UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JAIRO STALLONE ARAUJO COSTA

UMA PROPOSTA DE INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA POR MEIO DE ATIVIDADES COM O USO DO GEOGEBRA

Boa Vista - RR

2019

JAIRO STALLONE ARAUJO COSTA

UMA PROPOSTA DE INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA POR MEIO DE ATIVIDADES COM O USO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Kelly Karina Santos

Boa Vista - RR

2019

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

C837p Costa, Jairo Stallone Araújo.
Uma proposta de introdução à topologia por meio de atividades com o uso do geogebra / Jairo Stallone Araújo Costa. – Boa Vista, 2019.
72 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Kelly Karina Santos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT.

1 - Topologia. 2 - Educação básica. 3 - Geogebra. I - Título. II - Santos, Kelly Karina (orientadora).

CDU - 515.12

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária/Documentalista:
Maria de Fátima Andrade Costa - CRB-11/453-AM

JAIRO STALLONE ARAUJO COSTA

UMA PROPOSTA DE INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA POR MEIO DE ATIVIDADES COM O USO DO GEOGEBRA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 29 de maio de 2019 e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Profª. Drª. Kelly Karina Santos
Orientadora - UFRR

Kelly Alves Marães de Almeida

Profª. Drª. Kelly Alves Marães de Almeida - UEA

Max Ferreira

Prof. Dr. Max Ferreira - UFRR

Boa Vista - RR

2019

A Deus, para quem são todas as coisas,
a minha esposa, pelo inestimável apoio,
a minha mãe, pelo precioso incentivo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por sua bondade e graça, a quem seja honra para sempre.

A minha esposa Antônia Cléia, pelo cuidado, cooperação, compreensão, amor, incentivo e companheirismo durante todo o curso. Serei um perpétuo devedor à sua incrível gentileza.

A minha mãe, que sempre me incentivou e fez tudo o que estava ao seu alcance para que eu me dedicasse aos estudos. Serei seu eterno admirador.

A minha cunhada Cléres, pelo apoio, nas mais diversas ocasiões ao longo do curso.

A professora Dra. Kelly Karina Santos, pela orientação, compreensão e gentileza.

A inseparável colega de classe, Erika Eduarda, pelo companheirismo nas horas de estudo.

"Porque dEle, por Ele, e para Ele
são todas as coisas,
glória pois a Ele eternamente.
Amém."

Romanos 8:36

RESUMO

O presente trabalho consiste de uma proposta de introdução à Topologia por meio de atividades, usando o GeoGebra. Busca-se apresentar conceitos básicos de Topologia, como a noção de aberto e continuidade, no espaço euclidiano. O objetivo é que alunos da Educação Básica tenham contato, ainda que de forma intuitiva, com esses objetos.

Palavras-chave: Topologia. Educação Básica. GeoGebra.

ABSTRACT

The present work consists of a proposal of introduction to the Topology through activities using GeoGebra. It seeks to present basic concepts of Topology, such as the notion of open and continuity, in Euclidean space. The goal is that students of basic education have contact, even intuitively, with these objects.

Key-words: Topology. Basic Education. GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Topologia é uma área da Matemática que possui muitas aplicações em outras áreas da própria Matemática. Ela possui algumas subdivisões, dentre as quais, a Topologia geral. Este ramo da Topologia é, atualmente, uma espécie de pré-requisito para quem deseja estudar Matemática de forma mais aprofundada.

> A Topologia Geral, também chamada de Topologia dos Conjuntos de Pontos, tornou-se, recentemente, parte essencial do fundamento matemático para os que se dedicam ao estudo da Matemática (LIPSCHUTZ, 1971, p.5).

Embora esse conteúdo seja bastante familiar para estudantes que terminam a graduação e continuarão estudando Matemática, ele geralmente não é visto na educação básica.

A ideia de propor um trabalho sobre o ensino de Topologia para a Educação Básica, surgiu de uma experiência informal com alunos do Ensino Fundamental. Usei cerca de dez minutos de uma aula para falar de algumas áreas da Matemática, dentre elas, Topologia. Depois de apresentar, de forma intuitiva, o conceito de homeomorfismo, fiz algumas perguntas, que foram respondidas pronta e corretamente. Por exemplo, "É possível transformar uma caixa fechada numa bola de futebol?" "É possível transformar uma câmara de ar de pneu de bicicleta em uma bola de futebol?" Depois de afirmarem que o segundo caso não é possível, indaguei novamente: "Por que?" alguns responderam: "Por causa do buraco na câmara". Além de responderem as perguntas, alguns alunos ficaram bastante animados com a possibilidade de aprender (ainda que de forma intuitiva) conteúdos que são vistos apenas na graduação ou na pós-graduação.

Apesar de não ser comum encontrar o ensino de Topologia na Educação Básica, recentemente, algumas diretrizes curriculares passaram a incluí-lo. Por exemplo, referindo-se ao Ensino Fundamental, (PARANÁ, 2008, p.56) diz que neste nível de ensino, o aluno deve compreender:

> [· · ·] noções de geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais.

O presente trabalho consiste de uma proposta de introdução à Topologia por meio de atividades usando o GeoGebra. Busca-se apresentar conceitos básicos de Topologia, como a noção de aberto e continuidade, no espaço euclidiano. O objetivo é que alunos da Educação Básica tenham contato, ainda que de forma intuitiva, com esses objetos.

No capítulo um, será feito uma breve revisão de alguns conceitos básicos de funções, que serão utilizados ao longo do trabalho.

No capítulo dois, será feita uma breve exposição de algumas definições e propriedades elementares de Topologia do espaço euclidiano, a servir de base para o que será feito no último capítulo.

Finalmente, no capítulo três, serão apresentadas propostas de atividades usando o GeoGebra a serem realizadas com alunos da Educação Básica, a fim trabalhar as definições e propriedades do capítulo dois.

1 FUNÇÕES

Neste capítulo, serão apresentadas algumas definições e propriedades elementares a cerca de funções, que serão utilizados nos próximos capítulos.

Definição 1.0.1. Dados dois conjuntos não vazios X e Y, uma função $f : X \to Y$ é uma regra que a cada elemento $x \in X$ associa um único elemento $f(x) \in Y$.

O conjunto X é chamado de domínio, e Y é chamado de contradomínio de f. O elemento $f(x) \in Y$ é chamado de imagem de x pela função f.
Duas observações são importantes a cerca da definição de função:
1. A regra não pode ter exceções, ela deve ser definida para todos os elementos do domínio. Em símbolos:

$$x \in X \Rightarrow f(x) \in Y,\ \forall x \in X.$$

2. A regra não pode ser ambígua, isto é, dado um elemento no domínio, não pode haver dúvidas quanto a sua imagem no contradomínio (cada elemento do domínio tem uma única imagem por f). Em símbolos:

$$x = y \Rightarrow f(x) = f(y),\ \forall x, y \in X.$$

Exemplo 1.0.1. Sejam $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $f : X \to Y$ definida por $f(a) = 2,\ f(b) = 4$ e $f(c) = 5$ é uma função.

Exemplo 1.0.2. Seja C o conjunto de todos os círculos do plano e $f : C \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) =$ área de x em cm^2. Note que a regra f não tem exceções, pois cada círculo possui uma área, que em cm^2 é representada por um número real. Além disso, a regra não é ambígua, já que cada círculo possui uma única área. Portanto, f é uma função.

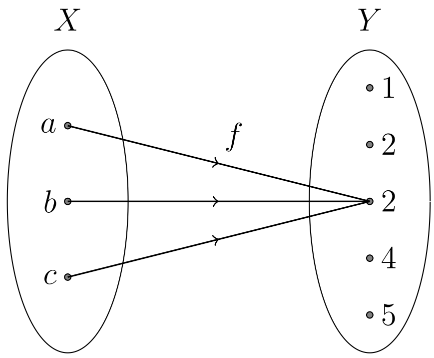
Exemplo 1.0.3. Seja C o conjunto do exemplo anterior. $g : \mathbb{R} \to C$ dada por $g(x) =$ círculo cuja área em cm^2 é x, não é função.
De fato, a regra g é ambígua. Por exemplo, o elemento $\pi \in \mathbb{R}$ do domínio não está bem definido. Com efeito, $g(\pi)$ pode ser qualquer círculo de raio 1 (existem infinitos círculos diferentes no plano de raio 1).

Exemplo 1.0.4. No exemplo 2, se trocarmos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{N}$, então $f : C \to \mathbb{N}$ não é função.
De fato, neste caso f possui exceções. Por exemplo, considere um círculo $a \in C$ do plano cujo raio é 1. Como $f(a) = \pi$, então $f(a) \notin \mathbb{N}$.

Exemplo 1.0.5. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios. Fixado um elemento $c \in Y$, $f : X \to Y$ definida por $f(x) = c,\ \forall x \in X$ é uma função, chamada de função constante. De fato, cada elemento $x \in X$ está associado a um único elemento do conjunto Y.

Por exemplo, sendo $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f : X \to Y$ definida por $f(x) = 2,\ \forall\, x \in X$ é uma função constante.

Figura 1 – Função constante



Fonte: Autor

Definição 1.0.2. Sejam $f : X \to Y$ uma função e $U \subset X$. A imagem de U por f é o conjunto $f(U) = \{f(x) \in B;\ x \in U\}$. Quando $U = X$, o conjunto $f(X)$ é chamado de imagem de f.

Definição 1.0.3. Seja $f : X \to Y$ uma função. O gráfico de f é o conjunto

$$\{(x, f(x)) \in X \times Y;\ x \in X\}.$$

Definição 1.0.4. Sejam $f : X \to Y$, $g : Z \to W$ funções tais que $f(X) \subset Z$, definimos a função composta de g e f por $g \circ f : X \to W$ pondo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in X$.

Definição 1.0.5. Seja X um conjunto. A função $I_X : X \to X$ definida por $I_X(x) = x$ para todo $x \in X$ é chamada de identidade de X.

Definição 1.0.6. Uma função $f : X \to Y$ é inversível quando existe uma função $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = I_X$ e $f \circ g = I_Y$. Neste caso, dizemos que g é a inversa de f e escrevemos $g = f^{-1}$.

Definição 1.0.7. Uma função $f : X \to Y$ é injetiva quando

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y),\ \forall\, x, y \in X. \tag{1.1}$$

A definição acima nos diz que uma função f é injetiva, quando elementos diferentes do seu domínio são transformados por f em elementos diferentes do seu contradomínio. Em muitos casos porém, a fim de provar que uma função $f : X \to Y$ é injetiva, é útil usar a contrapositiva de (1.1),

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y, \; \forall \; x, y \in X.$$

Definição 1.0.8. Uma função $f : X \to Y$ é sobrejetiva quando, para cada elemento $y \in Y$, existe pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Definição 1.0.9. Uma função é bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva.

Note que função $f : X \to Y$ é bijetiva se, e somente se, para cada elemento $y \in Y$, existe um único elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Teorema 1.0.1. Uma função é inversível se, e somente se, é bijetiva.

A demonstração pode ser encontrada em (NETO, 2015).

2 NOÇÕES ELEMENTARES DE TOPOLOGIA DO $\mathbb{R}^N$

Neste capítulo serão apresentadas algumas noções elementares de Topologia do $\mathbb{R}^n$. As definições e propriedades aqui mencionadas podem ser encontradas em (LIMA, 2013), (LIMA, 2015), (LIMA, 2014) e (LIPSCHUTZ, 1971).

2.1 CONJUNTOS ABERTOS

Seja n um número natural. O espaço euclidiano n-dimensional é o produto cartesiano de n fatores igual a $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são todas as n-listas $p = (x_1, \ldots, x_n)$, cujas coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ são números reais.

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ é a reta, isto é, o conjunto de todos os números reais. $\mathbb{R}^2$ é plano, ou seja, o conjunto dos pares ordenados $p = (x, y)$ de números reais. $\mathbb{R}^3$ é espaço euclidiano tridimensional, cujos elementos são os ternos ordenados $p = (x, y, z)$.

Dados $p = (x_1, \ldots, x_n),\ q = (y_1, \ldots y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos

$$p + q = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),$$

$$-p = (-x_1, \ldots, -x_n),$$

$$|p| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

O número $|p|$ é o comprimento do segmento cujos extremos são os pontos $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$ e $|p - q|$ é a distância de p a q.

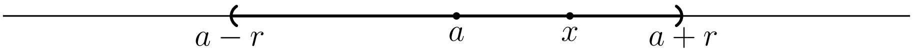
Introduziremos aqui algumas noções topológicas do $\mathbb{R}^n$. A noção mais elementar é a de conjunto aberto. Antes porém, apresentaremos a definição de bola aberta.

Definição 2.1.1. Dados o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e o número real $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos $p \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor do que r. Em símbolos:

$$B(a; r) = \{p \in \mathbb{R}^n; |p - a| < r\}.$$

Na definição acima, quando $n = 1$, então $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < r\}$ é o intervalo aberto $(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R}; a - r < x < a + r\}$ (Figura 2).

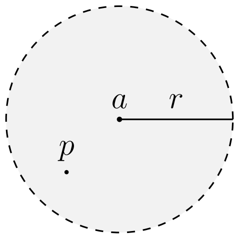
Figura 2 – Bola aberta para $n = 1$



Fonte: Autor

Quando $n = 2$, então $B(a; r)$ é o ***disco aberto*** $\{p \in \mathbb{R}^2; |p - a| < r\}$, ou seja, o conjunto dos pontos do plano que estão no interior do círculo de centro no ponto a e raio r.

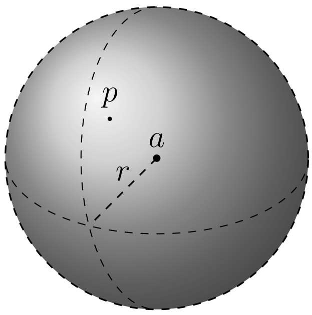
Figura 3 – Bola aberta para $n = 2$



Fonte: Autor

Quando $n = 3$ então, $B(a; r)$ é a ***esfera aberta*** $\{p \in \mathbb{R}^3; |p - a| < r\}$, isto é, o conjunto dos pontos p do espaço que estão no interior da esfera de centro a e raio r.

Figura 4 – Bola aberta para $n = 3$

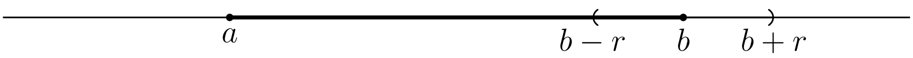


Fonte: Autor

Sejam $X \in \mathbb{R}^n$ e $p \in X$. Dizemos que p é interior a X quando existe uma bola aberta de centro p contida em X. Isto significa que os pontos suficientemente próximos de p também pertencem a X.

Exemplo 2.1.1. No intervalo $I = [a, b]$ o ponto b não é interior a I, isto é, não existe nenhuma bola aberta (intervalo aberto) de centro b que esteja contido em I. De fato, qualquer bola aberta $B(b; r)$ de centro b, contém números reais que são maiores de que b e, portanto não pertencem a I. Analogamente, qualquer intervalo de centro a contém número reais que são menores do que a, donde se tem que a também não é interior a I.

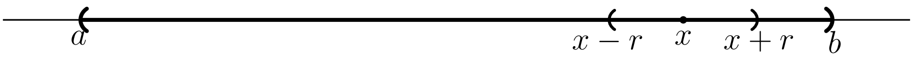
Figura 5 – Ponto não interior ao intervalo



Fonte: Autor

Exemplo 2.1.2. Todos os pontos do intervalo $I = (a, b)$ são interiores a I. De fato, dado $x \in I$, escolhendo $r \leq \min\{b - x, x - a\}$, temos $B(x; r) \subset I$.

Figura 6 – Ponto interior ao intervalo



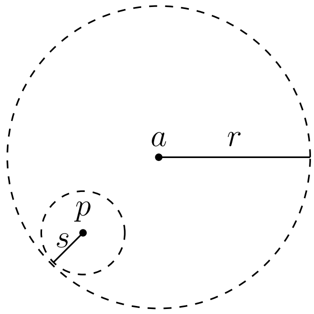
Fonte: Autor

Definição 2.1.2. Um conjunto $X \in \mathbb{R}^n$ é dito ser aberto quando todos os seus pontos são interiores. Isto é, dado $p \in X$ existe $r > 0$ tal que $B(p; r) \subset X$.

Segue-se dos Exemplos 2.1.1 e 2.1.2 que todo intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto, enquanto os intervalos semiabertos $[a, b),\ (a, b]$ bem como os intervalos fechados $[a, b]$ não são conjuntos abertos.

Exemplo 2.1.3. Uma bola aberta $B(a; r)$ de $\mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto. De fato, dado um ponto $p \in B(a; r)$, pondo $s = r - |p - a|$, temos que $B(p; s) \subset B(a; r)$ (ver Figura 7).

Figura 7 – Ponto interior ao disco aberto



Fonte: Autor

Mais geralmente, prova-se que toda bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Exemplo 2.1.4. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto aberto e $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pontos de X. O conjunto $X \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ é aberto.

Demonstração. Dado $x \in X \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$, devemos mostrar que existe uma bola aberta de centro x contida em $X \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, k$, seja $d_j = |x - p_j|$ a distância de x a p_j. Como X é aberto e $x \in X$, então existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset X$. Note que, se $r' \leq r$, então $B(x; r') \subset B(x; r)$. Com efeito,

$$y \in B(x; r') \Rightarrow |x - y| < r' \Rightarrow |x - y| < r \Rightarrow y \in B(x; r).$$

Por outro lado, dado $p_j \in X$, se $s \leq d_j$, então $p_j \notin B(x; s)$. De fato, por definição, $y \in B(x; s) \Rightarrow |x - y| < s$. Sendo $|x - p_j| = d_j \geq s$, segue-se que $p_j \notin B(x; s)$. Assim, pondo $n = \min\{r, d_j\}$ tem-se $n \leq r$ e $n \leq d_j$. Logo, $B(x; n) \subset B(x; r) \subset X$ e $p_j \notin B(x; n)$. Por conseguinte, $B(x; n) \subset X \setminus \{p_j\}$. Analogamente, se $m = \min\{r, d_1, \ldots, d_k\}$, então $B(x; m) \subset X \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$. □

Teorema 2.1.1. (a) $\varnothing$ e $\mathbb{R}^n$ são abertos.
(b) A interseção de dois conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto. Logo, a interseção de um número finito qualquer de conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.
(c) A união de uma família qualquer de conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Demonstração. (a) Por definição, toda bola aberta $B(a; r) = \{p \in \mathbb{R}^n; |p - a| < r\}$ está contida em $\mathbb{R}^n$, logo, todo ponto de $\mathbb{R}^n$ é interior a $\mathbb{R}^n$, portanto $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto. Por outro lado, um conjunto deixa de ser aberto quando possui pelo menos um elemento que não é interior. Se o conjunto vazio não fosse aberto, então ele possuiria um elemento não interior, o que é um absurdo, pois $\varnothing$ não possui elementos. Portanto $\varnothing$ é aberto.

(b) Dados dois conjuntos abertos X e Y, se $X \cap Y = \emptyset$, não há o que provar, posto que $\varnothing$ é um conjunto aberto. Caso $X \cap Y \neq \varnothing$ então, dado $x \in (X \cap Y)$, como X é aberto, existe uma bola aberta $B(x; r_1)$ contida em X. Analogamente, como Y é aberto então existe uma bola aberta $B(x; r_2)$ contida em Y. Pondo $r = \min\{r_1, r_2\}$, então a bola aberta $B(x; r)$ coincide com uma das bolas abertas $B(x; r_1)$, $B(x; r_2)$, a saber, a que possui o menor raio. Note que $B(x; r) \subset B(x; r_1)$ e $B(x; r) \subset B(x; r_2)$. De fato, se $r_1 \leq r_2$, então $B(x; r) = B(x; r_1)$, e assim, $B(x; r) \subset B(x; r_1)$. Além disso,

$$\begin{aligned} p \in B(x, r) &\Rightarrow |p - x| < r \\ &\Rightarrow |p - x| < r_1 \\ &\Rightarrow |p - x| < r_2 \\ &\Rightarrow p \in B(x; r_2) \\ &\Rightarrow B(x; r) \subset B(x; r_2). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $r_2 < r_1$, temos $B(x; r) = B(x; r_2)$, em particular, $B(x; r) \subset B(x; r_2)$ e,

$$\begin{aligned} p \in B(x, r) &\Rightarrow |p - x| < r \\ &\Rightarrow |p - x| < r_2 \\ &\Rightarrow |p - x| < r_1 \\ &\Rightarrow p \in B(x; r_1) \\ &\Rightarrow B(x; r) \subset B(x; r_1). \end{aligned}$$

Segue-se que $B(x; r) \subset B(x; r_1) \subset X$ e $B(x; r) \subset B(x; r_2) \subset Y$. Logo, $B(x; r) \subset X$ e $B(x; r) \subset Y$. Portanto $B(x; r) \subset (X \cap Y)$, o que mostra que $X \cap Y$ é aberto.

(c) Sejam L um conjunto índices, $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos abertos e $X = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$. Dado $x \in X$, existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, então existe uma bola aberta $B(x; r)$ de centro x tal que $B(x; r) \subset A_\lambda$. Mas, $A_\lambda \subset X$, donde se tem que $B(x; r) \subset X$. Portanto, X é aberto. $\square$

Proposição 2.1.1. Todo conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como uma união de bolas abertas.

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Então, para cada $x \in X$, existe uma bola aberta B_x de centro x, e portanto contendo x, tal que $B_x \subset X$. Logo, $\bigcup\limits_{x \in X} B_x \subset X$ e $X \subset \bigcup\limits_{x \in X} B_x$. Portanto, $X = \bigcup\limits_{x \in X} B_x$. $\square$

A proposição acima nos diz, em particular, que os conjuntos abertos da reta $\mathbb{R}$ são formados pela união de intervalos abertos, os conjuntos abertos do plano $\mathbb{R}^2$

são formados pela união de discos abertos e os conjuntos abertos do espaço $\mathbb{R}^3$ são formados pela união de esferas abertas.

Definição 2.1.3. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um conjunto $A \subset X$ é *aberto em* X quando existe um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = U \cap X$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$ segundo a definição 2.1.2.

Definição 2.1.4. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in X$ um ponto de X. Dizemos que um conjunto $V \subset X$ é uma *vizinhança de* a se V for aberto em X e $a \in V$.

Definição 2.1.5. A *fronteira* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto formado pelos pontos x tais que toda bola aberta de centro x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R}^n \setminus X$.

2.2 FUNÇÕES CONTÍNUAS

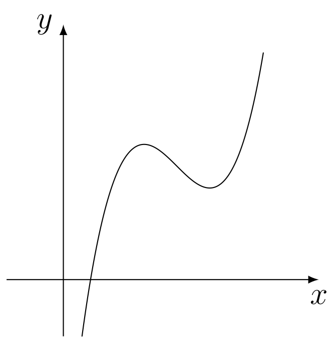
A ideia básica de função contínua é a mesma que temos no senso comum, isto é, ausência de interrupções. A fim de traduzir rigorosamente essa ideia para uma linguagem matemática, precisamos da noção de espaço topológico. Mas para nossos propósitos nesse texto, usaremos apenas a ideia intuitiva e nos restringiremos a alguns casos particulares.

2.2.1 Funções reais de uma variável real

Consideremos uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Intuitivamente, f é contínua quando seu gráfico não tem "saltos", ou seja, é possível desenhar o gráfico de f sem tirar a caneta do papel ou o giz do quadro.

Exemplo 2.2.1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 4$ é contínua.

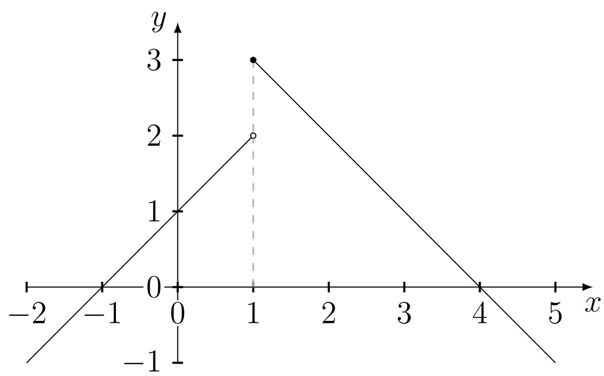
Figura 8 – Um exemplo de função contínua



Fonte: Autor

Exemplo 2.2.2. A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{se } x<1, \\ -x+4, & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$, não é contínua. De fato, no ponto $x=1$ o gráfico de f tem uma interrupção. No entanto se considerarmos essa função restrita ao intervalo $(-\infty,1)$ teremos uma função contínua. O mesmo ocorre se considerarmos a restrição ao intervalo $(1,+\infty)$. Segue-se que a restrição de f ao conjunto $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ é contínua. Ou seja o único ponto problemático é o 1.

Figura 9 – Um exemplo de descontinuidade



Fonte: Autor

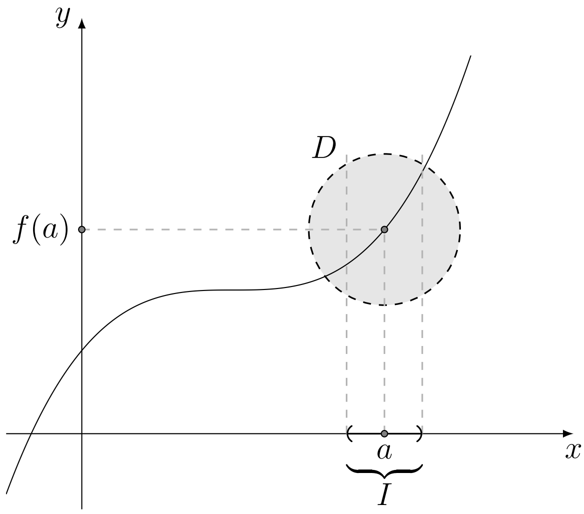
É pois natural dizer que f não é contínua no ponto $x=1$.

Procuremos uma forma de expressar continuidade de modo mais apropriado à linguagem matemática. O "salto" no gráfico de f no ponto $x=1$ pode ser expresso através de uma ideia mais familiar à matemática, a saber, a noção de distância.

Considere uma função $f:X\to\mathbb{R}$, onde $X\subset\mathbb{R}$, e $a\in X$. Lembremos que o gráfico de f é o conjunto $G_f=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R};\, x\in X\}$, ou seja, cada elemento de G_f é um ponto $(x,f(x))\in\mathbb{R}^2$ do plano. A construção da definição a seguir é uma adaptação de (NETO, 2015).

Intuitivamente, para que o gráfico de f seja "contínuo" em a, devemos esperar que, para $x\in X$ próximo de a, o ponto $(x,f(x))$ do gráfico de f deve estar próximo do ponto $(a,f(a))$. Essa condição por sua vez, pode ser expressa assim: para cada disco aberto D centrado no ponto $(a,f(a))$, existe um intervalo aberto I de centro a tal que, se $x\in I$ então $(x,f(x))\in D$. A ideia é que, diminuindo arbitrariamente o raio do disco D, podemos aproximar $(x,f(x))$ o quanto quisermos do ponto $(a,f(a))$, desde que aproximemos suficientemente x de a (Figura 10).

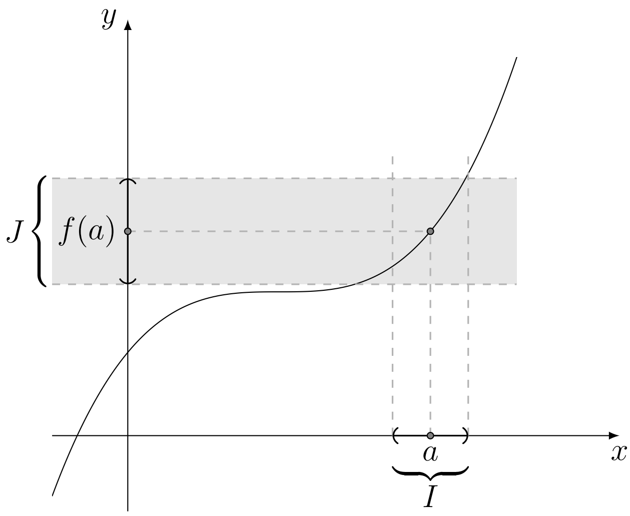
Figura 10 – Analisando continuidade por meio de discos abertos



Fonte: Autor

Não é difícil se convencer de que isso é equivalente a: para cada intervalo aberto J, de centro $f(a)$ existe um intervalo aberto I de centro a tal que, se $x \in I$, então os pontos $(x, f(x))$ pertencem à faixa horizontal $X \times J$ do plano cartesiano, simétrica em relação ao ponto $(a, f(a))$ (faixa cinza da Figura 11).

Figura 11 – Interpretando continuidade via intervalos abertos

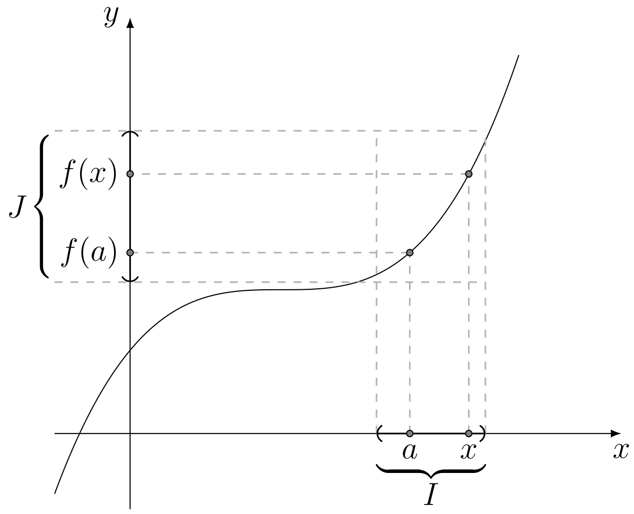


Fonte: Autor

Podemos então, apresentar a seguinte definição:
Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}$, é contínua em $a \in X$, se para cada intervalo aberto J de centro $f(a) \in \mathbb{R}$, existe um intervalo aberto I de centro a tal que, se $x \in I \cap X$, então $f(x) \in J$, ou seja, $f(I \cap X) \subset J$.

Observe ainda que, na afirmação anterior, se trocássemos "intervalo aberto J de centro $f(a)$" por "intervalo aberto J *contendo* $f(a)$" e "intervalo aberto I de centro a" por "intervalo aberto I *contendo* a", ainda teríamos uma afirmação equivalente.

Figura 12 – Elaborando a definição de continuidade via conjuntos abertos



Fonte: Autor

Finalmente, inspirado na Proposição 2.1.1, podemos reformular essa definição como segue:

Definição 2.2.1. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}$, é contínua em $a \in X$ se para cada vizinhança V de $f(a)$, existe uma vizinhança U de a tal que $f(U) \subset V$.

A definição acima diz que podemos tornar a imagem de x tão próximo de $f(a)$ quanto se queira, desde que se tome x suficientemente próximo de a. Para isso, basta diminuir suficientemente o comprimento do intervalo J contendo $f(a)$.

A exigência de que os intervalos I e J sejam abertos pode ser ilustrada no Exemplo 2.2.2. Se trocássemos intervalo aberto por fechado na definição, então f seria contínua em $x = 1$. De fato, dado qualquer intervalo J contendo $f(1) = 3$, existe $d > 1$ tal que a imagem do intervalo $I = [1, d]$ está contida em J. Por isso, a exigência do intervalo ser aberto é essencial para garantir a análise do comportamento em torno do ponto a em questão. Ela serve para excluir a possibilidade de o ponto a ser um extremo do intervalo (queremos saber o comportamento dos pontos à esquerda e à direita de a).

Na definição acima, definimos continuidade em um ponto do domínio. Diremos que uma função é contínua, quando o for em todos os pontos do seu domínio.

2.2.2 Curvas

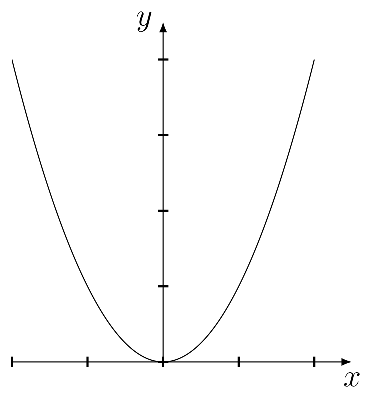
Uma curva em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. A imagem de um ponto $t \in I$ é a $n-$upla $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))$. A curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ define n funções reais, $\gamma_1 : I \to \mathbb{R},\ \gamma_2 : I \to \mathbb{R},\ \ldots,\ \gamma_n : I \to \mathbb{R}$, chamadas de funções coordenadas de γ.

O conjunto $\{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n; t \in I\}$ é chamado de traço de γ. Dizemos que γ é contínua, quando cada uma de suas funções coordenadas são contínuas.

Intuitivamente, uma curva é contínua quando seu traço não tem “saltos”.

Exemplo 2.2.3. A curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (t, t^2)$ é contínua. O traço de γ coincide com o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$.

Figura 13 – Traço de uma curva contínua



Fonte: Autor

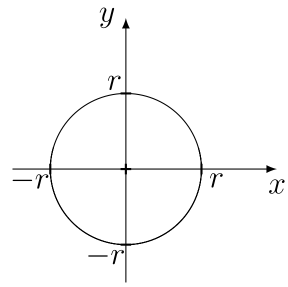
Exemplo 2.2.4. Dado $r > 0$, a curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (r\text{cos}(t), r\text{sen}(t))$ é contínua (ver Figura 14).

Exemplo 2.2.5. A curva $\gamma : [1, 10] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1 + 2\text{cos}(t), 1 + \text{sen}(t)), & \text{se } 1 \leq t < 6, \\ (t, 2), & \text{se } 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

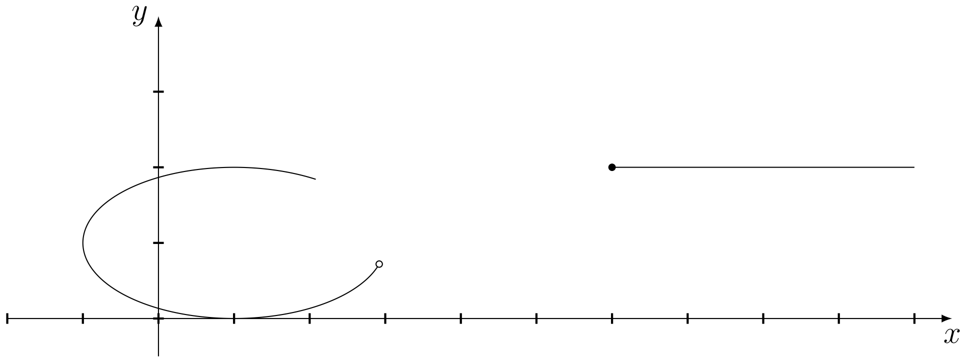
não é contínua (ver Figura 15).

Figura 14 – Traço de uma curva fechada contínua



Fonte: Autor

Figura 15 – Exemplo de curva descontínua



Fonte: Autor

2.2.3 Funções reais de duas variáveis

Considere uma função $f : X \to \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}^2$, e $a \in X$. Lembremos que o gráfico de f é o conjunto $G_f = \{(p, f(p)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; p \in X\}$, ou seja, cada elemento de G_f é um ponto $(p, f(p)) = (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$.
Intuitivamente, para que o gráfico de f seja “contínuo” em a, devemos esperar que para p próximo de a, o ponto $(p, f(p))$ do gráfico de f, deve estar próximo do ponto $(a, f(a))$. Essa condição, por sua vez, pode ser expressa assim: para cada esfera aberta C centrada e m $(a, f(a))$ existe um disco aberto D de centro a tal que, se $p \in D \cap X$ então $(p, f(p)) \in C$. Não é difícil se convencer de que isso é equivalente a: para cada intervalo aberto J de centro $f(a)$, existe um disco aberto D de centro a tal que, se $p \in D \cap X$, então o ponto $(p, f(p))$ pertence ao conjunto $X \times J$.

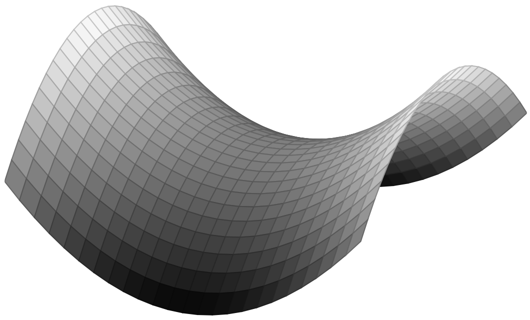
Podemos então, apresentar a seguinte definição:
Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}^2$, é contínua em $a \in X$ se para cada intervalo aberto J de centro $f(a) \in \mathbb{R}$, existe um disco aberto D de centro a tal que $f(D \cap X) \subset J$.
Observe ainda que, na afirmação anterior, se trocássemos “intervalo aberto J de centro $f(a)$” por “intervalo aberto J *contendo* $f(a)$” e “disco aberto D de centro a” por “disco

aberto D *contendo* a", ainda teríamos uma afirmação equivalente. Novamente, inspirado na proposição 1, podemos reformular essa definição como segue:

Definição 2.2.2. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}^2$, é contínua em $a \in X$ se para vizinhança V de $f(a)$, existe uma vizinhança U de a tal que $f(U) \subset V$.

Exemplo 2.2.6. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$ é contínua.

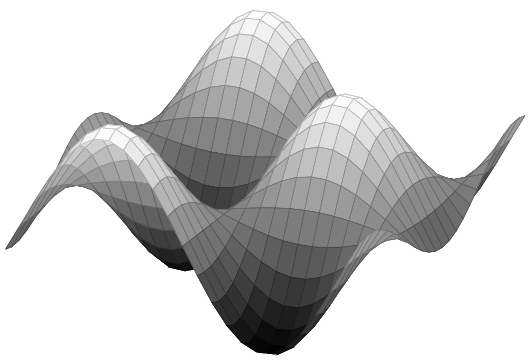
Figura 16 – Gráfico da função $f(x, y) = x^2 - y^2$



Fonte: Autor

Exemplo 2.2.7. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \cos\left(\frac{y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ é contínua.

Figura 17 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos\left(\frac{y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$



Fonte: Autor

2.2.4 Funções de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$

Quando o gráfico de uma função pertence a $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$, (por exemplo o gráfico de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) infelizmente não podemos mais fazer uma figura para visualizá-lo. A fim de definir continuidade neste caso, usamos a ideia que foi empregada nos casos anteriores, ou seja, uma função $f : X \to \mathbb{R}^n$, onde $X \subset \mathbb{R}^m$ é contínua em um ponto $a \in X$ se podermos tornar $f(x)$ tão próxima quanto quisermos de $f(a)$, desde que tomemos x suficientemente próximo de a. Inicialmente, note que intervalo aberto é uma bola aberta de $\mathbb{R}$ e disco aberto é uma bola aberta de $\mathbb{R}^2$. Assim, nas definições de função contínua dos casos anteriores, poderíamos ter substituído, tanto intervalo aberto como disco aberto, por bola aberta. Generalizando, uma função $f : X \to \mathbb{R}^n$, onde $X \subset \mathbb{R}^m$, é contínua em um ponto $a \in X$ se, para cada bola aberta $B_{f(a)} \subset \mathbb{R}^n$ de centro $f(a)$, existe uma bola aberta $B_a \subset \mathbb{R}^m$ de centro a, tal que $f(B_a \cap X) \subset B_{f(a)}$. Finalmente, como nos casos anteriores, podemos reformular essa definição em termos de conjuntos abertos:

Definição 2.2.3. Dados $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in X$. Uma função $f : X \to Y$ é contínua em a, se para cada vizinhança V de $f(a)$, existe uma vizinhança U de a tal que $f(U) \subset V$.

Definição 2.2.4. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$. Uma função contínua, $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se sua inversa, $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua.

Quando existe um homeomorfismo entre dois conjuntos, dizemos que esses conjuntos são homeomorfos. Dois conjuntos homeomorfos são indistinguíveis, do ponto de vista topológico.

3 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Neste capítulo serão apresentadas propostas de atividades com o uso do *software* GeoGebra. A construção dos programas devem ser feitas na sala de aula pelos alunos, com a orientação do professor. Serão omitidos os detalhes de construções elementares do GeoGebra, como a construção de retas perpendiculares a uma outra reta, passando por um ponto, a criação de controles deslizantes, a construção de polígonos, circunferências, etc. O leitor interessado em se familiarizar com essas ferramentas básicas, poderá consultar (BELTRAMI, 2016).

3.1 CONJUNTOS ABERTOS

Nesta seção, serão apresentadas atividades relativas a conjuntos abertos.

3.1.1 Definição

Atividade 3.1.1.

Problema 3.1.1. a) Quais pontos do intervalo (a, b) são interiores?
b) Determine o interior dos intervalo $[a, b)$ e $[a, b]$.

O objetivo desse problema é duplo:
(I) dar a ideia geométrica de ponto interior;
(II) mostrar a ideia geométrica utilizada para a prova formal de que todos os pontos do intervalo aberto (a, b) são interiores a (a, b) (e portanto interior a $[a, b]$ bem como a $[a, b)$), a saber, dado $x \in (a, b)$, basta tomar r igual a $\min\{|x - a|, |x - b|\}$ ou a qualquer outro número positivo menor do que $\min\{|x-a|, |x-b|\}$ e teremos que $I = (x-r, x+r) \subset (a, b)$. Ou seja, tomando r igual ao mínimo entre as distâncias de x a a e x a b, o intervalo aberto $I = (x - r, x + r)$ é uma vizinhança de x que está contida em (a, b). Será útil, posteriormente, caso os alunos não consigam perceber isso logo, usar o número $\frac{r}{2}$ (e solicitar aos alunos que proponham outros valores que funcionem, aliás, o ideal é que os alunos descubram que o número $\frac{r}{2}$ bem como qualquer outro menor do que r funciona) ao invés de r como raio do intervalo I.
Será utilizado o GeoGebra para mostrar que:
(i) qualquer ponto x de (a, b) é interior a (a, b). Isso pode ser feito construindo um intervalo aberto $I = B(x; r)$ de centro x e raio r, onde r possa variar. A ideia é mostrar que, para cada ponto x de (a, b), é possível encontrar um intervalo I com comprimento pequeno o suficiente (porém maior do que zero) para que se tenha $I \subset (a, b)$.

(ii) o ponto a não é interior a $[a, b)$. Isso pode ser feito construindo um intervalo aberto $I = B(a; r)$ de centro a e raio r, onde r possa variar. A ideia é mostrar que, qualquer que seja o comprimento do intervalo I, ele sempre conterá pontos que não pertencem a $[a, b)$, ou seja, não existe nenhum intervalo aberto I de centro a, tal que $I \subset [a, b)$.
(iii) usando a mesma ideia de (ii), concluir que b não é interior a $[a, b]$ e portanto o interior de $[a, b]$ é o intervalo (a, b).

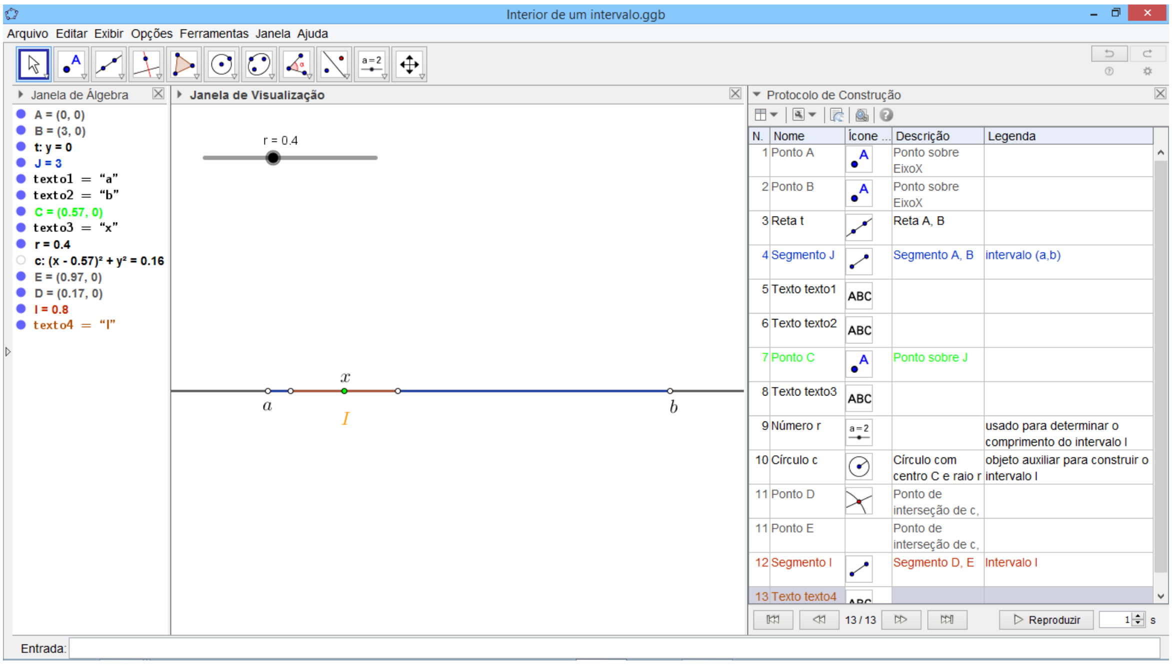
O programa será construído em duas etapas. A primeira parte visando o objetivo (I) e, após os alunos explorarem o programa e o objetivo (I) ser alcançado, proceder-se-á a construção da segunda parte visando (II).

Construção (primeira parte)

1. Ocultar eixos e malhas, marcar dois pontos A e B, em seguida construir a reta t que passa por A e B. Os pontos A e B podem ser movidos.
2. Construir o segmento AB (intervalo (a, b)) e marcar um ponto C sobre AB. O ponto C pode ser movido livremente no segmento AB.
3. Ocultar os rótulos dos pontos construídos nos passos anteriores, bem como da reta e do segmento. Em seguida, criar três textos: a para o ponto A, b para o ponto B e x para o ponto C. Os textos acompanham os pontos a medida que esses pontos são movidos.
4. Criar um controle deslizante r, com $r \geq 0$.
5. Construir um círculo c de centro C e raio r e marcar os pontos D e E de interseção da reta t com o círculo c, em seguida, ocultar o rótulo dos pontos D e E e mudar a cor para branca.
6. Construir o segmento DE. Ocultar o rótulo do segmento DE e criar o texto I (cuja posição deve ser o ponto C, devendo ficar abaixo do ponto C) para denotar o intervalo aberto de centro x e raio r. O comprimento do segmento DE muda de acordo com r, de fato, o comprimento de DE é $2r$ (ver Figura 18).

Feita a construção, os alunos deverão explorá-la a fim de responder a) e b). Para responder a) eles podem mover o ponto x ao longo do intervalo (a, b). Além disso, podem mudar o comprimento do intervalo I através do controle deslizante r. Nesse ponto, é importante frisar que, não importa o quão próximo um ponto $x \in (a, b)$ esteja dos seus extremos, sempre há um intervalo aberto contendo x contido em (a, b). Se x estiver próximo de a, a ponto de não ser possível visualizar o intervalo I, basta aumentar o zoom suficientemente. Esse recurso é importante para ilustrar o intrigante fato que, é possível aproximar um ponto $x \in (a, b)$ o quanto quisermos de a, ou dito de outro modo, sempre que x pertencer a (a, b) sempre haverá uma distância positiva de x aos extremos do intervalo (a, b). Um problema que poderá surgir, é que a partir de um determinado momento (depois de usar o recurso zoom várias vezes), o intervalo I não apareça, devido ao sistema de arredondamento do programa. Para resolver esse

Figura 18 – Interior do intervalo



Fonte: Autor

problema, basta aumentar o número de casas decimais para o arredondamento e editar o incremento do controle deslizante.

Para responder b), basta mover o ponto x para coincidir com os extremos e observar que, nesses casos, nunca se tem $I \subset (a, b)$.

Após essa etapa, cabe algumas perguntas:

1) É possível determinar o comprimento do intervalo I (que pode ser obtido em função do seu raio) em função do ponto x para que se tenha $I \subset (a, b)$?

2) Se a resposta for positiva, quais seriam os possíveis candidatos?

3) Fixado um ponto $x \in (a, b)$, qual seria o maior raio de I para termos $I \subset (a, b)$?

4) Fixado um ponto $x \in (a, b)$, existe um raio mínimo para I para que se tenha $I \subset (a, b)$?

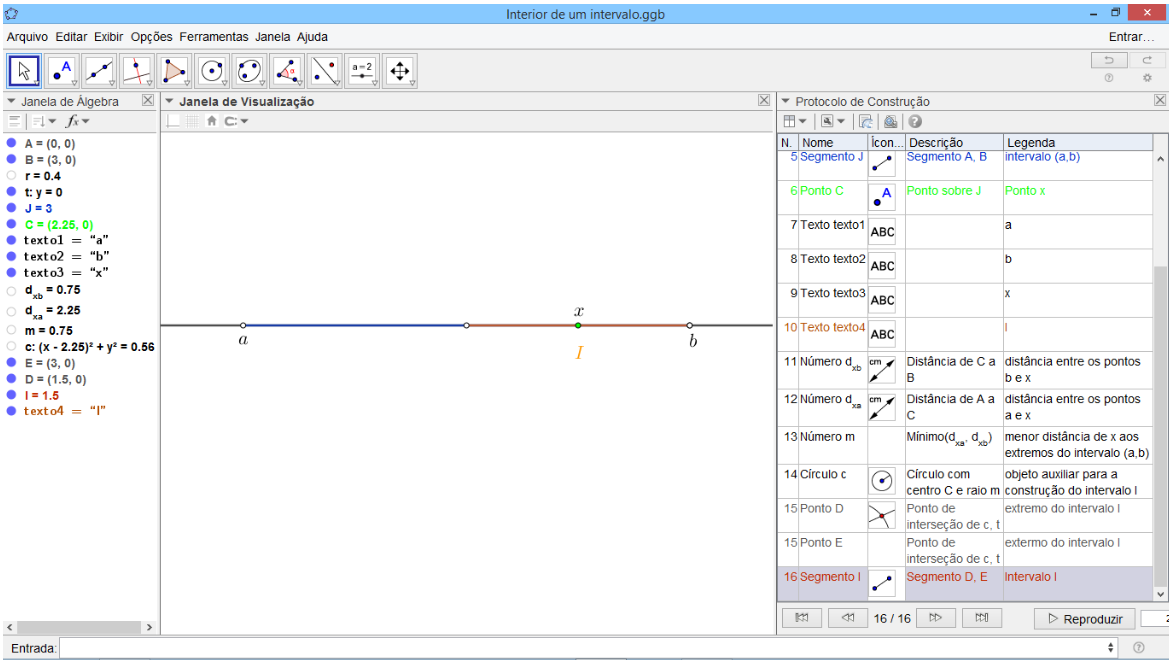
Construção (segunda parte)

7. Construir os números d_{xa}, distância do ponto x ao ponto a e d_{xb}, distância do ponto x ao ponto b.

8. Construir o número $m = \{d_{xa}, d_{xb}\}$, o menor dos números construídos no passo anterior.

9. Editar o círculo c mudando o raio de r para m (ver Figura 19). Não é necessário começar com esse raio, podemos iniciar com $\frac{m}{2}$ ou qualquer outro número conveniente, dependendo das respostas dadas a pergunta 2.

Figura 19 – Raio de I em função de x

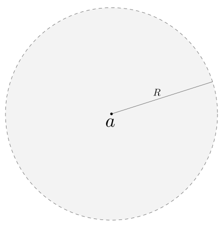


Fonte: Autor

Com essa construção, o raio de I muda automaticamente cada vez que o ponto x é movimentado, e sempre tem-se $I \subset (a, b)$. A importância dessa segunda parte, é que ela fornece a ideia geométrica por trás do argumento utilizado da demonstração formal (que geralmente é feita usando a desigualdade triangular). A pergunta 4) deve ser deixada para os alunos tentarem responder sem ajuda inicialmente, mas se isso não for possível, é importante fazer vários testes para o raio de c (que é o mesmo raio de I) a fim de induzir a resposta, por exemplo $\frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \frac{m}{5}, \frac{m}{10}, \frac{m}{20}, \frac{m}{100}$, etc.

Problema 3.1.2. a) Qual é o interior de um disco aberto D de centro a e raio R?

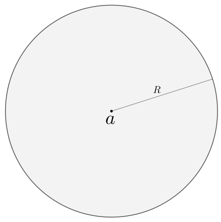
Figura 20 – Disco aberto de centro a e raio R



Fonte: Autor

b) Qual é o interior de um círculo C de centro a e raio R?

Figura 21 – Círculo de centro a e raio R



Fonte: Autor

O objetivo desse problema é duplo:
(I) dar a ideia geométrica de ponto interior;
(II) mostrar a ideia geométrica utilizada para a prova formal de que todos os pontos do disco aberto D de centro a e raio R são interiores, a saber, dado $x \in D$, basta tomar r igual a $R - |x - a|$ ou a qualquer outro número positivo menor do que $R - |x - a|$ e teremos que $B = (x; r) \subset D$. Ou seja, tomando r igual a diferença entre o raio de D e a distância do ponto x ao centro de D o disco aberto $B(x; r)$ está contido em D.

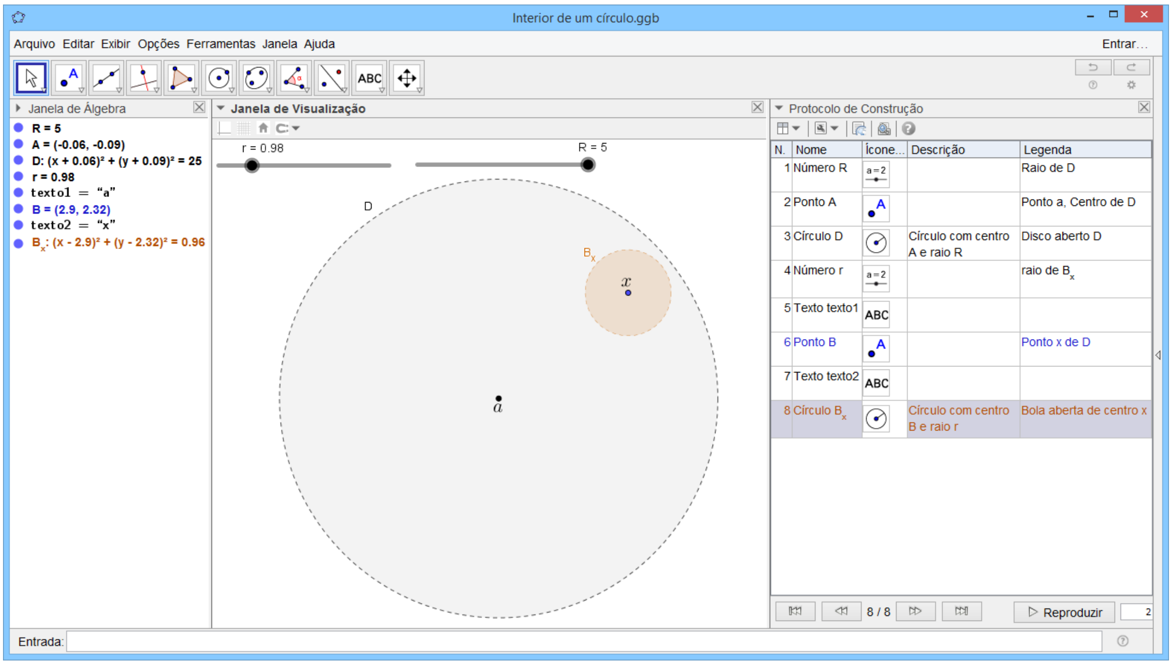
Para o item (a), o programa será construído em duas etapas. A primeira parte visando o objetivo (I) e, após os alunos explorarem o programa e o objetivo (I) ser alcançado, proceder-se-á a construção da segunda parte visando (II).

Construção (primeira parte)

1. Ocultar os eixos e a malha. Construir um controle deslizante R, com $R \geq 0$.
2. Marcar um ponto A no plano e construir um círculo D de centro A e raio R, em seguida criar o texto a para o ponto A.
3. Marcar um ponto B no plano e criar o texto x para o ponto B.
4. Criar um controle deslizante r, com $r \geq 0$, e construir o círculo B_x de centro B e raio r.
5. Editar os círculos construídos nos passos anteriores: alterar o estilo para pontilhado, escolher uma cor para cada um deles e mudar a transparência para diferenciar o interior de ambos (ver Figura 22).
6. Editar o texto x, o ponto B e o círculo B_x para que apareçam apenas no disco aberto D (isso pode ser feito através do recurso “Condição para Exibir Objeto(s)”. Nos três casos, a condição deve ser: Distância(A, B) < R).

Nessa construção, o ponto x pode ser movido para qualquer lugar de D. O raio de B_x pode ser alterado através do controle deslizante r. A ideia é que os alunos movam o ponto x em D e diminuam o raio de B_x para que se tenha $B_x \subset D$. Como no

Figura 22 – Interior do disco aberto



Fonte: Autor

problema anterior, aqui também é importante que se explore os pontos mais próximos da circunferência de centro a e raio R (a fronteira de D). É fácil se convencer de que os pontos mais próximos do centro a de D são interiores, já que esses pontos estão mais distantes da fronteira de D (logo é fácil visualizar que podemos achar um raio pequeno o suficiente para se ter $B_x \subset D$). O mais difícil é enxergar que qualquer que seja o ponto de D, por mais próximo que esteja da fronteira, ainda assim existe um $r \geq 0$ para o qual o disco aberto B_x de centro x e raio r está contido em D. Ou seja, por mais que aproximemos x da fronteira de D, ainda é possível aproximá-lo mais, sem sair de D; ou ainda, existem infinitos pontos em D próximos de x que estão ainda mais próximos da fronteira de D. Quando tentamos apresentar esses fatos usando o quadro (que é estático) apelamos para a lógica e a imaginação, uma vez que não é possível, a partir de um certo momento visualizar B_x, pois esse conjunto “se reduz ao ponto x” rapidamente quando tentamos aproximar x da fronteira de D, isto é, não é possível visualizar os pontos de B_x além do próprio x. Quando fazemos a demonstração formal, usamos argumentos lógicos e algébricos (o fato usado na demonstração formal geralmente é a desigualdade triangular). A vantagem do GeoGebra nesse estágio, uma vez que pretendemos apenas dar uma ideia intuitiva, é que o aluno tem a possibilidade de enxergar esses fatos apenas utilizando o recurso do zoom. Isso certamente facilitará uma concepção mais completa da ideia de conjunto aberto, bem como da noção de limite.

Após essa etapa, devemos fazer algumas perguntas a fim de construir a ideia da demonstração formal:

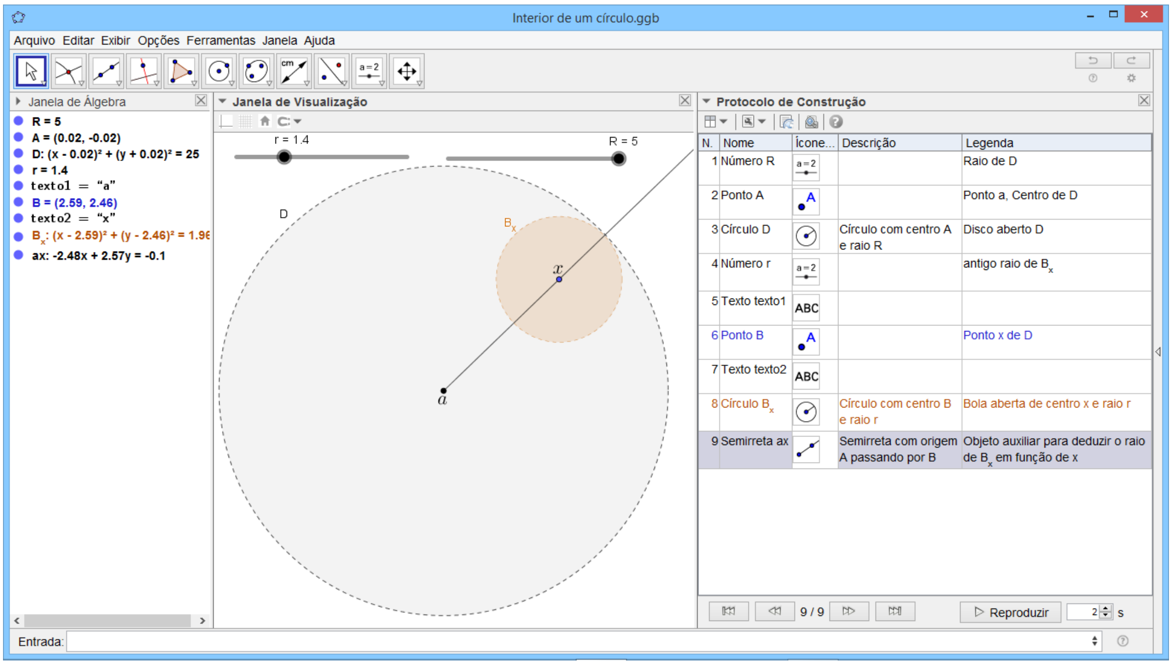
1) É possível determinar o raio de B_x em função do ponto x para que se tenha $B_x \subset D$?
2) Se a resposta for positiva, quais seriam os possíveis candidatos?
3) Fixado um ponto $x \in D$, qual seria o maior raio de B_x para termos $B_x \subset D$?
4) Fixado um ponto $x \in D$, existe um raio mínimo para B_x para que se tenha $B_x \subset D$?

A construção da segunda parte do programa terá duas etapas. É possível que os alunos respondam 1), 2) e 3) sem necessitar da primeira etapa, (que consistirá na construção de um segmento de reta) mesmo assim, ela será útil para tornar a ideia mais clara. Caso eles não consigam responder 1), 2) e 3) só com a primeira parte (o que é mais provável), a semirreta em questão será vital. A segunda etapa permitirá constatar o que se espera ser conjeturado a partir da construção da primeira etapa (da segunda parte), bem como responder 4), embora seja possível que alguns consigam responder 4) a partir do problema anterior.

Construção (segunda parte)

7. Construir a semirreta $\overrightarrow{ax}$. Isso facilitará a dedução do raio de B_x em função de x.

Figura 23 – Dedução do raio de B_x em função de x e de R



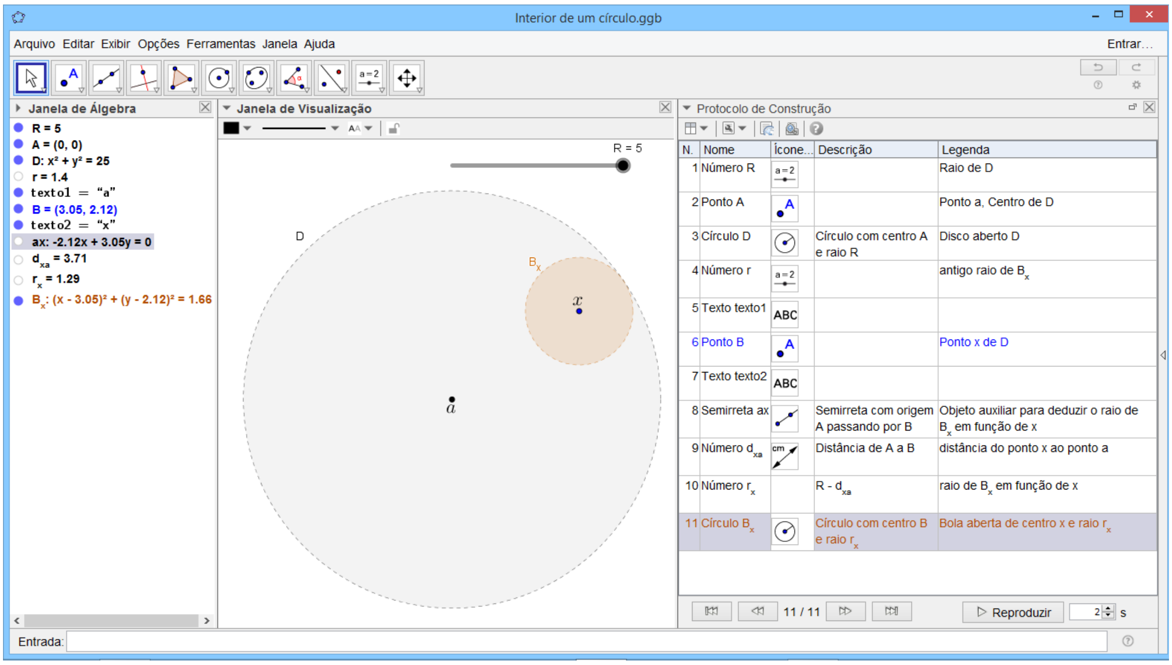
Fonte: Autor

Os alunos devem mover o ponto x em D e, para cada x, diminuir o raio de B_x através do controle deslizante r de modo que se tenha $B_x \subset D$. Espera-se que os

alunos consigam identificar que o raio máximo para B_x em função de x deve ser a distância de x à circunferência de centro a e raio R (a fronteira de D). Pode surgir duas respostas à pergunta 3):
Resposta 1: para cada $x \in D$, o raio de B_x deve ser $r_x = R - |x - a|$.
Resposta 2: para cada $x \in D$, o raio de B_x deve ser igual ao comprimento do segmento cujas extremidades são o ponto x e o ponto de interseção entre a semirreta $\overrightarrow{ax}$ e a circunferência de centro a e raio R (ou seja, eles identificam r_x mas não conseguem expressá-lo em função de R).

Se a resposta dada for a primeira, deve-se então seguir os seguintes passos.
8. Construir o número d_{xa}, distância entre os pontos x e a.
9. Construir o número $r_x = R - d_{xa}$, diferença entre o raio R de D e a distância do ponto x ao ponto a.
10. Editar o círculo D mudando o raio de r para r_x (não é necessário começar com esse raio, podemos iniciar com $r_x = \dfrac{R - d_{xa}}{2}$ ou qualquer outro número conveniente, dependendo das respostas dadas a pergunta 2).

Figura 24 – Raio de B_x em função de x e de R

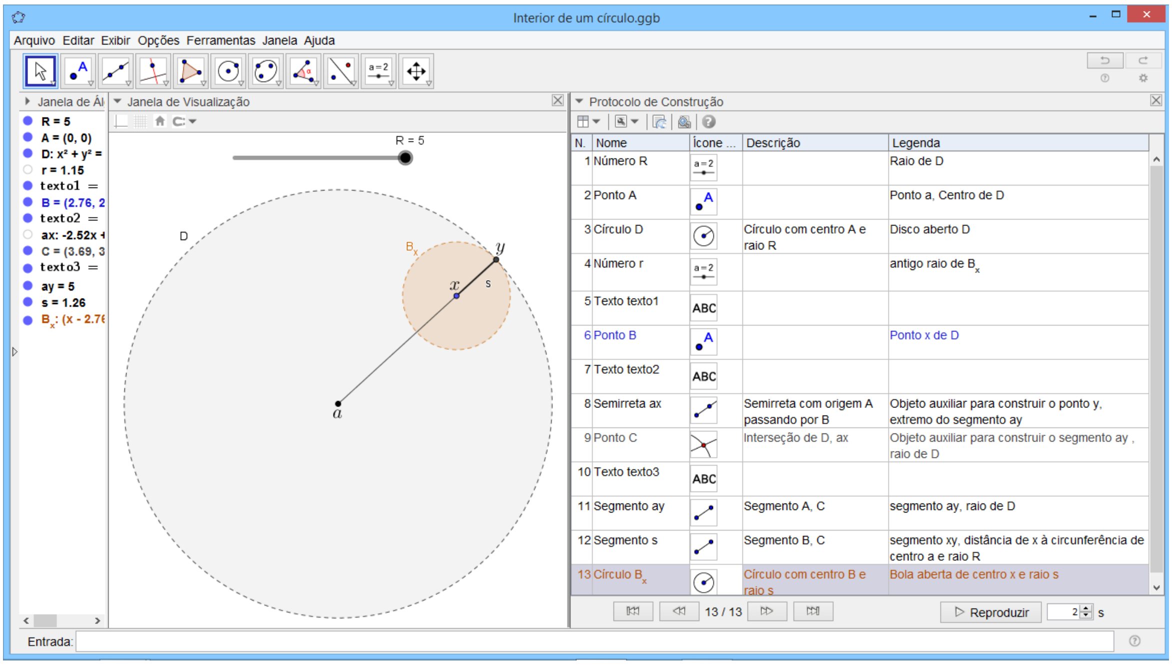


Fonte: Autor

Com essa construção, o raio r_x muda automaticamente em função da posição do ponto x e tem-se $B_x \subset D$ para todo $x \in D$.
Como no problema anterior, se os alunos não conseguirem responder a pergunta 4) sem ajuda, é importante fazer vários testes para o raio de r_x a fim de induzir a resposta, por exemplo $\dfrac{R - d_{xa}}{2}, \dfrac{R - d_{xa}}{3}, \dfrac{R - d_{xa}}{4}, \dfrac{R - d_{xa}}{5}, \dfrac{R - d_{xa}}{10}, \dfrac{R - d_{xa}}{20}, \dfrac{R - d_{xa}}{100}$, etc.

Caso tenhamos a resposta 2, então a construção pode ser feita assim:
8. Construir o ponto C de interseção de $\overrightarrow{ax}$ e D, ocultar a semirreta $\overrightarrow{ax}$, em seguida criar o texto y para o ponto C e construir o segmento ay. (A medida de ay é igual a R).
9. Construir o segmento xy, cuja medida s é a distância do ponto x à circunferência de centro a e raio R.
10. Editar o círculo D mudando o raio de r para s. Não é necessário começar com esse raio, podemos iniciar com $\frac{s}{2}$ ou qualquer outro número conveniente, dependendo das respostas dadas a pergunta 2.

Figura 25 – Dedução do raio de B_x em função de x

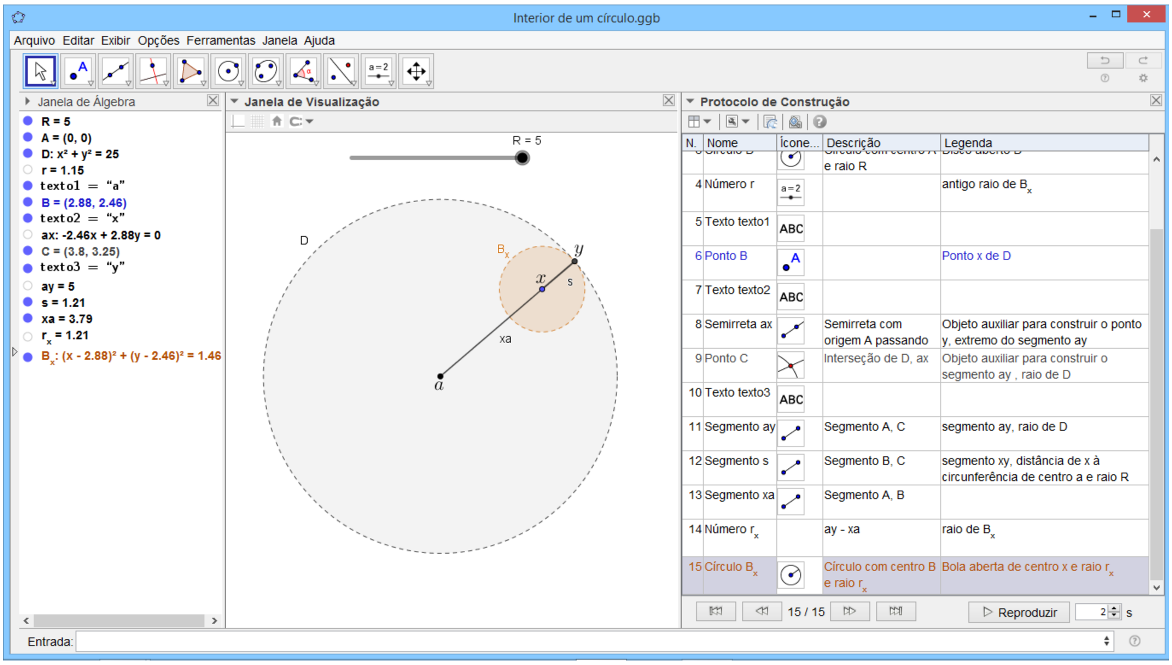


Fnte: Autor

Aqui também é importante que se tome o mesmo procedimento no caso da construção anterior, com respeito à pergunta 4), substituindo $R - d_{xa}$ por s. Por fim, no caso dessa construção, após essa etapa, deve-se ainda continuar com mais alguns passos a fim de exibir o raio de B_x em função de x e de R.
11. Construir o segmento ax, em seguida construir o número $r_x = ay - ax$ ou $r_x = R - ax$. (É bom fazer os dois. Para isso, basta editar o número r_x após a construção).
12. Editar o raio de B_x, trocando s por r_x (ver Figura 26). Os alunos devem mover o ponto x e observar que, para cada x, tem-se $s = r_x$. Após a construção, e a verificação de que $r_x = R - xa$, é igual a s, os segmentos xa e xy podem ser ocultados.

Para o item (b), deve-se notar que a única diferença entre C e o conjunto D do

Figura 26 – Dedução detalhada do raio de B_x em função de x e de R



Fonte: Autor

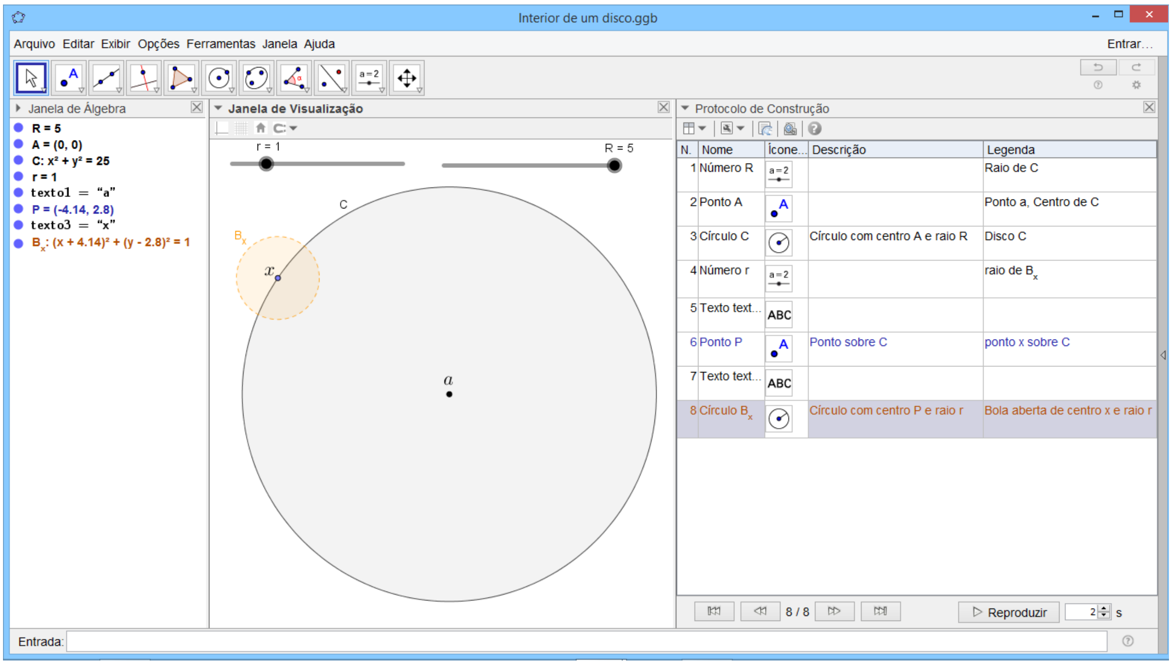
item a), é que a circunferência de centro a e raio R pertence a C mas não pertence a D. Segue-se que todos os pontos de D são interiores a C. Assim, no item b), precisamos apenas verificar se os pontos da referida circunferência são interiores a C.

Construção.

1. Ocultar os eixos e a malha. Construir um controle deslizante R, com $R \geq 0$.
2. Marcar um ponto A no plano e construir um círculo C de centro A e raio R (o raio de C poderá ser alterado através do controle deslizante R), em seguida criar o texto a para o ponto A.
3. Marcar um ponto P sobre a circunferência C. Criar o texto x para o ponto P. O ponto x poderá ser movido na circunferência de centro a e raio R (permanecendo na mesma).
4. Criar um controle deslizante r, com $r \geq 0$, e construir o círculo B_x de centro x e raio r.
5. Editar os círculos construídos nos passos anteriores: alterar o estilo de B_x para pontilhado, escolher uma cor para cada um deles e mudar a transparência para diferenciar o interior de ambos (ver Figura 27).

Os alunos devem mover o ponto x sobre a circunferência e diminuir o raio de B_x através do controle deslizante r. A ideia é perceber que não existe $r > 0$ para o qual a bola aberta B_x de centro x e raio r esteja contida em C. Eles devem diminuir o quanto

Figura 27 – Interior do disco

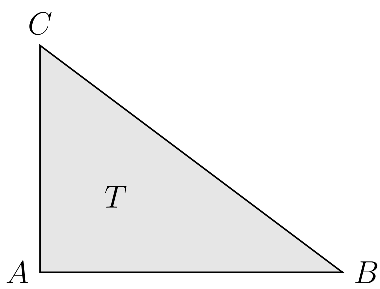


Fonte: Autor

quiserem r e sempre haverá pontos em B_x que ficam fora de C.

Problema 3.1.3. Determine o interior do conjunto T, região limitada pelo triângulo ABC, conforme figura abaixo.

Figura 28 – Região triangular



Fonte: Autor

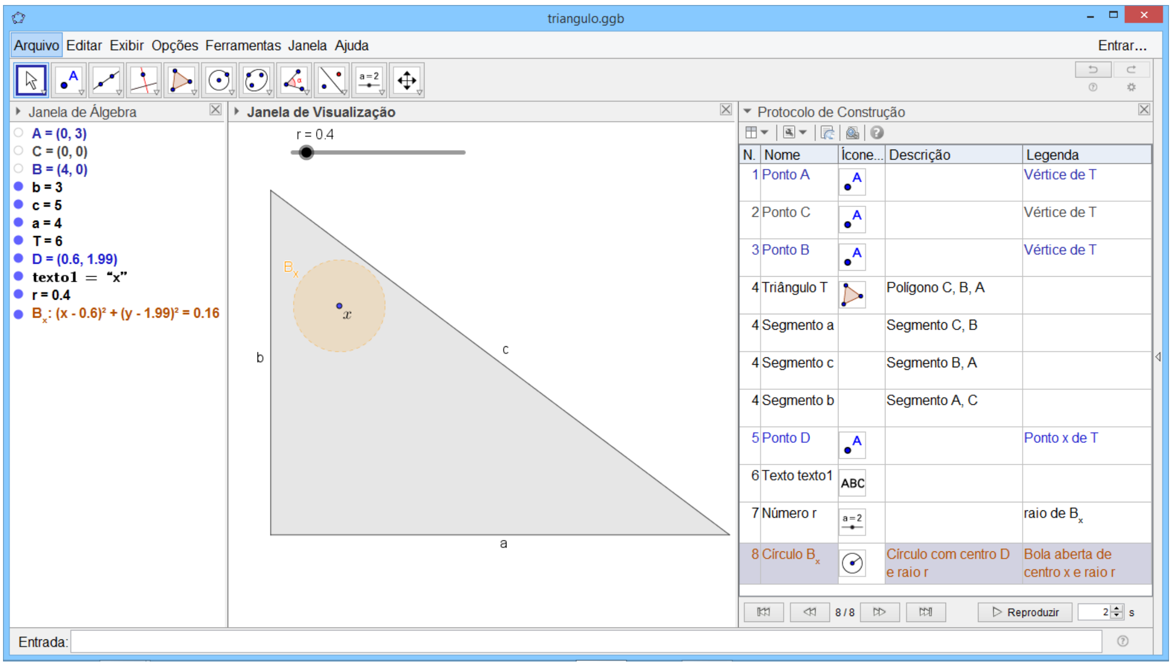
O objetivo desse problema é fixar a noção de ponto interior e expandir a ideia utilizada no Problema 3.1.1 para exibir o raio da bola aberta B_x em função do ponto x para se ter B_x contida no referido conjunto (ver Figura 19, ali preferimos, por simplicidade escrever I em vez de B_x). Ou seja, o raio máximo de B_x deve ser o mínimo entre as distâncias de x aos "extremos do conjunto".

A construção do programa também será feita em duas etapas. Como nos casos anteriores, a primeira parte visa fixar a ideia de ponto interior, (os alunos devem descobrir quais pontos são interiores) e a segunda parte, descobrir o raio da bola aberta B_x de centro x, em função do ponto x, para que se tenha $B_x \subset T$.

Construção (primeira parte)

1. Ocultar eixos e malha. Construir três pontos A,B e C, em seguida construir o polígono T com vértice nesses pontos. Alterar a transparência do polígono T para enfatizar seu interior e ocultar os pontos dos vértices. Os pontos podem ser movidos para qualquer lugar do plano, assim, pode se obter qualquer triângulo a partir desses pontos.
2. Construir um controle deslizante r, com $r \geq 0$.
3. Construir um ponto D em T e criar um texto x para o ponto D, em seguida construir um círculo B_x de centro x e raio r. Editar o estilo de B_x para pontilhado e alterar sua transparência. Em seguida editar o ponto D, o texto x e B_x para que apareçam apenas em T (isso pode ser feito através da condição "D∈ T", no recurso "Condição para Exibir Objeto(s)" para os três casos).

Figura 29 – Interior do triângulo



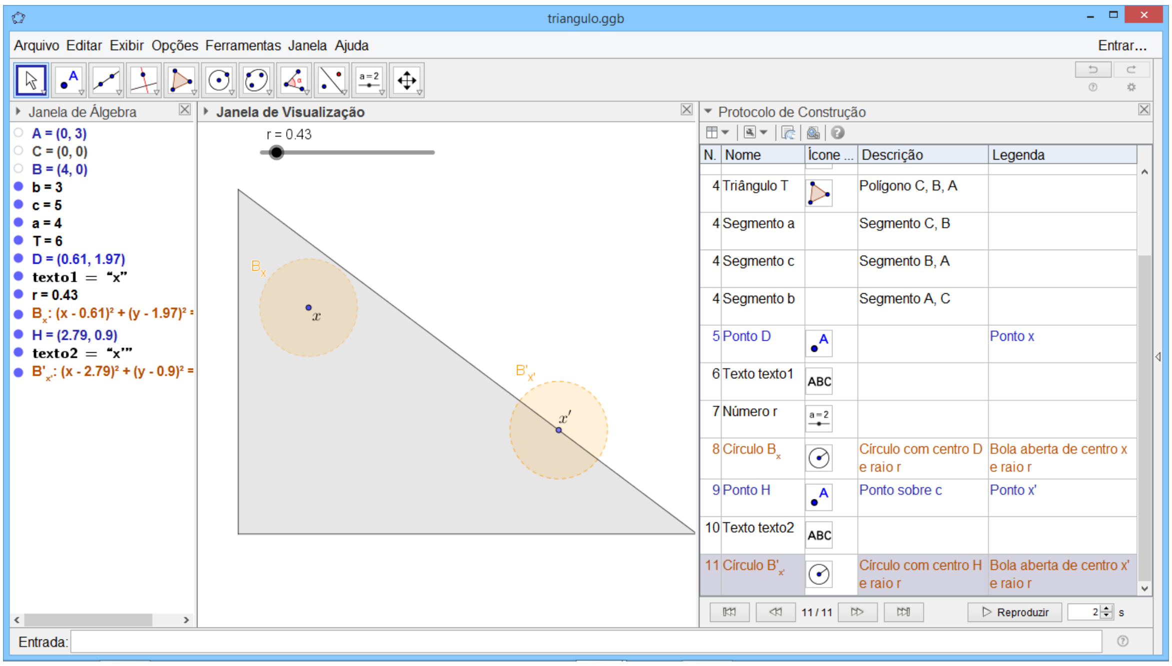
Fonte: Autor

Os alunos devem mover o ponto x em T e, para cada x, diminuir o raio de B_x

através do controle deslizante r para que se tenha $B_x \subset T$. Aqui também é importante explorar os pontos mais próximos dos lados do triângulo, especialmente os pontos mais próximos dos vértices. Não é tão óbvio num primeiro contato para alunos nessa faixa etária (geralmente eles não tem ainda a noção de limite), que para cada ponto de T, por mais próximo que esteja de um dos vértices, sempre haverá um disco aberto (ou seja com raio positivo) centrado nesse ponto e contido em T.

A fim de mostrar que os pontos sobre os lados do triângulo não são interiores, é mais prático construir (passo 4) um ponto x' sobre um dos lados do triângulo (a análise dos outros lados é inteiramente análoga), em seguida construir um círculo $B'_{x'}$ de centro x' e raio r. A ideia é que os alunos movam o ponto x' sobre o lado do triângulo (os vértices entram nessa análise) e diminuam o quanto quiserem o raio de $B'_{x'}$ através do controle deslizante r. Deve-se constatar que, para todo $r \geq 0$ sempre haverá pontos em $B'_{x'}$ que não pertencem a T (ver Figura 30).

Figura 30 – Interior do triângulo (lados)



Fonte: Autor

Após essa etapa, devemos fazer algumas perguntas a fim de determinar o raio de B_x em função de x.

1) É possível determinar o raio de B_x em função do ponto x para que se tenha $B_x \subset T$?

2) Se a resposta for positiva, quais seriam os possíveis candidatos?

3) Fixado um ponto $x \in T$, qual seria o maior raio de B_x para termos $B_x \subset T$?

4) Fixado um ponto $x \in T$, existe um raio mínimo para B_x para que se tenha $B_x \subset T$?

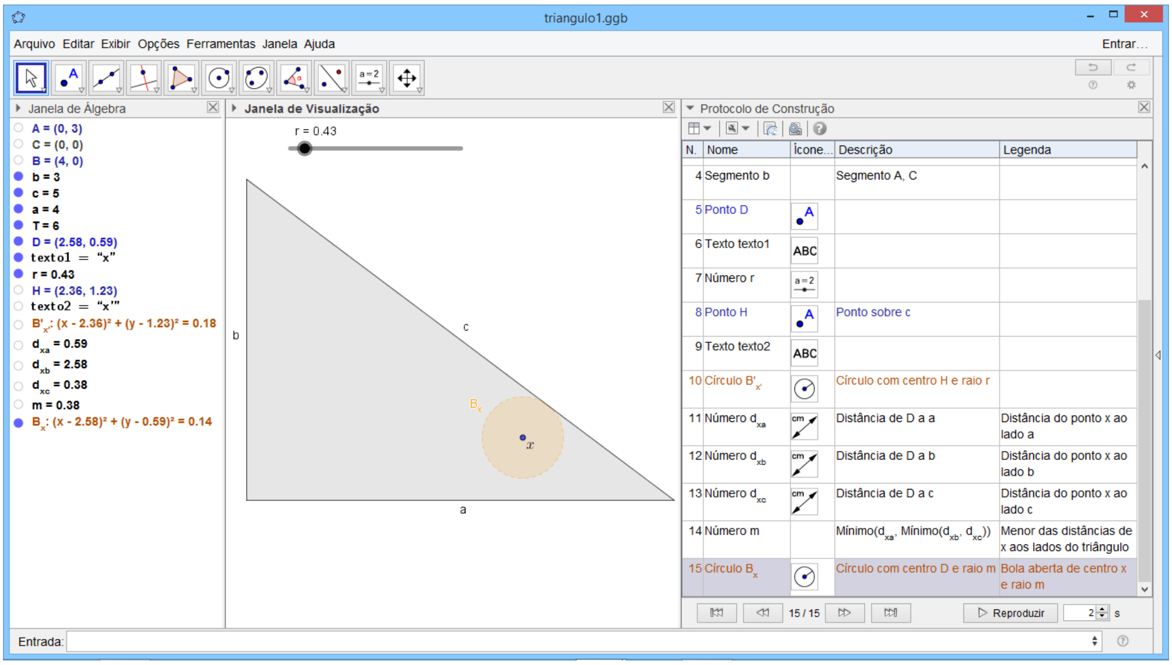
Se os alunos conseguirem responder a pergunta 3) de forma precisa (ou pelo menos conjecturar que o raio máximo é o mínimo entre as distâncias de x aos lados do triângulo), então a continuação da construção pode ser assim:

Construção (segunda parte)

5. Construir os números $d_{xa},\ d_{xb}$ e d_{xc}, distância do ponto x aos lados a, b e c respectivamente, do triângulo. Em seguida construir o número $m = \min\{d_{xa},\ d_{xb},\ d_{xc}\}$, a menor das distâncias do ponto x aos lados do triângulo.

6. Editar B_x, trocando o raio de r para m (ver Figura 31).

Figura 31 – Interior do triângulo (raio de B_x em função de x)



Fonte: Autor

Nessa construção, o raio de B_x muda automaticamente em função de x e tem-se $B_x \subset T$ para todo x pertencente a T, exceto quando x estiver sobre um dos lados ou sobre um dos vértices do triângulo. A essa altura, talvez os alunos já consigam responder a pergunta 4) sem fazer vários testes para o raio de B_x como nos casos anteriores. Mesmo assim, é bom que eles mudem o raio de B_x de m para algum outro número (em função de m) menor do que m.

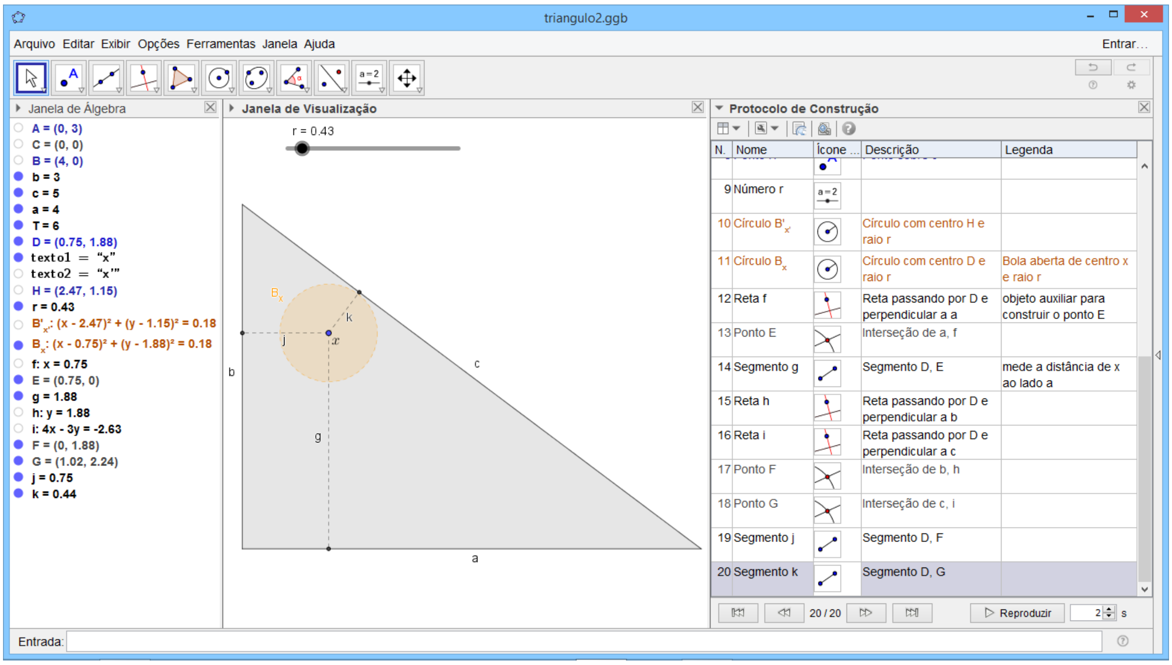
Caso os alunos não consigam conjecturar uma resposta para a pergunta 3), então a construção a partir do passo 5 pode ser assim:

Construção alternativa da segunda parte

5. Construir uma reta perpendicular ao lado a do triângulo, passando por x, em seguida construir o ponto E de interseção do lado a com a reta perpendicular. Depois, ocultar a

reta perpendicular e construir o segmento g cujas extremidades são os pontos x e E (a medida do segmento g é a distância do ponto x ao lado a do triângulo).
6. Repetir o passo 5 duas vezes para construir os segmentos j e k cujas medidas são a distância do ponto x aos lados b e c do triângulo, respectivamente (ver Figura 32).

Figura 32 – Interior do triângulo (dedução do raio de B_x em função de x)



Fonte: Autor

Os alunos devem mover o ponto x em T (os segmentos $g,\ j$ e k mudam de tamanho automaticamente de acordo com a posição de x) e diminuir o raio de B_x através do controle deslizante r até obter $B_x \subset T$. Isso facilitará uma conjectura para a resposta à pergunta 3).

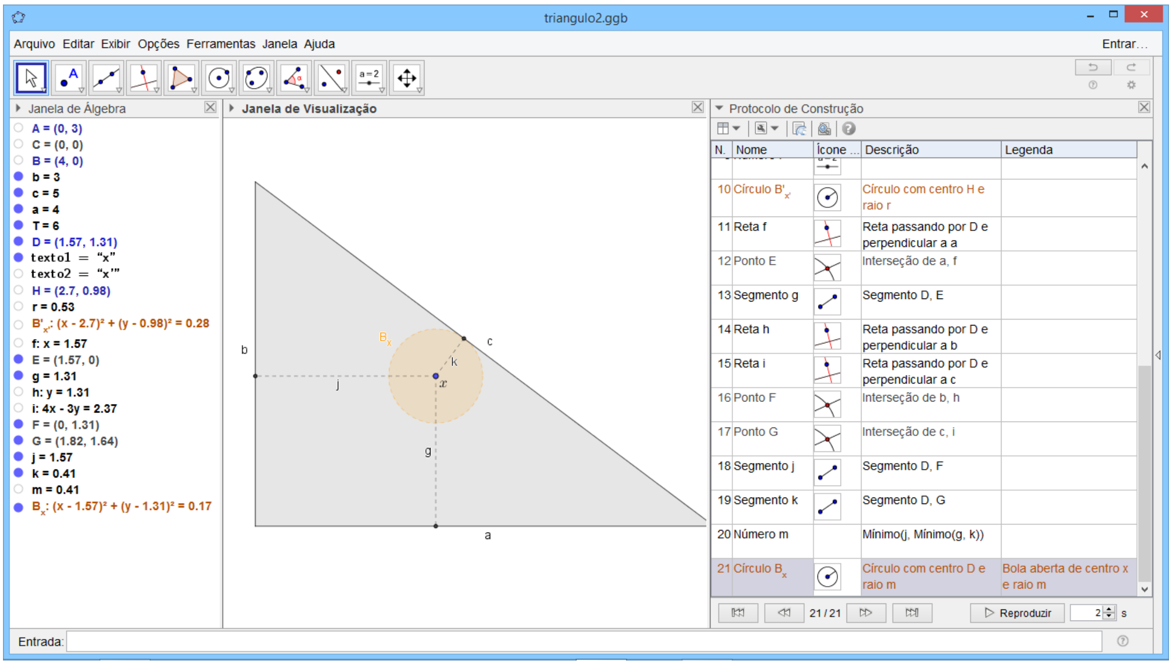
Após essa etapa, podemos terminar a construção
8. Construir o número $m = \min\{g,\ j,\ k\}$, a menor das distâncias do ponto x aos lados do triângulo.
9. Editar o raio de B_x, trocando r por m (ver Figura 33).

Caso os alunos não saibam, é importante observar que $g,\ j$ e k de fato representam as distâncias de x aos lados do triângulo.

3.1.2 Propriedades

Atividade 3.1.2. O objetivo dessa atividade é apresentar algumas propriedades relativas a conjuntos abertos. Os problemas são dispostos de maneira que a ideia da

Figura 33 – Raio de B_x em função de x



Fonte: Autor

demonstração seja construída de forma gradual, isto é, partimos de casos mais elementares a fim de criar intuição para o resolver caso geral.

Problema 3.1.4. Verifique se os seguintes conjuntos são abertos:
a) a interseção de dois intervalos abertos;
b) a interseção de dois discos abertos;

O objetivo desse problema é construir a ideia geométrica que será utilizada na demonstração do Problema 3.1.5 (os conjuntos do presente problema, são casos particulares muito especiais daquele).

a) **Construção.**

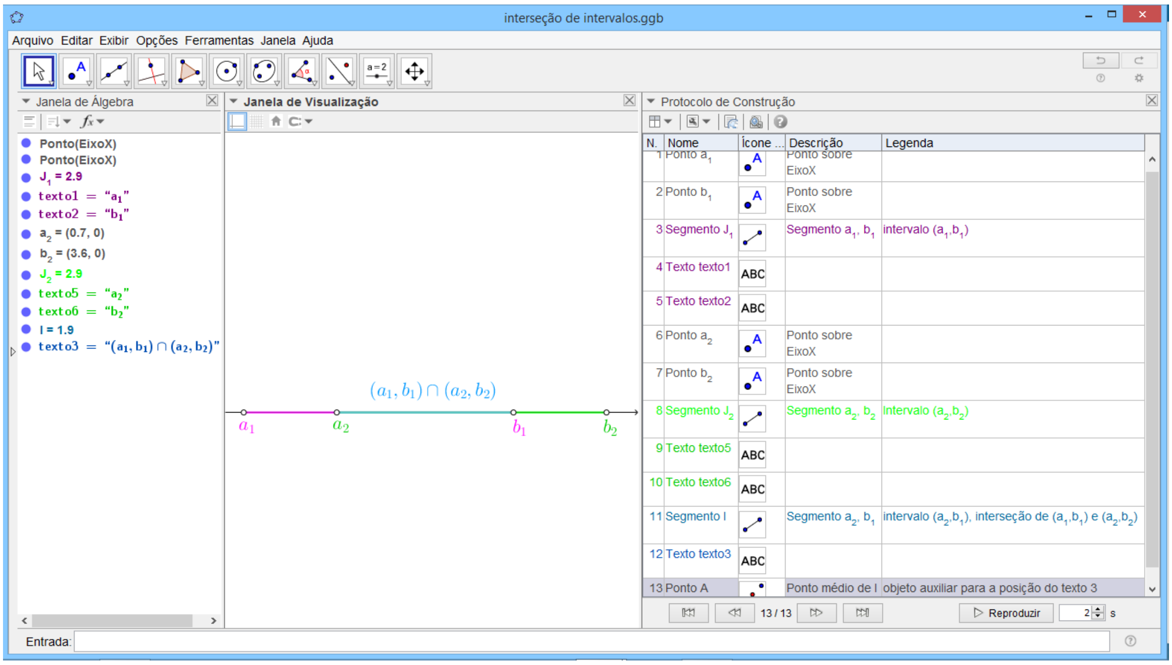
1. Ocultar o eixo Y, ocultar os números e a graduação do eixo X. Construir dois pontos a_1 e b_1 sobre o eixo X, e construir o segmento a_1b_1 (ou seja, o intervalo (a_1, b_1)). Editar os pontos a_1 e a_2 mudando sua cor para branca.

2. Repetir o passo anterior para construir um segmento a_2b_2 (ou seja, o intervalo (a_2, b_2)).

3. Mover o ponto a_2 de modo que se tenha $a_2 \in (a_1, b_1)$, em seguida construir o segmento a_2, b_1 (ou seja, o intervalo $(a_2, b_1) = (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$). É útil escolher uma cor para cada um dos três segmentos construídos (ver Figura 34).

Nessa construção, os quatro extremos dos intervalos podem ser movidos no

Figura 34 – Interseção de intervalos abertos



Fonte: Autor

eixo X. A ideia é mostrar que a interseção de dois intervalos abertos ou é vazia ou é um intervalo aberto. Em qualquer dos casos, a interseção é um conjunto aberto. O primeiro caso é provado (ou convencionado) apenas usando a definição, quanto ao segundo, basta usar o Problema 3.1.1.

b) A construção será feita em duas etapas.

Construção(primeira parte)

1. Construir dois pontos A e B, criar dois textos a_1 e a_2 para os pontos A e B, respectivamente.

2. Construir dois controles deslizantes R_1 e R_2, (ambos não negativos). Construir o círculo D_1 de centro a_1 e raio R_1 e o círculo D_2 de centro a_2 e raio R_2.

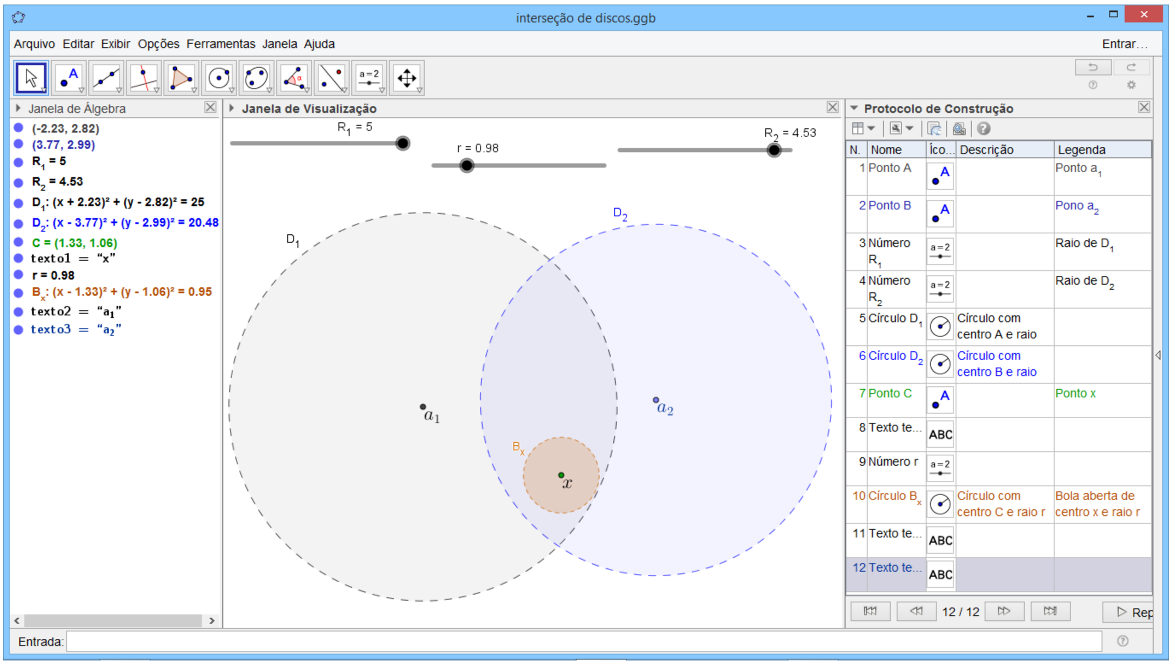
3. Construir um ponto C em $D_1 \cap D_2$ e criar um texto x para o ponto C. Em seguida, construir um círculo B_x de centro x e raio r.

4. Editar o estilo dos três círculos para pontilhado, alterar a transparência e escolher uma cor para cada um. Editar o ponto C, o texto x e B_x para que apareçam apenas em $D_1 \cap D_2$ (para isso, basta por, para os três objetos a condição de exibição "Distância(C,A)< R_1 ∧ Distância(C,B)<R_2") (ver Figura 35).

Os alunos devem mover o ponto x em $D_1 \cap D_2$ e diminuir o raio de B_x através do controle deslizante r até obter $B_x \subset (D_1 \cap D_2)$.

Como nos casos anteriores, depois que os alunos se convencerem (ou pelo

Figura 35 – Interseção de dois discos abertos



Fonte: Autor

menos conjecturarem) que $D_1 \cap D_2$ é aberto, é importante repetir as perguntas:
1) É possível determinar o raio de B_x em função de x?
2) Em caso afirmativo, quem seriam os possíveis candidatos?
3) Qual o maior raio de B_x para que se tenha $B_x \subset D_1 \cap D_2$?

Essas perguntas devem motivar a segunda pare da construção.

Construção (segunda parte)

5. Construir a semirreta $\overrightarrow{a_1 x}$, marcar o ponto D na interseção de $\overrightarrow{a_1 x}$ e D_1, em seguida ocultar $\overrightarrow{a_1 x}$ e construir o segmento d_1 cujos extremos são os pontos x e D. O comprimento de d_1 mede a distância de x à circunferência de centro a_1 e raio R_1.
6. Repetir o passo anterior para construir o segmento d_2, cujo comprimento mede a distância de x à circunferência de centro a_2 e raio R_2.

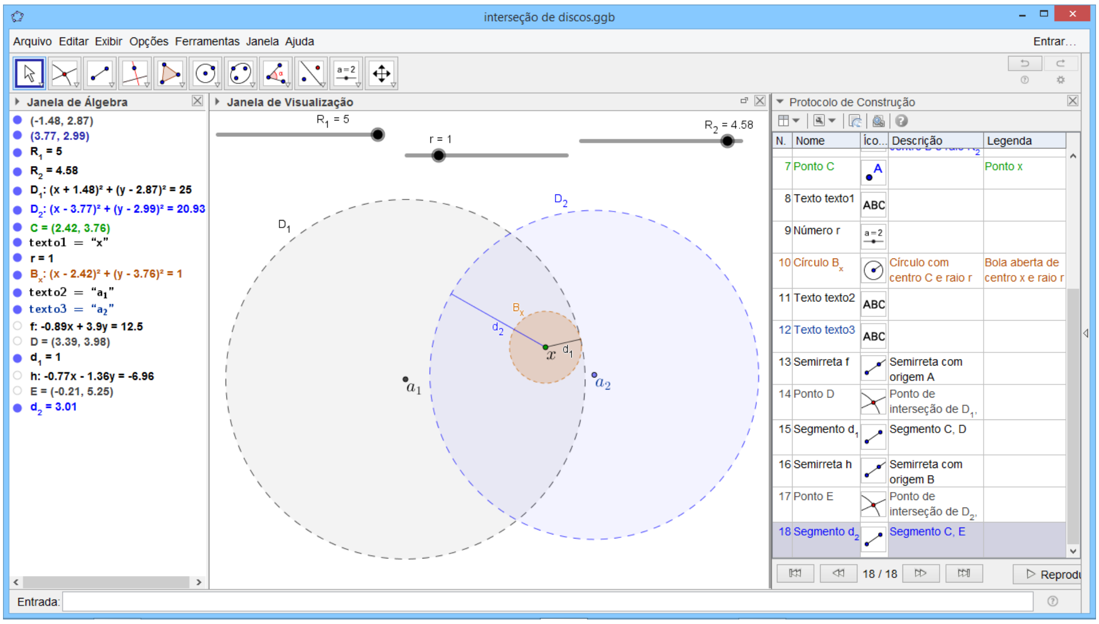
Nessa construção (ver Figura 36), os segmentos d_1 e d_2 mudam de tamanho automaticamente em função de x. Os alunos devem mover o ponto x em $D_1 \cap D_2$, e diminuir o raio de B_x através do controle deslizante r até obter $B_x \subset (D_1 \cap D_2)$. Isso facilitará a dedução do raio de B_x em função de x.

Após essa etapa, deve-se então partir para o penúltimo passo.

7. Construir o número $m = \min\{d_1, d_2\}$ e editar o raio de B_x trocando r por m.
Nessa construção, (ver Figura 37) o raio m de B_x muda automaticamente em função

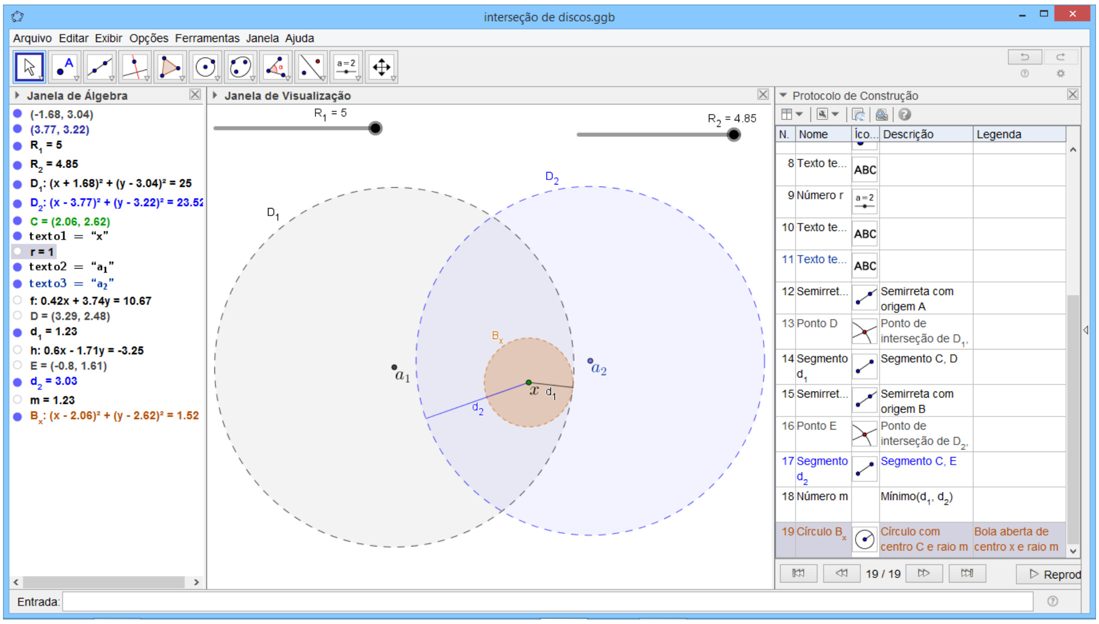
de x e tem-se $B_x \subset (D_1 \cap D_2)$, para todo $x \in (D_1 \cap D_2)$. É sempre importante frisar

Figura 36 – Interseção de dois discos abertos (dedução do raio de B_x em função de x)



Fonte: Autor

Figura 37 – Interseção de dois discos abertos (raio de B_x em função de x)



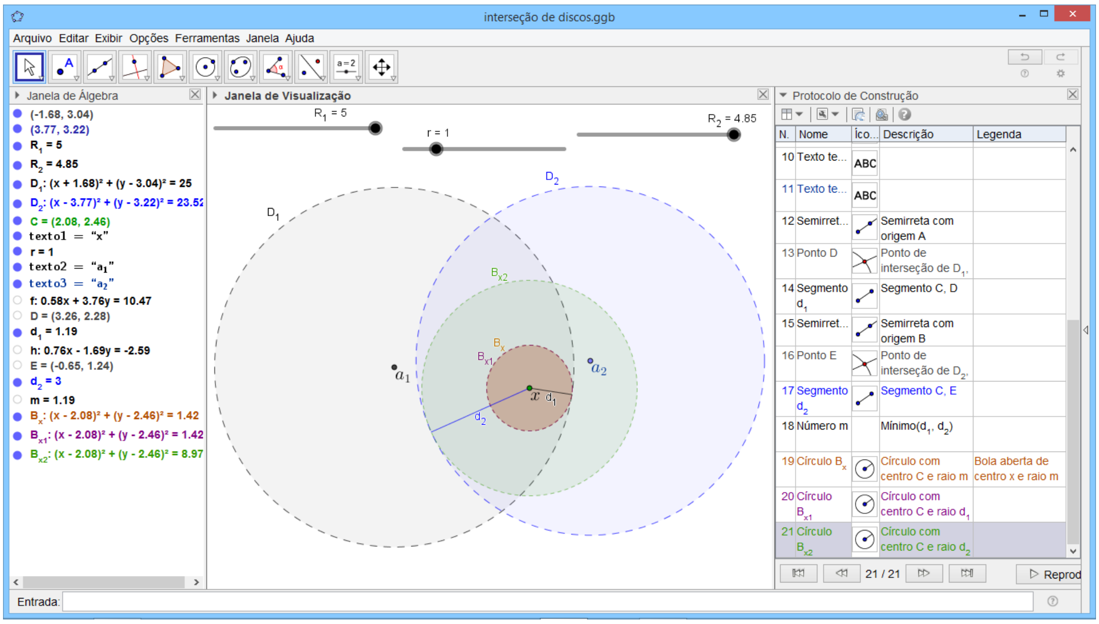
Fonte: Autor

que o raio m acima é o máximo, ou seja, para qualquer número real positivo s menor ou igual a m, tem-se $B_s \subset (D_1 \cap D_2)$, para todo $x \in (D_1 \cap D_2)$. Assim, é útil pedir aos alunos que exibam (editando o raio de B_x) outros valores para o raio de B_x, $\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \text{ por exemplo}\right)$.

Finalmente, para ilustrar a ideia que será utilizada na demostração do caso geral, vamos ao último passo.

8. Construir os círculo B_{x1} de centro x e raio d_1 e círculo B_{x2} de centro x e raio d_2 (ver Figura 38). A ideia é ilustrar o argumento utilizado para mostrar que a interseção

Figura 38 – Interseção de dois discos abertos (o raio de B_x)



Fonte: Autor

de dois discos abertos é um conjunto aberto. Ou seja, se x pertence aos conjuntos abertos D_1 e D_2 então pelo Problema 3.1.2 existem bolas abertas B_{x1} de centro x e raio d_1 e B_{x2} de centro x e raio d_2, tais que $B_{x1} \subset D_1$ e $B_{x2} \subset D_2$. Logo, se tomarmos $m = \min\{d_1, d_2\}$, então $B_x = B(x; m) \subset (D_1 \cap D_2)$. Nessa construção, ao mover o ponto x em $D_1 \cap D_2$, B_x coincide com B_{x1}, caso $d_1 \leq d_2$ e com B_{x2}, caso $d_2 \leq d_1$. Pode ser útil o recurso de ocultar e depois visualizar novamente (de modo conveniente, para a imagem não ficar muito carregada de informações) D_1 a fim de enfatizar que d_1 é mesmo raio utilizado na construção do programa do Problema 3.1.2 para mostrar que os pontos do disco aberto são interiores (a mesma coisa pode ser feita para D_2).

Problema 3.1.5. A interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto?

O objetivo aqui é, a partir da intuição geométrica utilizada no problema anterior, o aluno possa generalizar o fato. É útil fazer um caso mais geral no plano ainda utilizando o GeoGebra.

Construção

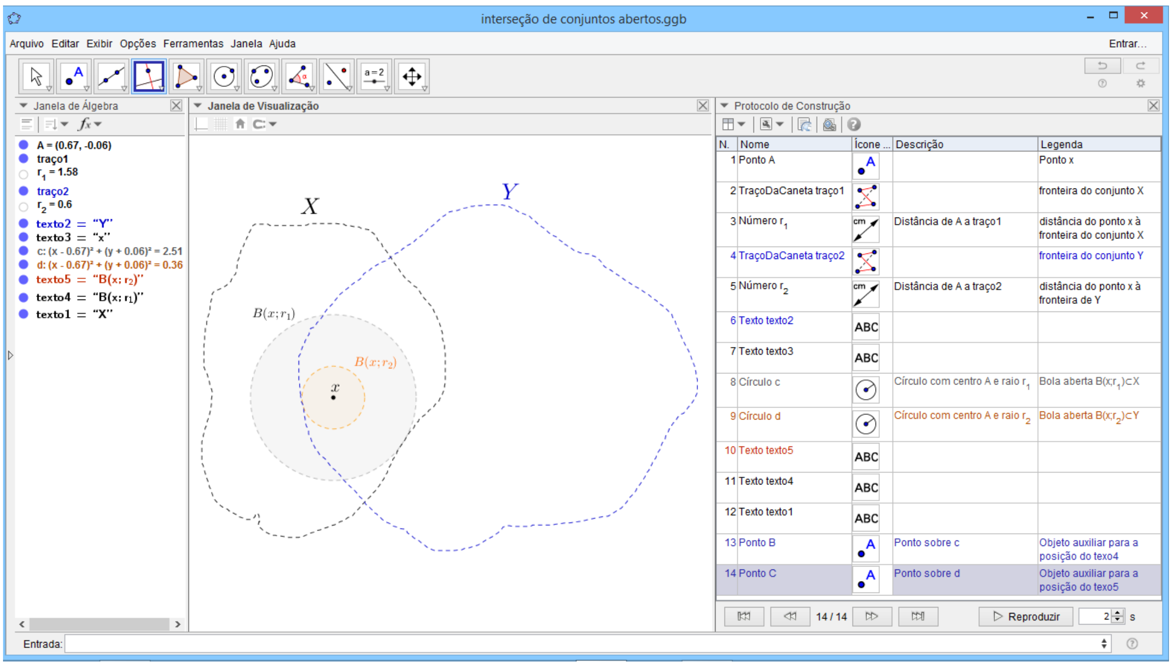
1. Construir dois traços com o recurso "caneta" a fim de representar dois conjuntos genéricos X e Y no plano. Esses traços podem ser construídos com o aspectos bastante diferentes. Além disso, eles podem ser movidos (rigidamente) a fim de alterar a interseção.

2. Construir os números r_1, distância do ponto x ao traço que representa a fronteira de X e r_2, distância do ponto x ao traço que representa a fronteira de Y.

3. Construir um ponto x em $X \cap Y$, em seguida construir os círculos $B(x; r_1)$ de centro x e raio r_1 e $B(x; r_2)$ de centro x e raio r_2.

Nessa construção, o ponto x pode ser movido em $X \cap Y$. O raios de $B(x; r_1)$ e $B(x; r_2)$ mudam automaticamente em função de x e tem-se $B(x; r_1) \subset X$, $B(x; r_2) \subset Y$ para todo $x \in (X \cap Y)$. Além disso, para cada x tem-se $B(x; r_1) \subset B(x; r_2)$, se $r_1 \leq r_2$ e $B(x; r_2) \subset B(x; r_1)$, se $r_2 \leq r_1$ (ver Figura 39).

Figura 39 – Interseção de dois conjuntos abertos

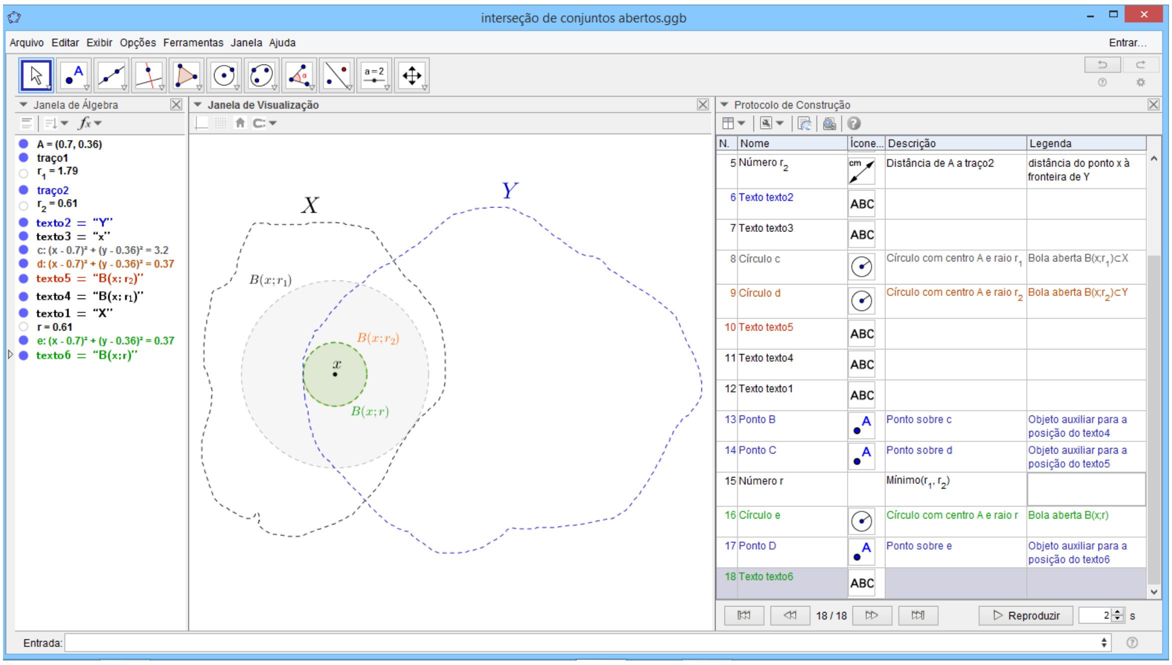


Fonte: Autor

Assim, para mostrar que cada ponto $x \in (X \cap Y)$ é interior, é suficiente tomar $r = \min\{r_1, r_2\}$ e teremos $B(x; r) \subset (X \cap Y)$. Para visualizar isso, passemos ao último passo dessa construção.

4. Construir o número $r = \min\{r_1, r_2\}$, em seguida construir o círculo $B(x;r)$ de centro x e raio r. Escolher uma cor para $B(x;r)$ diferente da cor dos círculos dos passos anteriores (ver Figura 40).

Figura 40 – Interseção de dois conjuntos abertos (a ideia geométrica da demonstração)



Fonte: Autor

Nessa construção, o disco aberto $B(x;r)$ muda de raio automaticamente de acordo com x, coincidindo com um dos discos abertos $B(x;r_1)$ ou $B(x;r_2)$, a saber, aquele que possui o menor raio.

Finalmente, pode-se apresentar uma demonstração formal do Problema 3.1.5, (ver demonstração do Teorema 2.1.1 (b)) utilizando a ideia acima. Essa é uma boa ilustração do fato de que os casos particulares são muito úteis para fornecer ideias que serão utilizadas nos casos mais gerais. Além disso, é uma ocasião apropriada para mostrar que as figuras são bons aliados na promoção dessas ideias. De fato, embora as figuras em si não provem todos os casos (na verdade, nem mesmo é possível desenhar todos os abertos do plano, por exemplo), contudo, usando algumas figuras (mesmo de casos particulares) é possível extrair a ideia do argumento que poderá ser utilizado para provar os casos mais gerais (até mesmo aqueles que não podem ser visualizados através de uma figura).

Problema 3.1.6. Considere um intervalo aberto $I = (a,b)$. Já sabemos que I é um conjunto aberto (conforme Problema 3.1.1).

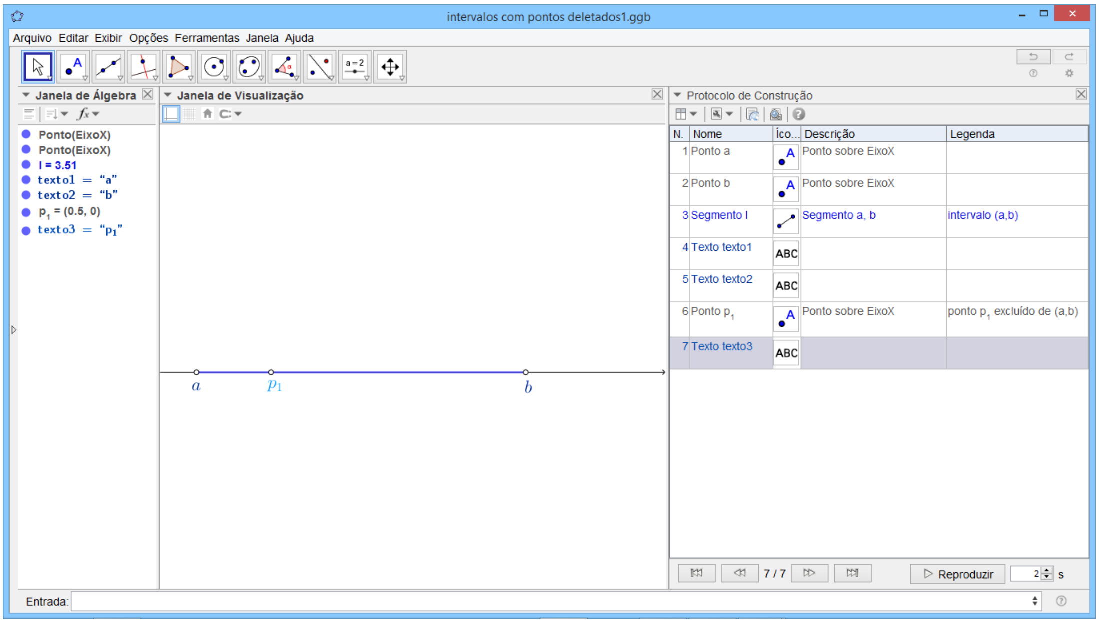
a) Se retirarmos um ponto $p_1 \in I$, o conjunto $I \setminus \{p_1\}$ ainda é aberto?
b) E se retirarmos dois pontos?
c) E se retirarmos mil pontos?
d) Generalize.
e) Se retirarmos infinitos pontos de I, o conjunto dos pontos restantes sempre será aberto?

O objetivo desse problema é apresentar um caso particular do Problema 3.1.8, bem como construir a ideia que será utilizada para responder o mesmo. Será feito um programa no GeoGebra para os itens a), b) e e). Os itens c) e d) devem ser respondidos a partir dos anteriores.

a) **Construção**

1. Ocultar o eixo Y, ocultar os números e a graduação do eixo X. Construir dois pontos a e b sobre o eixo X, e construir o segmento ab (ou seja, o intervalo $I = (a, b)$). Editar os pontos a e b mudando sua cor para branca.
2. Construir um ponto p_1 sobre ab, mudar a cor do ponto p_1 para branca e criar o texto p_1 para o ponto p_1. O ponto p_1 pode ser movido em (a, b) (ver Figura 41).

Figura 41 – Intervalo menos um ponto



Fonte: Autor

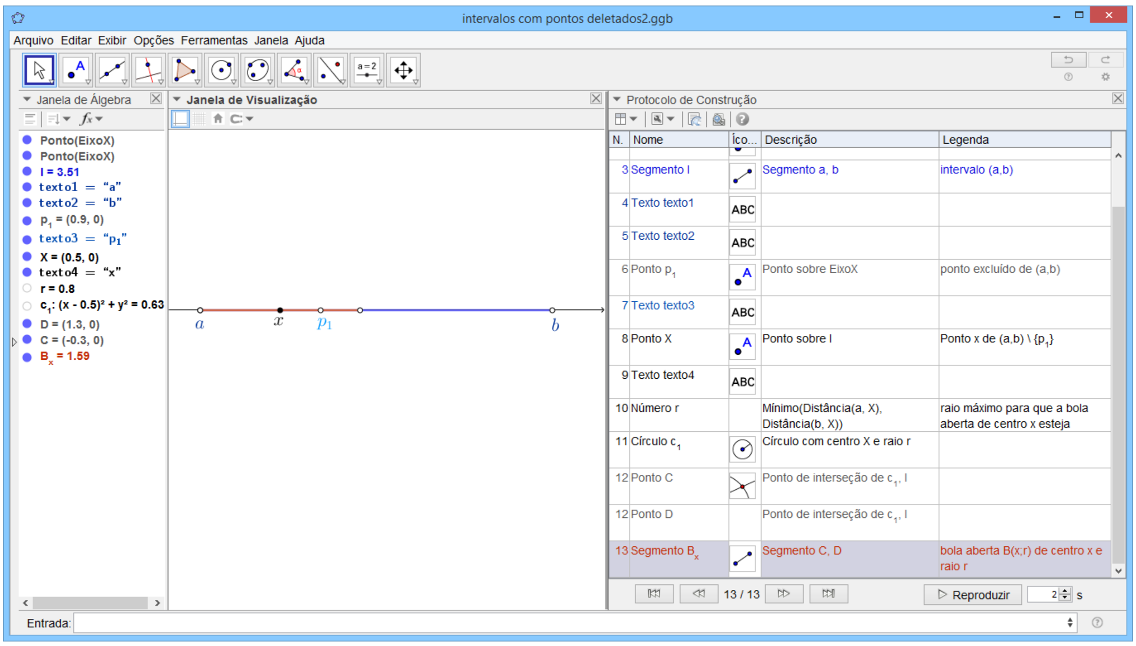
Pelo Problema 3.1.1, todo ponto x do intervalo aberto (a, p_1) é interior a (a, p_1), isto é, existe uma bola aberta B_x de centro x contida em (a, p_1). Logo, B_x está contida em $I \setminus \{p_1\}$, e portanto x é interior a $I \setminus \{p_1\}$. A mesma observação serve para o intervalo (p_1, p), de modo que o conjunto $I \setminus \{p_1\}$ é aberto. Esse argumento é válido (e deve ser apresentado, caso os alunos não consigam utilizá-lo sozinhos), mas para nosso propósito de achar um argumento que possa ser utilizado na resolução do Problema 3.1.8, podemos então introduzir a seguinte pergunta: é possível determinar o raio da bola aberta (intervalo aberto) B_x de centro x, em função x de modo que $B_x \subset I \setminus \{p_1\}$, sem precisar fazer a análise separadamente dos intervalos (a, p_1) e (p_1, p) como fizemos acima? Novamente, sabemos do Problema 3.1.1 que dado $x \in I$, se tomarmos $r = \min\{|x-a|, |x-b|\}$, menor das distâncias de x aos extremos do intervalo $I = (a, b)$, a bola aberta $B(x;r)$ estará contida I. Entretanto, pode ocorrer que o ponto p_1 pertença a $B(x;r)$. Deve-se então repetir a construção de $B(x;r)$ como no Problema 3.1.1.

3. Construir um ponto X em I, criar um texto x para o ponto X, em seguida editá-los para que apareçam apenas em $I \setminus \{p_1\}$ (isso pode ser feito através da condição de exibição dos referidos objetos: “X≠p_1∧X $\neq a$∧X$\neq b$”).

4. Construir o número $r = \min\{|x-a|, |x-b|\}$ (basta inserir no campo “Entrada”: r=Mínimo(Distância(a, X), Distância(b, X))), em seguida construir o círculo c_1 de centro x e raio r e marcar os pontos C e D de interseção do círculo com o segmento ab. Ocultar o círculo e o rótulo dos pontos C e D, em seguida mudar a cor dos mesmos para branca.

5. Construir o segmento CD, (bola aberta $B(x;r)$) (ver Figura 42).

Figura 42 – Intervalo menos um ponto (dedução do raio da bola aberta)



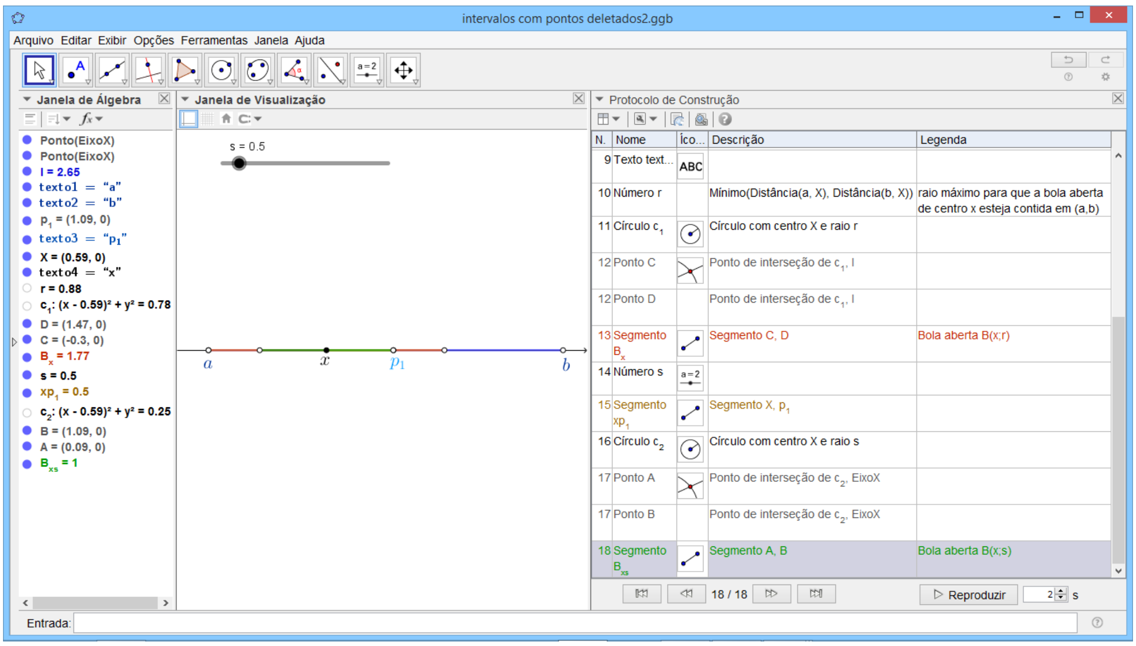
Fonte: Autor

Nessa construção, o raio de $B(x;r)$ muda automaticamente de acordo com x e tem-se $B(x;r) \subset I$ para todo $x \in I \setminus \{p_1\}$. Entretanto, se x estiver mais próximo de p_1 do que dos extremos de I, tem-se $p_1 \in B(x;r)$. Se x estiver mais próximo dos extremos do intervalo de que do ponto p_1, então $B(x;r) \subset I \setminus \{p_1\}$. Desse modo, se x estiver mais próximo de p_1 do que dos extremos, então, tomando $s = |x - p_1|$, distância de x a p_1, temos $B(x;s) \subset I \setminus \{p_1\}$. Logo, pondo $m_1 = \min\{r, |x - p_1|\}$, tem-se $B(x;s) \subset I \setminus \{p_1\}$, para todo $x \in I \setminus \{p_1\}$. A fim de facilitar a percepção desse fato, deve-se continuar a construção com os seguintes passos:

6. Construir um controle deslizante s, com $s \geq 0$, em seguida construir o círculo de centro x e raio s. Marcar os pontos de interseção do círculo com o eixo X, ocultar o círculo, em seguida construir o segmento B_{xs} (bola aberta de centro x e raio s) com extremo nesses pontos.

7. Construir o segmento xp_1 (ele mede a distância de x a p_1) (ver Figura 43).

Figura 43 – Intervalo menos um ponto (dedução da bola aberta - continuação)

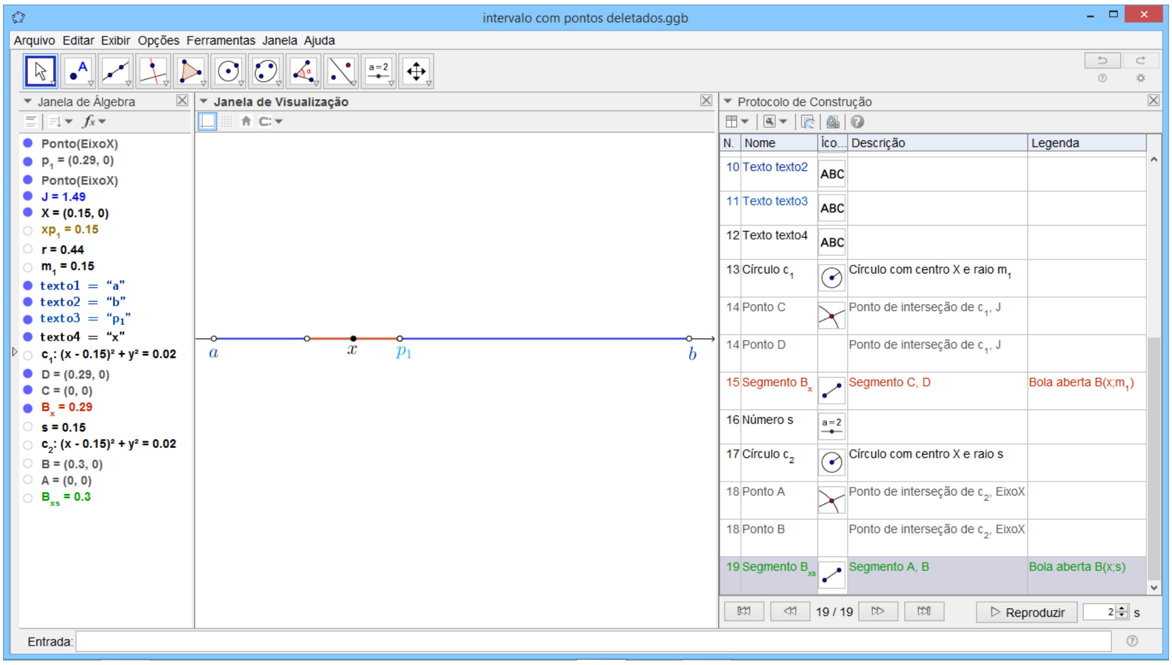


Fonte: Autor

Os alunos devem mover o ponto x e, para $x \in I \setminus \{p_1\}$, diminuir o raio de $B(x;s)$ através do controle deslizante s até obter $B(x;s) \subset I \setminus \{p_1\}$. Após essa etapa, deve-se então partir para o último passo.

8. Construir o número $m_1 = \min\{r, xp_1\}$, em seguida construir a bola aberta $B(x;m_1)$. Para isso, basta editar o círculo c_1 de centro x e raio r, mudando o raio para m_1 (ver Figura 44).

Figura 44 – Intervalo menos um ponto (dedução da bola aberta em função de x)



Fonte: Autor

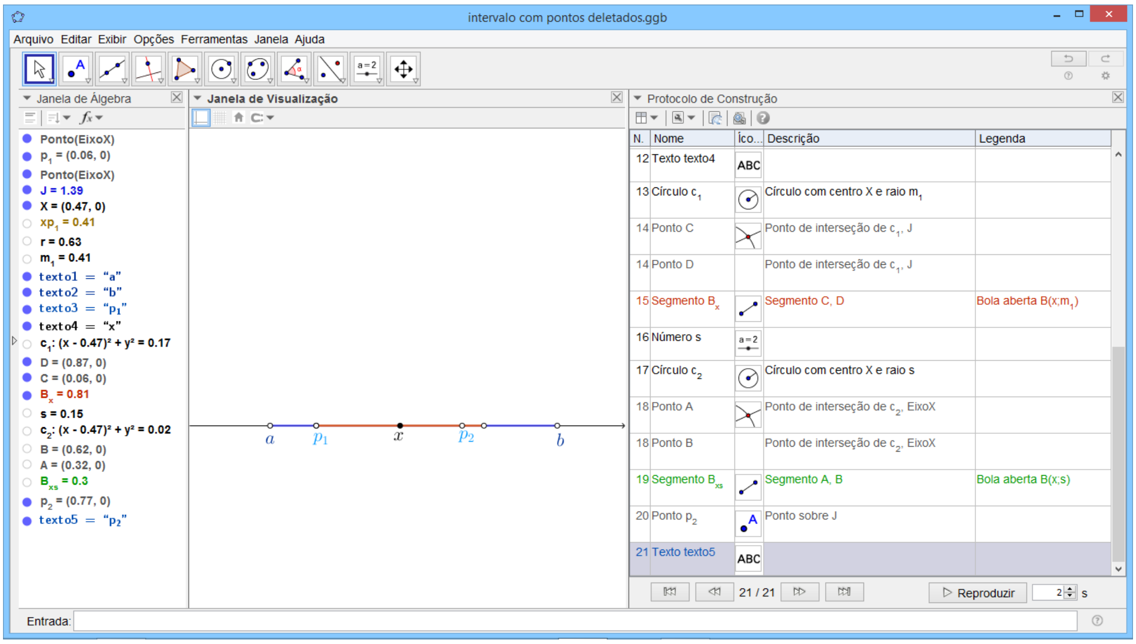
Nessa construção, o raio m_1 de $B(x;m_1)$ muda automaticamente em função de x e tem-se $B(x;m_1) \subset I \setminus \{p_1\}$, para todo $x \in I \setminus \{p_1\}$.

b) **Construção** Deve-se aproveitar a construção de item anterior e acrescentar os seguintes passos:
9. Construir um ponto p_2 em $I \setminus \{p_1\}$. Como p_1, o ponto p_2 pode ser movido livremente em I (ver Figura 45).

Novamente, embora $B(x;m_1) \subset I \setminus \{p_1\}$, se x estiver mais próximo de p_2 do que dos extremos de I e de p_1, então $p_2 \in B(x;m_1)$, logo, não se tem $B(x;m_1) \subset I \setminus \{p_1, p_2\}$. Mas, como no caso anterior, se tomarmos $m_2 = \min\{m_1, |x - p_2|\}$, então $B(x;m_2) \subset I \setminus \{p_1, p_2\}$. O próximo passo consiste construir $B(x;m_2)$.
10. Construir o segmento xp_2, cujo comprimento mede a distância de x a p_2, em seguida construir o número $m_2 = \min\{m_1, xp_2\}$.
11. Construir $B(x;m_2)$. Para isso, basta editar o raio de c_1, trocando m_1 por m_2 (ver Figura 46).

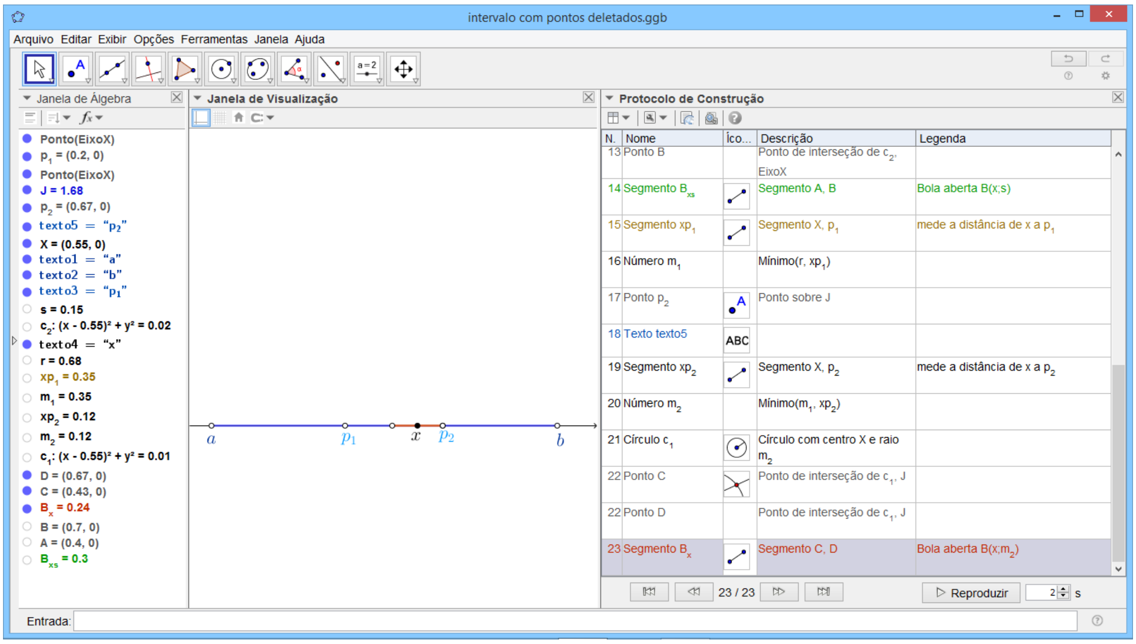
A fim de exibir o raio m_2 de $B(x;m_2)$ em função dos pontos p_1 e p_2 que foram retirados de I, para facilitar a generalização do fato de que se retirarmos um número finito de pontos de um intervalo aberto ainda teremos um conjunto aberto. É bom notar que $m_2 = \min\{m_1, |x - p_2|\} = \min\{r, |x - p_1|, |x - p_2|\}$. Além disso, é útil prosseguir a

Figura 45 – Intervalo menos dois pontos



Fonte: Autor

Figura 46 – Intervalo menos dois pontos (explicitando a bola aberta)



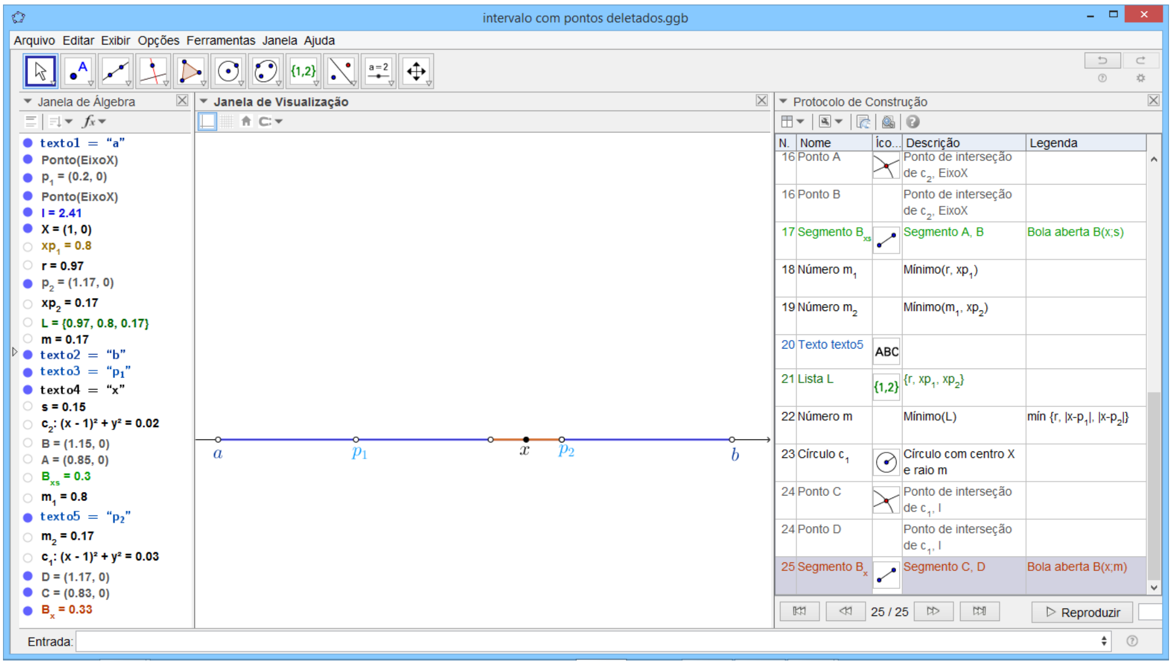
Fonte: Autor

construção do programa com os seguintes passos:

12. Construir uma lista L $= \{r, xp_1, xp_2\}$, em seguida construir o número $m = \min\{r, |x - p_1|, |x - p_2|\}$, isso pode ser feito inserindo no campo Entrada: “m=Mínimo(L)”.

13. Editar o raio de c_1 trocando m_3 por m (ver Figura 47).

Figura 47 – Intervalo menos dois pontos (raio da bola aberta em função de p_1 e p_2)



Fonte: Autor

Nessa construção, o raio m da bola aberta $B(x;m)$ coincide com m_3. A vantagem é que se forem retirados mais pontos de I, então basta acrescentar as distâncias desses pontos para o ponto x à lista L, e a bola aberta $B(x;m)$ estará contida no novo conjunto (m muda automaticamente, a medida que a lista L é alterada). Para ilustrar esse fato, os alunos devem retirar mais um ponto p_3 de I, criar um número d_3 distância de x a p_3 e acrescentar d_3 à lista L, (ou criar o segmento xp_3 e acrescentar xp_3 à lista L).

Para responder e), basta mostrar um contraexemplo. Dado $p \in I$, o intervalo aberto $(a, p) \subset I$ contém infinitos pontos, porém o intervalo $[p, b) = I \setminus (a, p)$ não é aberto, pois o ponto p não é interior a $[p, b) = I \setminus (a, p)$ (ver Problema 3.1.1). Por outro lado, o intervalo $(a, p]$ também contém infinitos pontos e o intervalo $(p, b) = I \setminus (a, p]$ é aberto. Ou seja, se retirarmos infinitos pontos de um intervalo aberto, o conjunto dos pontos restantes pode ser ou não um conjunto aberto.

Problema 3.1.7. Considere um disco aberto D. Já sabemos que D é um conjunto aberto (conforme Problema 3.1.2).

a) Se retirarmos um ponto $p_1 \in D$, o conjunto $D \setminus \{p_1\}$ ainda é aberto?
b) E se retirarmos dois pontos?
c) E se retirarmos mil pontos?
d) Generalize.
e) Se retirarmos infinitos pontos de D, o conjunto dos pontos restantes sempre será aberto?

Solução

a) Dado $x \in D \setminus \{p_1\}$, do Problema 3.1.2, sabemos que se tomarmos $r = R - |x - a|$, a bola aberta $B(x; r)$ está contida em D. Porém, se a distância de x para p_1 for menor do que r, então teremos $p_1 \in B(x; r)$. Deve-se então deduzir a partir de r um raio para B_x de modo que se tenha $B_x \subset D \setminus \{p_1\}$.

Para a primeira parte da construção do programa, basta então seguir os mesmos passos que foram utilizados na construção do programa do Problema 3.1.2.

Construção

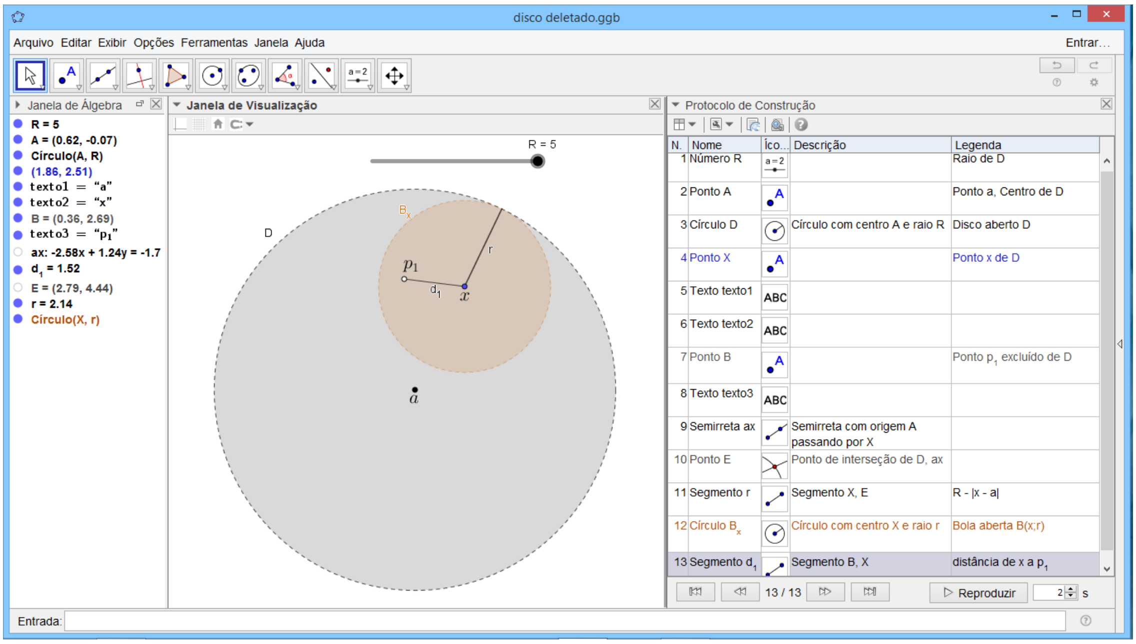
1. Ocultar os eixos e a malha. Construir um controle deslizante R, com $R \geq 0$.
2. Marcar um ponto A no plano e construir um círculo D de centro A e raio R, em seguida criar o texto a para o ponto A.
3. Marcar um ponto B no plano e criar o texto p_1 para o ponto B.
4. Marcar um ponto X no plano e criar o texto x para o ponto X.
5. Construir a semirreta $\overrightarrow{ax}$ e marcar o ponto E de interseção entre $\overrightarrow{ax}$ e a circunferência de centro a e raio R, em seguida construir o segmento que une os pontos X e E, cuja medida é $r = R - |x - a|$.
6. Construir o círculo B_x (bola berta $B(x; r)$) de centro x e raio r.
7. Editar x e B_x para que apareçam apenas em $D \setminus \{p_1\}$.
8. Construir o segmento xp_1 cuja comprimento d_1 mede a distância do ponto x ao ponto p_1 (ver Figura 48).

Nessa construção o ponto p_1 pode ser movido livremente em D, x pode ser movido em $D \setminus \{p_1\}$ e tem-se $B(x; r) \subset D$ para todo $x \in D \setminus \{p_1\}$. A fim de corrigir o problema de o ponto p_1 pertencer a $B(x; r)$, deve-se prosseguir com os seguintes passos:

9. Construir um controle deslizante s, com $s \geq 0$, em seguida construir círculo B_{xs} (bola aberta $B(x; s)$) de centro x e raio s (ver Figura 49).

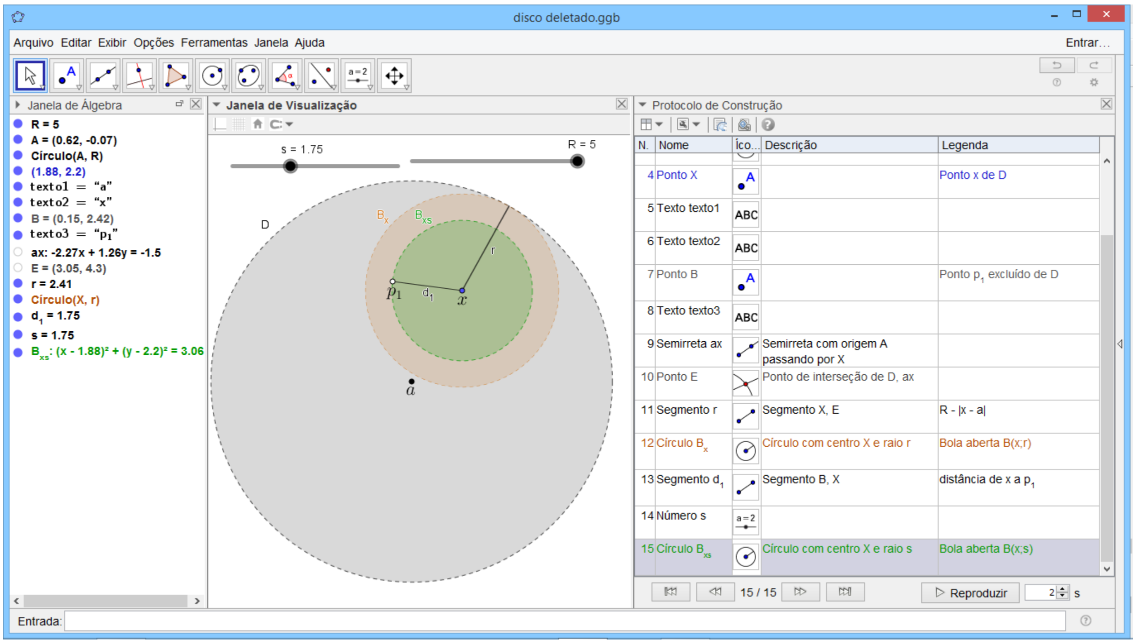
Os alunos devem mover o ponto x e, para cada x, devem diminuir o raio de $B(x; s)$ através do controle deslizante s até obter $B(x; s) \subset D \setminus \{p_1\}$. Isso facilitará a dedução do raio da bola aberta B_x em função de x para que se tenha $B_x \subset D \setminus \{p_1\}$, ou seja, o raio de B_x deve ser $m = \min\{r, d_1\}$. Após essa etapa, deve-se partir para o último passo:

Figura 48 – Disco aberto menos um ponto



Fonte: Autor

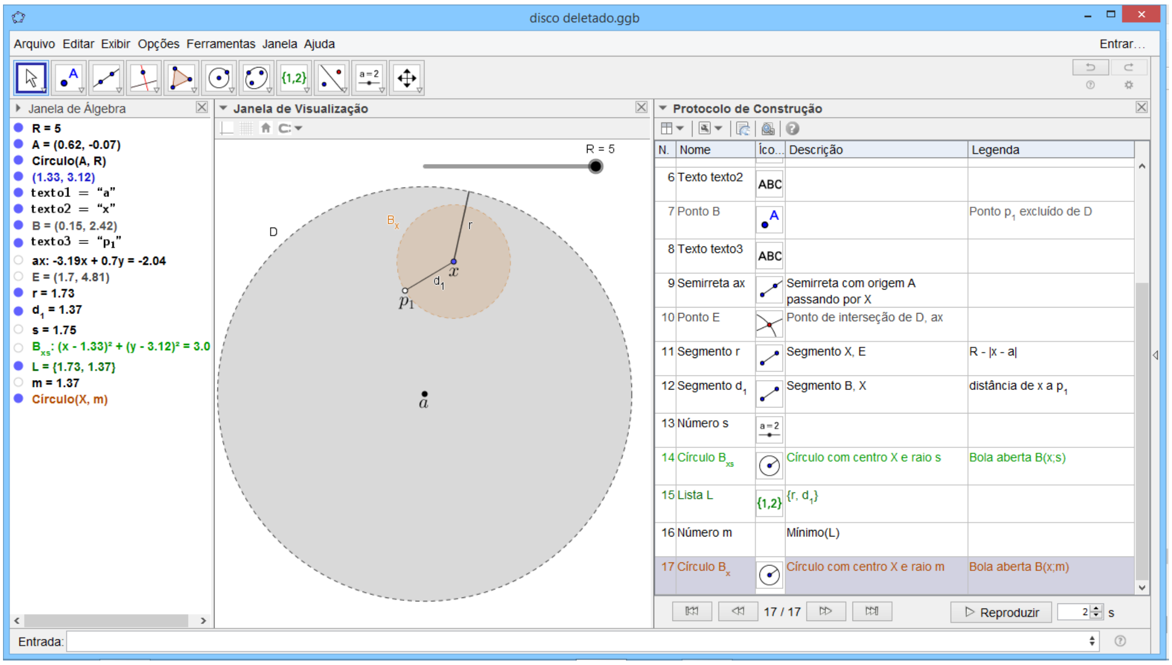
Figura 49 – Disco aberto menos um ponto (dedução do raio de B_x)



Fonte: Autor

10. Construir uma lista L=$\{r, d_1\}$. Em seguida construir o número $m = \min\{r, d_1\}$, ou seja, "m=Mínimo(L)".
11. Construir a bola aberta $B(x; m)$. Para isso basta editar o raio do círculo B_x, trocando r por m (ver Figura 50).

Figura 50 – Disco aberto menos um ponto (raio de B_x em função de x)



Fonte: Autor

Nessa construção, o raio m da bola aberta $B(x; m)$ muda automaticamente em função de x e tem-se $B(x; m) \subset D \setminus \{p_1\}$, para todo $x \in D \setminus \{p_1\}$.

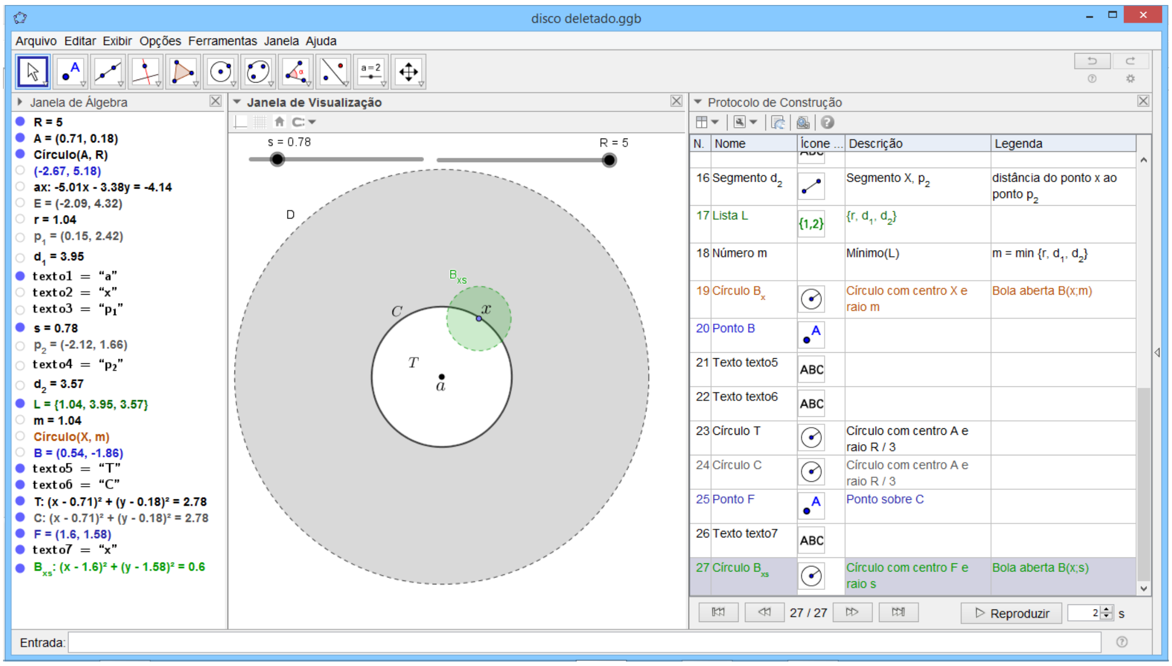
b) Deve-se aproveitar a construção do item anterior e acrescentar os seguintes passos:
12. Construir um ponto p_2, em seguida construir o segmento xp_2, cujo comprimento d_2 mede a distância do ponto x ao ponto p_2 (isso deve ser feito no caso em que os alunos tenham alguma dificuldade em perceber que o raio m da bola aberta deve ser $\min\{r, |x - p_1|, |x - p_2|\}$, se eles conseguirem dar essa resposta de imediato, então ao invés de construir o segmento xp_2, pode se optar por construir diretamente o número "$d_2 =$Distância(X, p_2)").
13. Adicionar o número d_2 à lista L. Ao acrescentar d_2 à lista L, o raio m de $B(x; m)$ muda automaticamente e tem-se $B(x; m) \subset D \setminus \{p_1, p_2\}$ para todo $x \in D \setminus \{p_1, p_2\}$. Além disso, se forem retirados mais pontos de D, basta adicionar as distâncias desses pontos ao ponto x à lista L e ter-se-á $B(x; m)$ contido nesse novo conjunto. Os itens c) e d) devem ser resolvidos à luz dessa ideia.

e) Aqui, basta exibir um contraexemplo. Considere o círculo G de centro a e raio $R/3$. O conjunto T, interior de G (que é o disco aberto $B(a; R/3)$, ou seja, o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto a é menor do que $R/3$), está contido em D e é um conjunto com infinitos pontos. Mas, $D \setminus T$ não é um conjunto aberto. De fato, a circunferência C de centro a e raio $R/3$ (que é o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto a é igual a $R/3$) está contida em $D \setminus T$, mas nenhum ponto de C é interior a $D \setminus T$, pois toda bola aberta de centro em um ponto de C contém pontos de T. A fim de mostrar isso no GeoGebra, basta utilizar o programa do item anterior e acrescentar os seguintes passos:

14. Construir os círculos T e C, ambos de centro a e raio $R/3$, em seguida mudar sua cor de T para branca a aumentar a sua transparência.

15. Construir um ponto F sobre C (criar o texto "x" para o ponto F), em seguida editar círculo B_{xs}, mudando o seu centro para F (ver Figura 51).

Figura 51 – Disco aberto menos um conjunto com infinitos pontos



Fonte: Autor

Nessa construção, o ponto x pode ser movido em C e o raio s da bola aberta $B_{xs} = B(x; s)$ pode se mudado através do controle deslizante s. A ideia é que os alunos movam o ponto x sobre C e diminuam o quanto quiserem o raio de $B(x; s)$ para perceber que $B(x; s)$ sempre conterá pontos de T.

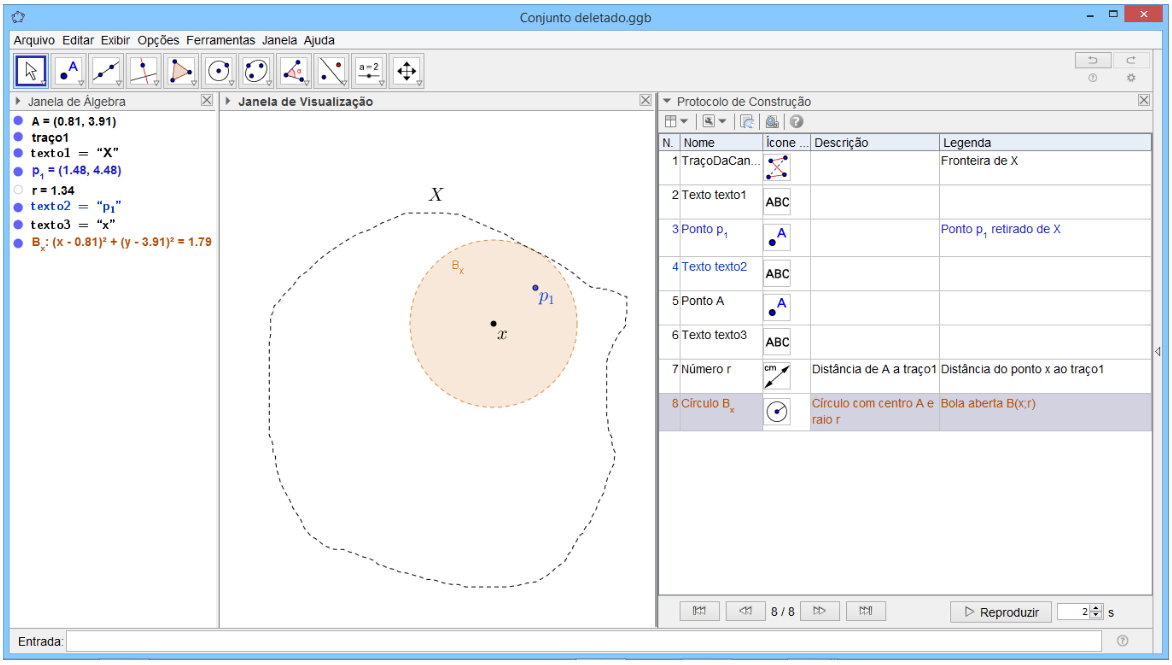
Problema 3.1.8. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto aberto e $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pontos de X. O conjunto $X \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ é aberto?

Deve-se utilizar a mesma estratégia da resolução do Problema 3.1.5, ou seja, desenhar um conjunto mais genérico (cuja fronteira seja um traço fechado) no plano (caso particular em que $n = 2$). Embora esse conjunto não represente todos os casos possíveis, ele fornece a ideia do argumento que é utilizado para solucionar o caso geral!

Construção

1. Construir um traço1 fechado para representar um conjunto aberto X (o conjunto X é a região limitada pelo traço1). Construir um ponto p_1 em X.
2. Construir um ponto A (em seguida construir o texto "x" para o ponto A) em X.
3. Construir o número r, distância de x à fronteira de X através do comando (r=Distância(A,traço1)), em seguida construir o círculo B_x (bola aberta $B(x;r)$) de centro x e raio r (ver Figura 52).

Figura 52 – Conjunto aberto menos um ponto



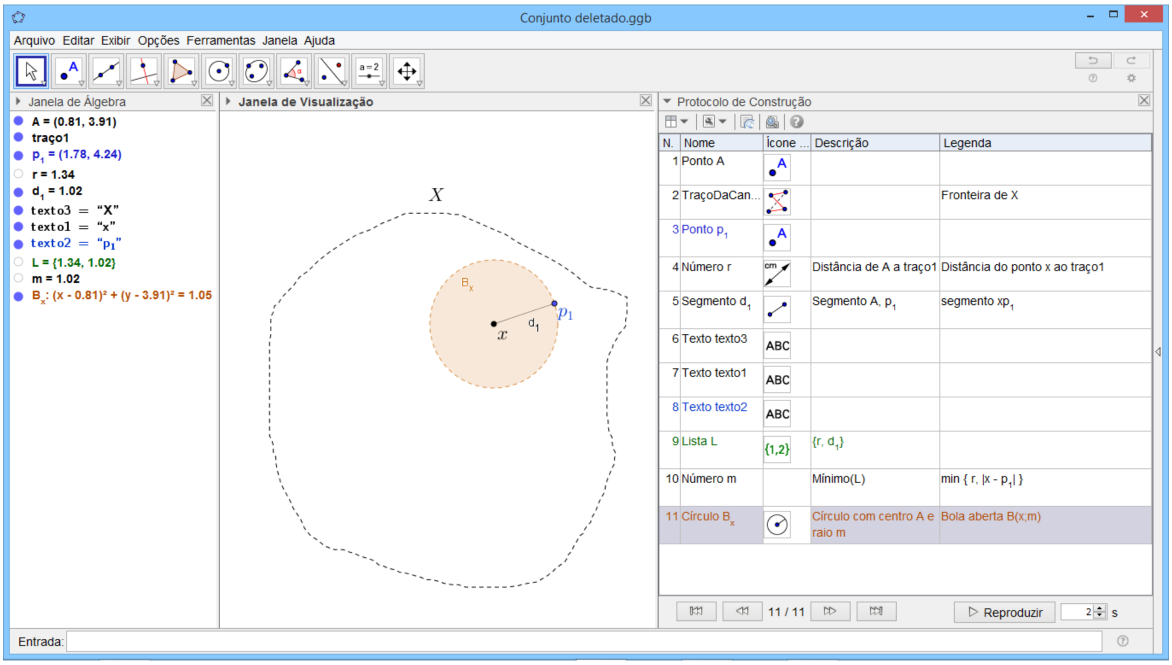
Fonte: Autor

Nessa construção, tem-se $B(x;r) \subset X$ para todo x em X. Mas, se a distância de x a p_1 for menor do que r, então $p_1 \in B(x;r)$. Para se ter $B(x;r) \subset X \setminus \{p_1\}$ para todo $x \in X \setminus \{p_1\}$, basta tomar o raio de B_x como $\min\{r, |x - p_1|\}$. Deve-se então prosseguir a construção com os seguintes passos:

4. Construir o segmento xp_1, cujo comprimento d_1 mede a distância de x a p_1. Em seguida construir a lista L$= \{r, d_1\}$.

5. Construir o número $m = \min\{r, |x - p_1|\}$ (basta usar o comando m=Mínimo(L)). Em seguida mudar o raio de B_x, trocando r por m (ver Figura 53).

Figura 53 – Conjunto aberto menos um ponto (raio de B_x)



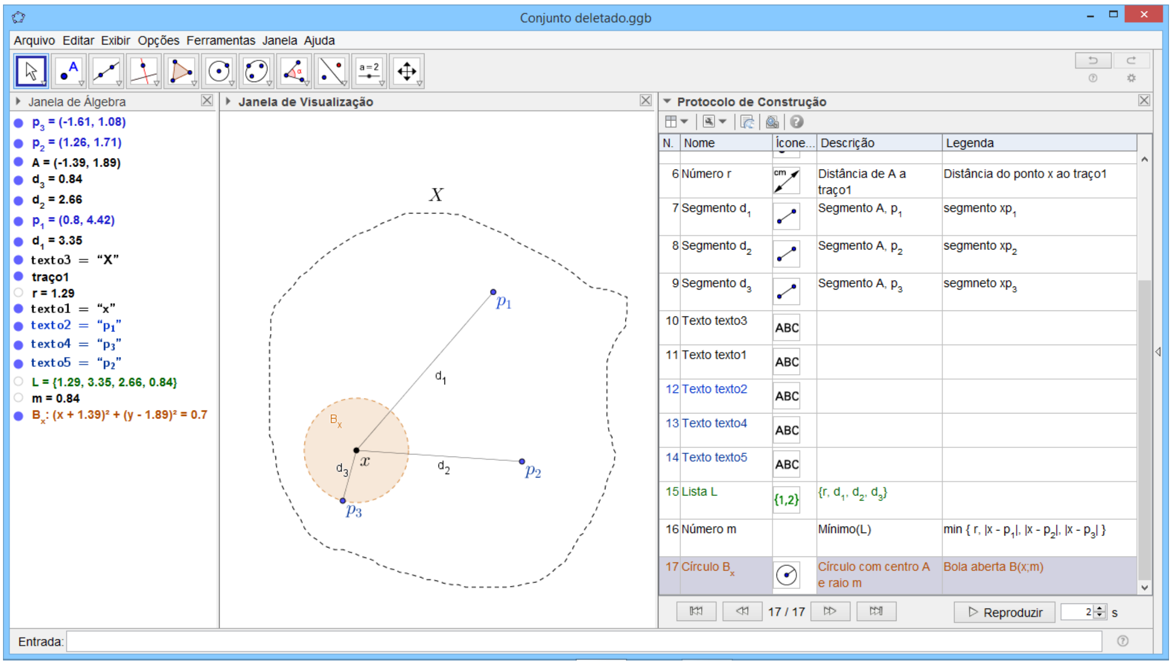
Fonte: Autor

Nessa construção, o raio m de $B(x; m)$ oscila entre r e $d_1 = |x - p_1|$, de acordo com a posição do ponto x e tem-se $B(x; r) \subset X \setminus \{p_1\}$ para todo $x \in X \setminus \{p_1\}$. Retirando-se mais pontos, basta acrescentar as distâncias dos pontos retirados ao ponto x à lista L. O número m será o mínimo detre essas distâncias e r (ver Figura 54).

É importante frisar que se o raio de B_x for menor ou igual a r, então $B_x \subset X$. Por outro lado, dado $p_j \in X$, pondo $d_j = |x - p_j|$, para cada $j = 1, \ldots, k$, segue-se que, se o raio de B_x for menor ou igual a d_j então $p_j \notin B_x$. Logo, se o raio de B_x for o mínimo entre r e d_j então $B_x \subset X \setminus \{p_j\}$. Analogamente, se $m = \min\{r, d_1, \ldots, d_k\}$, então $B(x; m) \subset X \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$. O número m definido acima é o raio máximo para que a bola aberta $B(x; m)$ esteja contida no conjunto $X \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. É útil pedir aos alunos que experimentem editar o raio do círculo B_x para $m/2$ ou outro número qualquer (em função de m) menor do que m.

Finalmente, podemos apresentar a demostração do caso geral (ver Exemplo 2.1.4).

Figura 54 – Conjunto aberto menos um número finito de pontos



Fonte: Autor

3.1.3 Fronteira

Atividade 3.1.3.

Problema 3.1.9. Determine a fronteira dos seguintes conjuntos:

a) intervalo $[a, b)$;

b) intervalo $[a, b]$;

c) intervalo (a, b);

d) disco aberto de centro a e raio R;

e) círculo de centro a e raio R;

f) conjunto T do Problema 3.1.3.

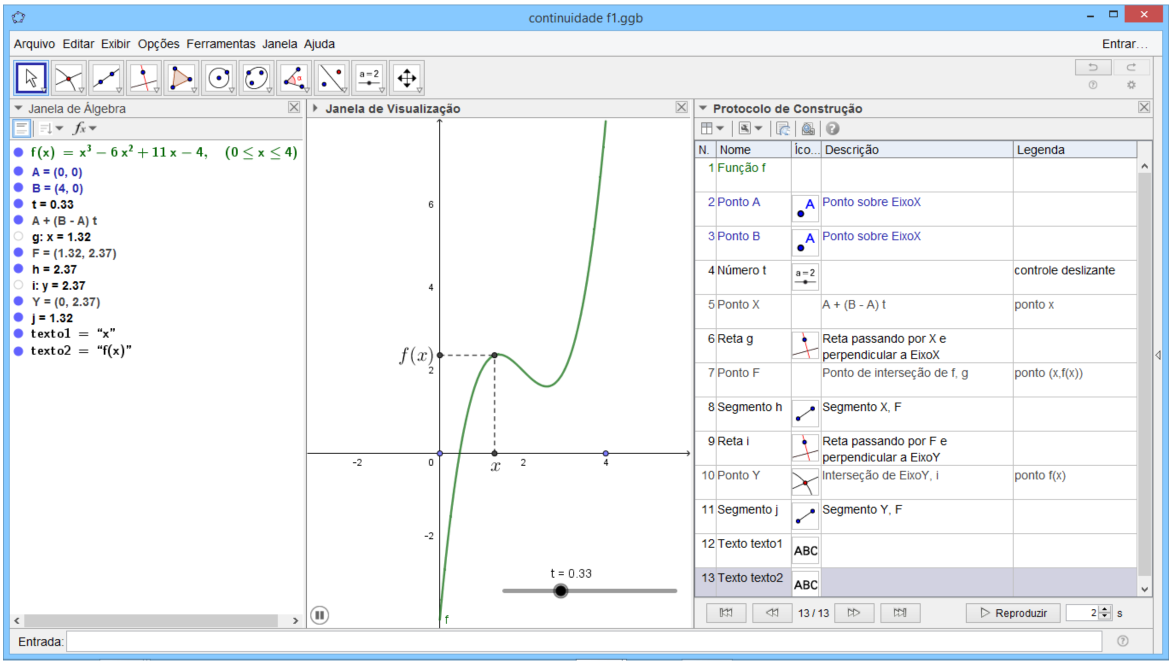
Para resolver esse problema, não é necessário construir outro programa no GeoGebra, basta utilizar os programas já construídos na atividade Atividade 3.1.1. Mais precisamente, usando o programa construído para resolver o Problema 3.1.1, eles devem concluir que a fronteira dos conjuntos $[a, b),\ [a, b],\ (a, b)$ é o conjunto $\{a, b\}$; usando o programa do Problema 3.1.2, deve-se concluir que a fronteira do disco aberto (bola aberta de $\mathbb{R}^2$) de centro a e raio R e do círculo de centro a e raio R é a circunferência de centro a e raio R; por fim, utilizando o programa do Problema 3.1.3, deve-se concluir que a fronteira de T é o triângulo ABC.

3.2 CONTINUIDADE

3.2.1 Definição

Atividade 3.2.1. O objetivo dessa atividade é apresentar a ideia geométrica de uma função contínua $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a saber, que seu gráfico não tem "saltos", ou ainda, é possível desenhar o gráfico de f sem tirar o giz do quadro, ou a caneta do papel. Será construído o gráfico da função $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 4$. Essa construção é simples. Os detalhes podem ser vistos no "Protocolo de Construção" e na "Janela de Álgebra" (ver Figura 55). Nessa construção o ponto x pode ser movido

Figura 55 – Exemplo de função contínua



Fonte: Autor

no intervalo $[0, 4]$ através do controle deslizante t. Utilizando o recurso "Animar", para o controle deslizante t, o ponto x percorre o intervalo $[0, 4]$, enquanto o ponto $(x, f(x))$ percorre o gráfico de f.

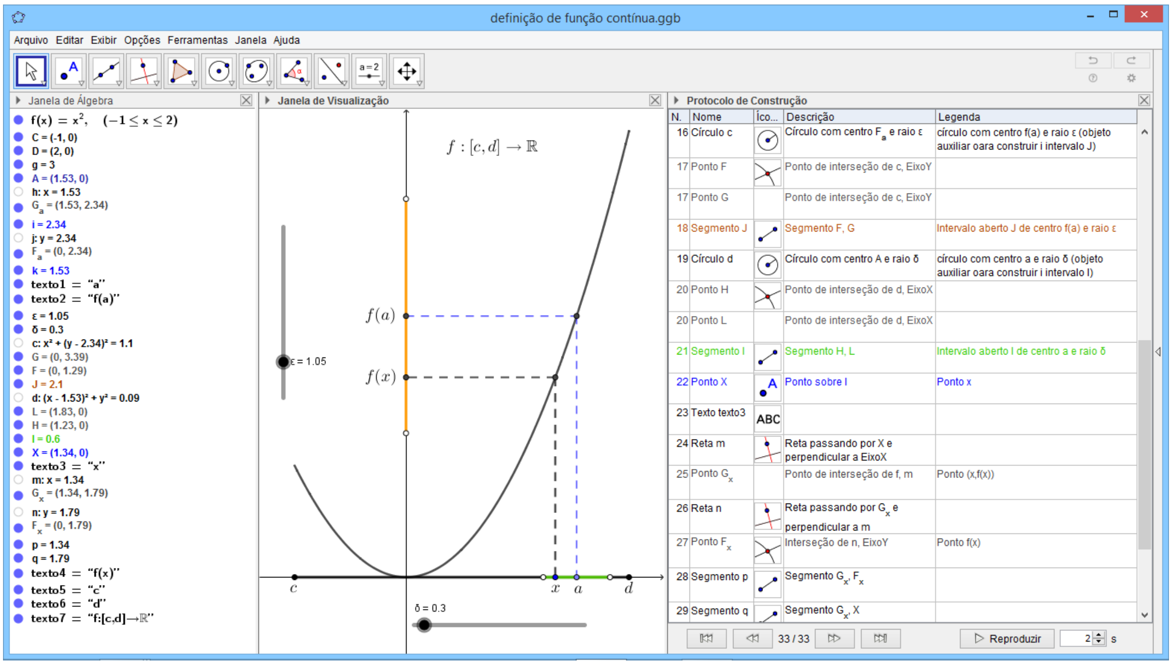
Atividade 3.2.2. O objetivo dessa atividade é apresentar a definição de função contínua para o caso $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, através de intervalos abertos. Será construído o gráfico da função $f : [c, d] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.

Construção

1. Construir o gráfico de f. Construir os pontos c e d sobre o eixo das abscissas , em seguida construir o intervalo $[c, d]$ (segmento cujos extremos são os pontos c e d).

2. Construir um ponto a em $[c, d]$, em seguida construir o ponto $G_a = (a, f(a))$ sobre o gráfico de f. Para isso, basta construir uma reta h perpendicular ao eixo das abscissas passando por a e marcar a interseção do gráfico de f com a reta h.
3. Construir o ponto $(0, f(a))$. Para isso, deve-se construir uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas passando pelo ponto $G_a = (a, f(a))$, e construir o ponto de interseção entre essa reta e o eixo das ordenadas.
4. Construir controles deslizantes ε e δ, em seguida construir intervalos abertos I de centro a e raio δ e J de centro $f(a)$ e raio ε.
5. Construir um ponto x sobre I. Construir os pontos $(x, f(x))$ e $(0, f(x))$ (ver Figura 56).

Figura 56 – Definição de continuidade via intervalos abertos



Fonte: Autor

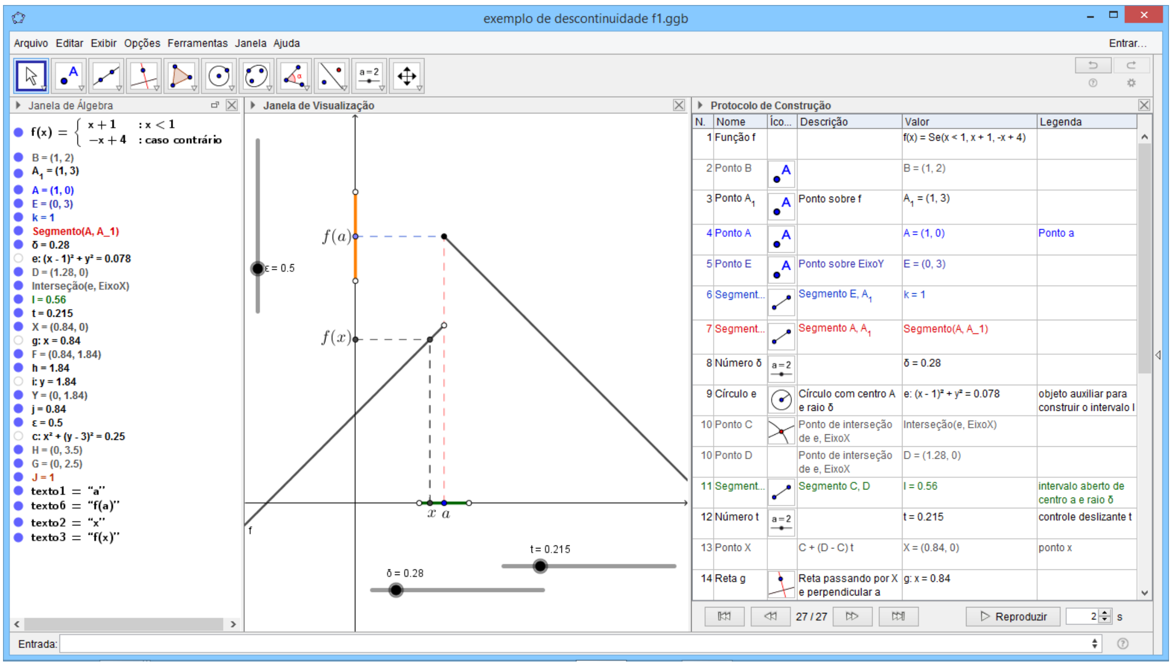
Nessa construção o ponto a pode ser movido em $[c, d]$ e o ponto x pode ser movido em I. O comprimento dos intervalos I e J podem ser alterados através dos controles deslizantes δ e ε, respectivamente. Os alunos devem diminuir o comprimento do intervalo J, em seguida, diminuir o comprimento de I até obter $f(I \cap [c, d]) \subset J$. O objetivo é mostrar que essa maneira de definir continuidade num ponto a é uma forma técnica bastante prática de descrever a ideia apresentada na atividade anterior, a saber, que numa vizinhança do ponto a, não há “saltos” no gráfico de f. Dito de outro modo, numa vizinhança de a, os pontos $(x, f(x))$ do gráfico de f permanecem próximos do ponto $(a, f(a))$. Mais precisamente, $(x, f(x))$ pode se tornar tão próximo de $(a, f(a))$ quanto se queira, desde que se tome x suficientemente próximo de a. Isso é equivalente a dizer que $f(x)$ pode ser tornado tão próximo de $f(a)$ quanto se queira, desde que x esteja suficientemente próximo de a. A vantagem de expressar continuidade dessa forma, é que a análise dos pontos do gráfico (objeto que está no $\mathbb{R}^2$) recai para a análise de intervalos (objetos que estão em $\mathbb{R}$).

Atividade 3.2.3. Nessa atividade será apresentado um exemplo de descontinuidade. Nesse caso, a utilidade de definir continuidade via intervalos é evidenciada, bem como a necessidade de esses intervalos serem abertos. Será feita a análise da continuidade da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 1 \\ -x+4, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ no ponto $a = 1$.

Construção

1. Construir o gráfico de f. Construir os pontos $a = 1$ e $f(a)$.
2. Construir um controle deslizante δ. Construir uma circunferência de centro a e raio δ e marcar os pontos C e D de interseção entre a circunferência e o eixo das abscissas. Em seguida, construir o intervalo aberto I (segmento CD).
3. Construir um controle deslizante t, com $0 \leq t \leq 1$, em seguida construir o ponto $x = C + (D - C)t$. Construir o ponto $f(x)$.
4. Construir um controle deslizante ε, em seguida construir o intervalo aberto J de centro $f(a)$ e raio ε (ver Figura 57).

Figura 57 – Exemplo de descontinuidade



Fonte: Autor

Nessa construção, o ponto x percorre o intervalo I, a medida que t percorre o intervalo $(0, 1)$. Deve-se animar o controle deslizante t para que o ponto x mova-se automaticamente no intervalo I, e o ponto $f(x)$, se mova no eixo das ordenadas. A ideia é mostrar que, se o comprimento de J for suficientemente pequeno, por exemplo se for igual a 1, (ou seja, $\varepsilon = 0.5$) então, qualquer que seja o comprimento de I (qualquer que seja $\delta > 0$), sempre haverá pontos $x \in I$, tais que $f(x) \notin J$.

Esse exemplo é ótimo para visualizar a necessidade de exigir, na definição, que os intervalos sejam abertos. Se o intervalo I não fosse necessariamente aberto, digamos $I = [1, d]$, com $d > 1$, então f seria contínua em $x = 1$. Para visualizar isso, basta editar a definição do ponto x, trocando C por A. Nesse caso, o ponto x passará a percorrer o segmento AD (intervalo $[a, d]$). É fácil perceber que, para cada $\varepsilon > 0$ (que determina o comprimento de J), é possível obter $\delta > 0$ suficientemente pequeno (o comprimento de $[a, d]$ suficientemente pequeno) para se ter $f([a, d]) \subset J$. Mas isso não descreveria o que temos em mente para continuidade, teríamos uma função contínua num ponto em que seu gráfico tem um "salto".

3.2.2 Homeomorfismo

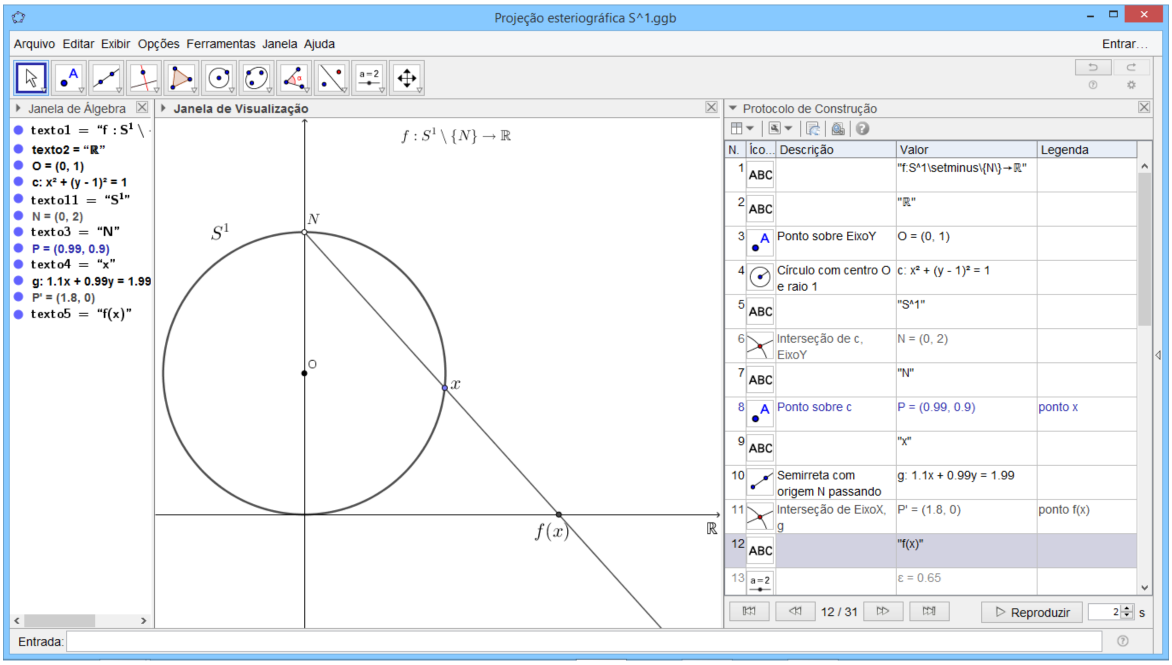
Atividade 3.2.4 (**Projeção estereográfica**). Sejam S^1 a circunferência de centro $O = (0, 1)$ e raio 1, e $N = (0, 2)$ o seu polo norte. Para cada ponto $x \in S^1 \setminus \{N\}$ a semirreta $\overrightarrow{Nx}$ intersecta o eixo das abscissas em um único ponto $(x', 0)$. Podemos então definir a função $f : S^1 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = x'$, onde x' é a abscissa do ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{Nx}$ com o eixo das abscissas. A função f é chamada de projeção estereográfica.

Construção

1. Construir a circunferência S^1 de centro $O = (0, 1)$ e raio 1, em seguida construir o ponto $N = (0, 2)$.

2. Construir um ponto x sobre $S^1 \setminus \{N\}$, em seguida construir a semirreta $\overrightarrow{Nx}$, e construir o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{Nx}$ com o eixo das abscissas. Nessa construção, o ponto x pode ser movido em S^1. O ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{Nx}$ com o eixo das abscissas move-se automaticamente sobre o eixo das abscissas em função de x. Os alunos devem mover o ponto x sobre S^1 a fim de visualizar que, para cada $x \in S^1 \setminus \{N\}$, a semirreta $\overrightarrow{Nx}$ intersecta o eixo das abscissas em um único ponto. Identificando o eixo das abscisas com o conjunto $\mathbb{R}$ (cada ponto $(a, 0)$ do eixo das abscissas será identificado com o número real a) pode-se definir a função $f : S^1 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}$, pondo $f(x) = x'$, onde x' é a abscissa do ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{Nx}$ com o eixo das abscissas (ver Figura 58). É possível também visualizar que f é uma bijeção, ou seja, para cada $y \in \mathbb{R}$, existe um único ponto $x \in S^1 \setminus \{N\}$, tal que $f(x) = y$ (para cada ponto y no eixo das abscissas, a semirreta $\overrightarrow{Ny}$ intersecta $S^1 \setminus \{N\}$ em um único ponto).

Figura 58 – Projeção estereográfica



Fonte: Autor

A próxima etapa é discutir a continuidade de f. Para isso, deve-se continuar a construção do programa.

3. Editar os textos com os nomes dos pontos x e $f(x)$ do passo 2 para a e $f(a)$, respectivamente. Construir controles deslizantes δ e ε, em seguida, construir um intervalo aberto $V_{f(a)} = B(f(a); \varepsilon)$ de centro $f(a)$ e raio ε e um disco aberto $B(a; \delta)$ de centro a e raio ε.

4. Construir o arco de círculo $U_a = B(a; \delta) \cap S^1 \setminus \{N\}$. Isso pode ser feito marcando os pontos G e E, na interseção da circunferência de centro a e raio δ com a circunferência de centro O e raio 1, em seguida construir o "Arco Circular" pelos pontos O, G e E.

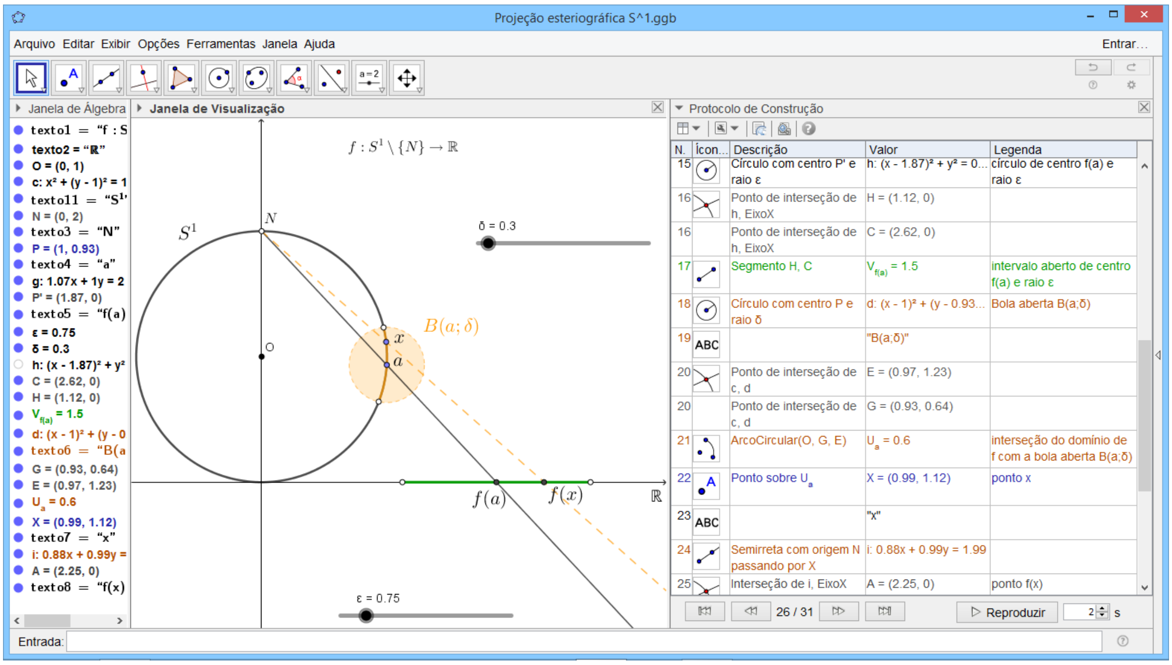
5. Construir um ponto x sobre U_a, em seguida construir o ponto $f(x)$ (ver Figura 59).

Nessa construção, o ponto x pode ser movido em U_a. O raio de $B(a; \delta)$ (que determina o comprimento do arco U_a) pode ser alterado através do controle deslizante δ e o comprimento do intervalo V pode ser alterado através do controle deslizante ε. A ideia é mostrar que para cada intervalo $V_{f(a)}$ de centro $f(a)$, é possível diminuir o raio de $B(a; \delta)$ o suficiente para que $f(U_a) \subset V_{f(a)}$, isto é, para se ter $x \in U_a \Rightarrow f(x) \in V_{f(a)}$.

De forma análoga, pode se discutir a continuidade da inversa de f. Deve-se acrescentar mais um passo à construção anterior.

6. Construir o texto "b" no lugar do ponto $f(a)$ do passo 3 e ocultar o texto "f(a)". Construir o texto "$f^{-1}(b)$" no lugar do ponto a do passo 3 e ocultar o texto "a".

Figura 59 – Projeção estereográfica: continuidade

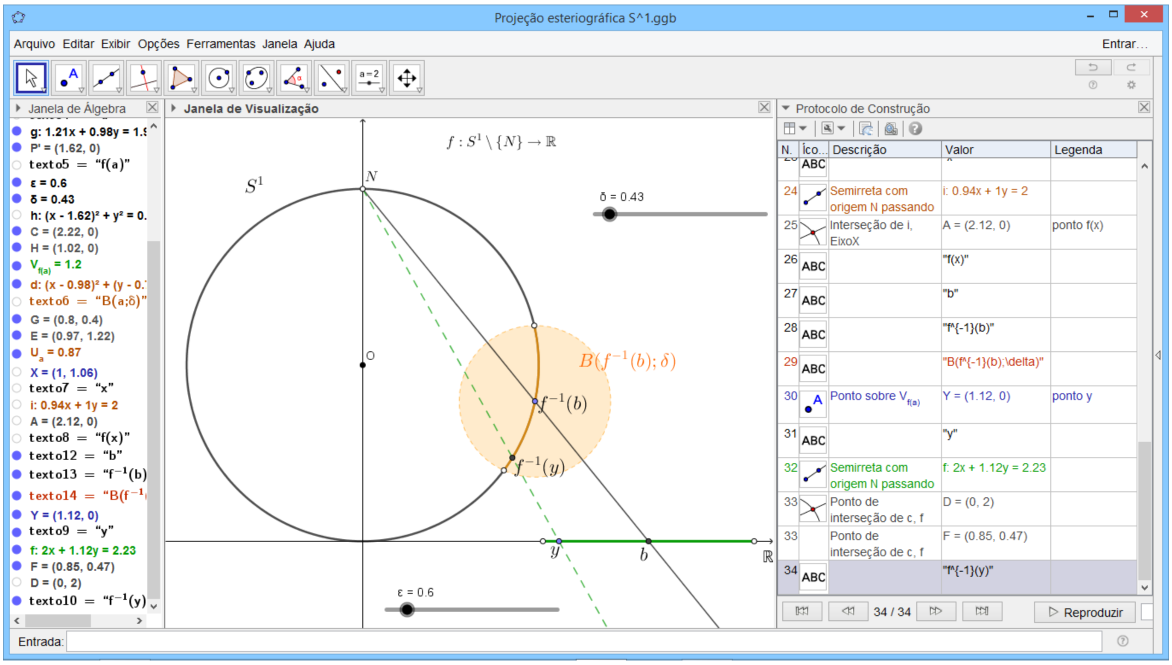


Fonte: Autor

7. Construir um ponto y sobre o intervalo $V_b = B(b;\varepsilon)$. Em seguida construir a semirreta $\overrightarrow{Ny}$ e marcar o ponto $f^{-1}(y) = \overrightarrow{Ny} \cap S^1 \setminus \{N\}$ (ver Figura 60).

Nessa construção, o ponto y pode ser movido em V_b. A ideia é mostrar que, para cada bola aberta $B(f^{-1}(b);\delta)$, de centro $f^{-1}(b)$, é possível diminuir o comprimento do intervalo V_b de tal modo que se tenha, $y \in V_b \Rightarrow f^{-1}(y) \in B(f^{-1}(b);\delta)$.

Figura 60 – Projeção estereográfica: continuidade da inversa



Fonte: Autor

REFERÊNCIAS

BELTRAMI, R. S. *Algumas técnicas utilizando o software GeoGebra no processo de resolução de problemas geométricos no ensino básico: situações de máximos e mínimos e lugares geométricos*. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) — Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2016.

LIMA, E. L. *Análise real*. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. v. 2. 210 p.

LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. 279 p.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. v. 2. 546 p.

LIPSCHUTZ, S. *Topologia geral: resumo da teoria, 650 problemas resolvidos, 391 problemas propostos.* São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1971. 301 p.

NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 577 p.

PARANÁ. *Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica*. Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 30 abril 2019.