UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALINE CATARINA DA SILVA

AS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES NO CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

PONTA GROSSA

2019

ALINE CATARINA DA SILVA

AS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES NO CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada para a obtenção do título de mestre na Universidade Estadual de Ponta Grossa, Área de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira.

PONTA GROSSA

2019

Silva, Aline Catarina da
S586 As equações diofantinas lineares no currículo da educação básica / Aline Catarina da Silva. Ponta Grossa, 2019.
70 f.

Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira.

1. Ensino de matemática. 2. Equação diofantina. 3. Educação básica. I. Pereira, Marciano. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Matemática. III.T.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos- CRB9/986

TERMO DE APROVAÇÃO

ALINE CATARINA DA SILVA

"AS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES NO CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA."

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT, Setor de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 26 de Abril de 2019.

Assinatura pelos Membros da Banca:

Prof. Dr. Marciano Pereira - (UEPG) – Presidente

Marli T. Van Kan

Profª. Dra. Marli Terezinha Van Kan - (UEPG)

Prof. Dr. Márcio André Martins - (UNICENTRO)

Aos meus pais, Celina e Antonio, e a meu irmão, Mateus.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, porque ”Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas”.

À minha família, que sempre me incentivou a estudar.

Ao professor Dr. Marciano Pereira, por aceitar ser meu orientador na elaboração deste trabalho, pela sua paciência e dedicação.

Aos professores do PROFMAT, pela contribuição na minha formação acadêmica.

Aos meus amigos, em especial aqueles que tive a alegria de conhecer por meio do PROFMAT, pelos momentos de estudo e companheirismo.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

À Sociedade Brasileira de Matemática, que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão desta pesquisa.

Há três caminhos para o fracasso: não ensinar o que se sabe; não praticar o que se ensina e não perguntar o que se ignora.

(São Beda, 672-735)

RESUMO

As equações diofantinas recebem este nome em homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria. Tais equações estão presentes na modelagem matemática de diversas situações e constituem um tema de estudo no atual currículo de Matemática para a Educação Básica no estado de São Paulo. Com esta perspectiva, propomos a sua extensão para os demais estados da federação. Nesse intuito, apresentamos um material complementar voltado ao trabalho em sala de aula, de modo que o professor possa inserir ou aprofundar este conteúdo. Adotamos como encaminhamento metodológico a revisão da literatura, do marco teórico e a proposição de um guia didático. Como resultado, inferimos sobre a viabilidade do trabalho com as equações diofantinas lineares na Educação Básica, por se tratar de uma abordagem que resgata e ressignifica conteúdos matemáticos estudados em anos distintos, privilegiando sua integração durante a resolução de problemas e contribuindo assim para o desenvolvimento da autonomia e do letramento matemático do aluno.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Equação diofantina. Educação Básica.

ABSTRACT

Diophantine equations are named after the Greek mathematician Diophantus of Alexandria. These equations are present in the mathematical modeling of several situations and are a subject of study in the current curriculum of Mathematics for Basic Education in the state of São Paulo. With this perspective, we propose its extension to the other states of the federation. To this end, we present a complementary material aimed at the work in the classroom, so that the teacher can insert or deepen this content. We adopted as a methodological approach the revision of the literature, the theoretical framework and the proposition of a didactic guide. As a result, we infer about the viability of the work with the linear diophantine equations in Basic Education, because it is an approach that rescues and resignifies mathematical contents studied in different years, privileging their integration during problem solving and thus contributing to the development of autonomy and mathematical literacy of the student.

Keywords: Teaching Mathematics. Diophantine equation. Basic Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As equações lineares já eram encontradas na álgebra dos egípcios antigos, mas foi o matemático grego Diofanto de Alexandria quem se destacou no estudo das equações diofantinas lineares, cujo nome é dado em sua homenagem (BOYER, 1996). Hoje, equações deste tipo estão presentes em inúmeras situações do nosso dia a dia, como na teoria de códigos ópticos utilizados na transmissão de dados nos serviços de telecomunicações (DOMINGOS NETO; MOSCHIM, 2005) e no balanceamento de equações químicas (SILVA, 2002).

Todavia, percebemos que a maioria dos trabalhos acadêmicos que versam sobre as equações diofantinas menciona que não há uma aplicação direta deste conteúdo na Educação Básica. Em contrapartida, na versão atual do currículo de Matemática para a Educação Básica paulista (SÃO PAULO, 2011), existe uma situação de aprendizagem para o 8º ano do Ensino Fundamental relacionada ao conteúdo "resolução de equações do 1º grau", cuja habilidade específica menciona a busca de soluções inteiras de equações lineares com duas incógnitas.

Nesta perspectiva, o objetivo geral deste trabalho é apresentar um guia didático sobre as equações diofantinas lineares para o professor voltado ao trabalho com a Educação Básica, explorando o conteúdo a partir de uma abordagem histórica e contextualizada, abrangendo um pouco da teoria e propondo atividades acompanhadas de suas soluções.

Quanto à metodologia, esta pesquisa se classifica como pesquisa bibliográfica e documental, pesquisa qualitativa e interpretativa com um grupo de professores de Matemática da Educação Básica paulista.

No segundo Capítulo abordamos aspectos históricos das equações diofantinas, definição e alguns exemplos de aplicações no cotidiano. Além disso, à luz da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), vamos discorrer sobre os conteúdos que são considerados prévios a abordagem das equações diofantinas lineares.

No terceiro Capítulo, discutimos sobre a inclusão do estudo das equações diofantinas lineares na Educação Básica, tomando como base o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011) e abordando o Currículo para Excelência da Escócia (EDUCATION SCOTLAND, 2017), que também inclui este tema no nível de ensino equivalente à Educação Básica. Neste mesmo sentido, analisamos alguns livros didáticos e os resultados de uma pesquisa realizada com professores da rede pública paulista.

No quarto Capítulo, trazemos uma revisão da literatura existente sobre as equações diofantinas nos cursos de pós-graduação, tomando como base as dissertações disponíveis nos sites do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

No quinto Capítulo, elaboramos um guia didático para auxiliar o professor no ensino das equações diofantinas lineares na Educação Básica, composto por fundamentação teórica e sugestão de atividades com as respectivas soluções e finalmente, no sexto Capítulo, apresentamos a conclusão do trabalho.

2 EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Neste Capítulo vamos tratar um pouco da história da Matemática, destacando as contribuições de Diofanto de Alexandria na Aritmética e na Álgebra, além de apresentar a definição de equação diofantina linear, alguns contextos em que está inserida e os conteúdos relacionados ao seu ensino de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Desde os primórdios da humanidade, o desenvolvimento da Matemática acompanhou as necessidades do ser humano. Assim, conhecer a história desta ciência proporciona a compreensão de que os conteúdos matemáticos são frutos de uma construção histórica, resultante das necessidades sociais que impulsionaram seu desenvolvimento e também dos desafios enfrentados pelos matemáticos de cada época.

Nessa perspectiva, tomamos como fontes de pesquisa para discorrer sobre a história das equações diofantinas as obras de Boyer (1996) e Eves (2004), que são referências notórias em história da Matemática.

Sabemos que as equações lineares já eram encontradas na Álgebra dos egípcios antigos, uma vez que resultavam de situações práticas como o armazenamento de grãos. Alguns dos problemas presentes nos papiros de *Rhind* (1700 a.C.) e *Moscou* (1850 a.C) podem ser resolvidos com uma equação linear simples, cujo método utilizado ficou conhecido como *regra de falsa posição*, na qual atribuía-se um valor inicial à incógnita e fazia-se a correção para determinar o valor verdadeiro mediante regra de três simples.

No que diz respeito às equações lineares, devemos mencionar Diofanto de Alexandria, considerado por Boyer (1996) o maior algebrista grego, cuja obra rompia com a tradição grega clássica, pois não utilizava a Geometria como principal referência na resolução de problemas. Porém, pouco se sabe da vida de Diofanto de Alexandria.

Nesse sentido, Eves (2004) relata que a maioria dos historiadores tende a situar Diofanto no século III. A *Antologia Grega* era uma coleção de problemas envolvendo equações lineares e equações indeterminadas do primeiro grau, reunidos pelo gramático Metrôdoro, por volta do ano 500. Em um destes problemas encontramos um enigma sobre a idade de Diofanto:

> "Diofanto passou $\frac{1}{6}$ de sua vida como criança, $\frac{1}{12}$ como adolescente e mais $\frac{1}{7}$ na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da idade (final) de seu pai". Com quantos anos Diofanto morreu? (EVES, 2004, p. 225).

Se o enigma estiver correto, Diofanto faleceu com 84 anos de idade, pois, tomando x para representar a sua idade, obtém-se

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x,$$

e, logo,

$$x=84.$$

A principal obra de Diofanto é a *Arithmetica*, composta por aproximadamente 150 problemas, dos quais não se sabe se eram todos de sua autoria ou emprestados de outras coleções. Originalmente a obra compreendia treze livros, mas destes apenas os seis primeiros se conservaram (BOYER, 1996).

Na resolução desses problemas, Diofanto procurava uma solução que atendesse a situação dada. Assim, as equações eram estudadas a partir de exemplos numéricos específicos, sem a preocupação de determinar todas as soluções ou de diferenciar problemas determinados e indeterminados.

Entretanto, Diofanto pretendia obter certa universalidade no método empregado, visto que trabalhava com condições sucessivas que forneciam um único número desconhecido na resolução (BOYER, 1996).

Demonstrando a habilidade matemática do autor, evidencia-se em sua obra um uso estruturado de abreviações para potências de números e símbolos para relações e operações, diferindo da notação algébrica moderna somente pela falta de símbolos específicos. Logo, foi Diofanto quem iniciou a sincopação da álgebra grega, isto é, o uso de alguns símbolos e abreviações para substituir a linguagem usual, utilizada até então.

Tal é a importância desse fato que, mesmo não sendo Diofanto o primeiro a trabalhar com problemas algébricos indeterminados, aqueles em que se devem achar apenas as soluções racionais, tornaram-se conhecidos como problemas diofantinos. Nos dias atuais, o uso desse termo impõe algumas vezes a restrição de que as soluções sejam inteiras.

Diofanto também escreveu outras obras: *Sobre números poligonais*, do qual restou apenas um fragmento, e *Porismas*, que se perdeu por completo.

Segundo Boyer (1996, p. 151), outro matemático que se sobressaiu no estudo das equações lineares foi o indiano Brahmagupta (viveu em 668), visto que ele:

> Foi o primeiro a dar uma solução geral da equação diofantina linear $ax+by=c$, onde a,b e c são inteiros. Para que essa equação tenha soluções inteiras, o máximo divisor comum de a e b deve dividir c; e Brahmagupta sabia que se a e b são primos entre si, todas as soluções da equação são dadas por $x=p+mb$, $y=q-ma$, onde m é um inteiro arbitrário. Ele sugeriu também a equação diofantina quadrática $x^2=1+py^2$, que erradamente tira seu nome de John Pell (1611-1685), mas que aparece pela primeira vez no problema do gado de Arquimedes. A equação de Pell foi resolvida para alguns casos pelo conterrâneo de Brahmagupta, Bhaskara (1114 a cerca de 1185...).

Desse modo, percebemos que Brahmaguta já considerava uma solução particular (p,q) da equação diofantina linear para expressar sua solução geral.

Bhaskara (1114 - 1185) também se destacou na análise indeterminada, com soluções de algumas equações de Pell. Além disso, ele reuniu problemas de Brahmagupta e de outras fontes anteriores em sua obra denominada *Lilavati*, incluindo observações próprias.

Entre os problemas indeterminados apresentados na *Arithmetica*, encontramos exemplos da equação de Pell, onde Diofanto também se contentava com apenas uma solução. No entanto, a teoria completa sobre estas equações só foi elaborada alguns anos mais tarde, pelo matemático italiano Lagrange (1736 - 1813).

As equações de Pell não fazem parte do escopo deste trabalho, mas para o leitor interessado indicamos como uma referência a Dissertação de Marques no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), intitulada *Equações diofantinas lineares e equação de Pell: uma abordagem via frações contínuas* (MARQUES, 2016).

Vários matemáticos traduziram e comentaram a *Arithmetica* de Diofanto. Dentre eles destacou-se o francês Bachet de Méziriac (1581 - 1638) por ter publicado em 1621 a primeira edição do texto em grego, com uma tradução em latim acrescida de notas.

Essa tradução despertou o interesse de Pierre de Fermat (1601? - 1665), considerado o fundador da teoria moderna dos números. O último teorema de Fermat teve origem na tentativa de generalizar um problema da *Arithmetica*: dividir um quadrado em dois quadrados.

Sendo assim, é incontestável a influência de Diofanto de Alexandria na teoria moderna dos números. Hoje, as equações diofantinas estão presentes na modelagem matemática de várias situações que relacionam duas ou mais variáveis.

2.2 DEFINIÇÃO

De acordo com Domingues e Iezzi (2003), as equações polinomiais com coeficientes inteiros, cujas soluções pertencem ao conjunto universo dos números inteiros, são chamadas equações diofantinas, em homenagem a Diofanto de Alexandria.

Neste trabalho de pesquisa vamos explorar as equações diofantinas lineares do tipo

$$ax + by = c,$$

com a, b e c inteiros e a, b não-nulos.

Uma equação diofantina linear pode ter ou não solução. No primeiro caso, existem várias maneiras de se encontrar essa solução, as quais vamos explanar no Capítulo 5, acompanhadas de alguns exemplos de equações diofantinas lineares resolvidas. Antes porém, na Seção 2.3, abordaremos algumas aplicações das equações diofantinas, pois conhecê-las atribui significado ao assunto e incentiva seu estudo.

2.3 APLICAÇÕES

Entendemos por contexto o conjunto de circunstâncias que envolvem um fato e são importantes para o seu entendimento. Portanto, conhecer os contextos em que são aplicadas as equações diofantinas pode contribuir para sua compreensão e auxiliar na resolução de situações-problema, uma vez que existem restrições inerentes a cada caso. Nesse sentido, apresentamos nesta seção algumas aplicações das equações diofantinas lineares.

No Artigo de Domingos Neto e Moschim (2005), encontramos o destaque para as aplicações das equações diofantinas na teoria de códigos ópticos para sistemas ópticos *Code Division Multiple Access* (CDMA), ou Acesso Múltiplo por Divisão de Código, utilizados na transmissão de dados nos serviços de telecomunicações.

Em um diálogo entre Matemática e a Química, Silva (2002) cita em seu Artigo que as equações diofantinas podem ser empregadas na modelagem do balanceamento de equações químicas, uma vez que o número inicial de átomos de cada elemento deve permanecer o mesmo ao final da reação.

Embora as equações diofantinas lineares sejam usualmente objeto de estudo na Teoria dos Números, verificamos sua presença nos diferentes ramos da Matemática. Na Geometria Espacial, temos a relação de Euler, assim denominada em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1800),

$$V+F-A=2,$$

e que é utilizada para calcular o números de vértices (V), faces (F) e arestas (A) de um poliedro convexo, que é uma equação diofantina linear com três incógnitas (SILVA, 2002).

Também podemos relacionar as equações diofantinas lineares com a resolução de sistemas lineares, quando utilizamos o método gráfico para buscar suas soluções, visto que a equação cartesiana da reta no plano possui a mesma forma de uma equação diofantina linear, dada por:

$$ax+by=c,$$

onde geralmente trabalhamos com valores pertencentes ao conjunto dos números reais, devido à noção de continuidade da reta, o que não impede de buscarmos em determinadas situações apenas as soluções com coordenadas inteiras. Do mesmo modo, podemos estabelecer relações entre progressões aritméticas e função afim.

Sendo assim, as equações diofantinas lineares possuem aplicações que se estendem a diversos contextos, dentro e fora da Matemática, que requerem conhecimento prévio sobre sua manipulação. Entretanto, estas equações geralmente são estudadas no Ensino Superior, em disciplinas como Teoria dos Números, nos cursos da área de exatas. Mas frente as aplicações apresentadas anteriormente, cabe questionar se este conteúdo encontra espaço no ensino de Matemática na Educação Básica.

2.4 AUSÊNCIA NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Ao estudarmos as equações diofantinas lineares, notamos a presença de outros conceitos matemáticos que são fundamentais para a sua compreensão, como por exemplo, os relacionados a divisibilidade, como veremos no Capítulo 5.

Deste modo, o estudo deste tema na Educação Básica se apresenta como um conteúdo articulador, que resgata e ressignifica conceitos de Matemática Discreta estudados no Ensino Fundamental e que muitas vezes não são explorados nos anos seguintes, devido a tendência quase que natural de se privilegiar o estudo dos números reais no decorrer deste nível de ensino.

A partir desse pressuposto, consultamos então a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que visa estabelecer aprendizagens mínimas a serem desenvolvidas pelos alunos na educação básica em nível nacional. A versão final da BNCC para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental foi homologada em dezembro de 2017. Já a versão para o Ensino Médio foi homologada um ano depois, em 2018 (BRASIL, 2017).

Nesse documento, a etapa do Ensino Fundamental é dividida em áreas de conhecimento, compostas por componentes curriculares que, assim como as áreas, também possuem competências específicas. A disciplina de Matemática constitui uma destas áreas específicas, sendo dividida em unidades temáticas, que por sua vez são compostas pelos objetos de conhecimento e suas respectivas habilidades.

Ao analisarmos os objetos de conhecimento previstos na BNCC para o ensino da Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, listamos no Quadro 1 alguns dos objetos de conhecimento que podem ser relacionados com o estudo das equações diofantinas lineares.

Quadro 1 - Objetos de conhecimento

Ano	**Objetos de conhecimento**
6	Múltiplos e divisores de um número natural, números primos e compostos.
7	Múltiplos e divisores de um número natural.
7	Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações.
7	Equações polinomiais do 1º grau.
8	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano.
8	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.

Fonte: Adaptado da BNCC (BRASIL, 2017)

Não obstante existam conteúdos considerados prévios ao estudo das equações diofantinas lineares na BNCC, não encontramos neste documento a presença deste assunto como um objeto de conhecimento previsto para o Ensino Fundamental.

Entretanto, tal fato não impede o ensino das equações diofantinas lineares na Educação Básica, pois a BNCC não é em si o currículo pronto, mas vai orientar o desenvolvimento ou reestruturação dos currículos e projetos políticos pedagógicos das escolas.

Com efeito, no Capítulo 3 vamos tratar da presença das equações diofantinas lineares na Educação Básica, tendo como uma das referências o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2011), onde existe citação às equações diofantinas lineares.

3 ENSINO DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

Neste Capítulo, abordamos aspectos relevantes sobre o que vem sendo feito sobre o ensino das equações diofantinas na Educação Básica, apresentando também uma referência nacional e outra internacional onde consta a presença deste conteúdo.

3.1 A EDUCAÇÃO BÁSICA

Atualmente vivemos em meio as constantes transformações sociais provocadas, principalmente, pelos avanços na tecnologia e nos meios de comunicação. Essas mudanças se refletem no modo de vida das pessoas e, consequentemente, a educação escolar não pode permanecer indiferente a elas.

De acordo com o artigo 21, da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), a educação escolar é composta pela Educação Básica (formada pela Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) e pela Educação Superior. A Educação Básica visa formar o aluno para o exercício da cidadania e prepará-lo para o mundo do trabalho (BRASIL, 1996).

Ao refletirmos sobre os objetivos da Educação Básica no contexto social atual, percebemos que o método tradicional de ensino baseado apenas no acúmulo de conhecimento não encontra mais sentido. Logo, se faz necessário repensar as metodologias de ensino utilizadas até então por professores e sistemas educacionais, além de incentivar a busca de novas metodologias que atendam as diferentes demandas da sociedade.

Diante do exposto, no que diz respeito ao ensino da Matemática, podemos destacar várias tendências como a Etnomatemática, a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas, entre outras. Conforme aponta a BNCC, processos de ensino deste tipo, que buscam inovar no ensino da Matemática, "são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático: raciocínio, representação, comunicação e argumentação" (BRASIL, 2017, p. 221).

No contexto escolar, espera-se que o aluno após aprender determinados conteúdos seja capaz de aplicá-los para resolver situações do seu cotidiano e além dele. Assim, quando falamos em letramento matemático, adotamos a definição apresentada pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), ou *Programme for International Student Assessment*, no texto

Letramento Matemático:

> O letramento matemático refere-se à capacidade de identificar e compreender o papel da Matemática no mundo moderno, de tal forma a fazer julgamentos bem-embasados e a utilizar e envolver-se com a Matemática, com o objetivo de atender às necessidades do indivíduo no cumprimento de seu papel de cidadão consciente, crítico e construtivo (PISA, 2010, p.1).

Destarte, destacamos uma competência relevante para atender aos propósitos da Educação Básica: aprender a aprender. Segundo a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE):

> Talvez ainda mais importante que o conteúdo que os alunos levam da escola é o ato de simplesmente "aprender a aprender". Ao longo de suas experiências escolares, os estudantes adotam estratégias de aprendizado que eles então aplicam ao longo de suas vidas. Estratégias de aprendizado são uma parte integral da aquisição de conhecimento e podem ser definidas como os pensamentos e ações que os alunos usam para completar tarefas de aprendizado (OCDE, 2018, p.47).

Desse modo, as equações diofantinas lineares podem ser objeto de estudo na Educação Básica, não com o objetivo de ser apenas mais um conteúdo previsto, mas dentro das possibilidades de cada professor com sua turma, contribuindo para o processo de aprendizagem efetiva, além de promover o letramento matemático e a autonomia dos alunos.

Ademais, seu ensino corrobora com a terceira competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental presente na BNCC, pois estabelece relações entre conceitos e procedimentos de Aritmética e Álgebra (BRASIL, 2017).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental ressaltam que com o decorrer da Educação Básica, é comum a Aritmética quase que desaparecer em função da Álgebra. Todavia, uma das dimensões da Álgebra no Ensino Fundamental é a Aritmética generalizada. Logo, ao propor situações-problema aos alunos, é interessante que os professores valorizem tanto as resoluções "aritméticas" tanto quanto as "algébricas" (BRASIL, 1998).

Nesse entendimento, Pommer (2011) relata em seu Artigo *Transição Aritmética Álgebra: Contribuições da temática das equações diofantinas lineares* como situações de aprendizagem envolvendo equações diofantinas lineares associadas à resolução de problemas podem ser instrumento para transição entre o ensino da Aritmética e da Álgebra na Educação Básica, favorecendo o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Apesar dos aspectos ressaltados anteriormente, a maioria dos currículos de Matemática não menciona as equações diofantinas lineares como conteúdo para a Educação Básica. Na BNCC, por exemplo, encontramos duas habilidades para o 8º ano do Ensino Fundamental que citam a equação linear de 1º grau com duas incógnitas, porém, apenas para associá-la a uma reta no plano cartesiano (BRASIL, 2017).

Em geral, os conteúdos pertencentes à Teoria dos Números ficaram de lado na elaboração dos currículos de Matemática durante o movimento da Matemática Moderna. Groenwald *et al.* (2005?), ao citar Sierra *et al.* (1989), afirma que mesmo após a Matemática Moderna, uma das explicações para a ausência destes conteúdos nos currículos pode estar na dificuldade na compreensão, por parte de professores e alunos, dos conteúdos mais aprofundados desta área.

Contudo, no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2011) para o 8º ano do Ensino Fundamental há uma breve situação de aprendizagem destinada ao assunto das equações diofantinas lineares, que é trabalhado através da resolução de problemas, conforme destacaremos na Seção 3.2.

3.2 CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE SÃO PAULO

Primeiramente, evidenciamos que o enfoque dado ao Currículo de Matemática para a Educação Básica do estado de São Paulo se deve ao fato da pesquisadora ter atuado como docente nesta rede estadual de ensino, estado no qual reside, e reconhecer neste currículo as equações diofantinas lineares, conteúdo este que também foi objeto de estudo nas disciplinas do PROFMAT e motivou a escrita deste trabalho.

Na pesquisa por outras propostas curriculares, notamos que alguns estados ainda não possuíam um currículo próprio disponibilizado na internet. Em compensação, o Paraná foi um dos primeiros estados a adequar suas diretrizes curriculares em conformidade com a BNCC (BRASIL, 2017). Numa análise no *Referencial Curricular do Paraná: princípios, direitos e orientações*, documento normatizado pelo Conselho Estadual de Educação do Paraná em novembro de 2018, não encontramos a presença das equações diofantinas como objeto de conhecimento de Matemática para o Ensino Fundamental (PARANÁ, 2018).

Por sua vez, a versão atual do Currículo de Matemática paulista para os Ensinos

Fundamental II e Médio (SÃO PAULO, 2011) foi proposta em 2008, passando por algumas adequações nos anos seguintes. Além do texto-base com orientações pedagógicas para cada disciplina, o material distribuído às escolas estaduais era composto pelo *Caderno do Aluno* e *Caderno do Professor*.

O Caderno do Aluno é organizado em situações de aprendizagem, que no caso da Matemática, são compostas basicamente por atividades propostas, baseadas no método de resolução de problemas. O Caderno do Professor é semelhante ao do aluno, acrescido de orientações específicas e solução das atividades.

Assim como ocorre na BNCC (BRASIL, 2017), alguns dos pré-requisitos para o estudo das equações diofantinas lineares estão presentes no Currículo do Estado de São Paulo (2011), como o estudo dos múltiplos e divisores.

Uma habilidade prevista no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo para o terceiro bimestre do 8º ano do Ensino Fundamental é: "Saber explorar problemas simples de matemática discreta, buscando soluções inteiras de equações lineares com duas incógnitas". Tal habilidade remete às equações diofantinas lineares (SÃO PAULO, 2011, p. 62).

Deste modo, encontramos as equações diofantinas lineares na situação de aprendizagem quatro do Caderno do Aluno do 8º ano do Ensino Fundamental volume dois, intitulada *Equações com soluções inteiras e suas aplicações*, logo após o estudo dos sistemas de equações do 1º grau.

No início desta proposta é apresentado um texto com situações contextualizadas envolvendo as equações diofantinas lineares, mencionando que estas recebem este nome em homenagem a Diofanto de Alexandria e que podem apresentar uma, mais de uma ou nenhuma solução. Na sequência, constam algumas atividades para resolução mediante o uso de tabelas, de modo a organizar as soluções obtidas por inspeção e identificar padrões de regularidade, concluindo com um breve resumo histórico.

> [...] O estudo aprofundado das equações diofantinas permite-nos encaminhar a discussão para: I. estabelecer um critério de existências de solução que envolva diretamente a noção de máximo divisor comum; II. estabelecer um algoritmo para encontrar as soluções, quando elas existirem (SÃO PAULO, 2014, P. 63).

Embora a proposta apresente o conteúdo de forma intuitiva, com soluções restritas ao domínio dos inteiros positivos, as recomendações do Caderno do Professor destacam que, diante de coeficientes com números muito altos, justifica-se a busca por um algoritmo geral, deixando indicações bibliográficas para o professor nas quais o algoritmo e sua demonstração podem ser encontrados (SÃO PAULO, 2014).

As indicações citadas se encontram no final do Caderno do Professor (2014), numa única lista de sugestões para todos os temas abordados no volume. Dentre elas, algumas claramente estão relacionadas as equações diofantinas e foram extraídas da *Revista do Professor de Matemática*. São estas os artigos de Carneiro (1998), Patrocínio (1986) e Rocque e Pitombeira (1991).

Apesar desses artigos trazerem alguns exemplos, não encontramos nessas indicações um material que contenha um guia didático ou sequências didáticas voltadas para aplicação na educação básica. Logo, fica a cargo do professor pesquisar e selecionar as atividades sobre equações diofantinas lineares que envolvam a aplicação de um algoritmo geral.

Contudo, estados e municípios devem construir ou adequar seus currículos de acordo com as orientações da BNCC, dentro de um prazo de dois anos após a sua homologação, ou seja, até 2020 para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental. Desse modo, até o final de março de 2019, uma segunda versão preliminar do novo currículo paulista aguardava parecer do Conselho Estadual de Educação. Nesta, assim como na BNCC, não encontramos as equações diofantinas como objeto de conhecimento. Tal versão pode ser consultada no site: https://sites.google.com/view/curriculopaulista/curr%C3%ADculo-paulista-vers%C3%A3o-2.

Além do material discutido anteriormente, há nas escolas públicas para apoiar a prática pedagógica o livro didático. Na Seção 3.3, analisaremos alguns livros didáticos de Matemática para o 8º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de averiguar se eles abordam as equações diofantinas lineares e, em caso positivo, de que maneira isso ocorre.

3.3 LIVROS DIDÁTICOS

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é responsável pela distribuição dos livros didáticos nas escolas públicas de Educação Básica, que ocorre a cada três anos, em ciclos alternados dos Ensinos Fundamental I, II e Médio (BRASIL, 2016).

Para tanto, as obras inscritas no PNLD passam por uma avaliação e posterior seleção para elaboração de um Guia dos Livros Didáticos, contendo resenhas e detalhes relevantes de cada obra, com a finalidade de auxiliar os professores na escolha das coleções que mais atendem aos objetivos da sua escola. Assim, em 2016 as escolas receberam o Guia dos Livros Didáticos e amostras das coleções de livros do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental II, aprovadas no PNLD 2017. Foram apresentadas onze coleções de Matemática, conforme consta no Quadro 2:

Quadro 2 - Coleções de livros didáticos ofertadas no PNLD 2017

Título	**Autores**	**Edição**	**Editora/Ano**
Praticando matemática (Edição Renovada)	Andrini, A. e Vasconcelos, M. J.	4	Editora do Brasil, 2015
Descobrindo e aplicando a matemática	Mazzieiro, A. S. e Machado, P. A. F.	2	Dimensão, 2015
Matemática do cotidiano	Bigode, A. J. L.	1	Scipione, 2015
Matemática - Compreensão e prática	Silveira, E.	3	Moderna, 2015
Projeto Teláris - Matemática	Dante, L. R.	2	Ática, 2015
Projeto Araribá - Matemática	Editora Moderna (org.)	1	Moderna, 2014
Matemática - Idéias e desafios	Onaga, D. S. e Mori, I.	18	Saraiva Educação, 2015
Matemática - Bianchini	Bianchini, E.	8	Moderna, 2015
Matemática nos dias de hoje - Na medida certa	Jakubovic, J. e Centurión, M.	1	Leya, 2015
Convergências - Matemática	Chavante, E.	1	SM, 2015
Vontade de saber - Matemática	Souza, J. e Pataro, P. M.	3	FTD, 2015

Fonte: Adaptado de Brasil (2016)

Para cada coleção, o Guia apresenta um sumário dos conteúdos desenvolvidos em cada ano letivo. Observando estes sumários, pudemos notar a presença do estudo de equações lineares com duas incógnitas em três coleções de livros didáticos, o que não significa que o conteúdo não possa estar presente nas demais obras. São elas:

- Matemática - Compreensão e prática (SILVEIRA, 2015);
- Projeto Araribá - Matemática (EDITORA MODERNA (org.), 2015);
- Vontade de saber - Matemática (SOUZA; PATARO, 2015).

Os três livros apresentam características semelhantes entre si. Primeiramente, devemos destacar que o tema é apresentado antes ou no mesmo capítulo destinado ao estudo dos sistemas lineares. Logo, percebemos que os livros didáticos analisados não abordam as equações diofantinas lineares como um conteúdo em si, mas apenas as equações com duas incógnitas como uma introdução aos sistemas de equações lineares.

Em segundo lugar, a definição apresentada para a equação com duas incógnitas menciona que os coeficientes da mesma devem ser reais. Desse modo, é feita a associação da infinidade de soluções da equação com a sequência dos pontos que constituem a reta correspondente a esta equação no plano. Assim, ambos os livros trazem atividades para representação gráfica.

Como consequência de considerar o conjunto dos números reais, nenhum dos livros apresenta condição de existência para as soluções da equação quando seus coeficientes são inteiros, perdendo a oportunidade de resgatar as definições de divisibilidade estudadas em anos anteriores do Ensino Fundamental.

Posto isto, concluímos que falta um material sobre as equações diofantinas lineares voltado à aplicação na Educação Básica, dando suporte as considerações apresentadas no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo.

Sendo assim, para averiguar como o professor trabalha o tema das equações diofantinas lineares com seus alunos, vamos explorar na Seção 3.4 os resultados de uma pesquisa realizada com alguns professores da Educação Básica pública do estado de São Paulo (2011).

3.4 PRÁTICA DO PROFESSOR DA REDE PAULISTA

Como foi exposto anteriormente, as equações diofantinas lineares estão presentes no Currículo de Matemática (2011) da Educação Básica paulista. Deste modo, foi realizada uma pesquisa, mediante um questionário, com alguns professores da rede estadual sobre o ensino das equações diofantinas lineares, conforme o apêndice A.

No mês de outubro de 2018, foram distribuídos 44 questionários para professores de 11 escolas da rede estadual de ensino, localizadas em 5 cidades no interior de São Paulo. Foram recolhidos 18 questionários respondidos, dos quais apenas 12 haviam sido preenchidos afirmativamente o termo de aceite em participar da pesquisa, sendo estes considerados válidos para análise, o que corresponde a aproximadamente 27,3% do total inicial.

Sobre o perfil dos professores que participaram da pesquisa, destacamos que:

- Apenas um deles não tem formação plena em Matemática;
- Aproximadamente 83,4 % fizeram ou estão fazendo algum curso de aperfeiçoamento em Matemática ou na área da educação;
- O tempo médio de atuação em sala de aula é de aproximadamente 15,8 anos;
- Todos afirmaram conhecer o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2011);
- 41,7% dos professores já ministraram aulas referentes às equações diofantinas lineares na Educação Básica.

Cerca de 75% dos professores afirmaram conhecer o conteúdo das equações diofantinas. Quanto ao nível de ensino em que estudaram este tema, a maioria, 55,6%, relatou que foi no Ensino Fundamental, sendo que um terço deles especificou o 8º ano, possivelmente em decorrência do magistério. Outras respostas citadas foram: *no Ensino Médio*, *no Ensino Superior* e *através de pesquisas*.

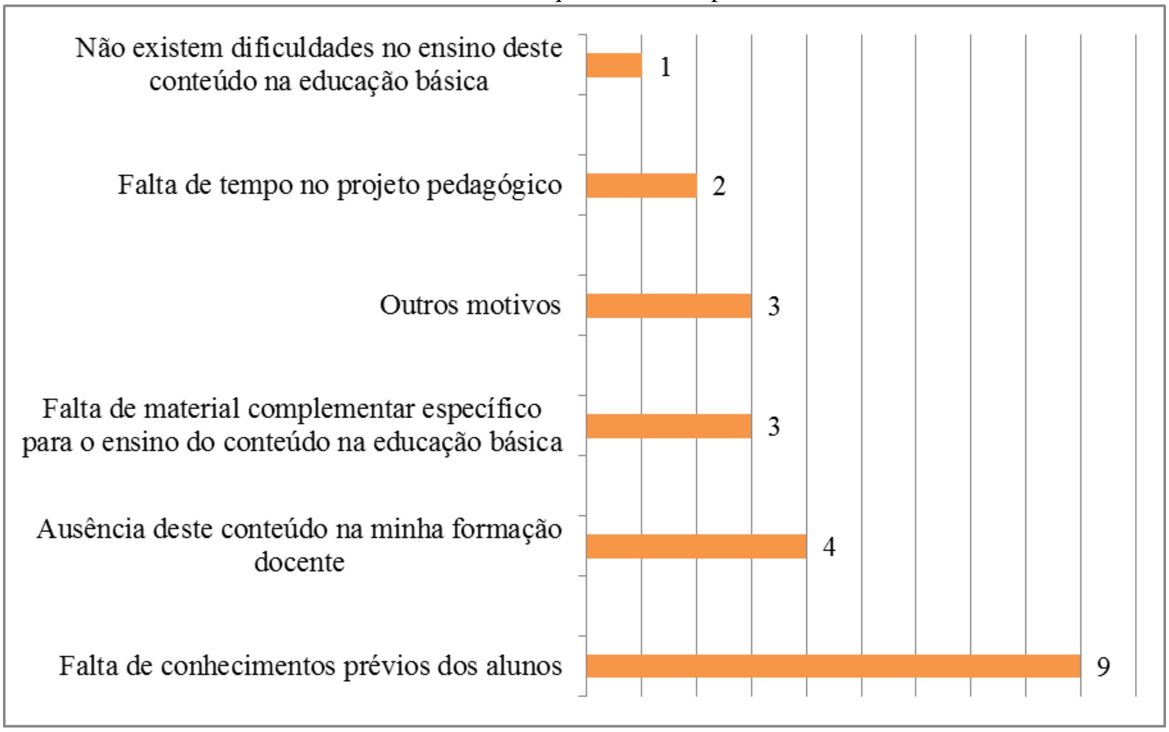
Notamos que os 25% que disseram não conhecer o conteúdo também afirmaram não ter ministrado aulas sobre o conteúdo, sendo que a maioria destes não leciona no 8º ano, o que pode corroborar para o desconhecimento do assunto.

Os professores apontaram como conhecimentos prévios ao estudo das equações diofantinas lineares: as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão, incluindo a tabuada) e operações com números inteiros; conhecimentos básicos de Aritmética e Álgebra (múltiplos, divisores, máximo divisor comum); conceitos de equação e de sistemas de equações lineares.

Quando questionados se seria interessante ensinar as equações diofantinas lineares na Educação Básica, 58,3% dos professores responderam afirmativamente. As justificativas foram diversas, mas destacamos duas delas: *Permite solucionar diversos problemas com duas ou mais variáveis* e *Seria um aprofundamento maior em Aritmética e novo conhecimento para os professores*.

Na questão sobre as possíveis dificuldades no ensino do tema na Educação Básica, os participantes podiam assinalar mais de um item ou apresentar algum outro que não estivesse na lista. Os resultados estão expostos no Gráfico 1, de acordo com a frequência das respostas:

Gráfico 1 - Frequência das respostas



Fonte: A autora

A falta de conhecimentos prévios foi a principal dificuldade apontada pelos professores para o ensino das equações diofantinas lineares na Educação Básica.

Ainda observando o Gráfico 1, vemos que a ausência das equações diofantinas na formação do professor e a falta de material complementar foram dois dos três aspectos mais apontados pelos docentes.

Durante uma apresentação de pôster com os resultados parciais desta pesquisa, um ouvinte sugeriu a pesquisa por outras propostas curriculares para a investigação da inclusão ou não das equações diofantinas lineares como conteúdo curricular. Foi então que conhecemos o Currículo para Excelência (*Curriculum for Excellence*) e, tendo em vista que na educação brasileira pouco se vê das equações diofantinas na Educação Básica, na Seção 3.5 vamos destacar este currículo, que inclui referência ao ensino das equações diofantinas lineares.

3.5 CURRÍCULO PARA EXCELÊNCIA

Ao apresentarmos os resultados parciais desta pesquisa no III Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Sul, realizado em maio de 2018 na Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), em Chapecó-SC, obtivemos como sugestão de um participante pesquisar uma referência curricular internacional para demonstrar a relevância das equações diofantinas lineares na Educação Básica. Foi a partir daí e de conversas com outros professores que encontramos o Currículo para Excelência da Escócia.

A Escócia é uma das nações que integram o Reino Unido. Entretanto, possui uma estrutura educacional própria, para alunos de 3 a 18 anos, denominada como Currículo para Excelência (*Curriculum for Excellence*). Ele é dividido em duas etapas e tem o objetivo de ser flexível para que o aluno possa progredir no seu próprio ritmo ao longo dos níveis de cada etapa do Currículo, de acordo com suas necessidades:

- Ampla educação geral (*Broad general education*): visa proporcionar uma educação completa desde os anos iniciais até a fase sênior, sendo dividida em cinco níveis curriculares (Early, First, Second, Third e Fourth);
- Fase sênior (*Senior phase*): destina-se a jovens entre os 15 e 18 anos, com objetivo de incluir o estudo de qualificações e cursos adequados às suas capacidades e interesses.

A Matemática é uma das oito áreas curriculares compreendidas na Ampla Educação Geral. Todavia, a Alfabetização, o Numeramento e a Saúde e Bem-estar são temas que recebem destaque e são consideradas de responsabilidade de todos os profissionais envolvidos.

O documento Referências Numeracia e Matemática (*Benchmarks Numeracy and Mathematics*) apresenta referências e expectativas de aprendizagem para esta área. Nele, encontramos uma referência relacionada ao ensino das equações diofantinas no terceiro nível curricular (*Third level*) da Ampla Educação Geral (EDUCATION SCOTLAND, 2017, p. 37):

Resolve equações lineares, por exemplo, $ax \pm b = c$ em que a, b e c são números inteiros (*"Solves linear equations, for example, $ax \pm b = c$ where a, b and c are integers"*.

No Terceiro Nível do Currículo para Excelência, os alunos têm aproximadamente a mesma idade dos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental brasileiro, isto é, 13 anos. Embora sejam realidades diferentes, este fato reafirma a possibilidade de ter este conteúdo incluso na Educação Básica.

Tendo em vista os aspectos retratados neste capítulo, buscamos os trabalhos desenvolvidos no meio acadêmico sobre as equações diofantinas. Para isso, no Capítulo

4 apresentaremos os resultados de uma pesquisa realizada em dois sites de divulgação de dissertações.

4 REVISÃO DE LITERATURA

Para investigar mais sobre o ensino e a pesquisa das equações diofantinas, consultamos os sites do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e apresentamos alguns resultados neste Capítulo.

4.1 DISSERTAÇÕES DO PROFMAT

O PROFMAT é um programa de mestrado profissional, strictu sensu, semipresencial em rede nacional, que visa atender prioritariamente os professores da Educação Básica da rede pública de ensino. Nesse sentido, os trabalhos de conclusão de curso devem abranger temas relativos ao currículo de Matemática da Educação Básica. Até a primeira semana de março de 2019 existiam 4361 registros de dissertações no site do PROFMAT, publicadas desde o ano de 2013.

Fizemos então uma pesquisa no site do PROFMAT, de todas as dissertações que traziam no título a palavra "diofantina", tanto no singular como no plural, e as analisamos com o objetivo de verificar qual o enfoque que vem sendo dado a esse tópico. Deste modo, encontramos 29 dissertações, citadas no Quadro 3:

Quadro 3 - Dissertações sobre equações diofantinas

(continua)

Ano da defesa	**Instituição de ensino**	**Autor (a)**	**Título**
2013	UFSJ	RIOS, D. G.	Equações diofantinas lineares na educação básica
2013	UFG	BORGES, F. V. A.	Equações diofantinas lineares em duas incógnitas e suas aplicações
2013	UFAL	SILVA, A. V.	Uso das equações diofantinas lineares no ensino fundamental
2013	UFAL	SANTOS, P. S. A.	Congruência e equações diofantinas: uma proposta para o ensino básico
2013	UFERSA	MELO, F. D.	Uso das matrizes na parametrização das soluções de equações diofantinas lineares
2013	UFMT	CAMPOS, G. D. M.	Equações diofantinas lineares

Quadro 3 - Dissertações sobre equações diofantinas

(continuação)

Ano da defesa	Instituição de ensino	Autor (a)	Título
2014	UEM	VANSAN, A. H.	Equações diofantinas: um projeto para a sala de aula e o uso do Geogebra
2014	UECE	SALES, M. M.	Resolução de problemas de equações diofantinas
2014	UNIFAP	LEITE, K. G.	Equação diofantina linear: aplicações no ensino médio
2014	FURG	SAVÓIS, J. N.	Método para resolver equações diofantinas com coeficientes no conjunto dos números racionais
2014	UFC	NASCIMENTO, N. M.	Equações diofantinas e o método das secantes e tangentes de Fermat
2014	UFPI	LUZ, F. P.	O uso de equações diofantinas lineares na resolução de problemas de preparação olímpica
2014	UNB	RIBEIRO, R.	Equações Diofantinas: uma abordagem para o Ensino Médio
2014	UFPR	PAULA, J. C. C.	Tópicos de aritmética: equações diofantinas
2015	UFSM	CAMPOS, A.	Equações diofantinas lineares: possibilidades didáticas usando a resolução de problemas
2015	UFC	FREITAS, C. W. A.	Equações diofantinas
2015	UECE	ANJOS, A. A.	Equações Diofantinas: Sequência Didática e o Método da Descida Infinita de Fermat
2015	UFMT	PEREIRA JÚNIOR, J.	Frações contínuas e equações diofantinas lineares e não-lineares
2016	UFSJ	MARQUES, B. A.	Equações diofantinas lineares e equação de Pell: uma abordagem via frações contínuas
2016	UFRR	SILVA NETO, A.	Convite às equações diofantinas: uma abordagem para a educação básica
2017	UFBA	DEUS, N. S. P.	Equações diofantinas lineares e o GPS: nova conexão curricular
2017	UAL	BARROS, E. F.	Equações diofantinas não lineares: uma proposta didática para resolução de problemas
2017	UFG	ALVES, L. F.	Aplicações de equações diofantinas e um passeio pelo último teorema de Fermat
2018	IMPA	SOUZA, L. B.	Aproximações diofantinas e a teoria das frações contínua
2018	UFRRJ	OLIVEIRA, A. F. F. P.	Equações diofantinas lineares: uma proposta para as séries finais do ensino fundamental
2018	UFPA	MAIA, L. F.	Equações diofantinas
2018	UFT	VIEIRA, B. M.	Equações diofantinas: uma proposta didática para o 9º ano do ensino fundamental
2018	UTFPR	VOELZ, M. E.	Utilização dos métodos Vieta jumping e descida infinita na solução de equações diofantinas e problemas envolvendo divisibilidade

Quadro 3 - Dissertações sobre equações diofantinas

(conclusão)

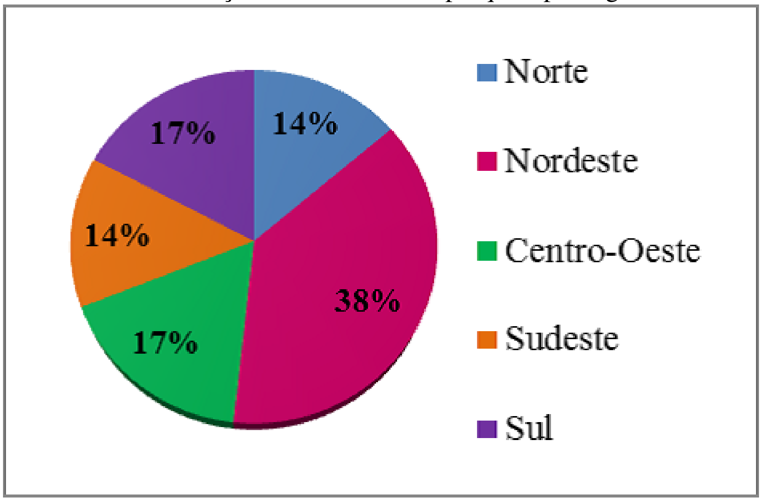
Ano da defesa	**Instituição de ensino**	**Autor (a)**	**Título**
2018	UEPB	SILVA, R. G. da	Congruências e equações diofantinas: algumas aplicações

Fonte: Adaptado do site do PROFMAT
(Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 7 mar. 2019)

Inicialmente, observamos que tais trabalhos foram escritos por acadêmicos de 22 instituições de ensino distintas, que estão espalhadas por todas as regiões do país, evidenciando a relevância do assunto e a preocupação dos pesquisadores em aprimorar seu estudo.

Em termos de trabalhos de pesquisa, a região Nordeste se destaca por abranger a maior parte deles, cerca de 38%, conforme os dados apresentados no Gráfico 2.

Gráfico 2 - Distribuição dos trabalhos de pesquisa por região do Brasil



Fonte: A autora

Após verificar os resumos destes trabalhos do PROFMAT, destacamos que:

- Diferentemente dos demais, o trabalho de pesquisa de Rios (2013) consiste num artigo e o de Paula (2014), num conjunto de atividades resolvidas e comentadas;
- Vansan (2014) e Sales (2014) sugerem atividades mediadas por recursos computacionais, sendo eles o Geogebra e o Pari GP, respectivamente;
- Luz (2014) e Ribeiro (2014) citam que suas dissertações se destinam a alunos em preparação olímpica, onde a primeira delas se refere a alunos ingressantes na licenciatura em Matemática;

- Anjos (2015) considera uma falha no currículo de Matemática a ausência do estudo das equações diofantinas;
- Luz (2014), Campos (2015), Oliveira (2018) e Vieira (2018) utilizam a metodologia da engenharia didática para aplicação de atividades em sala de aula.

Particularmente, Silva (2002), Vansan (2014), Ribeiro (2014), Anjos (2015) e Oliveira (2018) se propõem a apresentar sequências didáticas para o ensino das equações diofantinas lineares na Educação Básica. Porém, nenhum desses autores reconhece este tema como conteúdo curricular.

4.2 BIBLIOTECA DIGITAL BRASILEIRA DE TESES E DISSERTAÇÕES

A Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), desenvolvida e coordenada pelo Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT), tem por objetivo proporcionar maior visibilidade à produção científica nacional, integrando em um único portal os sistemas de informação de teses e dissertações, estimulando assim o registro e a publicação em meio eletrônico.

Na primeira semana de março de 2019 havia neste portal mais de 497 mil trabalhos acadêmicos disponíveis de 106 instituições de ensino. Nele temos as opções de pesquisar os trabalhos por título, autor e assunto. Desta forma, pesquisamos pelos trabalhos que continham a palavra ”diofantina”no título e encontramos 19 registros distintos.

Listamos alguns trabalhos no Quadro 4 e ressaltamos que a Universidade de Brasília (UNB) abrange a maioria deles, dentre os quais Freitas (2013), Vieira (2016) e Chaves (2013) são teses de doutorado, demonstrando que o assunto das diofantinas é objeto de pesquisa em todos os segmentos acadêmicos.

Quadro 4 - Trabalhos na BDTD

Ano da defesa	Instituição de ensino	Autor (a)	Título
2009	UNICAMP	SILVA, F. J. F. da	Equações diofantinas clássicas e aplicações
1994	UNICAMP	Di GIACOMO, S. R.	Equações diofantinas e números de classes
2013	UNB	FREITAS, T. P. de A.	A equação diofantina $v(v+1) = u(u+a)(u+2a)$: uma generalização da equação de Mordell
2017	UNESP	SOUZA, R. S.	Equações diofantinas lineares quadráticas e aplicações
2016	UNB	VIEIRA, V. F. V.	Equações diofantinas envolvendo sequencias de Fibonacci generalizadas
2013	UNB	CHAVES, A. P. de A.	As equações diofantinas envolvendo potências de termos de sequências recorrentes
2012	UFGRS	CAPILHEIRA, B. H.	Equações diofantinas lineares: uma proposta para o ensino médio
2007	PUC-SP	COSTA, E. S. da	As equações diofantinas lineares e o professor de matemática do ensino médio
2016	UNB	KREUTZ, A.	Formas lineares em logarítmos p-ádicos aplicados na resolução de equações diofantinas
2008	PUC-SP	POMMER, W. M.	Equações diofantinas lineares: um desafio motivador para alunos do ensino médio
2006	PUC-SP	OLIVEIRA, S. B. de	As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio
2015	UNESP	SILVA, P. R. da	Tópicos de teoria dos números algébricos e aplicação em reticulados e equações diofantinas

Fonte: Adaptado do site da BDTD
(Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/>. Acesso em 07 mar. 2019)

Dentre os pesquisadores citados no Quadro 4, destacamos em especial Pommer, que já teve um outro trabalho citado anteriormente no Capítulo 3 e publicou vários outros trabalhos envolvendo as equações diofantinas.

Além dos trabalhos indicados no Quadro 4, havia outros sete registros no portal da BDTD que também constavam no banco de dissertações do PROFMAT e já foram mencionados no Quadro 3. Tal fato corrobora a contribuição do programa nas pesquisas científicas em nível nacional, visto que neste caso elas correspondem a aproximadamente 37% dos registros da BDTD. São eles:

- Borges (2013);
- Ribeiro (2014);
- Nascimento (2014);
- Freitas (2015);
- Silva Neto (2016);
- Alves (2017);
- Deus (2017).

Outro aspecto a ser ressaltado é que cinco dissertações presentes na BDTD relacionam as equações diofantinas com o Ensino Médio, sendo uma delas do PROFMAT e outras três de acadêmicos da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Deste modo, com base no banco de dissertações do PROFMAT e no portal da BDTD, concluímos que há um número significativo de trabalhos sobre as equações diofantinas, abordando-as de diferentes maneiras.

Assim sendo, o Capítulo 5 tem por objetivo ser uma fonte de consulta para professores de Matemática, interessados em trabalhar ou aprofundar o tema das equações diofantinas lineares na Educação Básica.

5 GUIA DIDÁTICO

Neste Capítulo elaboramos um pequeno guia didático voltado para o ensino das equações diofantinas lineares na Educação Básica, apresentando alguns conceitos e resultados relevantes para sua resolução e um conjunto de atividades propostas, juntamente com suas soluções.

5.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os números inteiros, critérios de divisibilidade e paridade, múltiplos e divisores são assuntos previstos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental, conforme exposto na Seção 2.4. Apresentaremos nesta Seção uma pequena revisão dos tópicos necessários para a resolução de equações diofantinas lineares. Para isso, consideraremos as obras de Alencar Filho (1981) e Domingues e Iezzi (2003) e, para um estudo mais aprofundado, indicamos a leitura de *Aritmética* de Hefez (2014).

Inicialmente, o conjunto dos números inteiros é representado por

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Ao tratar dos números inteiros, enunciamos uma propriedade que só este conjunto possui e será útil para as demonstrações dos teoremas que seguem nesta Seção.

Princípio da Boa Ordenação: Se S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento. (Dizemos que um subconjunto S de $\mathbb{Z}$ é limitado inferiormente se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \leq x$, para todo $x \in \mathbb{S}$. Diremos que $a \in S$ é um menor elemento de S se $a \leq x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$).

A partir da noção do conjunto $\mathbb{Z}$, consideremos então a e b dois números inteiros. Dizemos que b divide a, ou que a é divisível por b, ou que b é um divisor de a, ou ainda que a é múltiplo de b se existe um número inteiro c tal que $a = bc$. Para indicar que b divide a, usamos a notação $b|a$ e tal relação denomina-se relação de **divisibilidade** em $\mathbb{Z}$.

Exemplo 5.1. *Temos que:*

1. $2|10$*, pois existe* $5 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $10 = 2 \cdot 5$*;*

2. $-3|12$*, pois existe* $-4 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $12 = (-3) \cdot (-4)$*;*

3. $-1|0$*, pois existe* $0 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $0 = (-1) \cdot 0$*.*

O Teorema 5.2 apresenta algumas propriedades da divisibilidade.

Teorema 5.2. *Quaisquer que sejam os inteiros a, b e c tem-se:*

1. $1|0$*,* $1|a$ *e* $a|a$*;*

2. *Se* $a|1$*, então* $a = \pm 1$*;*

3. *Se* $a|b$ *e* $c|d$*, então* $ac|bd$*;*

4. *Se* $a|b$ *e* $b|c$*, então* $a|c$*;*

5. *Se* $a|b$ *e* $b|a$*, então* $a = \pm b$*;*

6. *Se* $a|b$*, com* $b \neq 0$*, então* $|a| \leq |b|$*;*

7. *Se* $a|b$ *e* $a|c$*, então* $a|(bx + cy)$*, para todo* $x, y \in \mathbb{Z}$*.*

Demonstração. 1. Repare que: $0 = a \cdot 0$, $a = 1 \cdot a$, $a = a \cdot 1$.

2. Como $a|1$, então $1 = aq$, com $q \in \mathbb{Z}$, o que implica $a = 1$ e $q = 1$, ou $a = -1$ e $q = -1$. Logo, $a = \pm 1$.

3. Como $a|b$ e $c|d$ existem $q, q_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $b = aq$ e $d = cq_1$. Logo, $bd = (aq)(cq_1) = (ac)(qq_1)$. Portanto, $ac|bd$.

4. Como $a|b$ e $b|c$ existem $q, q_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $b = aq$ e $c = bq_1$. Logo, $c = (aq)q_1 = a(qq_1)$. Portanto, $a|c$.

5. Como $a|b$, então $b = aq$, com $q \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, de $b|a$, temos $a = bq_1$, com $q_1 \in \mathbb{Z}$. Portanto, $a = a(qq_1)$ e, logo, $qq_1 = 1$. Pelo item (2), segue que $q = 1$ e $q_1 = 1$, ou $q = -1$ e $q_1 = -1$. Donde $a = \pm b$.

6. Como $a|b$ e $b \neq 0$, então $b = aq$, com $0 \neq q \in \mathbb{Z}$. Assim, $|b| = |a||q|$. Mas como $q \neq 0$, segue-se que $|q| \geq 1$ e, portanto, $|b| \geq |a|$.

7. Como $a|b$ e $a|c$ existem inteiros q e q_1 tais que $b = aq$ e $c = aq_1$. Portanto, quaisquer que sejam os inteiros x e y, temos

$$bx + cy = (aq)x + (aq_1)y = a(qx + q_1y),$$

ou seja, $a|(bx + cy)$.

Podemos generalizar esta propriedade da seguintes forma: se $a|b_k$, para $k = 1,2,3,...,n$, então quaisquer que sejam os inteiros $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ temos

$$a|(b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n).$$

□

Quando não existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$, dizemos que a não é divisível por b e indicamos por $b \nmid a$. Nesse caso, o Algoritmo da Divisão Euclidiana (Teorema 5.3) estabelece uma divisão com resto r:

Teorema 5.3. *(Divisão Euclidiana) Sejam a e b dois inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = b \cdot q + r,$$

com $0 \leq r < |b|$.

Demonstração. Considere o conjunto

$$S = \{x = a - by; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Existência: Pela Propriedade Arquimediana (Ver anexo A), existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-b) > -a$, logo, $a - nb > 0$, o que mostra que S é nao vazio. O conjunto S é não limitado inferiormente por 0, logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que S possui um menor elemento r. Suponhamos então que $r = a - bq$. Sabemos que $r \geq 0$. Vamos mostrar que $r < |b|$. Suponhamos por por absurdo que $r \geq |b|$. Portanto, existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, logo $0 \leq s < r$. Mas isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = a - (q + -1)b \in S$, com $s < r$.
Unicidade: Suponha que $a = bq + r = bq' + r'$, onde $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$. Assim temos que $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$. Logo, $|r' - r| < |b|$. Por outro lado,

$b(q-q') = r'-r$, o que implica que

$$|b||q-q'| = |r'-r| < |b|,$$

o que só é possível se $q = q'$ e, consequentemente, $r = r'$.

□

Exemplo 5.4. (UNCISAL/2016) Divisão euclidiana e o teorema fundamental da aritmética

A divisão euclidiana, ou divisão com resto, é uma das quatro operações que toda criança aprende na escola. Sua formulação precisa é: dados a, b inteiro e diferente de 0, existem q e r pertencentes a $\mathbb{Z}$, com $0 \leq r < |b|$ e $a = bq + r$. Tais q e r estão unicamente determinados e são chamados o quociente e o resto da divisão de a por b, respectivamente.

Disponível em: $< http : //www.mat.puc-rio.br/\tilde{}nicolau/papers/mersenne/node4.html >$.
Acesso em: 25 out. 2015 (adaptado).

Quais são, respectivamente, o resto e o quociente da divisão de –30 por –4?

(A) –2 e 7.

(B) 0 e 7.

(C) 2 e 8.

(D) 7 e –2.

(E) 8 e 2.

Solução: Pelo Teorema 5.3 temos que

$$-30 = -4q + r,$$

com $0 \leq r < |-4|$. Deste modo, das alternativas propostas a correta é a C, pois, apenas $r = 2$ atende a definição da Divisão Euclidiana de que $0 \leq r < |-4|$, ou seja, $-30 = -4 \cdot 8 + 2$.

Exemplo 5.5. (CADAR; DUTENHEFNER, 2015, p. 29) Encontre o número natural que ao ser dividido por 7 resulta um quociente 4 e resto maior possível.

Solução: Seja n o número natural procurado. Para obter o maior resto possível, segue pelo Teorema 5.3 que

$$0 \leq r < |7| \Rightarrow r = 6.$$

Daí, $n = 7 \cdot 4 + 6$, ou seja, $n = 34$. Logo, encontramos como resposta o número natural 34.

Exemplo 5.6. (ALENCAR FILHO, 1981, p. 82) Achar os inteiros positivos menores que 150 e que divididos por 39 deixam um resto igual ao quociente.

Solução: Seja x o número inteiro procurado. Pelo Teorema 5.3, temos que $a = 39q + r$. Mas como devemos ter $r = q$, então

$$a = 39q + q \Rightarrow a = 40q.$$

Atribuindo números inteiros positivos para q e considerando que queremos como resultado os inteiros positivos menores que 150, obtemos como soluções os valores 40, 80 e 120.

Definição 5.7. *(Máximo divisor comum - mdc) Sejam a e b dois números inteiros não conjuntamente nulos. Chama-se máximo divisor comum de a e b o inteiro positivo $d(d \ > 0)$ que satisfaz as condições:*

(i) $d|a$ *e* $d|b$*;*

(ii) *se* $c|a$ *e* $c|b$*, então* $c \leq d$*.*

Observação 5.8. *Temos que*

$$mdc(12,18) = mdc(12,-18) = mdc(-12,18) = mdc(-12,-18) = 6.$$

Teorema 5.9. *Se a e b são dois inteiros não conjuntamente nulos, então existe e é único o $mdc(a,b)$. Além disso, existem inteiros x e y tais que*

$$mdc(a,b) = ax + by,$$

ou seja, $mdc(a,b)$ é uma combinação linear de a e b.

Demonstração. Seja S o conjunto de todos os inteiros positivos da forma $au + bv$, com $u, v \in \mathbb{Z}$, isto é,

$$= \{au + bv : au + bv > 0 \text{ e } u, v \in \mathbb{Z}\}.$$

Esse conjunto S é não vazio, pois, se $a \neq 0$, um dos inteiros

$$a = a \cdot 1 + b \cdot 0 \quad \text{ou} \quad -a = a \cdot (-1) + b \cdot 0,$$

é positivo e pertence a S. Logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, existe e é único o elemento mínimo d de S, tal que $min S = d > 0$. E, pela definição de S, existem inteiros x e y tais que $d = ax + by$.

Agora, vamos mostrar que $d = mdc(a,b)$. Pelo Algoritmo de Euclides, temos

$$a = dq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < d,$$

que implica em

$$r = a - dq = a - (ax + by)q = a(1 - qx) + b(-qy),$$

ou seja, o resto r é uma combinação linear de a e b. Como $0 \leq r < d$ e $d > 0$ é o elemento mínimo de S, segue-se que $r = 0$ e $a = dq$, isto é, $d|a$.

De modo análogo, concluímos que $d|b$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Finalmente, se c é um divisor comum positivo qualquer de a e b ($c|a$ e $c|b$, $c > 0$), então

$$c|(ax + by) \Rightarrow c|d \Rightarrow c \leq d,$$

isto é, d é o maior divisor comum positivo de a e b, ou seja,

$$mdc(a,b) = d = ax + by, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

□

Exemplo 5.10. Sejam os inteiros $a = 4$ e $b = 20$. Temos que existem inteiros $x = -4$ e $y = 1$ tais que

$$mdc(4,20) = 4 = 4 \cdot (-4) + 20 \cdot 1.$$

É importante ressaltar que existem infinitos pares de inteiros $x, y \in \mathbb{Z}$ para os quais $mdc(a,b) = ax + by$. Cada uma dessas relações é chamada de **identidade de Bezout**, em homenagem ao matemático francês Étienne Bézout (1730-1783).

A partir da definição de equação diofantina linear, apresentada no Capítulo 2, e dos conceitos de divisibilidade e de Divisão Euclidiana, na sequência temos a Proposição 5.11, que aponta uma condição necessária e suficiente para a existência da solução de uma equação diofantina (DOMINGUES; IEZZI, 2003). Já a Proposição 5.12 afirma que, se uma equação diofantina linear possui solução, na verdade ela tem infinitas soluções inteiras e podemos determinar seu conjunto solução a partir uma solução particular.

Proposição 5.11. *Uma equação diofantina linear $ax+by=c$ tem solução se, e somente se, $d=mdc(a,b)$ é um divisor de c.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Se (x_0,y_0) é uma solução, vale a igualdade

$$ax_0+by_0=c.$$

Como $d|a$ e $d|b$, então $d|c$ (transitividade).

($\Longleftarrow$) Como $d=mdc(a,b)$, então, devido à propriedade do máximo divisor comum, podem-se determinar x_0, $y_0\in\mathbb{Z}$ tais que $ax_0+by_0=d$. Mas, por hipótese $d|c$ e, portanto, $c=dq$ para algum inteiro q. De onde,

$$c=dq=(ax_0+by_0)q=a(x_0q)+b(y_0q),$$

o que mostra que o par (x_0q,y_0q) é solução da equação considerada.

□

Proposição 5.12. *Se a equação diofantina $ax+by=c$ tem uma solução (x_0,y_0), então têm infinitas soluções e o conjunto destas é:*

$$S=\left\{\left(x_0+\frac{b}{d}t,y_0-\frac{a}{d}t\right)|\,t\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Demonstração. Mostremos primeiro que todo par $(x_0+\frac{b}{d}t,y_0-\frac{a}{d}t)$ é solução da equação considerada. De fato,

$$a\left(x_0+\frac{b}{d}t\right)+b\left(y_0-\frac{a}{d}t\right)=ax_0+by_0+\left[\frac{(ab-ba)}{d}\right]t=ax_0+by_0=c,$$

pois (x_0,y_0) é solução por hipótese.

Por outro lado, seja (x',y') uma solução genérica da equação. Ou seja,

$$ax'+by'=c=ax_0+by_0.$$

Daí,

$$a(x'-x_0)=b(y_0-y').$$

Mas, como d é divisor de a e b, então $a = dr$ e $b = ds$, para convenientes inteiros r e s, primos entre si. Logo,

$$dr(x' - x_0) = ds(y_0 - y'),$$

e, portanto,

$$r(x' - x_0) = s(y_0 - y').$$

Essa igualdade mostra que r divide $s(y_0 - y')$. Mas como r e s são primos entre si, então r divide $y_0 - y'$ (Lema de Euclides, ver anexo A). Logo

$$y_0 - y' = rt,$$

para algum $t \in \mathbb{Z}$. Levando-se em conta que $r = \frac{a}{d}$, então

$$y' = y_0 - \frac{a}{d}t.$$

Portanto, em consequência,

$$r(x' - x_0) = s(y_0 - y') = srt,$$

obtém-se:

$$x' = x_0 + \frac{b}{d}t.$$

$\square$

Em alguns casos, podemos encontrar as soluções de uma equação diofantina linear por inspeção, isto é, por tentativa e erro. Mas uma maneira eficaz para resolução envolve as proposições anteriores e o **Algoritmo de Euclides**, utilizado para determinar o *mdc* entre os coeficientes da equação.

O Algoritmo de Euclides consiste em aplicar divisões euclidianas sucessivas para determinar o *mdc*, de modo que podemos escrevê-lo como soma de múltiplos. Isso é possível pois o Teorema 5.3 garante a unicidade desses resultados. O processo consiste em dividir o maior número pelo menor, e na sequência fazer divisões sucessivas do último divisor pelo último resto, até obtermos uma divisão exata.

Teorema 5.13. *(Algoritmo de Euclides) Dados dois inteiros positivos a e b, considere as* *divisões sucessivas, onde q e r são, respectivamente, quocientes e restos:*

$$\begin{aligned}
a &= q_0 b + r_0, & 0 \leq r_0 < b,\\
b &= q_1 r_0 + r_1, & 0 \leq r_1 < r_0,\\
r_0 &= q_2 r_1 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1,\\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2,\\
&\dots & \dots\\
r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k, & 0 \leq r_k < r_{k-1},\\
r_{k-1} &= q_{k+1} r_k.
\end{aligned}$$

Então,

$$mdc(a,b) = r_k,$$

ou seja, é o último resto não nulo das divisões sucessivas.

Essas divisões sucessivas são finitas, pois do Algoritmo da Divisão Euclidiana temos que $b > r_0 > r_1 > r_2 > \ldots \geq 0$. Logo, se a sequência de restos não acabasse, em algum momento haveria um resto negativo, o que é um absurdo.

É comum a aplicação do Algoritmo de Euclides mediante uso de um diagrama, de modo que para calcular o $mdc(a,b)$, temos o seguinte dispositivo prático:

	q_1	q_2	...	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	...	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3	...	r_n		

onde r_n é o $mdc(a,b)$.

Para a demonstração do resultado do Algoritmo de Euclides, é necessário um lema inicial:

Lema 5.14. *Sejam a, b inteiros positivos e $t \in \mathbb{Z}$. Então,*

$$mdc(a,b) = mdc(a, b+at) \quad e \quad mdc(a,b) = mdc(a+bt, b).$$

Demonstração. Vamos provar que $mdc(a,b) = mdc(a,b+at)$. Sejam

$$d = mdc(a,b) \quad \text{e} \quad d' = mdc(a,b+at).$$

Partindo de $d = mdc(a,b)$, temos que:

$$d|a \quad \text{e} \quad d|b \quad \Rightarrow \quad d|a,\ d|at \text{ e } d|b \quad \Rightarrow \quad d|a \quad \text{e} \quad d|b+at.$$

Assim, d é um divisor comum de a e $b+at$, e como d' é o maior divisor comum, temos então $d' \geq d$.

Por outro lado, partindo de $d' = mdc(a,b+at)$, tem-se:

$$d'|a \text{ e } d'|b+at \quad \Rightarrow \quad d'|a,\ d'|at \text{ e } d'|b+at \quad \Rightarrow \quad d'|a \text{ e } d'|b+at-at \quad \Rightarrow \quad d'|a \text{ e } d'|b.$$

Assim, d' é um divisor comum de a e b, e como d é o maior divisor comum, temos $d \geq d'$. Ora, já provamos que $d' \geq d$, de modo que $d = d'$, como queríamos. A outra identidade se demonstra de forma análoga.

□

Com esse lema em mãos, podemos agora demonstrar o Algoritmo de Euclides:

Demonstração. (Demonstração do Algoritmo de Euclides) Pelo lema anterior e lembrando que $r_0 = a - q_0 b$, tem-se

$$mdc(a,b) = mdc(a - q_0 b, b) = mdc(r_0, b) \Longrightarrow mdc(a,b) = mdc(r_0, b).$$

Novamente pelo lema e como $r_1 = b - q_1 r_0$, segue que

$$mdc(b, r_0) = mdc(b - q_1 r_0, r_0) = mdc(r_1, r_0) \Longrightarrow mdc(b, r_0) = mdc(r_0, r_1).$$

Fazendo isso sucessivamente, obtemos

$$mdc(a,b) = mdc(b,r_0) = mdc(r_0,r_1) = mdc(r_1,r_2) = \ldots = mdc(r_{k-2},r_{k-1}) = mdc(r_{k-1},r_k),$$

mas como $r_{k-1} = q_{k+1} r_k$, segue que $mdc(r_{k-1}, r_k) = r_k$. Então, temos que $mdc(a,b) = r_k$, conforme queríamos demonstrar. □

Esse algoritmo tem grande importância prática, pois além de calcular $mdc(a,b)$, ele permite obter o $mdc(a,b)$ como combinação linear dos inteiros a e b. Então vamos ilustrar esses cálculos nos próximos três exemplos.

A seguir no exemplo 5.15 iremos calcular o *mdc* pelo Algoritmo de Euclides. Por sua vez, no exemplo 5.16, além de calcular o *mdc*, vamos escrevê-lo como uma combinação linear e, por fim, no exemplo 5.17, usaremos este dispositivo prático para obter uma solução particular de uma equação diofantina.

Exemplo 5.15. *Calcular o* $mdc(15,4)$.

Pelo Algoritmo de Euclides,

	3	*1*	*3*
15	*4*	*3*	*1*
3	*1*	*0*	

Logo, $mdc(15,4) = 1$.

Exemplo 5.16. *Encontrar o* $mdc(904,856)$ *pelo Algoritmo de Euclides e obter a sua expressão como combinação linear de 904 e 856.*

Pelo algoritmo de Euclides,

	1	*17*	*1*	*5*
904	*856*	*48*	*40*	*8*
48	*40*	*8*	*0*	

Logo, $mdc(904,856) = 8$.

Sua expressão como combinação linear de 904 e 856 pode ser obtida reescrevendo as divisões

$$904 = 1 \cdot 856 + 48 \tag{1}$$

$$856 = 17 \cdot 48 + 40 \tag{2}$$

$$48 = 1 \cdot 40 + 8 \tag{3}$$

$$40 = 5 \cdot 8 + 0, \tag{4}$$

isolando os restos nas divisões euclidianas (1), (2) e (3):

$$904 = 1 \cdot 856 + 48 \iff 48 = 904 - 1 \cdot 856$$

$$856 = 17 \cdot 48 + 40 \iff 40 = 856 - 17 \cdot 48$$

$$48 = 1 \cdot 40 + 8 \iff 8 = 48 - 1 \cdot 40,$$

e fazendo as substituições sucessivas como segue:

$$8 = 48 - 1 \cdot 40 = 48 - 1 \cdot (856 - 17 \cdot 48) = (-1) \cdot 856 + 18 \cdot 48 =$$

$$= (-1) \cdot 856 + 18 \cdot (904 - 1 \cdot 856) = (-19) \cdot 856 + 18 \cdot 904.$$

Portanto, $8 = mdc(904, 856) = 904x + 856y$*, com* $x = 18$ *e* $y = -19$.

Exemplo 5.17. *Resolver a equação diofantina linear*

$$15x + 4y = 7. \tag{5}$$

Do exemplo 5.15 sabemos que $mdc(15,4) = 1$. *Então, como* $mdc(15,4)|7$*, pela Proposição 5.11 concluímos que a equação (5) possui solução. Considerando as divisões euclidianas, devemos isolar os restos diferentes de zero:*

$$15 = 3 \cdot 4 + 3 \iff 3 = 15 - 3 \cdot 4 \tag{6}$$

$$4 = 1 \cdot 3 + 1 \iff 1 = 4 - 1 \cdot 3. \tag{7}$$

Agora, substituindo (6) em (7) escrevemos $mdc(15,4)$ *como soma de múltiplos de 15 e 4:*

$$1 = 4 - 1.(15 - 3 \cdot 4) = 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 15 + 4 \cdot 3 = 15 \cdot (-1) + 4 \cdot 4. \tag{8}$$

Multiplicando (8) por 7, obtemos:

$$7 = 15 \cdot (-7) + 4 \cdot 28. \tag{9}$$

Logo, $x_0 = -7$ *e* $y_0 = 28$ *são soluções particulares da equação inicial e, pela Proposição 5.12, sua solução geral é dada por:*

$$S = \{(-7 + 4t, 28 - 15t) \,|\, t \in \mathbb{Z}\}.$$

Observamos que num caso mais geral, em que os coeficientes da equação diofantina não pertencem aos inteiros (os coeficientes são racionais), basta que, inicialmente, encontremos seus múltiplos inteiros. A esse respeito, Savóis (2014) apresenta em sua Dissertação um método para resolver equações diofantinas com coeficientes no conjunto dos números racionais.

Deste modo, na Seção 5.2 apresentaremos uma proposta de atividades direcionadas ao 8º ano do Ensino Fundamental e anos sequentes da Educação Básica.

5.2 ATIVIDADES PROPOSTAS

Como nosso objetivo não se concentra em estabelecer sequências didáticas para o ensino das equações diofantinas lineares na Educação Básica, mas fornecer um material de consulta para o professor, agrupamos as atividades propostas em três níveis crescentes de dificuldade como sugestão de estudo.

Assim, no nível 1 encontram-se atividades que envolvem conceitos mais simples, destinadas para um contato inicial com o assunto. No nível 2, estão atividades que podem ser aplicadas nos anos finais do Ensino Fundamental. Por fim, no nível 3, estão atividades que envolvem conceitos de outras áreas do conhecimento, indicadas então para o 9º ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A contextualização no ensino da Matemática tem por objetivo despertar interesse do aluno e auxiliar na sua aprendizagem. Ao contextualizar um conteúdo, vale lembrar que nem sempre um contexto que é interessante para um aluno, é para os demais. Podemos partir de situações do dia a dia dos alunos, resgatando seus conhecimentos prévios, e valorizando também aqueles contextos que não são facilmente perceptíveis no cotidiano, mas nem por isso se configuram menos relevantes.

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (BRASIL, 1998, p. 36).

No que se refere aos contextos das situações-problema, julgamos pertinente acrescentar junto à algumas atividades observações necessárias para auxiliar na sua compreensão do seu contexto e resolução. As soluções podem ser encontradas na Seção 5.3.

5.2.1 NÍVEL 1

Atividade 1. *(SOUZA; PATARO, 2015, p. 141) O triplo de um número natural mais outro é igual a 12.*

(a) Quais são esses números? Escreva-os na forma de pares ordenados.

(b) Represente os pares ordenados que você escreveu em um plano cartesiano.

Atividade 2. *Mahavira foi um matemático hindu que por volta de 850 e escreveu sobre matemática elementar.*

Determine a menor das respostas admissíveis para o seguinte problema indeterminado de Mahavira: "Nas cercanias claras e refrescantes de uma floresta plena de árvores com seus galhos curvados pelo peso de flores e frutas, árvores como limoeiros, bananeiras, arecas, jaqueiras, mangueiras e tamareiras, cercanias cujas várias partes se acham impregnadas pelo vozerio de papagaios e cucos vindos de junto aos mananciais onde as abelhas fazem revoadas em torno das flores de lótus; nessas cercanias chegou alegremente um grupo de viageiros. E lá havia 63 montes de bananas numericamente iguais e sete dessas frutas e sendo todas distribuídas igualmente entre os 23 viageiros não houve resto. Diga-me qual a medida numérica de um monte de bananas." (EVES, 2004, p. 173).

5.2.2 NÍVEL 2

Atividade 3. *(DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 52) O valor da entrada de um cinema é R$ 8,00 e da meia entrada R$ 5,00. Qual é o menor número de pessoas que pode assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de R$ 500,00? (Em tempo: a capacidade desse cinema é suficiente para esse número de pessoas.)*

Atividade 4. *(BARBOSA; FEITOSA, 2017, p. 30) Usando os fatores comuns*

Suponha que desejamos encontrar todos os inteiros não-negativos x e y que satisfazem a equação

$$7x + 11y = 154$$

Se usarmos apenas que $7x \leq 154$ *implica* $x \leq 22$ *e testarmos as possibilidades, faremos 23 testes de casos! Por outro lado, podemos reescrever a equação como*

$$11y = 154 - 7x = 7(22 - x).$$

Veja que 11 divide $7(22 - x)$*, mas não possui fatores em comum com o 7. Consequentemente 11 é um divisor de* $22 - x$*. Como* $22 - x \leq 22$*, basta testar* $x = 0$*,* $x = 11$ *ou* $x = 22$ *para encontrarmos as três soluções* $(x, y) = (0, 14), (11, 7)$ *ou* $(22, 0)$ *com apenas três testes de casos.*

(a) Encontre todos os pares (m,n) de inteiros não negativos que satisfazem a equação

$$5m + 8n = 120.$$

Atividade 5. *(ANJOS, 2015, p. 53)(UFC–CE 2004) Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices; encontre o número de faces triangulares desse poliedro.*

(A) 12

(B) 11

(C) 10

(D) 9

(E) 8

Atividade 6. *(SAVÓIS, 2014, p. 69) Em uma loja de roupas e sapatos o imposto que incide em cada mercadoria é diferente. Sobre o item roupa (R) é cobrado imposto de 35% e sobre os produtos do grupo sapatos (S) a carga tributária total é de 30% sobre o total vendido. Sabendo que em um certo período de tempo esta loja pagou R$ 5750,00 de imposto calcule o valor máximo e o valor mínimo de vendas desta loja supondo que exista roupas e sapatos de qualquer valor.*

Atividade 7. *(VANSAN, 2014, p. 58) Apenas com a utilização de dois relógios que só dão intervalos de tempo de 5 e de 11 minutos como podemos cozinhar um ovo durante 3 minutos?*

5.2.3 NÍVEL 3

Para as atividades 8 e 9.

A estequiometria é o ramo da química que estuda as quantidades envolvidas de cada substância em uma equação química. Os cálculos estequiométricos baseiam-se em três leis que definem as reações químicas: lei de conservação das massas; lei das proporções definidas e lei da proporção atômica. Deste modo, dizemos que uma equação química está balanceada quando a quantidade total de átomos de cada elemento no primeiro membro é igual ao do segundo membro, porém, os coeficientes estequiométricos devem ser os menores números inteiros positivos possíveis (SILVA *et al.*, 2016).

Atividade 8. *(PUC - RJ) O óxido de alumínio* (Al_2O_3) *é utilizado como antiácido. A reação que ocorre no estômago é:*

$$xAl_2O_3 + yHCl \rightarrow zAlCl_3 + wH_2O.$$

Os coeficientes x, y, z e w são, respectivamente:

(A) 1, 2, 3 e 6;

(B) 1, 6, 2 e 3;

(C) 2, 3, 1 e 6;

(D) 2, 4, 4 e 3;

(E) 4, 2, 1 e 6.

Atividade 9. *(UFRGS 2017) Airbags são hoje em dia um acessório de segurança indispensável nos automóveis. A reação que ocorre quando um airbag infla é:*

$$NaN_3(s) \rightarrow N_2(g) + Na(s).$$

Quando se acertam os coeficientes estequiométricos, usando o menor conjunto adequado de coeficientes inteiros, a soma dos coeficientes é:

(A) 3

(B) 5

(C) 7

(D) 8

(E) 9

Atividade 10. *(SAVÓIS, 2014, p. 89) Seja a P.A. (4,7,10,13,...). Encontre a equação diofantina correspondente a esta P.A., calcule sua solução geral, e construa o gráfico discreto que representa esta sequência e equação simultaneamente.*

Atividade 11. *(CASTRO, 2013, p. 59) Sejam os pontos* $P = (-4, 11)$ *e* $Q = (16, -1)$. *Determine todos os pontos cujas coordenadas são números inteiros positivos e pertencem ao segmento PQ.*

5.3 SOLUÇÕES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Para cada atividade proposta, procuramos apresentar mais de um modo de resolvê-las, o que não esgota a possibilidade da existência de outras maneiras.

Resolução 1. *Considerando x e y dois números naturais distintos, podemos representar a situação dada no enunciado pela equação diofantina linear:*

$$3x+y=12. \tag{10}$$

No item (a), isolamos uma das variáveis de (10) e obtemos $(x,12-3x)$ *ou* $(4-\frac{y}{3},y)$*, de modo que, para determinar os pares ordenados procurados, basta atribuir valores para a variável escolhida.*

Como $x,y\in\mathbb{N}$*, segue que* $(x,12-3x)\in\mathbb{N}$.

Então, temos que

$$12-3x\geq 0 \iff 3x\leq 12 \iff x\leq 4$$

logo, $0\leq x\leq 4$.

Sendo assim, obtemos os resultados apresentados na Tabela 1:

Tabela 1: Soluções

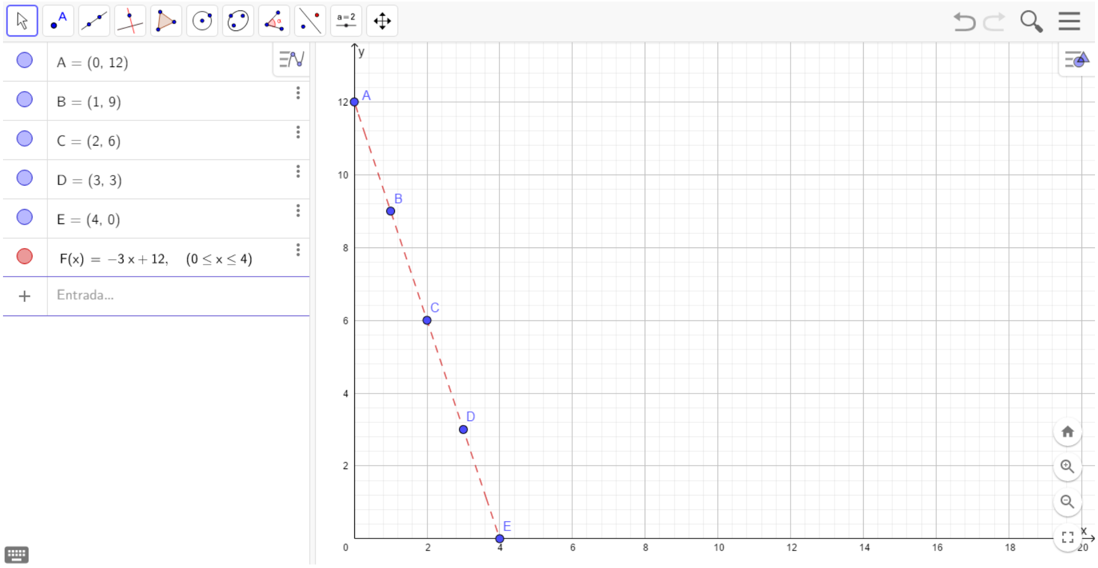
x	$y=12-3x$
0	12
1	9
2	6
3	3
4	0

Fonte: A autora

Concluímos que os pares ordenados são: $(0,12)$, $(1,9)$, $(2,6)$, $3,3)$ *e* $(4,0)$.

Para o item (b), teremos no plano cartesiano apenas um conjunto finito de pontos com coordenadas naturais, conforme mostra a Figura 1, obtida no software Geogebra.

Figura 1: Representação dos pares ordenados no plano cartesiano



Fonte: A autora

Temos então uma oportunidade para discutir algumas propriedades dos conjuntos numéricos. Embora da Geometria tenhamos o postulado que afirma que por dois pontos distintos passa uma única reta, nesta atividade devemos considerar que pela definição, a reta é constituída por infinitos pontos e cada ponto pode ser associado a um número real. Como o enunciado restringia as soluções ao conjunto dos números naturais, que é um subconjunto dos reais, mas não é denso, é impossível obtermos uma reta ou segmento de reta na representação gráfica dos pares ordenados obtidos na resolução.

Resolução 2. *Seja m a quantidade de bananas em cada monte e v a quantidade de bananas que cada viajante recebeu. Então, de acordo com a situação-problema, temos a equação diofantina linear:*

$$63m + 7 = 23v \iff 23v - 63m = 7. \tag{11}$$

Visto que 63 e 23 são números primos entre si, o mdc entre eles deve ser 1. Como 1 *divide* 7*, sabemos pela proposição 1 que a equação (11) possui solução. Então, aplicamos o Algoritmo de Euclides para encontrar uma combinação linear de m e v, de modo que:*

$$mdc(63,23) = 63m + 23v \iff 1 = 63m + 23v.$$

Pelo Algoritmo de Euclides,

	2	1	2	1	5
63	23	17	6	5	1
17	6	5	1	0	

reescrevendo as divisões, temos

$$63 = 2 \cdot 23 + 17 \iff 17 = 63 - 2 \cdot 23$$

$$23 = 1 \cdot 17 + 6 \iff 6 = 23 - 1 \cdot 17$$

$$17 = 2 \cdot 6 + 5 \iff 5 = 17 - 2 \cdot 6$$

$$6 = 1 \cdot 5 + 1 \iff 1 = 6 - 1 \cdot 5.$$

Agora, fazendo as substituições sucessivas:

$$1 = 6 - 1 \cdot (17 - 2 \cdot 6) = 6 - 1 \cdot 17 + 2 \cdot 6 = (-1) \cdot 17 + 3 \cdot 6 = (-1) \cdot 17 + 3 \cdot (23 - 1 \cdot 17)$$

$$= (-1) \cdot 17 + 3 \cdot 23 - 3 \cdot 17 = (-4) \cdot 17 + 3 \cdot 23 = (-4) \cdot (63 - 2 \cdot 23) + 3 \cdot 23$$

$$= (-4) \cdot 63 + 8 \cdot 23 + 3 \cdot 23 = 23 \cdot 11 - 63 \cdot 4,$$

ou seja,

$$1 = 23 \cdot 11 - 63 \cdot 4,$$

e multiplicando esta última equação por 7*, obtemos*

$$7 = 23 \cdot 77 - 63 \cdot 28,$$

de modo que $v_0 = 77$ *e* $m_0 = 28$ *são soluções particulares de (11) e a solução geral é dada por*

$$S = \{(77 - 63t, 28 - 23t) \mid t \in \mathbb{Z}\}.$$

Contudo, devemos encontrar a menor reposta admissível para essa situação-problema, que deve ser um número natural, pois se trata de uma de quantidade de frutas distribuídas igualmente e sem resto. Então,

$$\begin{cases} 77 + 63t > 0 \iff 63t > -77 \iff t > -\frac{77}{63} \\ 28 - 23t > 0 \iff 23t < 28 \iff t < \frac{28}{23} \end{cases}$$

ou seja, $t = 1$*. Assim obtemos a menor resposta possível para (23):* $v = 14$ *e* $m = 5$*. Portanto, cada monte era composto por 5 bananas.*

Resolução 3. *Sejam T a quantia de pessoas que pagam o valor total da entrada e M das pessoas que pagam meia entrada. Então*

$$8T + 5M = 500. \tag{12}$$

Pelo algoritmo de Euclides,

	1	1	1	2
8	5	3	2	1
3	2	1	0	

donde concluímos que $mdc(8,5) = 1$. *Como* 1 *divide* 500*, logo a equação (12) possui solução. Em seguida, reescrevendo as divisões,*

$$8 = 1 \cdot 5 + 3 \iff 3 = 8 - 1 \cdot 5$$

$$5 = 1 \cdot 3 + 2 \iff 2 = 5 - 1 \cdot 3$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1 \iff 1 = 3 - 1 \cdot 2.$$

Fazendo as substituições, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 1 \cdot (5 - 1 \cdot 3) = 3 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 3 = (-1) \cdot 5 + 2 \cdot (8 - 1 \cdot 5) \\ &= (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 8 - 2 \cdot 5 = (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 8, \end{aligned}$$

ou seja, $1 = (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 8$. *Por fim, multiplicando essa última equação por 500 e obtemos*

$$8 \cdot 1000 + 5 \cdot (-1500) = 500,$$

de modo que $T_0 = 1000$ *e* $M_0 = -1500$ *são soluções particulares e a solução geral é dada por:*

$$S = \{(1000 + 5t, -1500 - 8t) \,|\, t \in \mathbb{Z}\}.$$

Como queremos determinar o menor número de pessoas que pode assistir a uma sessão, temos

$$\begin{cases} 1000 + 5t > 0 \iff 5t > -1000 \iff t > -\frac{1000}{5} \iff t > -200 \\ -1500 - 8t > 0 \iff -8t > 1500 \iff t < -\frac{1500}{8} \iff t < -187,5 \end{cases}$$

ou seja, $-200 < t < -187$*, com* $t \in \mathbb{Z}$. *Para obter o menor número de pessoas, consideramos o maior valor possível para* t*, isto é,* $t = -188$ *e assim obtemos*

$$T = 1000 + 5 \cdot (-188) = 60 \quad \text{e} \quad M = -1500 - 8 \cdot (-188) = 4.$$

Logo, $T+M=60+4=64$, *isto é, serão 60 pessoas que pagarão o valor total da entrada e 4 que pagarão meia entrada, de modo que 64 é o menor número de pessoas que pode assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de R$500,00.*

Resolução 4. *Seguindo o modelo de resolução proposto no enunciado:*

$$5m+8n=120 \iff 8n=120-5m=5\cdot(24-m). \tag{13}$$

Daí, 8 *divide* $5\cdot(24-m)$, *mas não possui fatores em comum com o* 5. *Logo,* 8 *é um divisor de* $24-m$. *Como* $24-m\leq 24$, *basta testarmos os múltiplos de* 8 *inteiros não-negativos que satisfazem essa inequação, isto é,* $m=0$, $m=8$, $m=16$ *ou* $m=24$. *Assim, as quatro soluções procuradas são* $(m,n)=(0,15)$, $(8,10)$, $(16,5)$ *e* $(24,0)$.

De outra maneira, podemos aplicar o Algoritmo de Euclides para os coeficientes 8 *e* 5 *da equação (13):*

	1	1	1	2
8	5	3	2	1
3	2	1	0	

donde obtemos $1=(-3)\cdot 5+2\cdot 8$. *Multiplicando essa expressão por 120, segue que*

$$5\cdot(-360)+8\cdot 240=120,$$

de modo que $m_0=-360$ *e* $n_0=240$ *são soluções particulares e a solução geral é:*

$$S=\{(-360+8t,240-5t)\,|\,t\in\mathbb{Z}\}.$$

Mas como buscamos soluções que são pares de inteiros e não negativos, então

$$-360+8t\geq 0 \quad \text{e} \quad 240-5t\geq 0,$$

ou seja,

$$t\geq 45 \quad \text{e} \quad t\leq 48,$$

ou melhor, $45\leq t\leq 48$, *de modo que:*

- *para* $t=45$, *temos:* $m=0$ *e* $n=15$;
- *para* $t=46$, *temos:* $m=8$ *e* $n=10$;
- *para* $t=47$, *temos:* $m=16$ *e* $n=5$;

- *para* $t = 48$, *temos:* $m = 24$ *e* $n = 0$.

Portanto, os pares (m,n) *procurados são* $(0,15)$, $(8,10)$, $(16,5)$ *e* $(24,0)$.

Resolução 5. *Inicialmente, a partir da relação de Euler podemos encontrar o total de faces do poliedro:*

$$V + F - A = 2 \iff 10 + F - 20 = 2 \iff F = 12. \tag{14}$$

Cada face triangular (T) *é composta por 3 arestas e cada face quadrangular* (Q) *por 4 arestas. Então, temos que*

$$3T + 4Q = 40, \tag{15}$$

pois, o número de arestas de um poliedro é metade da soma das arestas das faces que compõem o poliedro. Aplicamos então o Algoritmo de Euclides:

	1	*3*
4	*3*	*1*
1	*0*	

Então,

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \iff 1 = 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \iff 40 = 3 \cdot (-40) + 4 \cdot 40.$$

Logo, $T_0 = -40$ *e* $Q_0 = 40$ *são soluções particulares e a solução geral é*

$$S = \{(-40 + 4t, 40 - 3t) \,|\, t \in \mathbb{Z}\}.$$

Como queremos determinar o números de faces triangulares (T), *então*

$$-40 + 4t \geq 0 \iff 4t \geq 40 \iff t \geq 10, \text{ e também}$$

$$40 - 3t \geq 0 \iff 3t \leq 40 \iff t \leq 13.$$

Logo, $10 \leq t \leq 13$, *e segue que:*

- *para* $t = 10$, *temos:* $T = 0$ *e* $Q = 10$;

- *para* $t = 11$, *temos:* $T = 4$ *e* $Q = 7$;

- *para* $t = 12$, *temos:* $T = 8$ *e* $Q = 4$;

- *para* $t = 13$, *temos:* $T = 12$ *e* $Q = 1$.

Sendo assim, para que o poliedro possua 12 faces, devemos ter 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares. Portanto, a resposta correta para esta atividade é a alternativa (E).

Resolução 6. *Temos que:*

$$\frac{35}{100}R+\frac{30}{100}S=5750 \iff 35R+30S=575000 \iff 7R+6S=115000. \tag{16}$$

Pelo Algoritmo de Euclides,

	1	*6*
7	*6*	*1*
1	*0*	

Assim,

$$7=1\cdot 6+1 \iff 1=7-1\cdot 6 \iff 115000=7\cdot 115000+6\cdot(-115000).$$

Logo, $R_0=115000$ *e* $S_0=-115000$ *é uma solução particular. A solução geral é dada por*

$$S=\{(115000+6t,-115000-7t)\,|\,t\in\mathbb{Z}\}.$$

Como queremos soluções não negativas, então

$$115000+6t\geq 0 \iff 6t\geq -115000 \iff t\geq \frac{-115000}{6},$$

e

$$-115000-7t\geq 0 \iff -7t\geq 115000 \iff t\leq \frac{-115000}{7}.$$

Agora, como $t\in\mathbb{Z}$*, segue que* $-16429\leq t\leq -19166$*. Então,*

- *para* $t=-16429$*, temos* $R=16426$ *e* $S=3$*. O valor mínimo de vendas será de* 16429 *peças;*
- *para* $t=-19166$*, temos* $R=4$ *e* $S=19162$*. O valor máximo de vendas será de* 19166 *peças.*

Resolução 7. *Seja A o relógio com intervalos de 5 minutos e B o com intervalos de 11 minutos. Temos a seguinte equação diofantina*

$$5A+11B=3.$$

Pelo Algoritmo de Euclides,

	2	5
11	5	1
1	0	

Então,

$$11 = 2 \cdot 5 + 1 \iff 1 = 5 \cdot (-2) + 11 \cdot 1 \iff 3 = 5 \cdot (-6) + 11 \cdot 3.$$

Logo, uma solução particular é $A_0 = -6$ *e* $B_0 = 3$.

Para utilizar os dois relógios simultaneamente, após o relógio A marcar 6 intervalos de tempo (30 minutos), devemos colocar o ovo para cozinhar e observar o momento em que o relógio B irá marcar o terceiro intervalo de tempo (33 minutos), assim a diferença entre eles será de 3 minutos.

Resolução 8. *Os números escritos na frente (à esquerda) da substância na reação são chamados de coeficientes e mostram a proporção estequiométrica em que eles estão reagindo e a quantidade de produtos. Já o número subscrito é chamado de índice e indica a quantidade de átomos de cada elemento.*

Sabemos que uma equação química está balanceada se a quantidade total de átomos no primeiro membro for igual a do segundo. Para igualar a quantidade de átomos nos dois membros da equação, multiplicamos o coeficiente pelo índice de cada elemento químico e obtemos assim os resultados apresentados na Tabela 2:

Tabela 2: Coeficientes da equação da atividade 8

	1º membro	2º membro
Al	2x	z
O	3x	w
H	y	2w
Cl	y	3z

Fonte: A autora

Então,

$$y = y \iff 2w = 3z \iff 2w - 3z = 0,$$

e concluímos que $w = 3$ *e* $z = 2$. *Logo,*

$$3x = w \Longrightarrow 3x = 3 \Longrightarrow x = 1$$

e

$$y = 2w \Longrightarrow y = 2 \cdot 3 \Longrightarrow y = 6,$$

de modo que a alternativa correta é a letra B.

Resolução 9. *Inicialmente, seja x o coeficiente de NaN_3, y o coeficiente de N_2 e z o de Na. Em seguida, efetuamos a multiplicação dos coeficientes de cada elemento químico pelo seu índice e obtemos os resultados indicados na Tabela 3:*

Tabela 3: Coeficientes da equação da atividade 9

	1º membro	2º membro
Na	x	z
N	3x	2y

Fonte: A autora

Temos que:

$$3x = 2y \Longrightarrow 3x - 2y = 0 \Longrightarrow (x_0, y_0) = (2, 3).$$

Logo, de $x = z$ tem-se $z = 2$. A soma dos coeficientes é igual a 7, portanto a alternativa correta é a letra C.

Resolução 10. *O termo geral de uma PA (progressão aritmética) é dado por*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r,$$

em que a_n é o n-ésimo termo da PA, a_1 é o primeiro termo da PA e r é a razão da PA.

Na PA $(4, 7, 10, 13, ...)$, temos $a_1 = 4$ e $r = 3$. Substituímos então $a_n = p$ no termo geral da PA e obtemos a equação diofantina linear

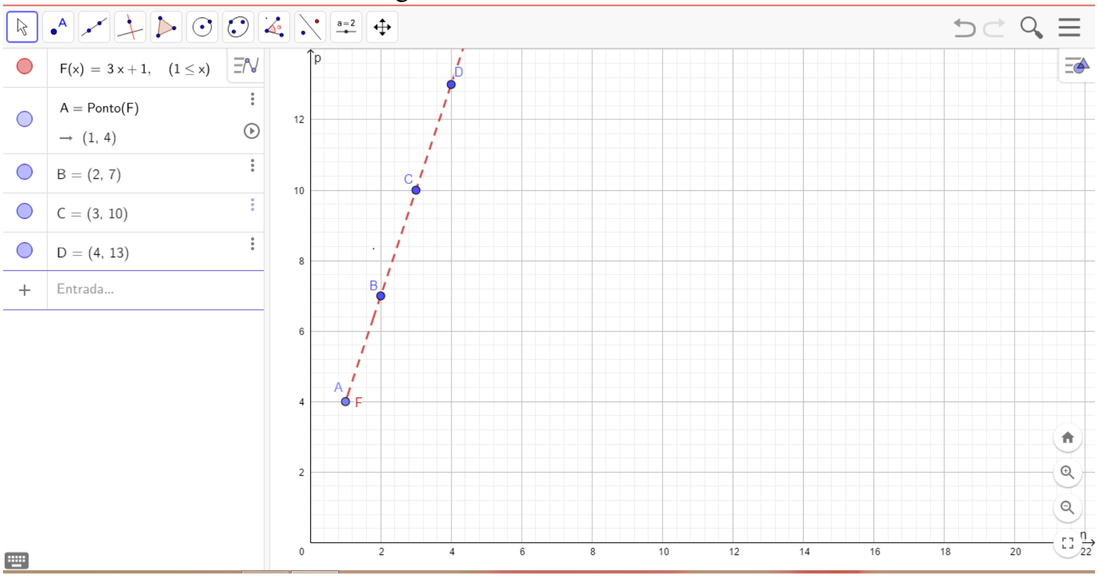
$$a_n = 4 + (n-1) \cdot 3 \iff p = 4 + 3n - 3 \iff -3n + p = 1. \tag{17}$$

Como n representa a ordem do termo na sequência, temos que $n \in \mathbb{N}^*$ e que $(n, p) = (1, 4)$ é a menor solução natural para (17). Deste modo, podemos expressar sua solução geral da seguinte maneira

$$S = \{(1 + t, 4 + 3t) \,|\, t \in \mathbb{N}\}.$$

Agora, novamente fazendo uso do Geogebra, a Figura 2 apresenta o gráfico discreto que representa simultaneamente a PA dada inicialmente e a equação diofantina relacionada.

Figura 2: Gráfico discreto da PA



Fonte: A autora

Assim, para as restrições $n \in \mathbb{N}^*$ e $t \in \mathbb{N}$, podemos dizer a equação diofantina linear $-3n + p = 1$ representa uma PA. Porém vale lembrar que nem toda PA representa uma equação diofantina, uma vez que o primeiro termo de uma PA nem sempre é um número natural.

Resolução 11. *Com as coordenadas dos pontos P e Q, podemos determinar a equação reduzida da reta, que é dada por*

$$y = mx + n,$$

em que m é o seu coeficiente angular e n seu coeficiente linear. Então,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{16 - (-4)}{(-1) - 11} = \frac{20}{-12} = -\frac{5}{3},$$

de modo que,

$$y = -\frac{5}{3}x + n.$$

Agora, substituímos as coordenadas de um ponto pertencente a reta, por exemplo, $Q = (16, -1)$, *e segue que*

$$-1 = -\frac{5}{3} \cdot 16 + n \iff -1 = -\frac{80}{3} + n \iff -1 + \frac{80}{3} = n \iff n = \frac{77}{3}.$$

Assim, a equação da reta que passa pelos pontos P e Q é

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{77}{3}.$$

Queremos determinar todos os pontos cujas coordenadas são números inteiros positivos e pertencem ao segmento PQ. Então, basta resolvermos a equação diofantina, com $x, y \in \mathbb{N}$

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{77}{3} \iff \frac{5}{3}x + y = \frac{77}{3} \iff 5x + 3y = 77. \tag{18}$$

Pelo Algoritmo de Euclides,

	1	*1*	*2*
5	*3*	*2*	*1*
2	*1*	*0*	

Segue que:

$5 = 1 \cdot 3 + 2 \iff 2 = 5 - 1 \cdot 3$

$3 = 1 \cdot 2 + 1 \iff 1 = 3 - 1 \cdot 2$. *Logo,*

$$1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - 1 \cdot (5 - 1 \cdot 3) = 3 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2,$$

ou seja, $1 = 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2$. *Multiplicando essa última equação por 77, obtemos*

$$5 \cdot (-77) + 3 \cdot 144 = 77.$$

Logo,$x_0 = -77$ *e* $y_0 = 144$ *é uma solução particular. A solução geral é dada por*

$$S = \{(-77 + 3t, 144 - 5t) \,|\, t \in \mathbb{Z}\}.$$

Como queremos todos os pontos com coordenadas inteiras positivas, segue que

$$\begin{cases} -77 + 3t > 0 \iff 3t > 77 \iff t > \frac{77}{3} \\ 144 - 5t > 0 \iff -5t > -144 \iff 5t < 144 \iff t < \frac{144}{5} \end{cases}$$

Então, $26 \leq t \leq 28$ *e daí obtemos:*

- *para* $t = 26$ *temos* $(1, 14)$*;*
- *para* $t = 27$ *temos* $(4, 9)$*;*
- *para* $t = 28$ *temos* $(7, 4)$.

Portanto, os pontos cujas coordenadas são inteiros positivos e pertencem ao segmento PQ são $(1, 14)$*,* $(4, 9)$ *e* $(7, 4)$.

6 CONCLUSÃO

Em face do exposto anteriormente, concluímos que o tema das equações diofantinas lineares é muito interessante, pois pode ser utilizado em diversas aplicações. Além de relacionar Álgebra e Aritmética, o ensino das equações diofantinas lineares na Educação Básica contribui para o letramento matemático do aluno.

Haja vista que os conteúdos considerados prévios para trabalhar as equações diofantinas lineares são estudados no Ensino Fundamental, defendemos que estas equações podem ser consideradas como objeto de conhecimento na Educação Básica. Isso tanto é viável que no estado de São Paulo elas já estão previstas no currículo de Matemática, que também indica a possibilidade do professor aprofundar o tema com sua turma.

Sabemos das dificuldades existentes na Educação Básica, principalmente nas escolas públicas. Porém, como docentes não podemos nos ater a elas e limitar as oportunidades de aprendizagem dos alunos. Hoje há um consenso entre os educadores a respeito da necessidade de desmistificar o ensino da Matemática, muitas vezes considerada pelos alunos como uma disciplina chata e difícil. Nesse sentido, acreditamos que um dos fatores para o sucesso do ensino se encontra nas práticas pedagógicas e no conhecimento do professor.

Diante disso, apresentamos neste trabalho uma revisão bibliográfica sobre as equações diofantinas lineares, envolvendo tópicos históricos e conceituais, juntamente com aspectos da Educação Básica atual e diversas soluções para as atividades propostas direcionados ao professor.

Portanto, como resultado principal inferimos sobre a viabilidade do trabalho com as equações diofantinas lineares na Educação Básica, por se tratar de uma abordagem que privilegia a integração de conteúdos matemáticos estudados em anos distintos, durante a resolução de problemas, contribuindo assim para a autonomia e letramento matemático do aluno. A relevância deste trabalho consiste em ser uma fonte de material para professores de Matemática que queiram estudar, inserir ou aprofundar este conteúdo na Educação Básica.

Para pesquisas futuras, recomenda-se a aplicação das atividades propostas em sala de aula, além de uma investigação sobre o modo como a formação do professor reflete na sua prática docente a respeito de conteúdos relacionados à Teoria dos Números.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. **Teoria elementar dos números**. São Paulo: Nobel, 1981.

ANJOS, A. A. dos. **Equações Diofantinas:** Sequência didática e o método da descida infinita de fermat. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015.

BARBOSA, R.; FEITOSA, S. **OBMEP – Banco de Questões 2017**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

BOYER. C. B. **História da matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC20dezsite.pdf>. Acesso em: 31 jan. 2018.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: http: <//www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394compilado.htm>. Acesso em: 24 mar. 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **PNLD 2017:** matemática - ensino fundamental anos finais. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2016.

CADAR, L.; DUTENHEFNER, F. **Encontros de Aritmética.** Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2015.

CARNEIRO, J. P. Q. Dispositivo para expressar o mdc de dois números como combinação linear deles. **Revista do Professor de Matemática**, Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, n. 37, p. 110–118, 1998. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/37/6.htm>. Acesso em: 13 mar. 2018.

CASTRO, F. Z. **Uma proposta de sequência didática para treinamento olímpico em Matemática.** 93 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências Exatas. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

DOMINGOS NETO, A.; MOSCHIM, E. Construção de novos códigos ortoogonais ópticos por meio de equações diofantinas. **IEEE Latin America Transactions**, v.3, n. 3, p. 225–232, jul 2005. Disponível em: <http://www.ewh.ieee.org/reg/9/etrans/ieee/issues/vol03/vol3issue3July2005/3TLA3_01Neto.pdf>. Acesso em: 31 jan. 2018.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

EDITORA MODERNA (org.). **Projeto Araribá:** matemática. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

EDUCATION SCOTLAND. **Benchmarks:** Numeracy and mathematics. 2017. Disponível em: <https://education.gov.scot/improvement/documents/numeracyandmathematicsbenchmarks.pdf>. Acesso em: 01 abr. 2019.

EVES, H. **Introdução a história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GROENWALD, C. L. O. *et al.* **Teoria dos números e suas aplicações no processo de ensino e aprendizagem**. [2005?]. Disponível em: <http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro_Gaucho_Ed_Matem/cientificos/CC79.pdf>. Acesso em: 01 mar. 2018.

HEFEZ, A. **Aritmética.** Rio de janeiro: SBM, 2014.

MARQUES, B. A. **Equações diofantinas lineares e equação de Pell:** uma abordagem via frações contínuas. 24 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João Del-Rei, 2016. Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94205>. Acesso em: 03 abr. 2019.

OCDE. **10 Questões para Professores de Matemática... e como o PISA Pode Ajudar a Respondê-las.** Tradução: Thiago Pandim. Impa, 2018. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2018/02/Livro_Dez_Questoes-PISA_2018.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2018.

OLIVEIRA, A. F. F. P. **Equações Diofantinas Lineares:** uma proposta para as séries finais do ensino fundamental. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2018 .

PARANÁ. **Referencial Curricular do Paraná:** princípios, direitos e orientações. 2018. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial_curricular_parana_cee.pdf>. Acesso em: 12 maio 2019.

PATROCÍNIO, A. C. Soluções inteiras. **Revista do Professor de Matemática**, Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, n. 8, 1986. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/8/6.htm>. Acesso em: 13 mar. 2018.

PISA. **Letramento matemático.** 2010. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/download/internacional/pisa/2010/letramento_matematico.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2018.

POMMER, W. M. Transição aritmética&Álgebra: Contribuições das equações diofantinas lineares. **ResearchGate**, 2011. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/298972608>. Acesso em: 05 mar. 2018.

RIBEIRO, R. **Equações Diofantinas:** uma abordagem para o Ensino Médio. 43 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

ROCQUE, G. D.; PITOMBEIRA, J. B. Uma equação diofantina e suas resoluções. **Revista do Professor de Matemática**, Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, n. 19, 1991. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/19/9.htm>. Acesso em: 13 mar. 2018.

SAVÓIS, J. N. **Método para resolver equações diofantinas com coeficientes no conjunto dos números racionais.** 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Matemática, Estatística e Física. Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2014.

SILVA, A. S. *et al.* Aplicando equações diofantinas lineares em um contexto interdisciplinar: um diálogo entre a matemática e a química. **Congresso nacional de pesquisa e ensino em ciências**, n. 1, 2016. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conapesc/trabalhos/TRABALHO_EV058_MD1_SA91_ID1895_16052016144201.pdf>. Acesso em: 03 abr. 2018.

SILVA, E. F. da. Equações diofantinas lineares. **Revista da Olimpíada - IME - UFG**, anual,n. 3, p. 110–118, abr 2002. Disponível em: <https://omeg.mat.ufg.br/up/36/o/r3.pdf>. Acesso em: 31 jan. 2018.

SILVEIRA, E. **Matemática:** compreensão e prática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática, 8º ano.** 3. ed. São Paulo: FTD, 2015.

SÃO PAULO. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias. São Paulo: SE, 2011.

SÃO PAULO. **Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo:** caderno do professor; matemática, ensino fundamental - anos finais, 7ª série/8º ano. São Paulo: SE, 2014.

VANSAN, A. H. **Equações diofantinas:** um projeto para a sala de aula e o uso do Geogebra. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PARA PROFESSORES

O ENSINO DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

TERMO DE ESCLARECIMENTO

Prezado (a) Professor (a)

Convido-o (a) a responder voluntariamente o questionário da pesquisa previamente intitulada “O ensino das equações diofantinas lineares na educação básica”, que desenvolvo como parte do mestrado do programa de pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) sob a orientação do professor doutor Marciano Pereira. O objetivo da investigação é coletar dados que possam auxiliar na construção da proposta de um material voltado ao ensino de equações diofantinas lineares na educação básica e também fazer uma análise geral do ensino e aprendizagem deste conteúdo, bem como do perfil dos profissionais. As informações concebidas e a identidade dos participantes serão confidenciais. Uma cópia da dissertação com o resultado final do estudo será entregue a Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG e os resultados disponibilizados para os interessados. Agradeço a sua colaboração, que deverá ser consentida, ao inicio do questionário e disponibilizo o e-mail alinecatarinasilva@hotmail.com e o telefone (15) 99642-2787 para contato.

TERMO DE CONSENTIMENTO

Tendo sido orientado quanto ao teor do projeto e compreendido o objetivo do questionário, concordo em participar voluntariamente da pesquisa previamente intitulada “O ensino das equações diofantinas lineares na educação básica”, como sujeito. Estou ciente que: 1) Não receberei qualquer tipo de beneficio pessoal ou financeiro por participar desta pesquisa; 2) Não existem possíveis desconfortos e riscos decorrentes da participação; 3) Minha privacidade será respeitada, com meus dados mantidos em sigilo; 4) Foi me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isso me leve a qualquer penalidade. Obrigada pela sua participação!

( ) SIM, quero participar da pesquisa.

QUESTIONÁRIO

1. Perfil do professor:

a) Nome:

b) Formação (graduação, especialização, etc):

c) Tem feito cursos de aperfeiçoamento /atualização?

d) Atuação (qual série, fundamental/médio):

e) Quanto tempo leciona?

f) Sistema de ensino que leciona: ( ) Público ( ) Privado ( ) Ambos

2. Sobre as equações diofantinas:

a) Você conhece este conteúdo?

b) Em qual nível de ensino você estudou?

c) Quais conteúdos da educação básica você reconhece como conteúdos prévios para seu estudo?

d) Você já ministrou aulas referentes às equações diofantinas lineares na educação básica? ( ) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo: ( ) Ensino Fundamental ( ) Ensino Médio ( ) Ensino Superior

e) Acharia interessante ensinar esse conteúdo na educação básica? Por quê?

f) Quais as dificuldades que podem ser encontradas no ensino das equações diofantinas lineares no ensino básico?

( ) Falta de conhecimentos prévios dos alunos.

( ) Falta de tempo no projeto pedagógico.

( ) Falta de material complementar específico para o ensino do conteúdo na educação básica.

( ) Ausência deste conteúdo na minha formação docente.

( ) Outros. Qual (is)?

( ) Não existem dificuldades no ensino deste conteúdo na educação básica

3. Você conhece o currículo da disciplina de Matemática da rede estadual de São Paulo? ( ) Sim ( ) Não

ANEXO A – LEMAS E TEOREMAS AUXILIARES

Neste Anexo apresentamos a demonstração de duas propriedades importantes, que foram usadas no texto.

Lema A.1. *(de Euclides) Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$. Se p é primo e $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.*

Demonstração. Suponhamos que p não seja um divisor de a. Logo, $-p$ também não é um divisor de a. Como os divisores de p são apenas ± 1 e $\pm p$, então os divisores comuns a p e a são apenas ± 1. Daí, $mdc(p,a) = 1$ e, portanto, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$px_0 + ay_0 = 1.$$

Multiplicando-se ambos os membros dessa igualdade por b, obtém-se:

$$p(bx_0) + (ab)y_0 = b.$$

Como $p|p$ e $p|ab$ (por hipótese), então $p|[p(bx_0) + (ab)y_0]$, ou seja, $p|b$. Analogamente mostra-se que se p não divide b, então divide a.

□

Teorema A.2. *(Propriedade Arquimediana) Se a e b são dois inteiros positivos quaisquer, então existe um positivo inteiro n tal que $na \geq b$.*

Demonstração. Suponhamos que a e b são dois inteiros positivos para os quais $na < b$ para todo inteiro positivo n. Então, todos os elementos do conjunto

$$S = \{b - na | n \in \mathbb{N}\},$$

são inteiros positivos, ou seja, limitado inferiormente por zero, e portanto, pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui elemento mínimo, digamos $minS = b - ka$. E como $b - (k+1)a$ pertence a S, porque S contém todos os inteiros positivos desta forma, temos

$$b - (k+1)a = (b - ka) - a < b - ka,$$

isto é, $b - ka$ não é o elemento mínimo de S, o que é uma contradição. Logo, a Propriedade Arquimediana é verdadeira.

□