Universidade Federal do Rio de Janeiro
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

Cassius Almada Ramos

A ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO FINANCEIRA DO ENSINO BÁSICO COM ENFOQUE INTEGRADO

Rio de Janeiro

2019

CIP - Catalogação na Publicação

```
        Almada Ramos, Cassius
AA444e     A estatística na educação financeira do ensino
        básico com enfoque integrado / Cassius Almada
        Ramos. -- Rio de Janeiro, 2019.
           111 f.

           Orientador: Nei Carlos dos Santos Rocha.
           Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
        Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
        de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

           1. Educação Financeira. 2. Estatística. 3. Base
        Nacional Comum Curricular. 4. Ensinos Fundamental e
        Médio. 5. Matemática. I. dos Santos Rocha, Nei
        Carlos, orient. II. Título.
```

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

CASSIUS ALMADA RAMOS

A ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO FINANCEIRA DO ENSINO BÁSICO COM ENFOQUE INTEGRADO

Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado a Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito final para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Nei Carlos dos Santos Rocha

Rio de Janeiro

2019

A ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO FINANCEIRA DO ENSINO BÁSICO COM ENFOQUE INTEGRADO

BANCA EXAMINADORA

Nei Carlos S Rocha

Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha

Instituto de Matemática - UFRJ

(Orientador/Presidente da Banca Examinadora)

Profª Drª Walcy Santos

Instituto de Matemática – UFRJ

Profª Drª Flávia Maria Pinto Ferreira Landim

Instituto de Matemática – UFRJ

Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Jr.

Departamento de Matemática - UFJF

Dedico esse trabalho ao meu pai e a minha mãe, que sempre me apoiaram em todos os momentos da minha vida;

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu pai e a minha mãe por todo o amor ao longo dos meus 41 anos de vida.

À minha companheira Anna, que sempre esteve ao meu lado, na alegria e na tristeza.

A todos os meus colegas do mestrado, que me proporcionaram momentos de muita alegria, descontração e muito aprendizado.

Ao professor Marco Aurélio Kistemann Júnior, da UFJF, pelas conversas elucidativas , pelos materiais trocados e por todos seus brilhantes ensinamentos.

Aos professores da UFRJ, que com muita humildade e sabedoria me transmitiram seus notáveis e valorosos conhecimentos.

Ao meu orientador, professor Nei Rocha, pelo carinho, dedicação e compreensão, principalmente nos momentos de grande ansiedade e insegurança que tive ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Enfim, a todos que contribuíram de forma direta e indireta para a realização desta pesquisa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – CÓDIGO DE FINANCIAMENTO 001

Resumo

O tema deste trabalho traduz-se em uma reflexão e discussão sobre o ensino de Educação Financeira nos anos finais do Ensino Fundamental com uma perspectiva inovadora e integrada com a Estatística. Desta forma, este estudo tem por finalidade, através de pesquisa e sugestão de atividades inovadoras, fazer o uso da Estatística como uma ferramenta aliada no processo de Educação Financeira do educando.

Este trabalho, de fato, nasceu de um desconforto pessoal e da constatação da ausência de postura dos jovens quando o assunto é finanças. É inevitável admitir que essa falta de postura é reflexo da ausência de projetos de Educação Financeira nas escolas, somando-se a isso a carência de professores habilitados a lecionar sobre esse assunto.

A partir da averiguação da inexistência de atividades que utilizam a Estatística em sinergia no processo de Educação Financeira, foi possível elaborar atividades com o objetivo de educar financeiramente o aluno de forma que ele possa melhorar a sua capacidade na tomada de decisões, tanto sozinho como em grupo, tendo assim a possibilidade de exercer plenamente sua cidadania, de forma responsável, consciente e equilibrada.

Palavras-chave: Educação Financeira, Ensino Fundamental e Médio, Base Nacional Comum Curricular, Estatística.

Abstract

The theme of this work is to propose a reflection and discussion about the teaching of Financial Education in the final years of Basic School with an innovative and integrated perspective with Statistics. In this way, this study aims, through research and suggestion of innovative activities, to make use of Statistics as an allied tool in the student's Financial Education process of learning.

This work, in fact, was born of a personal discomfort and the lack of attitude of the young people when it comes to finance. It is inevitable to admit that this lack of posture is a reflection of the absence of Financial Education projects in schools, and of the lack of qualified teachers to teach this subject.

From the investigation of the lack of activities that use Statistics in synergy with Financial Education, it was possible to elaborate activities with the objective of financially educating the students so that they can improve their capacity in decision making, both alone and in group, thus having the possibility of fully exercising their citizenship in a responsible, conscious and balanced manner.

Keywords: Financial Education, Elementary School and High School, National Curriculum, Statistics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho apresenta uma proposta de discussão sobre o ensino de Educação Financeira nos anos finais do Ensino Fundamental, tendo a Estatística como cúmplice neste processo de letramento financeiro do aluno. O problema a investigar, por meio de pesquisas bibliográficas, análise comparativa do panorama mundial e estudo de caso da Austrália, parte da seguinte questão: Qual o ganho que a Estatística pode proporcionar ao aluno de forma a contribuir com a sua educação financeira?

É de senso comum que os alunos se sentem incomodados quando não veem sentido nem aplicação em inúmeros conteúdos ensinados em matemática. Por questões de imposições curriculares, professores também se sentem desmotivados a terem que lecionar determinados conteúdos, muitas vezes desconectados da realidade, fazendo com que muitos assuntos sejam tratados empregando contextualizações forçosas com o intuito de convencer o aluno de algo que, para ele, não faz o menor sentido.

O tema abordado neste trabalho tem a pretensão de fazer o aluno se motivar e se envolver com um assunto que trará, não só significado e aplicação para muitas situações do dia a dia ,como também contribuir para sua formação enquanto cidadão.

A estrutura do trabalho se dá da seguinte maneira:

No Capítulo 1 a introdução se encarrega de explanar a justificativa do tema escolhido, bem como sinalizar a importância de estudar um tema que, por si só, já está contextualizado em situações diversas do cotidiano.

No Capítulo 2 temos como propósito fazer um levantamento histórico da evolução do dinheiro através dos tempos, desde sua criação até os dias atuais de forma sintética.

No Capítulo 3 temos como objetivos definir o conceito de Educação Financeira, estabelecer um panorama mundial da educação no nível de letramento financeiro e fazer um estudo comparativo do nível de letramento financeiro do Brasil em relação à Austrália.

O Capítulo 4 tem como objetivo trabalhar conceitos básicos de Matemática Financeira, por meio de uma visão tanto aritmetizada quanto algebrizada de modelos determinísticos, dando destaque aos juros simples e compostos.

O Capítulo 5 temos como objetivo introduzir conceitos básicos de Estatística, que podem auxiliar os alunos para a análise financeira de variáveis sujeitas à incerteza.

Finalmente, o Capítulo 6 tem o objetivo de colocar em prática os assuntos abordados neste trabalho através de cinco sugestões inéditas de atividades de Educação Financeira, para as quais os alunos terão a oportunidade de aplicar os conhecimentos estatísticos aprendidos em sala a fim de concluir cada uma das atividades propostas.

2. A ORIGEM DO DINHEIRO: DO ESCAMBO ÀS MOEDAS DIGITAIS

Este capítulo tem como objetivo fazer um levantamento histórico que vai desde a origem das primeiras transações comerciais feitas pelos povos da antiguidade até as mais recentes operações financeiras eletrônicas que gerem o mundo atual. As elucidações de aspectos financeiros tratados aqui são particularmente úteis para a Educação Financeira de nossos alunos na fase de pré-matematização, pois fornecem formas subliminares de entendimento mais orgânico do que seja o dinheiro e sua dinâmica no mundo de hoje

2.1 Um Breve Histórico

Em uma sociedade repleta de inovações, há uma que se pode destacar entre as demais:o dinheiro.

O dinheiro não foi simplesmente uma invenção. Foi uma revolução cognitiva. Ele criou uma sistema de confiança que estabeleceu uma conexão entre os seres humanos do mundo todo. Se o comércio serviu de propulsor ao progresso da civilização, certamente o dinheiro serviu de combustível. Falar sobre a evolução do dinheiro é resgatar a trajetória da história da humanidade.

Difícil imaginar um mundo onde não haja dinheiro, mas sabe-se que durante um longo período da história da civilização ele sequer existia. Nossos ancestrais, o homem primitivo, há milhares de anos perambulavam pelo planeta à procura de alimentos que garantiriam sua sobrevivência. A expectativa de vida era extremamente baixa por conta da escassez dos alimentos, doenças e confrontos constantes entre tribos rivais, que, não raro, praticavam o canibalismo. Muitas destas tribos tinham culturas diferentes . Umas dominavam a maestria da caça enquanto outras dominavam técnicas de coleta e de construção de abrigos para fugir do frio. À medida que o instinto de sobrevivência falava mais alto , muitos dos encontros entre tribos de culturas distintas não resultavam em conflitos, mas sim de oportunidade de negociar. A carne que interessava aos coletores de frutas podia então ser trocada pelas frutas que tanto interessavam aos caçadores. Em contrapartida ,quando duas tribos notáveis caçadoras negociavam, eram as armas e a caça os interesses comuns. A esta prática de negociação damos o nome de escambo.

2.2 Escambo

O escambo é simplesmente a prática de troca de um bem ou serviço por um outro bem ou mesmo um serviço sem que haja o envolvimento de moeda. É considerado como o primeiro tipo de transação comercial registrado na história do homem e , até os dias atuais, ainda é muito praticado.

Esse tipo de permuta só é considerado vantajoso quando ambas as partes envolvidas na negociação possuem interesse na mercadoria ou serviço do outro. Isso é chamado de dupla coincidência de desejos. Um exemplo é quando um padeiro troca meia dúzia de pães por um litro de leite com um fazendeiro.

Apesar de prático e aparentemente um eficiente sistema de permuta, inúmeras são as desvantagens do escambo. Como já vimos, uma delas é quando não há a dupla coincidência. Outra é a impossibilidade de entrar em acordo quando não há um parâmetro para quantificar as equivalências, como por exemplo: quantas maçãs são necessárias para trocar por um litro de leite? Para contornar esse problema, nossos ancestrais passaram a buscar produtos que fossem de utilidade comum, sendo o gado eleito como uma das mercadorias que mais preenchia às necessidades, pois servia de alimento, transporte e também como força de tração.

Historicamente o gado foi considerado uma das primeiras moedas de troca, dando origem à palavra “capital”, que vem do latim *capita* , que significa cabeça (de gado). Tem-se também a palavra “pecúnia”, do latim *pecus*, que significa rebanho (gado) ou *peculium*, relativo ao gado miúdo (ovelha ou cabrito), que deu origem ao termo retribuição pecuniária.

Ainda assim o gado foi insuficiente para atender às necessidades , uma vez que seu tamanho não atendia muitas vezes a menores frações de troca. Para suprir essa demanda, o sal (que deu origem à palavra salário) foi largamente utilizado como moeda-mercadoria, pois além de ser facilmente fracionado em porções muito pequenas, servia também para conservar os alimentos.

Assim, a humanidade foi evoluindo, mas ainda pairava um desconforto de haver tantas situações não contornáveis na prática do escambo, sendo o principal descontentamento a falta de algo que servisse de parâmetro a fim de equacionar qualquer tipo de negócio.

2.3 O Dinheiro

Como vimos, o escambo era o método comercial utilizado pelos antigos povos e civilizações. Porém, ainda é praticado em muitos locais, principalmente em períodos de crise financeira. Com o passar do tempo, à medida que nossos ancestrais foram evoluindo, a necessidade de explorar novos caminhos com o intuito de estabelecerem uma rede maior de conexões e confiança com seus semelhantes foram gradativamente se corporificando.

Há aproximadamente 4.000 anos, os comerciantes da Mesopotâmia, território atualmente ocupado pelo Iraque, estabeleceram as primeiras redes de comércio, onde comercializavam metais, temperos, grãos e até escravos. Mas de todos os materiais, o que mais impulsionou o comércio , proporcionando conquistas, espalhando religiões e colocando o mundo em um patamar nunca antes visto, foi a seda.

A seda valia mais que seu próprio peso em ouro. Uma vasta rede de rotas de comércio aflorou para atender à exponencial demanda. Comerciantes do leste e do oeste fizeram fortunas e pela primeira vez o mundo todo estava interligado por terra e mar . A expansão do mercado da seda tinha então inaugurado uma nova era.

Muito mais do que apenas transportar bens e atender às necessidades de consumo, o comércio movia as pessoas e impulsionava a disseminação de ideias. Comerciantes religiosos compartilhavam os princípios do Cristianismo e do Budismo ao redor do mundo, incentivando assim uma troca cultural. É correto afirmar que a herança deixada pelos comerciantes da antiguidade não foi a fortuna que construíram, mas as ideias que espalharam. E uma dessas grandes ideias foi o uso de algo que representasse um meio mais eficiente de trocas e serviços: o dinheiro.

Segundo Mill (2017, p.34):

> Independentemente da forma que assuma (barra de ouro, nota de dólar, concha de ostra), o dinheiro é qualquer coisa que funcione como meio de troca, reserva de valor ou padrão de valor.

De todas as invenções da humanidade, o dinheiro se destaca como uma das mais úteis. Seu aparecimento surgiu como uma evolução natural do escambo e, ao longo da história, foi representado das mais diversas formas, tais como pedras, metais, conchas, papéis e muitos outros. Em um determinado momento na história, os metais(preciosos e não-preciosos) assumiram o papel de moeda de troca. A moeda, como a conhecemos hoje, com o formato de disco metálico, nada mais é do que um pedaço de metal com inscrições cunhadas em sua superfície .Surgiu na Lídia[1],território grego e atualmente território turco, no século VIII a.C.

Figura 1 – Moeda Lídia do século VI a.C

Independentemente do formato que assuma, o dinheiro funciona como:

- Meio de troca: intermedeia com eficiência compra e venda de bens e serviços.
- Reserva de valor: pode ser utilizado posteriormente à sua data de aquisição.
- Padrão de valor: mede quanto vale (quantifica) um bem ou serviço.

Esta última significa que as pessoas creem que o dinheiro simboliza exatamente o que ele representa, ou seja, seu valor intrínseco é suficiente para servir de parâmetro para troca de bens e serviços.

---

[1] Disponível em https://pt.wikibooks.org/wiki/Hist%C3%B3ria_da_moeda/Moeda_na_Idade_Antiga Acesso em 10/06/2018

Ao longo da história, a moeda foi modificando-se, assumindo diversos formatos e funções, tais como:

- Moeda-mercadoria: É a moeda que possui o valor da qual ela é feita. Como o seu próprio nome diz, pode ser usada tanto como moeda de troca como mercadoria, tais como sal e tabaco, por exemplo. Em contrapartida, a moeda-mercadoria pode ser uma desvantagem, principalmente se uma economia depender muito da utilização da mercadoria como dinheiro e como recurso. Nesta situação, o dinheiro pode se tornar algo valioso demais para se gastar.
- Dinheiro representativo: Foi uma evolução da moeda-mercadoria. Em sua primeira fase evolutiva, adquiriu um formato de moeda-metálica, mas com o aumento gradativo das atividades comerciais, o transporte de grandes quantidades de moedas passou a ser uma tarefa árdua e insegura. A fim de contornar estes problemas, os ourives e cambistas da época que possuíam moedas-mercadorias em seu poder, principalmente ouro, passaram então a emitir recibos de depósito em papel para os respectivos donos, inaugurando assim a fase do papel-moeda. Daí em diante,para negociar o ouro depositado, era suficiente negociar os recibos do valor depositado. Logo, a moeda-papel passou a se chamar dinheiro representativo, uma vez que representavam a quantidade de ouro e prata que estavam retidos nos cofres dos bancos.
- Moeda fiduciária inconversível: É um dinheiro que não é respaldado por nenhuma mercadoria.

Segundo Conway (2017, p.67):

> Dinheiro fiduciário é um dinheiro sem valor intrínseco. Derivado do latim “confiança” (fidúcia), seu valor depende de se confiar no governo que decretou que moedas e notas de valor intrínseco desprezível valem legalmente determinadas importâncias.

O sistema de dinheiro fiduciário é o que predomina nas principais economias nos dias atuais, diferentemente do padrão-ouro, sistema este predominante do final do século XIX até meados da Primeira Guerra Mundial. Enquanto o dinheiro fiduciário não tinha respaldo, no padrão-ouro, o dinheiro era obrigatoriamente respaldado por uma quantidade fixa de ouro, ou seja, todo o dinheiro que estava em circulação deveria ser garantido por uma quantidade de ouro equivalente, evitando desta forma a desvalorização. Uma desvantagem deste sistema monetário era atuar como um limitante para o crescimento econômico. Como o padrão-ouro exigia que o dinheiro tivesse respaldo, a carência do metal restringia a capacidade da economia de prosperar.Com o objetivo de expandir a economia , em 1933, o presidente Roosevelt autorizou a transformação do dólar de dinheiro representativo para moeda fiduciária inconversível. Em 15 de agosto de 1971 , o presidente Nixon autorizou a cessão total da conversão e o dólar tornou-se então dinheiro fiduciário puro.

Com o prevalecimento da moeda fiduciária inconversível como padrão na conjuntura econômica mundial e os avanços tecnológicos do século XXI, principalmente com as invenções do computador e da internet , diversas outras formas de pagamentos surgiram para facilitar ainda mais as transações comerciais entre pessoas, tais como: cheque, cartão de débito, cartão de crédito, boleto bancário, e, desde 2009, a moeda digital, sendo esta considerada para muitos economistas como a mais nova aposta do mercado financeiro.

Neste capítulo traçamos uma linha temporal histórica e evolutiva sobre o dinheiro para entendermos a situação em que o mundo se encontra atualmente do ponto de vista financeiro. No próximo capítulo, veremos a importância de introduzir os principais conceitos de educação financeira o mais cedo possível nas escolas , assim como vêm atuando há alguns anos muitos países de primeiro mundo, tais como Austrália e Japão[2].

---

[2] Disponível em < http://www.vidaedinheiro.gov.br/educacao-financeira-no-mundo/> Acesso em 22 ago,2018

3. A EDUCAÇÃO FINANCEIRA NA PRÉ-MATEMATIZAÇÃO

A Matemática Financeira é vista comumente dialogando com várias searas da própria Matemática, dentre as quais destacamos: frações, porcentagens e outras estruturas aritméticas ao longo do Ensino Fundamental . Este enfoque permite que o aluno chegue ao Ensino Médio mais preparado para entender as formalizações dos modelos matemáticos das estruturas algébricas, de forma que possam tomar melhores decisões do ponto de vista da Educação Matemática Financeira.

No entanto, há uma estrutura tripartite na Matemática Financeira cujos pilares são raramente vistos de forma integrada, a saber: o entendimento de forma orgânica das finanças na fase de pré-matematização; a aritmetização da dinâmica das finanças no tempo; e, finalmente, a algebrização dos modelos das finanças. Todos os pilares são igualmente importantes na formação dos alunos e se estruturam de forma a fazer um encaminhamento pedagógico cognitivamente adequado para um pleno entendimento das finanças por um aluno egresso do Ensino Médio.

Embora o foco principal de nosso trabalho repouse sobre o terceiro e último pilar, este capítulo se propõe a refletir sobre a natureza da Educação Financeira na fase da pré-matematização.

3.1 O QUE É EDUCAÇÃO FINANCEIRA?

A palavra EDUCAR[3] origina-se do Latim *educare*, *ducere*, que significa "direcionar pra fora" ou "conduzir para fora". Ou seja, em latim, o termo educar tem um significado intrínseco de "guiar para fora", relacionando o indivíduo com o mundo exterior a sua volta.

Segundo o dicionário on-line Michaelis[4], o significado de educação é:

---

[3] Disponível em < https://www.dicionarioetimologico.com.br/educar/> Acesso em 22 ago,2018

[4] Disponível em https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/educa%C3%A7%C3%A3o Acesso em 22 ago,2018

> Processo que visa ao desenvolvimento físico, intelectual e moral do ser humano, através da aplicação de métodos próprios, com o intuito de assegurar-lhe a integração social e a formação da cidadania.

Trocando em miúdos, a educação é, e deve ser ,um encadeamento ininterrupto na formação do indivíduo, para que este possa sempre adaptar-se ao meio no qual está inserido.

Já o vocábulo “finanças” provém do Francês medieval *finance,* que significa *“término de uma dívida, quitação”*.

Para Ana Paula Paulino da Costa, especialista em finanças e docente da BSP – *Business School*, São Paulo, finanças[5] é a área do conhecimento que trata de assuntos relacionados ao uso do dinheiro.

No entanto, deve-se ter cautela ao analisar a associação destas duas palavras, finanças e educação, pois pode equivocadamente conduzir o indivíduo a achar que o termo Educação Financeira deve ter forçosamente conexão com decisões envolvendo dinheiro, o que, em muitos casos, não é verdade.

De acordo com a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE)[6] de 2005, educação financeira é:

> O processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidade e riscos neles envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda e adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar. Assim, podem contribuir de modo mais consistente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis com o futuro.

---

[5] Disponível em <hhttp://exame.abril.com.br/pme/os-conceitos-de-financas-que-todo-empreendedor-precisa-saber/> Acesso em 22 ago,2018

[6] Disponível em < http://www.previc.gov.br/regulacao/educacao-previdenciaria/educacao-financeira-e-previdenciaria/o-que-e-educacao-financeira/> Acesso em 22 ago,2018

Embora a definição supracitada da OCDE seja categórica quanto à importância da conscientização e desenvolvimento de competências na formação do cidadão, nota-se que o texto se apoia em um contexto financeiro ao fazer uso da expressão “relação aos conceitos e produtos financeiros”.

De fato, ao se falar em educação financeira, a mera presença do termo “financeira” leva muitas pessoas a presumirem que esta é uma ciência exata.

Para o Dr. Reinaldo Domingos, PhD em Educação Financeira, e presidente da empresa DSOP[7], a Educação Financeira é uma ciência humana, ainda que enfatize a importância do uso da Matemática na tomada de decisões. Domingos afirma que apenas o uso de recursos matemáticos não resolvem o problema, “porque não promovem a transformação necessária”. (DOMINGOS,2012,p.15)

De acordo com Domingos(2012, p.16):

> A Educação Financeira é uma ciência humana que busca a autonomia financeira fundamentada por uma metodologia baseada no comportamento, objetivando a construção de um modelo mental que promova a sustentabilidade ,crie hábitos saudáveis e proporcione o equilíbrio entre o SER, FAZER e o TER, com escolhas conscientes para a realização de SONHOS.

Como citado por Domingos, a Educação Financeira é uma ciência comportamental, pois lida principalmente com a ação humana e suas relações com a sociedade. A emancipação financeira é, sim, um objetivo a ser alcançado, mas que deve ser necessariamente fruto de decisões conscientes, que gerem tanto o bem estar próprio como também para a sociedade como um todo.

O tópico a seguir será dedicado a uma abordagem comparativa entre o Brasil e os países desenvolvidos a fim de situá-lo no cenário mundial no campo da educação e, para isto, nos basearemos na mais recente avaliação educacional disponibilizada pela OCDE: o Pisa.

[7] Disponível em < http://www.dsop.com.br/> Acesso em 24/08/2018

3.2 PANORAMA MUNDIAL DA EDUCAÇÃO

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) , coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), é uma avaliação aplicada a estudantes na faixa etária dos 15 anos com o objetivo de estimar a qualidade da educação dos países participantes a fim de sensibilizar os governantes a subsidiarem políticas eficientes para a melhoria do Ensino Básico. A avaliação é trienal e abrange três áreas de conhecimento: Leitura, Matemática e Ciências, sendo, cada uma delas, priorizada a cada exame aplicado.

Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Anísio Teixeira (INEP)[8], instituto responsável pela aplicação da prova no Brasil.

> O Pisa 2009 iniciou um novo ciclo do programa, com o foco novamente recaindo sobre o domínio de leitura e, em 2012, novamente Matemática; e em 2015, Ciências. Em 2015 também foram inclusas as áreas de Competência Financeira e Resolução Colaborativa de Problemas.

A inclusão das áreas de Competência Financeira e Resolução Colaborativa de Problemas pelo Pisa a partir de 2015 demonstra uma sensível preocupação em melhorar a qualidade da educação financeira e da tomada de decisões dos alunos, o que, de fato, pode-se considerar um grande avanço, principalmente quando comparamos o Brasil com países desenvolvidos na avaliação do último Pisa , em 2015.

Segundo o resultado do último Pisa no site da OCDE[9], o Brasil está abaixo da média nas três áreas avaliadas: Ciências, Matemática e Leitura. Enquanto isso, países, como por exemplo, Japão e Austrália, estão muito acima da média conforme pode-se constatar nas figuras[10] 2, 3 e 4 abaixo.

---

[8] Disponível em <http://portal.inep.gov.br/pisa> Acesso em 25/08/2018

[9] Disponível em < http://www.oecd.org/pisa/> Acesso em 25/08/2018

[10] Disponível em <http://www.oecd.org/pisa/> Acesso em 25/08/2018

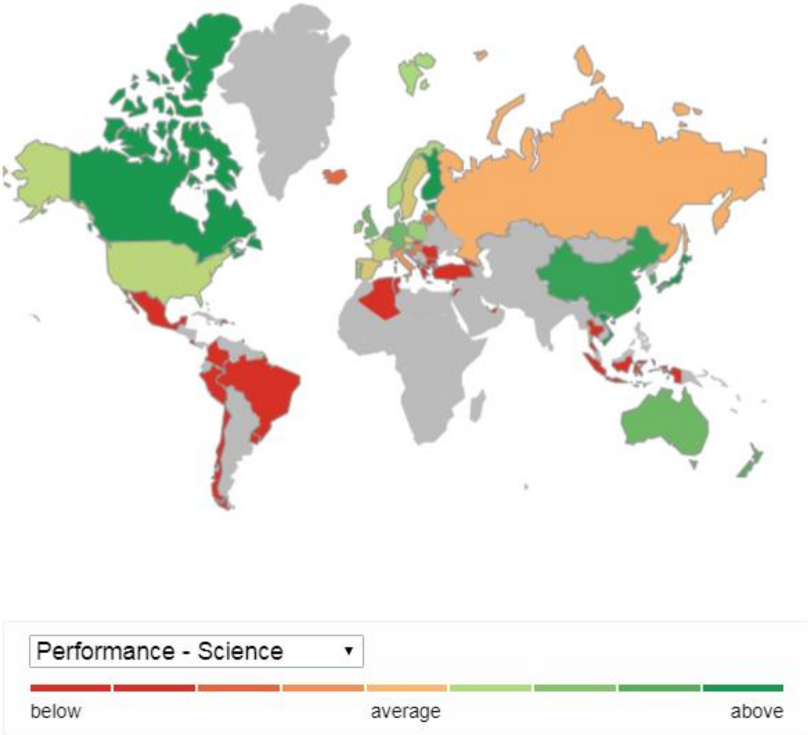


Figura 2 – Panorama mundial - Pisa 2015- Área de Ciências

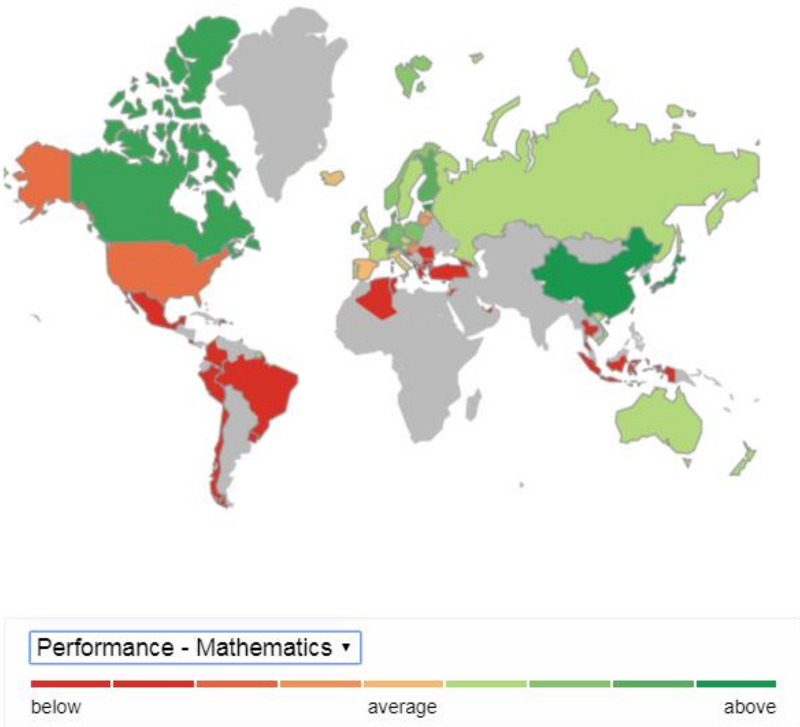


Figura 3 – Panorama mundial - Pisa 2015- Área de Matemática

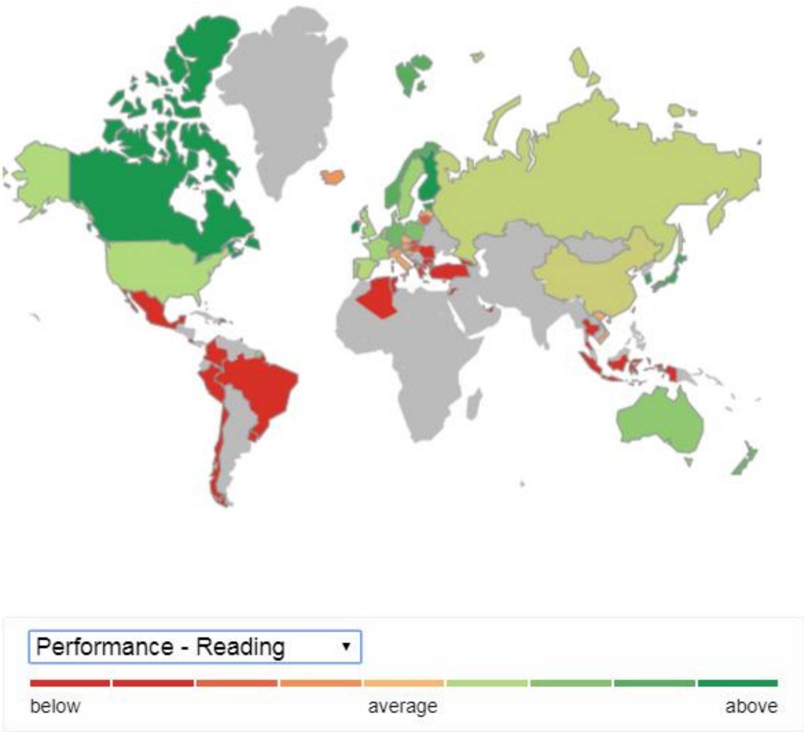


Figura 4 – Panorama mundial - Pisa 2015- Área de Leitura

Nas figuras 5 e 6, de acordo com o resultado do Pisa 2015, comparamos, por exemplo, o Brasil[11] com a Austrália[12] nas três áreas de Ciência, Matemática e Leitura.

Figura 5 – Performance do Brasil- Pisa 2015-

[11] Disponível em < http://www.compareyourcountry.org/pisa/country/BRA?lg=en> Acesso em 28/08/2018

[12]Disponível em< http://www.compareyourcountry.org/pisa/country/AUS?lg=en> Acesso em 28/08/2018

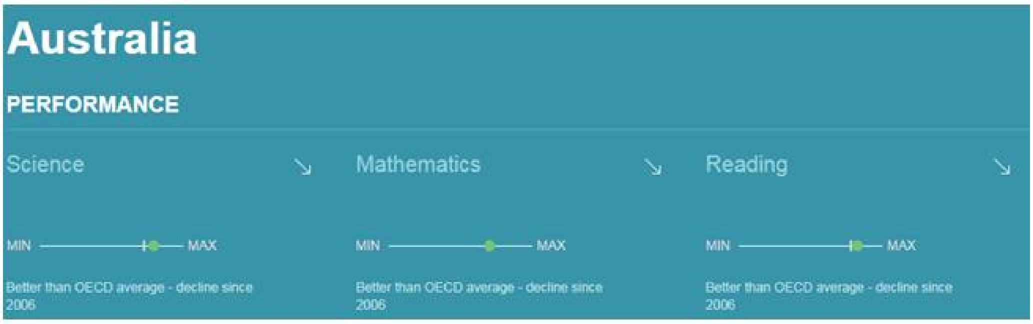


Figura 6 – Performance da Austrália - Pisa 2015-

Como se pode constatar, a Austrália está acima da média em todas as áreas avaliadas no Pisa em 2015, enquanto que o Brasil está abaixo da média, com destaque negativo para a área de Matemática, para a qual está muito abaixo da média.

No relatório final[13] do Pisa 2015, disponibilizado pela OCDE, consta uma análise muito importante sobre a performance dos estudantes na área de letramento financeiro, área esta que, conforme vimos anteriormente, foi incorporada ao Pisa a partir de 2015 .

Segundo o relatório, em média 12% dos estudantes dos países com a melhor performance em letramento financeiro atingiram o nível 5. Isto significa que estes estudantes foram capazes de tomarem decisões acertadas em situações financeiras de alta complexidade, como por exemplo, a análise de vantagens e desvantagens de diversos tipos de aplicações financeiras em múltiplos cenários.

Ainda, 22% dos estudantes de todos os países da pesquisa estão no nível 1 ou abaixo dele e, destes, mais de 20 % estão no Brasil . Neste nível de letramento, os estudantes conseguem, no máximo, reconhecer sutis diferenças entre necessidade e desejo e são capazes de apenas tomar decisões simples a respeito de alguns gastos rotineiros. Um resumo dos dados pode ser observado na figura 7 abaixo:

[13] Disponível em < http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf> Acesso em 28/08/2018

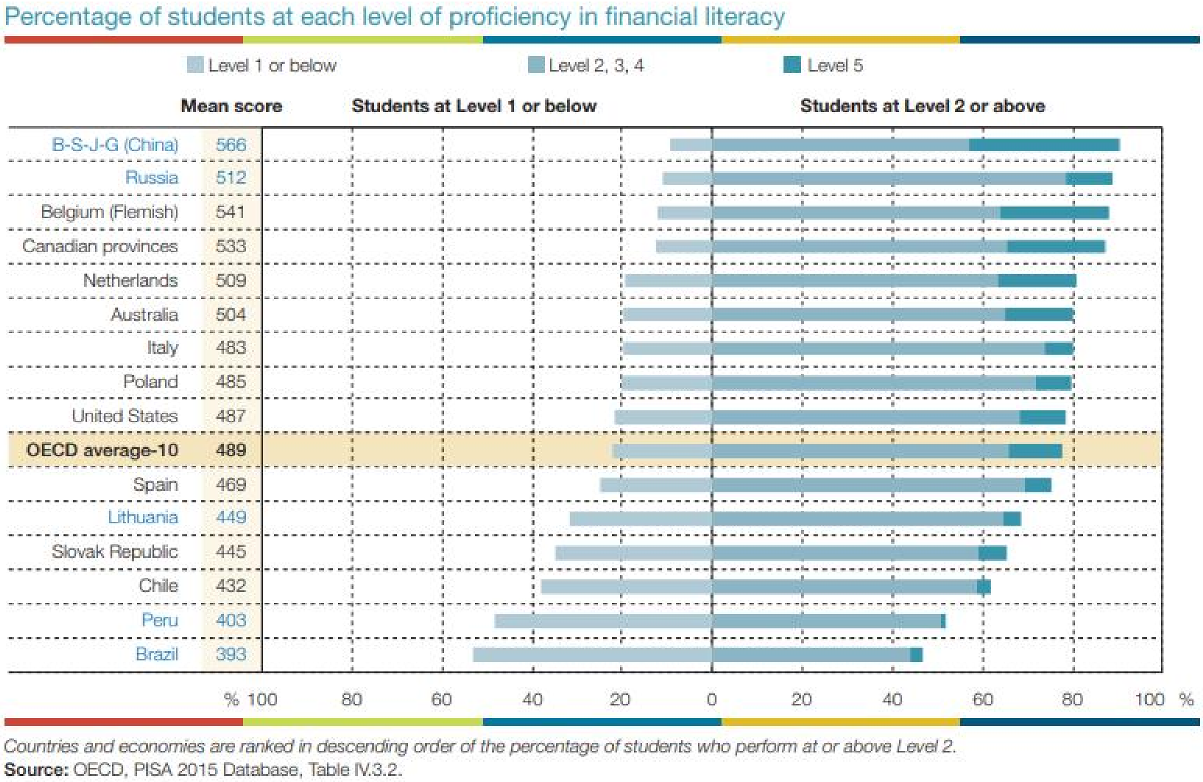


Figura 7 – Porcentagem dos estudantes por nível de proficiência em letramento financeiro

Em suma, o Brasil apresenta dados alarmantes quando o assunto é Educação Financeira. É notória a necessidade de criar práticas educativas financeiras cada vez mais cedo nas escolas, e, felizmente , com a homologação da Base Nacional Curricular Comum do Ensino Fundamental em 2017 pelo Ministério da Educação, a disciplina de educação financeira deverá ser habilidade obrigatória no currículo escolar, assunto este que será abordado no próximo tópico.

3.3 BNCC E A EDUCAÇÃO FINANCEIRA: A IMPORTÂNCIA DA PRÉ-MATEMATIZAÇÃO.

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) do Ensino Fundamental foi homologada no dia 20 de dezembro de 2017, em Brasília, pelo Ministro da Educação José Mendonça Filho. Prevista na Constituição Federal do Brasil de 1988 e no Plano Nacional de Educação de 2014, o documento teve contribuições dos especialistas de todas as áreas do ensino na sua elaboração. Em abril de 2017, O Ministério da Educação (MEC) encaminhou o que já estava escrito para o Conselho Nacional de Educação (CNE), que prontamente o disponibilizou publicamente para que a sociedade civil também pudesse contribuir com sugestões.

Segundo a BNCC[14] (2017,p.9).

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996)[15], e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN)[16] Referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, a BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à

[14]Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 29/08/2018

[15] BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996.Disponível em< http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm> Acesso em 29/08/2018

[16] BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica; Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão; Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2013. Disponível em< portal.mec.gov.br/docman/junho.../13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf> Acesso em 29/08/2018

> elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação. Nesse sentido, espera-se que a BNCC ajude a superar a fragmentação das políticas educacionais, enseje o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e seja balizadora da qualidade da educação. Assim, para além da garantia de acesso e permanência na escola, é necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, tarefa para a qual a BNCC é instrumento fundamental. Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Ao definir essas competências, a BNCC reconhece que a "educação deve afirmar valores e estimular ações que contribuam para a transformação da sociedade, tornando-a mais humana, socialmente justa e, também, voltada para a preservação da natureza" (BRASIL, 2013)[17], mostrando-se também alinhada à Agenda 2030 da Organização das Nações Unidas (ONU)[18]. É imprescindível destacar que as competências gerais da Educação Básica, apresentadas a seguir, inter-relacionam-se e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da LDB.

De acordo com o texto, percebe-se a preocupação da BNCC com temas atuais, como por exemplo, o desenvolvimento emocional do indivíduo e a preocupação com o meio-ambiente. Desenvolver trabalhos na área de educação priorizando temas sociais é muito relevante para alunos de todas as idades, mas é altamente recomendável que sejam implementados, de preferência, nos anos iniciais do Ensino Básico, pois permitem trabalhar conceitos de matemática antes mesmo de um

---

[17] BRASIL. Secretaria de Direitos Humanos da Presidência da República. Caderno de Educação em Direitos Humanos. Educação em Direitos Humanos: Diretrizes Nacionais. Brasília: Coordenação Geral de Educação em SDH/PR, Direitos Humanos, Secretaria Nacional de Promoção e Defesa dos Direitos Humanos, 2013. Disponível em < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=32131-educacao-dh-diretrizesnacionaispdf&Itemid=30192> Acesso em 28/08/2018

[18] BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica; Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão; Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2013. Disponível em < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192> Acesso em 28/08/2018.

tratamento aritmético dos conteúdos. A esta abordagem chamamos de pré-matematização.

Portanto, a pré-matematização pode ser encarada como um processo de Educação Financeira antes mesmo da aritmetização matemática. Não é necessário que o aluno seja dotado de conhecimentos aritméticos para que possa, por exemplo, se conscientizar , ainda que organicamente, do significado do dinheiro em termos de entidade de câmbio, bem como sua variação ao longo do tempo.

A recém inserção da Educação Financeira desde os anos iniciais como o mais novo tema transversal a ser tratado nos currículos escolares no Brasil veio oportunamente contribuir, não só com a integração com as outras disciplinas, como também com o incentivo a esta pré-matematização. A própria BNCC sugere um trabalho conjunto com a disciplina de história ao aconselhar uma pesquisa sobre a importância do dinheiro para a sociedade. Embora seja um tema que envolva o conceito de dinheiro, a matemática, neste caso, passa a ser uma mera coadjuvante. Conceitos embrionários matemáticos, como o uso de tabelas estatísticas para organizar os dados das pesquisas realizadas pelos alunos, podem sutilmente serem trabalhados.

Segundo o artigo[19] publicado no site da Folha de São Paulo em abril de 2017, países como Estados Unidos, Canadá e Austrália, serviram de referência e inspiração para a construção da BNCC do Brasil. Na Austrália, por exemplo, o documento demorou quase 20 anos para ser aprovado, período este que serviu para debates e dar treinamento adequado aos profissionais da educação.

A Austrália, como vimos, é um país que tem pontuação acima da média em todas as áreas avaliadas no Pisa e, conforme veremos no próximo tópico, a Educação Financeira faz parte da rotina das escolas desde os anos iniciais.

[19] Disponível em https://www1.folha.uol.com.br/educacao/2017/04/1873924-australia-canada-e-eua-inspiraram-base-curricular-do-brasil.shtml> Acesso em 30/08/2018

3.4 A EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO CURRÍCULO DA AUSTRÁLIA

O currículo escolar australiano[20] foi projetado para ajudar suas crianças a se desenvolverem intelectualmente a fim de se tornarem cidadãos bem sucedidos, informados , confiantes e criativos. A estrutura curricular é dividida, conforme mostrado na figura[21] 8, em 8 áreas de aprendizagem (inglês, matemática, ciências, artes, tecnologia, saúde e educação física, línguas estrangeiras e ciências sociais), 7 áreas de capacidades gerais (letramento, numeracia, tecnologia de informação, pensamento crítico e criativo, habilidades intrapessoal e interpessoal, princípios de ética e princípios interculturais) e 3 prioridades inter curriculares (sustentabilidade, engajamento Australiano com a Ásia e estudo da história e cultura Aborígene e do estreito de Torres e sustentabilidade). Como área optativa, as chamadas *work studies* também fazem parte do currículo, onde os alunos têm a oportunidade de participar ativamente de oficinas de trabalho.

Figura 8: Currículo escolar Australiano

[20]Disponível em < https://www.australiancurriculum.edu.au/>Acesso em 31/08/2018

[21] Disponível em< https://www.australiancurriculum.edu.au/>Acesso em 01/09/2018

A educação financeira[22] na Austrália , chamada de *financial literacy* é um tema transversal que está presente em todas as áreas do seu currículo e começa a ser trabalhado com crianças por volta dos 6 anos de idade:

> "Os diversos meios onde as crianças crescem influenciam suas necessidades, desejos, percepções e comportamentos. Tipicamente, em uma idade que vai de 6 a 7 anos, ou seja, o 1° ano , dentro das particularidades únicas de suas famílias, as crianças exploram seus sensos de pertencer e ser através de um engajamento ativo com as pessoas, objetos e uso de tecnologias. As crianças são curiosas com os textos e símbolos que estão presentes em seu ambiente e são estimuladas o tempo todo com publicidades oriundas tanto de televisão quanto de dispositivos digitais. Elas interagem verbalmente e não verbalmente para expressar necessidades imediatas, desejos e preferências., que , geralmente são mediadas por adultos. Elas podem receber itens em troca por apresentarem ideias criativas e comportamentos responsáveis e ainda têm a oportunidade de observar como o assunto dinheiro é tratado e discutido. Com a supervisão dos adultos, elas aprendem a lidar com pequenas quantias de dinheiro e aprendem a importância de tomarem decisões respeitosas, justas e avaliar riscos"(tradução nossa)[23]

No primeiro ano, o currículo australiano já incentiva o desenvolvimento de todas as dimensões (responsabilidade e empreendimento, conhecimento e compreensão e competências e habilidades) em seus alunos e, com o passar dos anos, os projetos vão se tornando mais complexos à medida que os alunos vão se desenvolvendo.

---

[22] Disponível em < https://www.australiancurriculum.edu.au/resources/curriculum-connections/dimensions/?id=45767&searchTerm=financial+education#dimension-content>Acesso em 01/09/2018

[23] The diverse circumstances in which children grow up influence their needs, wants, perceptions and behaviours related to financial and consumer matters. Typically, at age six to seven, within their family's unique circumstances, children explore their sense of belonging, being and becoming through active engagement with people, objects, technologies and representations. Children are curious about texts and symbols in their environment and are tempted by messages of advertising on television and digital devices. They interact verbally and non-verbally to express immediate needs, wants, preferences and reasons, which are usually mediated by adults. They may receive items in exchange for responsible behaviours and creative ideas, and observe money being handled and discussed. They may handle small amounts of money, using their own money at the point of purchase, most often with adult guidance, and begin to understand risks and interdependence by considering what is fair, respectful and safe as they make decisions.
Disponível em < https://www.australiancurriculum.edu.au/resources/curriculum-connections/dimensions/?id=45767&searchTerm=financial+education#dimension-content>Acesso em 01/09/2018

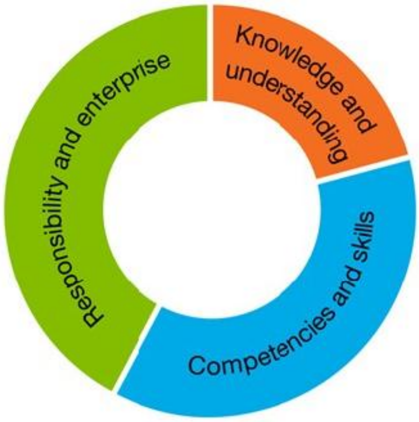


Figura 9: Proporção aproximada das dimensões abordadas no 1° ano

Ainda, o governo australiano, através de uma parceria público-privada, disponibiliza às escolas interessadas, o uso de plataformas digitais na internet, tais como a *MoneySmart*[24] *e* *Taxsuperandyou*[25] ,que são ambientes virtuais de aprendizagem de educação financeira que proporcionam diversas atividades e projetos interativos, que seguem criteriosamente as recomendações do currículo Australiano.

Como a Educação Financeira está presente em todas as áreas do currículo escolar Australiano, dependerá apenas do professor a inclusão de projetos que estimulem a uma pré-matematização dos conteúdos.

Na área de artes, por exemplo, podem ser tratados, desde o 1° ano, os conceitos de perímetro e área sem a necessidade de efetuar cálculos. Esta abordagem permite ao aluno assimilar a teoria para, futuramente, aplicá-la na resolução de problemas.

No próximo capítulo falaremos sobre o segundo e o terceiro pilar da matemática financeira: a aritmetização e a algebrização dos conteúdos.

[24] Disponível em < https://www.moneysmart.gov.au/> Acesso em 01/09/2018

[25] Disponível em< https://www.taxsuperandyou.gov.au/> Acesso em 01/09/2018

4. ASPECTOS DETERMINÍSTICOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO BÁSICO

Segundo as recomendações da BNCC[26](2017,p.269).

> Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais. Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos.

Logo, dando continuidade ao encadeamento orgânico desta pesquisa, que inicialmente partiu de uma estrutura de conscientização, a próxima etapa é dotar os alunos de conhecimentos aritméticos necessários à Matemática Financeira para que possam entender a dinâmica financeira com um olhar prospectivo e retrospectivo a partir do fazimento e desfazimento de operações aritméticas sem que, para isto, seja necessário estabelecer modelos algébricos da dinâmica no tempo do dinheiro.

Em seguida, parte-se então para um tratamento algébrico das Finanças, uma vez que, dispondo já de conhecimentos prévios agregados de modelagem via estudos de funções, progressões aritméticas e geométricas, os alunos poderão formular então modelos matemáticos mais completos para cumprir tarefas que até então apresentavam lacunas.

[26] Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 01/02/2019

4.1 UM OLHAR DETERMINÍSTICO SOBRE JUROS SIMPLES E COMPOSTOS DO PONTO DE VISTA ARITMÉTICO

A unidade Números é uma das cinco importantes unidades temáticas da Base Nacional Curricular Comum. Segundo a BNCC[27] (2017,p.268) :

> A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.

No Ensino Básico é comum encontrarmos em livros didáticos uma abordagem linear e padronizada no ensino de matemática financeira, que vai desde os cálculos com porcentagens, passando por descontos e aumentos percentuais, até os conceitos de capital, juros e montante. Logo em seguida são apresentados aos alunos as definições de juros simples e juros compostos, na maioria das vezes usando uma abordagem com fórmulas prontas e até mesmo desconexas do mundo real, como por exemplo, o cálculo equivocado usando juros simples em empréstimos bancários.

Naturalmente, é extremamente importante que o aluno compreenda, saiba formular e manipular modelos algébricos no tratamento das finanças, mas não sem antes de entender os significados de cada um dos conceitos envolvidos através de uma abordagem aritmética transparente e acessível.

[27] Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 08/02/2019

Ao falarmos de Matemática Financeira, temos que ter em mente que a principal operação é a de empréstimo. Há sempre duas partes envolvidas: o que está na posição credora (quem vai conceder o empréstimo) e o que está na posição devedora (quem vai solicitar o empréstimo). Quem empresta o dinheiro espera ser remunerado após o fim do prazo acordado, ou seja, o devedor, ao final da transação, deverá devolver o valor emprestado acrescido da remuneração combinada. A esta remuneração dá-se o nome de juro (ou juros). O valor total recebido pelo credor é chamado de montante, que é composto pelo valor emprestado, chamado de capital ou principal, somado aos juros.

Segundo Giannetti(2016, p.09):

> Os juros são o prêmio da espera na ponta credora – os ganhos decorrentes da transferência ou cessão temporária de valores do presente para o futuro; e são o preço da impaciência na ponta devedora – o custo de antecipar ou importar valores do futuro para o presente.

Suponha que o valor de R$ 1.000,00 seja emprestado durante um período de tempo e que o valor devolvido no final seja de R$ 1.200,00. É notório que o valor dos juros é igual a R$ 200,00, que é a diferença entre o montante e o principal. Ainda, se quisermos saber qual a porcentagem que os juros representam em relação ao principal, devemos simplesmente determinar a razão entre eles, ou seja, $\frac{200}{1000} = 20\%$ no período. Logo, a razão entre os juros e o principal é chamado de taxa de juros, também conhecida como taxa de crescimento do capital. A fim de fixar as ideias, vamos usar um exemplo real no mercado financeiro:

Suponha que um investidor deseja aplicar o valor de R$ 15.000,00 em uma caderneta de poupança no prazo de 1 ano. Se no final deste período o montante é de R$ 15.639,30, determinemos a taxa de juros deste investimento.

Como já sabemos que a taxa de juros é a razão entre os juros e o principal, temos que a taxa procurada é igual a $\frac{639,30}{15.000} = 0,04262 \cong 4,26\ \%$, ou seja, o principal de R$ 15.000,00 foi acrescido de $4,26\%$ no período de 1 ano.

Um outro exemplo interessante do dia a dia é calcular o montante a pagar ao banco após ter utilizado o cheque especial (um tipo de empréstimo) durante o período de 1 mês. Vamos supor que um cliente precise pagar uma conta no valor de R$ 10.000,00. Se no dia do vencimento não houver saldo na conta, o banco quita o empréstimo em troca de uma remuneração (juros) de 13% (valor aproximado que pode variar dependendo do banco) após 1 mês. Neste cenário, qual o valor que o cliente deverá ter no fim do prazo para quitar toda a sua dívida?

Neste caso, temos um principal de R$ 10.000 e uma taxa de juros de 13%. O valor do juros é de $\frac{13}{100}$ $de\ 10.000 = R\$\ 1.300{,}00$. Logo, o cliente deverá dispor de R$ 11.300,00 para liquidar integralmente o empréstimo.

Agora que já temos a ideia de juros, veremos a seguir a diferença dos dois tipos: juros simples e compostos.

4.1.1 JUROS SIMPLES

Juros Simples são aqueles onde o percentual de juros é sempre calculado sobre o principal, ou seja, o valor dos juros é proporcional ao capital inicial.

Suponha que um banco fictício ofereça a seguinte proposta para seus clientes:

Deixe o seu dinheiro guardado conosco pelo prazo de 1 ano.
No fim do prazo, devolverei o seu dinheiro acrescido de R$ 0,10 para cada R$ 1,00 investido

Repare que, nesta proposta, a remuneração acordada é proporcional ao valor deixado inicialmente no banco, ou seja, os juros de R$ 0,10 foram prometidos para cada R$ 1,00 investido, caracterizando desta forma uma taxa de juros $\frac{0{,}10}{1} = 10\%$ no período de 1 ano.

Considere um investimento de valores múltiplos de R$ 100,00 na tabela abaixo:

Investimento	R$ 100,00	R$ 200,00	R$ 300,00
Montante após 1 ano	R$ 110,00	R$ 220,00	R$ 330,00

Essa é a ideia por trás dos juros simples. Quando o tempo é fixado, o montante será sempre proporcional ao principal. A taxa de proporcionalidade no exemplo é igual a $\frac{110}{100} = \frac{220}{200} = \frac{330}{300} = 1{,}1$. Isto significa que após o prazo acordado, o montante será sempre 1,1 vezes o principal. Além disso, para períodos maiores que 1, a taxa de juros incidirá sempre sobre o capital inicial, o que de um ponto de vista aritmético permitirá aos alunos perceber a relação linear da evolução do ativo financeiro ao longo do tempo por meio do conteúdo matemático de Razão e Proporção, sem que precise estabelecer o modelo de função afim para desvelar sua estrutura algébrica.

4.1.2 JUROS COMPOSTOS

Juros compostos são aqueles que, ao final de um período, os juros são incorporados ao principal, gerando desta forma um montante que será a nova referência para o cálculo dos juros do próximo período e assim por diante.

No exemplo anterior, suponha que após o prazo de 1 ano, o cliente resolva deixar o dinheiro acumulado por mais 1 ano. Seria justo calcular os juros sobre o capital inicial de 1 ano atrás?

Tomemos como exemplo o valor inicial de R$ 100,00. Após 1 ano, vimos que o valor do montante será de R$ 110,00. Como a promessa do banco foi de remunerar R$ 0,10 para cada R$ 1,00 investido e dispomos de R$ 110,00, ao final do 2° ano o valor remunerado deverá ser de R$ 1,10 e não de R$ 1,00. Vejamos o que aconteceria para outros principais.

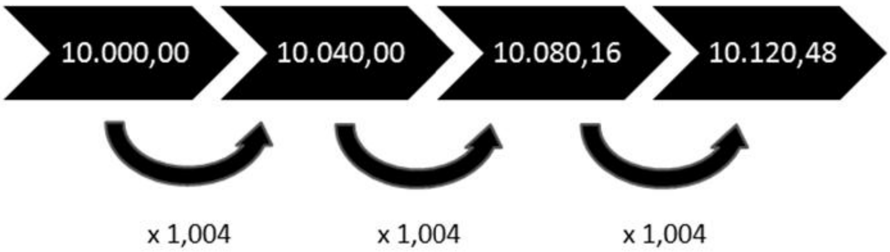
Investimento	R$ 100,00	R$ 200,00	R$ 300,00
Montante após 1 ano	R$ 110,00	R$ 220,00	R$ 330,00
Montante após 2 anos	R$ 121,00	R$ 242,00	R$ 363,00

Observe que, ao variar o tempo, a variação da quantia é proporcional ao valor inicial no período considerado e não mais proporcional ao capital inicial. Note que $\frac{121}{110} \neq \frac{121}{100}$.

Considere um investimento de R$ 1.000,00 em uma caderneta de poupança , onde a taxa de juros para o período de 1 mês é de 0,4%. Após 3 meses, qual será o valor do montante?

Neste caso, temos uma taxa de 0,4% incidindo sobre o principal de cada período. Como no 1° período o capital é de R$ 10.000,00, após 1 mês teremos os R$ 10.000,00 acrescidos de juros de 0,4% sobre este capital, gerando desta forma um montante de R$ 10.040,00. Para o próximo período , teremos como novo principal o montante de R$ 10.040,00 mais 0,4 % sobre este montante, totalizando assim R$ 10.080,16. Prosseguindo com o mesmo raciocínio para o último período, chegamos ao valor final de R$ 10.120,48, aproximadamente, em um prazo de três meses de aplicação.

Repare que, em cada período, o capital foi multiplicado pelo fator de correção da poupança para gerar o novo montante. Como R$ 10.000,00 correspondem a 100 % do capital , ao sofrer o acréscimo de 0,4%, o novo montante corresponderá a 100,4 % do capital anterior, ou seja, o capital foi multiplicado pelo fator de correção de 1,004. Como a taxa é a mesma para cada período, os meses seguintes também foram atualizados multiplicando-se os montantes atualizados por 1,004. Ao levar o principal do presente para o futuro, multiplicou-se o valor investido pela taxa de correção tantas vezes quanto foram os períodos, conforme esquema abaixo:



Resumidamente , o montante final de R$ 10.120,48 foi calculado da seguinte forma: $10.000 \,.\, (1{,}004).(1{,}004).(1{,}004) = 10.000.(1{,}004)^3$.

Ainda no mesmo exemplo: como procederíamos se soubéssemos o valor do montante após 3 meses e quiséssemos saber o valor do principal aplicado? Neste caso, estamos fazendo o caminho inverso, ou seja, queremos desfazer a operação trazendo o montante do futuro para o presente, logo, basta dividir R$ 10.120,48 sucessivamente por 1,004, ou seja, $\frac{10.120{,}48}{(1{,}004)^3} = 10.000{,}00$.

A taxa de juros do exemplo supracitado está mensalmente atualizando o montante, mas não é raro no mercado financeiro encontrarmos taxas diárias, semestrais e anuais. Um título da dívida pública chamado de Tesouro Prefixado é atualizado ano a ano, ou seja, a taxa de atualização do montante é anual. Como exemplo, vamos simular um investimento real no valor de R$ 10.000,00 de um título do Tesouro Prefixado com data de vencimento em 2025 , conforme dados extraídos do site do Tesouro Direto[28].

A figura 10 abaixo apresenta os títulos disponíveis no site do Tesouro Nacional no dia 06/02/2019:

[28] Disponível em < http://www.tesouro.fazenda.gov.br/tesouro-direto-calculadora> Acesso em 06/02/2019

Título	Vencimento	Taxa de Rendimento (% a.a.)
Indexados ao IPCA		
Tesouro IPCA+ 2024	15/08/2024	4,15
Tesouro IPCA+ 2035	15/05/2035	4,48
Tesouro IPCA+ 2045	15/05/2045	4,48
Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais 2026	15/08/2026	4,13
Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais 2035	15/05/2035	4,38
Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais 2050	15/08/2050	4,48
Prefixados		
Tesouro Prefixado 2022	01/01/2022	7,66
Tesouro Prefixado 2025	01/01/2025	8,67
Tesouro Prefixado com Juros Semestrais 2029	01/01/2029	8,85

Figura 10: Títulos públicos disponíveis para investimento

No nosso exemplo, o Tesouro Prefixado 2025 possui uma taxa de rendimento de 8,67% ao ano. Como a data do vencimento é dia 01/01/2025, consideraremos um investimento feito exatamente no dia 01/01/2019 a fim de termos um período de 6 anos. Como já visto anteriormente, para calcularmos o valor bruto do investimento ao final de cada período devemos multiplicar o principal por 1,0867 . Com a ajuda de uma planilha, obteremos os seguintes valores, conforme figura 11 abaixo:

Período	Montante	Fator de correção	Montante ao final do ano
1° ano	R$ 10.000,00	1,0867	R$ 10.867,00
2° ano	R$ 10.867,00	1,0867	R$ 11.809,17
3° ano	R$ 11.809,17	1,0867	R$ 12.833,03
4° ano	R$ 12.833,03	1,0867	R$ 13.945,65
5° ano	R$ 13.945,65	1,0867	R$ 15.154,74
6° ano	R$ 15.154,74	1,0867	R$ 16.468,66

Figura 11: Rendimento anual do Tesouro Prefixado 2025

Logo, o principal de R$ 10.000,00 aplicados à uma taxa anual de 8,67% ao ano, gerou um rendimento de R$ 6.468,66, totalizando um montante bruto de R$ 16.468,66 em um prazo de 6 anos. Perceba que a inflação acumulada no período foi de 64,6866%, bem maior que 52,02% se fosse considerada uma taxa de juros simples

4.1.3 TAXAS EFETIVAS, NOMINAIS E EQUIVALENTES

A taxa efetiva, como o próprio nome sugere, é a taxa efetivamente paga ou recebida , que deve ser obrigatoriamente capitalizada em um único período. Se um determinado investimento, por exemplo, paga uma taxa mensal de 2 % e após 1 mês recebe-se exatamente juros de 2 % sobre o principal, estamos então diante de uma taxa efetiva. Historicamente, a taxa efetiva, como não era capitalizada em períodos menores, passou a ser chamada de taxa nominal. Logo, a taxa nominal que é capitalizada em um único período é, de fato , uma taxa efetiva.

Porém, com as novas demandas que sugiram no mercado financeiro ao longo da história, as instituições financeiras passaram a utilizar taxas que eram capitalizadas em períodos diferentes da taxa fornecida. Por exemplo, um empréstimo bancário concedido à uma taxa anual de 24 % , cujas parcelas devem ser pagas mensalmente, ao final de 1 ano o tomador do empréstimo estaria, na prática, pagando uma taxa efetiva anual diferente da contratada. Vejamos o porquê: se a taxa é de 24 % ao ano, para encontrarmos a taxa efetiva mensal, devemos dividir a taxa fornecida pelo número de períodos capitalizados: $\frac{24\%}{12} = 2\%\ ao\ mês.$ Com estamos diante de um empréstimo à juros compostos, temos que ao final de 12 períodos, o valor acumulado dos juros será de $(100\% + 2\%)^{12} = (1 + 0{,}02)^{12} = 1{,}02^{12} \cong 1{,}2682$. Logo, a taxa de juros efetiva anual será de $(1{,}2682 - 1) = 0{,}2682 = 26{,}82\%$ ao ano.

Conclui-se , desta forma, que a taxa que não é capitalizada na mesma unidade de tempo da taxa fornecida, se trata, na verdade, de uma taxa “aparente”, que não apresenta a realidade. A esta taxa dá-se o nome de taxa nominal.

Já as taxas equivalentes, são taxas que, quando aplicadas ao mesmo capital, num mesmo intervalo de tempo, produzem montantes iguais. No exemplo anterior, concluímos que a taxa efetiva anual do empréstimo era de 26,82%, ou seja, se um capital de R$ 1.000,00 fosse aplicado em um período de 1 ano , ao final do período renderia $\frac{26,82}{100}.1000 = R\$\ 268,20$, gerando desta forma um montante de R$ 1.268,20. Por outro lado, se capitalizarmos R$ 1.000,00 mensalmente à taxa efetiva de 2% ao mês, ao final de 12 períodos , teremos o montante de $1000.(1,02)^{12} = 1000.1,2682$ =R$ 1.268,20. Como as taxas anual de 26,82% e mensal de 2% produziram o mesmo montante ao final do período considerado, dizemos que estas são taxas equivalentes.

Suponha agora que a caderneta de poupança tenha um rendimento aproximado de 0,4% ao mês. Qual deverá ser a taxa equivalente anual que deve ser aplicada ao principal de forma a gerar o mesmo montante no mesmo período? Ao fazer essa pergunta, estamos à procura de uma taxa que atualize o principal uma única vez daqui a um ano.

Digamos que inicialmente temos um principal de R$ 100,00. Ao aplicar esse valor na caderneta de poupança durante 1 ano (12 meses), teremos no final de 12 períodos o valor de $100,00\,.(1,004)^{12} \cong R\$\ 104,91$. Ou seja , em um período de 12 meses, o principal de R$ 100,00 gerou um montante de R$ 104,91. Como queremos saber a taxa efetiva anual que transforma R$ 100,00 em R$ 104,91, consideraremos um período de 1 ano. Logo, por quanto deveremos multiplicar R$ 100,00 para obtermos R$ 104,91? A resposta é $\frac{104,91}{100} = 1,0491$. Como estamos interessados apenas na taxa efetiva anual, devemos retirar os 100 %. Logo, a taxa efetiva anual procurada será de $1,0491 - 1 = 0,0491 = 4,91\,\%$ ao ano. Resumindo: para transformar a taxa efetiva mensal dada em anual, elevamos o fator de correção à potência 12 e retiramos os 100%, isto é, $(1,004^{12} - 1)$. Uma rápida observação nos permite perceber que as taxas 4,91% e 0,4 % são equivalentes, pois geram o mesmo montante.

Um outro exemplo, mas agora transformando uma taxa efetiva anual em mensal: uma aplicação financeira no valor de R$ 100,00 é feita a uma taxa efetiva de 15% ao ano com capitalização mensal. Qual é a taxa equivalente mensal?

Em um 1 ano, o valor de R$ 100,00 gerará um montante de $100 \text{ x } 1{,}15 = R\$\ 115{,}00$. Como queremos saber a taxa equivalente mensal e sabemos que 1 ano tem 12 meses, queremos saber qual é a taxa de correção que devemos elevar à potência 12 para transformar $R\$\ 100{,}00$ em $R\$\ 115{,}00$? Neste caso , estamos fazendo o processo inverso do exemplo anterior, logo devemos extrair a raiz índice 12 do fator de correção anual e retirarmos os 100 % ou, seja, $\sqrt[12]{1{,}15} - 1 \cong 1{,}0117 - 1 = 0{,}0117 \cong 1{,}17\ \%$ ao mês. Logo, $100.(1{,}0117)^{12} \cong R\$\ 115{,}00$.

4.2 UM OLHAR DETERMINÍSTICO SOBRE JUROS SIMPLES E COMPOSTOS DO PONTO DE VISTA ALGÉBRICO

Já a unidade temática Álgebra, segundo a BNCC[29], prevê que:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações.

---

[29] Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 08/02/2019

Portanto, este tópico tem como principal objetivo revisitar os conceitos de juros simples e compostos abordados anteriormente, porém agora sob uma ótica algébrica. Espera-se que desta forma o aluno possa tirar proveito dos modelos matemáticos a fim de melhorar sua capacidade de decisão nas questões financeiras.

4.2.1 JUROS SIMPLES COMO FUNÇÃO AFIM E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Suponha que um pai empreste a seu filho uma quantia (capital) durante um determinado tempo. No final do período, o pai receberá uma quantia (juros) como compensação. O valor desta quantia é calculado por uma porcentagem (taxa de juros) que incidirá diretamente sobre valor emprestado. Ao final da aplicação, o pai receberá de volta o valor emprestado acrescidos dos juros desta aplicação (montante).

Se um capital *C* é aplicado a uma taxa de *i* % ao período, rende juros simples no final de *t* períodos, temos que:

$$\begin{gathered} C.i = juros\ obtidos\ no\ 1°\ período \\ C.2i = juros\ obtidos\ no\ 2°\ período \\ C.3i = juros\ obtidos\ no\ 3°\ período \\ . \\ . \\ . \\ C.i.t = juros\ obtidos\ no\ período\ t \end{gathered}$$

Portanto, $J = C.i.t$. Como o montante (M) é igual ao capital acrescido dos juros, temos que $M = C + J$. Logo , $M = C + C.i.t$,ou seja, $M = C(1 + it)$.

Observe que na fórmula $J = C.i.t$, os juros são uma função de *t* do tipo linear $J = f(t)$ e na fórmula $M = C + C.i.t$, o montante é uma função de *t* do tipo afim $M = f(t)$.

Vamos supor que o pai empreste ao filho a quantia de R$ 100,00 pelo prazo de 6 meses à uma taxa mensal de 1%. Neste caso, temos que $C = 100$ e $i = 1\%$ .Substituindo os valores em $J = C.i.t$ e $M = C + C.i.t$, encontramos, respectivamente, $J = t$ e $M = 100 + t$.

Para melhorar a compreensão, vamos primeiramente tabelar os valores para a função $J = t$, conforme figura 12:

Mês	Juros
0	0,00
1	1,00
2	2,00
3	3,00
4	4,00
5	5,00
6	6,00

Figura 12: Tabela de juros simples

E agora, com a ajuda do software Geogebra[30], vamos fazer uma análise gráfica da função para os seis primeiros meses, conforme figura 13:

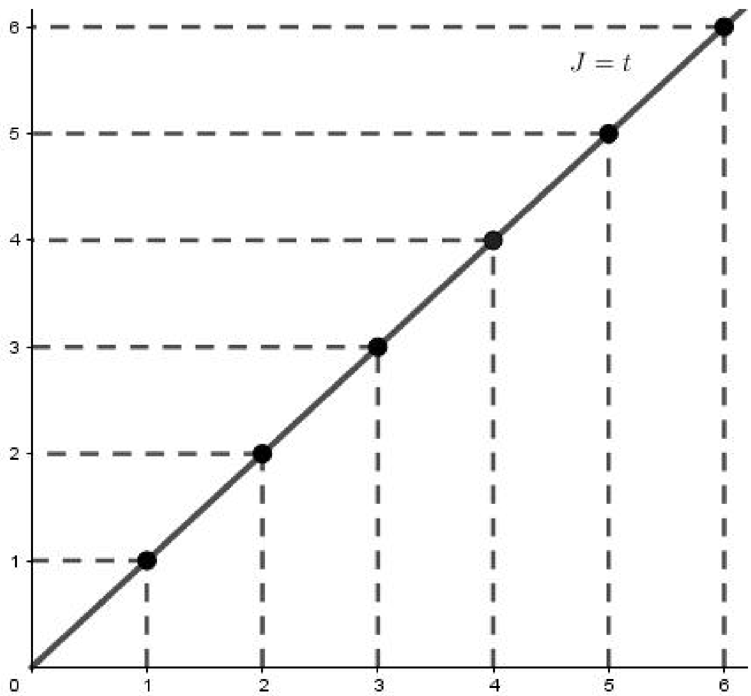


Figura 13: Gráfico da função afim

[30] Disponível em < https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc> Acesso em 09/02/2019

Pelo gráfico acima pode-se verificar que, ao final de 6 meses, o filho pagará ao pai R$ 6,00 de juros pelo empréstimo, sendo R$ 1,00 referente a cada mês.

Continuando, vamos ver alguns valores para a função afim $M = 100 + t$, conforme figura 14.

Mês	Montante
0	100,00
1	101,00
2	102,00
3	103,00
4	104,00
5	105,00
6	106,00

Figura 14: Tabela de montantes

E seu gráfico , como podemos verificar na figura 15 abaixo, também é uma reta

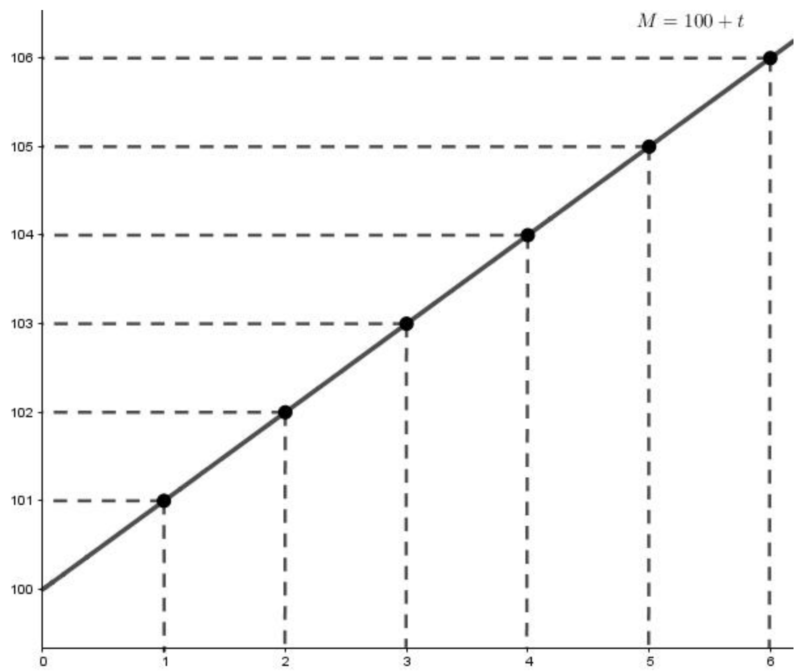


Figura 15: Gráfico da função linear

Observando o gráfico, o filho deverá pagar ao pai o montante de R$ 106,00 ao final do empréstimo, sendo R$ 100,00 do principal acrescido de R$ 6,00 de juros

Portanto, por se tratarem, respectivamente, de uma função linear e uma função afim, podemos observar que o gráfico é uma reta, onde podemos ratificar a noção de proporcionalidade, característica dos juros simples.

Agora, vamos abordar os juros simples de uma outra forma. Suponha que inicialmente tenhamos um capital *C* e esse valor seja aplicado a uma taxa de *i*%. Vejamos a variação do montante em cada período, de acordo com a figura 16.

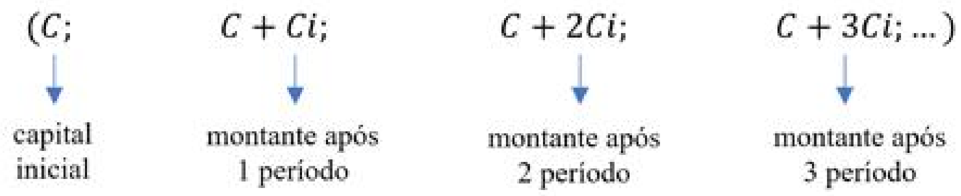


Figura 16: Progressão aritmética

Repare que a diferença entres dois montantes consecutivos quaisquer da sequência é sempre igual a Ci, que é justamente os juros da aplicação. Logo, temos que a sequência de montantes em uma aplicação em regime de juros simples é uma progressão aritmética, onde o 1° termo é o capital inicial e a razão é o juros da aplicação.

Agora que já entendemos o comportamento dos juros simples do ponto de vista algébrico e a representação geométrica de sua função característica, bem como sua relação direta com o conceito de progressão aritmética, no próximo tópico explanaremos a relação dos juros compostos com a função exponencial e a progressão geométrica. Por serem os juros compostos utilizados prevalentemente no mundo das finanças, é de extrema importância que o aluno compreenda as suas aplicações.

4.2.2 JUROS COMPOSTOS COMO FUNÇÃO EXPONENCIAL E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Utilizando o regime de juros compostos, vamos determinar qual o montante (M) produzido por um capital (*C*) aplicado à taxa *i* ao final de *t* períodos, conforme figura 17 abaixo.

	Início	Juros	Montante no fim do período
1° período	C	iC	$M_1 = C + iC = C(1+i)$
2° período	M_1	iM_1	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$
3° período	M_2	iM_2	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$

Figura 17: Variação do montante no regime de juros compostos

No fim de *t* períodos, o montante será $M = C(1+i)^t$, que é uma função exponencial. Observe também que a sequência dos montantes estão em progressão geométrica, conforme figura 18.

$$(\ C\ ;\ \ C(1+i)\ ;\ \ C(1+i)^2 \ldots C(1+i)^{t-1}\ ;\ \ C(1+i)^t\ )$$

Figura 18: Progressão geométrica

A razão entres dois termos consecutivos da progressão geométrica observada é sempre igual a $(1+i)$, concluindo desta forma que o fator de atualização do montante no regime de juros compostos é a razão da progressão geométrica.

No tópico anterior, vimos a simulação do empréstimo de um pai para um filho usando regime de juros simples . A quantia emprestada foi de R$ 100,00 à uma taxa mensal de 1%. Vamos simular agora o mesmo empréstimo utilizando o regime de juros compostos acompanhando a evolução do montante mês a mês, conforme figura 19.

	Início	Juros	Montante no fim do período
1° período	100,00	1,00	101,00
2° período	101,00	1,01	102,01
3° período	102,01	1,0201	103,0301
4° período	103,0301	1,030301	104,060401
5° período	104,060401	1,04060401	105,10100501
6° período	105,10100501	1,0510100501	**106,1520150601**

Figura 19: Evolução do montante no regime de juros compostos

Substituindo os valores do capita inicial é da taxa , temos que a função exponencial característica é $M = 100(1{,}01)^t$.

Ao final de 6 meses, o filho deverá pagar ao pai o valor de aproximadamente R$ 106,15, onde R$ 100,00 é o valor do empréstimo e a diferença de R$ 6,15 são os juros. Como já era esperado, o montante do empréstimo calculado no regime de juros compostos foi maior que o calculado usando juros simples.

O gráfico da função do empréstimo no regime de juros compostos é uma curva exponencial, onde destacamos o ponto P para representar o valor de R$ 106,15 no final do 6° mês, como podemos observar na figura 20.

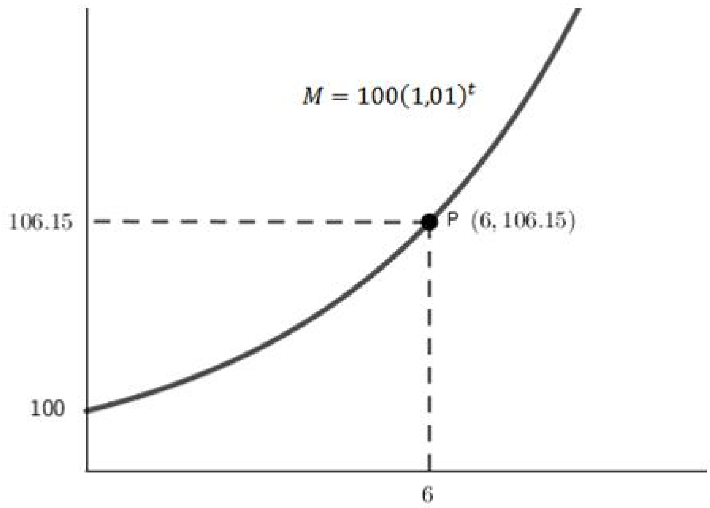


Figura 20:Função exponencial

No exemplo, a diferença foi de apenas R$ 0,15, ou seja, de aproximadamente 0,14% a mais do que quando comparado ao cálculo no regime de juros simples. Isto porque o tempo foi de apenas 6 meses, mas observe como a variação exponencial da dívida (montante) se altera significativamente ao longo de 30 anos, conforme figura 21:

Prazo	Cálculo	Montante no fim do ano
1° ano(12 meses)	$M=100(1,01)^{12}$	112,68
5° ano(60 meses)	$M=100(1,01)^{60}$	181,67
10° ano(120 meses)	$M=100(1,01)^{120}$	330,04
20° ano(240 meses)	$M=100(1,01)^{240}$	1089,26
30°ano(360 meses)	$M=100(1,01)^{360}$	**3594,96**

Figura 21: Variação exponencial do montante

Agora, comparemos com a mesma dívida no regime de juros simples, na figura 22:

Prazo	Cálculo	Montante no fim do ano
1° ano(12 meses)	M=100+12	112,00
5° ano(60 meses)	M=100+60	160,00
10° ano(120 meses)	M=100+120	220,00
20° ano(240 meses)	M=100+240	340,00
30°ano(360 meses)	M=100+360	**460,00**

Figura 22: Variação linear do montante

Enquanto que em um prazo de 6 meses a dívida ficou apenas 0,14% maior (variando de R$ 106,00 para R$ 106,15), em 30 anos a mesma dívida teve um aumento de aproximadamente de 681,5% (variando de R$ 460,00 para R$ 3.594,96).

E por fim, o gráfico das funções afim e exponencial das respectivas simulações, conforme figura 23:

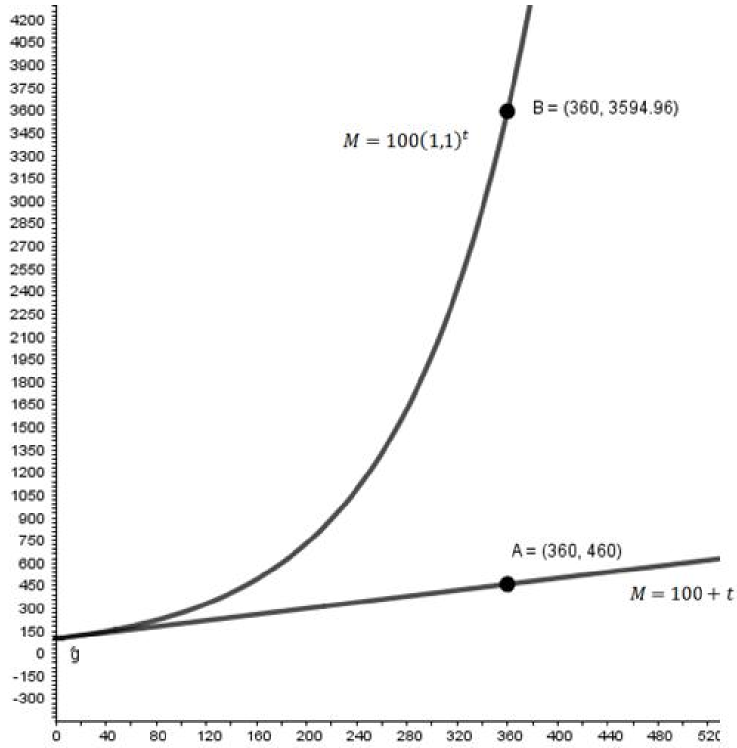


Figura 23: Gráfico das funções afim e exponencial

O poder dos juros compostos se mostra realmente avassalador (para o devedor) e enriquecedor (para o credor) quando consideradas altas taxas de juros, como as cobradas pelas administradoras de cartão de crédito. Até 2016 (após essa data, as regras foram modificadas pelo Banco Central do Brasil), se o cliente ficasse devendo o valor da fatura do cartão de crédito, deveria então pagar uma taxa de juros ao mês sobre a dívida. Caso no mês seguinte a dívida não fosse paga, os juros incidiriam sobre o novo montante, gerando um acúmulo exponencial da dívida ao longo do tempo. Segundo o Banco Central do Brasil[31], essa taxa pode chegar a até 16,28% ao mês, dependendo do tipo de cliente, conforme podemos ver na figura 24 abaixo:

[31] Disponível em < https://www.bb.com.br/docs/pub/siteEsp/dicar/dwn/tabjurosVarejo.pdf> Acesso em 12/02/2019

Clientes Pessoa Física		
TAXA DE JUROS DE CARTÃO DE CRÉDITO - ROTATIVO		
Cartões Pessoa Física (taxas para crédito rotativo/saque)	**Encargos**	
Beneficiários/ clientes	**Taxa Mensal (%)**	**Taxa Anual (%)**
Clientes com recebimento de salário ou benefício INSS no BB	15,90	487,49
Clientes com investimentos até R$ 49.999	16,28	511,03
Clientes com investimentos de R$ 50.000 a R$ 999.999	15,90	487,49
Clientes com investimentos acima de R$ 1.000.000	1,98	26,53
Cartões Platinum e Grafite	12,49	310,55
Cartões Infinite, Black e Nanquim	9,10	184,38

Figura 24: Taxa de juros de cartão de crédito

Para fixar as ideias, vamos simular uma dívida de R$ 1.000,00 à uma taxa de 15% ao mês ao longo de 3 anos, conforme figura 25:

Prazo	Cálculo	Montante no fim do ano
1° ano(12 meses)	$M=1000(1,15)^{12}$	5350,25
2° ano(24 meses)	$M=1000(1,15)^{24}$	28625,18
3° ano(36 meses)	$M=1000(1,15)^{36}$	**153151,81**

Figura 25: Simulação de uma dívida

Ao final de 36 meses, a dívida inicial de R$ 1.000,00 gerou um montante acumulado de aproximadamente R$ 153.151,81 . Este é um exemplo real que mostra como os juros compostos podem comprometer, às vezes de forma irreversível, as finanças de uma pessoa.

A título de curiosidade, o Banco Central do Brasil[32], desde de 2017 , com o intuito de educar financeiramente as pessoas, mudou as regras de uso do crédito rotativo. A partir desta data, se o cliente ficar devendo, só poderá utilizar o crédito rotativo durante 1 mês, devendo compulsoriamente optar por um parcelamento na próxima fatura, porém com taxas mais atrativas.

---

[32] Disponível em < https://www.bcb.gov.br/htms/estabilidade/2018_04/secao2_3.pdf> Acesso em 14/02/2019

> No âmbito da Agenda BC+, pilar “Crédito mais barato”, o BC adotou, no início de 2017, novas regras para as operações do cartão de crédito rotativo. As medidas tiveram como objetivo tornar o uso do cartão de crédito mais eficiente e mais barato, tendo em vista, principalmente, a contínua rolagem observada nos pagamentos de faturas, sem horizonte determinado para término dos empréstimos; a elevação dos custos das operações; e o elevado nível de inadimplência associado à modalidade. A Resolução do Conselho Monetário Nacional nº 4.549, de 26 de janeiro de 2017,78 implicou, objetivamente, impossibilidade de refinanciar o saldo devedor na fatura do cartão de crédito indefinidamente, incentivando o cliente a liquidar ou a parcelar a obrigação, ou mesmo a buscar modalidades mais baratas para o financiamento do saldo do cartão de crédito rotativo, caso não tenha condições de liquidá-lo na fatura subsequente. Em complemento, a Carta Circular BC nº 3.816, de 20 abril e 2017, regulamentou o montante a ser pago a cada vencimento da fatura pelo cliente.

4.2.3 TAXAS EQUIVALENTES COM ENFOQUE ALGÉBRICO

Vimos anteriormente que taxas equivalentes são aquelas que produzem os mesmos montantes quando aplicadas ao mesmo capital em um mesmo intervalo de tempo. Se considerarmos o regime de juros simples, a taxa equivalente procurada, capitalizada em um período de tempo diferente da taxa dada será sempre proporcional ao período de capitalização da taxa dada. Por exemplo: uma taxa de 12% ao ano capitalizada mensalmente no regime de juros simples será equivalente a uma taxa de 1% ao mês.

Porém, quando estamos diante dos juros compostos, a taxa equivalente procurada capitalizada em um período de tempo diferente da taxa dada não é proporcional à taxa dada.

No mercado financeiro é comum encontrarmos aplicações onde a taxa dada difere de seu período de capitalização (taxa nominal). Muitas vezes quer se descobrir a taxa equivalente referente ao período de capitalização.

Seja um capital C aplicado no regime de juros compostos no período de 1 ano, capitalizado anualmente a uma taxa efetiva i_a , gerando ao final um montante M_1 e o mesmo capital C aplicado no mesmo período de 1 ano, porém capitalizado mensalmente a uma taxa efetiva i_m, gerando ao final um montante M_2 .Para que as taxas i_a e i_m sejam equivalentes, então os montantes M_1 e M_2 devem ser iguais, então:

$$C(1+i_a)^1 = C(1+i_m)^{12}$$

Logo, conclui-se que em $(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$.

Generalizando, para converter quaisquer taxas efetivas dadas em taxas equivalentes em quaisquer períodos:

$$(1 + i_k)^d = (1 + i_d)^k, \text{ onde:}$$

$k = prazo\ procurado$

$d = prazo\ dado$

$i_k = taxa\ para\ o\ prazo\ procurado$

$i_d = taxa\ para\ o\ prazo\ dado$

Para exemplificar, vamos obter a taxa equivalente diária de rendimento de um investimento feito em um título da dívida pública chamado Tesouro Selic. Neste investimento, a taxa de juros efetiva fornecida é anual, mas a capitalização é diária. Segundo o Banco Central do Brasil[33], a taxa Selic atual é de 6,5% ao ano.

Temos que $(1 + i_k)^d = (1 + i_d)^k$, onde :

$k = 1$

$d = 365$

$i_k = ?$

$i_d = 6{,}5\%$

Logo, $(1 + i_k)^{365} = (1 + 0{,}065)^1 \rightarrow i_k = \sqrt[365]{1{,}065} - 1 = 0{,}000173 \cong 0{,}0173\%$

Com isso, a cada dia, o capital renderá aproximadamente 0,0173% e, num prazo de 365 dias, o montante produzido será igual ao mesmo montante se o capital fosse capitalizado uma única vez à taxa de 6,5 % no mesmo prazo de 1 ano.

Após termos tratado dos principais conceitos que gerem o mundo das finanças, o próximo passo será dotar o aluno de conhecimentos de estatística básica para que,

[33] Disponível em< https://www.bcb.gov.br/> Acesso em 13/02/2019

juntamente com os conhecimentos adquiridos de matemática financeira, possa realizar as atividades de educação financeira propostas no último capítulo deste trabalho.

5. TRATAMENTO ESTATÍSTICO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO BÁSICO

O núcleo composto da aritmetização e de algebrização está ainda no diálogo da Matemática Financeira com a própria matemática. Nos dias atuais nota-se uma lacuna, que é justamente a ausência do diálogo entre o letramento estatístico e o letramento financeiro. Como então fazer essa conexão em uma era de tanta incerteza? Como propor um diálogo de uma análise exploradora de dados, onde a coleta e a organização de dados podem ajudar na tomada de decisão na gestão pessoal de gastos financeiros?

Esse capítulo tem como objetivo inserir o aluno no século XXI, uma era dinamicamente temporal regida fortemente pelo acaso e, como veremos, a Estatística se mostrará como uma ferramenta poderosa e essencial na tomada de decisões em ambiente de incerteza.

Iniciaremos o capítulo explanando os principais conceitos e definições a respeito da Estatística.

5.1 O QUE É ESTATÍSITCA?

A Estatística é um ramo da Matemática Aplicada que está presente em praticamente todas as áreas da ciência e tem como principal premissa otimizar a tomada de decisão após a coleta, organização e análise de dados. Tem como estratégia básica a síntese de informação com o objetivo de reconhecer padrões relevantes, sobretudo em dados de alta dimensão, denominados Big Data.

A Estatística, por sua vez, pode ser classificada em dois tipos:

- Descritiva ou Dedutiva: Encarregada das primeiras etapas do processo estatístico, ou seja, a coleta, a organização e a apresentação dos dados.
- Indutiva ou Inferencial: Responsável pela etapa final do processo estatístico, onde será de fato tomada a decisão.

Alguns conceitos da Estatística são fundamentais para o entendimento estrutural dessa ciência, que, embora construída no seio da Matemática, tem suas especificidades de raciocínio e heurísticas.

5.2 POPULAÇÃO

É o conjunto de onde desejamos extrair as informações. Também pode ser chamado de Conjunto Universo. Como exemplo, suponha que será feita uma pesquisa no bairro da Urca sobre a preferência do time de futebol de cada entrevistado. Neste caso, a população será os moradores do bairro da Urca.

5.3 CENSO

No exemplo supracitado, suponha que todos os moradores do bairro da Urca sejam entrevistados. Neste caso, estará sendo realizado um Censo, ou seja quando a pesquisa abrange toda a população. Um exemplo é o Censo populacional realizado a cada dez anos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

5.4 AMOSTRAGEM

É um estudo estatístico onde apenas um subconjunto da população será considerado. Nas pesquisas eleitorais é o modelo mais utilizado, visto que não há tempo nem logística hábil para se realizar um censo. Neste caso, um grupo de pessoas escolhidas aleatoriamente será eleito como represente da população.

A título de curiosidade, há algumas razões notórias para adotar a amostragem ao invés do censo, das quais podemos destacar algumas.

- População muito grande: Como já citado anteriormente, em uma pesquisa eleitoral, é inviável entrevistar a todos.

- Economia de gastos: Quanto menos pessoas forem entrevistadas menor será o custo com despesas.

- Pressa nos resultados: Em muitos casos deseja-se atualizar com mais frequência os resultados das pesquisas. Mais uma vez podemos citar a pesquisa eleitoral, onde as atualizações raramente passam de dois dias.

- Destrutividade do objeto de pesquisa: Como exemplo, podemos citar uma empresa automobilística que deseja realizar testes de colisão a fim de testar a eficiência dos *airbags*.

5.5 VARIÁVEL

Variável estatística, ou simplesmente variável, é o objeto da pesquisa, ou seja, o que estamos investigando. Podem ser classificas em dois grupos.

- **Variáveis qualitativas**: Quando os valores são expressos por atributos ou qualidades, como por exemplo: grau de instrução, sexo, cor da pele, cor dos olhos, estado civil, naturalidade, etc.

Quando a variável qualitativa admitir uma hierarquia ela é chamada de ***ordinal***. Como exemplo, podemos citar a variável grau de instrução, que admite uma ordenação natural (analfabeto, ensino básico completo, ensino superior completo).

Quando a variável qualitativa não admitir uma ordenação ela é chamada de ***nominal***, como por exemplo, cor dos olhos (azuis, castanhos, verdes).

- **Variáveis quantitativas**: Quando os valores são expressos por números. São exemplos: renda salarial, número de filhos, estatura, etc.

Quando a variável quantitativa admitir apenas um número contável de valores num conjunto de pontos isolados, ela é chamada de ***discreta***. Na maioria dos casos, variáveis discretas admitem valores inteiros como resposta. São variáveis quantitativas discretas: número de filhos e saldo de gols de uma partida de futebol, por exemplo.

Se a variável quantitativa puder assumir qualquer valor dentro de um intervalo ela é chamada de ***contínua***. Variáveis quantitativas contínuas admitem valores fracionários, como por exemplo, temperatura (26,5°C) e massa (76,54 Kg).

Resumindo, de acordo com a figura 26:

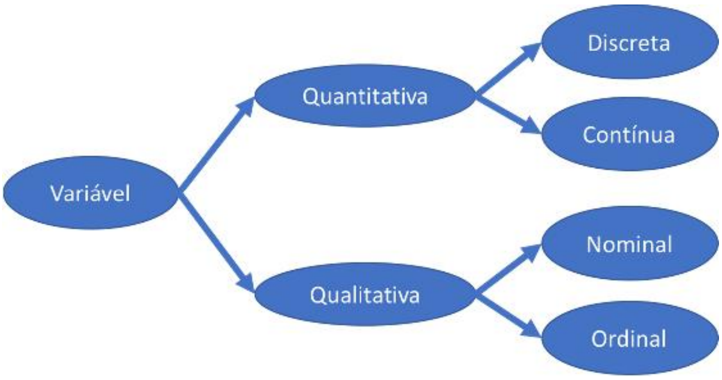


Figura 26: Classificação das Variáveis

5.6 DADOS BRUTOS E ROL

São os dados coletados da pesquisa sem que tenham sofridos qualquer tipo de ordenação, ou seja, os dados estão ainda não lapidados e estão dispostos aleatoriamente. A figura 27 abaixo é um exemplo de uma pesquisa fictícia da idade de alunos do 7° ano de um escola onde ainda os dados são brutos.

13	12	12	13	12
11	11	13	12	13
12	14	11	12	11

Figura 27: Dados brutos

Uma importante etapa do processo estatístico consiste em ordenar os dados. Quando esses dados estão dispostos de forma crescente ou decrescente dizemos que estão em ***rol***. Essa ordenação não só facilita a interpretação dos dados como é essencial para determinar, por exemplo, a mediana de um conjunto de dados, conforme veremos adiante.

A figura 28 abaixo dispõe os dados da tabela da figura 27 em rol crescente.

11	11	12	12	13
11	12	12	13	13
11	12	12	13	14

Figura 28: Dados em rol crescente

5.7 SÉRIES ESTATÍSTICAS

São tabelas que explicitam o resultado de uma pesquisa estatística, ou seja, um modo de apresentar os dados de forma tabulada. Em uma série estatística são imprescindíveis a presença de três elementos: o objeto estudado, o local e a época. Uma maneira simples e objetiva de identificar uma série estatística é verificar se ela responde a perguntas do tipo: O quê? Quando? Onde?. Importante ainda ressaltar é que em uma série apenas um dos elementos sofrerá variação enquanto que os outros permanecerão inalterados.

As séries estatísticas podem ser classificadas em: séries históricas, séries geográficas, séries específicas e distribuição de frequências, de acordo com elemento que sofrerá variação.

5.7.1 SÉRIES HISTÓRICAS

Também conhecidas por temporais, cronológicas ou de marcha, são as séries onde a época é o elemento que sofrerá alteração, permanecendo fixos a descrição do fenômeno e o local, conforme exemplo fictício da figura 29 abaixo:

PRODUÇÃO DE CAFÉ (COLÔMBIA)

Anos	Quantidade (em toneladas)
1986	14.107.435
1987	15.200.345
1988	18.345.324
1989	16.256.257

Figura 29: Exemplo fictício de série histórica

Repare que na figura 29, o objeto estudado está bem definido (produção de café), o local é fixo (Colômbia), mas a época varia de 1986 à 1988. Logo, pode-se concluir que se está diante de uma série histórica.

5.7.2 SÉRIES GEOGRÁFICAS

São as séries onde o elemento variável é o local e os elementos fixos são o tempo e descrição do fenômeno. São comumente chamadas também de séries territoriais, especiais ou de localização. No site do Instituto de Pesquisa de Relações Internacionais[34], IPRI, está disponibilizada uma série geográfica que retrata as 15 maiores economias do mundo, das quais destacamos as cinco maiores na figura 30 logo abaixo.

Produto Interno Bruto (PIB), em bilhões de US$, 2016

#	País	US$ bilhões
1º	Estados Unidos	18.569,10
2º	China	11.218,28
3º	Japão	4.938,64
4º	Alemanha*	3.466,64
5º	Reino Unido	2.629,19

Figura 30: PIB das 5 maiores economias do mundo

5.7.3 SÉRIES ESPECÍFICAS

São as séries onde a descrição do fenômeno sofrerá alteração , porém o local e o tempo permanecerão fixos. Veja um exemplo fictício de uma série específica na figura 31 logo abaixo:

NÚMERO DE ALUNOS FORMANDOS NA UFRJ

Cursos	N° de alunos
Direito	150
Matemática	112
Economia	145

Figura 31: Exemplo fictício de série específica

[34] Disponível em < http://www.funag.gov.br/ipri/index.php/o-ipri/47-estatisticas/94-as-15-maiores-economias-do-mundo-em-pib-e-pib-ppp> Acesso em 19/11/2018

5.7.4 DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS

Neste tipo de série, os dados são ordenados em classes ou intervalos, segundo um determinado critério de magnitude, onde o fato, local e a época permanecem invariáveis. Por ser uma das mais importantes séries estatísticas, voltaremos a falar oportunamente nela mais adiante, quando será detalhado melhor o assunto.

Outro tipo de série também encontrada em estudos estatísticos são as chamadas Séries Conjugadas, também denominadas Mistas ou Compostas. São séries que resultam de uma combinação de duas ou mais séries já vistas anteriormente.

5.8 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE DADOS ESTATÍSTICOS

O uso de tabelas não é o único recurso disponível para apresentar os dados de uma pesquisa. Dependendo do que se pretende mostrar, a representação gráfica é um artifício que melhora consideravelmente a comunicação, dando à pesquisa maior clareza e objetividade.

Há inúmeras formas de se representar graficamente os elementos de uma pesquisa, muitos dos quais fogem ao objetivo deste trabalho. Neste caso, daremos maior relevância a quatro tipos: barras ou colunas, linhas, setores e histograma. Dependendo do tema abordado e das características das informações dos dados, a escolha do gráfico adequado será, não só relevante, como essencial para o sucesso na compreensão da pesquisa realizada.

5.8.1 GRÁFICOS DE BARRAS E COLUNAS

O uso destes gráficos são recomendados para comparar quantidades ou variações no tempo. Como o próprio nome diz, são utilizados retângulos verticais ou horizontais, cujas medidas de suas bases são fixas e suas alturas proporcionais aos dados. Nas figuras 32 e 33 abaixo exemplificamos gráficos fictícios de colunas e barras, respectivamente.

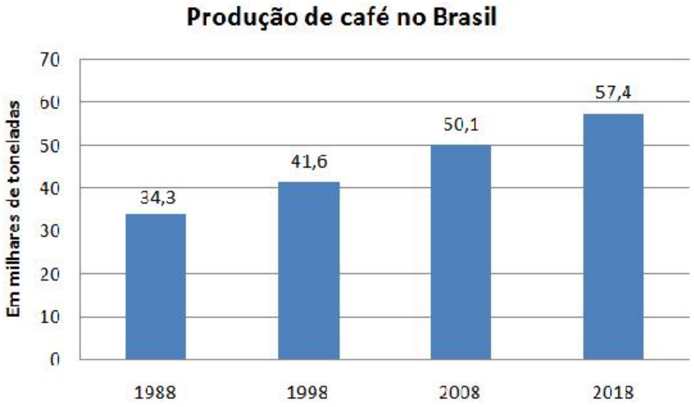


Figura 32: Exemplo fictício de gráfico de colunas

Figura 33: Exemplo fictício de gráfico de barras

5.8.2 GRÁFICOS DE LINHAS

São gráficos utilizados normalmente em séries temporais, pois possibilita avaliar com mais clareza a evolução de um fenômeno ao longo do tempo. É de costume, porém não obrigatório, dispor a variação dos dados no eixo *y* do plano cartesiano e a variação temporal no eixo *x*. O gráfico de linhas da figura 34 abaixo foi construído de acordo com a tabela[35] disponível no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, o IBGE. Ele explicita a variação do Índice Nacional de Preços ao Consumidor, o IPCA, de 1995 à 2017.

[35]Disponível em < https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?=&t=series-historicas> Acesso em 22/11/2018

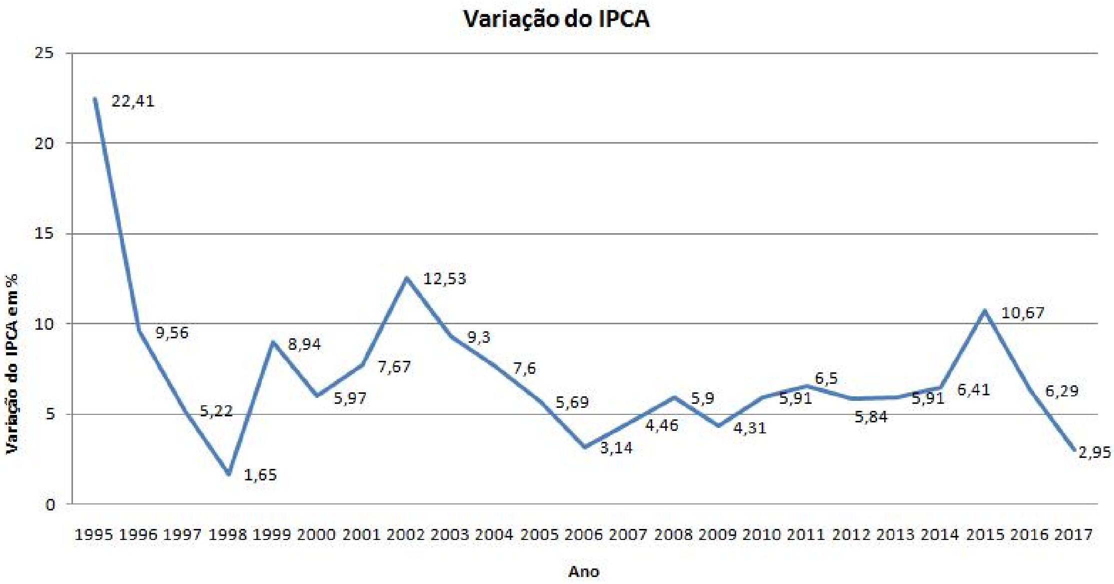


Figura 34: Variação do IPCA entre 1995 e 2017

5.8.3 GRÁFICOS DE SETORES

Gráficos de setores são ideais quando se deseja comparar valores parciais com o total. São representados por um círculo dividido em setores, onde cada setor apresenta dados proporcionais aos valores que representam em comparação ao total. Usando uma regra de três simples, estabelece-se a região ocupada por determinado valor:

$$100\% \underline{\hspace{3cm}} 360°$$

$$x\ \% \underline{\hspace{3cm}} n \text{ graus}$$

É importante observar que a soma dos ângulos dos setores circulares deverá sempre corresponder a 100% dos dados, que por sua vez deverá ser equivalente ao ângulo total de 360° do círculo.

Como exemplo, a figura 35 abaixo mostra o gráfico de setores de uma pesquisa hipotética realizada com 2000 pessoas.

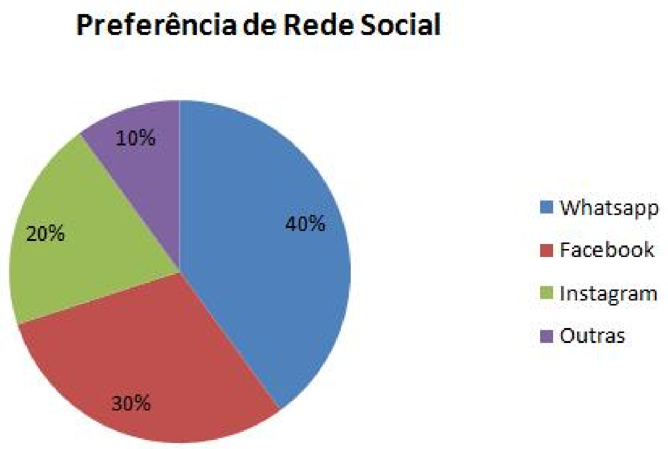


Figura 35: Exemplo fictício de gráfico de setores

Até este ponto do capítulo, o aluno já terá à sua disposição uma gama razoável de conhecimentos de representação gráfica estatística que já será de grande utilidade para que ele possa, além de interpretar dados de uma forma mais confiante, também tomar decisões mais acertadas.

No próximo item, nos pautaremos no tratamento das principais medidas de posição e dispersão, para dar exatamente um suporte para a proposta deste trabalho, que é contribuir com a Educação Financeira via síntese de informação pela Estatística, de forma a ratificar exatamente a nova proposta do BNCC.

5.8.4 HISTOGRAMA

O Histograma é um gráfico destinado à representar distribuições de frequências e é útil para representar dados agrupados em classes. Através deste tipo de gráfico haverá sempre uma perda de informações, visto que na distribuição de frequências trabalharemos com classes e não mais com elementos dispostos individualmente. O histograma é considerado um gráfico fundamental no estudo das variáveis contínuas, pois é através dele que será possível obter um valor modal, visto que em um conjunto de dados contínuos é baixa a probabilidade de encontramos repetição de valores.

No histograma, as classes estarão representadas por retângulos, uma para cada classe, dispostos verticalmente e sem espaços entres eles. As bases destes retângulos estão margeadas pelos limites das classes(inferior e superior) e suas alturas serão determinadas pela frequência absoluta, relativa ou densidade de cada classe.

Para fixar as ideias, suponha, como exemplo, que em uma empresa que fabrica motores para carros foi detectado um problema associado à variação do tamanho de uma peça essencial ao funcionamento deste motor. Desta forma , foram inspecionados 100 motores a fim de medir o tamanho desta peça , cujos valores, em milímetros, estão tabelados abaixo.

4,8	4,2	5,1	5,2	4,8	4,7	4,9	4,5	4,9	4,5
4,9	5,1	4,8	4,9	4,8	5	5,3	4,9	5,5	5,2
5,1	4,6	4,9	4,8	5,1	4,6	4,3	4,9	4,7	5,2
4,8	4,4	5,6	5	5	5	4,8	5,2	4,5	5,1
5,1	4,9	4,8	4,8	5	4,8	5,1	5,4	4,2	5,1
4,9	4,6	5,4	4,9	4,3	4,6	4,7	4,7	5,3	4,4
4,7	4,8	5,2	4,5	5,1	4,6	5,8	4,9	5,2	4,8
4,9	4,9	4,4	4,7	4,8	5,1	5,4	5	4,4	5,1
4,9	4,9	5,1	5,2	4,7	4,8	4,6	5,2	5,5	5,2
4,2	4,9	4,9	4,8	4,2	5,2	4,7	4,8	4,6	5,2

Como faríamos para calcular a moda desta distribuição agrupadas em classe? Primeiramente agruparemos os dados em classes. O número de classes (k) pode ser definido de várias formas, mas em nosso exemplo, utilizaremos a fórmula de Sturges, onde n é o número de observações:

$$k = 1 + 3{,}3.\log(n)$$

Substituindo, temos:

$$k = 1 + 3{,}3.\log(100) = 1 + 3{,}3.10 = 7{,}6$$

A amplitude de cada classe usualmente é determinada efetuando-se a divisão entre a amplitude da amostra(diferença entre a maior e a menor observação) e o número de classes. Em nosso exemplo, o maior valor observado é 5,8 e o menor, 4,2. Portanto , a amplitude da classe é $\frac{(5{,}8-4{,}2)}{8} = \frac{1{,}6}{8} = 0{,}2$. Veja abaixo como ficarão os dados agrupados em classes, onde explicitaremos as frequências absolutas, relativas, acumuladas e o ponto médio de cada uma das classes:

Classe	Frequência absoluta	Freq. relativa	Freq. acumulada	Ponto Médio
4,2 ├ 4,4	6	0,06	6	4,3
4,4 ├ 4,6	8	0,08	14	4,5
4,6 ├ 4,8	15	0,15	29	4,7
4,8 ├ 5	33	0,33	62	4,9
5 ├ 5,2	18	0,18	80	5,1
5,2 ├ 5,4	13	0,13	93	5,3
5,4 ├ 5,6	5	0,05	98	5,5
5,6 ├ 5,8	2	0,02	100	5,7

Analisando a tabela, podemos observar que a classe onde ocorre o maior número de observações é a classe 4,8 ├ 5 . Logo, podemos concluir que esta á e classe modal. Para determinarmos a moda , utilizaremos as seguintes fórmulas:

$$Mo = L + \left(\frac{D1}{D1+D2}\right).h \quad , \quad D1 = fmo - fant \quad e \ D2 = fmo - fpost,$$ onde:

$$Mo = moda$$
$$h = amplitude\ da\ classe\ modal$$
$$L = limite\ inferior\ da\ classe\ modal$$
$$fmo = frequência\ absoluta\ da\ classe\ modal$$
$$fant = frequência\ absoluta\ da\ classe\ anterior\ à\ classe\ modal$$
$$fpost = frequência\ absoluta\ da\ classe\ posteior\ à\ classe\ modal$$

No nosso exemplo temos que:

$$h = 5 - 4{,}8 = 0{,}2$$
$$L = 4{,}8$$
$$fmo = 33$$
$$fant = 15$$
$$fpost = 18$$

Portanto: $D1 = 33 - 15 = 18 \quad e\ D2 = 33 - 18 = 15.$

Então, $Mo = L + \left(\frac{D1}{D1+D2}\right).h \quad \rightarrow Mo = 4{,}8 + \left(\frac{18}{18+15}\right).0{,}2 = 4{,}8 + \frac{18}{33}.\frac{2}{10} \cong \mathbf{4{,}9}$

Finalmente, com a ajuda do software excel, temos o histograma na figura 36:

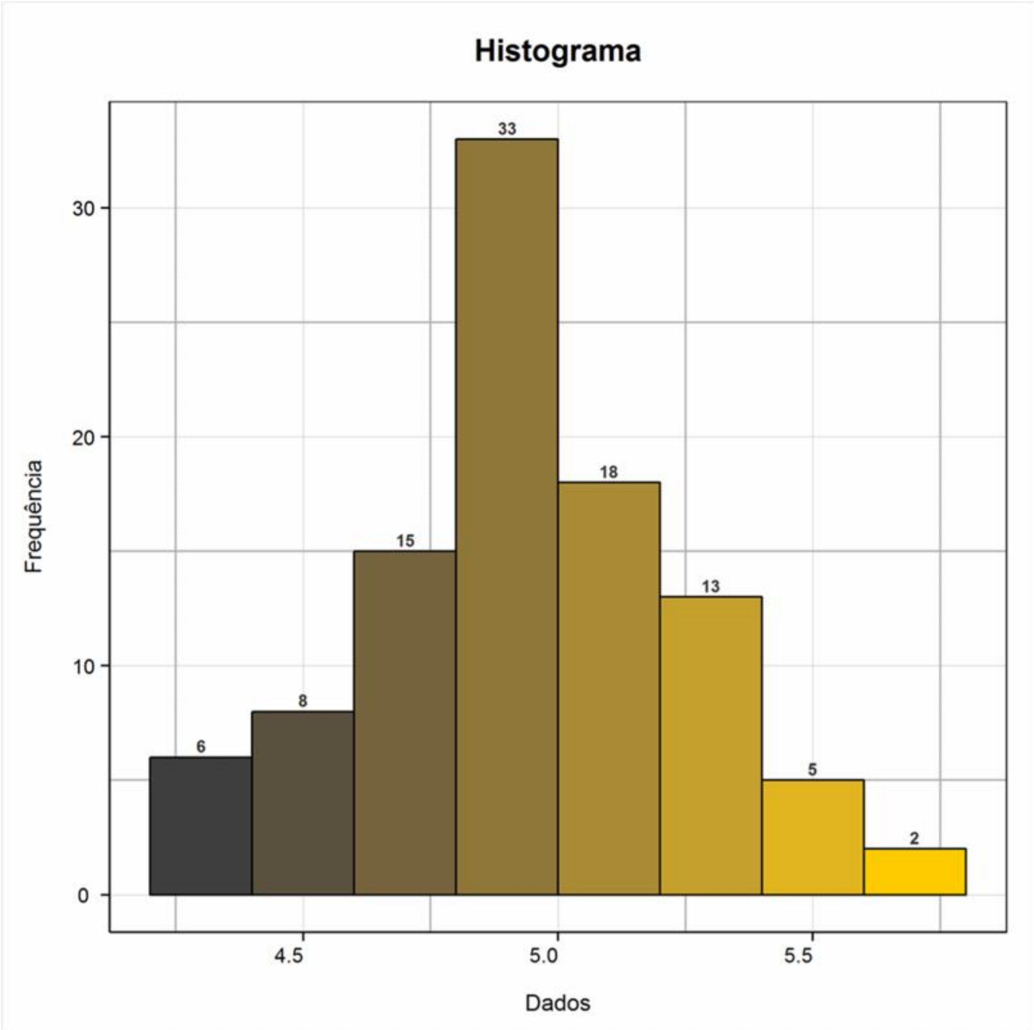


Figura 36: Histograma

Inúmeras informações podem ser extraídas da análise de um histograma ,mas omitiremos por fugir ao objetivo principal deste trabalho.

5.9 MEDIDAS DE POSIÇÃO E DISPERSÃO

As medidas de posição e dispersão constituem um resumo do conjunto dos dados observados. Enquanto que as de posição representam os dados através de valores médios, as de dispersão avaliam o grau de variabilidade dos dados em torno de alguma medida de centralidade, em geral a média.

5.9.1 MEDIDAS DE POSIÇÃO

As medidas de posição, também conhecidas por medidas de localização ou medidas de tendência central, têm como objetivo fazer uma síntese dos dados de forma a serem representados por apenas um único valor, este localizado entre os valores máximo e mínimo observados no conjunto.

Dentre as medidas de posição, podemos destacar as principais utilizadas na Estatística: a média aritmética, a mediana e a moda. Não menos importantes, porém não abordadas neste trabalho, são os quartis e as média harmônica, quadrática e geométrica, sendo cada uma delas aplicadas em situações específicas, tais como taxas de rendimento em investimentos, geometria plana e espacial , fenômenos físicos, etc.

5.9.1.1 MÉDIA ARITMÉTICA

Seja um conjunto contendo n valores de uma variável quantitativa representado por $\{ x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n\}$, onde $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ são os valores observados. A média aritmética dos valores deste conjunto é definida como o valor $\bar{x}$ que pode substituir todos os elementos deste conjunto de forma a preservar a soma, ou seja, $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n = \bar{x} + \bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x}$.

Como $\bar{x}$ foi somado n vezes, temos que $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n = n.\bar{x}$. Logo:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Se todos os valores observados forem iguais, por exemplo, iguais a k, temos um caso particular onde $\bar{x} = k$, pois $\bar{x} = \frac{n.k}{n} = k$.

Importante observar que a média deve cumprir a função de representatividade dos elementos do conjunto, mas embora esteja entre os valores extremos, não necessariamente é um elemento do conjunto.

Em muitos casos, a média pode não ser uma boa representação da distribuição, como por exemplo, quando há valores muito atípicos. Suponha que em uma escola 2 alunos ficaram de recuperação e deverão fazer uma prova final, cuja nota mínima para aprovação deverá ser 5,0. Se a nota desses alunos forem 1,0 e 9,0, respectivamente, então a média das provas de recuperação será $\frac{1,0+9,0}{2} = 5,0$. Repare que se não soubéssemos as notas, mas tivéssemos apenas a informação da média, seria impossível saber se os dois alunos foram aprovados, pois a soma das duas notas sendo igual a 10,0 garantiria a aprovação de no mínimo um dos alunos.

Para contornar essas situações, devemos analisar outras medidas para complementar o estudo de caso.

A figura 37 abaixo, construída no software de computação algébrica *wolframalpha*[36], exemplifica as possibilidades da variação das notas dos dois alunos, representadas respectivamente pelas letras variáveis *x* e *y*, onde x e y variam em um domínio contínuo de 0 a 10.

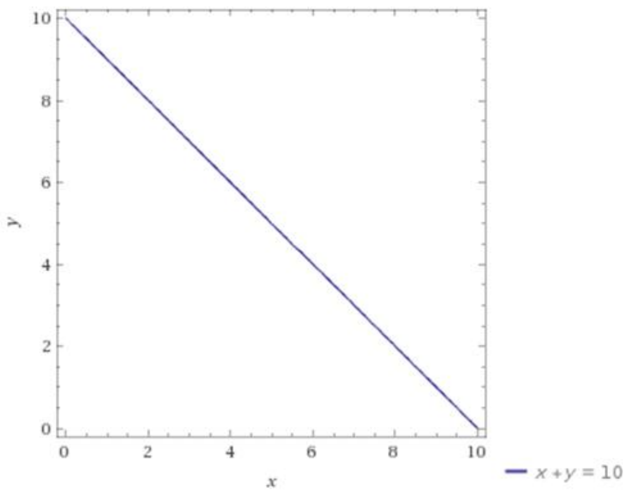


Figura 37: Variação das notas dos alunos

[36] Disponível em < https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%2By%3D10,+0%3Cx%3C10+and+0%3Cy%3C10> Acesso em 04/12/2018

5.9.1.2 MEDIANA

A mediana é o valor que ocupa a posição central (ou a média dos dois elementos centrais) da distribuição após a mesma já ter sido ordenada em rol crescente ou decrescente. Se o conjunto observado tiver um número n ímpar de elementos, a mediana ocupará a posição $\frac{n+1}{2}$ e seu valor é definido como $x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. Caso n seja par, então a mediana será a média aritmética dos termos de posição $\frac{n}{2}$ e $\frac{n+1}{2}$, ou seja a média dos valores $x_{\left(\frac{n}{2}\right)}$ e $x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Como exemplos, se $n = 7$, então a mediana ocupará a quarta posição e seu valor é representado por $x_{(4)}$. Se $n = 12$, a mediana será dada pela média dos valores que ocupam a sexta e sétima posições, ou seja, a média dos valores $x_{(6)}$ e $x_{(7)}$.

Se por um lado a média é afetada por valores atípicos, ou seja, aqueles que estão mais afastados que a maioria dos dados, a mediana, por sua vez, é uma medida robusta, no sentido em que é pouco afetada para valores extremos.

Considere, por exemplo, os seguintes conjuntos de dados $D_1 = \{2, 2, 8, 18, 20\}$ e $D_2 = \{2, 2, 8, 18, 20, 202\}$. A média dos dados de D_1 é $\bar{x} = \frac{50}{5} = 10$ e a mediana é igual a 8. Neste caso, tanto a média quanto a mediana são valores que representam bem o conjunto de dados D_1, visto que os dados não estão muito afastados da média e da mediana. Em contrapartida, a média dos dados de D_2 é $\bar{x} = \frac{252}{6} = 42$ e a mediana é igual a $\frac{8+18}{2} = 13$. É visível, neste caso, que a média carece de representatividade na distribuição D_2, visto que a mesma é muito afetada devido à presença do dado discrepante 202. Já a mediana se mostra mais estável, sofrendo pouca variação, de 8 para 13.

Porém, há ainda casos onde a média e a mediana coincidem e, a fim de se compreender melhor os dados , se faz necessário obter mais informações.

5.9.1.3 MODA

A moda é a observação (ou as observações) mais frequente(s) em um conjunto de dados. Se os valores observados forem todos diferentes, diz-se que a distribuição é amodal. Se apenas um valor é o mais observado, a distribuição é dita unimodal. Se houver dois valores modais, a distribuição é dita bimodal e, acima de três modas, multimodal (ou plurimodal). É mais frequente observarmos distribuições não amodais em quantitativos discretos, pois em dados contínuos é mais comum agrupar os dados em intervalos de classe a fim de identificar um intervalo de classe modal, onde a moda, neste caso, pode ser calculada como o ponto médio do intervalo de classe identificada, ou então por meio de uma estrutura geométrica.

5.9.2 MEDIDAS DE DISPERSÃO

As medidas de dispersão são indicadores estatísticos utilizados para determinar o grau de variação dos dados de um conjunto. A utilização destes parâmetros torna a análise de dados mais confiável, visto que nem sempre as medidas de posição explicita o quão homogêneo são estes dados dentro do conjunto.

Como exemplo, suponha que as notas bimestrais de 3 alunos de três turmas sejam as seguintes: $T_1 = \{5, 5, 5\}$, $T_2 = \{4, 5, 6\}$ e $T_3 = \{0, 5, 10\}$. As respectivas médias e medianas das três turmas são iguais a 5. Se só tivéssemos acesso às médias, modas e medianas dessas três turmas, não poderíamos concluir nada a respeito do desempenho individual destes alunos. Neste caso, as medidas de tendência central são parâmetros insuficientes e se faz necessário estudar com mais detalhes o modo como estas notas estão distribuídas em relação às medidas centrais. Para isso, apresentaremos à seguir as principais medidas de dispersão: amplitude total, variância e o desvio padrão.

5.9.2.1 AMPLITUDE TOTAL

Esta medida é definida como a diferença entre o maior valor e o menor valor observado em um conjunto de dados. No exemplo citado anteriormente, temos.

$$T_1 = \{5,5,5\} \rightarrow Amplitude = 5 - 5 = 0$$

$$T_2 = \{4,5,6\} \rightarrow Amplitude = 6 - 4 = 2$$

$$T_3 = \{0,5,10\} \rightarrow Amplitude = 10 - 0 = 10$$

Cabe observar que, pelo fato de termos a amplitude de $T_3 = 10$, pode-se garantir que houve uma nota 10 e uma nota 0, conclusão esta que não poderíamos chegar somente analisando as medidas de posição. Analisando a amplitude de $T_1 = 0$, também pode-se concluir que há no mínimo dois valores iguais, ou seja, que se trata de uma distribuição unimodal.

5.9.2.2 VARIÂNCIA

A fim de estabelecer a estrutura da variância, é importante que seja definido o conceito de Desvio da Média.

O Desvio da Média pode ser definido como sendo a diferença entre cada valor observado em um conjunto de dados e a média dos dados do conjunto.

$$d_i = x_i - \bar{x}, i = 1,2,3 \dots n$$

Tirando o fato de quando todos os valores são iguais, os desvios da média poderão ser valores positivos ou negativos e uma vez que a soma dos desvios médios de qualquer conjunto de dados é sempre igual a zero, impossibilita utilizá-lo como uma medida de dispersão. Uma forma de contornar essa situação, ou seja, de eliminar o sinal negativo das parcelas negativas, é elevar esses valores ao quadrado. Ao fazer isso, temos a definição de variância populacional, que é a média dos desvios das médias elevados ao quadrado.

$$Variância = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

E no caso da variância amostral:

$$Variância = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

A divisão por *n* – 1 no caso da variância amostral tem uma justificativa no seio da Teoria da Estimação, pois diz respeito ao fato de que a média de todas as variâncias amostrais de tamanho *n* calculadas pela divisão de *n* – 1 (ao invés de *n*) equivalerá ao valor da variância populacional, o que se denomina por um estimador não tendencioso, ou não viesado, ou não viciado, na Teoria Estatística.

Uma outra forma de eliminar os valores negativos seria tomar os valores absolutos dos desvios médios. Porém, por motivos que fogem ao escopo deste trabalho, nos apropriaremos apenas desta abordagem do conceito de variância.

Observe que o resultado da variância não está mais na mesma escala de mensuração original dos dados. Assim, se os dados eram medidos em cm então a variância será expressa em cm^2. O desvio médio, dado pela média dos módulos dos desvios da média, tem a vantagem de preservar a escala original de mensuração, mas não é muito usado na Estatística por não possuir boas propriedades probabilísticas e estatísticas.

Para retornar à escala original de mensuração dos dados e medir sua variabilidade, temos o conceito de desvio padrão a seguir.

5.9.2.3 DESVIO PADRÃO

O desvio padrão é definido como sendo a raiz quadrada da variância:

$$Desvio\ padrão = \sqrt{Variância}$$

Ou seja, ao extrairmos a raiz quadrada da variância, obtemos o valor do desvio padrão, que é a medida de dispersão em torno da média, na mesma unidade original das observações.

5.9.3 COEFICIENTE DE VARIAÇÃO

Nem sempre um desvio padrão numericamente pequeno significa uma pequena dispersão, da mesma forma que um desvio padrão numericamente grande não indica necessariamente alta dispersão, pois tudo depende da escala média de mensuração dos dados. Medidas feitas no microscópio, por exemplo, induzirão certamente desvios padrões muito pequenos, mas estes valores podem representar alta entropia no mundo microscópico. Daí a importância da medida do coeficiente de variação dos dados, que se propõe a avaliar o desvio padrão segundo à escala média dos dados.

O coeficiente de variação CVA é a razão entre o desvio padrão e a média e usualmente é descrito em termos percentuais

$$CVA = \frac{s}{\bar{x}}.100\%$$

O coeficiente de variação serve para medir o grau de homogeneidade dos dados, ou seja, se a dispersão comparada ao valor da média é pequena, moderada ou grande. A escala da figura 38 abaixo é utilizada para avaliar o coeficiente de variação:

Faixa de valores	**Classificação**
$[0\%; 50\%[$	Dados relativamente homogêneos
$[50\%; 100\%[$	Dados heterogêneos
$\geq 100\%$	Superdispersão

Figura 38: Escala de classificação do coeficiente de variação

Por fim, acreditamos que até esse ponto tenhamos dado um norte e uma base teórica sólida para o aluno, para que ele possa desenvolver suas competências e habilidades, utilizando a estatística descritiva com um enfoque integrado com a matemática financeira.

No próximo capítulo, epicentro desse trabalho, proporemos atividades que vão desde simples tabulações de dados até análises mais complexas de gráficos, com o intuito de proporcionar ao aluno um olhar mais crítico e sensível que sejam úteis para a tomada de decisões em cenários para além de uma matemática meramente determinista.

6. A ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO FINANCEIRA DO ENSINO BÁSICO COM ENFOQUE INTEGRADO : PROPOSTAS DE ATIVIDADES

A presença de um trabalho de Educação Financeira na escola básica constitui um desafio verdadeiramente instigante, tanto para o aluno quanto para o educador. É altamente relevante um projeto de Educação Financeira ao admitir a gestão financeira como sendo parte essencial de uma educação moderna e contemporânea. Educar o cidadão, desde a infância, no contexto das finanças, associando-as a uma educação matemática é essencial em um processo onde o indivíduo possa desenvolver sua capacidade de agir em seu meio sociocultural de forma crítica, ética, participativa e criativa.

De fato, não faltam projetos interessantes e pertinentes nesta área. Porém, espera-se que este presente trabalho venha a contribuir de forma inovadora ao propor uma integração da Educação Financeira com a Estatística Descritiva, ideia esta que veio em momento oportuno ao se constatar a importância que o Estado Brasileiro deu ao reconhecer e então inserir este notável tema como eixo transversal na nova Base Nacional Comum Curricular.

Esperamos, portanto, que este capítulo possa coroar este trabalho com propostas de atividades interessantes, criativas e inovadoras, que estejam alinhadas às pretensões da Base Nacional Comum Curricular, de maneira a estimular os alunos para a utilização da Estatística como uma poderosa ferramenta de aprendizado.

6.1 ATIVIDADE 1 – FEIRA DE TROCAS: ESCAMBO

Uma das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental segundo a BNCC[37] (2017,p.267) é:

> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Segundo recomendações da BNCC[38](2017,p.267)

> É possível, por exemplo, desenvolver um projeto com a História, visando ao estudo do dinheiro e sua função na sociedade, da relação entre dinheiro e tempo, dos impostos em sociedades diversas, do consumo em diferentes momentos históricos, incluindo estratégias atuais de marketing. Essas questões, além de promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos.

E ainda, segundo a BNCC[39](2017,p.298)

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

---

[37]Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 29/12/2018

[38] Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 29/12/2018

[39] Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 29/12/2018

Logo, a proposta abaixo foi pensada de forma a atender de forma precisa aos anseios da Base Nacional Comum Curricular.

O professor, enquanto intermediador da atividade, propõe aos alunos que pesquisem previamente sobre a origem e evolução do dinheiro ao longo da história. Essa pesquisa poderá ser solicitada como tarefa para casa ou até durante a aula, dependendo dos recursos digitais disponíveis, tais como celular, computador, etc. O objetivo principal desta pesquisa é que o aluno se aproprie do conceito de escambo, para que possa depois participar da atividade proposta.

Proposta da atividade: A atividade, pensada para os alunos do 6° ano do Ensino Fundamental, consiste em desenhar baralhos com bens, do tipo carne, arroz, feijão, café, açúcar etc. para que os alunos possam fazer trocas (escambo) entre eles e entender noções de equivalência e a importância da criação do dinheiro a fim de neutralizar o juízo de valores sobre os bens. Após a feira de trocas, os alunos deverão fazer tabelas estatísticas simples de equivalência de forma a organizar e sintetizar suas experiências.

Logo abaixo, podemos ver na figura 39 um resultado esperado para esta atividade com a exemplificação de algumas cartas que podem ser criadas e na figura 40 uma tabela de equivalência criada ao final da atividade:

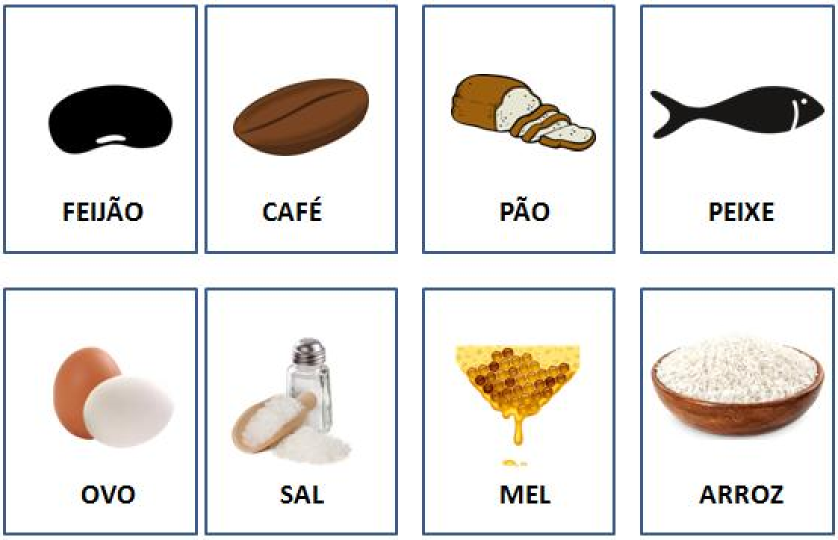


Figura 39: Baralho desenvolvido para a feira de trocas

Produto	Quantidade	Equivalência
Ovo	500 unidades	Smartphone
Sal	50 Kg	Tênis
Mel	1 L	Relógio

Figura 40: Tabela de equivalência

6.2 ATIVIDADE 2 – ANÁLISE DE CONTA DE LUZ: CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS ESTATÍSTICOS COMO AUXÍLIO NA TOMADA DE DECISÕES

Esta atividade, embora possa ser indicada para alunos de diversas etapas do ensino básico, será aqui direcionada para os alunos do 6° ano do Ensino Fundamental. Embasaremos esta proposta de acordo com a recomendação da BNCC[40](2017,p.302 e 303) , conforme figura 41 abaixo:

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Probabilidade e estatística	Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas
	Coleta de dados, organização e registro Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações
	Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas

Figura 41: Objetos de conhecimento para Estatística no 6° ano

40 Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 29/12/2018

Proposta da atividade: A atividade tem como objetivo fazer uma análise da conta de luz com o intuito de extrair dela dados relevantes à respeito do consumo. Espera-se que com isso o aluno aprenda a tomar decisões conscientes e desenvolva um senso de responsabilidade ambiental e de sustentabilidade, assim como compreender os impactos financeiros a curto, médio e longo prazos ocasionados por falta de informação e planejamento ou até mesmo fruto de negligência e irresponsabilidade. Para isso, o aluno utilizará a estatística como uma poderosa ferramenta, pois terá a oportunidade de manipular dados brutos e organizá-los em rol , construir tabelas e, bem como aprender a ler, extrair informações e tomar decisões acertadas com os resultados colhidos. Também será uma boa oportunidade para que o aluno tenha contato e aprenda a mexer com softwares, tais como Excel e outras planilhas.

O trabalho poderá ser individual ou em grupo, a critério do professor, onde cada aluno (ou grupo) trará de casa a conta de luz para o desenvolvimento das tarefas. Como exemplo, conforme figura 42 abaixo, usaremos uma conta de luz real de uma morador do Rio de Janeiro, extraída do site da empresa LIGHT S.A[41]., para embasar a atividade proposta. Por questão de privacidade, os dados do morador foram omitidos.

REF: MÊS / ANO	VENCIMENTO	TOTAL A PAGAR
DEZ/2018	24/12/2018	R$ 423,07

Energia ativa	Medição Atual Data	Medição Atual Leitura	Medição Anterior Data	Medição Anterior Leitura	Const Medidor	Consumo kWh	Nº Dias
Tarifa Convencional	17/12/18	25878	14/11/18	25438	1	440	33

Itens de fatura	CFOP	Unidade	Quant.	Preço Unit R$	Valor R$
Energia Eletrica kWh	5.258	kWh	440	0,90105	396,44
Contrib. Custeio Ilum. Publica					21,13
Multa 2% conta de 11/2018 sobre R$ 220,56					4,41
Juros mora 1% am: 10 dia(s) sobre R$220,56					0,74
Variacao do IGPM: R$221,30					0,35

Subtotal Faturamento 396,44
Subtotal outros 26,63

TUSD + TE*	BANDEIRA
0,57498	Verde
0,58498	Amarela
0,62498	Vermelha

*TE - Tarifa de Energia e TUSD - Tarifa de Uso do Sistema de Distribuição

Unidade de Leitura: 08L50090

Tarifa sem Tributos: 0,57983

BANDEIRAS TARIFÁRIAS — ADICIONAL BANDEIRAS JÁ INCLUSO NO VALOR A PAGAR

NOV. 2018 AMARELA
DEZ. 2018 VERDE

BANDEIRA	VALOR (R$)
AMARELA	3,30

Tributo	Base de Cálculo (R$)	Alíquota (%)	Valor (R$)
ICMS	396,44	31,000	122,89
PIS/PASEP	396,44	0,830	3,29
COFINS	396,44	3,820	15,14

Total da Nota Fiscal (R$): 396,44

CONSUMO / kWh

	Conv.
Dez/18	440
Nov/18	270
Out/18	335
Set/18	279
Ago/18	298
Jul/18	256
Jun/18	275
Mai/18	325
Abr/18	458
Mar/18	482
Fev/18	408
Jan/18	403
Dez/17	359

Figura 42: Conta de luz objeto de estudo da atividade 2

[41] Disponível em <http://www.light.com.br/para-empresas/SitePages/default.aspx> Acesso em 07/01/2019

Uma primeira etapa da atividade seria solicitar aos alunos que observassem o histórico de consumo dos últimos 13 meses , conforme destaque na figura 43 abaixo, e solicitar que organizem os dados em ordem crescente, do mês de menor consumo até o mês de maior consumo.

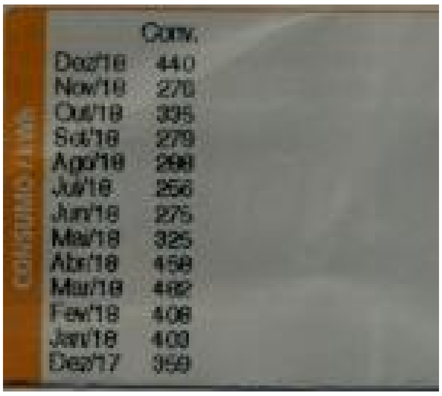


Figura 43: Histórico de consumo

Eis o resultado dos dados coletados, agora organizados em rol crescente.

Consumo: D1 = {256, 275, 276, 279, 288, 325, 335, 359, 403, 408, 440, 458, 482}.

Essa primeira organização permite que o aluno já consiga extrair alguma informação relevante, como a amplitude dos dados, uma medida de dispersão que exploraremos mais adiante, que nesta é igual a $482 - 256 = 226$. Assim , questões interessantes já podem ser trabalhadas, como: Quais os fatores que podem ter influenciado nesta diferença? Seria a aquisição de um aparelho de ar-condicionado? Seria o aumento da tarifa energética? Seria uma combinação de vários fatores? E se sim, quais e por quais motivos?

Embora algumas reflexões já possam ser levantadas, percebe-se que apenas os dados organizados em rol não permite saber a que mês se refere determinado consumo. Este é um momento oportuno para solicitar ao aluno que construa uma tabela , de forma a contornar este problema. A tabela abaixo da figura 44 representa o efeito esperado do tabelamento destes dados ,referenciando o respectivo mês de consumo:

Mês/ Ano	Consumo em KWh
Julho/2018	256
Junho/2018	275
Novembro/2018	276
Setembro/2018	279
Agosto/2018	288
Maio/2018	325
Outubro/2018	335
Dezembro/2017	359
Janeiro/2018	403
Fevereiro/2018	408
Dezembro/2018	440
Abril/2018	458
Março/2018	482

Figura 44: Consumo por mês

Olhando atentamente as últimas 6 linhas da tabela, ou seja, os meses que vão de dezembro de 2017 à abril de 2018, o aluno pode concluir, por exemplo, que estes não foram coincidentemente os cinco meses consecutivos de maior consumo, mas sim por se tratar do verão no hemisfério sul, período este que o aumento do consumo energético é atribuído ao uso excessivo dos equipamentos de ares-condicionados. Esta é uma excelente oportunidade e explorar os conceitos de sazonalidade, por exemplo. Ao concluir isso, pode então propor uma estratégia para um consumo mais consciente, por exemplo, ligar o ar-condicionado apenas em horários pré determinados pelos moradores da residência.

Prosseguindo, o aluno poderia ir além, construindo um gráfico de linhas, para sintetizar e organizar melhor os dados, dando uma visão privilegiada do histórico do consumo ao longo do tempo. Neste caso, serão utilizados exatamente os meses já ordenados em rol crescente pela data na própria conta original.

O gráfico de linhas da figura 45 abaixo, construído na planilha Excel, é o resultado esperado para a tarefa solicitada:

Figura 45: Gráfico de linhas do histórico de consumo

O tratamento estatístico da informação utilizando o gráfico de linhas , conforme já dito anteriormente neste trabalho, é altamente recomendável nas series temporais, pois mostra como a variável se comporta ao longo do tempo. Algumas indagações interessantes podem ser feitas aos alunos referente ao gráfico, por exemplo, perguntar entre que meses consecutivos houve a maior queda (ou aumento) do consumo ou entre que meses houve apenas queda (ou somente aumento).

Pode-se sugerir ao aluno que construa também um gráfico de colunas e fazer um estudo comparativo entre os dois, pedindo para que discutam qual dos gráficos é de preferência de cada um e o motivo pelo qual escolheram um em prol do outro. Na figura 46 abaixo, temos o histórico de consumo interpretado à luz do gráfico de barras:

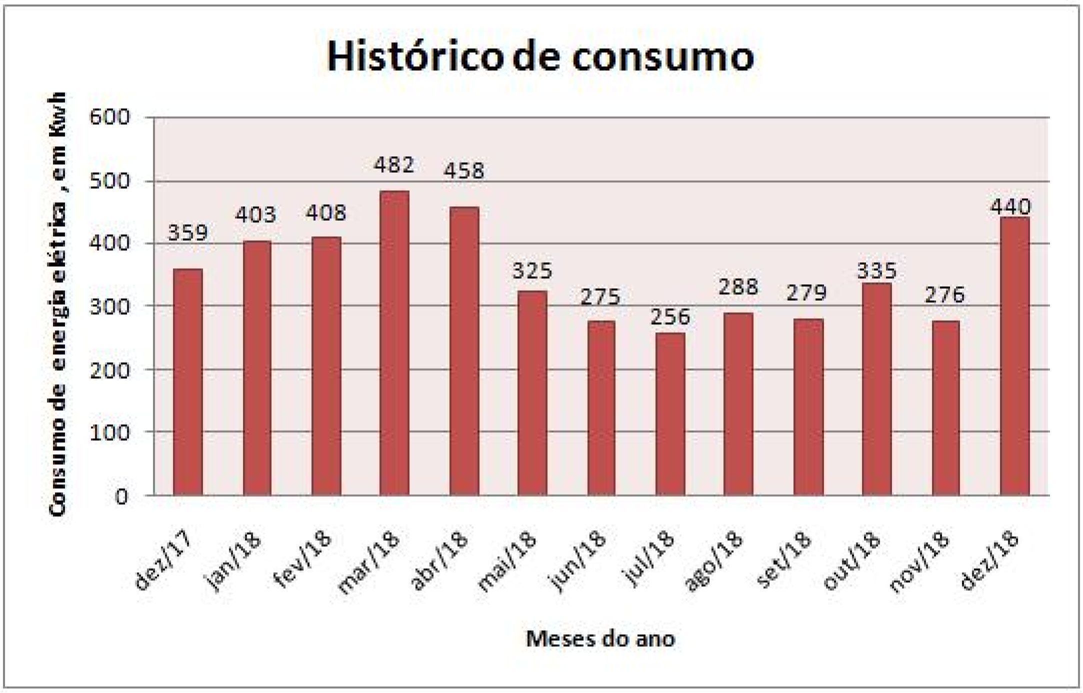


Figura 46: Gráfico de barras do histórico de consumo

Por fim, resta esclarecer que esta atividade não considerou propositalmente os valores cobrados nas contas de luz dos meses estudados, pois entendemos que, embora os conceitos atrelados ao gasto financeiro seja extremamente relevante, queremos que anteriormente a esta fase de cálculo, o aluno desenvolva uma consciência a tomar decisões sábias que incentive sempre ao consumo consciente, ou seja, que a atitude extrapole o conceito de dinheiro. Para ser mais claro, esperamos que o aluno aprenda a usar conscientemente os recursos naturais e desenvolva esse sentimento de ecologia financeira.

6.3 ATIVIDADE 3 – REVISITANDO A ATIVIDADE 2 : TOMADA DE DECISÕES UTILIZANDO AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO COMO FERRAMENTAS SUPLEMENTARES

Como objetos do conhecimento, a BNCC[42](2017,p.314) prevê que sejam trabalhados no 8° ano as medidas de tendência central e de dispersão ,conforme podemos conferir na figura 47 abaixo:

OBJETOS DE CONHECIMENTO
Organização dos dados de uma variável contínua em classes
Medidas de tendência central e de dispersão

Figura 47: Objetos de Conhecimento de estatística para o 8° ano

Segundo a BNCC[43](2017, p.315), as seguintes habilidades devem ser trabalhadas com os alunos do 8° ano:

> Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.

Proposta da atividade: Esta atividade tem como proposta revisitar a atividade 2 a fim de trabalhar as medidas de tendência central (média, moda e mediana) e as medidas de dispersão (amplitude, desvio padrão e dispersão) de forma a extrair informações

[42] Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 08/01/2019

[43] Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 08/01/2019

mais profundas, que até então estavam invisíveis com apenas o tabelamento e a construção dos gráficos pedidos naquela atividade.

Inicialmente , o professor pode pedir que os alunos calculem a média do consumo dos 13 meses em questão, para após o resultado, solicitar que reflitam sobre o significado para tal medida. Para dar suporte, repetiremos na figura 48 o gráfico de barras já construído para facilitar a extração dos dados mensais.

Figura 48: Gráfico de barras do histórico de consumo

Logo, utilizando a fórmula da média, onde neste caso $n = 13$, $x_1, x_2 \dots x_n$ são os consumos mensais e $\bar{x}$ representa a média, temos que :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\ x_n}{n}$$

Logo, $\bar{x} = \frac{359+403+408+482+458+325+275+256+288+279+335+276+440}{13} = \frac{4584}{13} \cong 352{,}6$

Uma pergunta altamente reflexiva para os alunos neste momento, seria: O valor encontrado para a média é uma boa representação para as distribuição do consumos destes 13 meses analisados?

Para acalorar o debate, vamos introduzir o valor do quilowatt-hora para efeitos financeiros comparativos ,valor este extraído da conta de luz analisada, conforme figura 49 abaixo:

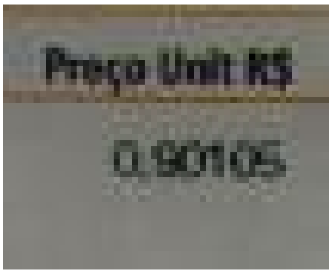


Figura 49: Valor do KWh

Logo, cada quilowatt-hora custa R$ 0,90105, ou seja, o consumidor que está na média gastaria mensalmente o valor de $352{,}6\,.\,0{,}90105 \cong$ R$ 317,71. Seria esse valor um bom representante do conjunto de dados?

Uma vez que se tenha acesso ao histórico de consumo, vê-se que o menor consumo é de 256 e que este nos dá um custo de $256\,.\,0{,}90105 \cong R\$\,230{,}67$, valor este aproximadamente 27,4% menor que o custo médio, enquanto que o maior consumo é de 482 e este nos dá um custo de $482.\,0{,}90105 \cong R\$\,434{,}31$, valor este aproximadamente 36,7% superior ao custo médio. Suponha, por exemplo, que o maior consumo observado tenha sido 750 e não 482 e o menor valor observado tenha sido 40 ao invés de 256. Chamaremos a esta distribuição de $D2 = \{40, 275, 276, 279, 288, 325, 335, 359, 403, 408, 440, 458, 750\}$. Será que essas modificações influenciariam muito na média? Vejamos:

$$\bar{x} = \frac{359+403+408+750+458+325+275+40+288+279+335+276+440}{13} = \frac{4636}{13} = 356{,}62.$$

Repare que , apenas mexendo nos extremos, no caso deste conjunto de dados, não houve uma alteração significativa, pois houve uma variação de apenas $356{,}62 - 352{,}60 = 4{,}02$, ou seja uma diferença insignificante de $4{,}02\,.0{,}90105 = R\$\,3{,}62$ no valor final da conta .Um exercício interessante para esta atividade é solicitar aos alunos que modifiquem alguns valores e verifiquem o que acontece com a média. Espera-se assim que concluam que: quando os dados estão mais bem comportados em torno da média, que é o que aparenta ser até então o conjunto de dados desta atividade, esta sofre pouca ou nenhuma alteração mesmo quando há a presença de dados atípicos e quando os dados estiverem mais dispersos, sejam muito altos ou muito baixos, estes podem interferir significativamente, fazendo com que a média se desloque para mais perto desses dados, ou seja, a média pode ser altamente influenciada por valores extremos. Porém, isto depende de como o restante dos dados estão dispostos ao longo da distribuição. É importante que o aluno perceba que, nestas duas contas, D1 (a original) e D2 (a modificada), mesmo a presença de dados discrepantes não levaram a uma significativa alteração da média, o que já nos leva a suspeitar de que se trata possivelmente, de uma distribuição homogênea.

Surge assim a necessidade de introduzir mais algumas ferramentas para tentar entender melhor como os dados estão dispostos..

Como já visto anteriormente, a moda é a observação que mais se repete. Por ser o consumo energético um valor que pode raramente coincidir, não é raro que a distribuição seja amodal. É importante que seja discutido isso e que os alunos percebam que, neste caso estudado, a moda não terá utilidade, diferentemente da mediana, como veremos a seguir, a menos que os dados sejam agrupados em classe, por meio de histogramas.

Por ser a mediana pouco afetada por valores extremos, podemos utilizá-la para entenderemos melhor como estão dispostos os dados do conjunto estudado.

Neste momento, o aluno poderá calcular a mediana dos dados D1 = {256, 275, 276, 279, 288, 325, 335, 359, 403, 408, 440, 458, 482}, concluindo assim que a mediana é igual a 335 e ocupa a 7° posição, ou seja, divide a distribuição exatamente pela metade, com seis valores abaixo e seis valores acima da mediana. É importante também neste momento que os alunos verifiquem que a mediana não está muito afastada da média, que é $352,6$. Uma rápida observação permite verificar que, por enquanto, a média e a mediana são bons representantes deste conjunto de dados. Os alunos devem notar que os valores estão equilibradamente afastados da mediana e da média, alguns abaixo e outros, acima deles. É importante também que reparem que , se o valor mais alto 482 de D1 for substituído por um valor muito mais alto, por exemplo, 900, em nada iria interferir no valor da mediana, que continuaria sendo 335, confirmando desta forma que a mediana é um valor robusto na presença de dados atípicos.

Nesta altura da atividade, pode-se propor o seguinte exercício:

> Na conta de luz da atividade proposta, sabe-se que o consumo médio dos últimos 13 meses é de 352,6 KWh e a mediana é igual a 335 KWh. Calcule os valores do desvio padrão e do coeficiente de variação e conclua se a distribuição é relativamente homogênea, heterogênea ou se trata de uma superdispersão.

Inicialmente, será calculado pelos alunos os desvios da média , para logo em seguida prosseguir com os cálculos da variância amostral da distribuição. onde $n = 13$, $x_1, x_2 \ldots x_n$ são os consumos mensais e $\bar{x}$ representa a média:

$$Variância\ amostral = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Este momento é bem oportuno para que os alunos utilizem uma calculadora ou uma planilha para a execução e conferência de seus cálculos. Um resultado esperado está explicitado nos cálculos abaixo:

$$(x_1 - \bar{x}) = (359 - 352{,}6)^2 \rightarrow (6{,}4)^2 = 40{,}96$$

$$(x_2 - \bar{x}) = (403 - 352{,}6)^2 \rightarrow (50{,}4)^2 = 2540{,}16$$

$$(x_3 - \bar{x}) = (408 - 352{,}6)^2 \rightarrow (55{,}4)^2 = 3069{,}16$$

$$(x_4 - \bar{x}) = (482 - 352{,}6)^2 \rightarrow (129{,}4)^2 = 16744{,}36$$

$$(x_5 - \bar{x}) = (458 - 352{,}6)^2 \rightarrow (105{,}4)^2 = 11109{,}16$$

$$(x_6 - \bar{x}) = (325 - 352{,}6)^2 \rightarrow (-27{,}6)^2 = 761{,}76$$

$$(x_7 - \bar{x}) = (275 - 352{,}6)^2 \rightarrow (-77{,}6)^2 = 6021{,}76$$

$$(x_8 - \bar{x}) = (256 - 352{,}6)^2 \rightarrow (-96{,}6)^2 = 9331{,}56$$

$$(x_9 - \bar{x}) = (288 - 352{,}6)^2 \rightarrow (-64{,}6)^2 = 4173{,}16$$

$$(x_{10} - \bar{x}) = (279 - 352{,}6)^2 \rightarrow (-73{,}6)^2 = 5416.96$$

$$(x_{11} - \bar{x}) = (335 - 352{,}6)^2 \rightarrow (-17{,}6)^2 = 309{,}76$$

$$(x_{12} - \bar{x}) = (276 - 352{,}6)^2 \rightarrow (-76{,}6)^2 = 5867{,}56$$

$$(x_{13} - \bar{x}) = (440 - 352{,}6)^2 \rightarrow (87{,}4)^2 = 7638{,}76$$

A soma dos quadrados dos desvios é igual a $(40{,}96 + 2540{,}16 + 3069{,}16 + 16744{,}36 + 11109{,}16 + 761{,}76 + 6021{,}76 + 9331{,}56 + 4173{,}16 + 5416{,}96 + 309{,}76 + 5867{,}56 + 7638{,}76)$ =73025,08

Temos assim, que a variância amostral é:

$$Variância = \frac{73025{,}08}{12} \cong 6085{,}42$$

Como queremos o valor do desvio padrão, e sabemos que:

$$Desvio\ padrão = \sqrt{Variância}$$

Logo, temos que o desvio padrão procurado é igual a $\sqrt{6085{,}42} \cong 78$

Assim, pode-se concluir que os valores variam entre $(352{,}6 - 78\,,\ 352{,}6 + 78)$ ou seja, entre 274,6 e 430,6.

Por fim, o cálculo o do Coeficiente de variação:

$$CVA = \frac{s}{\bar{x}}.\,100\%,$$

,onde s é o desvio padrão e $\bar{x}$ é a média, logo temos que

$$CVA = \frac{78}{352{,}6} \cong 0{,}2212 \rightarrow 22{,}12\%$$

Consultando a escala de avaliação do Coeficiente de variação, o aluno concluirá que se está diante de dados relativamente homogêneos.

Baseado nesta conclusão, podemos deixar dois questionamentos para o aluno:

1) A última leitura, referente à dezembro de 2018, foi de 440 KWh. Diante disto, qual medida de centralidade você usaria para estimar o gasto do próximo mês? Quanto seria esse valor esperado?

R: De fato, a média pode ser considerada uma boa medida síntese dado que os dados são homogêneos. Logo, temos para uma possível previsão de consumo para o mês de janeiro de 2019 o valor correspondente à média, que é $352{,}6\, KWh$. Como o preço de cada KWh é de R$ 0,90105, temos que o valor esperado para o gasto é de $352{,}6 \,.\, 0{,}90105 = R\$\, 317{,}71$ aproximadamente.

Por outro lado, estamos diante de uma série temporal onde há sazonalidade, logo devemos considerar o mês de janeiro como sendo um valor de extrema importância em nossa tomada de decisão, visto que neste mês o uso do aparelho de ar-condicionado costuma aumentar, gerando desta forma maior consumo. Neste caso, devemos utilizar nosso intervalo de confiança , que é a soma da média com o desvio padrão. Logo, teremos que uma estimativa mais apurada para o mês de janeiro é de $352{,}6 + 78 = 430{,}6\, KWh$, levando assim a um gasto de aproximadamente $430{,}6.0{,}90105 = R\$\, 388{,}00$

2) Qual seria o valor esperado para o gasto no mês de julho de 2019?

R: Como já vimos que a média é uma boa medida síntese para representar dados homogêneos, concluímos então que o valor esperado para o gasto é também de $352{,}6 \,.\, 0{,}90105 = R\$\, 317{,}71$. Repare que o consumo do mês de julho de 2018 foi de 256 KWh, o menor valor das 12 observações , pois, por ser um mês com temperaturas mais amenas, espera-se que o consumo seja menor. A fim de melhorar nossa previsão, utilizaremos novamente nosso intervalo de confiança, porém desta vez a diferença entre a média e o desvio padrão. Logo , espera-se que o mês de julho de 2019 tenha um consumo de $352{,}6 - 78 = 274{,}6\, KWh$, aproximadamente , levando assim a um gasto de aproximadamente $274{,}6.0{,}90105 = R\$\, 247{,}43$

6.4 ATIVIDADE 5 – ANÁLISE DE AÇÕES

Na atividade anterior, vimos como a média pode ser uma boa representante de um conjunto de dados homogêneos na tomada de decisões. Porém, em alguns casos, como veremos nessa atividade, pode ser insuficiente tomar decisões em finanças analisando somente as medidas de tendência central.

Esta atividade prática, pensada para os alunos do 8°ano, será embasada nas ambições da BNCC[44](2017, p.314), explorando os objetos de conhecimento da unidades temática de estatística, conforme explicados na figura 50 abaixo:

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Probabilidade e estatística	Medidas de tendência central e de dispersão
	Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados

Figura 50: Objetos de Conhecimento de estatística para o 8° ano

Ainda, para o 8° ano , a BNCC[45](2017,0.317 e 319) prevê o desenvolvimento das seguinte habilidades nas unidade temática de números e de estatística:

> Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais da educação financeira. Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central e de dispersão.

[44] Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 09/01/2019

[45] Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 09/01/2019

Proposta da atividade: O aluno deverá analisar dois pacotes de ações, A e B e tomar uma decisão sobre qual o investimento oferece maior grau de incerteza para um investidor.

Suponha duas amostras de ações, tipos A e B, onde foram registrados os seus respetivos valores ao longo de dez sextas-feiras consecutivas, conforme figura 51 abaixo:

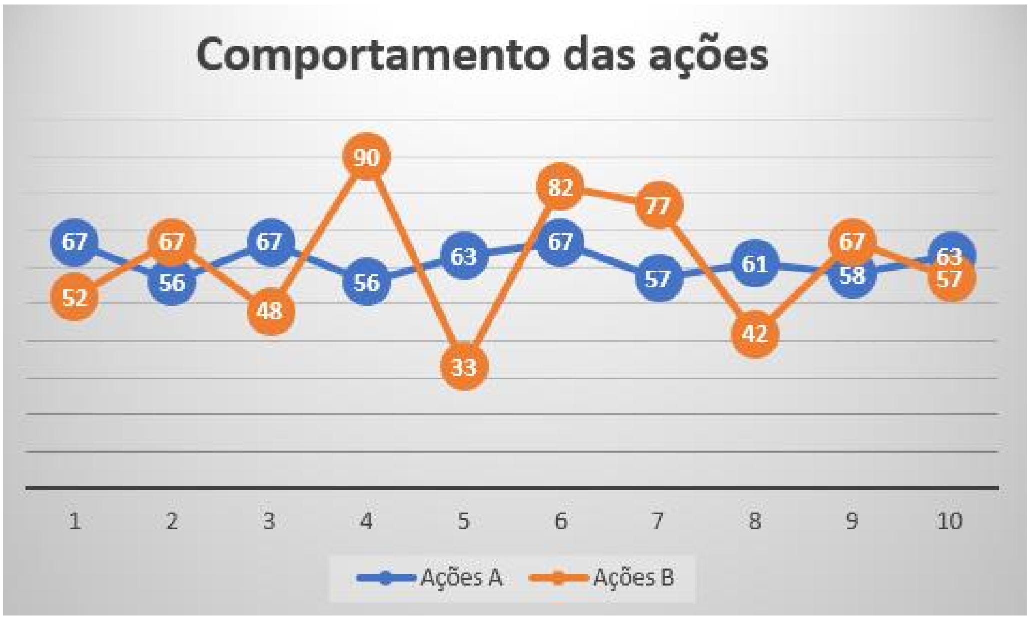


Figura 51: Variação dos valores das ações A e B

A fim de analisar o comportamento das ações, pede-se ao aluno que seja calculado:

- As médias, medianas e as modas dos dois conjuntos de dados.
- As amplitudes dos dois conjuntos de dados.
- As variâncias dos dois conjuntos de dados.
- Os desvios-padrão dos dois conjuntos de dados
- Os coeficientes de variação dos dois conjuntos de dados
- O gráfico de linhas dos dois conjuntos de dados.

Inicialmente, os dados será organizados em rol, conforme figura 52 abaixo:

Ações A	56	56	57	58	61	63	63	67	67	67
Ações B	33	42	48	52	57	67	67	77	82	90

Figura 52: Dados organizados em rol crescente

Calculando as médias das ações A e B , temos:

$$\bar{x}_A = \frac{56+56+57+58+61+63+63+67+67+67}{10} = \frac{615}{10} = 61{,}5$$

$$\bar{x}_B = \frac{33+42+48+52+57+67+67+77+82+90}{10} = \frac{615}{10} = 61{,}5$$

Calculando as medianas das ações A e B , temos:

$$MeA = \frac{61+63}{2} = 62$$

$$MeB = \frac{57+67}{2} = 62$$

E as modas das ações A e B são, respectivamente $MoA = 67$ e $MoB = 67$.

Logo, podemos verificar que os dois conjuntos de dados possuem medidas de posições iguais.

Vamos agora calcular as amplitudes dos dois conjuntos:

$$AmpA = 67 - 56 = 11$$

$$AmpB = 90 - 33 = 57$$

Assim , pode-se concluir que as Ações B tem maios amplitude que as ações A.

Agora, vamos passar para o cálculo das variâncias:

Para as ações A, vamos calcular os quadrados dos desvios médios:

$$(x_1 - \bar{x}) = (56 - 61{,}5)^2 \rightarrow (-5{,}5)^2 = 30{,}25$$

$$(x_2 - \bar{x}) = (56 - 61{,}5)^2 \rightarrow (-5{,}5)^2 = 30{,}25$$

$$(x_3 - \bar{x}) = (57 - 61{,}5)^2 \rightarrow (-4{,}5)^2 = 20{,}25$$

$$(x_4 - \bar{x}) = (58 - 61{,}5)^2 \rightarrow (-3{,}5)^2 = 12{,}25$$

$$(x_5 - \bar{x}) = (61 - 61{,}5)^2 \rightarrow (-0{,}5)^2 = 0{,}25$$

$$(x_6 - \bar{x}) = (63 - 61{,}5)^2 \rightarrow (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

$$(x_7 - \bar{x}) = (63 - 61{,}5)^2 \rightarrow (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

$$(x_8 - \bar{x}) = (67 - 61{,}5)^2 \rightarrow (5{,}5)^2 = 30{,}25$$

$$(x_9 - \bar{x}) = (67 - 61{,}5)^2 \rightarrow (5{,}5)^2 = 30{,}25$$

$$(x_{10} - \bar{x}) = (67 - 61{,}5)^2 \rightarrow (5{,}5)^2 = 30{,}25$$

A soma dos quadrados dos desvios é igual a $(30{,}25 + 30{,}25 + 20{,}25 + 12{,}25 + 0{,}25 + 2{,}25 + 2{,}25 + 30{,}25 + 30{,}25 + 30{,}25) = 188{,}5$

Temos assim, que a variância amostral é:

$$Variância(A) = \frac{188{,}5}{9} = 20{,}9444\ldots$$

Para as ações B, vamos calcular os quadrados dos desvios médios:

$$(x_1 - \bar{x}) = (33 - 61{,}5)^2 \rightarrow (-28{,}5)^2 = 812{,}25$$

$$(x_2 - \bar{x}) = (42 - 61{,}5)^2 \rightarrow (-19{,}5)^2 = 380{,}25$$

$$(x_3 - \bar{x}) = (48 - 61{,}5)^2 \rightarrow (-13{,}5)^2 = 182{,}25$$

$$(x_4 - \bar{x}) = (52 - 61{,}5)^2 \rightarrow (-9{,}5)^2 = 90{,}25$$

$$(x_5 - \bar{x}) = (57 - 61{,}5)^2 \rightarrow (-4{,}5)^2 = 20{,}25$$

$$(x_6 - \bar{x}) = (67 - 61{,}5)^2 \rightarrow (5{,}5)^2 = 30{,}25$$

$$(x_7 - \bar{x}) = (67 - 61{,}5)^2 \rightarrow (5{,}5)^2 = 30{,}25$$

$$(x_8 - \bar{x}) = (77 - 61{,}5)^2 \rightarrow (15{,}5)^2 = 240{,}25$$

$$(x_9 - \bar{x}) = (82 - 61{,}5)^2 \rightarrow (20{,}5)^2 = 420{,}25$$

$$(x_{10} - \bar{x}) = (90 - 61{,}5)^2 \rightarrow (28{,}5)^2 = 812{,}25$$

A soma dos quadrados dos desvios é igual a $(812{,}25 + 380{,}25 + 182{,}25 + 90{,}25 + 20{,}25 + 30{,}25 + 30{,}25 + 240{,}25 + 420{,}25 + 812{,}25) = 2988{,}25$

Temos assim, que a variância amostral é:

$$Variância(B) = \frac{3018{,}5}{9} = 335{,}3888\ldots$$

Os respectivos desvios-padrão de A e B são:

$$Desvio\ padrão(A) = \sqrt{20{,}9444\ldots} \cong 4{,}5765$$

$$Desvio\ padrão(B) = \sqrt{335{,}388\ldots} \cong 18{,}3136$$

Finalmente, os coeficientes de variação são:

$$CVA(A) = \frac{4{,}5765}{61{,}5} \cong 0{,}0744 \cong 7{,}44\%$$

$$CVA(B) = \frac{18{,}3136}{61{,}5} \cong 0{,}2978 \cong 29{,}78\%$$

Logo, podemos concluir que embora os dois grupos de dados tenham medidas de posição iguais, há maior variabilidade nas ações do tipo B, dando a ela um grau maior de incerteza comparada com as ações do tipo A.

6.5 ATIVIDADE 5– POUPANCA *VERSUS* INFLAÇÃO

Segundo a BNCC[46](2017,p.269).

> A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações. Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento)

Esta atividade tem como objetivo introduzir o aluno no mundo das finanças e , para isto, ele terá a oportunidade de simular uma aplicação financeira na poupança durante 12 meses, acompanhando de perto a evolução do seu patrimônio em um cenário real. Conceitos como rendimento e inflação serão tratados e debatidos ao longo da atividade.

Proposta da atividade: Para essa atividade, consideraremos um depósito inicial na poupança no valor de R$ 1.000,00, realizado em dezembro de 2017. Os alunos deverão calcular mês a mês, durante 12 meses, os montantes devidos, levando em consideração as taxas mensais de rendimento de cada mês. Durante esses 12 meses não serão realizados depósitos. Para isto, usaremos os valores oficiais referentes ao ano de 2018, retirados do site governamental do Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social (IPARDES)[47], conforme explanados na figura 52.

---

[46]Disponível em < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 13/01/2019

[47] Disponível em <http://www.ipardes.gov.br/pdf/indices/poupanca.pdf> Acesso em 14/01/2019

PERÍODO	RENDIMENTOS (%)	
	Para Depósitos até 03/05/2012	Para Depósitos a Partir de 04/05/2012
2018		
Dezembro	0,5000	0,3715
Novembro	0,5000	0,3715
Outubro	0,5000	0,3715
Setembro	0,5000	0,3715
Agosto	0,5000	0,3715
Julho	0,5000	0,3715
Junho	0,5000	0,3715
Maio	0,5000	0,3715
Abril	0,5000	0,3715
Março	0,5000	0,3885
Fevereiro	0,5000	0,3994
Janeiro	0,5000	0,3994

Figura 53: Rendimentos da caderneta de poupança em 2018

Como primeiro exercício, o aluno deverá calcular os montantes referentes a cada mês. Para isto poderá utilizar uma planilha ou um calculadora como ferramenta. A figura 54 abaixo é um exemplo do esperado:

Mês	Taxa considerada no mês	Fator	Montante ao final do mês
jan/18	0,3994%	1,003994	1003,994
fev/18	0,3994%	1,003994	1008,004
mar/18	0,3885%	1,003885	1011,920
abr/18	0,3715%	1,003715	1015,679
mai/18	0,3715%	1,003715	1019,453
jun/18	0,3715%	1,003715	1023,240
jul/18	0,3715%	1,003715	1027,041
ago/18	0,3715%	1,003715	1030,857
set/18	0,3715%	1,003715	1034,686
out/18	0,3715%	1,003715	1038,530
nov/18	0,3715%	1,003715	1042,388
dez/18	0,3715%	1,003715	**1046,261**

Figura 54: Cálculos dos montantes

Neste instante , o professor pode levantar algumas questões interessantes, por exemplo:

1) Qual foi o lucro obtido após 12 meses de aplicação? Este lucro corresponde a quantos por cento do montante inicial?

R: O lucro será calculado com a diferença entre o montante final e o montante inicial: $1046{,}261 - 1000{,}00 \cong R\$\ 46{,}26$ e este valor representa $\frac{46{,}26}{1000} = 0{,}04626 = 4{,}626\%$

2) Qual a interpretação que se pode dar ao valor $4{,}626\%$?

R: Esta porcentagem corresponde ao rendimento acumulado da poupança, ou seja, em 12 meses o dinheiro aplicado teve um rendimento de $4{,}626\%$.

3) Elabore um gráfico de linhas explicitando a variação percentual dos valores da poupança ao longo dos 12 meses.

R: Figura 55 abaixo.

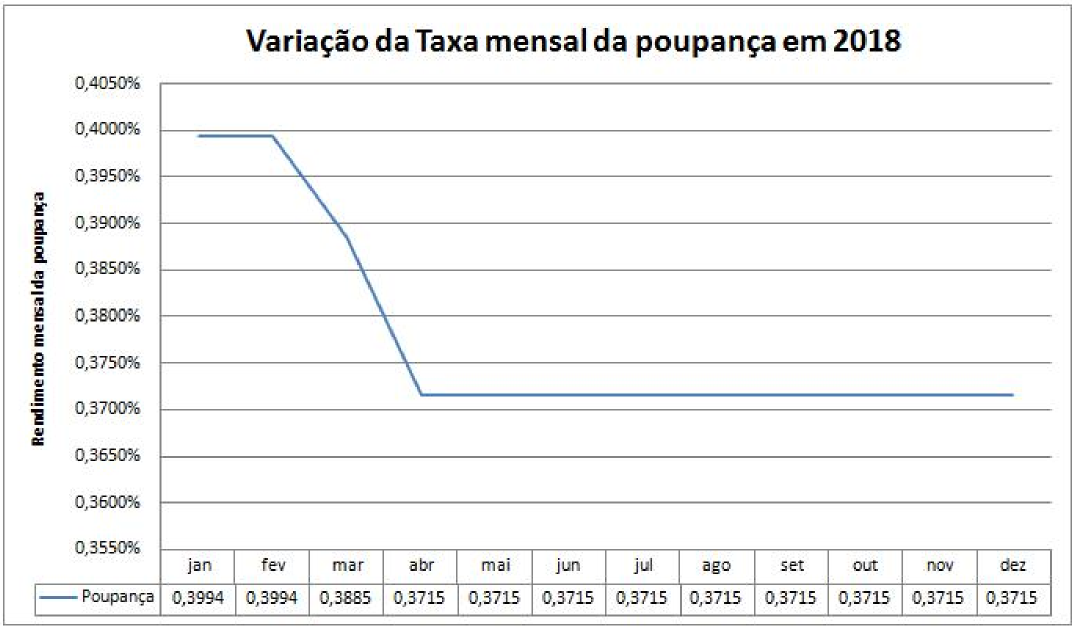


Figura 55: Variação da taxa mensal da poupança em 2018

Por fim , uma questão desafio:

Ao final da aplicação teremos um montante de $R\$\ 1046{,}26$. Será que conseguiremos comprar com esse valor o mesmo que compramos há 12 meses atrás com $R\$\ 1000{,}00$?

R: Esperamos que esta questão faça o aluno refletir quanto ao valor temporal do dinheiro. Vamos supor que no início da aplicação, dispondo de $R\$\,1.000{,}00$, conseguíamos comprar 1000 maçãs , ou seja, cada maçã tinha um custo de $R\$\,1{,}00$.

Neste momento , o professor deve introduzir o conceito de inflação, que resumidamente podemos conceituar como sendo o aumento no nível dos preços, ou seja, uma perda no valor da compra de produtos ou de bens e serviços. O aluno deve então verificar se houve inflação neste período que o dinheiro ficou aplicado na caderneta de poupança.

Para isso, nos basearemos na tabela do Índice de Preços ao Consumidor(IPCA), que é um índice financeiro que mede a inflação ao longo do tempo. A figura 56 abaixo, mostra a variação do IPCA ao longo do ano de 2018, extraída do site do IBGE[48]:

SÉRIE HISTÓRICA DO IPCA

ANO	MÊS	VARIAÇÃO (%)
2018	JAN	0,29
	FEV	0,32
	MAR	0,09
	ABR	0,22
	MAI	0,40
	JUN	1,26
	JUL	0,33
	AGO	-0,09
	SET	0,48
	OUT	0,45
	NOV	-0,21
	DEZ	0,15

Figura 56 Variação mensal do IPCA em 2018

A inflação acumulada então será o produto dos fatores de correção:

$$(1{,}0029).(1{,}0032).(1{,}0009).(1{,}0022).(1{,}004).(1{,}0126).(1{,}0033).(0{,}9991).(1{,}0048).$$

$$(1{,}0045).(0{,}9979).(1{,}0015) \cong 1{,}03745 \rightarrow (1{,}03745 - 1) \rightarrow 0{,}03745 \cong 3{,}745\%$$

[48] Disponível em< https://ww2.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/defaultseriesHist.shtm >Acesso em 14/01/2019

Como a inflação foi de 3,745%, o ganho de 4,626% não pode ser real . De fato, a rentabilidade de um investimento sem descontar a inflação é chamado de ganho aparente ou ganho nominal. Para descobrir o fator de ganho real deve-se calcular a razão entre o fator de ganho nominal e o fator de inflação no período considerado:

$$Fator\ de\ ganho\ real = \frac{Fator\ de\ ganho\ nominal}{Fator\ de\ inflação}$$

No exercício, temos que:

$$Fator\ de\ ganho\ real = \frac{1{,}04626}{1{,}03745} = 1{,}00849$$

Como estamos interessados apenas no aumento, então $1{,}00849 - 1 = 0{,}00849 = 0{,}849\%$, ou seja, conseguiremos comprar aproximadamente 8,49 maçãs a mais.

Uma forma resumida de entender é: a maçã que custava R$ 1,00 agora custa R$1,03745 devido à perda ocasionada pela inflação. Como agora tem-se R$ 1046,26, então o número de maçãs que se poderá comprar é $\frac{1046{,}26}{1{,}03745} = 1008{,}49$.

Fechando com chave de ouro, , o professor poderá sugerir ao aluno que elabore um gráfico de linhas conforme figura 57 , para que possa comparar e entender melhor como se comportam mês a mês a inflação e a poupança, podendo desta forma perceber visualmente em que meses uma superou a outra.

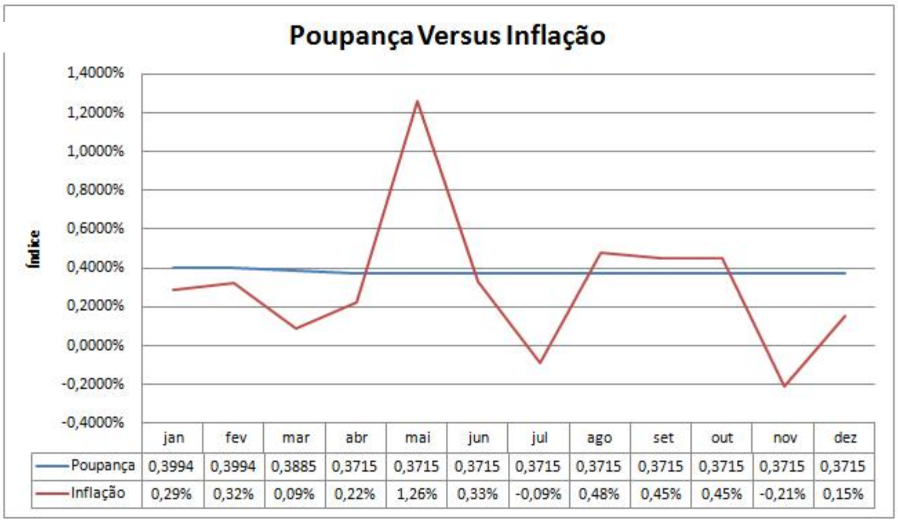


Figura 57: Poupança Versus Inflação

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização desta pesquisa teve como objetivo contribuir com a educação dos nossos alunos mostrando-lhes a importância que a Estatística tem na tomada de decisões em questões relativas à Educação Financeira.

Vimos que o Brasil, comparado aos países desenvolvidos, ainda está muito aquém quando o assunto é Educação Financeira. Por outro lado, a homologação da nova Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental, em 2017, foi considerado um grande salto, visto que na estrutura do documento é notória a preocupação em tratar a Educação Financeira como eixo transversal. Com a presença da unidade temática Probabilidade e estatística na BNCC, foi possível então fazer o uso da estatística de forma a potencializar o letramento financeiro do educando.

A essência da proposta do trabalho se encontra no último capítulo, onde o aluno, após ter percorrido todas as etapas de uma estrutura tripartite (pré-matematização, aritmetização e algebrização dos conteúdos), tem a oportunidade de colocar na prática, através das atividades propostas, todo o conhecimento adquirido, utilizando a Estatística como ferramenta integradora.

Esperamos sinceramente que esse trabalho contribua com a formação e sirva de incentivo aos docentes do Ensino Básico para que possam contribuir para a educação financeira dos nossos alunos, para assim torná-los cidadãos reflexivos e críticos em um mundo mergulhado em incertezas.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A Ascensão do dinheiro – Episódio 1.Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=LPnn2OBYIRY&t=342s> Acesso em 10 de junho de 2018.

A Ascensão do dinheiro – Episódio 2.Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=do1K7nmEOx0> Acesso em 10 de junho de 2018.

ASSAF, A. Matemática Financeira e suas Aplicações. 6° ed. São Paulo: Atlas, 2001.

Associação de Educação Financeira do Brasil – AEF Brasil. Disponível em: http://www.aefbrasil.org.br/index.php/educacao-financeira-nao-opcao-necessidade Acesso em 15 de maio de 2018.

Austalian Curriculum- AC. Disponível em: < https://www.australiancurriculum.edu.au> Acesso em 14 de maio de 2018.

Banco do Brasil. Disponível em: <https://www.bb.com.br/docs/pub/siteEsp/dicar/dwn/tabjurosVarejo.pdf> Acesso em 07 de fevereiro de 2019.

Base Nacional Comum Curricular. – BNCC.Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 15 de outubro de 2018.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática Bianchini*. Editora Moderna. 8ª edição. São Paulo, 2015.

CARVALHO, Sergio. Estatística básica simplificada.- Rio de Janeiro: Elsevier,2008.

Casa da Moeda. Disponível em: <http://www.casadamoeda.gov.br/portal/socioambiental/cultural/origem-do-dinheiro.html> Acesso em 20 de setembro de 2018.

Compare your country. Disponível em: < http://www.compareyourcountry.org/pisa/country/BRA?lg=en> Acesso em 22 de agosto de 2018.

Consumer and Financial Literacy: year 6.Disponível em: <https://www.australiancurriculum.edu.au/media/3411/consumer-and-financial-literacy_year-6.pdf> Acesso em 12 de junho de 2018

CONWAY, Edmund. 50 ideias de economia que você precisa conhecer.-1° ed.- SãoPaulo: Planeta,2015.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações - Volume 1. 3° ed. São Paulo: Ática, 2004.

DAVIES, Glyn. A history of money**:** from ancient times to the present day. Cardiff: University of Wales Press, 2002. Disponível em: <http//library.uniteddiversity.coop/Money_and_Economics/A_History_of_Money-From_Ancient_Times_to_the_Present_Day.pdf> Acesso em 12 de agosto de 2018.

Diário Oficial da União – DOU.
Disponível em : <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm> Acesso em 23 de março de 2018.

Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa - Michaelis. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/educa%C3%A7%C3%A3o> Acesso em 23 de agosto de 2018

Dicionário Etimológico.Disponível em: <https://www.dicionarioetimologico.com.br/educar/> Acesso em 22 de agosto de 2018.

DOMINGOS, Reinaldo. Terapia Financeira. Realize seus sonhos com Educação Financeira -São Paulo: Editora DSOP Educação Financeira, 2012.

Dsop Educação Financeira. Disponível em: <https://www.dsop.com.br/> Acesso em 01 de setembro de 2019.

Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF. Disponível em: <http://www.vidaedinheiro.gov.br/> Acesso em 15 de julho de 2018.

Exame. Disponível em: <https://exame.abril.com.br/pme/os-conceitos-de-financas-que-todo-empreendedor-precisa-saber/> Acesso em 22 de agosto de 2018.

Federação dos Trabalhadores em Empresas de Crédito no Paraná- FETEC. Disponível em: <http://www.fetecpr.org.br/educacao-financeira-e-equivocos-de-economistas-especialistas/> Acesso em 12 de outubro de 2018.

FERGUSON, Niall. A ascensão do dinheiro: a história financeira do mundo – 2° ed.- SãoPaulo: Planeta,2017.

Folha de São Paulo. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/educacao/2017/04/1873924-australia-canada-e-eua-inspiraram-base-curricular-do-brasil.shtml> Acesso em 29 de julho de 2018.

Geogebra. Disponível em:<https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc> Acesso em 06 de fevereiro de 2019.

GIANNETTI, Eduardo.O valor do amanhã: ensaio sobre a natureza dos juros– 2° ed.- SãoPaulo: Companhia das Letras,2012.

IEZZI, G. et al. Matemática: Ciência e aplicações - Volume 1, Ensino Médio. 5° ed. São Paulo: Atual, 2010.

Info Escola. Disponível em: <https://www.infoescola.com/economia/escambo/ Acesso em 01 de agosto de 2018

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística- IBGE. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?=&t=series-historicas> Acesso em 22 de novembro de 2018.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Nacionais Anísio Teixeira – INEP. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/pisa> Acesso em 15 de maio de 2018.

Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social- IPARDES. Disponível em: <http://www.ipardes.gov.br/pdf/indices/poupanca.pdf> Acesso em 14 de janeiro de 2019.

Instituto de Pesquisas e Relações Internacionais - IPRI. Disponível em: <http://www.funag.gov.br/ipri/index.php/o-ipri/47-estatisticas/94-as-15-maiores-economias-do-mundo-em-pib-e-pib-ppp> Acesso em 19 de novembro de 2018.

KIYOSAKI, Robert T. Pai rico, pai pobre: o que os ricos ensinam aos seus filhos sobre dinheiro – 2°ed.-Rio de Janeiro: Alta Books,2017.

Light. Disponível em: <http://www.light.com.br/para-empresas/SitePages/default.aspx> Acesso em 07 de janeiro de 2019.

Livro Aberto de Matemática- Oficina de Estatística- Medidas de posição e dispersão. Disponível em: < https://drive.google.com/file/d/1_8OAzMHhwhpPxFv8QAQBibA0MoZA66RY/view> Acesso em 16 de outubro de 2018.

MILL, Alfred.Tudo que você precisa saber sobre economia –São Paulo:Editora Gente,2017.

Ministério da Saúde. Disponível em: <http://portalms.saude.gov.br/component/content/article/804-imc/40510-imc-em-criancas-e-adolescentes> Acesso em 12 de janeiro de 2019

MoneySmart.Disponível em: <https://www.moneysmart.co/> Acesso em 01 de setembro de 2018.

MoneySmart.Disponível em: <https://www.moneysmart.gov.au/> Acesso em 01 de setembro de 2018.

MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; ZANI, S.C. Progressões e Matemática Financeira. 5° ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

Mutuoprev. Disponível em: <http://mutuoprev.com.br/educacao-financeira/> Acesso em 30 de abril de 2018.

Organization for Economic Co-operation and Development – OCDE. Disponível em: <http://www.oecd.org/pisa> Acesso em 14 de setembro de 2018

Porta do Professor. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23506> Acesso em 16 de maio de 2018.

Sociedade Brasileira de Matemática- SBM. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/07/Simposio_Nordeste_O-ensino-de-Matematica-Financeira.pdf> Acesso em 05 de fevereiro de 2019.

Superintendência Nacional de Previdência Complementar – PREVIC. Disponível em: <http://www.previc.gov.br/regulacao/educacao-previdenciaria/educacao-financeira-e-previdenciaria/o-que-e-educacao-financeira> Acesso em 25 de agosto de 2018.

Terra. Disponível em: <https://www.terra.com.br/noticias/mundo/europa/estudantes-brasileiros-sao-os-piores-em-compreensao-financeira-segundo-ocde,457eb4be2c2b7354b893dcec39ea290708vx2x9g.html>
Acesso em 12 de outubro de 2018

Tesouro Nacional. Disponível em:< http://www.tesouro.fazenda.gov.br/tesouro-direto-calculadora> Acesso em 06 de fevereiro de 2019.

Universidade Estadual da Paraíba- UEPB. Disponível em: <http://www.ead.uepb.edu.br/ava/arquivos/cursos/geografia/leituras_cartograficas/Le_Ca_A13_J_GR_260508.pdf> Acesso em 20 de novembro de 2018.

Veja. Disponível em: <https://veja.abril.com.br/educacao/educacao-financeira-desafia-escolas-aponta-ocde/> Acesso em 30 de setembro de 2018.

Wikilivros.Disponível em: <https://pt.wikibooks.org/wiki/Hist%C3%B3ria_da_moeda/Moeda_na_Idade_Antiga> Acesso em 10 de junho de 2018.

WHEELAN, Charles. Estatística: o que é, para que serve, como funciona – 1°ed.-Rio de Janeiro: Zahar,2016.

Wolframalpha. Disponível em: < https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?=&t=series-historicas> Acesso em 04 de novembro de 2018.