

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: HISTÓRIA, CONCEITO E APLICAÇÃO

Jerry Gleison Salgueiro Fidanza Vasconcelos

MANAUS

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Jerry Gleison Salgueiro Fidanza Vasconcelos

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: HISTÓRIA, CONCEITO E APLICAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos

MANAUS

2013

JERRY GLEISON SALGUEIRO FIDANZA VASCONCELOS

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: HISTÓRIA, CONCEITO E APLICAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 05 de Julho de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos
Presidente

Profa. Dra. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Membro

Prof. Dr. Igor Tavares Padilha
Membro

AGRADECIMENTOS

A Deus que nos momentos mais difíceis da minha caminhada carregou-me nos braços. Por mais que ao longo desses anos o conhecimento construído tenha alavancado, nunca deixei de creditá-lo as vitórias e superações de cada provação superada.

Ao grande anjo da minha vida, minha mãe que esteve sempre ao meu lado, por suas orações diárias e palavras amigas desde momentos felizes até momentos de dificuldades, por cuidar de mim dando forças para a conclusão deste trabalho.

A minha esposa Vivania pelo carinho, amor, apoio e incentivo. Pelo ombro amigo que muitas vezes me serviu como aconchego para amparar minhas lágrimas de tristeza, frustração e felicidade. Por existir e comigo ter construído o desafio de formar uma família feliz, por me substituir de minhas obrigações nos deveres de pai, pois, em muitas vezes estive ausente e você o fez tão bem.

As minhas fontes de inspiração e alegria, minhas filhas Isabela Sampaio e Hanny Vitória que sempre tinham um sorriso e um afago quando chegava em casa. Agradeço por suportarem minha ausência.

Aos meus irmãos que sempre sorriram comigo e também choraram quando perdemos, uns dos bens mais preciosos que tínhamos, nosso pai.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcus Antônio Marrocos Mendonça, pela confiança e dedicação, por toda liberdade no desenvolvimento deste estudo e ter acreditado em meu potencial me conduzindo para esta realização, obrigado pelas horas e apoio disponibilizados.

A todos meus professores do PROFMAT, pela arte de ensinar, por nos desafiar e acreditar em nossa capacidade de aprender sempre mais.

Enfim, agradeço aos amigos pelo companheirismo nas árduas vitórias conquistadas e todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução dessa Dissertação de Mestrado.

RESUMO

Esta dissertação é um estudo sobre uma classe de funções, cujo comportamento sugere uma analogia com as funções trigonométricas, que são as funções hiperbólicas. Essas funções surgem naturalmente a partir de combinações simples das funções exponenciais $\frac{e^x}{2}$ e $\frac{e^{-x}}{2}$, as duas principais, o cosseno hiperbólico e o seno hiperbólico, são resultados da soma e diferença direta entre elas. Iremos abordar a história; citando alguns matemáticos e suas contribuições, a conceituação, o desenvolvimento das suas propriedades, suas relações com as funções trigonométricas, a derivada, a integral, seu gráfico e explorar sua aplicação.

Palavras-chave: Funções Hiperbólicas, Funções Trigonométricas, Funções Exponenciais.

ABSTRACT

This dissertation is a study of a class of functions, which behavior suggests an analogy with the trigonometric functions, that are the hyperbolic functions. These functions appear naturally from the simple combinations of exponential functions $\frac{e^x}{2}$ and $\frac{e^{-x}}{2}$, the hyperbolic cosine and the hyperbolic sine are the both most important, they are the result of the sum and the direct difference between them. The history will be addressed, some mathematicians and their contributions will be referred, the conceptualization, the development of its properties, its relations with the trigonometric functions, the derivative, the integral, its graphic and explore its application.

Keywords: hyperbolic functions, trigonometric functions, exponential functions.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Estrutura do Trabalho	1
1.2	Linha do tempo	2
1.3	Um breve histórico das funções hiperbólicas	4
2	Conceituação das Funções Hiperbólicas	6
2.1	Circunferência	6
2.2	Elipse	8
2.3	Círculo Trigonométrico	12
2.4	Hipérbole	16
2.5	Medidas de ângulos sobre o círculo trigonométrico e a hipérbole equilátera	19
2.6	Definição das funções hiperbólicas através da analogia com o círculo trigonométrico	21
2.7	A Curva $y = \frac{1}{2x}$ e a Hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$	25
2.8	Parametrização do seno hiperbólico e cosseno hiperbólico	30
2.9	Derivada primeira, derivada segunda e integral das funções hiperbólicas . .	36
2.10	Estudo dos gráficos do seno hiperbólico e cosseno hiperbólico	39
2.11	Funções hiperbólicas inversas	42
3	Catenária	47
3.1	Um breve histórico sobre a catenária	47
3.2	A Função Hiperbólica, a Catenária e a Parábola	48
3.3	Aplicação da Catenária	53
	Considerações Finais	59
	Referências Bibliográficas	60
	A Material auxiliar	63

LISTA DE SÍMBOLOS

\overline{AB}	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
\widehat{ABC}	Medida do ângulo ABC.
$\text{sen } \theta$	Seno do ângulo θ .
$\text{cos } \theta$	Cosseno do ângulo θ .
$\text{tg } \theta$	Tangente do ângulo θ .
$\text{cotg } \theta$	Cotangente do ângulo θ .
$\text{sec } \theta$	Secante do ângulo θ .
$\text{cossec } \theta$	Cosseno do ângulo θ .
$\text{senh } \theta$	Seno hiperbólico do ângulo θ .
$\text{cosh } \theta$	Cosseno hiperbólico do ângulo θ .
$\text{tgh } \theta$	Tangente hiperbólica do ângulo θ .
$\text{cotgh } \theta$	Cotangente hiperbólica do ângulo θ .
$\text{sech } \theta$	Secante hiperbólica do ângulo θ .
$\text{cossech } \theta$	Cossecante hiperbólica do ângulo θ .
$\triangle ABC$	Triângulo ABC.
A_{ABC}	Área do triângulo ABC.
A_{ABCD}	Área do quadrilátero ABC.
d_{AB}	Distância entre o ponto A e o ponto B.
πr^2	Área do Círculo.
\ln	Logaritmo Natural.
∞	Infinito

Capítulo 1

Introdução

1.1 Estrutura do Trabalho

No capítulo 1, seção 1.2, apresentamos a linha do tempo mostrando a motivação e o desenvolvimento da matemática, desde a Grécia antiga até o renascimento, ciência que foi um dos pilares do desenvolvimento da sociedade, citando alguns estudiosos e suas contribuições. Na Seção 1.3, abordamos um breve histórico das funções hiperbólicas, mostrando que uma das necessidades do seu estudo foi as grandes descobertas geográficas dos séculos XV e XVI que pediam métodos de navegação mais aperfeiçoados, fazendo inferência à alguns estudiosos e suas contribuições.

No capítulo 2, começamos nosso estudo a partir da circunferência, elipse e círculo trigonométrico, com o objetivo de mostrar que o círculo trigonométrico é um caso especial da circunferência e a circunferência unitária é um caso especial da elipse, como podemos perceber esses assuntos estão interligados de forma direta. Fizemos um breve estudo sobre a hipérbole e mostramos que a curva $y = \frac{1}{2x}$ representa a hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$, quando rotacionamos de $\frac{\pi}{4}$ o plano xy para a obtenção do plano XY . Usando esse fato juntamente com analogia ao círculo trigonométrico, desenvolvemos todas as definições e relações das funções hiperbólicas. Demonstramos algumas derivadas, apresentamos o formulário da integral, fizemos o estudo dos gráficos e, por fim, das funções inversas.

No Capítulo 3, discorreremos sobre um breve histórico da catenária, citando alguns estudiosos, suas contribuições, algumas aplicações e abordamos de forma mais aprofundada o estudo da catenária através de uma aplicação.

Nas Considerações Finais, falamos sobre a importância e a viabilidade do estudo das funções hiperbólicas no ensino médio uma vez que elas são, apenas curvas, originadas da combinação direta das funções exponenciais $\frac{e^x}{2}$ e $\frac{e^{-x}}{2}$, já estudadas no ensino médio e, possuem muitas aplicações importantes.

1.2 Linha do tempo

Durante muito tempo o medo foi a reação dos homens pré-históricos diante do desconhecido. Naqueles tempos, o misticismo começou a ser usado para explicar esses fatos e fenômenos. Assim, o homem respondia aos questionamentos sobre os fenômenos da natureza por meio de crenças e superstições. Porém, quando a explicação mística tornou-se insuficiente para a compreensão dos fenômenos, houve a necessidade de se buscar novos caminhos que pudessem comprová-los. Na Grécia antiga¹ com advento da filosofia marcou-se o fim do pensamento mítico, recorrente ao mistério e ao sobrenatural, que explica aspectos essenciais da realidade vivida por um povo. Já a característica central da explicação da natureza pelos princípios filosóficos é a noção da causalidade, interpretadas em termos puramente naturais. Cada fenômeno poderia ser tomado como efeito de uma nova causa, que por sua vez seria efeito de uma causa anterior. Nós já sabemos que os egípcios foram os primeiros a possuir o conhecimento técnico, mas foram os gregos os primeiros que se preocuparam em sistematizar o conhecimento. Procuravam moldar a forma das ciências da natureza. Foram eles que se aproximaram, pela primeira vez, do que hoje chamamos de ciência. As suas atividades buscavam adquirir o conhecimento, ou construí-lo de forma organizada, ou mesmo aperfeiçoá-lo em todas as áreas, seja esse conhecimento sobre a natureza física, biológica, social, econômica, tecnológica ou outra, tornando a existência humana mais significativa. Considera-se que a matemática grega e o pensamento filósofo científico tenham começado, por volta do século VI a.C., com Tales de Mileto² e com Pitágoras³, a ele foi atribuída a descoberta de vários teoremas e de certas propriedades relacionadas a escala musical. A escola pitagórica, fundada em 530 a.c., relacionava-se mais com o amor à sabedoria do que com as exigências da vida prática, defendia que todas as coisas poderiam ser expressas por números, dessa forma a matemática dos gregos foi distanciando-se da aritmética de Pitágoras, tornando-se inteiramente geométrica.

Os gregos classificaram os lugares geométricos em três categorias: os lugares planos(todas as linhas retas), os lugares sólidos(todas as cônicas) e os lugares lineares(as demais curvas), a reta e a circunferência foram os primeiros lugares geométricos conhecidos e estudados, o círculo, as seções cônicas e espiral de Arquimedes⁴ passaram por um estudo detalhado, mas eles também conheciam outras curvas, como: a quadratriz, a conchoíde de Nicomedes⁵ e a cissoíde de Diocles⁶, para eles só havia duas maneiras de definir

¹Período que vai 2000 a.C. a 146 a.C.

²(624 a.C - 558 a.C) foi um filósofo grego. Nasceu em Mileto, atual país da Turquia.

³Nasceu por volta do século 6 a.C., na ilha de Samos, no mar Egeu, Grécia. Morreu, na Lucânia, Itália.

⁴(287 a.C. - 212 a.C.) nasceu na colônia grega de Siracusa, na Sicília. Faleceu no ano de 212 a.C.

⁵Viveu entre 280 a.C. e 210 a.C. Foi dedicado a resolver os problemas da trisseção do ângulo e da duplicação do cubo.

⁶(240 a.C a 180 a.C.)viveu em Caristo. Formulou a Cissoíde de Diocles, a fim de resolver o problema da duplicação do cubo.

curvas: por meio da composição de movimento uniforme e pela interseção de superfícies geométricas: planos, esferas, cilindros, poliedros e cones. Não chegaram a explorar a cinemática e a seção de um sólido pois, as únicas curvas que os gregos encontraram no céu e na terra foram combinações de retas e círculos.

Alguns dos problemas clássicos da geometria grega, a duplicação do cubo, a triseção do ângulo e a quadratura do círculo, por ser impossível a sua resolução com régua e compasso, motivaram a criação de novas técnicas geométricas, como aconteceu com as cônicas, um dos mais antigos estudos da matemática, onde por volta do século IV a.c., Menaecmus⁷, discípulo de Platão⁸, descobriu as seções planas de um cone - parábola, elipse e hipérbole que foram utilizadas para a resolução do problema da duplicação do cubo, mais tarde as cônicas foram estudadas de forma mais aprofundada por Apolônio de Perga⁹, também astrônomo criou um modelo para explicar o movimento dos planetas denominado de Epícolo, sendo aperfeiçoado por Ptolomeu¹⁰, cujo modelo geométrico, geocêntrico: rodar círculos sobre círculos, abriu as portas ao mundo das curvas mecânicas, geradas pelo movimento uniforme, chegando às elipses.

Por três séculos, que a matemática esteve no auge, os gregos estudaram as relações entre retas e círculos e a transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu, ocorreu por volta de 180 a 165 a.C. com a criação da primeira tabela trigonométrica, por Hiparco de Nicéia¹¹.

Os problemas relacionados com as áreas de regiões limitadas por curvas, eixos e ordenadas influenciaram o desenvolvimento do cálculo, mais foi somente no período helenístico que surgiu, com Arquimedes, a ideia da aplicação da geometria e aritmética como instrumento de cálculo e descrição de fenômenos. No trabalho de Arquimedes, encontramos uma possível antecipação do cálculo. Sua forma só foi bem compreendida apenas no século XX. O tratado de Arquimedes, O método, por meio da exaustão de Eudoxo¹², mostra a ideia da quadratura da parábola.

Os gregos foram incentivados por problemas práticos a estudarem as cônicas e a criar a primeira tabela trigonométrica para estudar o movimento dos planetas, mesmo não explorando algumas curvas admitidas por eles. No século XVII, com a invenção da geometria analítica, fez com que o estudo dos objetos geométricos e das curvas se tornassem cada

⁷(380 a.c - 320 a.c) Foi o primeiro matemático a referir a parábola e a hipérbole como ferramentas de resolução do problema da duplicação do cubo.

⁸(427 a.C. - 347 a.C.) nasceu em Atenas, Grécia. Quando morreu, em 347 a.C., estava escrevendo "As Leis", um grande tratado.

⁹(260 a.c - 200 a.c), conhecido como "O Grande Geômetra". Fez o primeiro estudo sistemático sobre as cônicas. Faleceu por volta de 190 a. c. em Alexandria.

¹⁰(90a.C. - 168a.C.) nasceu em Ptolemaida Hermia, no Egito. Matemático e astrônomo. Faleceu em Alexandria.

¹¹(190 a.C - 120 a.C) nasceu em Nicéia, na Bitínia. Viveu em Alexandria. é também chamado "o pai da trigonometria". Acredita-se que tenha morrido em Rodes.

¹²(400 aC - 337 a.C.) Nascido em Cnido (atual Turquia). O método da exaustão é um método para se encontrar a área de uma figura inscrevendo-se dentro dela uma sequência de polígonos cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada.

vez mais uma parte da álgebra. No lugar da curva em si, considerava-se sua equação que relacionava as coordenadas x e y de um ponto.

O final do século XVII e início do século XVIII, marcou-se pelo empirismo, posição filosófica que toma a experiência como guia. Herdada do filósofo aristotélico¹³. A ciência do século XVIII não dividia a matemática pura das ciências físicas: a aritmética, a geometria, a álgebra, a óptica, a mecânica e a hidrodinâmica, bem como o estudo de máquinas em geral, a navegação, a construção e a artilharia.

1.3 Um breve histórico das funções hiperbólicas

Em 1569, O geógrafo flamengo Gerhard Kremer (1512-1594), que era mais conhecido por seu nome latino, Gerhardus Mercator, fez a primeira e uma das mais importantes aplicações das funções hiperbólicas que hoje conhecemos, usando conceitos da geometria hiperbólica, ele publicou seu mapa, o qual ele é mais lembrado, de nome "Projeção de Mercator" em 18 folhas separadas, intitulado:

Nova representação e mais completa do globo terrestre devidamente adaptado para seu uso na navegação.

A "Projeção de Mercator" resultou na elaboração de um mapa em que uma linha reta sempre faz um ângulo igual com cada meridiano. Este foi um grande avanço na navegação e é usado até hoje em todos os gráficos de profundidade de navegação do mundo. No entanto, quando ele publicou seu trabalho, foi deixado para que outros descobrissem que as fórmulas usadas estavam ligadas às funções hiperbólicas.

Em meados do século XVIII, o matemático italiano, Vincenzo Riccati (1707-1775), estudou as funções hiperbólicas. Isso aparece em seu livro de dois volumes "Opusculorum anúncio res physicas et mathematicas pertinentium" (1757-1762). Ele descobriu as fórmulas para adição e subtração de funções hiperbólicas, análogas àquelas para as funções trigonométricas, sua relação com a função exponencial e suas derivadas. Que foi publicado no livro, "Institutiones Analyticae" (Vol. 1, 1765; Vol. 2, 1767), o qual Girolamo Saladini (1731-1813), que era um estudante brilhante de Riccati, era um co-autor. Riccati usava $Sh.$ e $Ch.$ como notação para o seno e cosseno hiperbólico e utilizava as siglas semelhantes de Sc e Cc para as funções circulares, seno e cosseno. Riccati e Saladini também trabalharam nas curvas "Rose" que tinham sido introduzidas pelo filósofo e matemático, Guido Grandi (1671-1742), que foi autor de uma série de obras sobre geometria em que ele considerava as analogias do círculo e a hipérbole equilátera.

Em 1768, o matemático, Johann Heinrich Lambert (1728-1777), publicou seu trabalho, onde foi feito o primeiro desenvolvimento sistemático das funções hiperbólicas. Lambert deu as funções hiperbólicas o mesmo tratamento que o matemático Euler deu as funções

¹³(384 a.C. - 322 a.C) nasceu em Estagira, na Macedônia, antiga região da Grécia. Morreu em 322 a.C., em Cálcia, na Eubéia.

trigonométricas, ficando assim associado às funções hiperbólicas, da mesma forma que Euler está associado a funções trigonométricas; Lambert, apesar de ser mais conhecido por seu trabalho sobre π , popularizou a trigonometria hiperbólica, ao usar as notações de $\sinh x$ e $\cosh x$ para representar essas funções, que é amplamente utilizada até hoje na ciência moderna.

O interesse pelas funções hiperbólicas aumentou com a construção e aperfeiçoamento das pontes pênsis e a invenção e comercialização da energia elétrica. Em meados da década de 1850 com o desenvolvimento de telégrafos e seguido pelo telefone e da necessidade da indústria, usinas geradoras e linhas de transmissão elétricas começaram a atravessar a América, durante as primeiras décadas de 1900, as aplicações das funções hiperbólicas podem ser encontrados em muitas disciplinas científica, principalmente nas engenharias.

Capítulo 2

Conceituação das Funções Hiperbólicas

2.1 Circunferência

Imagine um prego afixado em uma superfície plana α , um barbante preso nele de tamanho r cm e na ponta, preso ao barbante, um lápis, ao dar uma volta completa com o barbante totalmente esticado, teremos uma curva fechada simples denominada circunferência.

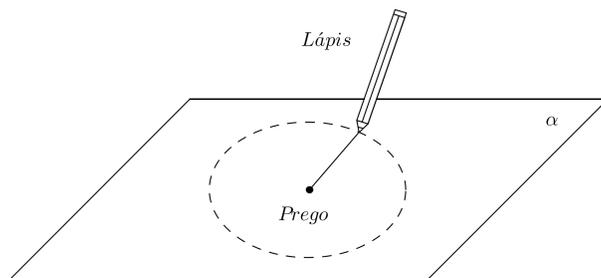


Figura 2.1: Circunferência

Definição 2.1.1. *Dados um ponto C , pertencente a um plano α , e uma distância r não nula, chama-se circunferência o conjunto dos pontos de α que estão à distância r do ponto C . A distância r é chamada raio.*

$$\text{circunferência} = \{P \in \alpha / |PC| = r\}$$

Iremos agora tomar a circunferência no plano cartesiano xy , onde o prego representará o ponto C e terá coordenadas (a, b) e o barbante de medida r cm será chamado de raio. Logo em seguida tomaremos o ponto P de coordenadas (x, y) pertencente a circunferência, por definição, o ponto P pertencerá a circunferência se, e somente se, a distância do centro C ao ponto P for igual ao raio r .

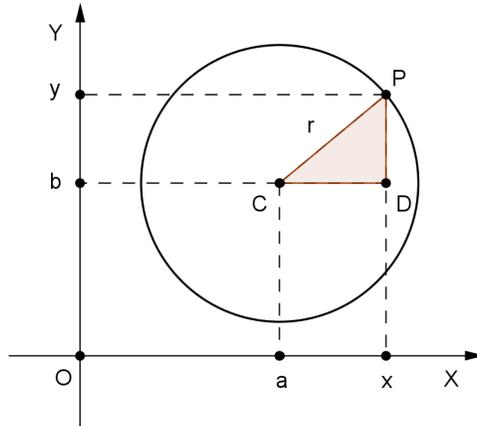


Figura 2.2: Circunferência

O triângulo retângulo obtido na figura acima nos fornecerá a equação reduzida da circunferência, através do uso do teorema de Pitágoras¹.

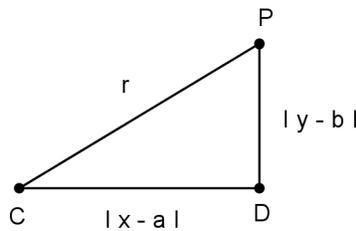


Figura 2.3: Triângulo Retângulo

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(\overline{CD})^2 + (\overline{PD})^2 = r^2$$

$$(|x - a|)^2 + (|y - b|)^2 = r^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (2.1)$$

(equação reduzida da circunferência)

O comprimento do segmento \overline{CD} é a distância entre os pontos C e D , o comprimento do segmento \overline{PD} é a distância entre os pontos P e D , e o comprimento do segmento \overline{CP} é a distância entre os pontos C e P que representa o raio e $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é a equação reduzida da circunferência.

¹Teorema de Pitágoras: Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Se o centro da circunferência coincide com a origem do plano cartesiano, $a = b = 0$, sua equação reduzida passa a ser dada por:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (2.2)$$

(equação reduzida da circunferência centrada na origem)

Se tomarmos a equação reduzida da circunferência e a desenvolvermos e em seguida fizermos algumas substituições obteremos sua equação geral,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Desenvolvendo,

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Fazendo as substituições, temos:

$$\alpha = -2a = \text{coeficiente de } x$$

$$a = -\frac{\text{coeficiente de } x}{2}$$

$$\beta = -2b = \text{coeficiente de } y$$

$$b = -\frac{\text{coeficiente de } y}{2}$$

$$\gamma = a^2 + b^2 - r^2 = \text{termo independente}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - \text{termo independente}}$$

Portanto,

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad (2.3)$$

(equação geral da circunferência)

2.2 Elipse

Uma forma prática para fazer seu desenho é tomar um barbante de tamanho $2a$ e amarrar suas extremidades em dois pregos F_1 e F_2 , afastados um do outro, cuja distância

seja $2c$, com $a > c$, e com um lápis esticando o barbante o máximo possível traçar o seu contorno na superfície plana α , obtendo assim uma curva fechada simples denominada elipse.

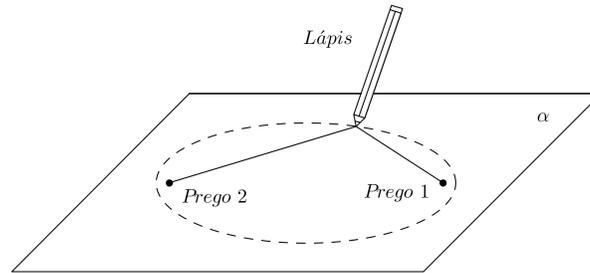


Figura 2.4: Elipse

Definição 2.2.1. *Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles.*

Elipse é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $2a > 2c$),

$$elipse = \{P \in \alpha / |PF_1| + |PF_2| = 2a\}.$$

Iremos agora tomar a elipse no plano cartesiano xy , onde os pregos representam os focos da elipse F_1 e F_2 de coordenadas $(c, 0)$ e $(-c, 0)$ e a distância $|F_1F_2| = 2c$ é chamada distância focal, V_1 e V_2 são vértices da elipse de coordenadas $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ e a distância $|V_1V_2| = 2a$ representa o eixo maior da elipse, B_1 e B_2 são vértices da elipse de coordenadas $(0, b)$ e $(0, -b)$ e a distância $|B_1B_2| = 2b$ representa o eixo menor da elipse, o ponto O , que é o ponto médio da distância focal, é o centro da elipse, P é ponto da elipse que tem coordenadas (x, y) e $|PF_1| + |PF_2| = d_1 + d_2 =$ comprimento do barbante $= 2a$.

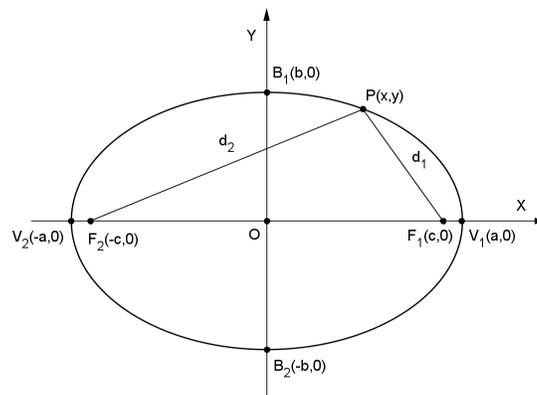


Figura 2.5: Elipse

O que acontece quando o ponto P coincide com o ponto B_1 ? Pelo desenho abaixo, usando o teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo POF_1 , temos: $a^2 = b^2 + c^2$.

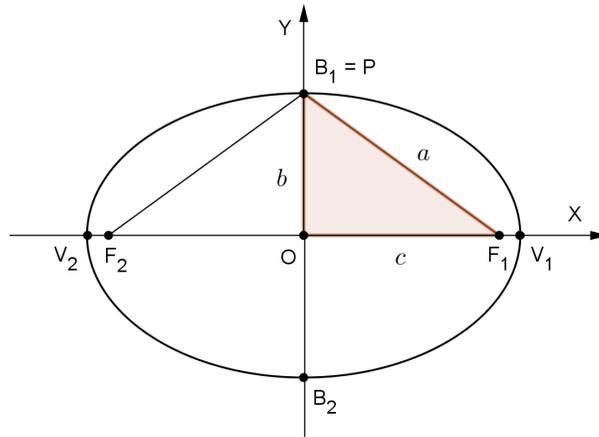


Figura 2.6: Elipse

Uma forma de obter a equação reduzida da elipse é usando o fato que $|PF_1| + |PF_2| = d_1 + d_2 = 2a$.

Da definição de elipse, vem

$$\begin{aligned} |PF_1| + |PF_2| &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \\ a^2(x-c)^2 + a^2y^2 &= (a^2 - cx)^2 \\ a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Usando a relação fundamental $b^2 = a^2 - c^2$, temos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Portanto:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.4)$$

(equação reduzida da elipse centrada na origem)

A equação reduzida da circunferência é $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ e a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se fizermos na equação da elipse $a = b = 1$, teremos a circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$ de centro $(0, 0)$, quer dizer $a = b = 0$, e raio 1, logo podemos observar que qualquer circunferência e em particular a unitária é um caso especial da elipse.

Podemos também abordar a relação entre a elipse e circunferência, como a razão entre as medidas c e a da elipse, que recebe o nome de excentricidade $e = \frac{c}{a}$ com $c < a$, onde e irá variar no intervalo de $0 < e < 1$, que mede o grau de achatamento da elipse, observe que, quando os focos são muito próximos, ou seja, quando c é muito pequeno, a elipse tende a torna-se uma circunferência (figura 2.7). De forma análoga, quando a distância focal é muito grande, ou seja, quando c tende para a , a elipse toma uma forma cada vez mais alongada (figura 2.8). Exemplos.:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

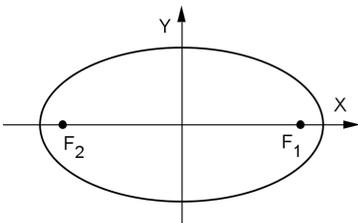


Figura 2.7: Elipse

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

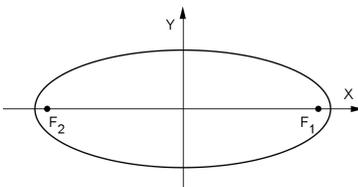


Figura 2.8: Elipse

2.3 Círculo Trigonométrico

Ao analisar a circunferência de centro na origem e raio unitário estamos na verdade olhando para o círculo trigonométrico, também chamado de circunferência unitária ou ciclo trigonométrico, podemos concluir, então, que o círculo trigonométrico é um caso especial da circunferência e que por sua vez é um caso especial da elipse.

O círculo trigonométrico, fixado no ponto O , pode ser percorrido em dois sentidos: horário (sentido dos ponteiros do relógio) e anti-horário (sentido contrário aos ponteiros do relógio), por convenção o sentido anti-horário é positivo e o sentido horário é negativo. Os eixos x e y do plano cartesiano determinam, na circunferência, quatro arcos, ou seja, quatro quadrantes. É importante lembrar que a medida do ângulo central no círculo trigonométrico é igual a medida do arco circular por ele subtendido. Podemos observar que o ângulo central em uma volta é 2π radianos e o comprimento do arco circular em uma volta é $2\pi r$, como o raio do círculo trigonométrico é unitário, o arco circular terá medida 2π , igual ao ângulo central. Como o círculo trigonométrico tem ângulo central e arco circular iguais a 2π radianos, cada quadrante terá ângulo central e medida de arco circular igual a $\frac{\pi}{2}$ radianos. Como o círculo trigonométrico inteiro tem 2π radianos e 360 graus, segue-se que $2\pi \text{ rad} = 360 \text{ graus}$, ou seja, $1 \text{ rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right) \text{ graus} = 57,3 \text{ graus}$. Portanto $0 \text{ rad} = 0 \text{ graus}$, $\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90 \text{ graus}$, comprimento do arco circular AB , $\pi \text{ rad} = 180 \text{ graus}$, comprimento do arco circular AC , $\frac{3\pi}{2} \text{ rad} = 270 \text{ graus}$, comprimento do arco circular AD e $2\pi \text{ rad} = 360 \text{ graus}$, comprimento do arco circular AE . O *radiano* é a unidade padrão de medida angular. Representa, em um mesmo círculo, a razão entre o comprimento l de um arco circular e seu raio r . Dessa forma podemos dizer que um ângulo mede 1 radiano se, e somente se, o arco subtendido por ele, tem comprimento igual a 1, quer dizer, igual ao raio do círculo trigonométrico.

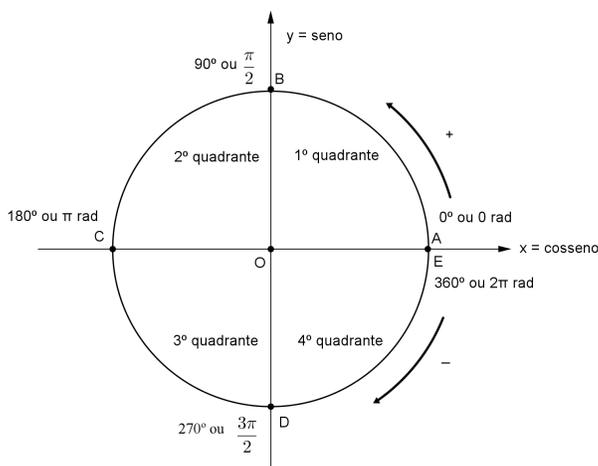


Figura 2.9: Círculo Trigonométrico

Dado um ponto P no círculo trigonométrico o seno do ângulo α é a ordenada (OP_1) do ponto P.

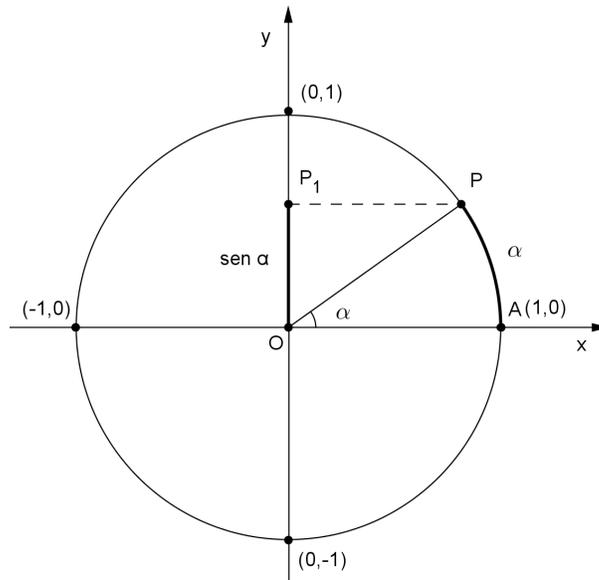


Figura 2.10: Seno

Como o círculo trigonométrico é dividido em quadrantes, cada quadrante tem um sinal específico definido pelo plano cartesiano da seguinte forma:

o $\text{sen } \alpha$ é positivo no 1º e 2º quadrantes e é negativo no 3º e 4º quadrantes.

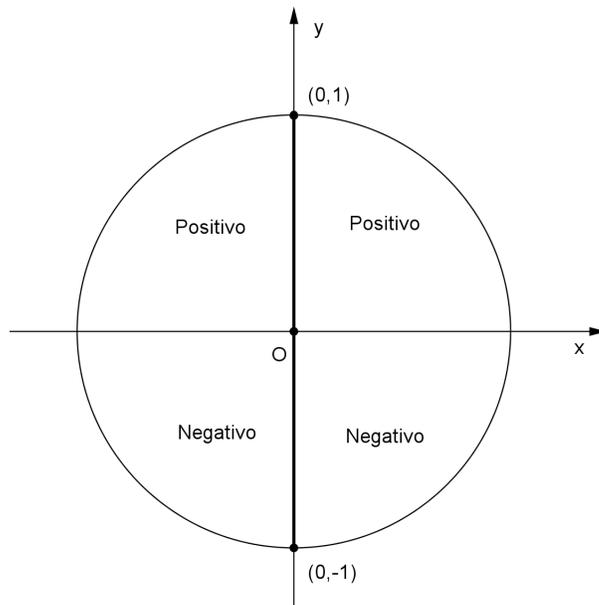


Figura 2.11: Quadrantes do Círculo trigonométrico

Dado um ponto P no círculo trigonométrico o cosseno do ângulo α é a abscisa (OP_2) do ponto P.

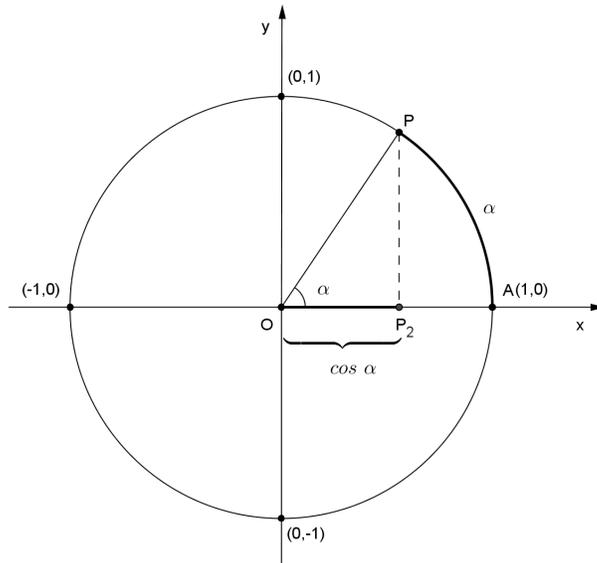


Figura 2.12: Círculo Trigonométrico

Como o círculo trigonométrico é dividido em quadrantes, cada quadrante tem um sinal específico definido pelo plano cartesiano da seguinte forma:

O $\cos \alpha$ é positivo no 1º e 4º quadrantes e é negativo 2º e 3º quadrantes.

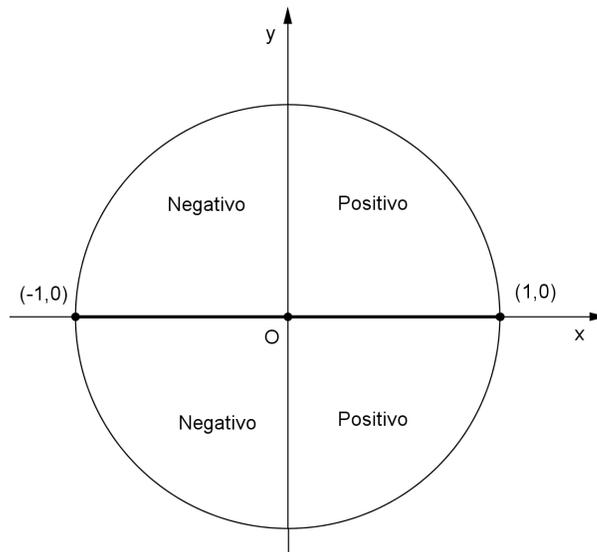


Figura 2.13: Círculo Trigonométrico

Definição 2.3.1. As funções $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, são chamadas função cosseno e função seno respectivamente, são definidas pondo-se, para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) = (\text{cost}, \text{sent})$$

Como a função seno é definida de \mathbb{R} em \mathbb{R} , o domínio é o conjunto dos números reais. No círculo trigonométrico como raio é unitário, da definição de seno, temos $-1 \leq \text{sen}\alpha \leq 1$, portanto sua imagem é o intervalo $[-1,1]$. A função seno é periódica, de período 2π .

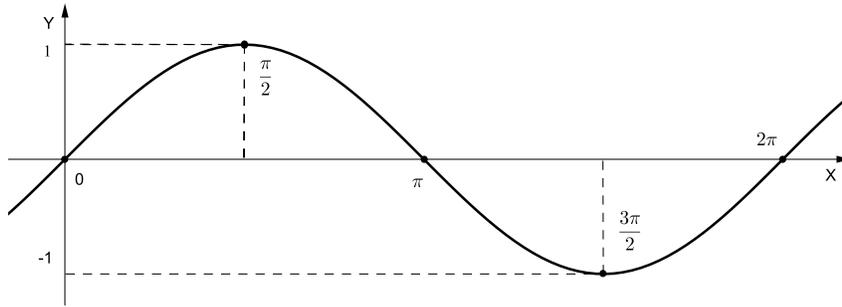


Figura 2.14: Gráfico do Seno

Como a função cosseno é definida de \mathbb{R} em \mathbb{R} , o domínio é o conjunto dos números reais. No círculo trigonométrico como raio é unitário, da definição de cosseno, temos $-1 \leq \text{cos}\alpha \leq 1$, portanto sua imagem é o intervalo $[-1,1]$. A função cosseno é periódica, de período 2π .

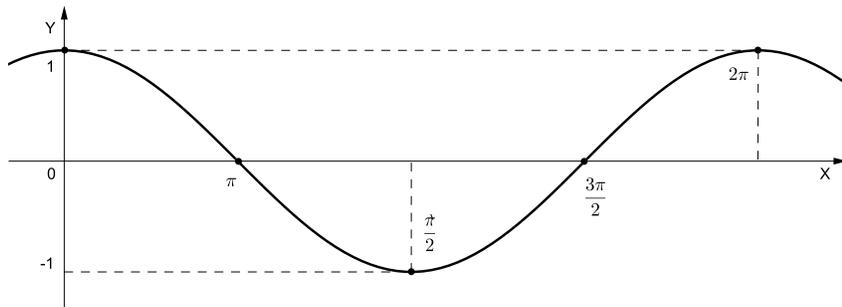


Figura 2.15: Gráfico do Cosseno

As funções seno e cosseno são funções periódicas, de período 2π .

Definição 2.3.2. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(t + kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ chama-se o período da função f .

O comportamento da função seno é o mesmo para a primeira volta $f(\alpha) = \text{sen}\alpha, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$, para a segunda volta $f(\alpha) = \text{sen}\alpha, 2\pi \leq \alpha \leq 4\pi$, para a terceira volta $f(\alpha) =$

$\text{sen}\alpha, 4\pi \leq \alpha \leq 6\pi$ e assim sucessivamente. De uma forma geral $\text{sen}\alpha = \text{sen}(\alpha + 2\pi) = \text{sen}(\alpha + 4\pi) = \text{sen}(\alpha + 6\pi) = \dots = \text{sen}(\alpha + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$. É por essa razão que seu período é 2π . O mesmo aplica-se ao cosseno.

2.4 Hipérbole

Tomando os pontos F_1 e F_2 e o eixo $V_1V_2 = 2a$, podemos obter os pontos da hipérbole da seguinte forma:



Figura 2.16: Construção da Hipérbole

I) Marca-se um ponto A externo ao segmento F_1F_2 .

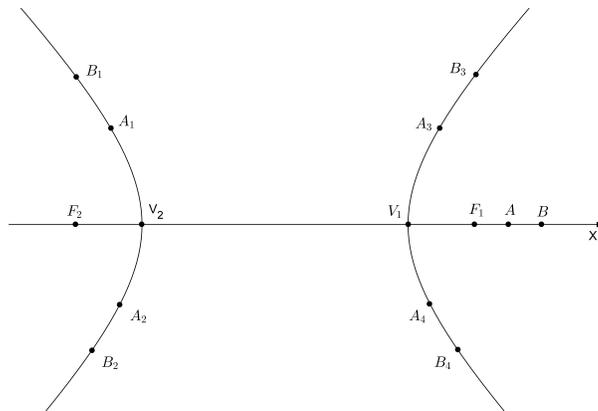


Figura 2.17: Hipérbole

II) Com centro em F_1 e F_2 traçam-se dois arcos de raio V_1A .

III) Depois, com raio V_2A e centros em F_1 e F_2 , traçam-se dois arcos que interceptam os primeiros em quatro pontos A_1, A_2, A_3 e A_4 que pertencem à hipérbole.

IV) Procedendo da mesma forma com o ponto B, distinto de A e externo ao segmento F_1F_2 , obtemos quatro novos pontos B_1, B_2, B_3 e B_4 da hipérbole. Continuando com o processo podemos obter quantos pontos quisermos da hipérbole.

Definição 2.4.1. Considerando num plano α , dois pontos distintos F_1 e F_2 , e sendo $2a$ um número real maior que a distância entre F_1 e F_2 , Chama-se de hipérbole o conjunto dos pontos do plano α , tais que o módulo da diferença das distâncias desses pontos a F_1 e F_2 seja sempre igual a $2a$,

$$\text{hipérbole} = \{P \in \alpha / |PF_1 - PF_2| = 2a\}.$$

Iremos agora tomar a hipérbole no plano cartesiano xy , sendo os focos da hipérbole F_1 e F_2 de coordenadas $(c, 0)$ e $(-c, 0)$ e a distância $|F_1F_2| = 2c$ é chamada distância focal, V_1 e V_2 são vértices da hipérbole de coordenadas $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ e a distância $|V_1V_2| = 2a$ representa o eixo real ou transverso da hipérbole, B_1 e B_2 são vértices da elipse de coordenadas $(b, 0)$ e $(-b, 0)$ e a distância $|B_1B_2| = 2b$ representa o eixo imaginário ou eixo conjugado da hipérbole, o ponto O , é o ponto médio da distância focal, P é ponto da hipérbole que tem coordenadas (x, y) e $|PF_2 - PF_1| = d_2 - d_1 = 2a$.

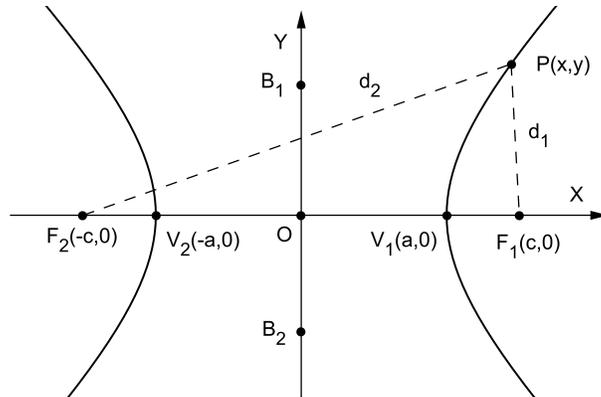


Figura 2.18: Hipérbole

Para a demonstração da equação reduzida da hipérbole iremos utilizar a relação fundamental $c^2 = a^2 + b^2$.

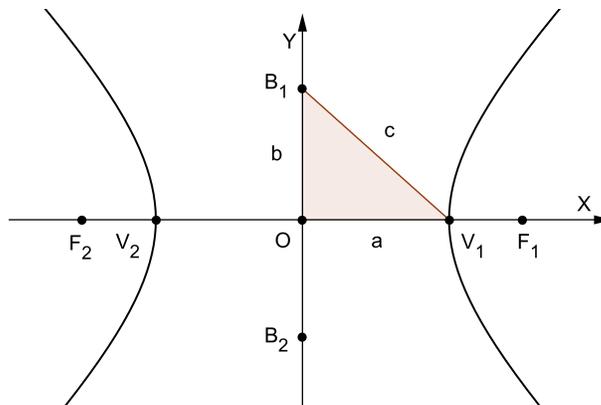


Figura 2.19: Hipérbole

Uma forma de obter a equação reduzida da hipérbole é usando o fato que $|PF_2 - PF_1| = d_2 - d_1 = 2a$.

Da definição de hipérbole, vem:

$$\begin{aligned} |PF_2 - PF_1| &= 2a \\ |\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| &= 2a. \end{aligned}$$

Retirando o módulo, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ 4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Dividindo por 4 e elevando novamente ambos os membros ao quadrado, vem:

$$\begin{aligned} c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \end{aligned}$$

Da relação fundamental da hipérbole, temos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 - a^2 &= b^2. \end{aligned}$$

Substituindo esse valor na igualdade, obtemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo os dois membros por a^2b^2 , vem:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.5)$$

(equação reduzida da hipérbole centrada na origem)

■

Uma hipérbole é chamada equilátera quando os semi-eixos a e b são iguais.

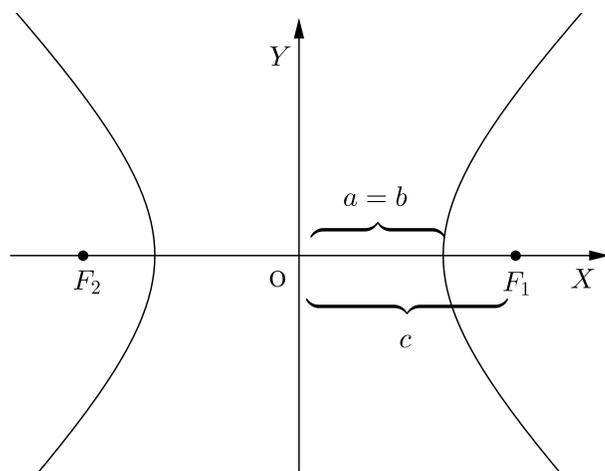


Figura 2.20: Hipérbole Equilátera

2.5 Medidas de ângulos sobre o círculo trigonométrico e a hipérbole equilátera

Nosso objetivo nesta seção é definir ângulo hiperbólico fazendo uma analogia com o círculo trigonométrico. Sabemos que a medida do ângulo central do círculo trigonométrico é igual à medida do arco circular por ele subtendido, mas existe outra maneira de encontrarmos a medida do ângulo trigonométrico através do cálculo da área do seu setor circular.

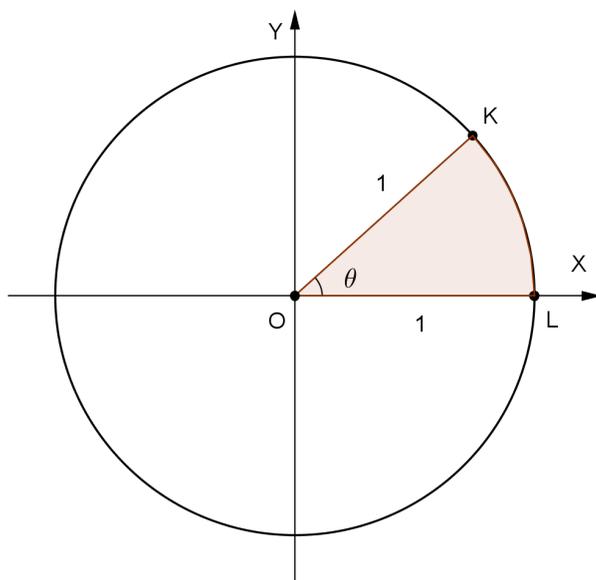


Figura 2.21: Círculo Trigonométrico

Observe que o ângulo central para uma volta completa do círculo trigonométrico mede

2π radianos e que a área do círculo trigonométrico vale πr^2 , como o raio é unitário, então vale π unidades de área.

Podemos estabelecer a seguinte relação para uma volta completa. O ângulo central 2π do círculo trigonométrico corresponde a área πr^2 e o ângulo central θ do setor circular corresponde a área do setor A_s . Resolvendo essa proporção obtemos o valor da área do setor circular A_s subtendido pelo ângulo θ .

$$\begin{aligned} 2\pi &\longrightarrow \pi r^2 \\ \theta &\longrightarrow A_s \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{2\pi}{\theta} = \frac{\pi}{A_s}$$

Portanto, $A_s = \frac{\theta}{2}$ unidades de área.

Dessa forma, podemos dizer que um ângulo trigonométrico mede θ radianos se o setor circular subtendido por ele for igual a $\frac{\theta}{2}$ unidades de área. De forma análoga, iremos definir ângulo hiperbólico como sendo o dobro do valor numérico da área do setor hiperbólico subtendido por ele. Se área do setor hiperbólico mede $\frac{\theta}{2}$ unidades de área o ângulo hiperbólico medirá θ .

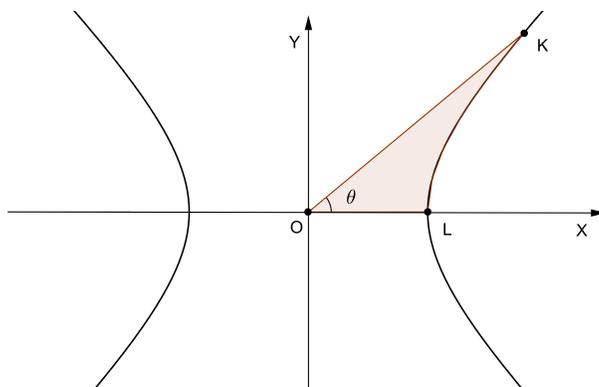


Figura 2.22: Hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$

Definição 2.5.1. Um ponto K sobre a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$ define um setor hiperbólico LOK e um ângulo hiperbólico $LÔK$. Dizemos que o ângulo hiperbólico $LÔK$ mede θ se a área do setor hiperbólico LOK medir $\frac{\theta}{2}$ unidades de área.

Observe que a área do setor hiperbólico é maior ou igual, em um único caso, a área do setor circular, definido por um mesmo ângulo. Enquanto o ângulo trigonométrico θ tem variação no intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, o ângulo hiperbólico θ tem variação no intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Normalmente, a área de uma figura não é número negativo. As vezes é conveniente usar **áreas orientadas**, ou seja, providas de sinal + ou - (ELON 2006, pág 197). definiremos a área orientada do setor hiperbólico que está acima do eixo x com sinal positivo e a área orientada do setor hiperbólico que está abaixo do eixo x com sinal negativo. Se observarmos o ponto K poderemos tirar as seguintes conclusões:

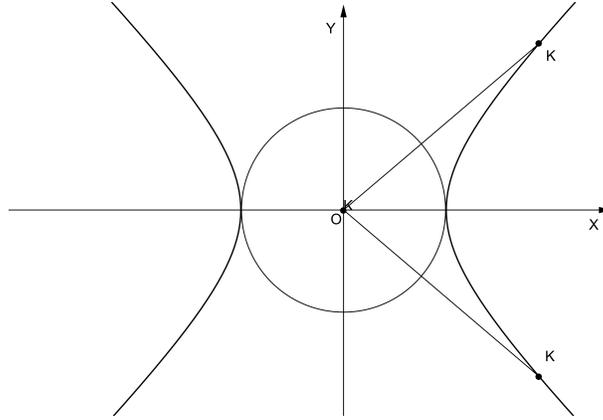


Figura 2.23: Hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$

1. Se o ponto K está acima do eixo dos abscissas, a área do setor hiperbólico terá sinal positivo e conseqüentemente o ângulo hiperbólico, definido por ele, também.
2. Se o ponto K está abaixo do eixo dos abscissas, a área do setor hiperbólico terá sinal negativo e conseqüentemente o ângulo hiperbólico, definido por ele.

Assim, um ângulo hiperbólico, tendo medida $\pm \frac{1}{2}A_{OLK}$, assumirá valores entre $-\infty$ e $+\infty$.

2.6 Definição das funções hiperbólicas através da analogia com o círculo trigonométrico

As funções hiperbólicas são similares às funções trigonométricas, sendo que as primeiras são obtidas a partir da hipérbole equilátera já as outras são obtidas a partir do círculo trigonométrico. Usando a analogia entre o círculo trigonométrico e a hipérbole equilátera, daremos as funções hiperbólicas o mesmo tratamento que as funções trigonométricas e desenvolveremos algumas relações.

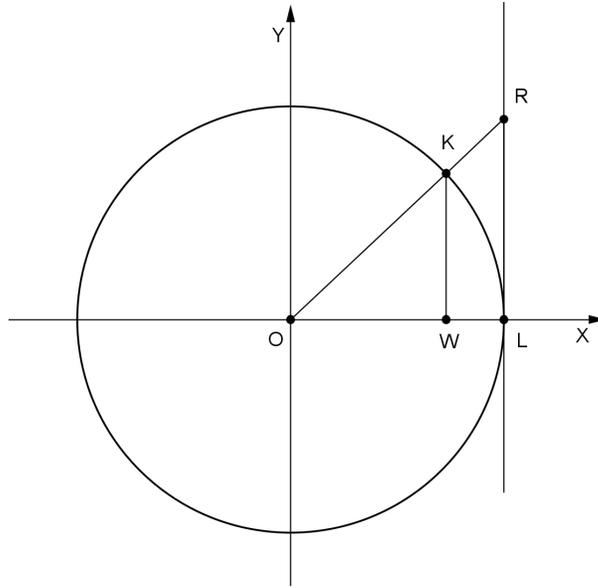


Figura 2.24: Círculo Trigonométrico $x^2 + y^2 = 1$

Seja K um ponto sobre a circunferência de modo que o setor trigonométrico LOK tenha área $\frac{\theta}{2}$ unidades de área, portanto o ângulo trigonométrico \widehat{LOK} terá medida θ radianos. LR a reta tangente à curva em L .

A distância da origem O a projeção do ponto K no eixo y , representa o valor do seno do ângulo trigonométrico θ . A distância da origem O a projeção do ponto K no eixo x , representa o valor do cosseno do ângulo trigonométrico θ e a distância do ponto L ao ponto R na reta LR representa o valor da tangente do ângulo trigonométrico θ .

Dessa forma o ponto K tem coordenadas $x = OW = \cos\theta$ e $y = WK = \sin\theta$. Portanto podemos definir,

$$\sin\theta = WK$$

$$\cos\theta = OW$$

$$\operatorname{tg}\theta = LR.$$

Como o ponto K , pertence ao círculo trigonométrico, temos:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$OW^2 + WK^2 = 1$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

(Relação fundamental da trigonometria)

Pela figura 2.24, sabemos que o $\triangle OWK \sim \triangle OLR$, pelo caso AA, portanto:

$$\frac{LR}{1} = \frac{WK}{OW}$$

$$tg\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}.$$

Para que possamos falar sobre as próximas identidades trigonométricas, definiremos:
 $\text{sec}^2\theta = \frac{1}{\text{cos}^2\theta}$, $\text{cotg}^2\theta = \frac{\text{cos}^2\theta}{\text{sen}^2\theta}$ e $\text{cossec}^2\theta = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$.

Sabemos que, $\text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, Dividindo por: $\text{cos}^2\theta$, temos:

$$1 + \frac{\text{sen}^2\theta}{\text{cos}^2\theta} = \frac{1}{\text{cos}^2\theta}$$

$$1 + \text{tg}^2\theta = \text{sec}^2\theta.$$

Sabemos que, $\text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, Dividindo por: $\text{sen}^2\theta$, temos:

$$\frac{\text{cos}^2\theta}{\text{sen}^2\theta} + 1 = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}$$

$$\text{cotg}^2\theta + 1 = \text{cossec}^2\theta.$$

Acabamos de demonstrar algumas identidades trigonométricas ².

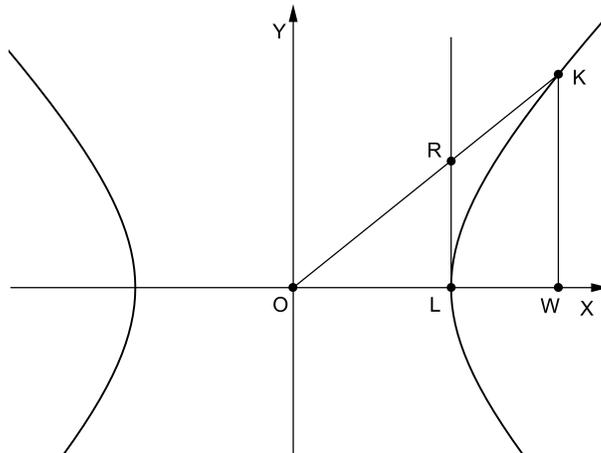


Figura 2.25: Hipérbole $x^2 - y^2 = 1$

Seja K um ponto sobre a hipérbole equilátera de modo que o setor hiperbólico LOK tenha área $\frac{\theta}{2}$ unidades de área. É importante lembrar que θ não representa, de forma alguma, um ângulo como acontece com as funções trigonométricas, enquanto um é dado

²Lembrando que essas identidades trigonométricas são as básicas, ainda temos várias outras.

em radianos o outro é dado em unidades de área, portanto podemos dizer que $L\widehat{O}K$ tem medida θ unidade de áreas. LR a reta tangente à curva em L .

A distância da origem O a projeção do ponto K no eixo y , representa o valor do seno hiperbólico do ângulo hiperbólico θ . A distância da origem O a projeção do ponto K no eixo x , representa o valor do cosseno hiperbólico do ângulo hiperbólico θ e a distância do ponto L ao ponto R na reta LR representa o valor da tangente hiperbólica do ângulo hiperbólico θ .

Dessa forma, o ponto K tem coordenadas $x = OW = \cosh\theta$ e $y = WK = \sinh\theta$. Portanto podemos definir,

$$\sinh\theta = WK \quad (2.6)$$

$$\cosh\theta = OW \quad (2.7)$$

$$\tanh\theta = LR. \quad (2.8)$$

Como o ponto K , pertence a hipérbole equilátera, temos:

$$X^2 - Y^2 = 1$$

$$OW^2 - WK^2 = 1$$

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1. \quad (2.9)$$

(Relação fundamental da trigonometria hiperbólica)

Pela figura 2.25, sabemos que o $\triangle OWK \sim \triangle OLR$, pelo caso AA, portanto:

$$\frac{LR}{1} = \frac{WK}{OW}$$

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}.$$

Para que possamos falar sobre as próximas identidades hiperbólicas, definiremos: $\operatorname{sech}^2\theta = \frac{1}{\cosh^2\theta}$, $\operatorname{cotgh}^2\theta = \frac{\cosh^2\theta}{\sinh^2\theta}$ e $\operatorname{cossech}^2\theta = \frac{1}{\sinh^2\theta}$.

Sabemos que, $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$. Dividindo por: $\cosh^2\theta$, temos:

$$1 - \frac{\sinh^2\theta}{\cosh^2\theta} = \frac{1}{\cosh^2\theta}$$

$$1 - \tanh^2\theta = \operatorname{sech}^2\theta. \quad (2.10)$$

Sabemos que, $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$, Dividindo por: $\sinh^2\theta$, temos:

$$\frac{\cosh^2\theta}{\sinh^2\theta} - 1 = \frac{1}{\sinh^2\theta}$$

$$\operatorname{cotgh}^2\theta - 1 = \operatorname{cossech}^2\theta. \quad (2.11)$$

Observe que demos as funções hiperbólicas o mesmo tratamento que demos as funções trigonométricas.

2.7 A Curva $y = \frac{1}{2x}$ e a Hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$

Nesta seção mostraremos que a área OLK é equivalente a área $FBLK$.

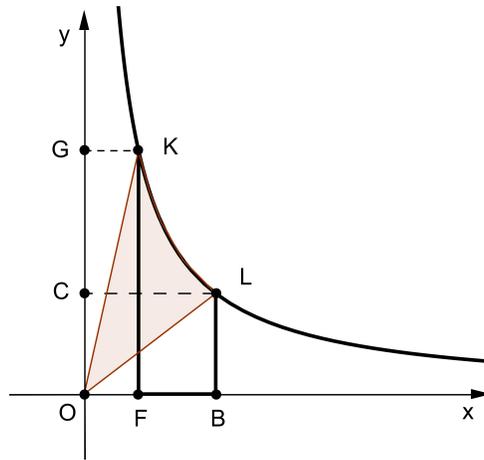


Figura 2.26: Curva $y = \frac{1}{2x}$

Usaremos a relação entre a curva $y = \frac{1}{2x}$ e a hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$ para mostrar as relações entre as funções hiperbólicas, funções exponenciais e o logaritmo natural. Tomaremos o plano cartesiano xy e nele traçaremos a curva $y = \frac{1}{2x}$, fazendo uma rotação no sentido anti-horário de $\frac{\pi}{4}$, no plano xy obteremos um novo eixo cartesiano XY e a hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$ que passa a representar a curva $y = \frac{1}{2x}$ nesse novo eixo, a rotação $\frac{\pi}{4}$ do plano cartesiano xy feita para a obtenção do plano cartesiano XY é chamada na álgebra linear de mudança de base. Portanto iremos demonstrar que a curva $y = \frac{1}{2x}$ no plano xy é representada pela hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$ no plano XY .

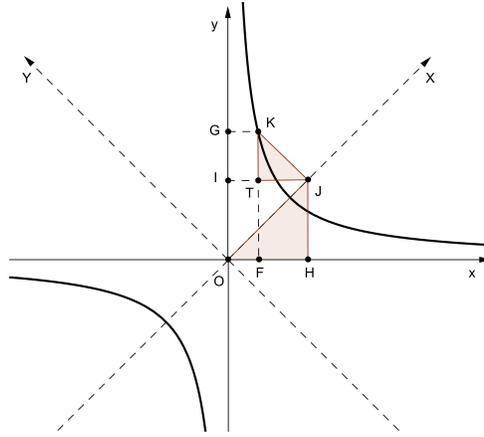


Figura 2.27: Curva $y = \frac{1}{2x}$

Seja K um ponto sobre a curva $y = \frac{1}{2x}$. Suas coordenadas em xy e XY serão, respectivamente, $x = OF, y = OG, X = OJ$ e $Y = KJ$. Sabendo que $HJ = OI$, pelo triângulo retângulo JHO , temos:

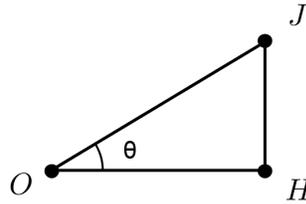


Figura 2.28: Triângulo Retângulo

$$\text{sen}\theta = \frac{HJ}{OJ}$$

$$OI = OJ \text{sen}\theta = OJ \text{sen}\frac{\pi}{4} \quad (2.12)$$

$$\text{cos}\theta = \frac{OH}{OJ}$$

$$OH = OJ \text{cos}\theta = OJ \text{cos}\frac{\pi}{4}. \quad (2.13)$$

Sabendo que $TJ = FH$ e $KT = IG$. Pelo triângulo retângulo KTJ , temos:

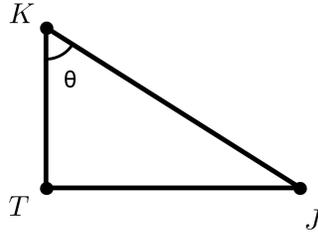


Figura 2.29: Triângulo Retângulo

$$\text{sen}\theta = \frac{FH}{KJ}$$

$$FH = KJ\text{sen}\theta = KJ\text{sen}\frac{\pi}{4} \quad (2.14)$$

$$\text{cos}\theta = \frac{IG}{KJ}$$

$$IG = KJ\text{cos}\theta = KJ\text{cos}\frac{\pi}{4}. \quad (2.15)$$

Pela figura 2.27 temos:

$$x = OF = OH - FH$$

Usando as equações 2.13 e 2.14,

$$x = OF = OH - FH = OJ\text{cos}\frac{\pi}{4} - KJ\text{sen}\frac{\pi}{4}$$

Fazendo $X = OJ$ e $Y = KJ$,

$$x = OF = OH - FH = OJ\text{cos}\frac{\pi}{4} - KJ\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \quad (2.16)$$

e

$$y = OG = OI + IG$$

Usando as equações (2.12) e (2.15),

$$y = OG = OI + IG = OJ \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + KJ \operatorname{cos} \frac{\pi}{4}$$

Fazendo $X = OJ$ e $Y = KJ$,

$$y = OG = OI + IG = OJ \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + KJ \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \quad (2.17)$$

Logo,

$$\frac{1}{2} = xy = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2).$$

Portanto a curva $y = \frac{1}{2x}$ corresponde a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$.

Tomaremos a curva $y = \frac{1}{2x}$ nos eixos xy e dois pontos quaisquer K e W nesta curva. O ponto K terá coordenadas $x = OF$ e $y = OG$ e o ponto W terá coordenadas $x = OR$ e $y = OS$.

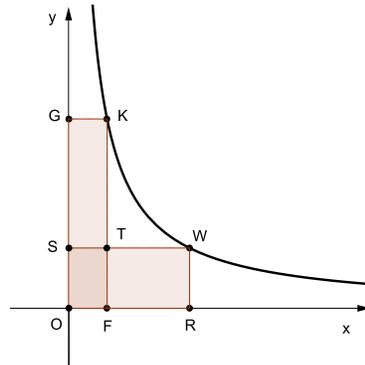


Figura 2.30: Curva $y = \frac{1}{2x}$

A área do retângulo $OFKG$ é dada por:

$$A_{OFKG} = OF \cdot OG = xy = \frac{1}{2}.$$

A área do retângulo $ORWS$ é dada por:

$$A_{ORWS} = OR \cdot OS = xy = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$A_{OFKG} = A_{ORWS}$$

Então:

$$A_{STKG} = A_{FRWT}.$$

Para que possamos calcular a área do setor hiperbólico OLK , iremos girar a figura de $\frac{\pi}{4}$ e tomar a hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$.

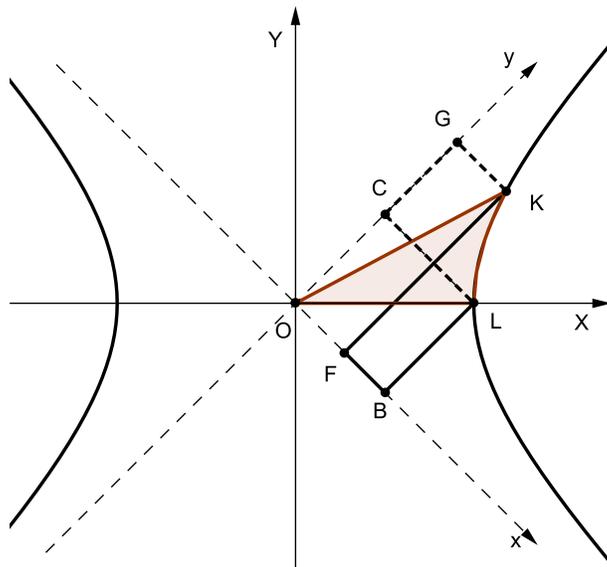


Figura 2.31: Hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$

$$A_{OFK} = \frac{1}{2}A_{OFKG} = \frac{1}{2}A_{OBLC} = A_{OBL}$$

$$A_{OBLK} = A_{OFK} + A_{FBLK} = A_{OLK} + A_{OBL}$$

Se,

$$A_{OFK} = A_{OBL}$$

Então:

$$A_{OLK} = A_{FBLK}$$

Se pensarmos com um raciocínio análogo chegaremos à conclusão que,

$$A_{OLK} = A_{GCLK} = A_{FBLK}. \tag{2.18}$$

Como podemos notar para calcular a área do setor hiperbólico OLK é só calcular a área de $FBLK$.

2.8 Parametrização do seno hiperbólico e cosseno hiperbólico

Nesta seção mostraremos a relação entre as funções hiperbólicas, exponenciais e a logarítmicas.

Definição 2.8.1. *O logaritmo natural de x é denotado por $\ln x$ e definido pela integral*

$$\ln x = \left| \int_1^x \frac{1}{t} dt \right|$$

Voltaremos aos eixos x, y e à curva $y = \frac{1}{2x}$, a área $FBLK$ é a área da região plana limitada superiormente pelo gráfico da curva $y = \frac{1}{2x}$, inferiormente pela reta $y = 0$ e lateralmente pelas retas $x = OF$ e $x = OB$.

Portanto,

$$\begin{aligned} A_{FBLK} &= \frac{1}{2} \ln |x| = \int_{OF}^{OB} \frac{1}{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} |\ln OB - \ln OF| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \ln \frac{OB}{OF} \right| \end{aligned}$$

A partir daí podemos fazer a seguinte análise, se K estiver a esquerda de L então

$$A_{FBLK} = \frac{1}{2} \ln \frac{OB}{OF} \text{ e } A_{GCLK} = \frac{1}{2} \ln \frac{OG}{OC}. \quad (2.19)$$

E se K estiver a direita de L então:

$$A_{FBLK} = \frac{1}{2} \ln \frac{OF}{OB} \text{ e } A_{GCLK} = \frac{1}{2} \ln \frac{OC}{OG}.$$

Tomaremos um ponto K sobre a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$ de tal forma que a área do setor hiperbólico gerado, por ele, seja $\frac{\theta}{2}$ unidades de área, dessa forma, LOK será igual

a θ . O ponto K , no plano XY , tem coordenadas $X = OW = \cosh\theta, Y = WK = \sinh\theta$ e no plano xy tem coordenadas $x = OF$ e $y = OG$.

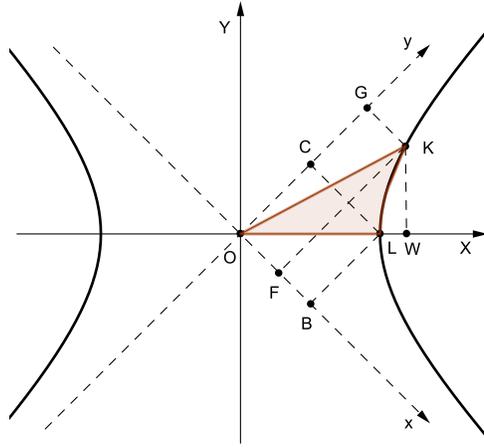


Figura 2.32: Hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$

Usando as equações 2.16 e 2.17,

$$OF = x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\theta - \sinh\theta).$$

$$OG = y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\theta + \sinh\theta).$$

Dadas as coordenadas do ponto L , $X = 1, Y = 0$ e $x = OB, y = OC$, portanto:

$$OB = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } OC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Plá equação 2.19, Temos que:

$$A_{FBLK} = \frac{1}{2} \ln \frac{OB}{OF} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\theta - \sinh\theta)} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh\theta - \sinh\theta)$$

e

$$A_{GCLK} = \frac{1}{2} \ln \frac{OG}{OC} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\theta + \sinh\theta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln(\cosh\theta + \sinh\theta)$$

Sabemos que o ângulo hiperbólico é igual ao dobro do valor numérico da área do setor

hiperbólico, então $A_{OLK} = \frac{\theta}{2}$. Como $A_{OLK} = A_{FBLK}$, temos:

$$\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}\ln(\cosh\theta - \sinh\theta)$$

e como $A_{OLK} = A_{GCLK}$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\ln(\cosh\theta + \sinh\theta).$$

Logo,

$$e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta$$

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta$$

Somando e subtraindo estas duas equações obtemos

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}. \quad (2.20)$$

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}. \quad (2.21)$$

Usaremos a parametrização das funções cosseno hiperbólico 2.10 e seno hiperbólico 2.21 em termos das funções exponenciais para demonstrar algumas proposições.

Proposição 2.8.1. *As funções circulares $\sen\theta$ e $\cos\theta$ são periódicas com período 2π , enquanto que as funções hiperbólicas $\sinh\theta$ e $\cosh\theta$ não são periódicas.*

Demonstração:

No caso das funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, não existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. O seno hiperbólico é estritamente crescente e o cosseno hiperbólico para qualquer $T \in \mathbb{R}$, $f(t+T) < f(t)$ ou $f(t+T) > f(t)$. Portanto essas funções não são periódicas. ■

Proposição 2.8.2. *A função $\sen\theta$ é limitada, com $-1 \leq \sen\theta \leq 1$, já $\sinh\theta$ varia de $-\infty$ até $+\infty$, $\sinh\theta > 0$ se $\theta > 0$, $\sinh\theta < 0$ se $\theta < 0$ e $\sinh(0) = 0$.*

Demonstração:

Para $\theta \in \mathbb{R}$ e $\theta < 0$, temos que $-\theta > 0$, sendo assim, $e^{\theta} < e^{-\theta}$, portanto $e^{\theta} - e^{-\theta} < 0$, então $\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} < 0$, logo $\sinh\theta < 0$, para $\theta \in \mathbb{R}$ e $\theta > 0$, temos que $-\theta < 0$, sendo assim, $e^{-\theta} < e^{\theta}$, portanto $e^{\theta} - e^{-\theta} > 0$, então $\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} > 0$, logo $\sinh\theta > 0$ ■

Proposição 2.8.3. A função $\cos\theta$ é limitada, com $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, já $\cosh\theta$ varia de 1 a $+\infty$, $\cosh(0) = 1$ e $\cosh\theta \geq 1$ para todo valor de θ .

Demonstração:

Para $\theta = 0$, temos que $\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$, e para $\theta \in \mathbb{R}$ e $\theta \neq 0$, temos $(e^\theta - 1)^2 > 0$, portanto, $e^{2\theta} + 1 > 2e^\theta$, se $e^\theta > 0$ para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$, então $\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} > 1$, quer dizer, $\cosh\theta > 1$. ■

Proposição 2.8.4. A função $\operatorname{tg}\theta$ varia $-\infty$ a $+\infty$, enquanto a $\operatorname{tgh}\theta$ é limitada, com $-1 < \operatorname{tgh}\theta < 1$, por causa das diretrizes da hipérbole.

Demonstração:

Para $\theta \in \mathbb{R}$, temos $-e^{-x} < e^{-x}$, então $\frac{e^x - e^{-x}}{2} < \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, portanto $\operatorname{senh}\theta < \cosh\theta$, como $\operatorname{tgh}\theta = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta}$, dessa forma $-1 < \operatorname{tgh}\theta < 1$, logo $|\operatorname{tgh}\theta| < 1$. ■

A partir da dedução do cosseno hiperbólico 2.20 e seno hiperbólico 2.21, podemos definir:

$$1. \operatorname{tgh}\theta = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1}.$$

$$2. \operatorname{cotgh}\theta = \frac{1}{\operatorname{tgh}\theta} = \frac{e^{2\theta} + 1}{e^{2\theta} - 1}.$$

$$3. \operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta} = \frac{2}{e^\theta + e^{-\theta}}.$$

$$4. \operatorname{cossech}\theta = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta} = \frac{2}{e^\theta - e^{-\theta}}.$$

Fórmulas de transformação: seno hiperbólico e cosseno hiperbólico da soma. Para demonstrarmos as identidades abaixo, tomaremos $a, b \in \mathbb{R}$,

$$1. \operatorname{senh}(a + b) = \operatorname{senh} a \cdot \cosh b + \operatorname{senh} b \cdot \cosh a$$

$$2. \cosh(a + b) = \cosh a \cdot \cosh b + \operatorname{senh} a \cdot \operatorname{senh} b$$

$$3. \operatorname{senh}(a - b) = \operatorname{senh} a \cdot \operatorname{cosh} b - \operatorname{senh} b \cdot \operatorname{cosh} a$$

$$4. \operatorname{cosh}(a - b) = \operatorname{cosh} a \cdot \operatorname{cosh} b - \operatorname{senh} a \cdot \operatorname{senh} b$$

Demonstração:

Se

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} a \cdot \operatorname{cosh} b &= \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2} \right) \cdot \left(\frac{e^b + e^{-b}}{2} \right) \\ \operatorname{senh} a \cdot \operatorname{cosh} b &= \frac{e^a \cdot e^b + e^a \cdot e^{-b} - e^{-a} \cdot e^b - e^{-a} \cdot e^{-b}}{4} \\ \operatorname{senh} a \cdot \operatorname{cosh} b &= \frac{\left(\frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2} \right) + \left(\frac{e^{a-b} - e^{-a+b}}{2} \right)}{2} \end{aligned}$$

Sabendo que:

$$\operatorname{senh}(a + b) = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2}$$

$$\operatorname{senh}(a - b) = \frac{e^{a-b} - e^{-a+b}}{2}$$

então

$$\operatorname{senh} a \cdot \operatorname{cosh} b = \frac{\operatorname{senh}(a + b) + \operatorname{senh}(a - b)}{2} \quad (2.22)$$

e como

$$\operatorname{senh} b \cdot \operatorname{cosh} a = \left(\frac{e^b - e^{-b}}{2} \right) \cdot \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} b \cdot \operatorname{cosh} a &= \frac{e^b \cdot e^a + e^b \cdot e^{-a} - e^{-b} \cdot e^a - e^{-b} \cdot e^{-a}}{4} \\ \operatorname{senh} b \cdot \operatorname{cosh} a &= \frac{\left(\frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2} \right) - \left(\frac{e^{a-b} - e^{-a+b}}{2} \right)}{2} \end{aligned}$$

então

$$\operatorname{senh} b \cdot \operatorname{cosh} a = \frac{\operatorname{senh}(a + b) - \operatorname{senh}(a - b)}{2} \quad (2.23)$$

Logo, somando (2.22) e (2.23), teremos que:

$$\sinh(a + b) = \sinh a \cdot \cosh b + \sinh b \cdot \cosh a$$

■

Demonstração:

Se

$$\begin{aligned} \cosh a \cdot \cosh b &= \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2} \right) \cdot \left(\frac{e^b + e^{-b}}{2} \right) \\ \cosh a \cdot \cosh b &= \frac{e^a \cdot e^b + e^a \cdot e^{-b} + e^{-a} \cdot e^b + e^{-a} \cdot e^{-b}}{4} \\ \cosh a \cdot \cosh b &= \frac{\left(\frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} \right) + \left(\frac{e^{a-b} + e^{-a+b}}{2} \right)}{2} \end{aligned}$$

Sabendo que:

$$\cosh(a + b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}$$

$$\cosh(a - b) = \frac{e^{a-b} + e^{-a+b}}{2}$$

então

$$\cosh a \cdot \cosh b = \frac{\cosh(a + b) + \cosh(a - b)}{2} \quad (2.24)$$

e como

$$\begin{aligned} \sinh a \cdot \sinh b &= \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2} \right) \cdot \left(\frac{e^b - e^{-b}}{2} \right) \\ \sinh a \cdot \sinh b &= \frac{e^a \cdot e^b - e^a \cdot e^{-b} - e^{-a} \cdot e^b + e^{-a} \cdot e^{-b}}{4} \\ \sinh a \cdot \sinh b &= \frac{\left(\frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} \right) - \left(\frac{e^{a-b} + e^{-a+b}}{2} \right)}{2} \end{aligned}$$

então

$$\sinh a \cdot \sinh b = \frac{\cosh(a + b) - \cosh(a - b)}{2} \quad (2.25)$$

Logo, somando (2.24) e (2.25), teremos que:

$$\cosh(a + b) = \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b$$

■

De forma análoga, poderemos demonstrar as fórmulas de transformação do seno hiperbólico e cosseno hiperbólico da diferença.

2.9 Derivada primeira, derivada segunda e integral das funções hiperbólicas

A derivada e a integral são duas noções básicas das quais se desenvolve todo curso de cálculo. O conceito da derivada está ligado ao problema de traçar a tangente a uma curva. A integral, por sua vez, está ligada ao problema de determinar áreas de uma figura qualquer. Usaremos a derivada primeira e a derivada segunda, do cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, para posteriormente auxiliar na construção dos seus gráficos.

Dadas as funções,

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad e \quad y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Formulário das derivadas:

1. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
2. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$
3. $\frac{d^2}{dx^2}(\sinh x) = \sinh x$
4. $\frac{d^2}{dx^2}(\cosh x) = \cosh x$
5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{sech}^2 x$
6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cosech}^2 x$

$$7. \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}x) = -\operatorname{sech}x \operatorname{tgh}x$$

$$8. \frac{d}{dx}(\operatorname{cossech}x) = -\operatorname{cossech}x \operatorname{cotgh}x$$

Demonstração:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senhx}) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{cosh}x$$

■

Demonstração:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosh}x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senhx}$$

■

Demonstração:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh}) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\operatorname{senhx}}{\operatorname{cosh}x} \right) = \frac{\operatorname{cosh}^2x - \operatorname{senh}^2x}{\operatorname{cosh}^2x} = \frac{1}{\operatorname{cosh}^2x} = \operatorname{sech}^2x$$

■

Demonstração:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh}x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\operatorname{tgh}x} \right) = -\frac{\operatorname{sech}^2x}{\operatorname{tgh}^2x} = -\operatorname{cossech}^2x$$

■

Demonstração:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\operatorname{cosh}x} \right) = -\frac{\operatorname{senhx}}{\operatorname{cosh}^2x} = -\operatorname{sech}x \operatorname{tgh}x$$

■

Demonstração:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cossech}x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\operatorname{senhx}} \right) = -\frac{\operatorname{cosh}x}{\operatorname{senh}^2x} = -\operatorname{cossech}x \operatorname{cotgh}x$$

■

Formulário das integrais,

1. $\int \operatorname{senh}x dx = \operatorname{cosh}x + C$

2. $\int \operatorname{cosh}x dx = \operatorname{senh}x + C$

3. $\int \operatorname{sech}^2x dx = \operatorname{tgh}x + C$

4. $\int \operatorname{cossech}^2x dx = -\operatorname{cotgh}x + C$

5. $\int \operatorname{sech}x \operatorname{tgh}x dx = -\operatorname{sech}x + C$

6. $\int \operatorname{cossech}x \operatorname{cotgh}x dx = -\operatorname{cossech}x + C$

Demonstração:

$$\int \operatorname{senh}x dx = \operatorname{cosh}x + C$$

$$\int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx = \int \frac{1}{2} e^x dx - \int \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \int e^x dx - \frac{1}{2} \int e^{-x} dx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$$

■

Demonstração:

$$\int \operatorname{cosh}x dx = \operatorname{senh}x + C$$

$$\int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) dx = \int \frac{1}{2} e^x dx + \int \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \int e^x dx + \frac{1}{2} \int e^{-x} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$$

■

De forma análoga podemos encontrar,

$$\int \operatorname{sech}^2x dx = \operatorname{tgh}x + C$$

$$\int \operatorname{cossech}^2x dx = -\operatorname{cotgh}x + C$$

$$\int \operatorname{sech}x \operatorname{tgh}x dx = -\operatorname{sech}x + C$$

$$\int \operatorname{cossech}x \operatorname{cotgh}x dx = -\operatorname{cossech}x + C$$

2.10 Estudo dos gráficos do seno hiperbólico e cosseno hiperbólico

O gráfico das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico podem ser obtido pelo método chamado adição de ordenadas. Para usar essa técnica, esboçam-se, separadamente os gráficos das funções exponenciais $y = \frac{e^x}{2}$ e $y = \frac{e^{-x}}{2}$, e somam-se as coordenadas y correspondentes. Nossa abordagem será diferente, esboçaremos o gráfico a partir do comportamento da função fazendo uso das propriedades do limite e da derivada.

Considere o gráfico do seno hiperbólico.

$$\sinh = \left\{ (x, y) : y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right\}$$

Temos:

1. $\sinh(0) = 0$.
2. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, então $y = \sinh(x)$ é ímpar. Logo se conhecermos seu gráfico para $x > 0$ basta tomar o simétrico em relação à origem para completá-lo para $x < 0$.

Demonstração:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Substituindo x por $(-x)$, temos:

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{-(-x)})$$

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$$

$$\sinh(-x) = -\frac{1}{2}(-e^{-x} + e^x)$$

$$\sinh(-x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$

■

3. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x > 0$ para todo x , ou seja, como a primeira derivada é maior que zero para todos os valores do domínio, a função

$y = \operatorname{senhx}$ é dita estritamente crescente. Lembrando que a primeira derivada está relacionada ao crescimento ou decréscimo da função.

4. $\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{senhx}) = \operatorname{senhx}$ a segunda derivada nos fornece a concavidade, se $x > 0$ então $\operatorname{senhx} > 0$ e, se $x < 0$ então $\operatorname{senhx} < 0$, portanto $y = \operatorname{senhx}$ é côncavo para cima se $\operatorname{senhx} > 0$ e côncavo para baixo se $\operatorname{senhx} < 0$ e zero é o ponto de inflexão.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{senhx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{senhx} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$, ou seja, a imagem da função $y = \operatorname{senhx}$ é todo o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

6. Como $e^x > 0$, $e^{-x} > 0$ para todo x então $-e^{-x} < e^x - e^{-x} < e^x$. Logo $-\frac{e^{-x}}{2} < \operatorname{senhx} < \frac{e^x}{2}$.

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{senhx} - \frac{e^x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{e^{-x}}{2} = 0^-$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{senhx} + \frac{e^{-x}}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2} = 0^+$.

Pelas propriedades observadas temos que: senhx se aproxima de $\frac{e^x}{2}$ quando x cresce, vindo por baixo, e se aproxima de $-\frac{e^{-x}}{2}$ quando x decresce, vindo por cima.

O gráfico abaixo representa as funções $y = \operatorname{senhx}$, $y = \frac{e^x}{2}$ e $y = -\frac{e^{-x}}{2}$.

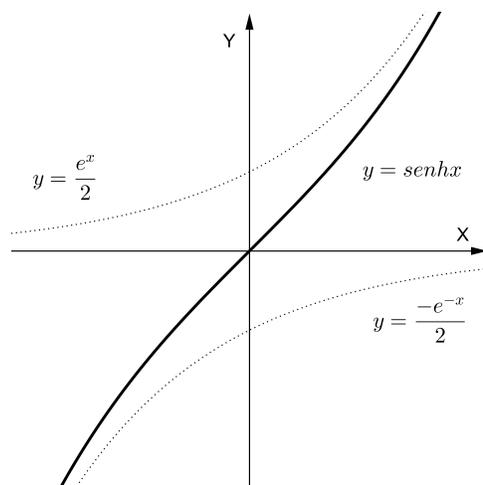


Figura 2.33: Seno Hiperbólico

Considere o gráfico cosseno hiperbólico.

$$\cosh = \left\{ (x, y) : y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right\}$$

Temos:

1. $\cosh(0) = 1$.

2. $\cosh(-x) = \cosh(x)$, isto é $y = \cosh x$ é uma função par. Assim, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos y 's.

Demonstração:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Substituindo x por $(-x)$, temos:

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)})$$

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$$

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

■

3. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x > 0$ se $x > 0$ e $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x < 0$ se $x < 0$, portanto $y = \cosh x$ é decrescente se $x < 0$, crescente se $x > 0$ e tem um mínimo global em $x = 0$. Logo, $\cosh \geq 1$.

4. $\frac{d^2}{dx^2}(\cosh x) = \cosh x \geq 1$ e logo $y = \cosh x$ é sempre côncavo para cima.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$, ou seja, a imagem da função $y = \cosh x$ é o intervalo $[1, +\infty)$.

6. Como $e^x > 0$, $e^{-x} > 0$ para todo x então $-e^{-x} < e^x - e^{-x} < e^x$. Logo $-\frac{e^{-x}}{2} < \sinh x < \frac{e^x}{2}$.

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh x - \frac{e^x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0^+ \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\cosh x - \frac{e^{-x}}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2} = 0^+.$$

Pelas propriedades observadas, temos que: $\cosh x$ se aproxima de $\frac{e^x}{2}$ quando x cresce e se aproxima de $-\frac{e^{-x}}{2}$ quando x decresce, mas é sempre maior do que elas.

O gráfico abaixo representa as funções $y = \cosh x$, $y = \frac{e^x}{2}$ e $y = -\frac{e^{-x}}{2}$.

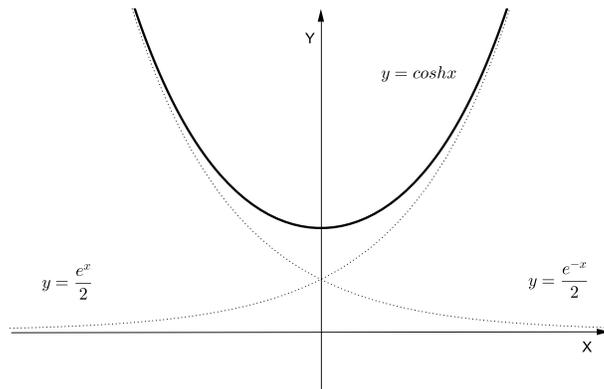


Figura 2.34: Cosseno Hiperbólico

2.11 Funções hiperbólicas inversas

As funções hiperbólicas inversas são caracterizadas de forma semelhante as funções trigonométricas e estão ligadas diretamente ao logaritmo natural. Para que uma função $f : X \rightarrow Y$ possua uma função inversa $g : Y \rightarrow X$ é necessário e suficiente que ela represente uma correspondência biunívoca entre X e Y , quer dizer, seja bijetora. Nosso objetivo agora é encontrar, caso exista, a inversa do seno hiperbólico e do cosseno hiperbólico. Chamaremos de função $f : X \rightarrow Y$ a função seno hiperbólico e de $g : Y \rightarrow X$ a sua inversa. Ao analisarmos o gráfico da função seno hiperbólico veremos que ela é uma função bijetora e portanto possui inversa. Observe que o domínio e o contra-domínio dessa função estão variando no intervalo de $(-\infty, +\infty)$, então ela é sobrejetora. Para cada $y \in (-\infty, +\infty)$, existe um único x para o qual $f(x) = y$, ela é injetora e como $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$, logo ela é bijetora e portanto possui inversa. Iremos agora determinar explicitamente a inversa da função seno hiperbólico.

Seja a função seno hiperbólico

$$y = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Chamando $e^x = u$, temos

$$y = \frac{u - u^{-1}}{2}$$

Portanto

$$u^2 - 2yu - 1 = 0$$

Calculando suas raízes

$$u = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Como $u = e^x$, então $u > 0$, teremos $|y| < \sqrt{y^2 + 1}$. Logo a única raiz positiva é $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$. Portanto, $\operatorname{arg} \operatorname{senh} x = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|$, para todo x .

A função inversa seno hiperbólico é chamada de argumento do seno hiperbólico sendo denotada por $\operatorname{arg} \operatorname{senh}$ e definida por $y = \operatorname{arg} \operatorname{senh} x = \operatorname{senh}^{-1} x = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|$.

Considerando $y = \operatorname{arg} \operatorname{senh} x = \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}|$, sua derivada é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(\operatorname{arcsenh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Substituindo x por $g(x)$ e usando a regra da cadeia, temos:

$$(\operatorname{arcsen}hg(x))' = \frac{g(x)'}{\sqrt{g(x)^2 + 1}}$$

Usaremos essas informações posteriormente no estudo da catenária.

Sua integral é:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

Como a função seno hiperbólico é crescente em todo seu domínio a sua inversa também será crescente em todo seu domínio. Para esboçar o gráfico da sua inversa basta tomar o simétrico do gráfico da função seno hiperbólico em relação à diagonal $y = x$.

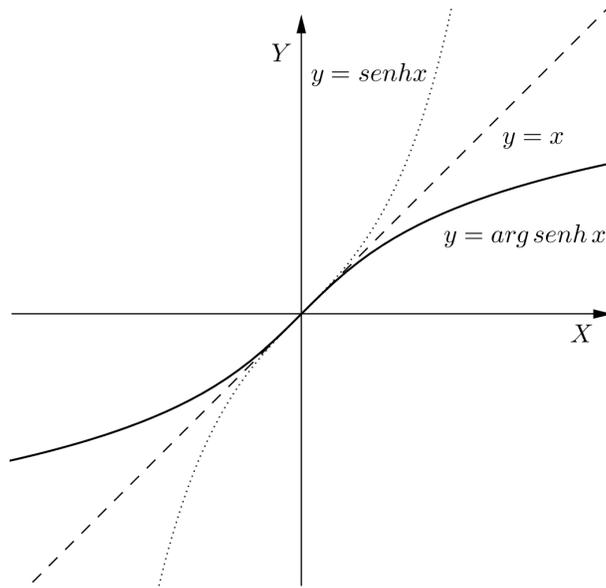


Figura 2.35: Gráfico da função $y = \operatorname{arg} \operatorname{senh} x$

Para definir a inversa da função cosseno hiperbólico é necessário restringir seu domínio. Podemos ver através do gráfico figura 2.34 que a cada valor de y na imagem, exceto $y = 1$, correspondem dois valores de x no domínio. Portanto a função cosseno hiperbólico não é injetora logo não é bijetora, e por fim não possui inversa.

Seja a função $f : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$, dada por $f(x) = \operatorname{cosh} x$, a sua função inversa é chamada de argumento do cosseno hiperbólico sendo denotada por $\operatorname{arg} \operatorname{cosh}$, definida $y = \operatorname{arg} \operatorname{cosh} x$, para $y \geq 0$. Iremos agora determinar sua inversa.

Seja a função cosseno hiperbólico

$$y = \operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Chamando $e^x = u$, temos

$$y = \frac{u + u^{-1}}{2}$$

Portanto

$$u^2 - 2yu + 1 = 0$$

Calculando suas raízes

$$u = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Como $u = e^x$, então $u > 0$, teremos $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. Logo, $\arg \cosh x = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$, para $|x| > 1$.

Considerando $y = \arg \cosh x = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$, sua derivada é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

e sua integral é:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \cosh^{-1}x + C = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C$$

Para esboçar o gráfico da sua inversa basta tomar o simétrico do gráfico da função cosseno

hiperbólico em relação à diagonal $y = x$.

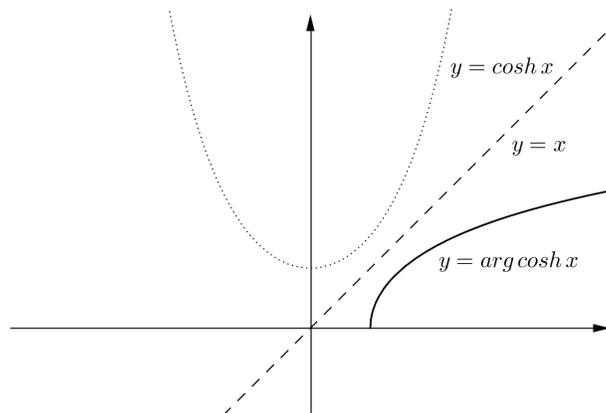


Figura 2.36: Gráfico da função $y = \operatorname{arg} \cosh x$

Capítulo 3

Catenária

3.1 Um breve histórico sobre a catenária

O problema do fio suspenso foi abordado, entre outros, por Leonardo da Vinci (1452 - 1519) e por Galileu Galilei (1564 - 1642), que foi um dos primeiros cientistas a esboçar um modelo para esta curva em seu livro "As Duas Novas Ciências" em 1638. Acreditavam que a curva era uma parábola. O problema foi lançado oficialmente para a comunidade matemática em maio de 1690, Jakob Bernoulli (1654 - 1705) desafiou a comunidade científica propondo um concurso para encontrar a forma da corrente suspensa, no "*acta eruditorum*", jornal fundado por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), e encheria de orgulho quem conseguisse resolvê-lo. A solução do problema veio depois de cinquenta anos, foi encontrada e comunicada oficialmente, pelo irmão de Jakob, Johann Bernoulli (1667 - 1748), motivo pelo qual aumentou a discórdia entre eles. Em uma carta a um amigo Johann conta que encontrou a solução da equação da catenária. Segundo Moar (2004, p.184):

Os esforços de meu irmão foram inúteis. Quanto a mim, fui mais feliz, pois encontrara a habilidade (e digo isso sem me gabar, por que deveria esconder a verdade?) para resolvê-lo inteiramente.[...] Na manhã seguinte, cheio de alegria, fui encontrar meu irmão, que ainda lutava miseravelmente com esse nó górdio, sem chegar à parte alguma, sempre achando, como Galileu, que a catenária era uma parábola. Pare! Pare!, Eu disse a ele, não se torture mais tentando provar a identidade da catenária com a parábola, porque ela é inteiramente falsa.

Além de Johann, Leibniz e Christiaan Huygens (1629 - 1695) também resolveram o problema. Huygens, com apenas 17 anos, provou com argumentos físicos que a corrente suspensa não poderia adquirir a forma de uma parábola sem chegar a definir qual seria essa nova curva, sua equação analítica. Mais tarde, com mais de 60 anos, voltou ao problema e por meios geométricos, solucionou o desafio. Já Leibniz e Johann usaram o método analítico. O problema da catenária marcou tanto o fim do estilo arquimediano,

como o início público do cálculo.

A palavra catenária é originada da palavra latina *catena* que significa cadeia ou corrente. A curva da corrente suspensa foi batizada de catenária por Leibniz e sugeriu que ela poderia ser usada no cálculo como uma espécie de tabela de logaritmos. Com a análise infinitesimal, foi possível lidar com todo tipo de função. Participaram da criação do cálculo, Leibniz e Isaac Newton (1642 - 1727) e a partir da solução do problema da corda suspensa, tornou-se menos geométrico e mais analítico.

3.2 A Função Hiperbólica, a Catenária e a Parábola

As funções hiperbólicas surgem em movimentos vibratórios, dentro de sólidos elásticos e, mais genericamente, em muitos problemas nos quais a energia mecânica é, gradualmente, absorvida pelo ambiente.

Os estudos da catenária comprovaram que sua equação não poderia ser expressa por funções logarítmicas. Sua forma pode ser expressa em notação moderna $y = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}$. Onde α é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente - massa por unidade de comprimento - e a tensão com a qual ela é segura. A catenária é constantemente confundida com uma parábola, mas são completamente diferentes, a parábola é algébrica, quer dizer, sua equação é dada por um polinômio e a catenária é transcendente, sua equação é modelada a partir do cosseno hiperbólico. Apesar disso, ela é uma curva mais comum do que pensamos, podemos encontrá-la em diversos lugares; nas extremidades do ovo, na rede elétrica de uma via férrea, nos fios de alta tensão, nas cordas suspensas por duas hastes verticais usadas em supermercado para o anúncio de produtos, em bancos na separação de filas, nas barracas de camping oferecendo resistência à ação dos ventos, na arquitetura, principalmente a catenária invertida, pois estabelece um maior equilíbrio e modernidade e na engenharia com a construção das pontes pênséis.

Iremos agora modelar o problema. Imagine um cabo perfeitamente flexível, homogêneo e não elástico, suspenso pelas suas extremidades e sob a ação do seu próprio peso. Tomaremos um sistema de coordenadas cartesianas onde o ponto mais baixo deste cabo esteja em sua origem.

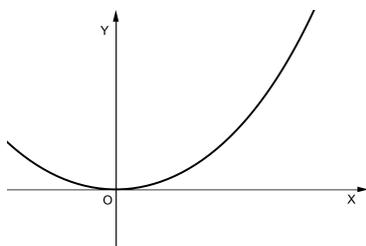


Figura 3.1: Cabo Suspenso

Seja $K(x, y)$ um ponto qualquer da curva, teremos três forças atuando neste ponto, T é a tensão que atua, tangencialmente, em K e forma um ângulo α com o eixo X , H é a tensão da corda no ponto O , atuando horizontalmente e Q é o peso do trecho OK da corda cujo comprimento é s , que atua verticalmente, em sentido contrário do eixo Y .

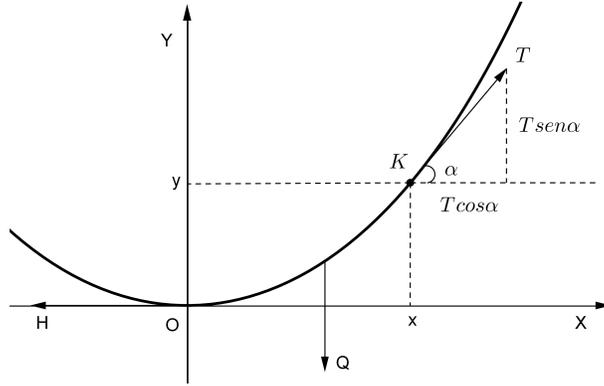


Figura 3.2: Cabo Suspenso

Essas forças conjugam-se para produzir uma força resultante, atuando sobre o trecho OK . Como o cabo está em equilíbrio, a soma de todas as forças devem anular-se, portanto:

$$\vec{T} + \vec{H} + \vec{Q} = 0$$

Ao decompor essa equação de equilíbrio sobre os dois eixos, obtemos:

$$-H + T \cos \alpha = 0$$

$$-Q + T \sin \alpha = 0.$$

Dividindo membro a membro estas duas equações, temos: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{H}$, sendo $Q = \omega s$, onde ω é o peso por unidade de comprimento e s é o comprimento do arco \overline{OK} . Dessa forma $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega}{H} s$. Por outro lado podemos analisar o seguinte esquema.

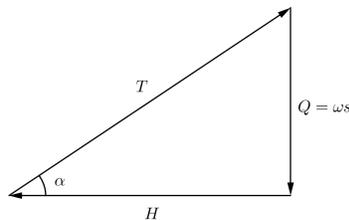


Figura 3.3: Cabo Suspenso

Como T é tangente à curva $y = f(x)$ então temos que:

$$tg\alpha = f'(x)$$

e

$$tg\alpha = \frac{\omega}{H}s$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{\omega}{H}s \quad (3.1)$$

Analisado as forças que atuam no ponto K , iremos agora determinar o comprimento de um arco. Tomaremos uma curva contínua no intervalo $[a, b]$, de acordo com o desenho abaixo.

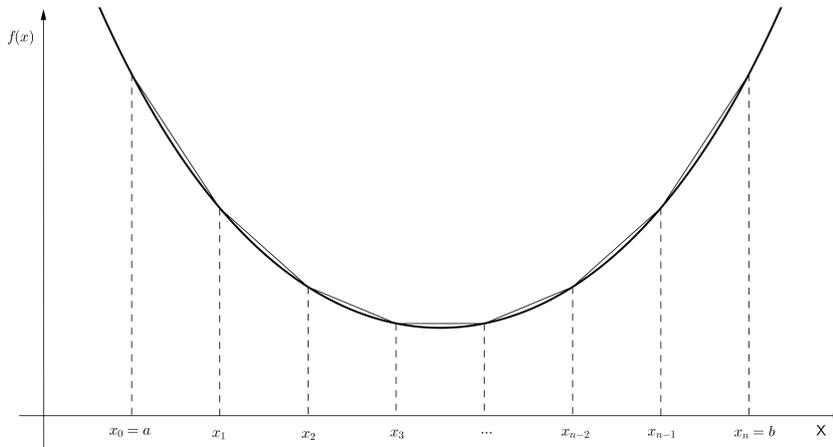


Figura 3.4: Cabo Suspenso

Traçamos uma poligonal sobre a curva contínua no intervalo $[a, b]$, determinada pelos pontos: $P_0 = (a, f(a))$ e $P_n = (b, f(b))$ e de uma forma geral, pelos pontos:

$$P_i : 0 \leq i \leq n; \text{ onde cada } P_i = (x_i, f(x_i)).$$

Exemplo: Quando $i = 0$, temos $P_0 = (x_0, f(x_0))$, quando $i = 1$, $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e de uma forma geral, quando $i = n$, $P_n = (x_n, f(x_n))$.

Vamos agora definir o comprimento da curva, representada pela função $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

$$s(b) - s(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \quad (3.2)$$

Quer dizer, o comprimento é o limite $|P_0P_1| + |P_1P_2| + \dots + |P_{n-1}P_n| + \dots$

Usando a distância entre dois pontos, podemos dizer que:

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

Colocando $(x_i - x_{i-1})^2$ em evidência, temos:

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left[1 + \frac{((f(x_i) - f(x_{i-1})))^2}{(x_i - x_{i-1})^2} \right]}$$

Observe que: a função é definida e contínua no intervalo fechado $[a, b]$, derivável nos pontos internos. Então existe pelo menos um ponto \bar{x}_i , compreendido entre a e b. Portanto Pelo Teorema do Valor Médio, temos:

$$(f(x_i) - f(x_{i-1})) = f'(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

Para algum \bar{x}_i tal que $x_{i-1} \leq \bar{x}_i \leq x_i$
portanto,

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2(1 + [f'(\bar{x}_i)]^2)}$$

Logo,

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(1 + [f'(\bar{x}_i)]^2)}\Delta x_i \tag{3.3}$$

Em que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para $1 \leq i \leq n$.

Equação (3.3) em (3.2)

$$s(b) - s(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{(1 + [f'(\bar{x}_i)]^2)}\Delta x_i$$

Em que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, para $1 \leq i \leq n$

Então:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{(1 + [f'(u)]^2)}du,$$

onde tomamos $s(0)=0$. Aplicando a derivada, temos:

$$s'(x) = \sqrt{(1 + [f'(x)]^2)} \tag{3.4}$$

Da equação (3.1), temos:

$$f'(x) = \frac{\omega}{H} s(x)$$

$$f''(x) = \frac{\omega}{H} s'(x) \quad (3.5)$$

Equação (3.4) em (3.5)

$$f''(x) = \frac{\omega}{H} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \quad (3.6)$$

Como $\frac{\omega}{H}$ é uma constante denominada Constante de Especificidade do Cabo, podemos chamar:

$$\frac{\omega}{H} = a \quad (3.7)$$

Equação (3.7) em (3.6), dessa forma, temos:

$$f''(x) = a \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \quad (3.8)$$

A curva procurada será obtida pela resolução da equação diferencial ordinária de 2ª ordem, não linear, dada acima. Observe que é próprio da equação diferencial ordinária de segunda ordem ter duas condições iniciais, onde a primeira é a constante a que representa a "Constante de Especificidade do Cabo" e a segunda é o comprimento do cabo $s(x)$, dessa forma o cabo é moldado a partir dessas duas condições. Iremos agora resolver a equação ordinária de 2ª ordem incompleta. Como o cabo suspenso foi posicionado na origem do sistema temos:

$$f(0) = 0 \text{ e } f'(0) = 0$$

Da equação (3.8), temos:

$$f''(x) = a \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Fazendo $g(x) = f'(x)$, então $g'(x) = f''(x)$, portanto:

$$g'(x) = a \sqrt{1 + g(x)^2}$$

$$a = \frac{g'(x)}{\sqrt{1 + g(x)^2}}$$

Sabendo que $(\operatorname{arcsenh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, trocando x por $g(x)$ e usando a regra da cadeia, temos: $(\operatorname{arcsenh} g(x))' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1 + g(x)^2}}$. Portanto,

$$a = (\operatorname{arcsenh} g(x))'$$

Qual a função cuja derivada é igual a uma constante? Então,

$$\operatorname{arcsenh} g(x) = ax + b$$

Logo,

$$\operatorname{senh}(ax + b) = g(x)$$

Trocando $g(x)$ por $f'(x)$ e integrando ambos os membros, temos:

$$f(x) = \frac{\operatorname{cosh}(ax + b)}{a} + k$$

Usando as condições iniciais,

$$I) f(0) = \frac{\operatorname{cosh}(0)}{a} + k \Rightarrow k = -\frac{1}{a}$$

$$II) f'(0) = g(0) = \operatorname{senh}(b) = 0 \Rightarrow b = 0$$

Como $f(x) = \frac{\operatorname{cosh}(ax + b)}{a} + k$, das condições iniciais, tem-se:

$$f(x) = \frac{1}{a}(\operatorname{cosh}(ax) - 1) \tag{3.9}$$

Finalmente chegamos a uma equação que representa a curva em questão e podemos observar que apesar de muito parecida, ela não representa uma parábola e sim uma catenária, cujo seu formato é representado pelo gráfico do cosseno hiperbólico.

3.3 Aplicação da Catenária

Para realizar a aplicação da equação da catenária, iremos partir de problemas reais, relacionados com a transmissão de energia elétrica, com os custos de construção, manutenção das redes e o impacto ambiental. O ponto de partida, deste tipo de projeto é a carta topográfica. Nela estão indicados os pontos a serem interligados através de uma rede de transmissão elétrica,¹ definidas graficamente a posição de cada torre da linha, respeitando todas as normas e restrições especificadas em 15 páginas [16]. As questões mais importantes são garantir a distância mínima dos cabos ao solo e reduzir o custo total da instalação bem como minimizar o impacto ambiental causado por sua implantação.

¹Rede de transmissão elétrica é um conjunto de torres, cabos condutores e demais acessórios, destinada ao transporte de energia elétrica

Iremos agora fazer uma aplicação.

Um cabo de transmissão de energia é esticado entre dois postes, distantes 200m, cuja a equação é $y = 75 \left(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}} \right)$. Calcule o comprimento do cabo.

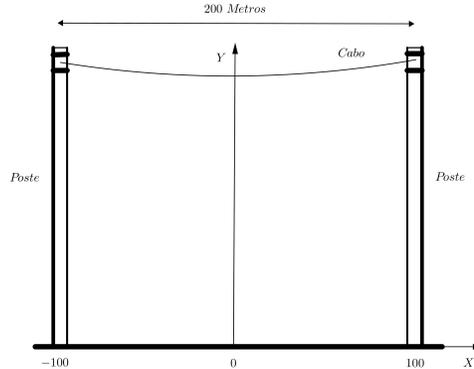


Figura 3.5: Catenária

Usaremos a fórmula que calcula o comprimento de uma curva.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Tomaremos a função

$$f(x) = 75 \left(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}} \right)$$

Calcularemos sua derivada $f'(x)$

$$f'(x) = 75 \left(\frac{1}{150} e^{\frac{x}{150}} - \frac{1}{150} e^{-\frac{x}{150}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{150}} - e^{-\frac{x}{150}} \right)$$

Elevaremos ao quadrado ambos os membros

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{150}} - e^{-\frac{x}{150}} \right)^2$$

$$f'(x)^2 = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{75}} + e^{-\frac{x}{75}} - 2 \right)^2$$

Somaremos uma unidade em cada membro

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{75}} + e^{-\frac{x}{75}} - 2 \right)$$

$$1 + [f'(x)]^2 = \frac{4 + e^{\frac{x}{75}} + e^{-\frac{x}{75}} - 2}{4}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = \frac{e^{\frac{x}{75}} + e^{-\frac{x}{75}} + 2}{4}$$

Colocando a raiz quadrada em cada membro

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{\frac{e^{\frac{x}{75}} + e^{-\frac{x}{75}} + 2}{4}}$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{\sqrt{(e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}})^2}}{2}$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}}}{2}$$

Retomando a fórmula do comprimento

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$L = 2 \int_0^{100} \frac{e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}}}{2} dx$$

$$L = \int_0^{100} e^{\frac{x}{150}} + e^{-\frac{x}{150}} dx$$

$$L = \int_0^{100} e^{\frac{x}{150}} dx + \int_0^{100} e^{-\frac{x}{150}} dx$$

Tomaremos

$$\int_0^{100} e^{\frac{x}{150}} dx$$

Fazendo $u = \frac{x}{150}$ e $du = \frac{1}{150} dx \Rightarrow dx = 150 du$

Quando $x = 0 \Rightarrow u = 0$ e quando $x = 100 \Rightarrow u = \frac{2}{3}$

Dessa forma

$$150 \int_0^{\frac{2}{3}} e^u du = 150 e^u$$

$$150 \int_0^{\frac{2}{3}} e^u du = 150 (e^{\frac{2}{3}} - e^0)$$

$$150 \int_0^{\frac{2}{3}} e^u du = 150 e^{\frac{2}{3}} - 150$$

Agora tomaremos

$$\int_0^{100} e^{-\frac{x}{150}} dx$$

Fazendo $v = -\frac{x}{150}$ e $dv = -\frac{1}{150}dx \Rightarrow dx = -150dv$

Quando $x = 0 \Rightarrow v = 0$ e quando $x = 100 \Rightarrow v = -\frac{2}{3}$

Dessa forma

$$150 \int_{-\frac{2}{3}}^0 e^v dv = 150e^v$$

$$150 \int_{-\frac{2}{3}}^0 e^v dv = 150 \left(e^0 - e^{-\frac{2}{3}} \right)$$

$$150 \int_0^{\frac{2}{3}} e^v dv = 150 - 150e^{-\frac{2}{3}}$$

Portanto

$$L = 150e^{\frac{2}{3}} - 150 + 150 - 150e^{-\frac{2}{3}}$$

$$L = 150e^{\frac{2}{3}} - 150e^{-\frac{2}{3}}$$

$$L = 150 \left(e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}} \right)$$

Assim, o comprimento do cabo de transmissão é dado por $L = 150 \left(e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}} \right)$

Agora iremos analisar a seguinte situação:

Para a implementação de uma rede elétrica urbana são necessários basicamente: postes de mesma altura a uma distância padrão de 15 metros, um do outro, e cabos que formem uma flecha², onde o ponto mais baixo do cabo é 0,41 metros da sua fixação nos postes e 5,5 metros do chão. Com esses dados é possível calcular o comprimento do cabo?

Usaremos para esse cálculo a equação da curva do fio suspenso que representa uma catenária.

$$f(x) = \frac{1}{k}(\cosh(kx) - 1)$$

Deveremos encontrar o valor da constante k do cabo. Sabemos que a função cosseno hiperbólico é par e adotando o meio do cabo como origem do sistema, temos:

$$f(-7, 5) = f(7, 5) = 0,41 \text{ e } f(0) = 0$$

²Flecha é a envergadura, em relação ao solo, quando os cabos são tracionados.

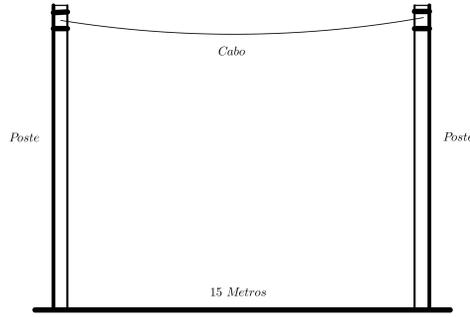


Figura 3.6: Catenária

Logo:

$$0,41 = \frac{1}{k}(\cosh(7,5k) - 1)$$

Fazendo os cálculos encontramos que:

$$k \approx 0,014563.$$

Substituindo temos:

$$f(x) = \frac{1}{0,014563}(\cosh(0,014563x) - 1) + 5,5$$

Agora podemos calcular o comprimento do cabo de um poste ao outro.

$$\begin{aligned} \int_{-7,5}^{7,5} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{0,014563}(\cosh(0,014563x) - 1) + 5,5 \right) \right)^2} dx &= \int_{-7,5}^{7,5} \sqrt{1 + (\sinh 0,014563x)^2} dx \\ \int_{-7,5}^{7,5} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{0,014563}(\cosh(0,014563x) - 1) + 5,5 \right) \right)^2} dx &= \int_{-7,5}^{7,5} \sqrt{\cosh^2 0,014563x} dx \\ \int_{-7,5}^{7,5} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{0,014563}(\cosh(0,014563x) - 1) + 5,5 \right) \right)^2} dx &= \int_{-7,5}^{7,5} \cosh 0,014563x dx = \\ \int_{-7,5}^{7,5} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{0,014563}(\cosh(0,014563x) - 1) + 5,5 \right) \right)^2} dx &= \left| \frac{1}{0,014563} \sinh 0,014563x \right|_{-7,5}^{7,5} \\ \int_{-7,5}^{7,5} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{0,014563}(\cosh(0,014563x) - 1) + 5,5 \right) \right)^2} dx &= \frac{2}{0,014563} \sinh(0,014563(7,5)) \\ \int_{-7,5}^{7,5} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{0,014563}(\cosh(0,014563x) - 1) + 5,5 \right) \right)^2} dx &= 15,03. \end{aligned}$$

Com essa informação, podemos ter uma ideia de quanto iríamos gastar para beneficiar

certa localidade com luz elétrica, desde a colocação dos postes a manutenção dos cabos. E com uma matemática bem simples conseguiríamos saber se o investimento tem ou não viabilidade.

Considerações Finais

Esta dissertação é voltada para alunos do ensino médio e de graduação, que desejam aprofundar-se no estudo das funções hiperbólicas. Trazendo uma linguagem menos formal, cujo objetivo principal é mostrar a importância dessas funções para o desenvolvimento das ciências.

Podemos observar ao longo deste trabalho um pouco da história da matemática, desde a Grécia antiga até o renascimento, e a partir do século XV, com os estudiosos, Gerhard Kremer, Vincenzo Riccati e Johann Heinrich Lambert, que deram grandes contribuições ao estudo das funções hiperbólicas. A abordagem desta função foi feita através da analogia entre as funções trigonométricas e a hipérbole equilátera, estudadas no ensino médio.

No último capítulo abordamos um breve histórico sobre as catenárias e sua aplicação no cálculo do comprimento do cabo de um poste ao outro. É importante entender que os cabos de alta tensão entre os postes são arcos invertidos e representam uma catenária cuja equação é dada pelo cosseno hiperbólico.

Acreditamos que esse trabalho possa motivar alunos e professores ao estudo desta função, que tem muitas aplicações práticas e que por muito tempo causou uma certa confusão entre os matemáticos ao pensar que a equação de um fio suspenso era uma equação quadrática e com o tempo revelou-se como uma curva hiperbólica. Assim, não encerramos seu estudo e nem sua aplicação, uma vez que as funções hiperbólicas não são um fim em si mesmas, mas um meio para solucionar problemas.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C.B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
_____. *Tópicos de história da matemática para a sala de aula: cálculo*. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.
- [2] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*, tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.
_____. *tópicos de história da matemática*. São Paulo: UNICAMP, 1997.
- [3] SHERVATOV, V.G. : *Hiperbolic Functions*, D.C. Heath, Boston, 1963.
- [4] HOWARD, A. *Cálculo, um Novo Horizonte*, Porto Alegre: Editora Bookman, Vol. 1, 2000.
- [5] LEITHOLD, L. *O cálculo com Geometria Analítica: volume 2*. 2.ed. São Paulo: Editora Harba, 1994. 848p.
- [6] GIOVANNI, J.R.; BONJORNO, J.R. *Matemática 3: geometria analítica, números complexos, limites e derivadas, noções de estatística*. 3.ed. São Paulo: FTD, 1992. 352p.
- [7] LIMA, E.L. *etal. A Matemática do Ensino médio: volume 1*. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [8] ÁVILA, G. *Cálculo 1: Funções de uma Variável*. 6.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1994. 355p.
- [9] GENTIL, N. *etal. MATEMÁTICA PARA O 2º GRAU: volume 3*. 5.ed. São Paulo: Ática, 1996. 400p.
- [10] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol 9: Geometria Plana. 7ª ed. São Paulo: Atual, 1985.
- [11] BOS, H. J. M. *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo*. Tradução Maria José Matoso Miranda Mendes. Brasília: UnB, 1985.

- [12] MAOR, E. E: *A História de um Número*. São Paulo: Record, 2004.
- [13] RUFFINO, P. O Problema da Catenária. *Revista Matemática Universitária*. Número 29. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. 2000.
- [14] RODRIGUES, Láis Bássame. VIEIRA, Flaviano Bahia P. AUGUSTINI, Edson. *O Problema do Cabo suspenso*. UFU, Minas Gerais, 2005.
- [15] RIOS, João Vianey Vasconcelos. SILVA, Maria Ilsangela. PRACIANO, Pereira. *Curva de Um Cabo Suspenso*. UVA, Sobral, 2008.
- [16] REFATTI, Liliane. BELTRANE, Ana Maria. *Funções Hiperbólicas e Cabos Pendentes*. UNIFRA, 2004.
- [17] SCHUTZ, Amy L. *Hyperbolic Functions Expository Paper Masters Theis*. New York, 2008.
- [18] LIMA, Antônio Carlos Siqueira de. SOUZA, Leonardo Augusto Abreu de *Estudos em Linha de Transmissão Monofásica Não-Uniforme no Domínio da Frequência*. UFRJ, 2010.
- [19] TALAVERA, Leda Maria Bastoni *Parábola e catenária: história e aplicações*. Universidade de São Paulo, 2010.
- [20] *Tales de Mileto*. Disponível em:
<http://www.e-biografias.net/tales_de_mileto/>. Acesso em: 04 março 2013.
- [21] *Pitágoras*. Disponível em:
<<http://www.e-biografias.net/pitagoras/>>. Acesso em: 04 março 2013.
- [22] *Arquimedes*. Disponível em:
<<http://www.e-biografias.net/arquimedes/>>. Acesso em: 04 março 2013.
- [23] *Platão*. Disponível em:
<<http://www.e-biografias.net/platao/>>. Acesso em: 04 março 2013.
- [24] *Apolônio*. Disponível em:
<<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/apolonio/biografia.htm>>. Acesso em: 04 março 2013.
- [25] *Cláudio Ptolomeu*. Disponível em:
<http://www.e-biografias.net/claudio_ptolomeu/>. Acesso em: 04 março 2013.

- [26] *Hiparco*. Disponível em:
<[http://pt.wikipedia.org/wiki/Hiparco# Teorema_de_Hiparco](http://pt.wikipedia.org/wiki/Hiparco#Teorema_de_Hiparco)>. Acesso em: 05 fev. 2013.
- [27] *Eudoxo*. Disponível em:
<[http://www.ime.unicamp.br/ calculo/history/eudoxo/eudoxo.html](http://www.ime.unicamp.br/calculo/history/eudoxo/eudoxo.html)>. Acesso em: 05 Março 2013.
- [28] *Aristóteles*. Disponível em:
<<http://www.e-biografias.net/aristoteles/>>. Acesso em: 04 março 2013.
- [29] *Grécia*. Disponível em:
<http://www.suapesquisa.com/grecia/periodos_historia_grecia.htm>. Acesso em: 04 março 2013.
- [30] *Renascimento*. Disponível em:
<<http://www.suapesquisa.com/renascimento/>>. Acesso em: 04 março 2013.

Apêndice A

Material auxiliar

Definição e Demonstração do Teorema de Pitágoras

Definição A.0.1. *Teorema de pitágoras: em todo e qualquer triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Demonstração:

Esta é umas das primeiras demonstrações do teorema de Pitágoras, que se tem conhecimento, feita usando as formas geométricas.

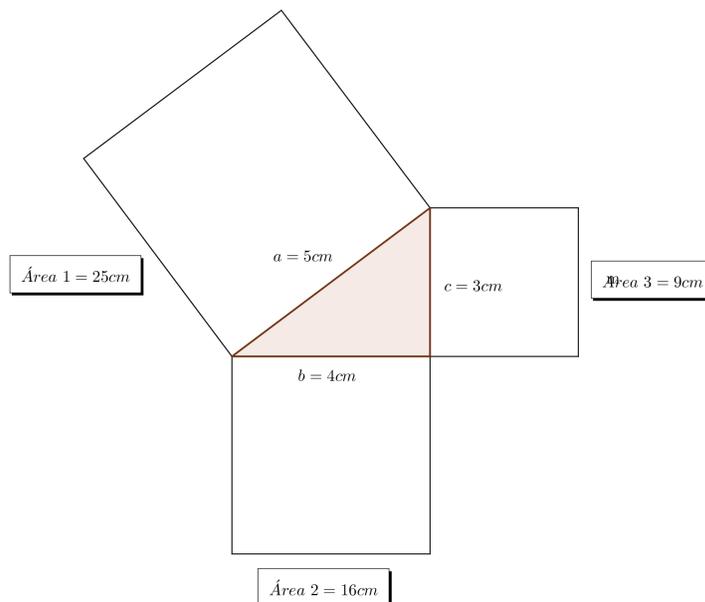


Figura A.1: Hipérbole

Pela figura podemos concluir que:

$$\text{área } 1 = \text{área } 2 + \text{área } 3$$

$$25 = 16 + 9$$

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

Portanto:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(Teorema de Pitágoras)

■

Teorema de Rolle

Teorema A.0.1. *Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, derivável nos pontos internos, tal que $f(a) = f(b)$. Então existe um ponto entre a e b onde a derivada se anula: $f'(c) = 0$.*

Demonstração:

Se f tem valor constante $f(x) = f(a) = f(b)$ em todo o intervalo $[a, b]$; sua derivada f' é identicamente nula e o teorema está demonstrado. Se f não for constante, ela terá que assumir valores maiores ou menores que $f(a) = f(b)$. Por outro lado, sendo contínua num intervalo fechado, f assume um valor máximo e um valor mínimo nesse intervalo. Se f assumir valores maiores que $f(a)$, ela terá um ponto de máximo $x = c$, interno ao intervalo.

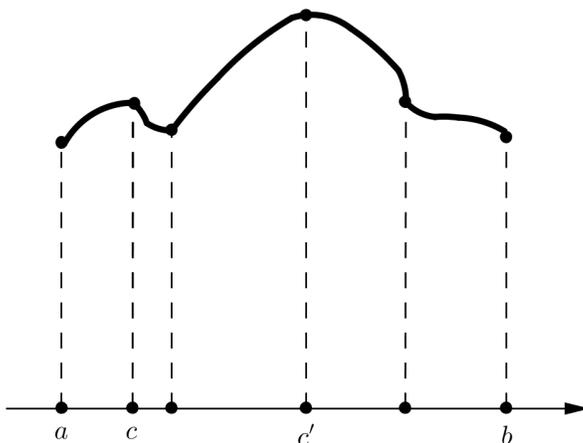


Figura A.2: Teorema de Rolle

Como f é derivável nesse ponto, podemos concluir que $f'(c) = 0$. Se f assume valores menores que $f(a) = f(b)$. O raciocínio é análogo. ■

Teorema do Valor Médio

Teorema A.0.2. *Seja f uma função definida e contínua num intervalo fechado $[a, b]$, derivável nos pontos internos. Então existe pelo menos um ponto c , compreendido entre a e b , tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demonstração:

A demonstração desse teorema será feita reduzindo-se ao Teorema de Rolle. Para isso, vamos considerar a função $F(x)$ igual a diferença entre as ordenadas $f(x)$ da curva e Y da reta secante AB , para um mesmo valor x da abscissa. A secante AB é a reta pelo ponto $(a, f(a))$ com declive $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$; logo sua equação é dada por

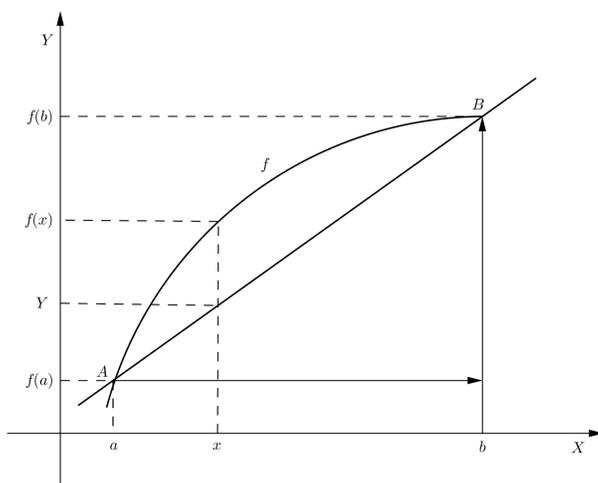


Figura A.3: Teorema do Valor Médio

$$Y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ou

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Portanto, a função $F(x) = f(x) - Y$ será dada por

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

De fato $F(a) = F(b) = 0$, além do que F é derivável nos pontos internos ao intervalo $[a, b]$. Logo, o teorema de Rolle é aplicável a essa função: existe um ponto c , entre a e b ,

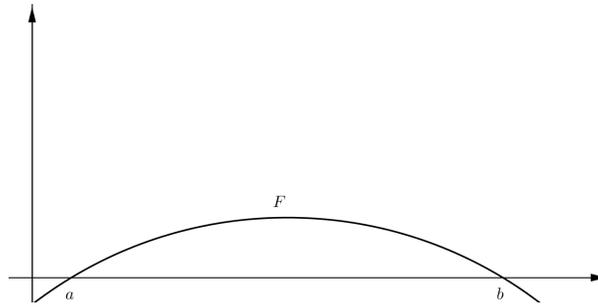


Figura A.4: Teorema do Valor Médio

tal que $F'(c) = 0$. Mas

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

de sorte que $F'(c) = 0$ significa

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ou ainda,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

■