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ , onde  $\alpha = x - y$  e  $\beta = y - 3x$ . Dê, também, os pontos  $A = (2, 6)$ ,  $B = (4, 12)$ ,  $C = (6, 18)$ ,  $D = (4, 4)$ ,  $E = (8, 8)$  e  $F = (12, 12)$ . Observe que  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencem a  $\beta = 0$  e que  $D$ ,  $E$  e  $F$  pertencem a  $\alpha = 0$ .
2. Peça-lhes para construírem os segmentos  $AE$ ,  $AF$ ,  $BD$ ,  $BF$ ,  $CD$  e  $CE$  e obterem as intersecções  $L = AE \cap BD$ ,  $M = AF \cap CD$  e  $N = BF \cap CE$  como na Figura 63.

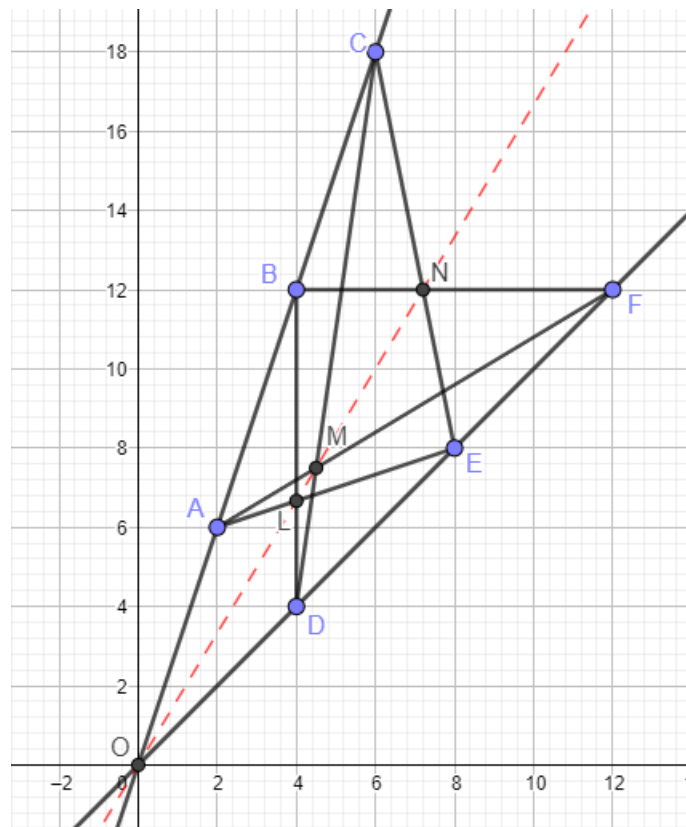


Figura 63: Exemplo do Teorema de Pappus.

3. Peça-lhes para contruírem a reta que passa por  $L$  e  $M$  e observe que ela passa por  $N$ .
4. Dê-lhes tempo para escrever o que observaram.

5. Enuncie o Teorema de Pappus para este caso e compare seu enunciado com as respostas obtidas.
6. Peça-lhes para experimentarem se isto ocorre com todo hexágono onde pontos consecutivos estão sobre retas distintas.
7. Peça-lhes para conjecturarem um enunciado geral sobre o fenômeno observado.
8. Pergunte-lhes o que ocorre se o hexágono considerado tiver um par de lados opostos paralelos.
9. Pergunte-lhes o que ocorre se o hexágono considerado tiver dois pares de lados opostos paralelos.

#### 4.2.4 Teorema de Pascal

O objetivo desta atividade é apresentar o Teorema de Pascal como uma extensão do Teorema de Pappus, onde um par de retas é substituído por uma cônica e dois conjuntos distintos de três pontos cada passam a ser vistos como um único conjunto de seis pontos.

1. Peça para os alunos plotarem uma cônica e escolherem seis pontos  $A, B, C, D, E$  e  $F$  sobre ela.
2. Peça-lhes para destacarem o hexágono  $ABCDEF$ .
3. Peça-lhes para obterem os pontos  $L = AB \cap DE$ ,  $M = BC \cap EF$  e  $N = CD \cap FA$ .
4. Peça-lhes para plotarem a reta que passa por  $L$  e  $M$  e observe que  $N$  está sobre ela.
5. Enuncie o Teorema de Pascal.
6. Observe que o Teorema de Pascal contempla outras possibilidades de hexágonos, estimulando os alunos a variarem os seis pontos escolhidos.
7. Observe que o Teorema de Pascal contempla outras possibilidades de cônicas.
8. Recordando a definição de cônica e o fato de que um par de retas concorrentes a satisfaz, explique para os alunos que o Teorema de Pascal engloba o Teorema de Pappus visto na Atividade 4.2.3.

## 4.3 ATIVIDADES DE NÍVEL 3

4.3.1 *Teorema de Steiner*

Esta atividade tem como objetivos elucidar o Teorema de Steiner e incentivar questionamentos para além do enunciado apresentado.

1. Peça para os alunos plotarem uma cônica.
2. Peça-lhes para escolherem seis pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$  sobre essa cônica.
3. Peça-lhes para seguirem os passos da Atividade 4.2.4, a fim de encontrar a reta de Pascal do hexágono  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ . Sugerimos deixar na imagem apenas a cônica, o hexágono em questão e a sua reta de Pascal.
4. Peça-lhes para repetirem o procedimento para o hexágono  $P_1P_4P_3P_6P_5P_2$ .
5. Peça-lhes para repetirem o procedimento para o hexágono  $P_1P_6P_3P_2P_5P_4$ .
6. Destaque que as retas obtidas em cada caso se cruzam em um ponto, o que está de acordo com o Teorema de Steiner.
7. Pergunte aos alunos se, a partir dos pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$ , podemos obter outros hexágonos além dos três já mencionados. Se sim, quantos?
8. Instigue-os a descobrir como se dá a configuração das retas de Pascal de todos eles.

4.3.2 *Construção de cônicas através do Teorema de Pascal*

Esta atividade ilustra o resultado de que dados cinco pontos do plano, existe uma cônica que passa por todos eles. Nela, apresentamos um algoritmo de construção que utiliza o Teorema de Pascal e nos permite inferir que a recíproca<sup>4</sup> desse resultado é válida.

1. Peça para os alunos escolherem cinco pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$  no plano cartesiano, três a três não colineares
2. Peça-lhes para definirem  $Q_1$  como a intersecção das retas  $P_1P_2$  e  $P_4P_5$ .

<sup>4</sup> Dado um hexágono de lados opostos não paralelos, se os três pontos de intersecção de seus lados opostos são colineares, então este estará inscrito em uma cônica.

3. Peça-lhes para traçarem uma reta  $r$  passando por  $Q_1$ , utilizando um controle deslizante.
4. Peça-lhes para definirem  $Q_2$  como a intersecção de  $r$  com a reta  $P_2P_3$ .
5. Peça-lhes para definirem  $Q_3$  como a intersecção de  $r$  com a reta  $P_3P_4$ .
6. Peça-lhes para obterem  $P_r$  como a intersecção das retas  $P_1Q_3$  e  $P_5Q_2$ .
7. Peça-lhes para habilitarem o rastro e observarem a cônica sendo construída conforme  $r$  varia.
8. Explique para os alunos por que o algoritmo funciona.
9. Enuncie na lousa a recíproca do Teorema de Pascal e questione-os se, a partir desta atividade, podemos inferir que ela seja verdadeira.

#### 4.3.3 Por que o nome “cônica”?

Esta atividade tem como objetivo explicar a origem dos nomes “cônica” e “cônica degenerada”. Além disso, acreditamos que ela seja uma boa forma de apresentar aos alunos as funcionalidades 3D do GeoGebra.

1. Recorde a definição de cônica.
2. Relembre que toda equação do 2º grau em duas variáveis representa um dos seguintes lugares geométricos: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, par de retas concorrentes, par de retas paralelas, reta, ponto ou conjunto vazio.
3. Peça para os alunos para montarem uma superfície de equação  $x^2 + y^2 = z^2$  (tome como referência a Figura 64).

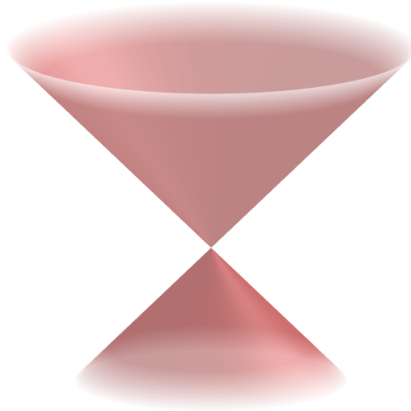


Figura 64: Superfície de equação  $x^2 + y^2 = z^2$  (Cones invertidos).

4. Diga para os alunos que, a partir de agora, escolheremos planos de modo que a intersecção entre eles e a superfície dêem as cônicas conhecidas (circunferência, elipse, hipérbole e parábola).
5. Para montar a Figura 65, escolhemos a equação do plano como sendo  $x = 1$ .<sup>5</sup>

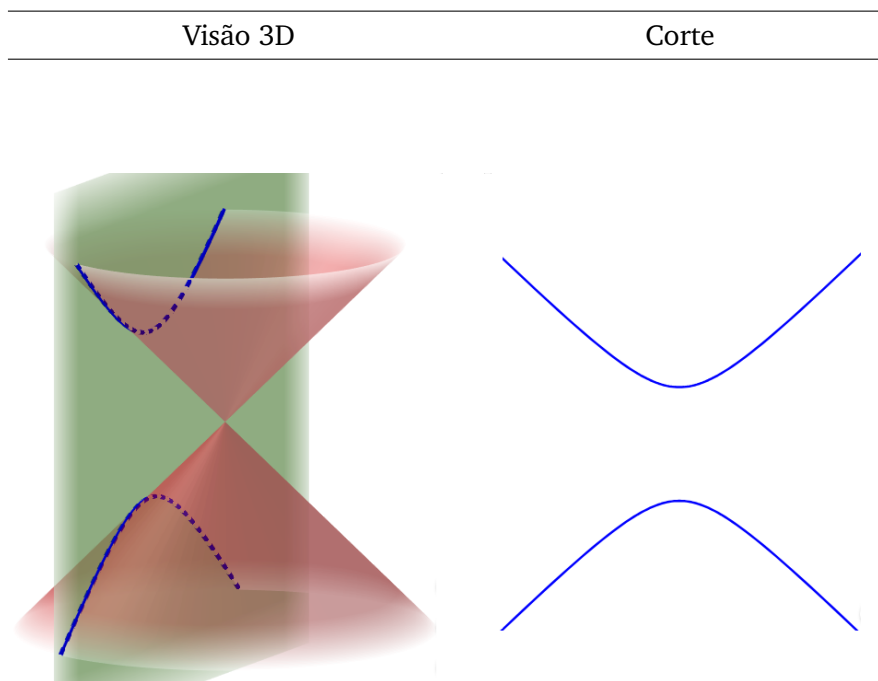


Figura 65: Hipérbole.

<sup>5</sup> Explique para os alunos que estamos trabalhando com a terceira dimensão, ou seja,  $x = 1$  é um plano, pois independentemente dos valores de  $y$  e de  $z$ ,  $x$  será 1, o que representa um plano paralelo ao plano  $yz$ .



6. Para montar a Figura 66, escolhemos a equação do plano como sendo  $z = 3$ .

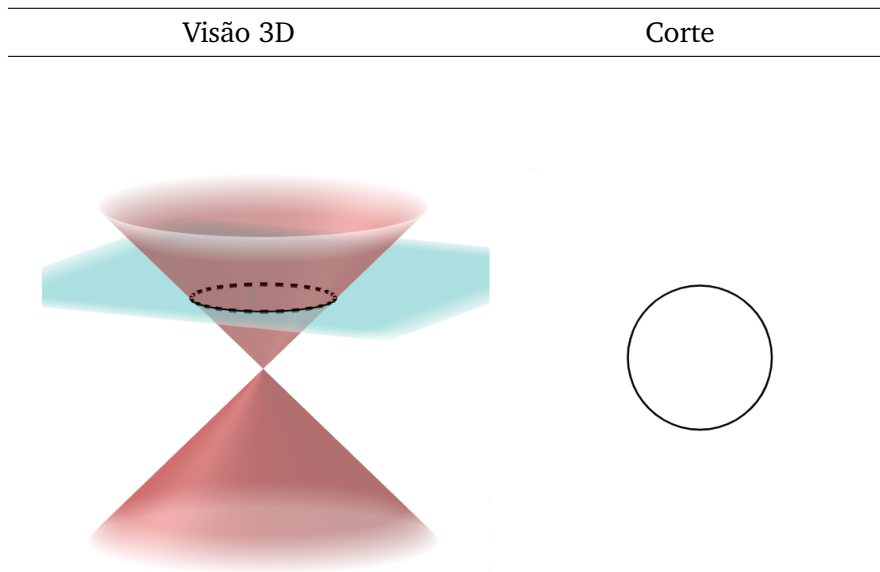


Figura 66: Circunferência.

7. Para montar a Figura 67, escolhemos a equação do plano como sendo  $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 2z + 2$ .

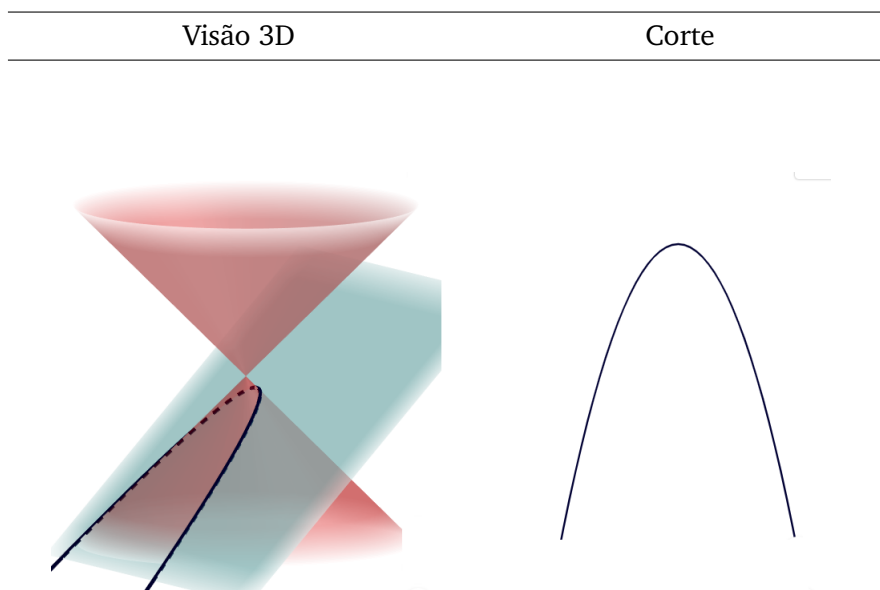


Figura 67: Parábola.

8. Para montar a Figura 68, escolhemos a equação do plano como sendo  $x + y = 3z + 5$ .

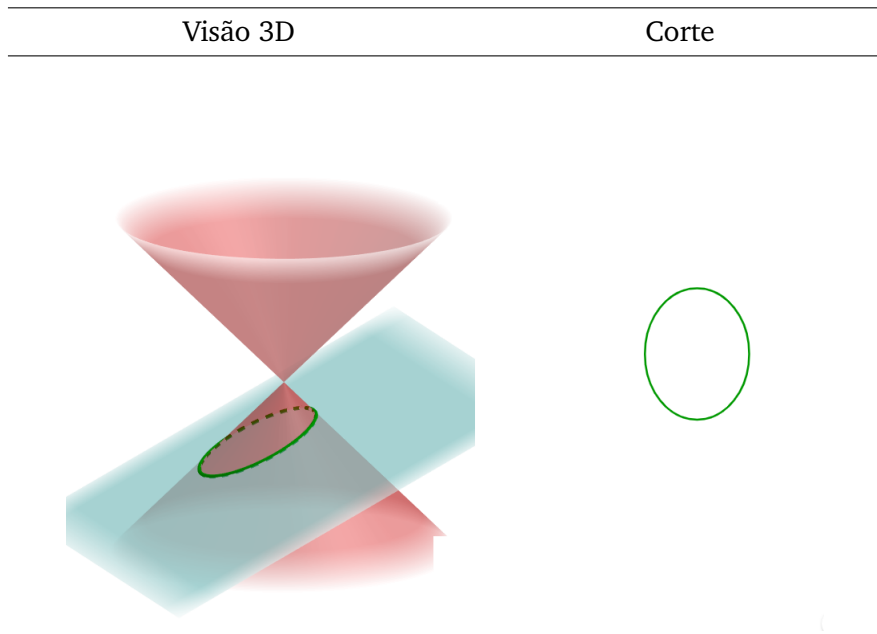


Figura 68: Elipse.

9. Explique para os alunos que, a partir de agora, escolheremos planos de modo que a intersecção entre eles e a superfície dêem as cônicas degeneradas (ponto, reta, retas paralelas, retas concorrentes e o vazio).
10. Para montar a Figura 69, escolhemos a equação do plano como sendo  $z = 0$ . Neste caso, a visão do corte se faz desnecessário, já que a intersecção é um ponto.

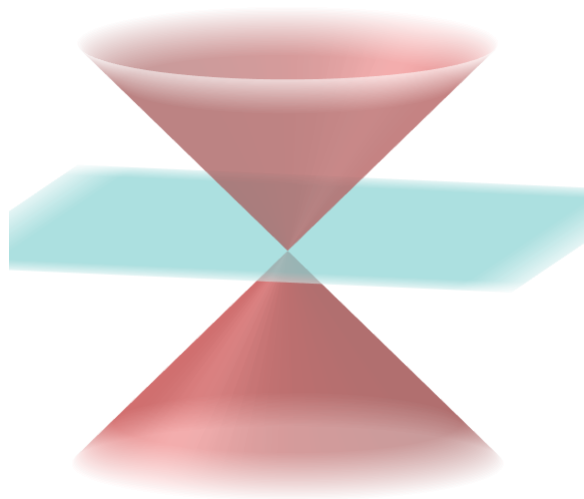


Figura 69: Ponto.

11. Para montar a Figura 70, escolhamos a equação do plano como sendo  $x = 0$ .

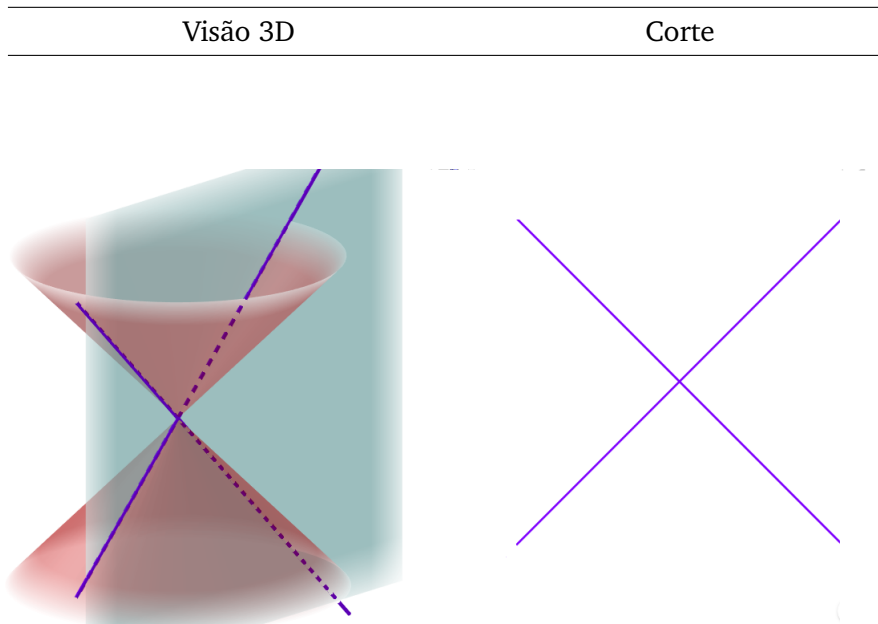


Figura 70: Par de retas concorrentes.

12. Para montar a Figura 71, escolhamos a equação do plano como sendo  $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 2z$ . Observe que a intersecção entre o plano e a superfície é uma única reta.

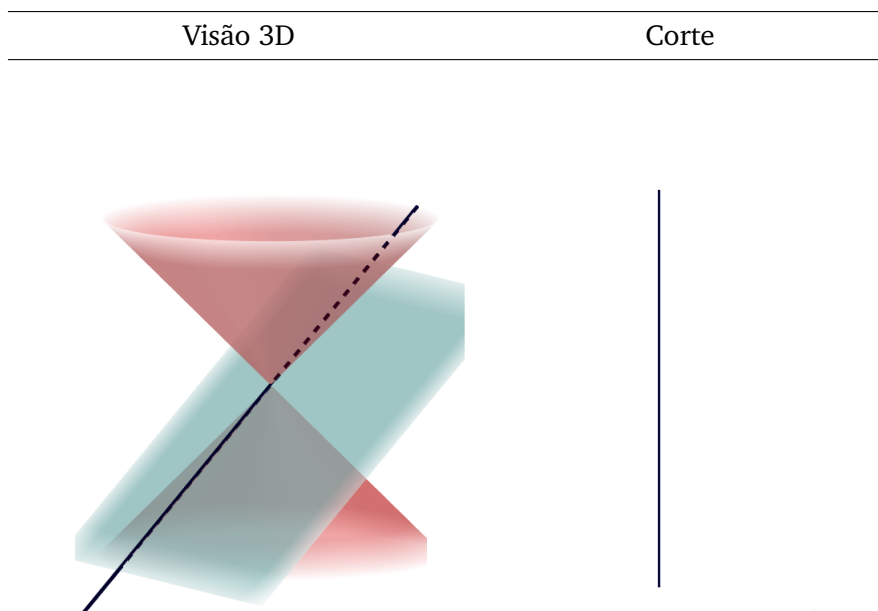


Figura 71: Par de retas concorrentes.

13. Para montar a Figura 72, escolhemos a equação do plano como sendo  $x = 0$ , porém agora usamos a superfície de equação  $x^2 + y^2 = 4$  para representar as retas paralelas, uma vez que essa equação nos dá um caso degenerado da superfície de equação  $x^2 + y^2 = z^2$ .

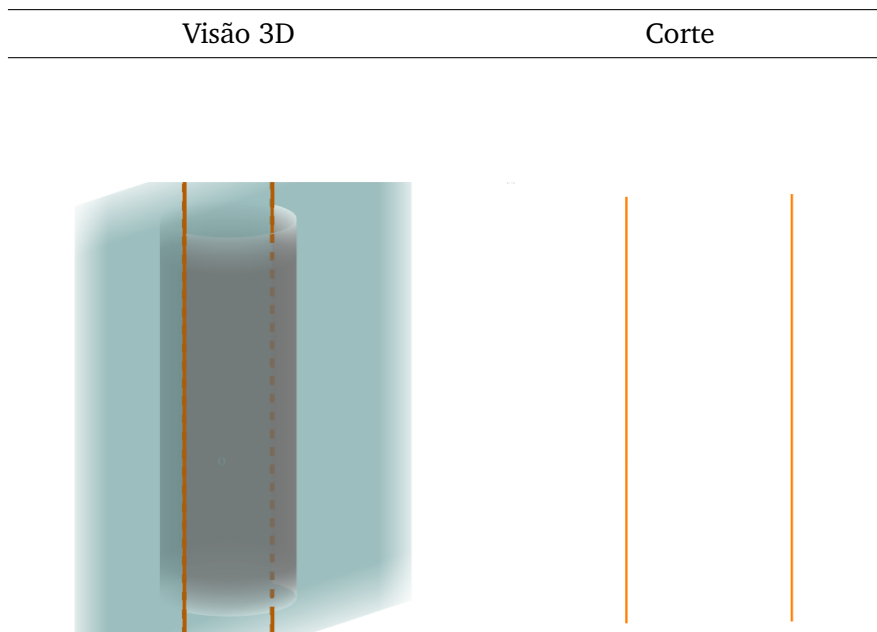


Figura 72: Par de retas paralelas.

14. Para montar a Figura 73, escolhemos a equação do plano como sendo  $x = 4$ . Neste caso, o corte 2D se faz desnecessário, já que o plano não intersecta a superfície de equação  $x^2 + y^2 = 4$ .



Figura 73: Conjunto vazio.

*Observação.* Para visualizar os cortes, basta o aluno utilizar o comando *Intersecção entre Dois Objetos*, que nos casos acima serão o(s) cone(s) e o plano, o que resultará na imagem das cônicas, porém em 3D. A partir disso, é só clicar com o botão direito do mouse diretamente na cônica e escolher a opção *Criar Vista 2D*, o que dará a visão 2D das figuras acima.



---

## UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

---

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta, em formato de plano de aulas, que visa a incorporar a Abridged Notation no ensino de Geometria Analítica na Educação Básica. Tomaremos como base o fato do aluno já ter visto as usuais equações de reta, circunferência, elipse, hipérbole e parábola em aulas anteriores.<sup>1</sup>

### 5.1 BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE A BNCC

Antes de apresentar o plano de aulas, discorreremos brevemente sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [13], que é um documento de caráter normativo da educação brasileira, cuja versão final foi homologada em 20 de novembro de 2018. Ela define o “conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE)”.

A BNCC versa sobre *competências*, que são definidas como mobilizações de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do

---

<sup>1</sup> De acordo com o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo [12], todos os temas de Geometria Analítica devem ser contemplados durante um bimestre no 3º ano do Ensino Médio. Considerando que há 4 aulas de Matemática por semana (já que [12] não separa a disciplina em duas frentes, como muitos colégios particulares o fazem) e cerca de 10 semanas por bimestre, ao reservar 4 delas para avaliações que serão aplicadas, eventuais feriados e recuperações bimestrais, o professor teria por volta de 24 aulas para cumprir o cronograma. (As escolas particulares nas quais trabalhei têm mais ou menos a mesma quantidade de aulas, ainda que com uma disposição diferente.)

pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Além de estabelecer competências gerais para a Educação Básica, a BNCC expõe competências específicas por itinerário formativo<sup>2</sup> — indicando, dentro de cada uma delas, quais habilidades<sup>3</sup> devem ser adquiridas. Apenas em alguns (poucos) casos, o documento fornece diretrizes mais específicas<sup>4</sup> do conteúdo a ser abordado — sem, contudo, apresentar sugestões de como implementá-lo.

Um dos propósitos da BNCC é conectar a prática do Ensino Médio com a realidade cotidiana do aluno e do mercado de trabalho. No cenário atual, os jovens precisam ser muito mais colaborativos, criativos, participativos, produtivos, proativos e ter autonomia para tomar decisões, assim como para buscar as informações que desejam e lidar com elas. Nesse sentido, a BNCC propõe a superação da fragmentação disciplinar do conhecimento, o estímulo à aplicação dos conceitos na vida real, a contextualização do que se aprende e a construção de um projeto de vida para esses jovens.<sup>5</sup>

Um dos temas mais importantes tratados na BNCC é o *ensino para equidade*, que pressupõe reconhecer as diferentes necessidades e interesses dos estudantes.<sup>6</sup> Neste ponto, questionamos a BNCC, pois, de modo geral, ela ignora o ensino/aprendizagem da Matemática “pela Matemática” (isto é, estudar Matemática pelo interesse exclusivo

- 
- 2 Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Formação Técnica e Profissional.
- 3 Por exemplo, no que diz respeito à primeira competência específica da área de Matemática e suas Tecnologias, a primeira habilidade listada é: (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.
- 4 Por exemplo, (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
- 5 Um exemplo dado pela própria BNCC é o caso da Educação Escolar Indígena que “significa assegurar competências específicas com base nos princípios da coletividade, reciprocidade, integralidade, espiritualidade e alteridade indígena, a serem desenvolvidas a partir de suas culturas tradicionais reconhecidas nos currículos dos sistemas de ensino e propostas pedagógicas das instituições escolares. Significa também, em uma perspectiva intercultural, considerar seus projetos educativos, suas cosmologias, suas lógicas, seus valores e princípios pedagógicos próprios (em consonância com a Constituição Federal, com as Diretrizes Internacionais da OIT – Convenção 169 e com documentos da ONU e Unesco sobre os direitos indígenas) e suas referências específicas, tais como: construir currículos interculturais, diferenciados e bilíngues, seus sistemas próprios de ensino e aprendizagem, tanto dos conteúdos universais quanto dos conhecimentos indígenas, bem como o ensino da língua indígena como primeira língua”.
- 6 Observe que “equidade” é diferente de “igualdade”: esta última pode ser entendida como todos terem que aprender exatamente a mesma coisa, do mesmo modo, no mesmo intervalo de tempo; a primeira, por sua vez, está relacionada a valorizar as diferenças entre os alunos, olhando para o fato que cada um tem seus próprios projetos de vida.



nessa disciplina) — afinal, quando buscamos o ensino para equidade, devemos que reconhecer que, para alguns alunos, a Matemática é interessante por si só.

Um segundo argumento para valorizar o ensino/aprendizagem da Matemática “pela Matemática” é que o ambiente matemático é propício para estimular o desenvolvimento de habilidades como o raciocínio lógico, a capacidade de reconhecer padrões e a aptidão para representar adequadamente uma situação-problema, identificando quais seriam as informações essenciais àquele contexto.

Um terceiro argumento a favor do ensino/aprendizagem da Matemática “pela Matemática” se encontra no artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases (LDB), onde está escrito:

“A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais”.

O excerto acima não nos permite ignorar a pesquisa em Matemática, que, em sua quase totalidade, é “pela Matemática”.

O que propomos nesta dissertação combina ensino/aprendizagem da Matemática “pela Matemática” com o cuidado de fomentar competências e habilidades para além desta disciplina. Ao explorar as potencialidades da Abridged Notation (e, também, ao delinear seus limites) aguçamos o raciocínio lógico e refinamos as capacidades de reconhecer padrões e de representar adequadamente uma situação-problema. O plano de aulas que apresentaremos a seguir tem como motivação adicional incentivar a curiosidade e o espírito investigativo, a organização dos pensamentos, ideias e argumentos, bem como a capacidade de se expressar com clareza e precisão.

## 5.2 PLANO DE AULA - INCORPORANDO A ABRIDGED NOTATION NO ENSINO MÉDIO

*Duração total: 9 aulas (450 minutos)*

### **Objetivos:**

- Introduzir a Abridged Notation no Ensino Médio de uma forma simples e clara, buscando explorar suas potencialidades e delinear seus limites.

- Fomentar o raciocínio lógico, a capacidade de reconhecer padrões e a habilidade de representar adequadamente uma situação-problema.
- Incentivar a curiosidade, o espírito investigativo, a organização dos pensamentos, ideias e argumentos, bem como a capacidade de se expressar com clareza e precisão.
- Trabalhar com o software GeoGebra como suporte motivador para os alunos se aproximarem da Geometria Analítica.
- Fazer com que os alunos trabalhem em grupos e consigam fazer investigações e discussões sobre Geometria Analítica e chegar a um consenso.

**Materiais necessários:**

- Computadores/notebooks com acesso à internet ou com o aplicativo GeoGebra instalado.

**Espaço utilizado:**

- Sala de computadores (se houver disponibilidade de notebooks para os alunos, pode ser feito dentro da própria sala de aula).

**Material de suporte ao professor:**

- Todo o conhecimento necessário para a aplicação desse plano de aula se encontra nesta dissertação.

### 5.2.1 Aula 1: Apresentação do software GeoGebra

#### *Início da aula*

*Tempo: 10 minutos.*

1. Faça a chamada com os alunos.
2. Se necessário, conduza os alunos até a sala onde estão os computadores.
3. Peça para os alunos se organizarem em duplas ou trios (a escolha dos alunos formarem duplas ou trios serve para que eles discutam sobre os passos que estão fazendo e um pode auxiliar o outro nas construções).

4. Peça para os alunos abrirem o aplicativo GeoGebra (se necessário, mostre para eles como fazer).

#### *Apresentação do software GeoGebra*

*Tempo: 40 minutos.*

1. Peça para os alunos construírem dois pontos através da ferramenta *Ponto*. Destaque que todo ponto que eles construírem terá uma representação como par ordenado no lado esquerdo da tela.
2. Peça para os alunos construírem uma reta passando por esses dois pontos através da ferramenta *Reta*. Destaque que toda reta que eles construírem terá uma representação na forma de equação do primeiro grau em duas variáveis no lado esquerdo da tela.
3. Peça para os alunos construírem uma circunferência através da ferramenta *Circunferência*. Destaque que toda circunferência que eles construírem terá uma equação vista no lado esquerdo da tela.
4. Peça para os alunos construírem uma elipse, uma hipérbole e uma parábola através das ferramentas respectivas.
5. Peça para os alunos construírem uma cônica que passa por cinco pontos através da ferramenta *Cônica por Cinco Pontos*.
6. Peça para os alunos construírem pontos, retas, circunferências, elipses, hipérbolas e parábolas através de suas equações.
7. Finalmente, treine com os alunos a ferramenta *Controle Deslizante*. Por exemplo, plotando a equação de uma reta na forma  $y = ax + b$ , o próprio GeoGebra vai dar a opção de *Criar Controle Deslizante* no canto superior esquerdo (logo abaixo da equação). Dê início aos controles deslizantes individualmente (ênfatizando que  $a$  se relaciona com a inclinação da reta e  $b$  se relaciona com onde a reta cruza o eixo das ordenadas).

*Observação.* Os alunos podem utilizar a lista de exercícios disponibilizada na Seção H.1 do Apêndice H para treinar (em casa) o uso do GeoGebra.

### 5.2.2 Aulas 2 e 3: Introduzindo a Abridged Notation

*Tempo: 80 - 100 minutos.*

1. Aplique a Atividade 4.1.1.
2. Aplique a Atividade 4.1.2.
3. Como tarefa para casa, peça aos alunos para fazerem a Atividade 4.1.3.

### 5.2.3 Aulas 4 e 5: Aprofundando em Abridged Notation

*Tempo: 80 - 100 minutos.*

1. Discuta com os alunos a Atividade 4.1.3,
2. Apresente aos alunos a equação geral de uma cônica,  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ .
3. Aplique a Atividade 4.2.1.

### 5.2.4 Aulas 6, 7 e 8: Teoremas de Brianchon, Pappus e Pascal

*Tempo: 120 - 150 minutos.*

1. Aplique a Atividade 4.2.2.
2. Aplique a Atividade 4.2.3.
3. Aplique a Atividade 4.2.4.
4. Aplique a Atividade 4.3.1.

### 5.2.5 Aula 9: Reflexões

*Juntando os conhecimentos*

*Tempo: 30 minutos.*

1. Entregue para os alunos um questionário a ser respondido em duplas ou trios, como o apresentado na Seção H.2 do no Apêndice H.
2. Discuta com os alunos as respostas de cada pergunta.

*Fechamento*

*Tempo: 10 minutos.*

1. Proponha aos alunos, como tarefa para casa, a construção de uma cônica por cinco pontos através do algoritmos descrito na Atividade 4.3.2. Peça para que eles expliquem por que o algoritmo funciona.
2. Para aprofundar um pouco mais no assunto “cônicas” (e incentivar o acesso a outras funcionalidades do GeoGebra), sugerimos indicar aos alunos a Atividade 4.3.3.



---

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Nesta dissertação tratamos sobre Geometria Analítica, trazendo uma notação não usual. Num primeiro instante usamos a notação ensinada no Ensino Médio (notação usual) e aprofundamos o que é ensinado nesta etapa da vida do aluno, discutindo equação geral de cônica e planos cartesianos oblíquos. Já num segundo instante tratamos sobre a chamada “Abridged Notation” (Notação Abreviada) para lugares geométricos no plano. Deixamos clara a versatilidade dessa notação pelo fato de ela não ficar na dependência da escolha de eixos coordenados, assim culminamos a escolha dessa notação na demonstração de teoremas importantes na Matemática (Teorema de Pascal, Teorema de Steiner e Teorema de Brianchon) e montamos um plano de aula, com atividades presentes na própria dissertação, para podermos implementar a proposta de aplicar Abridged Notation no Ensino Médio.

Aqui, buscamos cobrir todo o conteúdo apontado no currículo do Estado de São Paulo tomando como importante o fato do aluno entender a noção de sistema de coordenadas e de como a álgebra ajuda a resolver problemas geométricos. É importante que ele se familiarize e tenha destreza para trabalhar com equações de retas e cônicas e que ele entenda as vantagens e desvantagens de cada tipo de equação, para que possa empregá-las adequadamente.<sup>1</sup>

Norteamos nosso trabalho com a BNCC, que fala sobre competências e habilidades que os alunos precisam adquirir ao longo dessa etapa da vida (Ensino Médio) e concordamos que utilizar a linguagem matemática para desenvolvê-las é uma ideia propícia para o desenvolvimento cognitivo.<sup>2</sup> Nesse sentido, a escolha do tema propicia repre-

---

1 A Abridged Notation não liga muito para a “cara” de cada equação, mas sobretudo para as combinações que podemos fazer entre elas. Ela faz com que o cenário de trabalho fique um pouco mais abstrato e, de quebra, treinando a capacidade de abstração.

2 Relativo ao processo mental de percepção, memória, juízo e/ou raciocínio.

sentar adequadamente um problema, ignorando dados supérfluos e ficando só com o essencial.

No Capítulo 1 tentamos garantir que o professor tenha acesso a um material de qualidade para ensinar não apenas os tópicos listados de Geometria Analítica, mas transmitir ao aluno a ideia que está por trás dessa disciplina, que revolucionou a Matemática na época em que foi implementada. No Capítulo 2 introduzimos o método da Abridged Notation, e incluímos uma nova cara para certos tipos de equações de curvas no plano cartesiano. O Capítulo 3 traz teoremas interessantes e importantes, que podem ser demonstrados via Abridged Notation. O terceiro caso do Pascal, em especial, aponta para as limitações da Abridged Notation: e é importante testar os limites de uma determinada técnica ou método, tentando entender até onde ele vai e até onde é possível empregá-lo.

Cientes da dificuldade aparente de um cenário mais abstrato, o Capítulo 4 traz atividades para que o aluno tenha um suporte visual do que está acontecendo. As atividades no GeoGebra foram propostas com este fim, e também com o objetivo de treinar a capacidade de ler o que está escrito no enunciado de um teorema. Fazer perguntas, testar, conjecturar são comportamentos importantes e o cenário da Matemática é convidativo para isso. Procuramos, também, com essas atividades, estimular isso.

Por fim, encerramos este trabalho apresentando um plano de aula para que o professor se oriente num curso de Geometria Analítica do Ensino Médio, onde justificamos nossa escolha desse tema baseada na proposta da BNCC; apontamos tempo estimado por aula/sequência didática, buscando que ela pudesse ser aplicada no Ensino Médio sem que o professor tivesse problema com a sequência didática.

#### *Por que estudar Geometria Analítica no Ensino Médio?*

A Geometria Analítica tem uma importância histórica, o que por sua vez seria o primeiro motivo para estudá-la no Ensino Médio. Podemos ver essa importância quando queremos achar um modo de mapear algum lugar de forma a identificar pontos importantes dentro do mapa. Ainda hoje a Geometria Analítica está presente nos GPSs.

O segundo motivo seria o fato de Geometria Analítica “forçar” o desenvolvimento da abstração, porém em um ambiente controlado. Observe que há uma grande vantagem em ser um ambiente controlado, pois avaliando problemas de Matemática do cotidiano teríamos que a modelagem desses problemas pode ser muito complicada para um aluno de Ensino Médio, então precisaríamos de um ambiente onde a modelagem tem uma quantidade menor de variáveis e de condições.



O terceiro motivo seria o fato da Geometria Analítica ser visual para o aluno, tendo um potencial atrativo para eles, atingindo sua curiosidade. Com isso queremos dizer que um aluno fica impressionado e curioso sobre o fato de uma equação qualquer ter uma representação específica. Podemos deixar a Geometria Analítica ainda mais atrativa com o apoio da Abridged Notation.

O quarto e último motivo dado nesta dissertação foi o fato da Geometria Analítica nos propiciar situações onde podemos evidenciar habilidades importantes para a vida das pessoas, como investigar propriedades de algumas equações (como  $\alpha - k\beta = 0$  ser a equação de um lugar geométrico que passa pela intersecção de dois outros, de equação  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ ), situações onde precisamos executar algoritmos (como construir uma cônica através do Teorema de Pascal), situações onde precisamos utilizar de maneira correta a linguagem matemática (como  $\alpha = 0$  ser uma equação de reta na forma trigonométrica por exemplo), situações onde precisamos identificar padrões (como  $y = ax + b$  ser uma equação de reta onde  $a$  altera a inclinação da reta e  $b$  onde a reta cruza o eixo  $y$ ) e situações onde o aluno pode criar autonomia para resolver problemas relacionados a seu cotidiano ou não (como o incentivo do uso do GeoGebra, que pode ajudar com que o aluno atinja as respostas para os problemas que ele encontra no cotidiano, como por exemplo, mapear o caminho da casa dele até a escola, ou calcular grandezas através de um gráfico).



---

## OUTROS EXEMPLOS DE SISTEMAS DE COORDENADAS NO PLANO

---

O uso de um par de eixos não é a única maneira de estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e números que determinam sua posição.

### A.1 COORDENADAS POLARES

Dados um ponto  $O$  e uma semirreta  $OB$ , podemos identificar qualquer outro ponto  $P$  do plano por meio do ângulo  $BOP$  e da distância de  $P$  a  $O$ . É usual denotar tal ângulo por  $\theta$  e tal distância por  $\rho$ .

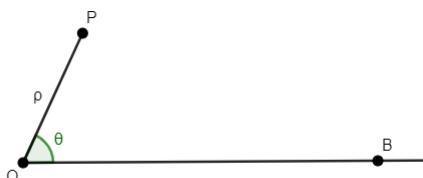


Figura 74: Coordenadas polares.

O par ordenado  $(\rho, \theta)$  consiste de *coordenadas polares* do ponto  $P$ .

*Observações.* Se  $(\rho, \theta)$  são coordenadas polares de um ponto  $P$ , então  $(\rho, \theta + 2k\pi)$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ , também o são, o que mostra que todo ponto do plano tem um conjunto infinito de coordenadas neste sistema. Contudo, o ponto  $P$  fica univocamente determinado dados  $\rho$  e  $\theta$ .

Olhando para o nosso dia-a-dia essa estratégia é aplicada na numeração das rodovias em São Paulo.

1. Para as rodovias radiais são atribuídos números da série par, de "2" a "360", correspondentes, aproximadamente, ao azimute da linha que liga o Marco Zero (São Paulo) ao meio da diretriz da rodovia. Em outras palavras, esse número é determinado pelo ângulo formado entre o norte do Marco Zero e uma linha imaginária no centro da estrada, o que corresponderia ao  $\theta$ .
2. Para as rodovias transversais, serão atribuídos números da série ímpar, correspondente, aproximadamente, à sua distância média à São Paulo (Marco Zero), o que corresponderia ao  $\rho$ .

#### A.1.1 Transformação de coordenadas polares para cartesianas

Para transformar coordenadas polares em cartesianas, tome a reta orientada  $OB$  como eixo  $Ox$  e fixe uma reta orientada que passa por  $O$  e é diferente de  $OB$  como eixo  $Oy$ . Denote por  $\omega$  o ângulo entre  $Ox$  e  $Oy$ . Seja  $P$  um ponto de coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ .

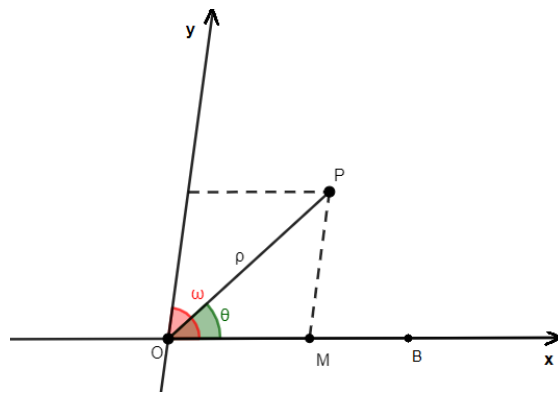


Figura 75: Transformação de coordenadas polares para cartesianas.

Da Lei dos Senos segue que

$$\frac{\text{sen}(PMO)}{\rho} = \frac{\text{sen}\theta}{PM} = \frac{\text{sen}(OPM)}{OM}.$$

Como  $\omega = \pi - PMO$  temos que  $\text{sen}(PMO) = \text{sen}\omega$ . Além disso,  $OPM = \omega - \theta$ . Portanto,

$$OM = \frac{\rho \text{sen}(\omega - \theta)}{\text{sen}\omega} \quad \text{e} \quad PM = \frac{\rho \text{sen}\theta}{\text{sen}\omega}$$

são, respectivamente, a abscissa e a ordenada de  $P$  em relação ao sistema de coordenadas cartesianas fixado.

No caso em que os eixos são ortogonais,  $\omega = \frac{\pi}{2}$ . Dessa forma,  $OM = \rho \cos \theta$  e  $PM = \rho \sin \theta$ .

## A.2 COORDENADAS TRILINEARES

Suponha fixado um triângulo  $ABC$ . Seja  $P$  um ponto do plano. Denotaremos por  $\alpha$  a distância de  $P$  à reta  $BC$ , por  $\beta$  a distância de  $P$  à reta  $CA$  e por  $\gamma$  a distância de  $P$  à reta  $AB$ .

O terno ordenado  $(\alpha, \beta, \gamma)$  consiste das *coordenadas trilineares* do ponto  $P$ .

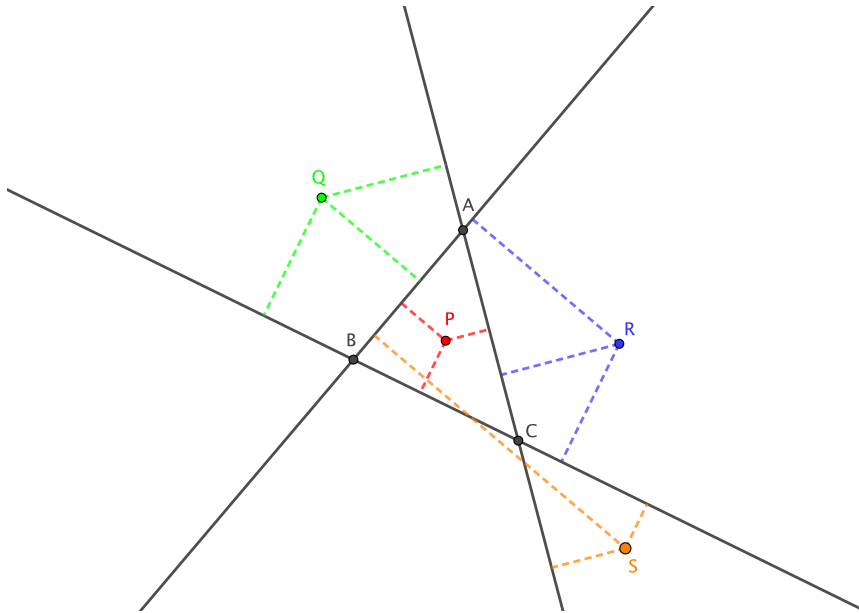


Figura 76: Visualizando as coordenadas trilineares dos pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$ .

As coordenadas trilineares  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de  $P$  estão conectadas pela seguinte equação:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S$$

onde  $S$  denota a área do triângulo  $ABC$  e  $a$ ,  $b$  e  $c$  denotam, respectivamente, o comprimento dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ .



# B

---

## RETAS E CONJUGADO ISOGONAIS

---

Neste apêndice, empregaremos o método da Abridged Notation para mostrar que se três cevianas de um triângulo se cruzam em um ponto, então as três cevianas isogonais às primeiras também se cruzam em um ponto.

**Definição B.1.** Duas retas que passam pelo mesmo vértice de um triângulo são denominadas *isogonais* se são simétricas em relação à bissetriz do ângulo interno que passa por esse vértice.

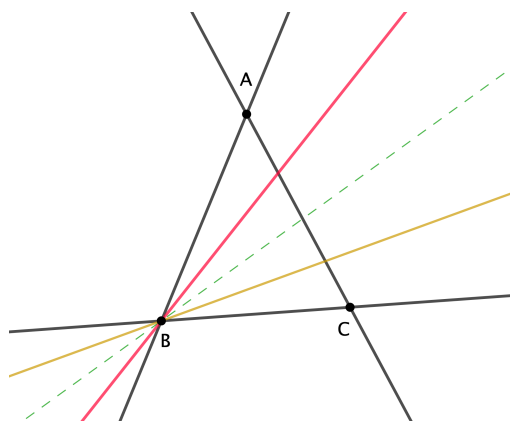
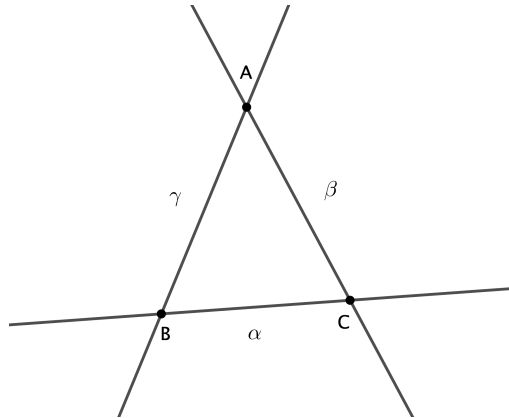


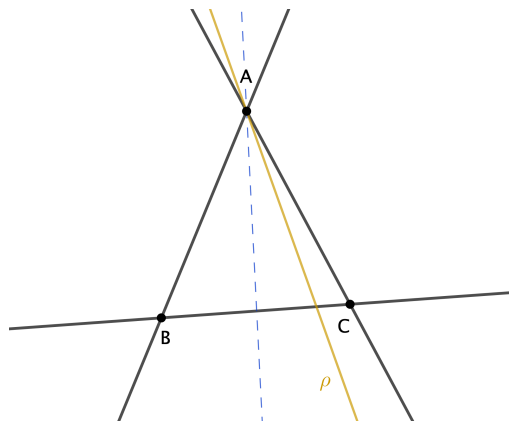
Figura 77: Retas isogonais.

Considere um triângulo  $ABC$  e sejam  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = 0$  equações na forma trigonométrica dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente.

Figura 78: Triângulo  $ABC$ .

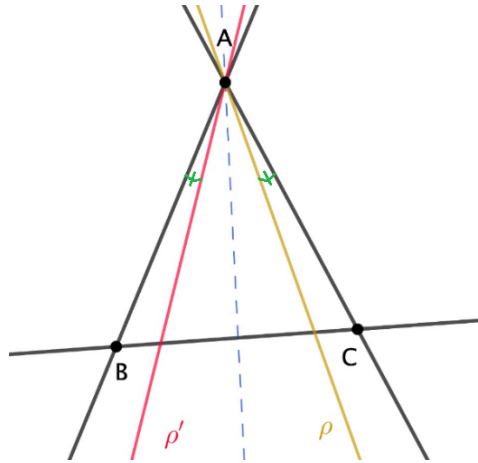
Do Lema 2.4 segue que  $\beta - \gamma = 0$  é equação da bissetriz interna que passa por  $A$ ,  $\gamma - \alpha = 0$  é equação da bissetriz interna que passa por  $B$  e  $\alpha - \beta = 0$  é equação da bissetriz interna que passa por  $C$ .

Seja  $\rho$  uma reta que passa por  $A$  e não coincide com qualquer lado do triângulo  $ABC$ . Como  $\rho$  passa por  $A$  e é diferente de  $AC$ , temos que  $\rho = \gamma - k\beta$ , para algum  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 0$ .

Figura 79: Reta  $\rho$ .

Note que a reta simétrica à  $\rho$  em relação à bissetriz interna que passa por  $A$ , a qual chamaremos de  $\rho'$ , forma com  $\beta$  um ângulo congruente ao que  $\rho$  forma com  $\gamma$  e, de forma análoga, forma com  $\gamma$  um ângulo congruente ao que  $\rho$  forma com  $\beta$ . Além disso,  $\rho' = \gamma - k'\beta$  para algum  $k' \in \mathbb{R}$ ,  $k' \neq 0$ .



Figura 80: Reta isogonal  $\rho'$ .

Tomando  $N \in \rho$  e  $N' \in \rho'$  de modo que esses pontos equidistem de  $A$ , temos que

$$k = \frac{d(N, \gamma)}{d(N, \beta)} \quad \text{e} \quad k' = \frac{d(N', \gamma)}{d(N', \beta)}.$$

Como  $d(N, \gamma) = d(N', \beta)$ ,  $d(N, \beta) = d(N', \gamma)$  e  $k \neq 0$  (pois  $\rho \neq AB$ ), obtemos

$$k' = \frac{d(N', \gamma)}{d(N', \beta)} = \frac{d(N, \beta)}{d(N, \gamma)} = \frac{1}{k}.$$

Logo, se  $\rho = \gamma - k\beta$ , então  $\rho' = \gamma - \frac{1}{k}\beta$ .

**Proposição B.2.** *Se três cevianas de um triângulo se cruzam em um ponto, então as três cevianas isogonais às primeiras também se cruzam em um ponto.*

*Demonstração.* Considere um triângulo  $ABC$  e sejam  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = 0$  equações na forma trigonométrica dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  e  $\rho_3$  três cevianas de um triângulo, que se intersectam em um ponto  $P$ .

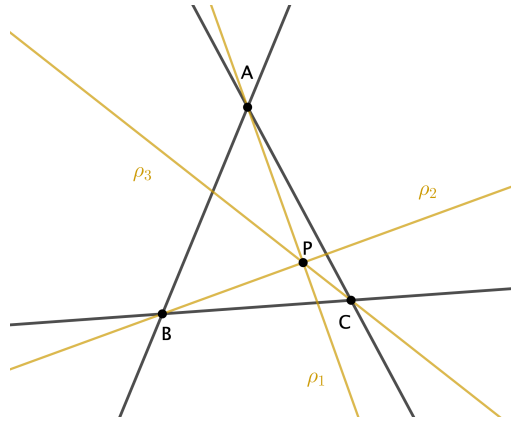


Figura 81: Cevianas  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  e o ponto  $P$ .

Denotemos por  $\rho'_1$  a reta isogonal a  $\rho_1$ , por  $\rho'_2$  a reta isogonal a  $\rho_2$  e por  $\rho'_3$  a reta isogonal a  $\rho_3$ . Vamos mostrar que essas três cevianas se intersectam em um ponto  $P'$ , denominado o *conjugado isogonal* de  $P$ .

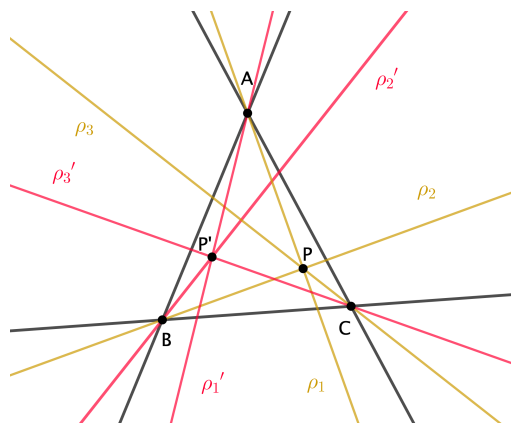


Figura 82: As cevianas isogonais se cruzam no ponto  $P'$ .

Tomemos  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$  tais que  $\rho_1$  tem equação  $\gamma - k_1\beta = 0$ ,  $\rho_2$  tem equação  $\alpha - k_2\gamma = 0$  e  $\rho_3$  tem equação  $\beta - k_3\alpha = 0$ . Como  $\rho_3$  passa pela intersecção de  $\rho_1$  e  $\rho_2$  e  $\rho_3 \neq \rho_2$ , existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $\beta - k_3\alpha = \rho_1 - k\rho_2$ . Logo,

$$\beta - k_3\alpha = \gamma - k_1\beta - k(\alpha - k_2\gamma).$$

Desenvolvendo, obtemos

$$(k - k_3)\alpha + (1 + k_1)\beta = (1 + kk_2)\gamma.$$

Como  $\gamma$  não passa pela intersecção de  $\alpha$  e  $\beta$ , segue que  $1 + kk_2 = 0$ , ou seja,  $k = -\frac{1}{k_2}$ .

Logo,

$$\left(-\frac{1}{k_2} - k_3\right)\alpha + (1 + k_1)\beta = 0$$

e, portanto,

$$\beta - k_3\alpha = \frac{1}{k_2}\alpha - k_1\beta.$$

Disto segue que  $\rho_3$  tem equação

$$\alpha - k_1k_2\beta = 0.$$

Uma vez que  $\rho'_1 = \gamma - \frac{1}{k_1}\beta$ ,  $\rho'_2 = \alpha - \frac{1}{k_2}\gamma$  e  $\rho'_3 = \alpha - \frac{1}{k_1k_2}\beta$ , temos que

$$-\frac{1}{k_2}\rho'_1 - \rho'_2 + \rho'_3 = 0.$$

Disto segue que  $\rho'_1$ ,  $\rho'_2$  e  $\rho'_3$  se intersectam em um ponto. □





---

## PONTOS E RETAS NO INFINITO

---

O *plano projetivo* pode ser pensado como o plano usual acrescido dos *pontos no infinito* e da *reta no infinito* — esta sendo a coleção dos pontos no infinito. A ideia é acrescentar um ponto extra para cada reta do plano, de modo que retas paralelas recebam o mesmo ponto adicional (e, portanto, se intersectem no [ponto no] infinito) e que os pontos adicionais atribuídos a retas não paralelas sejam distintos. Neste apêndice, esboçaremos uma construção desse objeto matemático.

*Quem é o plano projetivo?*

Cada ponto do plano projetivo será uma reta que passa pela origem de  $\mathbb{R}^3$ .

Assim, cada  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  determina um ponto do plano projetivo — a saber, a reta que passa por  $(0, 0, 0)$  e  $(x, y, z)$ . Além disso,  $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$  determinam o mesmo ponto do plano projetivo se, e somente se,  $(x_1, y_1, z_1) = t(x_0, y_0, z_0)$  para algum  $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ .

*Os pontos do plano cartesiano correspondem a que pontos do plano projetivo?*

Começamos identificando o plano cartesiano com o plano  $z = 1$  de  $\mathbb{R}^3$ , no sentido de que  $(x, y)$  será visto como  $(x, y, 1)$ . A reta que passa por  $(0, 0, 0)$  e  $(x, y, 1)$  será o ponto do plano projetivo que corresponde ao ponto  $(x, y)$  do plano cartesiano.

Note que essa correspondência é injetora. Além disso, para cada  $(x, y, z)$  com  $z \neq 0$ , a reta que passa por ele e pela origem de  $\mathbb{R}^3$  fura o plano  $z = 1$  no ponto  $(x/z, y/z, 1)$  e, portanto, será o ponto do plano projetivo que corresponde ao ponto  $(x/z, y/z)$  do plano cartesiano. Aqui, mostramos que toda reta que passa pela origem de  $\mathbb{R}^3$  e que não está contida no plano  $xy$  é um ponto do plano projetivo que corresponde a um

ponto do plano cartesiano. As retas que passam por  $(0,0,0)$  e por outro ponto da forma  $(x, y, 0)$  são pontos do plano projetivo que não correspondem a pontos do plano cartesiano: elas serão vistas como os *pontos no infinito*.

*As retas do plano cartesiano correspondem a que retas do plano projetivo?*

Sejam  $r$  uma reta no plano cartesiano representada por  $ax + by + c = 0$  e  $(x_0, y_0)$  um ponto de  $r$ . Não é difícil notar que  $(x, y)$  pertence a  $r$  se, e somente se,  $(x, y) = (x_0, y_0) + t(-b, a)$  para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Considerando a identificação que fizemos do plano cartesiano com o plano  $z = 1$  de  $\mathbb{R}^3$ , a reta  $r$  é identificada com a reta formada pelos pontos de  $\mathbb{R}^3$  da forma  $X_t = (x_0, y_0, 1) + t(-b, a, 0)$ . Cada um desses pontos, por sua vez, determina um ponto do plano projetivo. A coleção dos pontos do plano projetivo determinados pelos pontos  $X_t$  é a reta do plano projetivo que corresponde à reta  $r$ .

*Qual ponto no infinito é atribuído a cada reta do plano cartesiano?*

Vamos analisar o que acontece com o ponto do plano projetivo determinado por  $X_t$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Note  $X_t = (x_0 - tb, y_0 + ta, 1)$  e  $Y_t = \left(\frac{x_0}{t} - b, \frac{y_0}{t} + a, \frac{1}{t}\right)$  determinam o mesmo ponto no plano projetivo. Portanto, basta analisar o que ocorre com  $Y_t$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Quando  $t \rightarrow \pm\infty$ ,  $Y_t \rightarrow (-b, a, 0)$ . Portanto, o ponto no infinito atribuído à reta  $r$  será o ponto do plano projetivo determinado por  $(-b, a, 0)$  — isto é, a reta de  $\mathbb{R}^3$  que passa por  $(-b, a, 0)$  e  $(0, 0, 0)$ .

Note que os pontos no infinito atribuídos a duas retas paralelas são os mesmos e que os pontos no infinito atribuídos a duas retas não paralelas são distintos.

# D

---

## O TEOREMA DE PASCAL COMO CONSEQUÊNCIA DO TEOREMA DE CHASLES

---

Conforme destacamos no Capítulo 3, o Teorema de Pappus é um caso particular do Teorema de Pascal. Nesse sentido, podemos pensar no Teorema de Pascal como uma extensão do Teorema de Pappus, onde um par de retas é substituído por uma cônica e dois conjuntos distintos de três pontos cada passam a ser vistos como um único conjunto de seis pontos. Em ambos os casos, construímos três novos pontos e mostramos que eles são colineares.

Michael Chasles<sup>1</sup>, em seu *Traité des Sections Coniques*, publicado em 1885, percebeu que a reta de Pascal poderia ser combinada com a cônica, formando uma cúbica, e que o conjunto dos seis pontos que constituem o hexágono poderia ser acrescido dos três que determinam a reta de Pascal, formando uma coleção de nove pontos. Ele, então, obteve o Teorema de Pascal como um corolário do seguinte resultado, que leva seu nome:

**Teorema D.1** (Teorema de Chasles). *Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas cúbicas que se intersectam em nove pontos. Se  $C$  é uma cúbica que passa por oito desses pontos, então  $C$  também passará pelo nono.*

O Teorema de Pascal decorre do Teorema de Chasles da seguinte maneira: as cúbicas  $C_1 = P_1P_2 \cdot P_3P_4 \cdot P_5P_6$  e  $C_2 = P_2P_3 \cdot P_4P_5 \cdot P_6P_1$  passam pelos pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, Q_1, Q_2$  e  $Q_3$ , onde  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  é um hexágono inscrito em uma cônica  $S$  e  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  são os pontos de intersecção dos lados opostos desse hexágono.

---

<sup>1</sup> Matemático francês que junto com Jacob Steiner elaboraram independentemente a moderna Geometria Projetiva, resolvendo grandes problemas existentes nessa área.

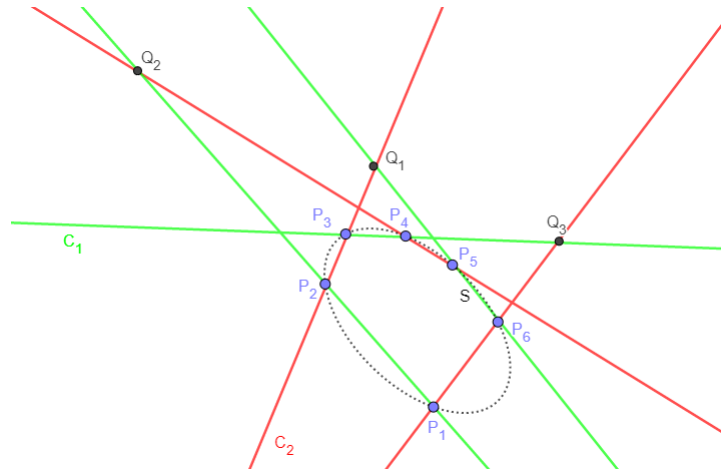


Figura 83: Cúbicas  $C_1$  e  $C_2$ .

A cúbica  $C = S \cdot Q_1Q_2$ , por sua vez, passa pelos pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, Q_1$  e  $Q_2$ . Do Teorema de Chasles segue que ela também passa por  $Q_3$ . Uma vez que  $Q_3$  não pertence a  $S$ , devemos ter que  $Q_3$  está sobre a reta  $Q_1Q_2$  e, portanto,  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  são colineares.

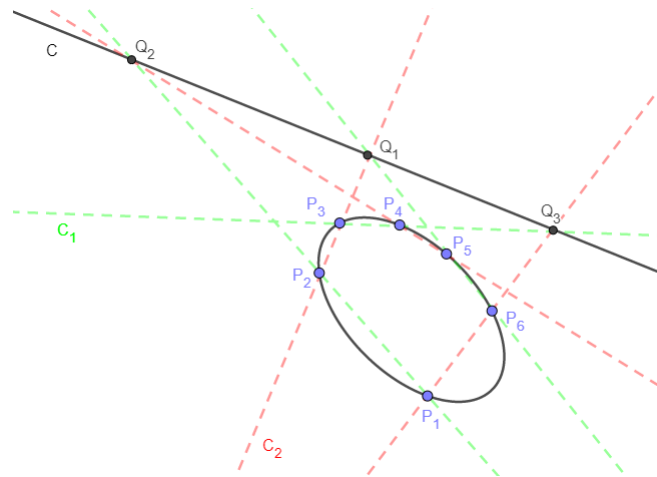


Figura 84: Cúbica  $C$ .

O leitor interessado pode encontrar uma demonstração do Teorema de Chasles em [14]. Àqueles que quiserem saber como os Teoremas de Pappus, Pascal e Chasles fizeram parte de um longo processo de desenvolvimento da área de Geometria Algébrica, culminando no famoso Teorema de Cayley-Bacharach, recomendamos [5].



---

## O TEOREMA DE BRIANCHON COMO COROLÁRIO DO TEOREMA DE PASCAL

---

Neste apêndice, mostraremos que o Teorema de Brianchon pode ser visto como um corolário do Teorema de Pascal. A demonstração que apresentaremos baseia-se em [15].

### E.1 POLO E POLAR

**Definição E.1.** Sejam  $S = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  uma cônica e  $P = (x_0, y_0)$  um ponto do plano cartesiano. O *polar* de  $P$  em relação à cônica  $S = 0$  é a reta dada pela equação

$$x(2ax_0 + by_0 + d) + y(2cy_0 + bx_0 + e) + dx_0 + ey_0 + 2f = 0. \quad (\text{E.1})$$

Neste caso,  $P$  é dito o *polo* da reta representada por (E.1) em relação à cônica  $S = 0$ .

*Observações.*

1. (E.1) só não representa uma reta quando  $2ax_0 + by_0 + d = 0$  e  $2cy_0 + bx_0 + e = 0$ , e isto ocorre exatamente quando  $P = (x_0, y_0)$  é o centro da cônica  $S = 0$ .
2. Se  $P$  pertence à cônica em questão, então (E.1) é a equação da reta tangente à  $S = 0$  passando por  $P$ .
3. Suponha que  $P$  não pertença à cônica em questão e trace duas retas tangentes à  $S = 0$  passando por  $P$ . A equação da corda que tem como extremidades os pontos de tangência entre as retas traçadas e  $S = 0$  é (E.1).

**Lema E.2.** *Sejam  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_1, y_1)$  pontos do plano cartesiano e sejam  $r$  o polar de  $P$  e  $s$  o polar de  $Q$  em relação à cônica  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ . Se  $r$  passa por  $Q$ , então  $s$  passa por  $P$ .*

*Demonstração.* Como  $r$  é o polar de  $P$  em relação a  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  temos que

$$x(2ax_0 + by_0 + d) + y(2cy_0 + bx_0 + e) + dx_0 + ey_0 + 2f = 0$$

é uma equação de  $r$ . Uma vez que  $r$  passa por  $Q$ , vale

$$x_1(2ax_0 + by_0 + d) + y_1(2cy_0 + bx_0 + e) + dx_0 + ey_0 + 2f = 0.$$

Reagrupando, obtemos

$$x_0(2ax_1 + by_1 + d) + y_0(2cy_1 + bx_1 + e) + dx_1 + ey_1 + 2f = 0$$

o que mostra que a reta  $s$  passa por  $P$ . □

**Proposição E.3.** *Sejam  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_1, y_1)$  pontos distintos do plano cartesiano. Se  $r$  é o polar de  $P$  e  $s$  é o polar de  $Q$  em relação a uma dada cônica, então  $r \cap s$  é o polo de  $PQ$ .*

*Demonstração.* Como  $PQ$  passa pelo polo de  $r$ , do Lema E.2 segue que  $r$  passa pelo polo de  $PQ$ . Analogamente, temos que  $s$  passa pelo polo de  $PQ$ . Logo,  $r \cap s$  é o polo de  $PQ$ . □

**Proposição E.4.** *Sejam  $S = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  uma cônica e  $P = (x_0, y_0)$  um ponto do plano cartesiano que não pertence à  $S = 0$ . Dada uma corda de  $S = 0$  que passa por  $P$ , o ponto  $Q = (x_1, y_1)$  obtido pela intersecção das tangentes à  $S = 0$  pelas extremidades dessa corda pertence ao polar de  $P$  em relação à  $S = 0$ .*

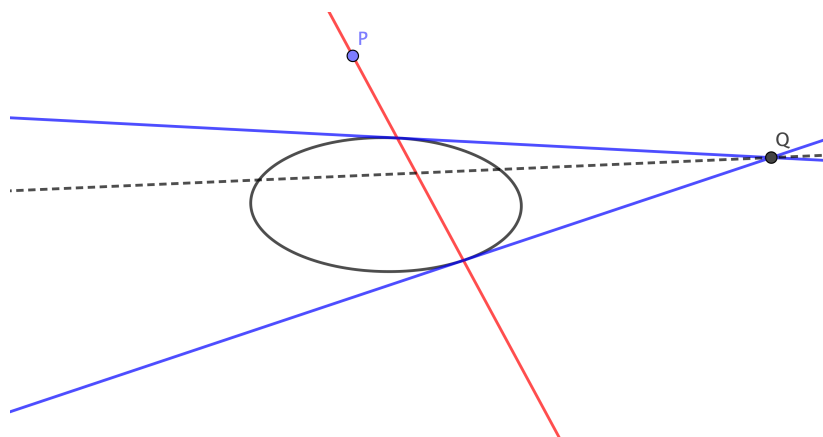


Figura 85: O ponto  $Q$  pertence ao polar de  $P$  em relação à  $S = 0$ .

*Demonstração.* A equação da corda em questão é

$$x(2ax_1 + by_1 + d) + y(2cy_1 + bx_1 + e) + dx_1 + ey_1 + 2f = 0.$$

Como ela passa por  $P = (x_0, y_0)$ , temos que

$$x_0(2ax_1 + by_1 + d) + y_0(2cy_1 + bx_1 + e) + dx_1 + ey_1 + 2f = 0.$$

Disto segue que  $Q = (x_1, y_1)$  satisfaz

$$x(2ax_0 + by_0 + d) + y(2cy_0 + bx_0 + e) + dx_0 + ey_0 + 2f = 0$$

e, portanto,  $Q$  pertence ao polar de  $P$  em relação a  $S = 0$ . □

## E.2 TEOREMA DE BRIANCHON

**Teorema E.5** (Teorema de Brianchon). *As três diagonais opostas de um hexágono circunscrito a uma cônica se intersectam em um ponto.*

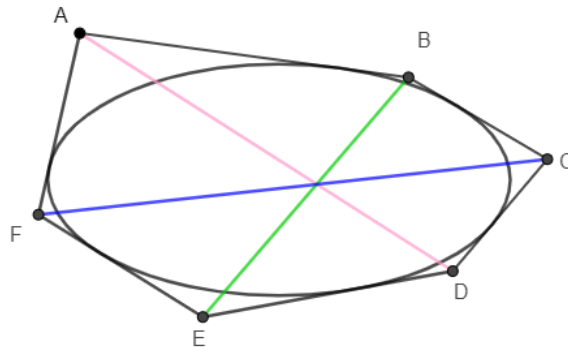


Figura 86: Teorema de Brianchon.

*Demonstração.* Seja  $ABCDEF$  um hexágono circunscrito a uma cônica  $S = 0$  e sejam  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$ , respectivamente, os pontos onde os lados  $AB, BC, CD, DE, EF$  e  $FA$  tangenciam  $S = 0$ .

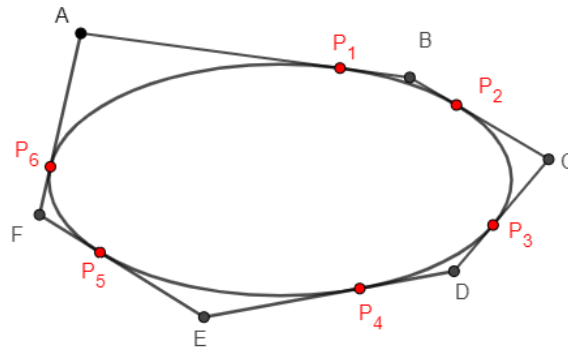


Figura 87: Pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$ .

Seja  $Q_1 = P_1P_2 \cap P_4P_5$ . De acordo com a Proposição E.4,  $Q_1$  é o polo da reta  $BE$ . Analogamente, temos que  $Q_2 = P_2P_3 \cap P_5P_6$  é o polo de  $CF$  e  $Q_3 = P_3P_4 \cap P_6P_1$  é o polo de  $AD$ .

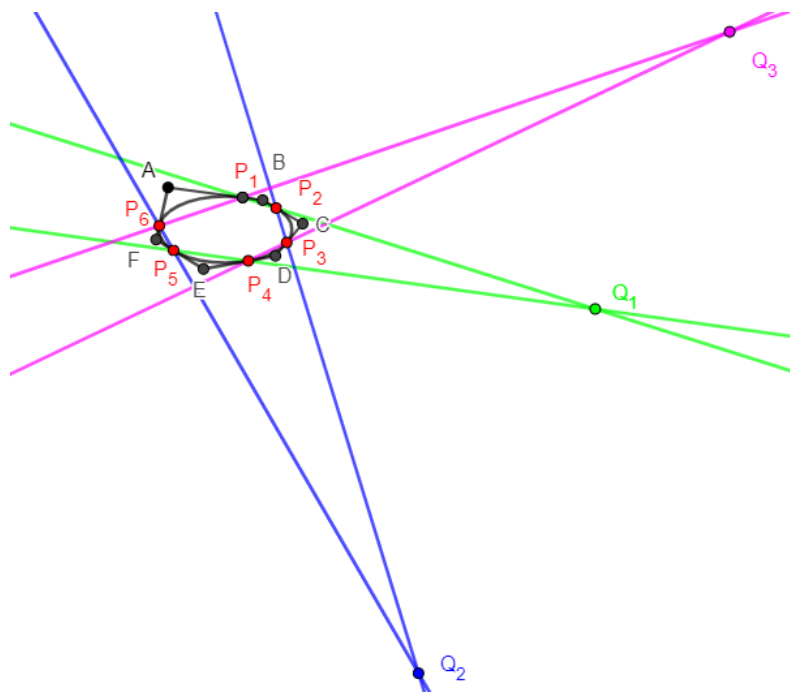


Figura 88: Teorema de Brianchon.

O Teorema de Pascal aplicado ao hexágono  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  garante que  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  são colineares. Da Proposição E.3 segue que  $AD \cap BE \cap CF$  se intersectam num ponto — a saber, no polo da reta de Pascal do hexágono  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ .  $\square$

## 5 PONTOS, 4 PONTOS, 3 PONTOS

Discutiremos, neste apêndice, mais alguns casos particulares do Teorema de Pascal — a saber, o que ocorre quando dois vértices coincidem (uma, duas ou três vezes). Nossas principais referências são [4], [6] e [8].

### F.1 PENTÁGONO

O que ocorre se, ao invés de um hexágono, tivermos um pentágono inscrito em uma cônica?

Podemos pensar em um pentágono  $ABCDE$  como um hexágono degenerado — por exemplo,  $ABCDEF$ , onde  $F = E$ . O processo de fazer o ponto  $F$  se aproximar de  $E$  até que ambos coincidam leva à substituição da secante  $EF$  pela reta tangente à cônica passando por  $E$ .

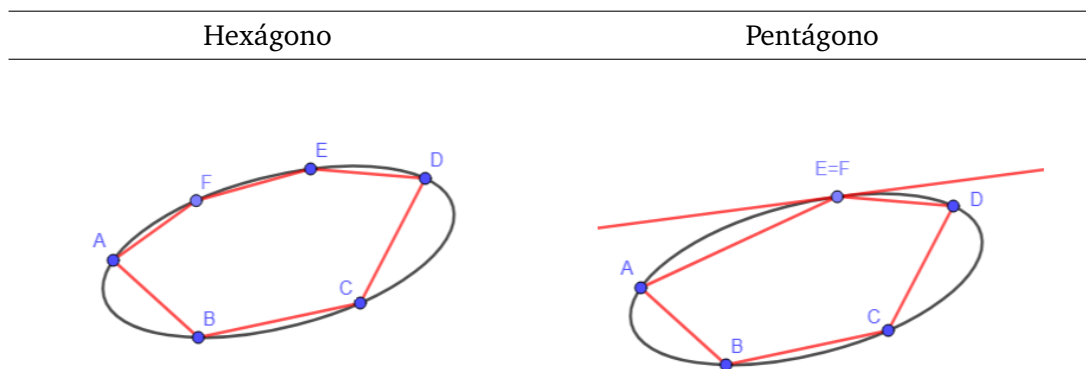


Tabela 8: Um pentágono visto como um hexágono degenerado.

Neste caso, o Teorema de Pascal assume o seguinte enunciado:

**Teorema F.1.** *Se um pentágono  $ABCDE$  está inscrito em uma cônica, então os pontos de intersecção de dois pares de lados não adjacentes e o ponto de intersecção do quinto lado com a tangente à cônica que passa pelo vértice oposto são colineares.*

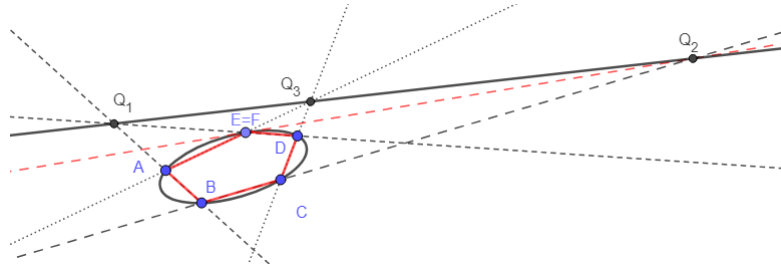


Figura 89: Teorema de Pascal com um pentágono.

*Demonstração.* Tomando como pares de lados não adjacentes  $AB$  e  $DE$ , bem como  $CD$  e  $EA$ , teremos  $BC$  como o quinto lado do pentágono em questão e  $E$  como o vértice oposto a ele.

Aplicando o Teorema de Pascal ao hexágono degenerado  $ABCDEE$ , concluímos que os pontos  $Q_1 = AB \cap DE$ ,  $Q_2 = BC \cap T_E$  e  $Q_3 = CD \cap EA$  são colineares, onde  $T_E$  é a reta tangente à cônica passando por  $E$ . □

F.2 QUADRILÁTERO

Analogamente, um quadrilátero  $ABCD$  pode ser visto como um hexágono degenerado — por exemplo, como  $ABBCDD$ .

Hexágono	Quadrilátero

Tabela 9: Um quadrilátero visto como um hexágono degenerado.

Neste caso, o Teorema de Pascal assume o seguinte enunciado:

**Teorema F.2.** *Se um quadrilátero  $ABCD$  está inscrito em uma cônica, então os pontos de intersecção de seus lados opostos e os pontos de intersecção das tangentes à cônica que passam por vértices opostos são colineares.*

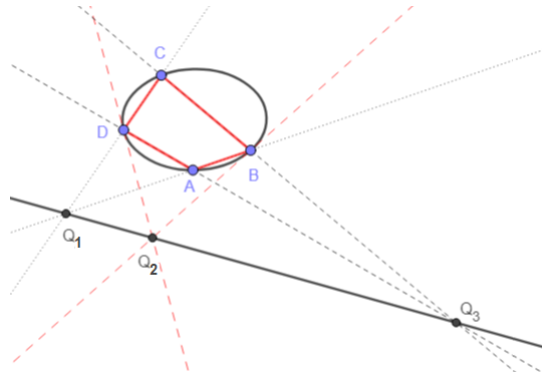


Figura 90: Teorema de Pascal com um quadrilátero.

*Demonstração.* Aplicando o Teorema de Pascal ao hexágono degenerado  $ABBCDD$ , concluímos que os pontos  $Q_1 = AB \cap CD$ ,  $Q_2 = T_B \cap T_D$  e  $Q_3 = BC \cap DA$  são colineares, onde  $T_B$  é a reta tangente à cônica passando por  $B$  e  $T_D$  é a reta tangente à cônica passando por  $D$ .

Por fim,  $Q_4 = T_A \cap T_C$  também pertence à reta que passa por  $Q_1$  e  $Q_3$ , onde  $T_A$  é a reta tangente à cônica passando por  $A$  e  $T_C$  é a reta tangente à cônica passando por  $C$ . Com efeito, basta aplicar o Teorema de Pascal ao hexágono degenerado  $AABCCD$ .  $\square$

### F.3 TRIÂNGULO

Por fim, um triângulo  $ABC$  pode ser visto como um hexágono degenerado — por exemplo, como  $AABBCC$ .

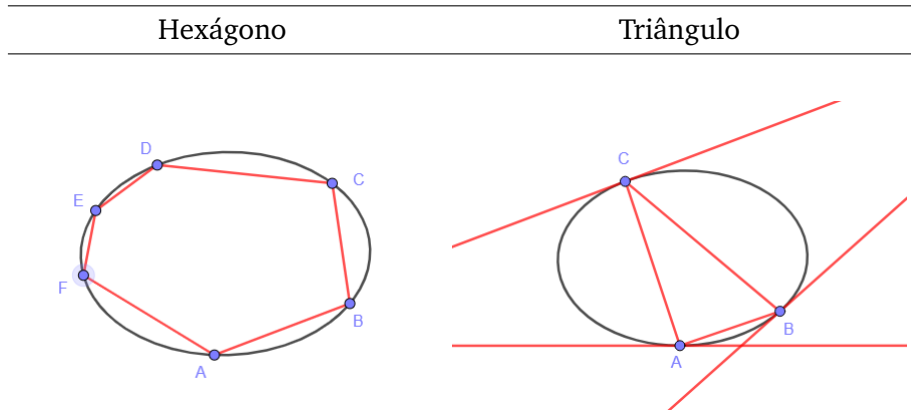


Tabela 10: Um triângulo visto como um hexágono degenerado.

Neste caso, o Teorema de Pascal assume o seguinte enunciado:

**Teorema F.3.** *Se um triângulo está inscrito em uma cônica, então os pontos de intersecção de cada lado com a tangente à cônica pelo vértice oposto são colineares.*

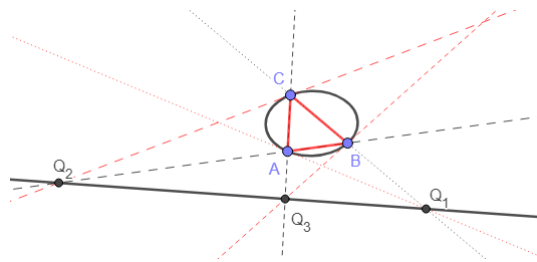


Figura 91: Teorema de Pascal com um triângulo.

*Demonstração.* Aplicando o Teorema de Pascal ao hexágono degenerado  $AABBCC$ , concluímos que os pontos  $Q_1 = T_A \cap BC$ ,  $Q_2 = AB \cap T_C$  e  $Q_3 = T_B \cap CA$  são colineares, onde  $T_A$  é a reta tangente à cônica passando por  $A$ ,  $T_B$  é a reta tangente à cônica passando por  $B$  e  $T_C$  é a reta tangente à cônica passando por  $C$ . □





---

## COMPETÊNCIAS APONTADAS PELA BNCC

---

Colocamos neste apêndice as competências apontadas pela BNCC que foram citadas nesta dissertação.

### G.1 COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

## G.2      COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ci-

- ências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
  3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
  4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
  5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Para mais informações: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC\\_19dez2018\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf)





---

## MATERIAL COMPLEMENTAR AO PLANO DE AULA

---

### H.1 LISTA DE EXERCÍCIOS PARA TREINAR FERRAMENTAS DO GEOGEBRA

1. Determine o ponto médio  $M$  do segmento  $AB$ , onde  $A(-2, 5)$  e  $B(2, -1)$ . Você observa alguma relação entre as coordenadas de  $M$  e as de  $A$  e  $B$ ?
2. Encontre o ponto de intersecção das retas  $r : 3x - 2y - 1 = 0$  e  $s : -2x + 3y - 4 = 0$ . Olhando para as equações de  $r$  e  $s$ , podemos concluir que essas retas são concorrentes?
3. Calcule a área e o perímetro do triângulo  $ABC$ , em cada caso:

a)  $A(2, 3)$ ,  $B(-2, -3)$  e  $C(1, 0)$

b)  $A(1, 3)$ ,  $B(2, 2)$  e  $C(-4, 1)$

Podemos concluir, olhando apenas para as coordenadas dos pontos dados, que eles formam um triângulo?

4. Verifique, em cada caso, se estão ou não alinhados os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ :
  - a)  $A(0, 2)$ ,  $B(1, 0)$  e  $C(2, -3)$
  - b)  $A(1, -1)$ ,  $B(2, 1)$  e  $C(4, 6)$

Existe alguma relação entre o critério utilizado no exercício anterior e o utilizado neste?

5. Em cada caso, obtenha o ponto em que a reta  $AB$  corta o eixo das ordenadas:
  - a)  $A(2, 3)$  e  $B(3, 2)$
  - b)  $A(-3, -4)$  e  $B(-2, 5)$

Como podemos encontrar onde a reta  $AB$  corta o eixo das abscissas? O padrão é parecido? Vale sempre? Dê as equações das retas  $AB$  (em cada item) na forma segmentária.

6. Em cada caso, calcule a distância entre o ponto  $P(x_0, y_0)$  e a reta  $r : ax + by + c = 0$  utilizando a fórmula

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} :$$

a)  $P(1, 2)$  e  $r : 2x - 3y + 1 = 0$

b)  $P(-1, 2)$  e  $r : 3x - 5 = 0$

Existe alguma configuração onde a fórmula dada não funciona? Como se convence alguém de que ela sempre vale?

7. Dados os pontos  $A(3, -7)$ ,  $B(1, -6)$ ,  $C(-2, -9)$  e  $D(4, -10)$ .

a) Verifique se eles pertencem ou não à circunferência de equação  $(x - 1)^2 + (y + 9)^2 = 9$ . Caso algum não pertença, especifique se ele está no interior ou no exterior dessa circunferência. Conjecture condições para um ponto estar no interior, no exterior ou sobre essa circunferência. [Sugestão: tente fazer isso por meio de inequações, dividindo o plano em três tipos de pontos.]

b) Verifique se as retas  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ ,  $BD$  e  $AC$  são tangentes à circunferência de equação  $(x - 1)^2 + (y + 9)^2 = 9$ . Caso a resposta seja negativa, especifique se a reta é secante ou exterior à essa circunferência. Conjecture condições para uma reta ser secante, exterior ou tangente a essa circunferência. [Sugestão: tente fazer isso por meio de inequações, dividindo o plano em três tipos de pontos.]

8. Em cada caso, identifique o tipo de cônica e confira suas respostas, plotando cada equação no GeoGebra:

a)  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$

b)  $\frac{(x+2)^2}{5} - \frac{(y-3)^2}{3} = 1$

c)  $x^2 + y^2 = 5$

d)  $(x - 2)^2 = 12(y + 3)$

e)  $(x + y - 1)^2 = 0$

f)  $(x + y - 1)(2x + 3y - 1) = 0$

g)  $x^2 + y^2 + 3 = 0$

Com esta lista de exercícios, além de treinar processos no GeoGebra, buscamos fazer com que o aluno reflita sobre o que está fazendo, estimulando-o a pensar em um problema para além de seu enunciado. Nosso intuito é valorizar e promover as habilidades de experimentação, reconhecimento de padrões, elaboração de conjecturas, argumentação e demonstração.

Além da escolha do tipo de questão, a escolha do conteúdo<sup>1</sup> e a organização<sup>2</sup> da lista foram feitas observando o conteúdo de Geometria Analítica previsto no Currículo do Estado de São Paulo [12]. A lista contempla os conteúdos destacados, de forma que os alunos desenvolvam as competências e habilidades<sup>3</sup> desejadas, capacitando os interessados a prosseguir em estudos mais avançados.

## H.2 QUESTIONÁRIO

1. Você considera importante estudar Geometria Analítica?
2. Você acredita que é melhor aprender Geometria Analítica utilizando o software GeoGebra? Discorra sobre o assunto.
3. Quais tipos de equações de reta você conhece? Dê exemplos de onde você poderia aplicar a ideia de equação de reta no seu cotidiano (por exemplo, equação horária da velocidade em um movimento uniformemente variado ou juros simples).
4. Você identifica alguma vantagem em utilizar a notação proposta (Abridged Notation) para retas? Se sim, elenque-a(s) e justifique.
5. Você identifica alguma desvantagem em utilizar a notação proposta (Abridged Notation) para retas? Se sim, elenque-a(s) e justifique.

---

1 Conteúdo: pontos (distância, ponto médio e alinhamento de três pontos); reta (equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares); distância entre ponto e reta: circunferência (equação); posições relativas entre reta e circunferência; cônicas: noções, equações, aplicações

2 A ordem obedece a sequência didática proposta pelo Currículo do Estado de São Paulo.

3 Habilidades: saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações; saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas; compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares; saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares; saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.

6. O que você entende por “cônica”? Dê exemplos de equações de cônicas. Você identifica alguma vantagem em utilizar a notação proposta (Abridged Notation) para cônicas? Se sim, elenque-a(s) e justifique.
7. Você identifica alguma desvantagem em utilizar a notação proposta (Abridged Notation) para cônicas? Se sim, elenque-a(s) e justifique.



---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] Lenimar Nunes de Andrade, *A construção de cônicas e o Teorema de Pascal*, Revista do Professor de Matemática **45** (2001), 17–19.
- [2] Maxime Bocher, *Some Applications of the Method of Abridged Notation*, Annals of Mathematics, Second Series **3** (1/4) (1901-1902), 45–54.
- [3] Jorge Delgado, Katia Fresnel e Lhaylla Crissaff, *Geometria Analítica*, Coleção PROFMAT, SBM, 2013.
- [4] Heinrich Dorrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications, 1965.
- [5] David Eisenbud, Mark Green e Joe Harris, *Cayley-Bacharach theorems and conjectures*, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (3) (1996), 295–323.
- [6] Derrick Norman Lehmer, *An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry*, The Project Gutenberg, 2005.
- [7] Margaret Maxfield, *A Proof of Pascal’s Hexagon Theorem Using Abridged Notation*, Pi Mu Epsilon Journal **10** (2) (1995), 99–103.
- [8] Z. A. Melzak, *Invitation to Geometry*, Dover Publications, 2008.
- [9] E. H. Neville, *2215. Notes on Conics. 14. An Analytical Proof of Pascal’s Theorem*, The Mathematical Gazette **35** (312) (1951), 123.
- [10] Alexander Ostermann e Gerhard Wanner, *Geometry by Its History*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [11] George Salmon, *A Treatise On Conic Sections*, Sagwan Press, 2005.
- [12] SÃO PAULO, Secretaria da Educação, *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias*, 2011, <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf>, acesso em 2019-02-20.
- [13] BRASIL, Secretaria de Educação Básica, *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*, 2018, [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC\\_19dez2018\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf), acesso em 2019-02-20.

- [14] Terence Tao, *Pappus's theorem and elliptic curves*, 2011, <https://terrytao.wordpress.com/2011/07/15/pappuss-theorem-and-elliptic-curves>, acesso em 2019-02-11.
- [15] I. Todhunter, *A treatise on plane co-ordinate geometry as applied to the straight line and the conic sections*, Macmillan, London, 1881.