UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALISON FERREIRA DA SILVA

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ESTUDO DA PROPORÇÃO ÁUREA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

FORTALEZA - CEARÁ

2019

ALISON FERREIRA DA SILVA

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES ENVOLVENDO O ESTUDO DA PROPORÇÃO ÁUREA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Costa Pereira

FORTALEZA - CEARÁ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Silva, Alison Ferreira da.
UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ESTUDO DA PROPORÇÃO ÁUREA NA EDUCAÇÃO BÁSICA [recurso eletrônico] / Alison Ferreira da Silva. - 2019.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 88 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.
Área de concentração: Geometria.
Orientação: Prof.ª Ph.D. Ana Carolina Costa Pereira.

1. Ensino. 2. Número de Ouro. 3. História da Matemática. I. Título.

ALISON FERREIRA DA SILVA

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES ENVOLVENDO O ESTUDO DA PROPORÇÃO ÁUREA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 10 de julho de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Costa Pereira (Orientadora)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Wanderley de Oliveira Pereira

Prof. Dr. Wanderley de Oliveira Pereira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Ana Cláudia Mendonça Pinheiro

Prof.ª Dr.ª Ana Cláudia Mendonça Pinheiro
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que, apesar de um semestre tão cheio, me deu forças para finalizar com êxito este trabalho.

Agradeço também à minha esposa Talita que, apesar das noites em que precisei ficar até tarde me dedicando à dissertação, foi extremamente compreensiva, auxiliando quando eu mais precisava.

Também a meus pais, irmão e amigos, que me deram um aprendizado enorme nesse semestre tão árduo.

Não poderia deixar de citar a “tia Carol”, como carinhosamente chamo, e que acreditou no meu potencial e me ajudou a finalizar com êxito mais uma etapa da minha vida.

E por último, e não menos importante, à UECE, por ter-me dado o conhecimento necessário para a minha formação acadêmica e, se não fosse ela, com certeza essas linhas não estariam sendo redigidas.

Obrigado a todos vocês e rumo ao doutorado!

RESUMO

Tudo que está ao nosso redor traz consigo algum conceito matemático envolvido. Não é à toa que a Matemática foi uma das responsáveis por boa parte do desenvolvimento tecnológico que possuímos. Contém em sua essência padrões e regularidades que parecem até fantasiosas, mas que, em conjunto com outras ciências, norteiam fenômenos que nem ao menos podemos ver a olho nu. Entre os vários mistérios dessa ciência, destacaremos o Número de Ouro, que devido à sua presença constante na natureza, é amplamente utilizado pelo homem em suas obras, buscando a harmonia que naturalmente proporciona. Com isso, temos como objetivo geral desse estudo, conhecer atividades orientadas de ensino (AOE) como auxilio ao ensino do conceito do “Número de Ouro”. Mais especificamente têm-se como objetivos identificar aspectos teóricos e metodológicos de ensino do conceito do Número de Ouro, conhecer atividades orientadoras de estudo (AOE) para o ensino do conceito do Número de Ouro e, finalmente, descrever atividades orientadoras de estudo (AOE) com potencialidades para o ensino do conceito do Número de Ouro. Para tal fim foi realizada uma pesquisa qualitativa documental de cunho descritivo, em três etapas. Primeiramente, fizemos um levantamento sobre o tema, de forma a conhecer melhor a História e as circunstâncias nas quais se deram os primeiros contatos com a constante, além de exemplos nas mais variadas áreas onde podemos encontrá-lo. Posteriormente, descrevemos como calcular o Número de Ouro, ou seja, como obter o seu valor aproximado, pois se trata de um número irracional. Por fim, propusemos uma abordagem para o tema em sala de aula, sempre fazendo uso da História da Matemática. Como resultado da pesquisa realizada elaborou-se um conjunto de atividades orientadoras de estudo (AOE) que poderá ser utilizada pelo professor em sala de aula com o objetivo de auxiliá-lo no ensino do conteúdo Número de Ouro. Espera-se que, com o uso de exemplos concretos e interdisciplinaridade, incentive-se a leitura, análise e interpretação, promovendo o amadurecimento intelectual e humano do discente, além de se propiciar ao docente mais uma ferramenta para ajudá-lo no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula.

Palavras-chave: Ensino. Número de Ouro. História da Matemática.

ABSTRACT

Everything around us brings with it some mathematical concept involved. It is no wonder that mathematics was one of the responsible for much of the technological development that we possess. It contains in its essence patterns and regularities that seem even fancier, but that, together with other sciences, guide phenomena that we can not even see with the naked eye. Among the various mysteries of this science, we will highlight the number of gold, which due to its constant presence in nature, is widely used by man in his works, seeking the harmony that naturally provides. With this, we have as general objective of this study, to know teaching oriented activities (AOE) as aid to the teaching of the concept of the "golden number". More specifically, the objectives are to identify theoretical and methodological aspects of teaching the concept of the golden number, to learn about study activities (AOE) for the teaching of the golden number concept and, finally, to describe activities Studies (AOE) with potentialities for the teaching of the golden number concept. For this purpose, a descriptive qualitative documental research was carried out in three stages. Firstly, we conducted a survey on the subject, in order to better know the history and circumstances in which the first contacts with the constant were given, as well as examples in the most varied areas where we can find it. Subsequently, we describe how to calculate the gold number, that is, how to obtain its approximate value, because it is an irrational number. Finally, we proposed an approach to the theme in the classroom, always making use of the history of mathematics. As a result of the research carried out a set of study guiding activities (AOE) that can be used by the teacher in the classroom with the aim of assisting him in the teaching of the content Golden number. It is hoped that, with the use of concrete examples and interdisciplinarity, we encourage reading, analysis and interpretation, promoting the intellectual and human maturation of the student, besides providing the teacher with another tool to help him in the process teaching and learning in the classroom.

Keywords: Teaching. Gold number. History of Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O que as sementes de girassol, a concha de um caramujo, as moléculas de DNA e o quadro antigo de um famoso pintor teriam em comum? Será que objetos tão distintos entre si, desde sua natureza, poderiam compartilhar algo? A resposta para essa indagação é “O Número de Ouro”. Ele é um número irracional que se apresenta em incontáveis formas na natureza. Também pode apresentar-se como uma razão, denominando-se, assim, Razão Áurea que, de acordo com Lívio (2006), foi e continua sendo considerada como uma oferta de Deus ao mundo.

Desde os tempos antigos o homem tenta reproduzir as belezas e padrões achados na natureza por tê-los como os mais harmoniosos. De fato, nos três primeiros exemplos citados no início do texto, percebemos o número de ouro e sua consequência direta, a espiral dourada, em um de seus exemplos mais clássicos: a disposição das sementes de um girassol e o formato em espiral da concha de um caramujo. Da mesma forma, as moléculas de DNA alinham-se de tal modo a respeitar a chamada Sequência de Fibonacci, intimamente ligada ao Número de Ouro. Por fim, no último exemplo citado, traz-se uma das várias tentativas de plágio à natureza: as dimensões da “Mona Lisa”, quadro de Leonardo Da Vinci, também se baseiam na “Proporção Áurea”, outra forma de denominar o assunto.

Vale ressaltar aqui que o célebre personagem que dá nome a Sequência e o autor da pintura comentada foram uns dos vários que se encantaram pelo tema. E não satisfeitos em simplesmente percebê-lo, ainda dedicaram boa parte da vida deles em conhecê-lo melhor, observando a sua presença naquilo que nos rodeia, ao ponto de denominá-la “Divina Proporção” (LÍVIO, 2006).

Entretanto, infelizmente, essa curiosidade em aprender está entrando em decaimento. O desejo de se entender determinados assuntos a fundo diminuiu. Não se escutam mais os “porquês”, como antigamente. Não é à toa que Miguel (1993) relata que a aprendizagem matemática, nos dias atuais, passa por sérias dificuldades. E uma das razões, segundo ele, seria o fato de os conteúdos terem-se tornado abstratos demais, afastando a possibilidade de compreensão por parte do aluno: Um tema sem contexto, que simplesmente gera outro tema, sem sentido prático e distante da sua origem histórica e cultural.

Assim, para que possamos nos aprofundar de forma coerente em qualquer assunto, não podemos nos utilizar somente de ferramentas algébricas, mas teremos de lançar mão de um recurso didático precioso: a História da Matemática. Neste trabalho buscaremos uma forma de conectar o estudo do Número de Ouro, por vezes visto de forma vaga como razão de segmentos, com uma interessante pesquisa que mostrará nas artes, natureza, corpo humano e demais exemplos, nos quais podemos observar a presença do Número de Ouro. E Gasperi (2012) nos assegura da eficácia de unirmos o abstrato ao palpável através da História da Matemática.

Com isso, nas páginas que seguem esclarecemos ao leitor a razão de tão altiva fama do “Número Áureo”. E, como vemos, não é à toa que o número de ouro também é conhecido como a “Divina Proporção” (LÍVIO, 2006). Conheceremos a causa de, por exemplo, Fibonacci apaixonar-se pelo tema de forma tão forte, além de exemplos que convencerão qualquer um que não houve exagero nos elogios dados.

Assim, as grandes motivações para a escolha do tema "Uma proposta de atividades envolvendo o estudo da disciplina Proporção Áurea na Educação Básica" foram várias. Entre elas está o fato de que a maioria dos professores de matemática já ouviu de alunos alguns discursos referentes à dificuldade de compreensão e uso dos conhecimentos obtidos na escola. Além disso, as aulas na Universidade Estadual do Ceará e a experiência em sala de aula como professor pesquisador da rede pública estadual desde 2014, também impeliram o pesquisador a buscar maneiras interessantes e criativas de ministrar os conteúdos.

E nesse pouco tempo em que o pesquisador dedica-se ao ensino, foi o suficiente para perceber a tamanha dificuldade que alguns alunos possuem de assimilar ou mesmo compreender o que é abordado nas aulas de matemática. Devido ao tempo escasso, pouco interesse dos que nos escutam, entre outros, tendemos a fazer o que para nós é mais simples: mostrar a conta. É isso o que pensamos ser a necessidade dos alunos. Na realidade, contribuímos para formar pessoas que não sabem a utilidade prática daquilo que estudam, impedindo que desenvolvam um pensamento crítico e criando o hábito de somente memorizar (mesmo sem ter a mínima ideia de onde vêm) fórmulas.

Para diminuir esse problema, buscou-se outro tipo de abordagem, visando auxiliar a ministração dos conteúdos em sala, promovendo um aprendizado mais dinâmico. Segundo Gasperi (2012), uma das soluções seria o uso conjunto do conteúdo visto, juntamente com a História da Matemática que o norteia. Pois, de acordo com o autor, unindo a parte algébrica, que na maioria das vezes é tida como prioridade, com a história em que está envolto o tema, mostrando, entre outros, o contexto que ocasionou a sua descoberta, poderia haver resultados positivos em relação ao aprendizado. Nesse sentido, Gasperi (2012) comenta que a História da Matemática propicia ao aluno uma nova perspectiva de observar a disciplina, tornando-a palpável e concreta, além de promover a interdisciplinaridade entre outros temas. Tudo isso contribui para um estudo mais efetivo e eficaz, tornando o aluno capaz de viver em sociedade, para que seja influenciador e construtor da sociedade em que está inserido.

O autor, então, deixa clara a importância de tal conexão: só conseguiremos desenvolver em nossos alunos um entendimento duradouro e verdadeiramente significativo se formos capazes de estabelecer esse elo, mostrando o que há por trás de assuntos tidos como sem utilidade prática e sem objetivo de existir.

Ainda temos que, segundo os Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática (2011), o professor deve usar a História da Matemática como apoio educacional na apresentação de suas aulas, de forma a torná-las mais interessantes e proveitosas. Por isso, somos alertados quanto à utilização desse meio para que o aluno possa construir o seu conhecimento de forma concreta. Caldeira (2009) acrescenta em relação ao tema que o ensino de Matemática deve ser feito de forma criativa, proporcionando através de desafios a busca para se resolverem situações de forma a se exercitar o raciocínio e o pensamento crítico. Dessa maneira é ressaltada a importância do estudo de forma palpável, por se tratar de um instrumento facilitador de uma aprendizagem mais significativa.

Dito isso, reforça-se a importância da conexão entre concreto (fatos históricos) e abstrato (conceitos algébricos), para uma aprendizagem real na construção do saber, pois, ao se trabalhar em sala de aula dessa forma, permitimos que o aluno seja o protagonista nesse processo, e não o professor, tornando-o sujeito ativo construtor do seu conhecimento e do seu saber como um todo. Podemos citar algumas pesquisas já feitas envolvendo o Número de Ouro ou que fizeram uso da História da Matemática, inclusive de forma concreta, como elemento norteador.

As pesquisas, como a de Silva (2013), relacionam-se intimamente com o presente trabalho, pelo fato de também utilizar a História da Matemática como elemento norteador. Dessa forma, traz um documentário sobre a vida e a obra de Isaac Newton, além de comentar sobre o contexto histórico-cultural para nos basear sobre os acontecimentos que circundaram a sua vida. Onde nasceu, viveu e estudou; quem eram as pessoas que fizeram parte da sua história e o impulsionaram a ser o grande homem que foi; como ocorreu sua morte e o que ele nos deixou. Infelizmente, devido à época ser um pouco escassa em relação a recursos, não se dava a importância merecida ao que se estava sendo deixado como legado. Outros cientistas e estudiosos deram continuidade ao que nos foi deixado por Newton, tendo este norteado inúmeros ramos da ciência, sendo responsável por vários desenvolvimentos matemáticos, seja na formação básica, seja na formação superior. Como resultado dessa pesquisa, podemos perceber que o autor tornou mais interessante o estudo de personagens da história. Sendo possível observar os passos traçados por ele na construção do seu precioso legado.

Da mesma forma ocorrem com Cunha (2019), que observou um grande aumento tecnológico nas ultimas décadas e se utilizou desse fato para trazer mais facilidade em relação ao estudo da matemática. Dessa forma, resolveu-se adotar a utilização de celulares, computadores, vídeos e outras narrativas que envolvem situações matemáticas, expostas por meio de vídeos. Como resultados, houve uma melhora no aproveitamento em sala de aula, pois diminui o tempo com a escrita dessas questões. Além disso, tais vídeos oferecem uma grande variedade de assuntos, podendo ser considerados como mais um objeto facilitador do estudo em sala de aula.

No trabalho de Silva (2018), são expostas variadas metodologias com o intuito de aumentar o interesse pela Matemática. São citadas literaturas, vídeos, jogos e até mesmo premiações que podem ser entregues aos vencedores de torneios na área. Como resultado, o autor conseguiu resgatar o desejo de se aprofundar nessa ciência, além de divulgar de forma criativa esse tipo material matemático, pouco conhecido pelos alunos.

Outro trabalho que pode ser citado é Araripe (2019), que se utiliza de jogos e outros materiais concretos como meio facilitador do aprendizado. Como resultado o autor mostrou de forma interessante e criativa como se podem aprender conceitos e fórmulas sem que necessariamente estas precisem ser memorizadas sem fundamento prático. Assim o aluno pode interagir com o conhecimento, através de materiais concretos, tornando o aprendizado real por parte do aluno e ocorrendo algo buscado por muitos: o aprender brincando.

Analogamente, Grégio (2017) apresenta constantes matemáticas famosas como o “e”, “π” e “φ”. Partindo da noção de uma sequência, são vistos alguns casos especiais de progressões aritméticas e geométricas. Ele aborda o tema fazendo uso de meios mais algébricos, porém, sem deixar de lado um pouco do contexto histórico inserido. Além disso, novamente, com o auxílio da História da Matemática, o autor apresenta de forma mais amigável o estudo dessas sequências de números reais.

Finalmente Santos (2013), de forma análoga ao trabalho de Grégio (2017), também aborda o tema tendo como base a História da Matemática, mas com um enfoque mais matemático. Nesta pesquisa, é abordado com mais profundidade o Número de Ouro. Dessa forma são apresentados ao leitor informações sobre as primeiras aparições do Número de Ouro. O autor comenta que inicialmente surgiu o problema de dividir um segmento em “extrema e média razão”. A partir daí, outros problemas e resultados com este número foram aparecendo, dando início a uma verdadeira enciclopédia de informações, fatos e exemplos. Também é dada atenção especial à sequência de Fibonacci, que também se relaciona com o número Φ.

Assim, o presente documento apresenta um estudo que se divide em contexto histórico-social, passando por uma parte teórica (com exemplos práticos do cotidiano), uma parte mais algébrica (focando na matemática envolvida no tema), finalizando com uma proposta didática que poderá ser utilizada em sala de aula pelo professor. Desse modo, espera-se despertar a curiosidade sobre o tema, além de contribuir de forma positiva com o desenvolvimento intelectual através de uma proposta didática que visa auxiliar o docente, tornando o aprendizado em matemática não só mais cativante como também encorajador de outras descobertas.

Ressalta-se que não podemos negar que a Matemática está em praticamente tudo que nos rodeia: obras artísticas, monumentos históricos, corpo humano, economia e na própria natureza. Mesmo assim, essa ciência não é tão apreciada pelas pessoas pela dificuldade que se tem em assimilá-la, principalmente nos dias atuais (MIGUEL, 1993). Alunos são treinados a memorizar fórmulas sem ter a ideia real da sua utilidade. Os conteúdos são vistos, muitas vezes, de forma abstrata e assim ficam cada vez mais distantes do entendimento do aluno.

Segundo Eves (2004), não existe aprendizado significativo somente apoiando-se em teoremas e deixando de lado o contexto histórico e as condições que motivaram e nortearam o desenvolvimento de determinado conceito. Para isso faz-se necessário o auxílio da História da Matemática, que, por vezes, é deixada de lado (MIGUEL, 1993).

Reforçando essa afirmação, temos, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, que a História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem. (BRASIL, 1998).

De forma poética, Eves (2004, p. 18) narra que “é um axioma que a história de uma determinada matéria não pode ser devidamente apreciada sem que se tenha pelo menos um razoável conhecimento da própria matéria”. Dando-nos a entender que através do estudo da História da Matemática complementamos a assimilação de determinados assuntos. Ainda, como exemplo, relata que através da releitura e pela ação de refazer os passos para a confecção de determinado objeto ou prova de determinados teoremas, tem-se a consolidação de informações relevantes do ponto de vista histórico. Ainda, em relação ao assunto, Eves (2004) acrescenta que o ato de realizar-se e discutir exercícios, em sala de aula ou em casa, o aprendizado é reforçado, além de que, em vez de apenas ler o que foi feito, o aluno tem a oportunidade de refazer os passos traçados por algum personagem, dando-lhe a oportunidade de se relacionar de forma mais profunda com os temas estudados.

No que diz respeito à Geometria, área na qual o tema se insere, não bastasse a sua importância para humanidade, Brasil (1998) define o seu estudo desde cedo como sendo de grande importância na consolidação do aprendizado matemático.

De fato, o manuseio de instrumentos e contato direto com tecnologias usadas anteriormente induzirá o aluno a um amadurecimento e permitirá que a sua criatividade seja trabalhada, desenvolvendo-se não somente como aluno, mas como integrante real e participativo da sociedade. E ainda sobre esse estudo, acrescenta Eves (2004), capacitará o aluno para resolver indagações que virão em séries posteriores.

O que se sabe é que tal constante e suas surpreendentes aplicações foram analisadas minuciosamente por celebridades da nossa história, como

Fibonacci e Da Vinci, tendo esse último a denominado “Divina Proporção” (LÍVIO, 2006).

Quanto mais se procura, mais se descobre a presença dessa famosa proporção: do ínfimo, como a estrutura das moléculas que formam os átomos; ao incomensurável, como a disposição dos corpos que formam uma constelação.

Dessa forma, para nortearmos nossa pesquisa, temos como pergunta diretriz: Como abordar o conceito envolvendo o Número de Ouro em atividades orientadas para o Ensino Médio com auxílio da História da Matemática?

Então, tivemos como objetivo geral da pesquisa conhecer atividades orientadas de ensino (AOE) como auxílio ao ensino do conceito do Número de Ouro. Também tivemos como objetivos específicos os seguintes: **(i)** identificar aspectos teóricos e metodológicos de ensino do conceito do Número de Ouro; **(ii)** conhecer atividades orientadoras de estudo (AOE) para o ensino do conceito do Número de Ouro e, finalmente, **(iii)** descrever atividades orientadoras de estudo (AOE) com potencialidades para o ensino do conceito do Número de Ouro.

Assim, a metodologia para a realização desse trabalho se iniciou por meio de uma pesquisa qualitativa documental de cunho descritivo, bibliografia adequada e utilização de livros e artigos que tratassem sobre o assunto, tomando os pontos mais relevantes. Posteriormente, de posse das informações necessárias, foi feita minuciosa análise e interpretação de seus dados, como orienta Severino (2010), relatando que a pesquisa bibliográfica é feita com base em documentos, sendo fruto de estudos anteriores de diversas formas. Algumas delas seriam artigos universitários, como livros e outros documentos impressos. Tais fatos são confirmados por outros pesquisadores que trabalharam temas relacionados ao assunto, servindo de referencial.

Dessa forma, essa pesquisa foi desenvolvida em três etapas, às quais serão descritas a seguir: No primeiro momento, foi feito um levantamento em livros, revistas, *sites* de internet, entre outros, sobre o Número de Ouro. Assim, buscamos conhecer melhor a história e as circunstâncias nas quais se deram os primeiros contatos com a constante, além de exemplos nas mais variadas áreas onde podemos encontrá-la.

No segundo momento, adentramos a matemática que está por trás do tema com o auxílio de livros que abordam esse aspecto matemático em conjunto com a história. Com isso, descrevemos como calcular o “Número de Ouro”, ou seja, como obter o seu valor aproximado, pois se trata de um número irracional; além de como obter a Espiral Dourada por meio de passos geométricos.

Por fim, foi proposta uma abordagem para o tema em sala de aula, através da produção de Atividades Orientadas de Ensino (AOE), a partir do material estudado anteriormente, que poderão ser aplicadas aos alunos do Ensino Médio, sempre fazendo uso da História da Matemática como meio facilitador. Para isso, no trabalho que se segue, tivemos a seguinte divisão:

No primeiro capítulo tratamos de trazer os objetivos da pesquisa, o método utilizado e outros objetos necessários à delimitação do tema abordado, sendo necessário para situar o leitor sobre o que viria nas páginas seguintes.

No segundo capítulo trouxemos um pouco da história do Número de Ouro e também o contexto sócio-cultural que norteou o seu descobrimento, além de alguns exemplos na natureza, artes, corpo humano e até na indústria onde o Phi surge de maneira quase mágica. É possível encontrarmos também um breve resumo bibliográfico de grandes personagens da nossa história que dispuseram vários anos de sua vida em prol do estudo mais aprofundado do Número de Ouro e suas incontáveis aplicações.

Já no terceiro capítulo nos voltamos para a matemática que envolve o tema. Pudemos expor algumas maneiras de chegar ao valor numérico do Phi. Pode-se encontrar também a explicação da estreita relação do Número de Ouro com a Sequência de Fibonacci, em que são exploradas algumas propriedades interessantes sobre o assunto.

Por fim, no quarto capítulo, são apresentadas Atividades Orientadas de Ensino envolvendo o estudo do Número de Ouro, na Educação Básica, utilizando exemplos do cotidiano. Todas essas atividades buscam fazer com que o aluno perceba o Número de Ouro em cada resultado obtido.

Como será exposto no capítulo que se segue, algo que surge de forma tão natural não pode ser menosprezada ou ter ignorada a sua existência. Mas afinal de contas onde, de fato, podemos notar a existência desse número tão magnífico? Podemos percebê-lo ao nosso redor? Podemos calculá-lo? Essas e outras respostas estão contidas no capítulo seguinte.

2 O NÚMERO DE OURO: UM POUCO DA HISTÓRIA

Sabemos que é possível observar concretamente a maioria dos conteúdos vistos na Matemática. Exemplo disso é a constante Pi (π), encontrada principalmente no cálculo de áreas e obtido através da divisão do comprimento pelo diâmetro de uma circunferência. O fato é que poucos temas causam tanto espanto e admiração como o chamado Número de Ouro, representado pela letra grega Fi (φ), Phi, em grego, ou a sua consequência direta: a Espiral Dourada, que conheceremos nos capítulos seguintes.

Nos tempos antigos, tão grande foi a admiração por ele, que foi chamado de Média e Extrema Razão *(Euclides)*, Divina Seção (do latim *Sectio Divina*), Proporção em Extrema Razão, Divisão de Extrema Razão, Áurea Excelência, Razão Áurea, Número Áureo, Seção Áurea, chegando a ser denominada até mesmo de Divina Proporção. O Número Áureo também é conhecido como de razão de Fídias.

Dessa forma, no decorrer desse capítulo, foi buscado conhecer um pouco mais da História e de como essa constante se relacionou com a Matemática, além de exemplos da natureza, corpo humano entre outros, em que foi possível se notar a presença do Número de Ouro. E para que ocorresse um estudo mais conciso não poderia ficar de fora uma pequena bibliografia sobre grandes personagens da História que, pelo encanto diante do Fi, descobriram fatos interessantes ainda hoje explorados nas mais variadas áreas do conhecimento.

2.1 O SURGIMENTO DO NÚMERO DE OURO E A SUA RELAÇÃO COM A MATEMÁTICA

A primeira definição sobre o Número de Ouro foi obtida aproximadamente em 300 a. C. por Euclides. Geometricamente, sobre a Razão Áurea, Euclides descreveu: "diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor”.

Figura 1 – Segmento de reta contendo os pontos A, B e C

Fonte: Lívio (2006, p. 14).

A seguir concluiu: "a razão de AC por CB foi igual à razão de AB para AC então a linha foi cortada na razão extrema e média ou numa Razão Áurea” (LÍVIO, 2006, p. 14).

Apesar de essa definição parecer somente geométrica, veremos que a Razão Áurea está presente nos mais variados aspectos do cotidiano. Temos que salientar que na época em que foi percebido que o Número de Ouro não era natural ou racional, mas pertencente ao que hoje chamamos de irracionais, houve uma grande agitação, principalmente por parte dos seguidores de Pitágoras, obcecados pelos naturais.

Segundo Lívio (2006, p. 15),

> a descoberta de valores irracionais data do século V a. C., período coincidente com a época do fato mencionado anteriormente. Isso indicaria que o Fi pode ter sido um dos primeiros irracionais a ser estudado de forma mais aprofundada.

No que diz respeito à matemática formal, o símbolo habitual para o Número de Ouro é “Tau”, letra grega que significa "o corte". Porém, em meados do século XX, Mark Barr, matemático americano, batizou-o de Fi, pois é o nome da primeira letra grega de Fídias, que foi escultor e arquiteto encarregado da construção do Partenon, templo dedicado à deusa grega Atena, em Atenas. Tal atribuição foi lhe dada, pois, segundo Lívio (2006, p. 16), “alguns pesquisadores de artes consideram que Fídias utilizava frequentemente a Razão Áurea em seus trabalhos de escultura”.

Sabe-se que não foram somente os matemáticos que se aventuram a estudar o tema, mas diversos profissionais de outras áreas também. Devido a sua manifestação principalmente na natureza, também botânicos se encantaram pela constante. Segundo Lívio (2006, p. 16), "biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até mesmo místicos tem passado boas horas estudando suas propriedades", pois esteticamente falando, o Número de Ouro representa beleza e harmonia nas formas que o possuem. Por conta disso, Lívio (2006, p.16) afirma que "o número de ouro tem influenciado pesquisadores em mais áreas que qualquer outra constante da história da civilização humana".

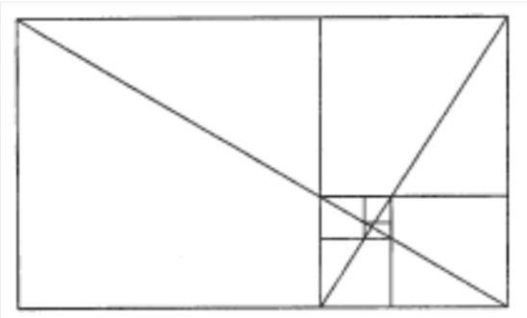
Outro ponto a se destacar seria a origem da expressão Segmento Áureo. Apesar de ter realizado uma vasta pesquisa sobre o assunto, não conseguiu descobrir ao certo quem e em que data foi usada pela primeira vez a expressão. Segundo as suas descobertas, o termo foi usado pela primeira vez por Martin Omh (irmão do autor da Lei de Omh). Porém, ele não foi o seu idealizador, sendo provavelmente de uso popular. Mas depois de tê-la utilizado em uma segunda edição de uma de suas obras, em 1835, a expressão ganhou notoriedade e passou a ser, formalmente, de uso comum. (LÍVIO, 2006, p. 17).

2.2 RETÂNGULO ÁUREO E A ESPIRAL DOURADA

Como consequências diretas do Número de Ouro, temos o Retângulo Áureo e a Espiral Dourada. O primeiro tem como característica principal que as medidas de seus lados formam a Razão Áurea, ou seja, quando divididos resultam no Número de Ouro. Se retirarmos desse retângulo um quadrado, o retângulo resultante seria outro Retângulo Áureo e a novas medidas seriam as mesmas do retângulo maior, divididas por Fi. Recorrendo a este processo infinitas vezes, produziremos Retângulos Áureos cada vez menores (cada vez com dimensões reduzidas por um fator Fi).

Essa característica torna o Retângulo Áureo único: Em nenhum outro ocorre esse “ressurgimento” de figuras com características semelhantes (LÍVIO, 2006). No que se refere ao Retângulo Áureo, Lívio (2006, p. 104) acrescenta: “Desenhe duas diagonais em qualquer par de retângulos pai-filho da série, e todas irão se cruzar no mesmo ponto. A série de retângulos continuamente decrescentes converge para um ponto inalcançável, conhecido como o ‘Olho de Deus’”. Essa figura está presente em inúmeras formas ao longo desse trabalho (Figura 2).

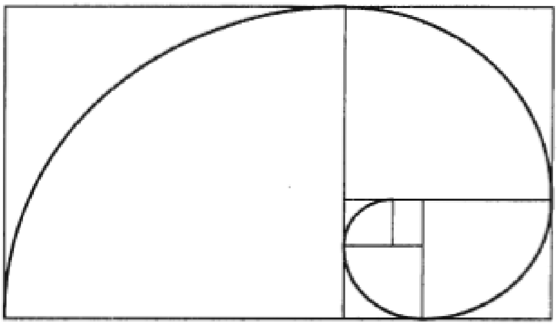
Figura 2 – Retângulo Áureo e diagonais convergindo para o “Olho de Deus”.



Fonte: Dunlap (1997, p. 20)

No que se refere à Espiral Dourada, esta também é conhecida como Espiral Logarítmica e é obtida ao ligarmos os pontos onde os quadrados que aparecem dividem os lados em Razões Áureas, que se enrola em direção do Olho de Deus (Figura 3):

Figura 3 – A Espiral Áurea



Fonte: Dunlap (1997, p. 20)

Ainda poderiam surgir mais fatos interessantes ou mais alguma razão pela qual o número seria alvo de tamanho estudo? O que poderia trazer de tão surpreendente além de padrões geométricos, para chamar a atenção de tantos, nas mais diferentes épocas? Segundo Lívio (2006), o fato se deve ao seu peculiar modo de aparecer onde menos esperamos, quase que divinamente. Alguns casos chamam mais a atenção que outros, como veremos, entre outros. Mas o que se tem de consenso geral é que o tema está envolto em mistério e certo misticismo.

2.3 APLICAÇÕES DO NÚMERO DE OURO

O universo pode parecer imprevisível, mas também pode ser organizado e intimamente ligado às leis matemáticas. Uma das maneiras mais marcantes através dos quais essas leis se manifestam é o da Proporção Áurea. Na natureza, aparece constantemente e cria formas de grandiosa beleza.

A Proporção Áurea está presente de forma relevante na natureza, o que fez com que a sua fama "sobrenatural" ganhasse corpo. Pode-se perceber a sua presença em inúmeras plantas e até mesmo em animais, "pois parece orientar a posição das pétalas e sementes nas margaridas e girassóis, e a curvatura da concha do caramujo Náutilus, entre outros" (LÍVIO, 2006, p. 129).

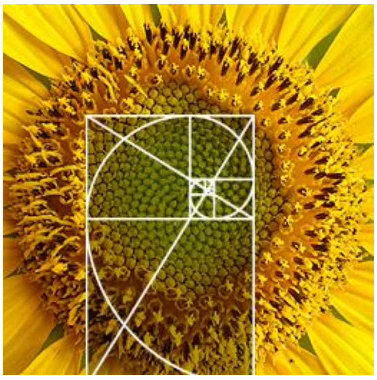
2.3.1 O Número de Ouro na natureza

Qual foi a última vez que pudemos observar bem de perto um girassol? Em nosso quintal, em uma floricultura ou mesma em uma praça? O que talvez você nunca tenha notado é que a posição das sementes dessa flor a tornem um espetáculo, impressionando na sua perfeição. Na parte central do girassol, existem duas séries de curvas de sementes. Cada série vai para uma direção e o número de curvas não é o mesmo nas duas séries. Atentemos para o seguinte fato, que será explorado mais adiante: se a flor tem 21 curvas para um lado, terá 34 para outro, o mesmo ocorrendo para as curvas que têm 34 e 55 sementes e assim por diante.

Esse padrão é justamente a Sequencia de Fibonacci, explorada com mais detalhes nos capítulos seguintes. Mas que relação teria uma coisa com a outra? Na realidade, tudo. Há uma relação íntima entre os dois temas, não se podendo falar de um e não do outro. De forma que, seguindo o mesmo padrão para formação de curvas, percebemos que estas estão dispostas segundo a Espiral Áurea e que dividindo dois números da famosa sequência, obtêm-se uma aproximação cada vez maior do "número de Deus", à medida que se avança. Mas por que as plantas utilizariam esse artifício em relação aos seus elementos? Segundo Lívio (2006, p. 133), "isso ocorre devido ao fato da necessidade de uma melhor utilização de espaço, o que é conseguido nesse tipo de configuração".

Na verdade, essa justificativa se aplica na maioria dos casos que veremos: melhor utilização do espaço e maximização de áreas que precisam receber umidade e luz do Sol. Na Figura 4, a seguir, se percebem as fileiras de sementes que obedecem a Sequência de Fibonacci, como também a sua posição formando a Espiral Dourada, obtida do Retângulo Áureo, em uma de suas aparições mais belas.

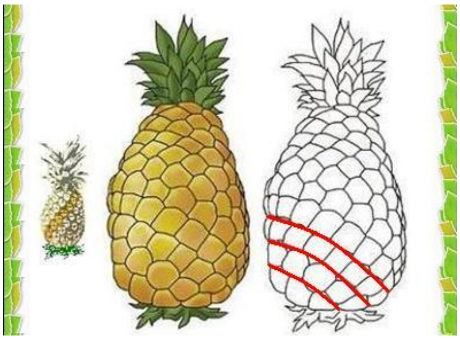
Figura 4 – Girassol em detalhe



Fonte: Koshy (2018, p. 26).

Mas isso não é tudo. Pode ser citada uma infinidade de outros exemplos. O próximo deles traz um caso bem presente nas casas de qualquer um: o ananás, mais conhecido como abacaxi. A maior parte dos abacaxis têm cinco, oito, treze ou vinte e uma espirais de inclinação na sua superfície. E todos esses valores são números da Sequencia de Fibonacci (Figura 5).

Figura 5 – Abacaxi com suas espirais em detalhe



Fonte: Dunlap (1997, p. 134).

O número e a disposição de pétalas de algumas flores também estão ligados com a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. A margarida-do-campo é uma espécie em particular que retrata bem essa afirmação. Vez por outra ajuda a retirar a dúvida do “bem me quer, mal me quer”, por meio da retirada das suas treze, vinte e uma ou trinta e quatro pétalas (Figura 6).

Figura 6 – Pétalas de flores e a Sequência de Fibonacci

Fonte: Koshy (2018, p. 44).

Não demoraria muito para que o homem, sempre na busca da perfeição, tentasse pegar emprestado da natureza os padrões que a tornam tão bela. Os tópicos a seguir dão exemplos de tal afirmação.

2.3.2 O Número de Ouro nas artes

2.3.2.1 Mona Lisa

Não seria de se admirar que depois que o homem notasse a beleza e perfeição criada pela Proporção, quisesse copiar a natureza em seus feitos e criações. Dessa forma, não poderíamos começar esse capítulo por qualquer outra coisa senão o quadro que causa filas e multidões no museu do Louvre, na cidade de Paris: a Mona Lisa (Figura 7). Em meio ao seu sorriso tão intrigante encontramos o Número Áureo, o Fi.

Figura 7 – A Mona Lisa

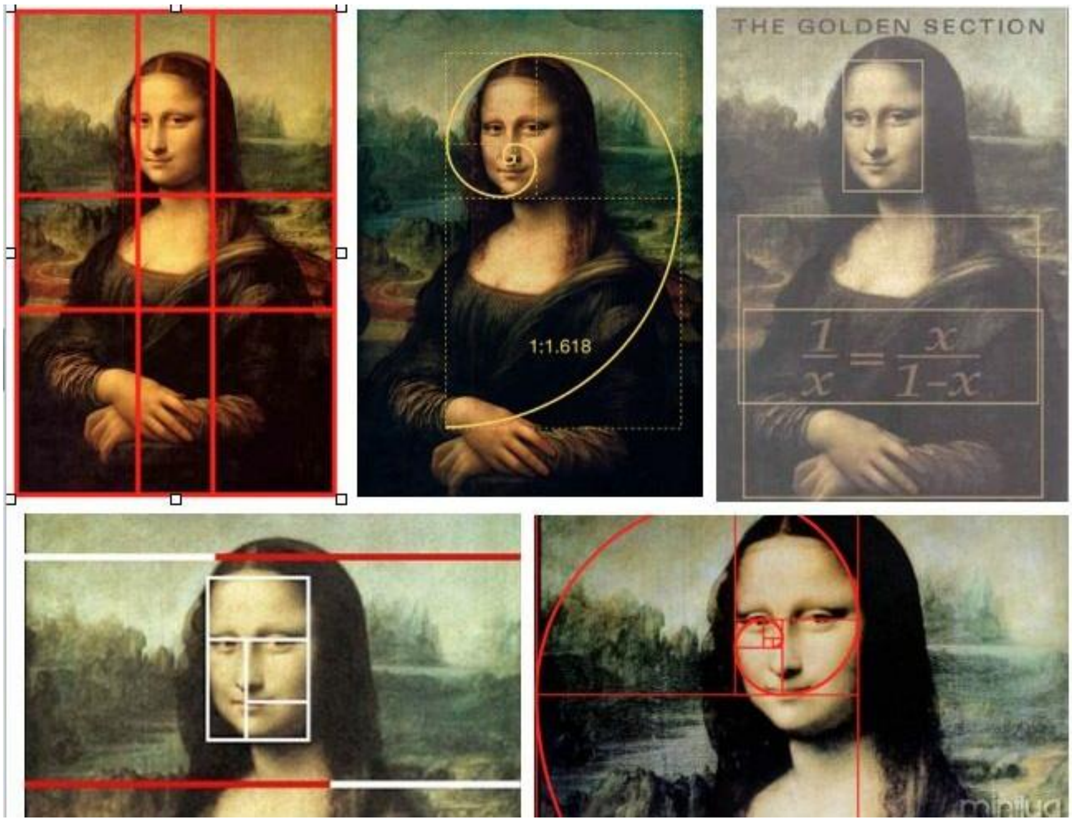
Fonte: Bohn e Kölln (2014, p. 5).

Em meados do século XV, com o declínio de Constantinopla, muitos que fugiram dessa cidade encontraram refúgio na Itália, levaram consigo manuscritos gregos. Devido a essa evasão, tal período, conhecido como Renascimento, tenha se baseado nas artes gregas, destacando o corpo humano nas suas obras artísticas. Com isso, vários artistas passaram a se importar mais com a parte matemática e anatômica, além da construção do corpo humano.

A Mona Lisa de Leonardo da Vinci (1452-1519) é uma das obras de maior destaque desse período. Segundo Lívio (2006, p. 60) “é possível perceber em variadas partes da pintura, tais como nas relações entre seu tronco e cabeça, ou entre os elementos do rosto, o Número de Ouro”. Segundo um estudo mais criterioso das obras de Da Vinci, feito por Ostrower (2004) em sua obra “Universos da arte”, Leonardo chega a comentar o seguinte (apud OSTROWER 2004, p. 292): “O pintor que desenha apenas guiado pela prática e pelo julgamento dos olhos, sem usar a razão, é como um espelho que reflete tudo o que encontra à sua frente, sem disso tomar conhecimento”.

Com essas palavras, Leonardo confirma que realmente havia usado um padrão de construção, tendo sido descoberto mais tarde que se tratava do Número de Deus: Se desenharmos um retângulo em volta do rosto da personagem, a altura dividida pela largura dará aproximadamente 1, 618. Nas próximas gravuras é possível observarmos de que maneira Leonardo pôde fazer uso do Retângulo de Ouro e da Espiral Dourada na Mona Lisa (Figura 8).

Figura 8 – A Mona Lisa e a Razão Áurea



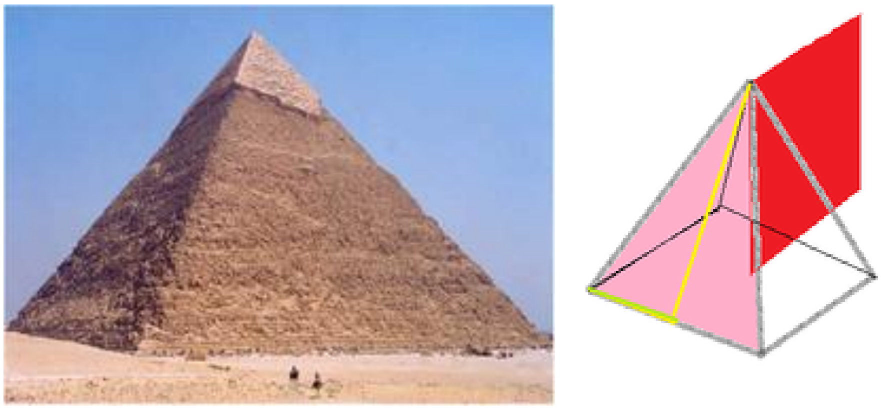
Fonte: Ávila (2015)

Como podemos ver, o artista usou e abusou deste recurso artístico. Não é à toa que a pintura está repleta dele. Mas a utilização desse artifício não se restringe somente aos pintores: escultores da antiguidade também fizeram seu uso e conseguiram resultados fantásticos.

2.3.2.2 Pirâmides Egípcias

Existem várias teorias sobre a construção das pirâmides egípcias. No que se sabe o Número de Ouro também está presente nelas. Segundo Lívio (2006, p. 63): “Aqui nos deparamos com o que parece ser uma evidência esmagadora, na forma de numerosos textos que afirmam que Fi pode ser encontrado, por exemplo, nas proporções da Grande Pirâmide e em outros monumentos egípcios antigos”. Em relação à base e sua altura, além da distância entre os blocos. Notadamente, na Pirâmide de Kéops, se observa algo muito curioso. Lívio (2006, p. 60) comenta: “Os egípcios usaram esses conhecimentos, também em templos e sepulcros, pois acreditavam que se assim não fosse, seus deuses não iriam gostar e as almas dos mortos não seguiriam o seu destino”. Cada bloco de pedra é 1, 618 vezes maior que aquele que está imediatamente acima e que as salas interiores têm comprimentos que são 1, 618 vezes maiores que a largura. Outro fato impressionante que não tem necessariamente haver com o número de ouro é que a altura da pirâmide de Kéops, elevada ao quadrado (a área vermelha na figura 9), é igual à área de cada face lateral da pirâmide (a área rosa na figura 9).

Figura 9 – Pirâmide de Kéops e o Número de Ouro



Fonte: Lívio (2006, p. 71)

É de se chamar a atenção o fato de que a área total da pirâmide de Kéops, isto é a soma da área da base com as áreas das quatro faces laterais, se dividida pela área lateral (só a soma das áreas das quatro faces laterais) resulta no Número de Ouro, o mesmo acontecendo à razão entre a área lateral e a área da base ou então o fato da razão entre a altura de uma face lateral da pirâmide (linha amarela na figura) e metade da base dessa face (linha verde na figura) ter como resultado, também, o Número de Ouro (LÍVIO, 2006, p. 71).

2.3.2.3 Escadaria do Templo da Sagrada Família

Uma das obras-primas do famoso arquiteto espanhol Gaudí, a Sagrada Família (grande templo católico), em Barcelona, tem vários elementos inspirados na natureza, como a escada em espiral, representada por um segmento crescente que lembra a concha de um caracol, que por sua vez, baseia-se na espiral áurea.

Destaca-se que, adiante, falaremos um pouco mais sobre o autor dessa obra, que fazia uma verdadeira mistura de cores e também se aproveitava das vantagens harmônicas ocasionadas pelo uso da Proporção Áurea.

2.3.2.4 Música

A música também traz o Número de Ouro. Há 13 notas em cada oitava no piano e existem artigos que relacionam composições de Mozart, Schubert, Beethoven (sinfonias Quinta e Nona) à razão áurea. O ponto de maior tensão de uma música, denominado clímax, também é frequentemente encontrado aproximadamente no ponto Fi (61,8%) da canção. Até na literatura temos exemplos do uso dessa maravilhosa ferramenta matemática. No poema épico grego Ilíada, de Homero, que retrata a Guerra de Tróia, a proporção entre as estrofes maiores e as menores é um número próximo a 1, 618.

2.3.2.5 O Homem Vitruviano

Leonardo da Vinci afirmava que, “no Homem perfeito, as dimensões obedecem à Proporção Áurea” (LÍVIO, 2006, p. 198). O Homem Vitruviano é uma obra que se baseia em uma famosa passagem do arquiteto romano Vitrúvio em sua coleção de dez livros intitulados de *De Architectura*, em que se tratava basicamente sobre arquitetura e que em seu terceiro volume detalhava as proporções do corpo humano masculino segundo a proporção áurea.

Sobre o desenho do Homem Vitruviano, Lívio (2006, p. 198) diz o seguinte:

> Segundo Vitrúvio, que era arquiteto, as medidas do corpo humano são as seguintes: 4 dedos formam 1 palmo e 4 palmos formam 1 pé, 6 palmos formam um côvado (medida de comprimento antiga, equivalente a 66 cm); e 4 côvados formam a altura de um homem. E 4 côvados formam 1 passo, e 24 palmos formam um homem. O comprimento dos braços estendidos de um homem é igual à sua altura. Das raízes de seus cabelos à ponta do seu queixo é a décima parte da altura do homem; da ponta do queixo até o topo da cabeça é um oitavo da sua altura; do topo do peito às raízes do cabelo será a sétima parte do homem inteiro. Dos mamilos ao topo da cabeça será a quarta parte do homem. A maior largura dos ombros contém em si a quarta parte do homem. Do cotovelo até a ponta da mão será a quinta parte do homem; e do cotovelo até o ângulo da axila será a oitava parte do homem. A mão inteira será a décima parte do homem. A distância da ponta

> o queixo até o nariz e das raízes dos cabelos até as sobrancelhas, é, em todos os casos, e como o ouvido, um terço da face.

O próprio Vitrúvio já havia tentado desenhar o corpo humano dentro de um quadrado e um círculo, mas não obteve êxito, pois o resultado final ficava desarmonioso. Porém, Leonardo da Vinci resolveu aceitar o desafio perdido pelo arquiteto romano e conseguiu com que o encaixe ficasse perfeito e em harmonia com os requisitos matemáticos descritos mais acima.

Este desenho tornou-se o fundamento da máxima filosófica segundo a qual “o homem é a medida de todas as coisas”, base do Renascimento. Até hoje o Homem Vitruviano é tido como um símbolo da simetria básica, sendo referência de beleza, não somente do corpo humano, mas de tudo que está a nossa volta.

E sobre a assombrosa exatidão contida na obra, Lívio (2006, p. 198) comenta com espanto: “É uma pena que a Divisão Áurea tenha atraído à entusiástica atenção dos excêntricos. Um deles mediu a altura de 65 mulheres e comparou os resultados com a altura de seus respectivos umbigos, tendo obtido a média de 1, 618”. Isso mostra a admiração que tinham ao comprovar que os resultados obtidos, mesmo que fossem em mulheres diferentes, conduzissem sempre ao mesmo valor, no caso o Fi.

2.3.2.6 Partenon

Essa maravilha arquitetônica, que em grego significa “o lugar da virgem”, atribuída ao escultor grego Fídias, já citado, na verdade foi concebida por seus alunos e ajudantes na Grécia antiga, para celebrar a deusa Atena. Sua construção data entre 447 e 432 a.C., enquanto Péricles governava.

Em 26 de setembro de 1687 quase foi destruída durante um ataque das tropas venezianas, porém o seu alicerce permaneceu intacto. Sobre a sua estrutura, LÍVIO (2006 p. 90), comenta: “a maioria dos livros sobre a Razão Áurea afirma que as dimensões do Partenon, enquanto seu frontão triangular estava intacto, ajustava-se perfeitamente a um Retângulo Áureo”. E esse fato também se estendia a outras dimensões do templo.

Na figura a seguir podemos ver a bela obra, logo que foi concebida: Beleza e vislumbre doados pelo Número de Deus (Figura 10).

Figura 10 – O Partenon à época de sua construção

Fonte: Dunlap (1997, p. 333).

Na ilustração anterior podemos admirar o Partenon logo quando foi inaugurado. De fato, trata-se de um belíssimo monumento antigo e um interessante exemplo do uso do Número de Ouro.

2.3.3 O Número de Ouro e o corpo humano

2.3.3.1 O Homem Vitruviano em detalhes

Além das relações entre as medidas do corpo humano vistas no capítulo anterior onde conhecemos O Homem Vitruviano, temos outras peculiaridades em relações a outras partes do nosso corpo (em que poderemos ver com mais detalhes as informações nesse famoso desenho de Da Vinci), como nos ossos que formam as nossas mãos e os nossos dentes. Essa relação foi inicialmente observada por Vitrúvio, arquiteto romano que a documentou em sua obra **“O Tratado de Arquitetura”**.

Segundo Lívio (2006, p. 198), no conteúdo desse tratado estão alguns enunciados: “Dividir a altura do corpo humano pela medida do umbigo até o chão; dividir a altura do crânio pela medida da mandíbula até o alto da cabeça; dividir a medida da cintura até a cabeça pelo tamanho do tórax”, entre outros. Todos esses enunciados, para a admiração de quem quisesse fazer o teste, direcionavam ao Número de Ouro.

Essa relação entre os ossos que compõem o nosso corpo não para por aí. Mas, seguindo a diante, o que poderíamos fazer para que o nosso sorriso fosse algo encantador? Se este obedecer à Razão Áurea, com certeza, atrairá muitos admiradores...

2.3.3.2 Razão áurea na odontologia

A posição de cada dente na arcada dentária, de maneira mais específica, os quatro dentes da frente de cada lado da arcada superior, estão dispostos de forma a respeitar a razão áurea, pois se encaixam (respeitadas às particularidades de cada um) em um Retângulo Áureo e por consequência, a razão de suas medidas resultam no Número de Ouro. Não é à toa que**,** no processo de reconstruções dentárias, utiliza-se a Razão Áurea para obter um conjunto proporcional, harmonioso e visualmente agradável (LOURO; GALAZI; MOSCON, 2009).

Mas a participação do Número de Ouro ainda não se encerrou. No rosto humano ainda temos que a razão entre as medidas que representam a distância “da linha dos lábios até o queixo” e a distância “da ponta do nariz a linha dos lábios” é o número Phi (LOURO; GALAZI; MOSCON, 2009).

Encanto, admiração e anos de estudo para se descobrir um pouco mais sobre as particularidades do Número de Ouro. Mas quem foram os curiosos que decidiram se aventurar por esses caminhos? O tópico seguinte nos traz à memória alguns deles.

2.4 O NÚMERO DE OURO E GRANDES PERSONAGENS DA HISTÓRIA

Nesse tópico abordaremos de forma resumida a história de personagens famosos da nossa história que também se encantaram com o Número de Ouro. Dessa relação surgiram resultados magníficos que perduram até os dias de hoje, causando espanto e admiração.

Pretendemos mostrar um pouco da biografia de importantes figuras e o seu encontro com o Número de Ouro. Veremos aqui, de que maneira o seu encanto pela Constante Divina os fez dedicar parte de sua vida ao seu estudo e de que maneira usufruíram de sua beleza. Conheceremos um pouco desses grandes homens que puderam marcar os seus nomes na história da humanidade em razão de seu espírito investigativo e curioso, tomando emprestado da natureza padrões e formas que a faz tão perfeita. Algumas delas fizeram uso desses padrões em seus quadros artísticos, outros os colocaram em suas obras de engenharia, alguns as inseriram em belas canções e até as fizeram como guias de suas estrofes, em seus versos.

É verdade que muitos são os admiradores do Número de Deus que poderiam ser citados, porém, foram escolhidos quatro deles. Todos eles, buscando eternizar seus nomes através das gerações seguintes. A história nos mostra que alcançaram seu objetivo.

2.4.1 Fibonacci (1170 – 1240)

De acordo com Zanh (2011), nasceu na década de 1170, Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, viveu com seu pai, *Guglielmo*, por determinado período. Este trabalhava na alfândega e ainda era comerciante na cidade em que hoje se situa a Argélia. Posteriormente teve a oportunidade de conhecer os mais variados meios de se contar e realizar operações numéricas. Após certo estudo, constatou que os numerais indo-arábicos, que se baseavam no princípio do valor relativo, ou seja, o valor numérico varia de acordo com a posição ocupada, eram bem mais eficientes e práticos que todos os outros métodos. Após essas constatações, pôde registrá-las em sua obra intitulada *Liber Abaci*, usando sempre exemplos bem práticos.

O apelido Fibonacci (do latim *filius Bonacci*, filho da família *Bonacci*, ou "filho da boa natureza") foi provavelmente dado pelo historiador de Matemática *Guillaume Libri* em sua obra sua *Histoire des Sciences Mathematique en ltalie* (História das ciências matemáticas na Itália), escrita no ano de 1838, apesar de alguns historiadores atribuírem uso do nome Fibonacci, inicialmente a matemáticos da região italiana em meados do século XVIII. Devido ao intenso movimento comercial da Pisa contemporânea a Fibonacci, era exigida certa desenvoltura em relação às quatro operações matemáticas básicas. Leonardo, então, pôde observar vários escribas no momento em que realizavam tais operações, as quais eram feitas com numerais romanos e utilizavam o ábaco: o processo era extremamente trabalhoso.

Dessa forma, apesar do ábaco apresentar-se como um meio razoavelmente eficiente para realização de operações aritméticas, ele certamente tinha muitas limitações, principalmente ao lidar com contas mais complexas.

Dando prosseguimento, no que se refere às contribuições de Fibonacci, ressaltamos a Razão Áurea. Em seus problemas que, de início, nada tinham a ver com a Razão Áurea, ele abriu os horizontes sobre o tema e suas aplicações. Sobre tais contribuições, Lívio (2006, p. 115) comenta:

> (...) apareceram num livro pequeno sobre geometria, Practica Geometriae (Prática de Geometria), que foi publicado em 1223. Ele apresentou novos métodos para o cálculo da diagonal e da área do pentágono, cálculos dos lados do pentágono e do decágono a partir do diâmetro do círculo inscrito e do circunscrito, e computações de volumes do dodecaedro e do icosaedro, todos os quais estão intimamente ligados à Razão Áurea. Na solução desses problemas, Fibonacci demonstra um profundo conhecimento da geometria euclidiana. Embora suas técnicas matemáticas empreguem até certo ponto trabalhos anteriores, em particular Sobre o pentágono e o decágono, de Abu Kamil, há poucas dúvidas de que Fibonacci aprimorou o uso das propriedades da Razão Áurea em várias aplicações geométricas. Contudo, sua contribuição mais importante para a Razão Áurea e a que mais lhe trouxe fama deriva de um problema aparentemente inocente do *Liber abaci.*

E é justamente esse problema, contido no capítulo XII do *Liber abaci*, que mais tarde viria a ser um dos mais famosos e práticos já formulados, além de estar intimamente ligada à Razão Áurea. Ele consiste no seguinte: “Um homem tinha um par de coelhos. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês” (Figura 11). Sobre a solução desse problema, o próprio Fibonacci relata (LÍVIO, 2006, p. 116):

> De fato, a solução do problema é bastante simples. Comecemos com um par. Após o primeiro mês, o primeiro par dá à luz outro par, de modo que ficamos com dois pares. Após o segundo mês, o par maduro dá à luz outro par jovem, enquanto o par de filhotes amadurece. Portanto, ficam três pares, como desenhado na figura. Após o terceiro mês, cada um dos dois pares maduros dá à luz outro par, e o par de filhotes amadurece, o que nos deixa com cinco pares. Após o quarto mês, cada um dos três pares maduros dá à luz um par, e os dois pares de filhotes crescem, resultando em um total de oito pares. Após cinco meses, temos um par de filhotes de cada um dos cinco pares de adultos, mais três pares amadurecendo num total de treze pares. Neste ponto, entendemos como proceder para obter o número de pares adultos, de pares filhotes e o total de pares nos sucessivos meses. Suponha que examinemos apenas o número de pares adultos em um determinado mês. Este número é formado pelo número de pares adultos no mês anterior, mais o número de pares de filhotes (que amadureceram) do mesmo mês anterior. Porém, o número de pares de filhotes do mês anterior é, na verdade, igual ao número de pares de adultos que existia no mês que antecedeu o mês em questão. Assim, em qualquer mês (começando com o terceiro), o número de pares de adultos é simplesmente igual à soma do número de pares de adultos, nos dois meses anteriores. O número de pares de adultos, portanto, segue a sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8,...

Essa sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,... Na qual cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, foi denominada de sequência de Fibonacci. O primeiro a denominá-la assim foi o matemático francês Edouard Lucas (1842-1891), no século XIX.

Figura 11 – Os coelhos de Fibonacci

Fonte: Dunlap (1997, p. 46).

Essa foi a primeira sequência recursiva (sequências de números nas quais a relação entre termos sucessivos pode ser expressa por uma fórmula matemática) da Europa. Mas o que isso teria a ver com o Número de Ouro? A razão de dois termos sucessivos vai se aproximando do Fi, à medida que esses valores vão aumentando. Esta descoberta foi atribuída a Johannes Kepler, em 1611. Na verdade, qualquer sequência que tenha essa propriedade recursiva possui tal característica. Mas a famosa sequência não se limita somente ao nascimento de coelhos, mas está presente em vários outros fenômenos, como o número de pétalas de certas flores, citadas anteriormente (LÍVIO, 2006).

2.4.2 Leonardo Da Vinci (1452 – 1519)

Segundo Capra (2011), não é à toa que esse personagem figura entre os mais influentes em relação à Divina Proporção. Duas obras já citadas nesse documento são de sua autoria: a Mona Lisa e o Homem Vitruviano. Com pouco mais de 30 obras, nem todas concluídas, é considerado um dos maiores e mais completos gênios que a humanidade já teve. Nascido em 15 de abril, no ano de 1452, na Itália, pôde dedicar-se não só à pintura, mas também a estudos científicos sobre o corpo humano, Física, Matemática, passando pela Engenharia e outros ramos.

Sempre curioso, observava incansavelmente a natureza e sobre ela rabiscava com anotações e desenhos. Como resultado de suas observações e estudos, logo notou a presença da Divina Proporção na natureza, não demorando muito para aplicá-la, também, em suas obras.

Uma das suas pinturas mais replicadas, juntamente com a Mona Lisa, seria o quadro que retrata a Última Ceia de Jesus com os seus discípulos e a presença de Maria Madalena. Destaca-se também "O Homem Vitruviano", como símbolo do "homem perfeito".

Destaca-se, também, que Da Vinci emprestou seu talento magnífico para ilustrar parte de uma obra muito famosa: *De Divina Proportione* de Luca Pacioli, valioso documento que trata, com riqueza de detalhes, o Número de Ouro e suas incontáveis aplicações.

Leonardo, que nasceu no vilarejo de Vinci, na província de Toscana (daí o apelido), veio a falecer em 2 de maio de 1519, com 67 anos, na cidade de Cloux, na França. Deixou um imenso legado, mostrando-se um apaixonado pelo Número de Ouro e a sua harmonia resultante.

2.4.3 Gaudí (1852 – 1926)

Segundo Amaral (2008), Antonio Gaudí foi um renomado arquiteto, nascido na Espanha e famoso por seu estilo único de mesclar formas e texturas. Utilizava em seus trabalhos vários tipos de materiais e ousava em cada criação, esbanjando sempre de muitas cores. Dentre as suas construções podem-se destacar: a Sagrada Família, a Cripta da Colônia Guell, a Casa Batlló entre outras.

Porém, dentre essas obras, destacaremos, em especial, a Sagrada Família e a Casa Batlló, que, como já citado, estão situados em Barcelona, tendo vários indicativos do uso do Número de Ouro e da Espiral Dourada. A varanda é baseada na Espiral, lembrando a concha de um molusco. Mas, entre esses dois magníficos pontos turísticos, destaca-se o Templo Católico, considerado, uma obra-prima de Gaudí, tido por muitos estudiosos e críticos como o maior projeto do artista e marco no que diz respeito à arquitetura espanhola. Ainda encontra-se em fase de acabamento, tendo sua construção interrompida algumas vezes, com previsão de término para 2026.

Gaudí também foi conhecido como alguém que não se prendia a padrões, e não é à toa que encabeçou o movimento denominado "Arte Nova". Envolveu-se intimamente com a Geometria e com os elementos naturais, utilizando figuras como hiperboloides, paraboloides entre outras do gênero. Seguindo as suas inúmeras observações à natureza percebeu a Espiral Dourada e o Retângulo Áureo e os imprimiu às suas inúmeras obras. De fato o seu legado foi e continua sendo admirado por muitos, principalmente pela beleza e harmonia emprestados pela natureza.

2.4.4 Luca Paccioli (1445 – 1517)

Segundo Lívio (2006), Luca Bartolomeo de Paccioli (Figura 12), mais conhecido como Luca Paccioli, nasceu na cidade italiana de Santo Sepulcro em 1445. Poucas informações se têm sobre o começo de sua vida. O que se sabe é que veio de família pobre, com poucas condições para incentivá-lo nos estudos. Ao tornar-se jovem adentrou em um mosteiro na sua cidade natal, porém, depois de terminado o tempo, deixou a igreja e tornou-se professor de matemática em uma escola. Ainda nessa época foi apresentado ao seu futuro mentor, Leon Baptist Alberti (1404 – 1472).

Em 1470, Luca escreve um dos seus primeiros estudos sobre Álgebra, tendo 25 anos de idade. Mais tarde, resolve retornar ao convento e após a morte de seu mentor, faz a escolha de tornar-se franciscano. No ano de 1475, torna-se o primeiro professor de matemática da Universidade de Perugia, onde lecionou por seis anos. No ano de 1494, publica o seu livro *"Summa de Arithmetica, Geometria Proportioni et Proportionaliti"*, que trazia um compêndio de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade, sendo mais comumente conhecido como *"Summa"*. Nessa obra continham publicações próprias e resumos dos conhecimentos matemáticos da época, o que a tornou tão importante, servindo até como parâmetro para estudos futuros.

Conhecido também por suas contribuições no ramo da contabilidade, Luca ficou famoso por uma seção deste livro que trata sobre o tema. O título era

"Particulario de Computies et Scripturis". Aí descreve o método Veneziano, o qual viria a revolucionar o que se sabia sobre economia da época, consagrando Paccioli como pai da contabilidade.

Devido à sua fama aumentar, a sua presença foi logo reclamada pelo Duque de Milão, que o queria lecionando matemática na Corte. Um dos seus aprendizes seria ninguém menos que Leonardo Da Vinci, criando mutuamente, obras de grande importância. Da Vinci fez os desenhos de outra importantíssima obra de Luca: *"De Divina Proportione"*. Luca o ensinou a perspectiva e a proporcionalidade, em contrapartida. Tal obra, composta por volta de 1498, trata de forma ampla a Razão Áurea e as suas várias aplicações, tais como na Geometria, Arquitetura, Artes, natureza, dentre outros.

Figura 12 – Luca Paccioli

Fonte: Bertato (2008, p. 10)

A simplicidade linguística do conteúdo permite o acesso a qualquer um, além de conter as gravuras muito bem representadas por Leonardo da Vinci. Todos esses fatores fizeram com que o livro fosse contemplado não somente por matemáticos, como por outras áreas, difundindo e popularizando o conceito do Número de Ouro. Os esboços geométricos de Da Vinci também foram precursores para nossa geometria atual. Por fim, Paccioli continuou a dar aulas até o ano de sua morte, no mosteiro de São Sepulcro, no ano de 1517.

Foi buscado, por meio deste documento, se demonstrar a presença do Número de Ouro em diversos elementos da natureza e até do corpo humano. O capítulo seguinte seguirá com uma proposta didática para o estudo da Razão Áurea em sala de aula, com enfoque nos alunos do Ensino Médio.

3 A MATEMÁTICA DO NÚMERO DE OURO

Reservamos o presente capítulo para a apresentação de como se obter o valor numérico do Número de Ouro, tendo em vista que o seu valor aproximado, 1,618, foi mencionado, a princípio, sem prova alguma.

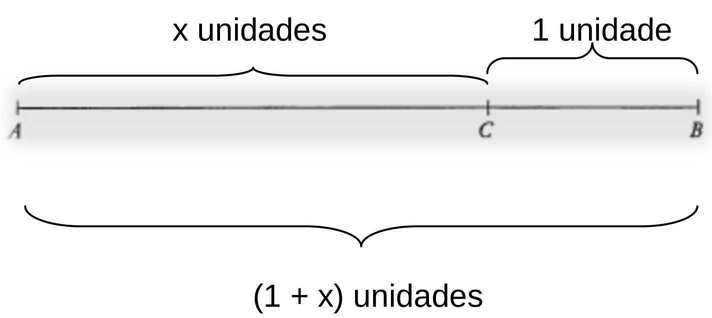
Dessa forma, são mostradas algumas maneiras de calcularmos tal valor. Em alguns casos partiremos de expressões pouco comuns, como radicais e frações que se repetem continuamente, como mostrado na seção 3.2.

Ainda é abordado o método para se construir o Retângulo Áureo, além de se explicar a relação do Fi e a Sequência de Fibonacci. Por fim, são exploradas com mais detalhes algumas propriedades da Sequência de Fibonacci, ligada de forma marcante ao Número de Ouro.

3.1 OBTENÇÃO DO VALOR NUMÉRICO DO NÚMERO DE OURO

O Número de Ouro é um número irracional e seu valor é 1,6180339887... ou arredondando, 1,618. Geometricamente ele é obtido, segundo Lívio (2006, p, 14): "quando se divide um segmento em outros dois segmentos, de forma que o segmento mais longo da reta dividida pelo segmento menor seja igual ao segmento completo dividido pelo segmento mais longo". Visando simplificar esse enunciado, temos a figura seguinte que traz um segmento de reta em que m(AB) = (1 + x) unidades, m(CB) = 1 unidade e m(AC) = x unidades (Figura 13).

Figura 13 – Segmento de reta medindo (1 + x) unidades



Fonte: Lívio (2006, p. 14).

Dessa maneira, podemos obter a sentença que expressa a divisão desse segmento em média e extrema razão (visto na seção 2.1 desse documento), da seguinte forma:

$$\frac{m(AB)}{m(AC)} = \frac{m(AC)}{m(CB)}$$

Agora, substituindo os valores, teremos:

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}$$

Pela propriedade fundamental das proporções: O produto dos meios é igual ao produto dos extremos (vulgarmente chamada de multiplicação em cruz), teremos o seguinte:

$$x.x = (1+x).1$$

Resolvendo as multiplicações e aplicando a propriedade distributiva, chegamos a uma equação de segundo grau:

$$x^2 = 1 + x$$

Organizando adequadamente teremos:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Aplicando a fórmula resolutiva de Bháskara (que nos diz que as raízes ou soluções x' e x'' são dadas por $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, em que a, b e c são chamados coeficientes dessa equação e $\Delta = b^2 - 4ac$, é chamado de discriminante) e fazendo $\sqrt{5} = 2{,}236$, encontramos como respostas os seguintes resultados:

$$\varphi' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+2{,}236}{2} = 1{,}618 \qquad \text{e,}$$

$$\varphi'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-2{,}236}{2} = \frac{-1{,}236}{2} = -0{,}618$$

Como o nosso estudo envolve medidas, descartamos os valores negativos. Ficamos com o único resultado 1, 618 que é o enigmático “Número de Ouro” (LÍVIO, 2006).

3.2 OBTENÇÃO DO NÚMERO DE OURO ATRAVÉS DE SEQUÊNCIAS CONTÍNUAS INFINITAS

Descreveremos, nesse tópico, outro método utilizado para o cálculo do Número de Ouro, que se encontra na obra de Lívio (2006). O Número de Ouro não é surpreendente somente pela sua presença na natureza, mas também por suas propriedades algébricas.

O seguinte exemplo foi tomado justamente pelo fato de, a partir de seu resultado, obtermos o Número de Ouro. E, apesar de em um primeiro momento não associarmos o Fi a essa expressão, veremos surgir o Número de Ouro de forma surpreendente. Mas para tal, lançaremos mão de alguns artifícios algébricos:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Suponha que queremos calcular o valor da expressão anterior, que se trata de radicais que se repetem indefinidamente. De forma direta, uma das maneiras mais convenientes seria representá-la como “x”:

$$x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}} \qquad (1)$$

Após isso, elevam-se ambos os lados da expressão ao quadrado:

$$(x)^2=\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}\right)^2$$

Fazendo uso de propriedades da potenciação tem-se:

$$x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

Observando a expressão (1), atentemos ao fato que $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$. Logo, a nossa equação fica: $x^2=1+x$, cuja solução foi encontrada na seção 3.1. Dessa forma, concluímos que o resultado encontrado também corresponde a Phi.

Agora, será exposto outro exemplo utilizando expressões infinitas envolvendo frações. Igualmente ao exemplo anterior a escolha dessa expressão se dá pelo resultado, que também se trata do Fi e por ser, igualmente ao exemplo anterior, uma expressão menos comum:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

Trata-se de um exemplo clássico de frações contínuas, muito abordadas em Teoria dos Números (assunto geralmente visto em cursos superiores). Novamente usaremos o artifício anterior e denotaremos a expressão por "x":

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Observando $\mathbf{(2)}$ e procedendo de modo análogo ao caso anterior, teremos:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Multiplicando por "x" nos dois lados, teremos:

$$x.x = (1 + \frac{1}{x}).x$$

Aplicando a propriedade distributiva e resolvendo os cálculos, obtemos:

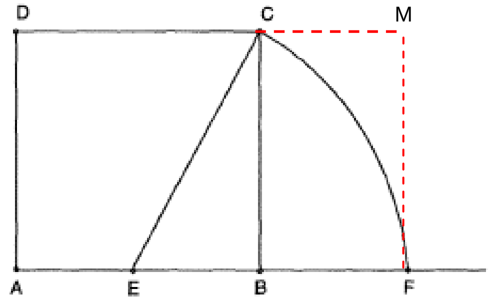
$$x^2 = x + 1.$$

Essa expressão já é conhecida por nós.

3.3 OBTENÇÃO DO RETÂNGULO ÁUREO

Nesse tópico veremos como obter o Retângulo Áureo fazendo uso de materiais simples, como régua e compasso. O procedimento é o seguinte: Desenhamos um quadrado de vértices A, B, C, D. Logo em seguida o dividimos O segmento AB no meio (ponto E). Posteriormente, colocamos a ponta seca do compasso em E e a outra ponta seria colocada em um dos vértices não adjacentes (no ponto C, por exemplo). Traçamos, a partir daí, uma circunferência, ou parte dela. Essa circunferência nos serviria de orientação para prolongarmos um dos lados do quadrado (tal prolongamento virá a ser o lado menor do retângulo que formaremos, resultando no segmento AF). Em seguida construiríamos, a partir de F, uma reta paralela e de mesma medida que o segmento BC, terminando no ponto M. Por fim, prolongaríamos o segmento DC, até o ponto M, formando o segmento DM, encerrando a construção do Retângulo Áureo, de vértices AFMD, conforme se encontra na figura 14.

Figura 14 – Obtenção do Retângulo Áureo



Fonte: Dunlap (1997, p. 17).

Com esses passos finalizamos o desenho do nosso Retângulo Áureo. No tópico seguinte exploraremos com mais detalhes algo já visto no tópico 2.3.1: A Sequência de Fibonacci e a sua estreita relação com o Número de Ouro.

3.4 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO

Sabemos que a Sequência de Fibonacci é composta pelos números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,..., u_n,..., em que cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, ou seja, essa sequência é chamada de recursiva, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, com $n \geq 3$.

Explicando melhor: O primeiro termo somado com o segundo resulta no terceiro. O segundo termo somado com o terceiro resulta no quarto. O terceiro termo somado com o quarto resulta no quinto termo e assim por diante.

Observemos com mais cautela essa sequência. Dividindo cada termo pelo anterior, teremos o seguinte:

Quadro 1 – Relação entre o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci

Razão	Resultado
1/1	1,000000
2/1	2,000000
3/2	1,500000
5/3	1,666666
8/5	1,600000
13/8	1,625000
21/13	1,615385
34/21	1,619048
55/34	1,617647
89/55	1,618182
144/89	1,617978
233/144	1,618056
377 /233	1,618026
610/377	1,618037
987/610	1,618033

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Repare que, à medida que os valores dessa sequência vão aumentando, os resultados da divisão de cada termo pelo anterior vão se aproximando cada vez mais do valor do Fi, por isso a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro estão estreitamente relacionados, como citada anteriormente no tópico 2.3.1. Segundo Lívio (2006, p. 120), devemos a descoberta desta propriedade ao astrônomo alemão Johannes Kepler, que em meados do ano de 1611, apesar de haver rumores de que um desconhecido a tenha feito antes (a fama de Kepler contribuiu para atribuírem-lhe mais esse feito).

Mas pode-se perguntar o porquê disso tudo. Haveria alguma explicação matemática que justificasse essa relação ou seria somente uma bela coincidência?

Retomemos as frações infinitas usadas anteriormente:

$$\text{Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Agora, vamos “quebrar” essas frações infinitas em frações menores, ou seja, vamos limitar o número de frações com o objetivo de simplificarmos os cálculos. Posteriormente iremos acrescentando mais frações, diminuindo o erro e aumentando gradativamente a aproximação de cada resultado. Logo teremos:

$$1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = 1.00000$$

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} = 2.00000$$

$$1 + \frac{1}{1+1} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} = 1.50000$$

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} = 1.66666$$

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}} = 1.60000$$

Após a utilização desse artifício a resposta do nosso questionamento fica mais evidente: Atentemos para as frações resultantes da “quebra” feita anteriormente. O numerador e denominador dessas frações são justamente os números da Sequência de Fibonacci. Logo, está provado que não se trata do acaso, mas do fato de que ambos “partilham” dos mesmos valores em suas estruturas básicas (LÍVIO, 2006, p. 122).

3.4.1 Algumas propriedades dos Números de Fibonacci

Apesar do presente documento não tratar especificamente sobre a Sequência de Fibonacci, pareceu conveniente nos aprofundarmos um pouco mais em relação ao tema, diante das curiosidades que o norteiam. Muitas outras propriedades interessantes podem ser citadas. Estudaremos algumas delas nos tópicos seguintes (SODRÉ, 2006):

3.4.1.1 Soma dos n primeiros Números de Fibonacci

Esse tópico apresenta a fórmula da soma dos n primeiros números de Fibonacci.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_{n+2} - 1$$

Será demonstrado somente este primeiro caso . Antes, observe que:

$$u_1 = u_3 - u_2$$

$$u_2 = u_4 - u_3$$

$$u_3 = u_5 - u_4$$

$$u_4 = u_6 - u_5$$

$$\ldots$$

$$u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$

$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$$

Somando os termos do primeiro membro, teremos: $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Em seguida, aplicando o mesmo procedimento para as equações do segundo membro, lembrando que a maioria dos termos se anula, pois tem sinais contrários e substituindo u_2 por 1, chegamos ao resultado que queríamos demonstrar.

Exemplo: Vamos somar os cinco primeiros números da Sequência de Fibonacci:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = u_7 - 1$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13 - 1 = 12$$

3.4.1.2 Soma dos termos de Fibonacci de ordem par

Esse tópico apresenta a fórmula da soma dos termos de Fibonacci de ordem par.

$$u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

Para uma melhor compreensão, vamos somar os cinco primeiros números de ordem par da sequencia. Observe que o quinto número de ordem par corresponde ao décimo numero da sequência de Fibonacci.

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} = u_{11} - 1$$

$$1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 89 - 1 = 88$$

3.4.1.3 Soma dos termos de Fibonacci de ordem ímpar

Esse tópico apresenta a fórmula da soma dos termos de Fibonacci de ordem ímpar.

$$u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2n-1} = u_{2n}$$

Exemplificando esta propriedade, vamos somar os cinco primeiros números de ordem ímpar da sequência. Observe que o quinto número de ordem ímpar corresponde ao 13° número da sequência de Fibonacci.

$$u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 = u_{10}$$

$$1 + 2 + 5 + 13 + 34 = 55$$

4 O NÚMERO DE OURO: PROPOSTA DE ATIVIDADES ORIENTADORAS DE ENSINO

Vários são os desafios a serem enfrentados por aqueles que se aventuram no ramo da educação. Mau uso da tecnologia, falta de incentivo dos pais, desinteresse por parte dos alunos e até mesmo despreparo dos professores são alguns desses desafios. Logo, se faz necessária a utilização de outras formas de abordagens dos assuntos vistos em sala, visando despertar a atenção e curiosidade de quem está a aprender.

Com isso em mente, no presente capítulo são apresentadas cinco sugestões de AOE, que versam sobre o Número de Ouro, primeiramente de forma teórica e, posteriormente de forma prática.

Assim, o presente capítulo está dividido em duas subseções: a primeira descreve a metodologia de pesquisa adotada e o caminho metodológico que foram seguidos; a segunda trata das Atividades Orientadoras de Ensino (AOE), visando à consolidação do aprendizado e está voltada para a Educação Básica, em especial, para o 3º ano do Ensino Médio.

Dessa forma, no tópico a seguir buscamos descrever qual foi a metodologia e o caminho metodológico que nortearam a elaboração das AOE. Daremos ênfase a pontos referentes à aplicação dessas atividades, tais como a sua importância para o aprendizado, os pontos positivos, as dificuldades e os desafios enfrentados pelos discentes durante a sua realização. Estarão disponíveis, também, ao final do capítulo, informações detalhadas sobre a realização dessas atividades para que se possa facilitar a utilização em sala de aula.

4.1 METODOLOGIA DA PESQUISA E CAMINHO METODOLÓGIOCO

Nessa seção, apresentamos a metodologia norteadora dessa pesquisa, o caminho metodológico que foi seguido e a metodologia de ensino utilizada para servirem de base para essas atividades.

O subtópico a seguir nos traz a metodologia de pesquisa. Nele serão vistos, com mais detalhes como esse trabalho foi construído e a relevância desse tipo de pesquisa.

4.1.1 Metodologia de pesquisa

Levando em consideração que a pesquisa trata de “Uma proposta de atividades envolvendo o estudo da proporção áurea na educação básica”, este estudo é de caráter qualitativo exploratório, de acordo com o que define Gil (2002, p. 42): “(...) essas pesquisas são realizadas por pesquisadores sociais preocupados com a atuação prática. São também as mais solicitadas por organizações como instituições educacionais, empresas comerciais, partidos políticos etc.”.

Dessa forma, essa pesquisa foi desenvolvida em três etapas, às quais serão descritas a seguir, de acordo com cada objetivo específico: identificar outras formas de abordagem do conteúdo Número de Ouro, tendo auxílio da História da Matemática e a sua importância no cotidiano escolar dos alunos da Educação Básica; conhecer alguns conceitos matemáticos, teóricos e práticos, que norteiam o Número de Ouro, além de descrever atividades orientadas de ensino que poderão ser utilizadas pelo professor, no Ensino Médio, sobre o Número de Ouro.

Sabendo que esse trabalho tem cunho exploratório, ele apresenta um método de avaliação diferenciado em relação aos alunos. Em relação á esse tipo de abordagem, Gil (2002, p. 41), comenta:

> Estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com o intuito de torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições.

Sendo assim, percebe-se que essas atividades visam à construção do saber através da investigação e da prática, de forma a transformar esse momento em algo verdadeiramente proveitoso para o intelecto do discente, preparando-o para futuras situações problema em que estratégias parecidas poderão ser reutilizadas.

4.1.2 Caminho metodológico da pesquisa

O caminho metodológico para a realização da pesquisa, visando alcançar cada objetivo proposto foram os seguintes: primeiramente para se identificar aspectos teóricos e metodológicos de ensino do conceito do Número de Ouro, foi feita uma pesquisa exploratória e bibliográfica, por meio de artigos científicos, revistas, livros e outros documentos que trouxessem informações relevantes à cerca do tema.

Para que fosse alcançado o segundo objetivo, que era conhecer atividades orientadoras de estudo para o ensino do conceito do Número de Ouro, foi feita uma pesquisa aplicada em sala de aula. Finalmente, para se descrever atividades orientadoras de estudo (AOE) com potencialidades para o ensino do conceito do Número de Ouro, foram observados os resultados da sua aplicação em sala de aula, em que se analisaram as dificuldades enfrentadas, além das possíveis estratégias para saná-las.

Podem ser citados dentre algumas obras usadas, a de Lívio (2006), Bertato (2008) e Moura (1996), em que foi possível a construção do contexto histórico-cultural, bem como para a elaboração das atividades.

Assim, foi buscado não somente informar fatos aos alunos, mas também se buscou despertar a curiosidade e estimular a sua interação concreta com o tema por meio de situações simples ao nosso redor, em que o Número de Ouro tem presença marcante.

Em seguida, na segunda parte deste trabalho foi feito uma sondagem das informações que seriam utilizadas e que tivessem melhor chance de assimilação por parte dos alunos. Ressalta-se que o número de ilustrações e exemplos práticos é abundante, norteando o discente à cerca da importância real do tema e melhorando a compreensão geral.

Tem-se ainda que, buscando o maior interesse por parte do aluno, foi utilizada a História da Matemática como elemento facilitador juntamente com o aprofundamento organizado da complexidade dos exemplos, de forma a facilitar a assimilação do assunto.

Dessa forma, todos esses fatores tiveram vital importância e serviram de base para a terceira e última etapa deste trabalho: a elaboração das AOE. Acerca destas, Moura (1996, p. 32) comenta:

> A atividade de ensino que respeita os diferentes níveis dos indivíduos e que define um objetivo de formação como problema coletivo é o que chamamos de atividades orientadoras de ensino. Ela orienta o conjunto de ações em sala de aula a partir de objetivos, conteúdos e estratégias de ensino negociado e definido por um projeto pedagógico. Contém também elementos que permitem à criança apropriar-se do conhecimento por meio de um problema. E isto significa assumir o ato de aprender como significativo tanto do ponto de vista psicológico quanto de sua utilidade.

Dessa forma, estas atividades têm considerável influência no aprendizado, pois assim o aluno torna-se o verdadeiro responsável pelo seu aprender. A partir do momento em que pode construir ele mesmo a solução de uma situação problema (e não somente reproduzi-la mecanicamente) ele tem o prazer de se sentir capaz e isso gera confiança para futuras investigações que certamente surgirão.

Seguindo essas três etapas foi possível confeccionar as informações contidas aqui, sempre se buscando uma escrita clara e direta, com o intuito de promover a acessibilidade a qualquer um que deseje aplicá-las em sala de aula.

Assim, o próximo subtópico traz a metodologia de ensino adotada neste trabalho, ou seja, ele se refere ao modo como as AOE envolvendo o Número de Ouro serão aplicadas.

4.1.3 Metodologia de ensino

Neste trabalho buscou-se a aplicação de AOE, que são defendidas por autores como Gil (2002) e Moura (1996) como estratégia facilitadora. Este último as define como atividades práticas que partem de um problema motivador, com o objetivo de melhorar o desempenho do aluno em sala de aula por meio da investigação e da resolução de situações desafiadoras que, de preferência, façam parte do seu cotidiano. Ainda é dito que essas atividades devem ser resolvidas em grupo, pois segundo ele, os alunos tem uma maior liberdade para debater e se sentem mais confiantes para chegar à solução dos questionamentos.

Além disso, um aluno com maior conhecimento pode auxiliar àqueles que têm mais dificuldade, desenvolvendo um senso de interação e parceria, aspectos altamente necessários não só para o ambiente escolar, mas para a vida em sociedade. Dito isso, sugere-se seguir a mesma orientação e dividir a turma em grupos para que possam resolver as atividades sugeridas.

Assim, ressalta-se que a metodologia empregada nas atividades sugeridas aqui tem como finalidade desenvolver o senso crítico e investigativo do aluno, proporcionando-lhe uma real apropriação do conhecimento, além de promover a socialização e interação dos indivíduos no ambiente escolar e na sociedade em que estão inseridos. Dessa forma, busca-se, também, minimizar o fracasso e evasão escolar, promovendo a dinamização e eficiência do ensino, devido ao fato de se diminuírem o número de aulas expositivas e teóricas, proporcionando o desenvolvimento real dos discentes.

Finalmente, no tópico seguinte, será explicado com mais detalhes como se devem aplicar as AOE, de forma a maximizar os seus resultados e para que sejam utilizadas com maior eficiência pelo professor.

4.2 ATIVIDADES ORIENTADAS DE ENSINO SOBRE O NÚMERO DE OURO

Mesmo com todas as dificuldades enfrentadas pelo professor em sala de aula, alguns métodos e formas de trabalho podem servir de instrumentos facilitadores na construção do conhecimento. Uma delas é a utilização das AOE, que se usadas de maneira adequada pelo professor, poderão contribuir para o desenvolvimento intelectual do aluno. Moura (1996) relata que na Atividade Orientadora de Ensino faz-se necessária a presença de uma situação motivadora para que, a partir desta, se criem as condições para que o aluno possa raciocinar, criando necessidades, motivos, ações e operações para a sua solução. Sobre a necessidade de se usarem estratégias de ensino, como as AOE, Moura (1996, p. 5) discute:

> é claro que a assimilação de um sistema científico de conceitos e das consequentes estruturas da atividade psíquica, assim como o desenvolvimento multilateral e uniforme do aluno não são possíveis mediante somente a aprendizagem incidental baseado na atividade vital “natural”. Para isso faz falta uma atividade especial, cuja finalidade básica é a própria aprendizagem. Essa atividade específica do homem que tem como fim direto a aprendizagem se chama estudo.

Dessa forma fica clara a necessidade de fazer-se algo fora do livro didático, colocando em prática os conhecimentos adquiridos por meio de atividades que visem o aprendizado real do aluno e que sejam construídas com esse fim.

Assim, até mesmo o processo de avaliação se torna mais simples com a utilização desse tipo de atividade, pois, como é construída de forma a contemplar situações do cotidiano do aluno, este tem mais facilidade em encontrar soluções por ter familiaridade com o que se está sendo proposto.

Com isso, no subtópico seguinte, serão apresentadas cinco AOE, às quais estão a seguir: (1) Introdução ao Número de Ouro; (2) Estudando por meio do concreto o Número de Ouro; (3) O Número de Ouro em problemas matemáticos I; (4) O Número de Ouro em problemas matemáticos II; (5) O Número de Ouro em problemas matemáticos III. Essas atividades se baseiam em exercícios feitos pelo próprio aluno de forma que venha a se convencer da presença do Número de Ouro, não somente em objetos, mas também na natureza e no nosso corpo.

Com isso, espera-se que as atividades a seguir estimulem o aluno a sair do comodismo didático e comece a descobrir, por si mesmo que a Matemática, em especial o Número de Ouro, está bem presente ao nosso redor de forma concreta, dinâmica e natural.

4.2.1 Atividade orientadora de ensino 1: Introdução ao Número de Ouro

Uma das indagações feitas pelos alunos é aquela que diz respeito à origem de determinados temas e do porque de estudá-los, já que, segundo eles, nunca usarão isso em suas vidas. Claramente trata-se de um engano, visto que a Matemática se insere de forma marcante a tudo que está ao nosso redor. Assim, esta atividade buscou justamente isso: explicar o surgimento do Número de Ouro, analisando o contexto histórico e inserindo no aluno as informações iniciais em que se basearão as atividades seguintes.

Temos que essa atividade está fundamentada na área temática Espaço e forma da BNCC e tem por objetivos conhecer a história do surgimento Número de Ouro e aprender a calcular o valor numérico do Fi. A aplicação dessa atividade é sugerida no 3º ano do Ensino Médio e o seu tempo de aplicação recomendado é de 2h/aula, mais ou menos. O seu desenvolvimento e conclusão visam despertar no aluno o senso investigativo e o protagonismo em relação ao conhecimento, além de instigar a sua curiosidade pelo tema, fornecendo informações que possam prepará-lo para lidar com os questionamentos que surgirão nos próximos exercícios. E para que essa atividade possa ser realizada é importante que os alunos tenham alguns pré-requisitos básicos, como o conhecimento da resolução de uma equação do 2º grau e semelhança de triângulos.

Posteriormente, antes do início das atividades, o professor deverá dividir a turma em equipes de, no máximo, cinco integrantes, dependendo da realidade da turma. Após o professor irá propor alguns questionamentos acerca do assunto, como os seguintes: (1) Você pode citar alguns conteúdos vistos em Matemática que possamos usar no nosso dia-a-dia? (2) Você já ouviu falar no Número de Ouro? Caso a resposta a essa última pergunta seja positiva, pergunta-se (3) o que?

Prosseguindo com as indagações, o professor questionará (4) Alguém tem ideia da razão de um número ser chamado "Número de Ouro"? (5) Poderia haver algum padrão ou "molde" para algo ser chamado de belo ou ser "agradável de olhar".

Após esses questionamentos introdutórios o professor prosseguirá discutindo com os alunos a fonte histórica, as denominações utilizadas e o valor aproximado do Número de Ouro, até mesmo para que o aluno entenda as contribuições do Número de Ouro para a história da humanidade; assim como a presença do Fi nas artes, natureza e corpo humano, informando aos alunos que, não somente na antiguidade, mas também nos dias atuais o Número de Ouro é sinônimo de beleza e harmonia, sendo utilizado principalmente no mundo da moda.

O professor pode ressaltar, também, que para os gregos da antiguidade uma pessoa era considerada bela se as dimensões de seu rosto satisfizessem a Proporção Áurea. Sugere-se que o professor utilize como auxilio o vídeo que está descrito na nota de rodapé da página 72, que trata justamente sobre a história do Número de Ouro.

Em seguida será calculado o valor numérico do Fi através de uma equação do 2º grau, utilizando a fórmula resolutiva de Bháskara contida em anexo a esse trabalho. Nesse momento pede-se bastante cautela, tendo em vista que alguns alunos possuem grandes dificuldades em relação a certas operações algébricas contidas nessa resolução.

É importante que o orientador use esse momento para rever os pré-requisitos já citados, tendo o cuidado de detalhar com clareza cada passagem, principalmente na resolução da equação do 2º grau. E dependendo do grau de dificuldade de resolução podem ser solicitadas aulas de reforço para nivelamento de aprendizado dos alunos.

A avaliação dos resultados das atividades vai depender de vários fatores, porém o mais importante a ser analisado é se os alunos conseguiram compreender como o Número de Ouro está presente no nosso cotidiano, como ele se relaciona com a Matemática e se houve alguma dificuldade em relação aos cálculos. Sendo assim, essa atividade pode servir de norte para o professor dosar a velocidade em que passa as informações, buscando preparar o aluno para o próximo exercício e ajudando com mais cuidado àqueles que possam ter possíveis dúvidas.

A seguir, será apresentada a segunda AOE, que diz respeito ao estudo do Número de Ouro por meio de situações concretas, ponto crucial para o desenvolvimento de um saber sólido e duradouro.

4.2.2 Atividade 2: Estudando por meio do concreto o Número de Ouro

Um dos pontos mais interessantes do tema Número de Ouro é que ele pode ser visto mais próximo do que se pensa. Como se não bastasse estar presente na natureza de forma tão marcante por meio de padrões que se relacionam com uma sequência especial, ainda pode ser notado no nosso corpo. E pelo fato do homem sempre ter buscado por harmonia e beleza, não demoraria muito para que ele embutisse esses padrões em suas obras.

Como forma de provar e exemplificar tudo o que foi citado anteriormente é que essa atividade orientadora foi elaborada, pois é de extrema importância que o discente perceba, por meio de exemplos concretos, que o Número de Ouro ainda é algo presente no nosso cotidiano e ao contrário do que pode se pensar, não ficou esquecido no tempo e que o nosso próprio corpo é prova da existência desse Número divino.

Assim, essa atividade está fundamentada na área temática Espaço e forma da BNCC, tendo por objetivos perceber a utilização do Número de Ouro ainda nos dias atuais como padrão de harmonia e beleza, conhecer à Sequência de Fibonacci e entender como ela se relaciona com o Número de Ouro, compreender como o Número de Ouro está presente ao nosso redor, inclusive no nosso corpo e como se relaciona com a Matemática.

A aplicação dessa atividade é sugerida no 3º ano do Ensino Médio e o seu tempo de aplicação recomendado é de 2h/aula, mais ou menos. E para que essa atividade possa ser realizada é importante que os alunos tenham alguns pré-requisitos básicos, como saber realizar as operações básicas com os números reais.

Assim, nessa próxima etapa do desenvolvimento da atividade, o tema será estudado de forma contextualizada e concreta. Para tal, será solicitado que os alunos formem grupos de três a cinco pessoas. Em seguida será pedido que os alunos utilizem as suas identidades, cartões com CPF ou qualquer tipo de cartão.

Caso não possuam, o professor providenciará o material. Em seguida o orientador distribuirá réguas e calculadoras para os grupos. Será solicitado que os alunos meçam as dimensões desses objetos e calculem a razão da maior medida pela menor. O que se espera é que o resultado das divisões se aproxime do Número de Ouro. Dessa forma, o aluno perceberá que o Número de Ouro ainda é utilizado na confecção de inúmeros materiais que fazem parte do nosso dia a dia, ao invés de pensar que se trata de algo que ficou no passado.

Dando continuidade às atividades, no próximo momento o professor inicia comentando sobre a Sequência de Fibonacci e como ela norteia, por exemplo, a disposição das sementes de girassol, das pétalas em certas flores e dos ramos, nas árvores; além de comentar sobre a estrita relação que essa sequência tem com o Número de Ouro. O professor também explicará que se trata de uma sequência chamada recursiva e analisará, junto aos alunos, os seus termos inicias, detalhando cada passo para a sua obtenção.

Logo em seguida, o orientador solicitará que os alunos calculem a razão de cada termo dessa sequência pelo anterior, até aproximadamente, a décima razão. Novamente espera-se que os resultados das razões se aproximem cada vez mais do Fi, de acordo com o aumento dos valores usados. Assim, espera-se que o aluno possa conhecer a Sequência de Fibonacci e saber como esta se relaciona ao Número de Ouro.

Finalmente, na última parte do desenvolvimento dessa atividade, serão distribuídas fitas métricas e calculadoras para os alunos. Será solicitado que calculem as razões entre certas medidas: o comprimento do dedo médio e a distância da segunda dobra à ponta do dedo; a largura do rosto e a distância da região interna do olho à outra extremidade do rosto, passando pelo nariz; a razão entre o comprimento do braço e a distância do cotovelo à ponta do dedo médio; e a razão entre a altura do corpo e a distância do umbigo ao chão. Os resultados serão analisados pelo grupo e comentados pelo professor a fim de tirar-se qualquer dúvida.

Dessa maneira, a atividade proposta tem como objetivo levar o aluno a comprovar que o Número de Ouro também se encontra nas medidas dos membros do nosso corpo. Destaca-se que é obvio que devem ser levados em conta fatores externos, como dilatação de materiais e particularidades corporais de cada indivíduo. Mesmo assim, espera-se que estes valores também conduzam ao Fi.

Destaca-se que deve ser realizado um debate geral entre a turma, de preferência, após cada etapa concluída, tendo em vista que podem ocorrer dúvidas pertinentes a esses momentos realizados. Logo após a elucidação das indagações, os grupos irão comparar os resultados encontrados, a fim de que fique claro que, tudo o que foi desenvolvido por eles conduz ao Número de Ouro como resultado. Chama-se à atenção ao cuidado que o orientador precisa ter em relação à última atividade (que utilizava as medidas do nosso corpo). Pois, por conta de particularidades individuais de cada ser, é necessário se esclarecer que podem ser encontrados valores ligeiramente diferentes do Fi, não se tratando de problema ou má formação.

A avaliação dos resultados das atividades seguirá os mesmos padrões da atividade orientada anterior (AOE 1), ou seja, vai depender de vários fatores, porém o mais importante a ser analisado é se os alunos conseguiram compreender a necessidade do estudo do tema e como ele se relaciona com a Matemática e está presente ao nosso redor.

Ressalta-se novamente a importância da intervenção do professor caso haja alguma dificuldade por parte dos alunos na resolução das atividades e ajudando a retirar quaisquer dúvidas.

A seguir, será apresentada a terceira AOE, que diz respeito ao estudo do Número de Ouro por meio de charadas matemáticas, despertando a curiosidade e o instinto natural que se tem perante tais situações.

4.2.3 Atividade 3 – O Número de Ouro em problemas matemáticos I

As surpresas proporcionadas pelo Número de Ouro não param por aqui. Não é à toa que recebeu a fama de Número de Deus. Isso porque ele tende a aparecer das maneiras mais improváveis. Segundo Lívio (2006, p. 16) “a atratividade do Número Áureo origina-se, antes de qualquer coisa, do fato de que ele tem um jeito quase sobrenatural de surgir onde menos se espera”.

Dessa forma foram escolhidos três exercícios matemáticos com saídas criativas em que será possível observar o “ressurgimento” do Fi. Assim, além dos exercícios são apresentadas as suas resoluções, que por sinal, não são as únicas.

Assim, essa atividade está fundamentada na área temática Álgebra da BNCC, tendo por objetivos aprender a calcular de maneiras variadas o valor numérico do Fi e a aplicação dessa atividade é sugerida no 3º ano do Ensino Médio tendo o seu tempo de aplicação recomendado de 1h/aula, mais ou menos. E para que essa atividade possa ser realizada é importante que os alunos tenham alguns pré-requisitos básicos, como saber realizar as operações básicas com os números reais e resolução de uma equação do 2º grau.

Dessa forma, será dada continuidade aos exercícios e o tema será abordado usando uma charada matemática. É fato que todos gostam de ser desafiados e apesar de não admitirem, também é preferível que se vença. Sabendo disso o professor lançará à turma, ainda dividida em grupos, a seguinte indagação: “Determinar um número real positivo tal que a diferença entre seu quadrado e ele seja 1”.

Assim espera-se que os alunos tentem, inicialmente, achar a solução do problema por tentativa e erro. É necessário que o orientador espere alguns minutos (ou o tempo que for necessário), afim de que os alunos se convençam que tal modo é muito complicado. Após se esgotarem as tentativas o professor irá propor a resolução usando uma equação matemática. Então será pedido aos alunos que tentem transformar a situação em uma equação. Caso se faça necessário, o professor intervirá montando a equação juntamente com os alunos.

Um exemplo de equação que poderá ser encontrada seria $x^2 - x = 1$. Tal equação pode ser resolvida usando a fórmula resolutiva de Bháskara, que se encontra em anexo. Após se calcular o resultado, substituindo $\sqrt{5}$ por $2,236$ (seu valor aproximado) e desprezando o valor negativo (pois solicitamos no início do exercício um número real positivo), o que se espera é que o resultado obtido seja o Número de Ouro, já tendo sido definido o seu valor numérico desde a primeira AOE proposta nesse trabalho. Dessa forma o aluno perceberá que é possível se calcular o Fi através de uma expressão e que dessa forma este está intimamente relacionado à Matemática.

A avaliação dos resultados das atividades se dará por meio da observação se o aluno foi capaz de montar uma equação que representasse a situação problema, se conseguiu aplicar a fórmula de Bháskara corretamente e, claro, se conseguiu finalizar com êxito todas as operações matemáticas envolvidas no processo. Caso tenha tido dificuldade em algum passo, o professor prestará auxílio e irá expor os resultados obtidos, tomando cuidado para que não haja constrangimento por parte daqueles que não conseguiram ou tiveram dificuldades para finalizar o exercício.

A seguir, será apresentada a quarta AOE, que igualmente à anterior, diz respeito ao estudo do Número de Ouro por meio de desafios matemáticos. Dessa vez será abordado outro tipo de expressão, não tão comum, mas cuja resolução também conduz ao Fi.

4.2.4 Atividade 4 – O Número de Ouro em problemas matemáticos II

Nessa quarta atividade, foi adotado o mesmo critério de escolha, que a AOE anterior, ou seja, como já foi mencionado anteriormente, esse exercício matemático foi elaborado por também conter uma saída criativa para se encontrar o seu valor numérico que vale a pena ser debatida com os alunos e por não ser uma expressão que apareça com tanta frequência em livros didáticos. Essa solução, como o leitor já pode deduzir, conduz ao Número de Ouro. De igual modo, a resolução do exercício apresentado não é única.

Assim, essa atividade tem como objetivo verificar a presença do Fi em outra expressão matemática, além de estimular a criatividade e o instinto investigativo do aluno, ensinando-o a raciocinar sobre diferentes estratégias que podem ser usadas na resolução de outros exercícios. Pretende-se, também, relacionar ainda mais o tema com a Matemática.

Dessa forma, essa atividade está fundamentada na área temática Álgebra da BNCC, tendo por objetivos aprender a calcular de maneiras variadas o valor numérico do Fi e a aplicação dessa atividade é sugerida no 3º ano do Ensino Médio tendo o seu tempo de aplicação recomendado de 1h/aula, mais ou menos. E para que essa atividade possa ser realizada é importante que os alunos tenham alguns pré-requisitos básicos, como saber realizar as operações básicas com os números reais e resolução de uma equação do 2º grau.

Continuando com as atividades, o professor dividirá a turma em equipes de três a cinco pessoas e lançará outro desafio para os alunos que consiste na resolução de uma expressão matemática que trata de radicais unitários infinitos:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}.$$

Dessa forma, o professor solicitará que os alunos tentem calcular o resultado dessa expressão, mas inicialmente não será dada nenhuma dica por parte do professor. Após determinado tempo os resultados que foram obtidos serão discutidos. Obviamente pode ser que algum grupo não consiga desenvolver nenhuma estratégia de resolução, por esta ser engenhosa.

Posteriormente o professor iniciaria com uma das saídas para a resolução do problema: De forma direta, uma das maneiras mais convenientes seria representá-la como "x" ou outro símbolo:

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}} \qquad (1)$$

Após isso, elevam-se ambos os lados da expressão ao quadrado:

$$(x)^2 = (\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}})^2$$

Fazendo uso de propriedades da potenciação tem-se:

$$x^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

Observando a expressão (1), atentemos ao fato que $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$.

Logo, a nossa equação fica: $x^2 = 1 + x$, cuja solução foi encontrada na atividade 3.

Dessa forma, a avaliação dos resultados das atividades será igual à avaliação do exercício anterior, ou seja, dará por meio da observação se o aluno foi capaz de obter a equação do 2º grau solicitada, mesmo que isso tenha acontecido após a intervenção do orientador. Chama-se a atenção mais uma vez para que o professor mantenha o controle da sala, principalmente no momento de observação desses resultados, tomando cuidado para que não haja constrangimento por parte daqueles que não conseguiram ou tiveram dificuldades para chegar até a equação do segundo grau, como solicitava o exercício.

A seguir, será apresentada a quinta AOE, que de maneira semelhante à anterior, diz respeito ao estudo do Número de Ouro por meio de desafios matemáticos. Será abordado mais um tipo de expressão, não tão comum, mas cuja resolução também conduz ao Fi.

4.2.5 Atividade 5 – O Número de Ouro em problemas matemáticos III

Repetindo os argumentos usados nos dois últimos exercícios concluiremos a parte que trata das AOE propondo mais um exemplo utilizando expressões pouco comuns, mas dessa vez, envolvendo frações infinitas. Igualmente ao exemplo anterior a escolha desse exercício foi feita pelo uso de uma resolução criativa, parecida à anterior e por também conduzir, logicamente, ao Número de Deus.

Assim, essa atividade tem como objetivo verificar a presença do Fi como resultado de outra expressão matemática, além de estimular a criatividade e o instinto investigativo do aluno, ensinando-o a raciocinar sobre diferentes estratégias que podem ser usadas na resolução de outros exercícios. Pretende-se, também, relacionar ainda mais o tema com a Matemática.

Dessa forma, essa atividade está fundamentada na área temática Álgebra da BNCC, tendo por objetivos aprender a calcular de maneiras variadas o valor numérico do Fi e a aplicação dessa atividade é sugerida no 3º ano do Ensino Médio tendo o seu tempo de aplicação recomendado de 1h/aula, mais ou menos. E para que essa atividade possa ser realizada é importante que os alunos tenham alguns pré-requisitos básicos, como saber realizar as operações básicas com os números reais e resolução de uma equação do 2º grau.

Assim o orientador solicitará aos alunos, divididos em grupos como nas atividades anteriores, que tentem calcular o resultado dessa expressão $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$, sem ajudas iniciais. O esperado é que os alunos utilizem o mesmo artifício anterior, denominando a expressão por x, como em $(\mathbf{2})$. Se isso não ocorrer o professor intervirá, auxiliando os alunos nesse momento. Após determinado tempo os resultados que foram obtidos serão mais uma vez discutidos, atentando ao caso de que algum grupo pode não conseguir resolver o que foi proposto.

Posteriormente o professor inicia com uma das saídas para a resolução do problema: De forma direta, uma das maneiras mais convenientes seria representá-la como “x”:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}} \qquad (2)$$

Observando (2) e procedendo de modo análogo ao caso anterior, teremos:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Multiplicando por "x" dos dois lados, teremos:

$$x.x = (1 + \frac{1}{x}).x$$

Aplicando a propriedade distributiva e resolvendo os cálculos, obtemos:

$$x^2 = x + 1.$$

Essa expressão já é conhecida por nós.

Lembramos que, assim como nos exercícios anteriores, o momento da "correção" é importante, pois pode se aproveitar a situação para se realizar uma revisão sobre temas gerais da matemática, dessa forma é importante que o professor não salte os passos de cada resolução, mas que a faça de forma clara, a fim de se retirarem possíveis dúvidas que possa haver sobre os temas necessários à realização de cada etapa das atividades propostas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da Matemática possibilita o desenvolvimento intelectual e racional do indivíduo, não se tratando de algo que simplesmente precisa ser inserido no currículo escolar. Desta forma se faz necessário um conjunto de estratégias e ações que possibilitem tais resultados. Uma dessas estratégias seria o uso da História da Matemática.

Assim, nessa dissertação, foi buscado como objetivo geral conhecer atividades orientadas de ensino (AOE) como auxílio ao ensino do conceito do "Número de Ouro". Salienta-se que todo este processo tem por base a História da Matemática. Por outro lado, como objetivos específicos, buscou-se identificar aspectos teóricos e metodológicos de ensino do conceito do Número de Ouro, conhecer atividades orientadoras de estudo (AOE) para o ensino do conceito do Número de Ouro e, finalmente, descrever atividades orientadoras de estudo (AOE) com potencialidades para o ensino do conceito do Número de Ouro.

Para tal foi buscado um estudo do assunto de forma a abordar o contexto histórico que norteou a sua percepção, seguido de vários exemplos nas mais diversas situações e áreas. Após esse passo, que trata da percepção concreta e palpável do tema, passamos para uma abordagem mais algébrica. Assim, são vistas algumas maneiras de se obter o valor numérico do Número de Ouro. É interessante dizer que já foi possível perceber-se uma melhor assimilação do conteúdo, por conta da abordagem mais "visível", proporcionada pela utilização conjunta da História da Matemática e de exemplos contidos na natureza, artes em geral e corpo humano.

Após, foi desenvolvida uma proposta de atividades usando os exemplos do próprio documento, que levaram o aluno a perceber o Número de Ouro como resultado de cada uma delas. Como já foi mencionado, devido o uso da História da Matemática foi notada uma melhor compreensão e interesse do assunto pelo fato de se despertar a curiosidade e basear o aluno em relação à necessidade de estudo do tema. Foi, então, salientada a reflexão sobre o que se está sendo estudado, não só pelo fato de ser algo que precisa ser aprendido, mas também pela sua importância no que diz respeito ao desenvolvimento histórico humano.

Falando um pouco sobre as dificuldades, notou-se, a necessidade de encorajamento à pesquisa e a leitura, deixadas de lado e que por esse motivo ainda é vista com muita resistência por partes dos alunos que querem que toda a leitura e interpretação sejam feitas por parte do professor. Observou-se, também, a carência de uma breve revisão sobre resolução de equações do segundo grau (a conhecida Fórmula de Bháskara): as operações com potenciação e números inteiros, envolvidas no processo, mostraram ser uma dificuldade enfrentada por muitos alunos; além de uma discussão sobre estratégias para se resolver algumas das demonstrações feitas sobre o cálculo do Número de Ouro (usando frações contínuas, por exemplo). Isso ocorreu por conta dos artifícios usados não surgirem, em alguns casos, de forma tão imediata.

Vale a pena salientar que no processo de ensino – aprendizagem muitos são os fatores que estão envolvidos e vários são os desafios a serem vencidos. Porém, neste documento foi abordado apenas um deles: a História da Matemática como instrumento facilitador, por isso é coerente que este não seja tido como uma solução final para os problemas educacionais, visto que estes se arrastam por décadas. E por fatores limitantes como o tempo e pela necessidade de detalhes tidos como essenciais, preferiu-se o foco nesse objeto, em especial. Mas, nada que impeça que futuramente sejam feitas outras pesquisas com a mesma temática, sempre voltada para o desenvolvimento de uma educação mais plena e democrática.

Dessa maneira, espera-se que o presente documento possa servir como um auxílio adicional nas mãos do professor em sala de aula, que muitas vezes, lança o tema de maneira descontextualizada e sem base histórica, limitando um assunto tão rico a um simples problema geométrico (dividir um segmento em “média e extrema razão”).

E é justamente através dessa aplicação em sala de aula que se busca validar essas atividades, ajudando o discente a desenvolver-se de maneira concreta, despertando o interesse pela pesquisa e sendo incentivado a tornar-se um verdadeiro investigador e construtor do próprio conhecimento, buscando inspirar estudos futuros e contribuir para o desenvolvimento dessa maravilhosa ciência, chamada Matemática.

6 REFERÊNCIAS

ANAIS DO IX SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9., 2011, Pará. **Sociedade Brasileira de História da Matemática.** Pará: Sbm, 2011. 11 p.

ARARIPE, Paulo Roberto Esteves. **O ensino da matemática e a utilização do lúdico nos anos iniciais do ensino fundamental.** 2019. 64 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2019.

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura.** 3. ed. São Paulo: Blücher, 2006.

BERTATO, Fábio. **De Divina Proportione de Luca Pacioli.** 2008. 322 f. Tese (Doutorado) - Curso de Filosofia, Unicamp, Campinas, 2008.

BOHN, Méri Teresinha Philippsen; KÖLLN, Lucas André Berno. A mona lisa do renascimento e a mona lisa dos outdoors: a imagem e o ensino de História. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor**, Paraná, v. 1, n. 1, p.1-17, jan. 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

CALDEIRA, Maria. **A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática.** Atas do X Congresso Internacional Galego Português de Psicopedagogia. Braga: Universidade do Minho, 2009.

CAPRA, Fritjof. **A Ciência de Leonardo da Vinci.** 3. ed. São Paulo: Cultrix, 2011. 368 p.

CUNHA, Rodrigo Pessanha da. **O uso de vídeos no ambiente escolar: explorando a arte e o belo da Matemática por meio de narrativas.** 2019. 65 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2019.

DUNLAP, Richard. **The Golden Ratio and Fibonacci Numbers.** Canadá: World Scientific, 1997. 170 p.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática:** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

GASPERI, Wlasta Nadieska Hüffner de; PACHECO, Edilson Roberto. **A História da Matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na educação básica.**

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. Ed. São Paulo: Atlas 2002.

GREGIO, Bruno Chioderoli. **Sequências de números reais e as famosas constantes matemáticas e, π e φ.** 2017. 49 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2017.

KOSHY, Thomas. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.** 2. ed. New Jersey: Wiley, 2018. 689 p.

LÍVIO, Mario. **Razão áurea: A história de fi, um número surpreendente**. Rio de Janeiro: Record, 2006.

LOURO, Renata Loureiro; GALAZI, Daniele Ribon; MOSCON, Rodrigo Malbar. Proporção áurea no restabelecimento de um sorriso harmonioso. **Revista Brasileira de Pesquisa em Saúde**, Vitória, v. 2, n. 11, p.49-54, nov. 2009.

MIGUEL, Antônio. **Três estudos sobre história e educação matemática.** 1993. 361 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, Rio Claro, v. 11, n. 12, p.29-43, 1996. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2316462>.

OSTROWER, Fayga. **Universos da arte.** Rio de Janeiro: Unicamp, 2013.

SANTOS, Gilberto Vieira dos. **Explorando a Matemática do Número Φ, o Número de Ouro.** 2013. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de Rio Claro, 2013.

SEVERINO, Antonio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico.** 21. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

SILVA, Alex Neves. **Uma proposta de motivação visando despertar o interesse pela matemática.** 2018. 98 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal de São João del Rei, São João del Rei, 2018

SILVA, Alison Ferreira da. **Isaac Newton: contribuições ontem e hoje.** 2013. 60 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia – Cct, Universidade Estadual do Ceará - Uece, Fortaleza, 2013.

SODRÉ, Ulysses. **Alegria matemática: Sequências de Fibonacci: Propriedades.** 2006. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/alegria/fibonacci/seqfib1.htm#fib06>. Acesso em: 19 maio 2019.

ZANH, Maurício. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.** Pelotas: Ciência Moderna, 2011. 88 p.

APÊNDICES

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CADERNO DE ATIVIDADES ORIENTADORAS DE ENSINO (AOE): UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ESTUDO DA PROPORÇÃO ÁUREA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

AUTOR: ALISON FERREIRA DA SILVA

FORTALEZA – CEARÁ

2019

1 INTRODUÇÃO

Prezado docente, o material contido aqui tem o objetivo de ser utilizado no auxílio ao estudo do Número de Ouro. Procurou-se explanar o tema de maneira prática e didática, seguindo uma coerência lógica que vai do contexto histórico da sua criação, passando por exemplos que vão da natureza ao nosso corpo, finalizando com a observação do seu uso no nosso cotidiano, ainda nos dias atuais.

Dessa forma, esse caderno de atividades é constituído por cinco Atividades Orientadoras de Ensino (AOE) que abordam o Número de Ouro e que podem ser trabalhadas no 3º ano do Ensino Médio. Essas atividades procuram atingir os seguintes objetivos: Conhecer a história do surgimento Número de Ouro por meio de exemplos e aplicações do nosso dia – a – dia, servindo como padrão de harmonia e beleza, além de calcularmos o seu valor numérico e conhecer à Sequência de Fibonacci, entendendo como ela se relaciona com o Número de Ouro.

Assim, espera-se que o presente documento possa servir como uma ajuda adicional nas mãos do professor, que muitas vezes, lança o tema de maneira descontextualizada e sem base histórica, limitando um assunto tão rico a um simples problema geométrico (dividir um segmento em “média e extrema razão”).

Com isso pretende-se estimular o discente a desenvolver-se de maneira concreta, despertando o interesse pela pesquisa e sendo incentivando a tornar-se um verdadeiro investigador e construtor do próprio conhecimento. No mais, o desejo do autor é que essa obra possa inspirar estudos futuros, contribuindo para o desenvolvimento dessa maravilhosa ciência chamada Matemática.

SUMÁRIO

AOE 1: INTRODUÇÃO AO NÚMERO DE OURO

EIXO TEMÁTICO	Números e Operações; Espaço e Forma;
CONTEÚDO	Número de Ouro
TÍTULO	Phi: Um número surpreendente
ANO	3º ano do Ensino Médio
DURAÇÃO	2 horas/aula.

Preparação para aula:

Prezado docente, sugere-se que a turma seja dividida em grupos de três a cinco componentes. Ou pode se fazer essa divisão de acordo com a realidade e necessidade da turma. Após essa divisão, serão lançadas cinco indagações como forma de se introduzir o tema. Os questionamentos são os seguintes: (1) Você pode citar alguns conteúdos vistos em Matemática que possamos usar no nosso dia-a-dia? (2) Você já ouviu falar no Número de Ouro? Caso a resposta a essa última pergunta seja positiva, pergunta-se (3) O quê? Prosseguindo com as indagações, o professor questionará (4) Alguém tem ideia da razão de um número ser chamado “Número de Ouro”? (5) Poderia haver algum padrão ou “molde” para algo ser chamado de belo ou ser “agradável de olhar”. Posteriormente será exposta, através do vídeo cujo endereço se encontra nas referências desta atividade, a história do Número de Ouro e exemplos práticos de seu aparecimento, seguidos do cálculo do valor numérico do Fi.

Objetivos do roteiro didático:

Esse roteiro didático tem como objetivo ensinar o conteúdo Número de Ouro e especificamente tem-se o propósito de:

- Conhecer a história do surgimento Número de Ouro.
- Aprender a calcular o valor numérico do Fi.

Pré-requisitos:

O aluno precisa saber realizar as operações básicas com os números reais, além de compreender a resolução de uma equação quadrática.

Descrição dos procedimentos:

Após a divisão das equipes o professor pedirá aos alunos que anotem todas as suas respostas aos questionamentos feitos, a fim de iniciar uma discussão sobre o tema a partir delas. Em seguida, após assistir o vídeo sugerido serão respondidas as possíveis perguntas em relação ao tema. Em um segundo momento, será feito o cálculo do Número de Ouro com os alunos, partindo da Figura 13, em anexo. Tendo em vista que esse cálculo utiliza a fórmula resolutiva de Bháskara, por se tratar de uma equação do 2º grau, também em anexo, se encontra a descrição da fórmula de Bháskara e a resolução detalhada de como se calcular o Número de Ouro a partir da figura 13, se houver necessidade. Ou se o docente preferir poderá retornar ao tópico 3.1 deste trabalho. Posteriormente, tanto as respostas das cinco primeiras perguntas, como o cálculo do Número de Ouro serão comparados e expostos na sala a fim de retirarem quaisquer dúvidas. Assim, esta atividade buscou justamente isso: explicar o surgimento do Número de Ouro, analisando o contexto histórico e inserindo no aluno as informações iniciais em que se basearão as atividades seguintes.

Avaliação:

Será dividida em duas etapas: a primeira diz respeito à produção das respostas dadas ás perguntas e a segunda trata da correção feita aos erros cometidos quanto à resolução dos cálculos propostos. O orientador deve acompanhar de perto a realização de cada etapa das atividades, auxiliando quando necessário.

Recursos didáticos:

Data show, notebook, folhas de ofício, calculadora, Vídeo da Web[1].

Referências:

LÍVIO, Mario. **Razão áurea: A história de fi, um número surpreendente**. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, Rio Claro, v. 11, n. 12, p.29-43, 1996. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2316462>.

---

[1] Endereço: https://www.youtube.com/watch?v=AxYCY2-KvB8

AOE 2: ESTUDANDO POR MEIO DO CONCRETO O NÚMERO DE OURO

EIXO TEMÁTICO	**Números e Operações; Espaço e Forma;**
CONTEÚDO	Número de Ouro
TÍTULO	O Número de Ouro em tudo o que vemos
ANO	3º ano do Ensino Médio
DURAÇÃO	2 horas/aula.

Preparação para a aula:

Prezado docente, sugere-se que a turma seja dividida em grupos de três a cinco componentes. Ou pode se fazer essa divisão de acordo com a realidade e necessidade da turma.

Após essa divisão, em um primeiro momento serão solicitadas à turma, já previamente avisada, que utilizem cartões de crédito, CPF ou qualquer outro tipo de cartão. Se o aluno não dispuser destes, o professor se encarregará de providenciá-los, além de réguas e calculadoras (a calculadora dos *smarthphones* pode ser utilizada).

Em um segundo momento o professor explicará o que seria a Sequência de Fibonacci, salientando que esta sequência é chamada de recursiva, o seu surgimento e a maneira que estão dispostos os seus termos. Sugere-se a consulta ao subtópico 3.4 desse trabalho, que estará em anexo e trata sobre a Sequência de Fibonacci e a sua relação com o Número de Ouro, como auxílio didático para a realização do exercício. Logo em seguida distribuirá calculadoras, folhas de ofício, lápis e borracha àqueles que não possuírem.

Em um terceiro momento, os alunos ainda precisarão do mesmo material, ou seja: calculadoras, folhas de ofício, lápis e borracha àqueles que não possuírem, além de fitas métricas.

Objetivos do roteiro didático:

Esse roteiro didático tem como objetivo estudar o conteúdo Número de Ouro. Especificamente tem-se o propósito de:

- Perceber a utilização do Número de Ouro ainda nos dias atuais como padrão de harmonia e beleza.

- Conhecer à Sequência de Fibonacci e entender como ela se relaciona com o Número de Ouro.
- Compreender como o Número de Ouro está presente ao nosso redor, inclusive no nosso corpo e como se relaciona com a Matemática.

Pré-requisitos:

Para realizar essa atividade o aluno precisa saber realizar as operações básicas com os números reais.

Descrição dos procedimentos:

Prosseguindo, na primeira etapa do desenvolvimento da atividade, o professor solicitará aos alunos que formem grupos de três ou no máximo cinco alunos. Em seguida será pedido que os alunos utilizem as suas identidades, cartões com CPF ou qualquer tipo de cartão para medirem as dimensões desses objetos. De posse dessas medidas, será solicitado que eles calculem a razão da maior medida pela menor. Todas as respostas devem ser anotadas pelo grupo.

No segundo momento, de posse de calculadoras, os alunos deverão construir a Sequência de Fibonacci em seus cadernos ou folhas de ofício até, aproximadamente, o 15º termo. A partir daí o professor solicitará que os alunos calculem a razão de cada termo da Sequência de Fibonacci pelo termo imediatamente anterior, até registrando no caderno ou folha ofício as respostas encontradas.

Na última etapa da realização do exercício, os alunos irão calcular as razões entre certas medidas do corpo. Depois que as fitas métricas forem entregues aos alunos, estes devem fazer algumas medições em seus próprios corpos: o comprimento do dedo médio e a distância da segunda dobra à ponta do dedo; a largura do rosto e a distância da região interna do olho à outra extremidade do rosto, passando pelo nariz; a razão entre o comprimento do braço e a distância do cotovelo à ponta do dedo médio; e a razão entre a altura do corpo e a distância do umbigo ao chão. Após essas medições serem realizadas o professor solicitará que as razões citadas sejam calculadas, tendo os resultados registrados em caderno ou folha de ofício.

Avaliação:

A avaliação referente a essa atividade pode ser dividida em duas etapas: a primeira diz respeito à produção das respostas dadas aos questionamentos e a segunda trata da correção feita aos erros cometidos quanto à resolução dos cálculos propostos. O orientador deve acompanhar de perto a realização de cada etapa das atividades, auxiliando quando necessário.

Chama-se à atenção ao cuidado que o orientador precisa ter em relação à última atividade (que utilizava as medidas do nosso corpo). Pois, por conta de particularidades individuais de cada ser, é necessário se esclarecer que podem ser encontrados valores ligeiramente diferentes do Fi, não se tratando de problema ou má formação, mas de algo natural e que faz parte das particularidades de cada ser.

Recursos didáticos:

Subtópico 3.4 desse trabalho (disponível em anexo), folhas de ofício, réguas, calculadora, quadro, pincel, apagador, lápis e borracha.

Referências adicionais:

LÍVIO, Mario. **Razão áurea: A história de fi, um número surpreendente**. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, Rio Claro, v. 11, n. 12, p.29-43, 1996. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2316462>.

AOE 3: O NÚMERO DE OURO EM PROBLEMAS MATEMÁTICOS I

EIXO TEMÁTICO	**Álgebra**
CONTEÚDO	Número de Ouro
TÍTULO	A Matemática e o Número de Ouro
ANO	3º ano do Ensino Médio
DURAÇÃO	1 hora/aula.

Preparação para a aula:

Prezado docente, sugere-se que a turma seja dividida em grupos de três a cinco componentes. Ou pode se fazer essa divisão de acordo com a realidade e necessidade da turma.

Após essa divisão, o professor se encarregará de providenciar lápis, borracha e folhas de ofício àqueles que não possuírem. Se necessário também poderá ser admitido o uso da calculadora para a facilitação de certas etapas propostas na atividade.

Objetivos do roteiro didático:

Esse roteiro didático tem como objetivo estudar o conteúdo Número de Ouro. Especificamente tem-se o propósito de:

- Aprender outras formas de se calcular o valor numérico do Fi.

Pré-requisitos:

Para realizar essa atividade o aluno precisa saber realizar as operações básicas com os números reais, além de compreender a resolução de uma equação quadrática.

Descrição dos procedimentos:

Dando continuidade aos exercícios, o professor solicitará aos alunos que formem grupos de três ou no máximo cinco alunos o tema será abordado usando uma charada matemática. Assim o professor lançará à turma, a seguinte indagação: “Determinar um número real positivo tal que a diferença entre seu quadrado e ele seja 1”.

Dessa forma espera-se que os alunos tentem, inicialmente, achar a solução do problema por tentativa e erro. É necessário que o orientador espere alguns minutos (ou o tempo que for necessário), afim de que os alunos se convençam que “chutar” o resultado, dessa maneira, é muito complicado. Após se esgotarem as tentativas o professor irá propor a resolução usando uma equação matemática. Então será pedido aos alunos que tentem transformar a situação em uma equação. Caso se faça necessário, o professor intervirá montando a equação juntamente com os alunos.

Um exemplo de equação que poderá ser encontrada seria x^2 - x = 1. Tal equação pode ser resolvida usando a fórmula resolutiva de Bháskara, que se encontra em anexo. Após se calcular o resultado, substituindo $\sqrt{5}$ por $2,\ 236$ e desprezando o valor negativo, o que se espera é que o resultado obtido seja o Número de Ouro.

Avaliação:

A avaliação referente a essa atividade pode ser dividida em duas etapas: a primeira diz respeito à produção das respostas dadas aos questionamentos e a segunda trata da correção feita aos erros cometidos quanto à resolução dos cálculos propostos. O orientador deve acompanhar de perto a realização de cada etapa das atividades, auxiliando quando necessário.

Recursos didáticos:

Folhas de ofício, calculadora, quadro, pincel, apagador, lápis e borracha.

Referências adicionais

LÍVIO, Mario. **Razão áurea: A história de fi, um número surpreendente**. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, Rio Claro, v. 11, n. 12, p.29-43, 1996. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2316462>.

AOE 4: O NÚMERO DE OURO EM PROBLEMAS MATEMÁTICOS II

EIXO TEMÁTICO	Números e Operações; Espaço e Forma;
CONTEÚDO	Número de Ouro
TÍTULO	A Matemática e o Número de Ouro
ANO	3º ano do Ensino Médio
DURAÇÃO	1 hora/aula.

Providências para a realização da atividade:

Prezado docente, sugere-se que a turma seja dividida em grupos de três a cinco componentes. Ou pode se fazer essa divisão de acordo com a realidade e necessidade da turma.

Após essa divisão, o professor se encarregará de providenciar lápis, borracha e folhas de ofício àqueles que não possuírem. Se necessário também poderá ser admitido o uso da calculadora para a facilitação de certas etapas propostas na atividade.

Objetivos do roteiro didático:

Esse roteiro didático tem como objetivo estudar o conteúdo Número de Ouro. Especificamente tem-se o propósito de:

- Aprender a calcular o valor numérico do Fi.
- Estimular a criatividade e o instinto investigativo do aluno, ensinando-o a raciocinar sobre diferentes estratégias que podem ser usadas na resolução de outros exercícios.
- Relacionar ainda mais o tema com a Matemática.

Pré-requisitos:

Para realizar essa atividade o aluno precisa saber realizar as operações básicas com os números reais, além de compreender a resolução de uma equação quadrática.

Descrição dos procedimentos:

Continuando com as atividades e a divisão dos grupos, o professor lançará um desafio para os alunos que consiste na resolução de uma expressão matemática que trata de radicais unitários infinitos: $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$.

Dessa forma o professor solicitará que os alunos tentem calcular o resultado dessa expressão, mas inicialmente não será dada nenhuma dica por parte do professor. Após determinado tempo os resultados que foram obtidos serão discutidos. Obviamente pode ser que algum grupo não consiga desenvolver nenhuma estratégia de resolução, por esta ser engenhosa.

Posteriormente o professor iniciaria com uma das saídas para a resolução do problema: De forma direta, uma das maneiras mais convenientes seria representá-la como “x”:

$$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}} \qquad (1)$$

Após isso, elevam-se ambos os lados da expressão ao quadrado:

$$(x)^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}\right)^2$$

Fazendo uso de propriedades da potenciação tem-se:

$$x^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

Observando a expressão (1), atentemos ao fato que $x =$ $= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$.

Logo, a nossa equação fica $x^2 = 1 + x$, cuja solução foi encontrada na atividade 3.

Esse exercício foi escolhido por conta da presença de uma “saída interessante” que vale a pena ser debatida com os alunos. Assim, essa atividade tem como objetivo verificar a presença do Fi em outra expressão matemática, Em relação á duração, essa aula tem previsão de ser realizada em 1 hora/aula e o pré-requisito necessário para a realização dessa etapa se refere ao conhecimento da resolução de uma equação do 2º grau.

Avaliação:

A avaliação referente a essa atividade pode ser dividida em duas etapas: a primeira diz respeito à produção das respostas dadas aos questionamentos e a segunda trata da correção feita aos erros cometidos quanto à resolução dos cálculos propostos. O orientador deve acompanhar de perto a realização de cada etapa das atividades, auxiliando quando necessário.

Recursos didáticos:

Folhas de ofício, calculadora, quadro, pincel, apagador, lápis e borracha.

Referências adicionais

LÍVIO, Mario. **Razão áurea: A história de fi, um número surpreendente**. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, Rio Claro, v. 11, n. 12, p.29-43, 1996. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2316462>.

AOE 5: O NÚMERO DE OURO EM PROBLEMAS MATEMÁTICOS III

EIXO TEMÁTICO	**Álgebra**
CONTEÚDO	Número de Ouro
TÍTULO	A Matemática e o Número de Ouro
ANO	3º ano do Ensino Médio
DURAÇÃO	1 hora/aula.

Preparação para a aula:

Prezado docente, sugere-se que a turma seja dividida em grupos de três a cinco componentes. Ou pode se fazer essa divisão de acordo com a realidade e necessidade da turma.

Após essa divisão, o professor se encarregará de providenciar lápis, borracha e folhas de ofício àqueles que não possuírem. Se necessário também poderá ser admitido o uso da calculadora para a facilitação de certas etapas propostas na atividade.

Objetivos do roteiro didático:

Esse roteiro didático tem como objetivo estudar o conteúdo Número de Ouro. Especificamente tem-se o propósito de:

- Aprender a calcular o valor numérico do Fi.
- Estimular a criatividade e o instinto investigativo do aluno, ensinando-o a raciocinar sobre diferentes estratégias que podem ser usadas na resolução de outros exercícios.
- Relacionar ainda mais o tema com a Matemática.

Pré-requisitos:

Para realizar essa atividade o aluno precisa saber realizar as operações básicas com os números reais, além de compreender a resolução de uma equação quadrática.

Descrição dos procedimentos:

Por fim, concluiremos a parte que trata das AOE propondo mais um exemplo utilizando expressões infinitas, mas dessa vez, envolvendo frações. Igualmente ao exemplo anterior a escolha desse exercício foi feita pelo uso de uma resolução criativa. Assim o orientador solicitará, novamente, que os alunos tentem calcular o resultado dessa expressão $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$, sem ajudas iniciais. É esperado que os alunos tentem usar o mesmo artifício anterior, denominando a expressão de "x". Se isso não ocorrer o professor intervirá, auxiliando os alunos nesse momento. Após determinado tempo os resultados que foram obtidos serão mais uma vez discutidos, atentando ao caso de que algum grupo pode não conseguir resolver o que foi proposto.

Posteriormente o professor iniciaria com uma das saídas para a resolução do problema: De forma direta, uma das maneiras mais convenientes seria representá-la como "x":

$$x = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Observando $\mathbf{(2)}$ e procedendo de modo análogo ao caso anterior, teremos:

$$x = 1+\frac{1}{x}$$

Multiplicando por "x" dos dois lados, teremos:

$$x.x = (1+\frac{1}{x}).x$$

Aplicando a propriedade distributiva e resolvendo os cálculos, obtemos:

$$x^2 = x + 1.$$

Essa expressão já é conhecida por nós.

Avaliação:

A avaliação referente a essa atividade pode ser dividida em duas etapas: a primeira diz respeito à produção das respostas dadas aos questionamentos e a segunda trata da correção feita aos erros cometidos quanto à resolução dos cálculos propostos. O orientador deve acompanhar de perto a realização de cada etapa das atividades, auxiliando quando necessário.

É preciso mencionar que, assim como nos exercícios anteriores, o momento da “correção” é importante, pois pode se aproveitar a situação para a realização de revisões sobre temas gerais da matemática, dessa forma é importante que o professor não salte os passos de cada resolução, mas que a faça de forma clara, a fim de se retirarem possíveis dúvidas que possa haver sobre os requisitos necessários à realização de cada etapa das atividades propostas.

Recursos didáticos:

Folhas de ofício, calculadora, quadro, pincel, apagador, lápis e borracha.

Referências adicionais

LÍVIO, Mario. **Razão áurea: A história de fi, um número surpreendente**. Rio de Janeiro: Record, 2006.

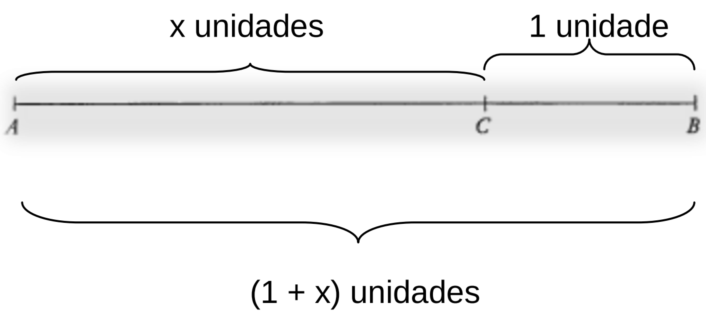
MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, Rio Claro, v. 11, n. 12, p.29-43, 1996. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2316462>.

ANEXOS

ANEXO A – REFERENTE AO TÓPICO 3.1: OBTENÇÃO DO VALOR NUMÉRICO DO NÚMERO DE OURO

O Número de Ouro é um número irracional e seu valor é 1,6180339887... ou arredondando, 1,618. Geometricamente ele é obtido, segundo Lívio (2006, p, 14): “quando se divide um segmento em dois outros segmentos menores, de forma que o segmento mais longo da reta dividida pelo segmento menor seja igual ao segmento completo dividido pelo segmento mais longo”. Visando simplificar esse enunciado, temos a figura seguinte que traz um segmento de reta em que m(AB) = (1 + x) unidades, m(CB) = 1 unidade e m(AC) = x unidades (Figura 13).

Figura 13 – Segmento de reta medindo (1 + x) unidades



Fonte: Lívio (2006, p. 14).

Dessa maneira, podemos obter a sentença que expressa a divisão desse segmento em média e extrema razão (visto no tópico 2.1 desse documento), da seguinte forma:

$$\frac{m(AB)}{m(AC)} = \frac{m(AC)}{m(CB)}$$

Agora, substituindo os valores, teremos:

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}$$

Pela propriedade fundamental das proporções: O produto dos meios é igual ao produto dos extremos (vulgarmente chamada de multiplicação em cruz), teremos o seguinte:

$$x. x = (1+x). 1$$

Resolvendo as multiplicações e aplicando a propriedade distributiva, chegamos a uma equação de segundo grau:

$$x^{2} = 1 + x$$

Organizando adequadamente teremos:

$$x^{2} - x - 1 = 0$$

Aplicando a fórmula resolutiva de Bháskara (que nos diz que as raízes ou soluções x' e x'' são dadas por $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, em que a, b e c são chamados coeficientes dessa equação e $\Delta = b^2 - 4ac$, é chamado de discriminante) e fazendo $\sqrt{5} = 2{,}236$, encontramos como respostas os seguintes resultados:

$$\varphi' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+2{,}236}{2} = 1{,}618 \qquad \text{e,}$$

$$\varphi'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-2{,}236}{2} = \frac{-1{,}236}{2} = -0{,}618$$

Como o nosso estudo envolve medidas, descartamos os valores negativos. Ficamos com o único resultado 1, 618 que é o enigmático “Número de Ouro” (LÍVIO, 2006, p. 98).

ANEXO B – REFERENTE AO TÓPICO 3.4: A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO

Sabemos que a Sequência de Fibonacci é composta pelos números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,..., u_n,..., em que cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores, ou seja, essa sequência é chamada de recursiva, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

Explicando melhor: O primeiro termo somado com o segundo resulta no terceiro. O segundo termo somado com o terceiro resulta no quarto. O terceiro termo somado com o quarto resulta no quinto termo e assim por diante.

Observemos com mais cautela essa sequência. Dividindo cada termo pelo anterior, teremos o seguinte:

Quadro 1 – Relação entre o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci

Razão	Resultado
1/1	1,000000
2/1	2,000000
3/2	1,500000
5/3	1,666666
8/5	1,600000
13/8	1,625000
21/13	1,615385
34/21	1,619048
55/34	1,617647
89/55	1,618182
144/89	1,617978
233/144	1,618056
377 /233	1,618026
610/377	1,618037
987/610	1,618033

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Repare que, à medida que os valores dessa sequência vão aumentando, os resultados da divisão de cada termo pelo anterior vão se aproximando cada vez mais do valor do Fi, por isso a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro estão estreitamente relacionados, como citada anteriormente no tópico 2.3.1. Segundo Lívio (2006, p. 120), “devemos a descoberta desta propriedade ao astrônomo alemão Johannes Kepler, que em meados do ano de 1611, apesar de haver rumores de que um desconhecido a tenha feito antes”.

Mas pode-se perguntar o porquê disso tudo. Haveria alguma explicação matemática que justificasse essa relação ou seria somente uma bela coincidência?

Retomemos as frações infinitas usadas anteriormente:

$$\text{Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Agora, vamos “quebrar” essas frações infinitas em frações menores, ou seja, vamos limitar o número de frações com o objetivo de simplificarmos os cálculos. Posteriormente iremos acrescentando mais frações, diminuindo o erro e aumentando gradativamente a aproximação de cada resultado. Logo teremos:

$$1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = 1.00000$$

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} = 2.00000$$

$$1 + \frac{1}{1 + 1} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} = 1.50000$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} = 1.66666$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}} = 1.60000$$

Após a utilização desse artifício a resposta do nosso questionamento fica mais evidente: Atentemos para as frações resultantes da “quebra” feita anteriormente. O numerador e denominador dessas frações são justamente os números da Sequência de Fibonacci. Logo, está provado que não se trata do acaso, mas do fato de que ambos “partilham” dos mesmos valores em suas estruturas básicas (LÍVIO, 2006).