Universidade Federal do Rio de Janeiro
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

Thiago Silva Freire Lainetti

EXPLORANDO A NÃO-EQUIPROBABILIDADE DE EVENTOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Rio de Janeiro

2019

CIP - Catalogação na Publicação

L185e

Lainetti, Thiago Silva Freire
Explorando a não-equiprobabilidade de eventos na educação básica / Thiago Silva Freire Lainetti. -- Rio de Janeiro, 2019.
136 f.

Orientador: Nei Carlos dos Santos Rocha.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

1. Não-Equiprobabilidade. 2. Educação Básica. 3. Probabilidade. I. Rocha, Nei Carlos dos Santos, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

THIAGO SILVA FREIRE LAINETTI

EXPLORANDO A NÃO-EQUIPROBABILIDADE DE EVENTOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentada a Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito final para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha

Rio de Janeiro

2019

EXPLORANDO A NÃO-EQUIPROBABILIDADE DE EVENTOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

BANCA EXAMINADORA

Nei Carlos S. Rocha

Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha

Instituto de Matemática - UFRJ

(Orientador/Presidente da Banca Examinadora)

Walcy Santos

Prof[a] Dr[a] Walcy Santos

Instituto de Matemática – UFRJ

Flávia Landim

Prof[a] Dr[a] Flávia Maria Pinto Ferreira Landim

Instituto de Matemática – UFRJ

Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Jr.

Departamento de Matemática - UFJF

Aos meus pais Ricardo e Clarisse e meus
irmãos Rodrigo, Natalia e Leandro.

“Se, a princípio, a ideia não é absurda,
então não há esperança para ela.” - Albert Einstein.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Nei Rocha, pela sugestão de tema, paciência, colaboração e por todo seu apoio na elaboração deste trabalho.

A esta universidade, com seu espetacular corpo docente, direção e administração que me deram a oportunidade de expandir meu horizonte.

Aos meus pais, Ricardo e Clarisse, por todo o exemplo, dedicação, educação, apoio e tudo o que me ensinaram. Agradeço por vocês não medirem esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Aos meus irmãos, Rodrigo, Natalia e Leandro, por estarmos sempre juntos nos momentos mais importantes.

Aos incontáveis professores, sejam de Matemática ou não, que foram a fonte de inspiração para a escolha de uma área tão nobre, o ensino.

Aos meus amigos, por todo o apoio, incentivo, companheirismo e colaboração nos momentos mais difíceis.

A todos os meus alunos que permitem que eu me entusiasme diariamente.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação e contribuíram para essa dissertação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – CÓDIGO DE FINANCIAMENTO 001

Resumo

É possível afirmar que a Teoria da Probabilidade é o campo da Matemática onde se encontram as mais variadas aplicações do cotidiano e da Ciência em geral. Esta dissertação fundamenta-se em explorar melhor a probabilidade, através de suas diferentes abordagens, e introduzir, no Ensino Médio, conceitos de não-equiprobabilidade justamente pela forte relação que essa estrutura tem com a maior parte dos fenômenos aleatórios e até com o dia a dia dos alunos. O conceito de não equiprobabilidade de eventos é bastante neglicenciado no Ensino Básico, e a Probabilidade é quase sempre vista indissociada com a Análise Combinatória em espaços equiprováveis, algo que pouco ilumina os alunos para as aplicações reais da teoria em áreas tão diversas quanto a indústria, medicina, economia, finanças, engenharia, etc. Primeiramente, estabeleceremos o vínculo histórico, em busca de compreender os motivos norteadores para os estudos da Probabilidade. Em seguida abordaremos a relação entre Análise Combinatória e Probabilidade juntamente com uma discussão sobre as barreiras metodológicas que dificultam o seu ensino. Na sequência realizaremos uma revisão teórica sobre a Teoria de Probabilidade para que, enfim, possamos abordar a probabilidade em espaços não-equiprováveis, por meio de atividades práticas, levando os alunos à reflexão e novos questionamentos. Entendemos que seja uma proposta inovadora, já que se trata de uma abordagem lacunar na Educação Matemática, a julgar pela maioria dos livros adotados pelas escolas que pouco ou nada apresentam o tema da não-equiprobabilidade de espaços amostrais. Espera-se que esta dissertação possa motivar professores e alunos para um maior entendimento dessa ferramenta poderosa no século XXI, responsável por dar inteligibilidade à maioria dos desafios em nossa era de incerteza.

Palavras-chave: Probabilidade, Educação Básica, Análise Combinatória, Equiprobabilidade e Não-Equiprobabilidade.

Abstract

It is possible to affirm that Probability Theory is the field of Mathematics where the most varied applications of everyday life and Science in general are found. This dissertation is based on better exploring the probability, through its different approaches, and introducing, in High School, concepts of non equiprobability precisely because of the strong relation that this structure has with most of the random phenomena and also with everyday situations of the students. The concept of non equiprobability of events is largely neglected in Basic Education, and Probability is almost always seen indissociated with Combinatorial Analysis in equiprobable spaces, something that does not illuminate students to the actual applications of theory in areas as diverse as industry, medicine, economics, finance, engineering, etc. Firstly, we will establish the historical link, in order to understand the beginning motivations for Probability studies. We will then discuss the relationship between Combinatorial Analysis and Probability together with a discussion of the methodological barriers that hamper its teaching. In the sequence we will carry out a theoretical revision on Probability Theory, so that we can finally approach the probability in non equiprobable spaces, through practical activities, leading the students to reflection and new questions. We believe that this is an innovative proposal, since it is a lacunar approach in Mathematics Education, bearing in mind the majority of books adopted by schools that have little or nothing to do with the non equiprobability of sample spaces. It is hoped that this dissertation can motivate teachers and students to further understand this powerful tool in the 21st century, responsible for giving intelligibility to most of the challenges we face in our age of uncertainty.

Keywords: Probability, Basic Education , Combinatorial Analysis, Equiprobability and Non Equiprobability.

LISTA DE FIGURAS

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

Nesta introdução, destacarei um pequeno número de circunstâncias da minha trajetória profissional que me conduziu e, seguramente, influenciou na produção e desenvolvimento deste trabalho. Meu primeiro contato com o conteúdo de Probabilidade se deu no Ensino Médio, cuja essência da aula era a prática em um conjunto excessivo de questões usando a abordagem clássica. É evidente que para um aluno na faixa etária de 15 a 17 anos, a Matemática se mostrava como uma atividade que, da forma ensinada, não seduzia, fazendo com que o estudo fosse um meio para chegar a um fim. Ao fazer pré-vestibular acabei me encantando com a forma encontrada por um professor de tratar a matéria e tive interesse em me juntar à área. Entrei para o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro e me deparei mais uma vez com a Probabilidade na disciplina Matemática Finita. Passei por uma mistura de sofrimento e prazer. Sofrimento, pois tive uma imensa dificuldade em acompanhar as atividades propostas, dado que necessitavam de um enorme conhecimento de conteúdo e boa eficiência interpretativa. Entretanto, ao mesmo tempo que "sofria" eu era atraído pelo assunto, e desejava querer aprender ainda mais, mesmo em face às dificuldades.

Formei-me e iniciei minha carreira como professor com a expectativa de impactar a vida dos jovens da mesma maneira que o professor do meu curso havia feito comigo. Todavia, o início de carreira foi marcado por diversas situações de insegurança, o que acredito ser normal, inclusive quando tive a responsabilidade de ensinar Probabilidade aos meus alunos pela primeira vez. Mesmo tendo concluído a Licenciatura, que muito enriqueceu à minha formação, não me sentia preparado para ensinar este conteúdo, por não dominá-lo por completo, dada a base teórica de um, ainda, principiante, e com pouquíssima experiência para suportar os incontáveis obstáculos da sala de aula. A escola em que lecionava usava apostilas, o que não ajudava, pois essas possuem conteúdo muito reduzido e dão ênfase a exercícios. Diante deste cenário, me senti na obrigação de aprender mais, de modo a aperfeiçoar meus conhecimentos e me qualificar para os desafios da sala de aula, viabilizando assim aos meus alunos um alicerce em que eles pudessem sempre se apoiar.

Alguns anos se passaram desde a primeira vez que entrei em sala como legítimo professor. Neste período o meu apreço pela Teoria das Probabilidades aumentou ainda mais graças ao tempo passado com os alunos para discutir diferentes abordagens dos problemas. As diferentes maneiras de enxergar uma mesma questão fizeram com que o aprendizado que antes era adquirido somente por teoria através de livros fosse enriquecido com debates entre mim e meus estudantes. Esse aprendizado foi, e ainda é, muito satisfatório.

Com toda essa bagagem optei por me inscrever no PROFMAT. Acabei me classificando e ao iniciar o curso tive a incrível felicidade de cursar Matemática Discreta logo no primeiro semestre com o prof. Nei Rocha. É difícil descrever o tamanho do conhecimento adquirido. As aulas foram excelentes e a impressão que me foi passada é que a minha mente tinha sido aberta para a infinitude daquele conteúdo. Diante de toda essa relação que a minha vida teve com a matemática, e particularmente com a probabilidade, acredito que um professor, ou um tema específico, possam estabelecer mudanças na vida de cada um. E seria de uma tremenda felicidade conseguir atingir os alunos e professores da mesma maneira que eu fui atingido com o passar dos anos.

É curioso porque a Matemática é uma disciplina que enfrenta um notável preconceito no Ensino Básico pela maioria dos estudantes, por ser, de acordo com a visão deles, chata e difícil. No seu âmbito, alguns dos conceitos mais relevantes a serem desenvolvidos são aqueles relacionados à Probabilidade e os obstáculos retratados para a disciplina de Matemática disseminam-se também aos conceitos relacionados a esse tema. Como muito bem expresso por Piaget e Inhelder no famoso livro “A Origem da Ideia do Acaso na Criança”: “Em contraste com as operações lógicas e aritméticas, a probabilidade é descoberta gradualmente.” A probabilidade é a área da matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar fenômenos aleatórios e essa é certamente uma seara cognitivamente desafiadora para o ser humano. Com aplicações em diversas áreas do conhecimento, a Probabilidade é essencial para que os estudantes entendam o mundo contemporâneo, imerso em incertezas, pois inúmeros fenômenos do dia a dia incluem o pensamento probabilístico.

Um outro aspecto de importância da Probabilidade, em todos os níveis da educação, está relacionado à com o desenvolvimento da percepção de mundo dos estudantes, pois a Probabilidade nos instrui como tomar decisões “ótimas” em ambientes de incerteza. Por isso, o estudo de probabilidade, até então, historicamente trabalhado apenas no Ensino Médio, foi aos poucos sendo instado nos currículos do Ensino Fundamental, na unidade temática Probabilidade e Estatística, em virtude do seu enorme valor no Letramento Estatístico.

Como exposto anteriormente, a impressão é que a Probabilidade é um assunto do qual os alunos, em particular os do Ensino Médio, acabam manifestando certa repulsa ou temor. Essa aparente falta de interesse pode ser justificada por diversos fatores. O primeiro é a exposição de um conceito abstrato com aplicações puramente repetitivas na resolução de problemas. Outro fator que pode contribuir para tal desinteresse é a inexperiência ou a falta de conhecimento do professor. Um terceiro caso refere-se às aulas de intensa teoria e pouca revelação da utilidade das probabilidades na indústria, finanças, áreas médicas, etc.

Fazer com que a sociedade perceba a relevância da Probabilidade na formação do cidadão e propor um aprendizado para além de um processo de repetição sistemática da teoria através da resolução de exercícios foram os norteadores dessa dissertação. Entretanto, após iniciar os estudos teóricos, tomei conhecimento de alguns problemas interessantes que nunca tinha visto serem explorados no Ensino Básico: os casos de não-equiprobabilidade. Tanto livros didáticos quanto professores apresentam a concepção clássica de probabilidade, limitando-se ao estudo dos casos nos quais se supõe a equiprobabilidade para um casamento engessado com a Análise Combinatória. Ao se deparar com tais problemas, optei por um tratamento do aspecto mais lacunar no ensino-aprendizagem da Probabilidade do Ensino Básico: a não equiprobabilidade de espaços amostrais, que se configuram ironicamente como os modelos mais ubíquos em ciências que envolvam o aleatório. A proposta é essencialmente discutir concepções errôneas comumente difundidas no ensino de Probabilidade com conteúdo inovador através de texto e questões, que pudessem ser lidos e absorvidos por outros professores de Matemática, com a intenção de serem utilizados como um apoio para a elaboração de aulas envolvendo Probabilidade no Ensino Médio.

O objetivo desta dissertação do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, o PROFMAT, é, portanto, oferecer ao professor um material que apresente a abordagem, na Teoria da Probabilidade, de espaços não-equiprováveis no Ensino Básico. Essa obra também contempla um estudo, não-exaustivo mas essencial, sobre essa teoria, considerando os contextos históricos e abrindo espaços para atividades diversificadas. Queremos proporcionar ao aluno, através do seu professor, uma visão ampla da Teoria da Probabilidade e que faça com que os estudantes criem questionamentos sem deixar de lado os conceitos e formalismos necessários para a aprendizagem do conteúdo. Esse estudo também tem o propósito de aprofundar o ensino da Probabilidade, através de modelos não-equiprováveis, visto que são aqueles com maior frequência nos modelos científicos.

A seguir, a estrutura dessa dissertação é apresentada.

No Capítulo 1, faremos um breve histórico do desenvolvimento da Teoria da Probabilidade, desde os jogos de azar até a probabilidade moderna. Abordamos também aqui as diferentes concepções de probabilidade: laplaciana, frequentista, subjetiva, geométrica e axiomática. A ideia essencial deste capítulo é descrever cada uma das interpretações de maneira a disponibilizar uma mais ampla visão da probabilidade e das estruturas do cálculo de probabilidades.

No Capítulo 2, discutiremos a relação entre Análise Combinatória e Probabilidade, bastante pródiga no início de sua construção teórica no período clássico, mas insuficiente para dar conta da transição do discreto para o contínuo. Iniciaremos com um histórico de evolução da Análise Combinatória passando pelo vínculo entre os dois tópicos; em seguida por uma breve descrição das orientações curriculares da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para os Ensinos Fundamental e Médio, e ainda, uma análise de livros didáticos escrutinando as barreiras metodológicas no ensino.

No Capítulo 3, apresentamos os conceitos básicos para o estudo de probabilidade conforme a ordenação seguida pela maioria dos livros didáticos, tais como espaço amostral, evento e combinações de eventos (evento complementar, união e interseção de eventos), bem como a interpretação clássica, ou Laplaciana, de probabilidade e estabelecemos um vínculo entre esse modelo e o modelo frequentista. Desenvolvemos ainda suas propriedades básicas, seguindo por probabilidade em eventos equiprováveis, probabilidade condicional, passando pelos Teoremas do Produto, da Probabilidade Total e de Bayes, e concluindo com a definição de eventos independentes, a probabilidade binomial e a geométrica. Traçamos esse desenvolvimento contando com exemplos que possam favorecer a compreensão do professor, e que este possa investigar juntamente com os alunos qual método deve ser empregado em determinadas situações particulares, oferecendo assim aos alunos a possibilidade de explorar, discutir e trocar ideias.

No Capítulo 4 introduzimos a probabilidade em espaços amostrais não-equiprováveis. Destacamos as diferentes classificações: finito, infinito enumerável e infinito não enumerável. Aproveitamos também a classificação para descrever o que são esses espaços e como se estruturam. E por fim, disponibilizamos atividades que podem ser implementadas pelo professor no Ensino Médio com a função de propor um desafio de expandir o pensamento probabilístico do aluno para uma futura abordagem no Ensino Superior dos modelos probabilísticos de variáveias aleatórias absolutamente contínuas, expressos por funções de densidade de probabilidades, assunto esse que não faz parte do currículo básico comum.

Desse modo, tentamos chamar a atenção de professores e alunos para um assunto que está presente no quotidiano nas pesquisas de laboratórios e de opiniões divulgadas pela mídia. A probabilidade não só é interdisciplinar como também é inerente ao ser humano, apesar de não ser óbvia. Como disse uma vez o matemático Persi Diaconis, “os circuitos do nosso cérebro simplesmente não foram feitos para resolver muito bem problemas de probabilidade.” Por isso, os alunos devem ser motivados e preparados para o tema, antes de serem apresentados a novas termologias, e a história da probabilidade pode ajudar bastante nesse sentido. Com esse tratamento, o que seria apenas um cálculo passa a manifestar um verdadeiro significado na vida do aluno e, consequentemente, em seu aprendizado. Compreender de que maneira surgiu o estudo das probabilidades e como ele progrediu contribuem para que os alunos tenham uma visão mais apreciativa da probabilidade, possibilitando-os a enxergar os modelos probabilísticos que subjazem ao caso de não-equiprobabilidade, estes bem mais frequentes que o caso de equiprobabilidade.

Finalmente encerramos a dissertação com considerações gerais sobre os resultados alcançados e possíveis desdobramentos do tema de pesquisa aqui abraçado.

Em suma, nosso intuito geral é promover uma maior desenvolvimento do pensamento probabilístico para os casos que vão além do currículo atual.

1. Um pouco da história de Probabilidade: Passagem do Discreto para o Contínuo.

A sorte é um elemento presente na vida da espécie humana. Na ciência a sorte é conhecida pelo nome de acaso. Talvez o momento em que a espécie humana mais confie na sorte, ou acaso, é no momento em que ele realiza um jogo. O jogo, da mesma forma que a sorte, é uma atividade que também se manifesta em toda a história do ser humano.

O aparecimento inicial de jogo que se tem algum registro histórico é o Tali (jogo de osso) que era praticado com astrágalos. O astrágalo é um osso do calcanhar de um mamífero, semelhante a um tetraedro irregular, suas faces não eram idênticas e possuía os lados: côncavo, convexo, plano e sinuoso.

Figura 1: Astrágalo[1]

O jogo utilizava astrágalos de animais. Cada lado era numerado com valores diferentes, os maiores recebiam os números 3 e 4, e os demais 1 e 6. Os números 2 e 5 não eram utilizados. Algumas experiências chegaram à conclusão de que o acontecimento de cada uma das quatro faces do jogo do Tali manifestava as seguintes frequências:

Faces	1	3	4	6
Frequências	0,12	0,37	0,39	0,12

Tabela 1: Distribuição de frequência do astrágalo.

[1] Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/14305693/

Na busca por algumas informações sobre o desenvolvimento da utilização de jogos em cada civilização encontramos dificuldades em obter registros históricos graças a pobreza de informações, porém determinadas marcas puderam ser descobertas.

Na trajetória histórica de algumas sociedades, os membros das mesmas sofriam sanções com relação a jogos. No antigo Egito, apesar de haver uma liberação, os indivíduos que eram apontados como jogadores compulsivos eram submetidos a uma pena, enquanto nos países de origem judaico-cristã, os jogos de azar eram considerados proibidos. Curiosamente, apesar dessa censura, um bispo, Wibold da cidade de Cambrai, em torno de 960 d.C. idealizou um jogo religioso que atribuía a cada um dos 56 possíveis resultados do lançamento de 3 dados, uma punição ou a prática de uma virtude.

Em compensação, na era moderna, os jogos também são uma atividade de fonte de renda. Cidades em diferentes regiões devem boa parte de suas arrecadações aos jogos de azar disponibilizados em cassinos e ao turismo em torno dessa atividade. O modelo que mais se destaca na mídia pela indústria de entretenimentos é Las Vegas, no estado de Nevada, região dos EUA. Entretanto, na última década, a cidade que tem a maior movimentação financeira no setor de jogos é Macau, na China. Esta ex-colônia portuguesa, que se tornou uma das regiões administrativas especiais da China desde 20 de dezembro de 1999, obteve em 2011, o título de centro mundial de jogos de azar com receitas no valor de US$ 33,480 bilhões, um número cinco vezes maior que o calculado em Las Vegas no mesmo período.

Os jogos de azar sempre tiveram um vínculo muito grande com a humanidade. A espécie humana nutre, até hoje, uma enorme paixão por eles. Ao se lançar a sorte sobre o jogo, existe a crença de se obter resultados favoráveis que possam criar ocasiões para adquirir bens materiais de maneira mais rápida. Apesar de toda essa admiração, os estudos matemáticos direcionados ao acaso começaram de forma muito tardia. A ideia de acaso é demasiadamente complexa e obteve diversos pontos de vistas ao longo da história das ciências, uma vez que se vincula à nossa própria visão do mundo. No caso dos povos que habitavam o antigo Egito ou a Mesopotâmia, a visão do mundo com relação ao acaso estava associada às intervenções divinas. O acaso era apresentado como uma interpretação da vontade dos deuses a fim de prever o futuro, seja ele através de consultas de presságios ou predições das pitonisas. Esta relação sobrenatural entre o acaso e o divino perdurou no comportamento humano por bastante tempo.

> *"(…)Uma outra razão, certamente mais importante, é que o resultado de um sorteio "ao acaso" é a expressão da vontade*

> *divina, e como tal, não deveria ser calculada, pois não devemos desafiar Deus (ou o Diabo)”*
>
> (Pichard, 1997, p. 107).

Assim, o desfecho de uma guerra, a justificativa de algumas pessoas passarem necessidade, os desastres naturais e até mesmo os resultados de jogos de azar eram de responsabilidade da vontade de um ser superior. Desta forma, o pensamento era de que os fenômenos que ocorriam eram benéficos ou maléficos devido ao comportamento de um indivíduo ou nação ser mais ou ser menos agradável a esse ou esses seres divinos.

Notamos que a ciência enfrentava barreiras para formalizar o acaso. Não só existia um enorme bloqueio ao qual a compreensão de que qualquer acontecimento ocorria de acordo com a vontade divina como também não havia interesse no estudo de jogos de azar.

Porém, com a evolução da sociedade, o interesse do jogador em planejar estratégias para as apostas, com o intuito de ganhar fez com que o primeiro passo referente à formalização da probabilidade fosse dado. Passo esse que foi dado pela escola italiana.

Em 1202, com o “*Liber Abaci”*, de Fibonacci (1170 – 1250), os números adquiriram formas que davam condições de se fazer os primeiros cálculos de probabilidade. O livro apresenta conteúdos de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria e defende com firmeza a notação indo-arábica, muito se devendo a ele pela introdução desses numerais na Europa.

No século XIV a concepção da sociedade começa a mudar, ao menos na Europa, com o início do movimento renascentista em que o centro das pesquisas é o próprio ser humano e não mais a religião. Com isso, as percepções de um ser divino por detrás de fenômenos naturais começam a perder força e com isso, os estudos precursores sobre a teoria das probabilidades começam a tomar forma.

Luca Pacioli (1445-1517), italiano que depois ficou conhecido como o frei franciscano Luca di Borgo, escreveu “*Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità”*, publicada em Veneza no ano de 1494. Foi um dos primeiros autores a apresentar o Problema dos Pontos, também conhecido como problemas das apostas. Este problema, dizia:

> *“... A e B estão empenhados em um honesto jogo de balla. Eles concordam em continuar até que um deles vença seis rodadas. O jogo é encerrado quando A vencia cinco, e B três rodadas. Como deveriam ser divididas as apostas?”*

(Gianella, 2003, 38)

Esse problema tem uma relevância muito grande para a Matemática já que várias pessoas tentaram resolvê-lo. Entre essas pessoas estava o italiano Niccolo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia, que publicou em 1556 a obra "*Trattato Generale di Numeri e Misuri*", que apresentava diferentes sugestões de soluções, embora não estivessem corretas. Apesar disso, sua obra foi importante pela influência que seu livro exerceu por um longo período.

1.1 - Abordagem Clássica ou Laplaciana

Girolamo Cardano (1501 – 1576) foi matemático, médico e amante dos jogos de azar. Sua obra *"Líber De Ludo Aleae"*, traduzida para *"Livro dos Jogos de Azar"*, escrita no séc. XVI e publicada somente em 1665 tinha como finalidade proporcionar aos apaixonados por esses jogos a adotar decisões apropriadas nas questões de jogos de azar naquela época. Provavelmente esse foi o primeiro livro que trata de situações regidas pela incerteza abordando de maneira ampla os jogos de azar, como jogos de cartas, dados, e até mesmo o gamão, analisando a necessidade de certa habilidade ou sorte durante essas práticas. Um detalhe significativo do "*Líber De Ludo Aleae*" é que os jogos possuem diferentes influências:

- Jogos de dados: O acaso é o único componente relevante;
- Jogos de cartas: Além do acaso, a habilidade é um fator preponderante.

Essa diferença fica clara pelo fato de nos jogos de cartas, o oponente não poder enxergar o que o jogador tem em mãos, enquanto nos jogos de dados, a partir do momento que os mesmos são lançados, todos sabem os resultados.

A obra de Cardano exibe todos os casos possíveis ao realizar o lançamento de dois dados, como por exemplo, que não existem apenas onze opções de resultados, considerando o fato da soma das faces irem de 2 até 12, mas sim trinta e seis combinações possíveis.

O também italiano Galileu Galilei (1564 – 1642), nascido em Pisa, escreveu "*Sopra le Scoperte dei Dadi*", que foi traduzido para *"Considerações sobre o Jogo de Dados"*, publicado apenas em 1718, e que introduz o conceito sobre as diferentes frequências de determinadas somas no lançamento de três dados.

> *"O fato que em um jogo de dados determinados números são mais vantajosos que outros tem um motivo muito óbvio, isto é, que alguns são mais facilmente e frequentemente feitos do que outros, que depende de seu poder de ser obtido de maior variedade de números."*
>
> (Galilei, 1898, p. 591-594)

A partir daí evidencia que apesar de serem seis as possibilidades da soma das faces de três dados resultarem em 9, e também seis da soma das faces de três dados resultarem em 10, o estudo mostra que a soma 10 é mais frequente do que a soma 9, pois das duzentas e dezesseis possibilidades de resultados ao lançar três dados, em vinte e sete a soma das faces é igual a 10 e em vinte e cinco a soma das faces é igual a 9. Essa distribuição fica evidenciada nas tabela 2 . Em cada coluna representamos o valor obtido na soma dos três dados. Abaixo desse valor temos os possíveis casos que o formam e na coluna imediatamente a sua direita, a quantidade de vezes em que podem acontecer de acordo com as permutações dos dados.

10		9		8		7		6		5		4		3	
631	6	621	6	611	3	511	3	411	3	311	3	211	3	111	1
622	3	531	6	521	6	421	6	321	6	221	3				
541	6	522	3	431	6	331	3	222	1						
532	6	441	3	422	3	322	3								
442	3	432	6	332	3										
433	3	333	1												
	27		25		21		15		10		6		3		1

Tabela 2: Soma das faces de três dados.[2]

De acordo com Veja-Amaya, as produções de Cardano e Galileu trazem os argumentos que hoje são identificados como o Enfoque Clássico da Probabilidade.

> *"Estabelecem a noção de probabilidade de um evento A como a proporção de resultados equiprováveis favoráveis a A em razão ao número total de resultados possíveis; relacionam*

[2] Fonte: GALILEO GALILEI, Opere, Firenze, Barbera, 8 (1898), p. 591–594

problemas combinatórios e jogos de azar; no Livro, Cardano discute as noções de jogo justo e regularidade estatística; Galileu utiliza argumentos probabilísticos no estudo de erros em observações astronômicas."

(Vega-Amaya, 2002, p. 58)

Depois de registros históricos indicando a participação de Tartaglia, Cardano e Galileu, não existe nenhuma referência no século XVI de outros conhecedores deste tema.

Durante esse período o problema dos pontos ainda não possuía uma solução, porém no dia 24 de agosto de 1654, Pascal (1623–1662) escreve para Fermat (1601–1665), listando todas as possibilidades das próximas jogadas.

"Como para o jogador A faltavam duas rodadas para vencer e o jogador B três rodadas, Pascal percebe que eram necessárias no máximo quatro rodadas para o jogo terminar, formando um total de 16 possibilidades. Dentre estas, 11 casos favoráveis ao jogador A e 5 favoráveis a B. O prêmio, então, seria dividido nessa proporção."

(DAVID, 1962)

De acordo com Smith (1929) sete cartas foram trocadas entre os dois e existe uma publicação da segunda carta, que é uma resposta de Fermat a Pascal, como podemos ver abaixo:

"Senhor,

Se me comprometo a fazer um ponto com um único dado em oito jogadas, e se nós combinarmos depois que o dinheiro é colocado em jogo, que eu não devo fazer a primeira jogada, é necessário pela minha teoria de que eu pegaria $\frac{1}{6}$ *do total da soma por causa da primeira jogada.*

Se nós concordamos depois que eu não devo fazer a segunda jogada, eu poderia, pela minha quota, pegar o sexto do restante que é $\frac{5}{36}$ *do total. Se, depois disto, nós concordarmos de que eu não deveria fazer a terceira jogada, eu poderia indenizar-me, tomando* $\frac{1}{6}$ *do restante* *que é $\frac{25}{216}$ do total. E se subsequentemente, nós concordarmos novamente que eu não deva fazer a quarta jogada, eu poderia tomar $\frac{1}{6}$ do restante ou $\frac{125}{1296}$ do total, e eu concordo com você que é o valor da quarta jogada, supondo que já tenha feito as jogadas anteriores.*

Mas você propôs no seu último exemplo em sua carta (eu citei muitos de seus termos) que se eu me comprometo a encontrar seis em oito jogadas e se eu tiver jogado três vezes sem achá-lo, e se meu oponente propuser que eu não deveria jogar a quarta vez, e se ele desejar me tratar com justiça, é apropriado que eu tenha $\frac{125}{1296}$ da soma inteira de nossas apostas.

Isto, no entanto, não é verdade pela minha teoria. Para este caso, as três primeiras jogadas tendo nada ganho o jogador que estiver com os dados, a soma total, então, permanecerá no jogo, quem detém os dados e quem concordar em não jogar sua quarta jogada deverá obter $\frac{1}{6}$ de seu prêmio.

E se ele tiver jogado quatro vezes sem encontrar o ponto desejado e se eles concordarem que ele não deve jogar a quinta vez, ele, porém, terá $\frac{1}{6}$ do total de sua quota. Uma vez que a soma toda fica em jogo, ela não segue somente a teoria, mas ela é de fato senso comum que cada jogada deveria ser de igual valor.

Eu o aconselho, portanto (a escrever-me) que eu posso saber se nós concordamos na teoria, como eu acredito (o que nós fazemos), ou se nós diferimos somente nesta aplicação.

Eu estou, muito cordialmente, etc.,

Fermat.”

O interesse de Pascal pelo problema das apostas se deve ao francês Antoine Gombauld, que se autodenominava Cavaleiro de Méré (1607–1684), e que para conseguir êxito em jogos nos cassinos se apoiava nos seus conhecimentos matemáticos. Foi de Méré quem sugeriu a Pascal encontrar uma solução para o problema das apostas, dando início assim a comunicação entre Pascal e Fermat.

Essa troca de cartas entre Pascal e Fermat teve como consequência não só avançar no problema dos pontos, como também aguçar a curiosidade do holandês Christiaan Huygens (1629–1695) em uma de suas viagens a Paris em 1655. Huygens foi um matemático, físico e astrônomo, que ficou famoso no campo da matemática, através das contribuições da análise infinitesimal das cônicas (1656) e do cálculo da superfície de um seguimento de um paraboloide de revolução (1657). Em 1657, o holandês complementou os estudos de Pascal e Fermat ao escrever o primeiro tratado formal sobre probabilidades *“De Ratiociniis in Ludo Aleae”* traduzido para *“Raciocinando em Jogos de Dados”*, que seria, de acordo com Viali, a primeira obra impressa sobre a teoria da probabilidade.

Na parte final do século XVIII, inspirado por Jacob Bernoulli (1654 – 1705), temos as obras *“Théorie analytique des probabilités” e “Essai Philosophique sur les Probabilités”*, publicadas respectivamente em 1812 e 1814 (na linha histórica alguns indicam que a publicação pode ter sido realizada em 1825, enquanto outros indicam 1840), e traduzidas por *“Teoria Analítica da Probabilidade”* e *“Ensaio Filosófico sobre Probabilidade”*, pelo matemático francês Pierre Simon, o Marquês de Laplace (1749 − 1827). Nesse momento surge a compreensão teórica da probabilidade que fornece assim o conceito básico fundamentado pela hipótese da equiprobabilidade.

> *“A teoria dos acasos consiste em reduzir todos os eventos do mesmo tipo a um certo número de casos igualmente possíveis, isto é, tais que sejamos igualmente indecisos sobre sua existência, e a determinar o número de casos favoráveis ao evento do qual procuramos a probabilidade.”*
>
> (Laplace, 1814, p. 35).

Laplace também é o responsável pela definição utilizada no ensino básico atualmente:

> *“a razão deste número àquele de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, que é assim não mais que uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis.”*
>
> (Laplace, 1814, p. 35).

Essa definição costuma aparecer de forma bastante frequente nos livros como:

$$\frac{n° \; de \; casos \; favoráveis}{n° \; de \; casos \; possíveis}$$

Mas isso não quer dizer que o estudo das probabilidades permaneceu estagnado após essa definição. O conceito de probabilidade evoluiu e deu espaço para a concepção moderna em termos de medida:

> *"Mas isto supõe os diversos casos igualmente possíveis. Se não o forem, determinaremos primeiramente suas possibilidades respectivas as quais a justa apreciação é um dos pontos mais delicados da teoria dos acasos. Então a probabilidade será a soma das possibilidades de cada caso favorável."*
>
> (Laplace, 1814, p. 38).

Em uma situação na qual a quantidade de informações é insuficiente sobre os possíveis resultados nos diversos casos possíveis, pode ser considerada como natural a equiprobabilidade sobre estes diferentes casos.

Logo após a propagação da abordagem clássica despontou a semente de uma nova definição.

1.2 - Abordagem Frequentista

No início do século XVIII, para ser mais preciso, em 1713, em publicação póstuma do matemático suíço, Jacob Bernoulli (1654 – 1705), a teoria da probabilidade passa a ser vista com outros olhos: a abordagem da probabilidade através de um modelo determinista. Bernoulli, em seu livro *"Ars Conjectandi"*, traduzido para *"A Arte da Conjectura"*, admite que a teoria das probabilidades tem uma imensa praticabilidade em situações do cotidiano e descreve a necessidade de conciliar a ideia de eventos equiprováveis em experiências que envolvem saúde da população e expectativa de vida, e então propõe um tratamento baseado em conceitos estatísticos.

> *"(...) Assim são conhecidos os números de casos para que seja sorteado de uma urna um cartão branco ou preto, e dizemos que todos são igualmente possíveis, uma vez que é evidentemente determinado e conhecido o número de cartões de cada espécie, e que não vemos nenhuma razão para que este ou aquele deva ser sorteado mais vezes que não importa qual outro. Mas quem então, entre os mortais, definiria, por exemplo, o número de doenças, que são tantos casos; quem tem o poder de invadir as inumeráveis partes do corpo humano na medida que se quiser, e quem tem o poder de nos prever a morte? Quem definirá o quanto é mais fácil*

> *a este ou aquele, a peste ou a hidropisia, a hidropisia ou a febre, de aniquilar um homem de modo que a partir disto possa ser formada uma conjectura sobre o estado futuro de vida ou de morte? (...) Mas, na verdade, aqui se oferece a nós um outro caminho para obtermos o que procuramos. Os dados que não nos são oferecidos "a priori" o são ao menos "a posteriori", isto é, serão numerosos exemplos semelhantes; porque devemos presumir que, em seguida, cada fato pode acontecer ou não acontecer no mesmo número, em um estado de coisas semelhantes (...)."*
>
> (BERNOULLI, 1713, citado em COUTINHO, 1994, p.16.)

De acordo com Bernoulli, ao realizar um experimento de maneira incessante, tal qual o lançamento de um dado de seis faces ocorrendo infinitas vezes, então a frequência relativa com que certo evento ocorre, corresponderá a probabilidade de ocorrência desse evento. Dessa forma, depois de contabilizar uma ampla quantidade de resultados em uma experiência é muito pouco provável que a frequência relativa não esteja próxima da medida real de probabilidade. Essa teoria foi batizado posteriormente, de A Lei Fraca dos Grandes Números, e se aplica somente para um grande número de observações.

Um exemplo de aplicação dessa lei ocorre ao lançarmos um dado com as faces numeradas de 1 a 6, e assim, obtermos que a probabilidade de qualquer uma das faces é de $\frac{1}{6} = 0{,}16666\ ...$, pois cada um desses eventos é equiprovável, ou seja, apresenta uma igualdade de chances. Ao simular os resultados do lançamento de um dado de forma contínua utilizando o computador, temos:

Resultados	Contagem	Frequência %	Probabilidade %
1	13	13	16.667
2	15	15	16.667
3	18	18	16.667
4	19	19	16.667
5	17	17	16.667
6	18	18	16.667
Ensaios	100		

Tabela 3: Número de lançamentos de um dado igual a 100.

Observe que quanto maior o número de lançamentos do dado, mais o resultado experimental se aproxima da probabilidade esperada.

Resultados	Contagem	Frequência %	Probabilidade %
1	143	14.3	16.667
2	165	16.5	16.667
3	169	16.9	16.667
4	181	18.1	16.667
5	175	17.5	16.667
6	167	16.7	16.667
Ensaios	1000		

Tabela 4: Número de lançamentos de um dado igual a 1000.

Resultados	Contagem	Frequência %	Probabilidade %
1	1662	16.62	16.667
2	1619	16.19	16.667
3	1684	16.84	16.667
4	1718	17.18	16.667
5	1667	16.67	16.667
6	1650	16.5	16.667
Ensaios	10000		

Tabela 5: Número de lançamentos de um dado igual a 10000.

A partir do enfoque dado por Bernoulli, a ciência dá o passo inicial ao tentar estabelecer as chances de um evento ocorrer: o chamado método experimental. Tal enfoque considera que o evento e o experimento determinam o conceito de probabilidade. Esta consideração é justificada pela concentração das frequências observadas em uma experiência repetida infinitas vezes. A obra de Bernoulli permitiu posteriormente colaborações importantes à teoria das probabilidades, ressaltando-se a obra do francês Abraham De Moivre (1667−1754), *"Doctrine of Chances"*, conhecida por *"Doutrina das Chances"*.

Ainda no século XVIII, em paralelo as ideias de Bernoulli, surge outra evolução da noção de probabilidade, o emprego de princípios subjetivos na teoria das probabilidades.

1.3 - Abordagem Subjetiva

Com o avanço dos estudos uma nova vertente foi estabelecida: a probabilidade subjetiva. Thomas Bayes (1702 – 1761) surgiu com elementos que se tornaram fundamentais pelos estatísticos nos dias de hoje. Bayes era formado em teologia e um grande admirador de matemática, apesar de jamais exercer oficialmente alguma carreira relacionada. Sua obra *"Essay towards solving a problem in the doutrine of chances"*, traduzida por *"Ensaio Voltado para Solução de um Problema na Doutrina do Acaso"* foi publicada postumamente pela Royal Society e esclarecia como ele se comportava ao tentar resolver os problemas sugeridos pelos matemáticos que o antecederam.

Basicamente ela sugeria o uso inovador da natureza subjetiva na estimativa de um evento, ou seja, o conhecimento do indivíduo que manuseia os números entra de maneira considerável nos cálculos. Esse conhecimento é baseado na quantidade de informação que se tem e que vão influenciar de forma decisiva a previsão. Por exemplo, em uma partida de cara ou coroa disputada entre duas pessoas é de consciência geral que a chance de alguém ganhar em um único lançamento é de 50%. Entretanto, se a partida for disputada jogando a moeda quatro vezes, o método de Bayes de fazer prognóstico vai se ajustando a cada lançamento. Ao saber o resultado de algum lançamento, como por exemplo sair "cara" nas duas primeiras jogadas, as chances para as jogadas subsequentes não serão mais meio-a-meio.

Visto isso, notamos que diversas situações cotidianas podem ser geradas atendendo as condições retratadas por Bayes. Em resumo, a interpretação subjetiva, ao contrário da frequentista, se baseia no grau de crença subjetivo que um sujeito possui sobre determinado evento. Observe algumas indagações que podem indicar tal ocorrência.

1. Qual é a probabilidade de melhora na economia de nosso país ano que vem?
2. Qual é a probabilidade de levar o guarda-chuva dado que a meteorologia prevê chuva para o dia de hoje?
3. Qual a probabilidade de se obter sucesso em uma entrevista de emprego?

Problemas desse tipo não possuem resposta quando analisados através da abordagem clássica ou da abordagem frequentista de probabilidade e apesar de estar fundamentada rigorosamente sob a razão, essa medida de probabilidade passou por várias polêmicas conforme progredia.

No início do século XX, Bruno de Finetti (1906 – 1985) e Frank Ramsey (1903 – 1930) vislumbraram a probabilidade subjetiva fundamentando-se nos mais sortidos elementos conhecidos sobre um determinado evento. O problema, que gera críticas até hoje, de tratar a probabilidade dessa forma é que as medidas de probabilidade atribuídas proporcionam uma variação de acordo com a perspectiva utilizada por cada indivíduo. O nosso entendimento sobre o mundo é incompleto, até mesmo imperfeito, e as informações que reunímos estão impregnados de rumores, boatos ou distorções. Por exemplo, se perguntarmos a um indivíduo, que não possui informação sobre os períodos de chuva nos estados do Brasil, sobre qual é a chance de que no mês de julho ocorra uma seca nos Lençóis Maranhenses, este pode afirmar que a probabilidade é de 80%. Enquanto qualquer outro sujeito que habite a região e possua conhecimento sobre o clima local pode avaliar que a probabilidade é equivalente a 30%.

Porém, problemas como o desse caso podem ser solucionados se criarmos um modelo probabilístico utilizando como base de informações as diferentes visões dos observadores. Entretanto, classificar essa medida é bastante complicado em virtude da dificuldade de estabelecer características que a tornem uma medida de probabilidade conveniente.

Assim, devemos garantir que os axiomas da probabilidade descritos por Kolmogorov são respeitados, para que essa medida de probabilidade recém estabelecida seja considerada coerente. Esta é a essência do Teorema de Ramsey-De Finetti. Essa coerência vem da crença que um sujeito possui na verdade uma proposição. Com isso, é fácil perceber que a partir de conhecimentos distintos que cada sujeito possui sobre um determinado evento devemos encontrar medidas de probabilidades diferentes.

Por conta disso, essa interpretação recebe muitas opiniões controversas. Não existe garantia alguma que cada indivíduo fornecerá toda a informação conhecida a respeito de um fato tal que possa ignorar algum dado conhecido para que a probabilidade obtida seja vantajosa para ele.

Mesmo assim, podemos utilizar a interpretação subjetiva em muitos casos. Por exemplo, quando um médico atribui a probabilidade à expectativa de vida para pessoas com câncer, ele o faz baseado em informações adquiridas através da experiência de profissão ou em uma base de dados. Previsão do tempo é um outro exemplo.

Desta forma, a chamada probabilidade subjetiva, manifesta-se através do ponto de vista particular de um sujeito e pode ser determinada pela qualidade e pela abundância de informação que irá variar de indivíduo para indivíduo e, ao longo do tempo, conforme o avanço de sua percepção decorrente de análises características tendo em mente elementos de difícil mensuração termos diretos tal quais: intuição, experiência, conhecimento.

O século XVIII contribuiu de forma acentuada com a evolução da Teoria da Probabilidade. Após as abordagens frequentista e subjetiva, temos o surgimento da quarta das cinco vertentes atuais existentes: a abordagem geométrica.

1.4 - Abordagem Geométrica

O matemático francês George-Louis Leclerc (1707-1788), o Conde de Buffon, em 1733 submeteu à Acedémie Royale des Sciences um trabalho com diversos problemas geométricos em que a abordagem geométrica da probabilidade era citada, e entre eles, apresentava o “problema das agulhas” e o “jogo de Franc Carreau”.

- O problema das agulhas:

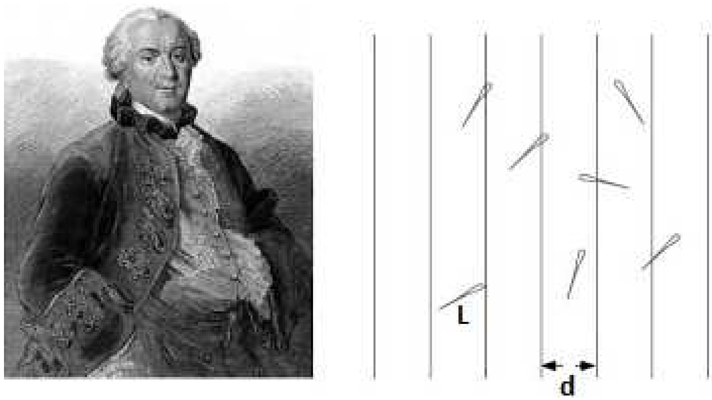


Figura 2: A agulha de Buffon[3]

“Sobre um plano formado apenas por placas paralelas e iguais, joga-se uma haste de comprimento determinado e que suponhamos de largura desprezível. Quando este objeto cairá sobre uma única placa?”.

Esse problema é também conhecido como “Problema de Buffon-Laplace”, pois aparece em “*Théorie analytique des probabilités*”. Ao tentar resolvê-lo, Buffon lança um objeto, como uma agulha, de forma aleatória, sobre um feixe de retas paralelas equidistantes localizado sobre um plano, para determinar a probabilidade do objeto de comprimento L cruzar ou não uma das linhas paralelas. Após realizar contínuas experiências, Buffon descobriu que ao tentar repetidas vezes lançar a haste, a razão entre o número de vezes que a agulha cai sobre um dos feixes de retas paralelas do plano pelo número total de lançamentos será, aproximadamente, igual a $\frac{2L}{d\pi}$,

[3] Fonte: http://gigamatematica.blogspot.com/2011/05/agulha-de-buffon.html

onde L diz respeito ao comprimento da haste lançada e d à distância entre as retas paralelas, com $L \leq d$. Assim, temos:

$$P = \frac{2L}{d\pi}$$

E desse resultado tiramos duas consequências:

$$L = \frac{d}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{\pi} \quad \text{e} \quad L = d \Rightarrow P = \frac{2}{\pi}$$

- o jogo de Franc Carreau (jogo do ladrilho):

Também conhecido como jogo do disco, era uma atividade muito apreciada por crianças. O jogo consiste em lançar uma moeda, de raio r, em um piso de azulejos de forma quadrada com $L > 2r$. Os jogadores então apostavam na posição final da moeda:

1) A moeda para totalmente sobre um único azulejo (posição chamada “franc-carreau”);
2) sobre uma junta entre dois azulejos;
3) sobre mais juntas?

A grande observação de Buffon se deu ao perceber a relação entre o centro da moeda e a parte interior do quadrado. E assim, notou que para calcular a probabilidade da moeda cair completamente dentro de um ladrilho era necessário determinar a probabilidade de o centro da moeda cair dentro de um quadrado de lado $L - 2r = L - d$, onde $d = 2r$.

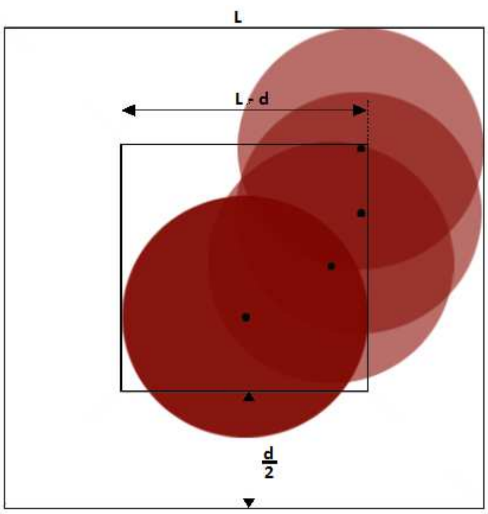


Figura 3: Quadrados semelhantes. [4]

[4] Fonte: ALCÂNTARA, Ricardo. Probabilidade Geométrica em Lançamentos Aleatórios. P. 22.

Essa probabilidade é determinada através da razão entre as áreas do quadrado e do ladrilho, pois a probabilidade de o centro da moeda cair em uma região é proporcional à área dessa região. Portanto, temos

$$P = \frac{(L-2r)^2}{L^2},$$

ou seja,

$$P = \left(1 - \frac{2r}{L}\right)^2.$$

Buffon, em seu *Essai d'Arithmétique Morale*, publicado em 1777, explica a utilização da geometria na Teoria das Probabilidades:

> *"A análise é o único instrumento do qual nos servimos até o momento, na ciência das probabilidades, para determinar e fixar as relações do acaso; a geometria parecia pouco apropriada para uma obra tão sutil; no entanto se olharmos de perto, será fácil reconhecer que esta vantagem da análise sobre a geometria é verdadeiramente acidental, e que o acaso, segundo as modificações e condicionamentos que sofre, encontra-se no campo da geometria, tanto quanto que no da análise: para nos assegurarmos, será suficiente prestar atenção ao fato que os jogos e as questões de conjectura ocorrem ordinariamente unicamente quando utiliza razão de quantidades discretas; o espírito humano, mais familiar com os números que com as medidas de extensão, os preferiu sempre; os jogos são uma prova, porque suas leis ao uma aritmética contínua; para utilizar então a geometria em posse dos seus direitos sobre a ciência do acaso, não se trata de inventar os jogos que se desenrolam sobre a extensão e suas relações, ou calcular o pequeno número daqueles desta natureza que foram já encontrados. O jogo do franc-carreau pode nos servir de exemplo:(…)"*

Assim, Buffon colabora com mais um grande passo dado pela teoria das probabilidades.

1.5 - Abordagem Axiomática

Na segunda metade do século XIX a matemática passa por um processo de mudança. Havia a necessidade de atribuir à Probabilidade o mesmo rigor que a Geometria Euclidiana e a Álgebra e, portanto, fazer com que esse conceito passasse por um processo de axiomatização. É nesse momento que a história de dois personagens se entrelaça com a história da probabilidade. São eles, Émile Borel (1871 − 1956) e Henri Lebesgue (1875−1941), que, com o desenvolvimento da Teoria da Medida e Integração, contribuem para estabelecer uma analogia entre a medida de um conjunto e a probabilidade de um evento. Borel iniciou esse progresso ao estabelecer um certo grau de formalização em 1909 com sua obra *"Eléments de la théorie des probabilités"* e, mais tarde, em 1914, deu o passo de fundação da axiomatização em sua obra *"Le Hasard"*, entretanto somente com a dedicação de Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 − 1987) em sua abordagem teórica em *"Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung"*, traduzido para *"Fundamentos da Teoria das Probabilidades"* publicado em 1933, que a teoria da probabilidade foi fundada de modo formal a partir de axiomas. A partir dessa obra, tem-se início a etapa moderna da Teoria das Probabilidades.

A base teórica de Kolmogorov reúne todas as interpretações probabilísticas em um único modelo. Através de seus axiomas podemos interpretar cada caso apresentado anteriormente como uma parte específica, ou caso particular, de sua teoria. Entretanto, isso não minimiza ou impossibilita as diversas interpretações. Essas estão associadas a tipos de eventos e suas próprias circunstâncias enquanto a abordagem axiomática apresenta natureza estritamente matemática e tem a finalidade de colocar um alicerce as teorias probabilísticas desenvolvidas até o início do século XX.

De acordo com Kolmogorov, seja $A \subset \Omega$ um evento, associaremos a ele um número real $P(A)$, chamado *probabilidade* de A que satisfaz os seguintes axiomas:

1. A probabilidade de um evento A é um número real não negativo, isto é, $P(A) \geq 0$.

2. A probabilidade aplicada ao espaço amostral é sempre igual a 1, ou seja, $P(\Omega) = 1$.

3. Se $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ são disjuntos dois a dois, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, então $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Em outras palavras, a probabilidade da união infinita enumerável de eventos é igual a soma infinita enumerável das probabilidades dos eventos.

Como decorrência desses axiomas, temos potencial de deduzir uma série de propriedades indispensáveis para o cálculo das probabilidades. Esses são os alicerces que fundamentam a

Teoria das Probabilidades sobre as bases sólidas da Matemática, concedendo-lhe o mesmo grau de rigor que possui a Geometria ou a Álgebra.

Dessa forma, fica bastante evidente o avanço da Teoria da Probabilidade na história da matemática. E como em muitos ramos dessa ciência, cada avanço dado por uma teoria aumenta o seu campo de atuação ou influência, criando novas áreas de performance diferentes das já tradicionais. Atualmente a probabilidade desfruta de aplicações em genética, diversas áreas da estatística (inferência estatística), em engenharia (teoria das filas, teoria da informação e teoria do risco), em física (teoria dos erros experimentais), computação (teoria matemática da comunicação), etc.

2. A Relação entre Combinatória e Probabilidade no Ensino Básico

2.1 - Um Breve Histórico da Análise Combinatória

A história de todo o desenvolvimento da matemática começa ainda na pré-história devido às necessidades do homem de contar. A evolução da matemática se deu através do desenvolvimento de diversas técnicas em diversos campos de atuação do cotidiano, como por exemplo, a medição de terra, a agricultura, a previsão de eventos astronômicos e o comércio. A ideia de número e o método de contar se desenvolveram anos antes dos primeiros registros históricos, evidências arqueológicas mostram que o homem já era capaz de contar em 30000 a.C.

Nas eras mais primitivas o homem possuía algum senso numérico como acrescentar ou retirar alguns elementos de uma coleção pequena e com o desenvolvimento gradual da sociedade, ocorreram as contagens da quantidade de componentes que faziam parte de sua tribo, tornava-se necessário saber se seu rebanho estava diminuindo, verificar a quantidade de armas, as reservas de comida em um depósito e ainda no final de confrontos militares se o efetivo de soldados estava completo ou não, assim a criação dos números ocorreu devido as necessidades de ordem prática e utilitária.

O método mais antigo de contar se baseava em um registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca, que facilita comparar duas coleções de objetos, de mesma natureza ou não, sem ter que recorrer à contagem abstrata. Por exemplo, para a contagem dos elementos de um rebanho podia associar cada um deles a marcas no barro, entalhes num pedaço de madeira ou fazendo nós numa corda.

Figura 4: Osso de Ishango exposto no Real Instituto Belga de Ciências Naturais. [5]

[5] Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Osso_de_Ishango

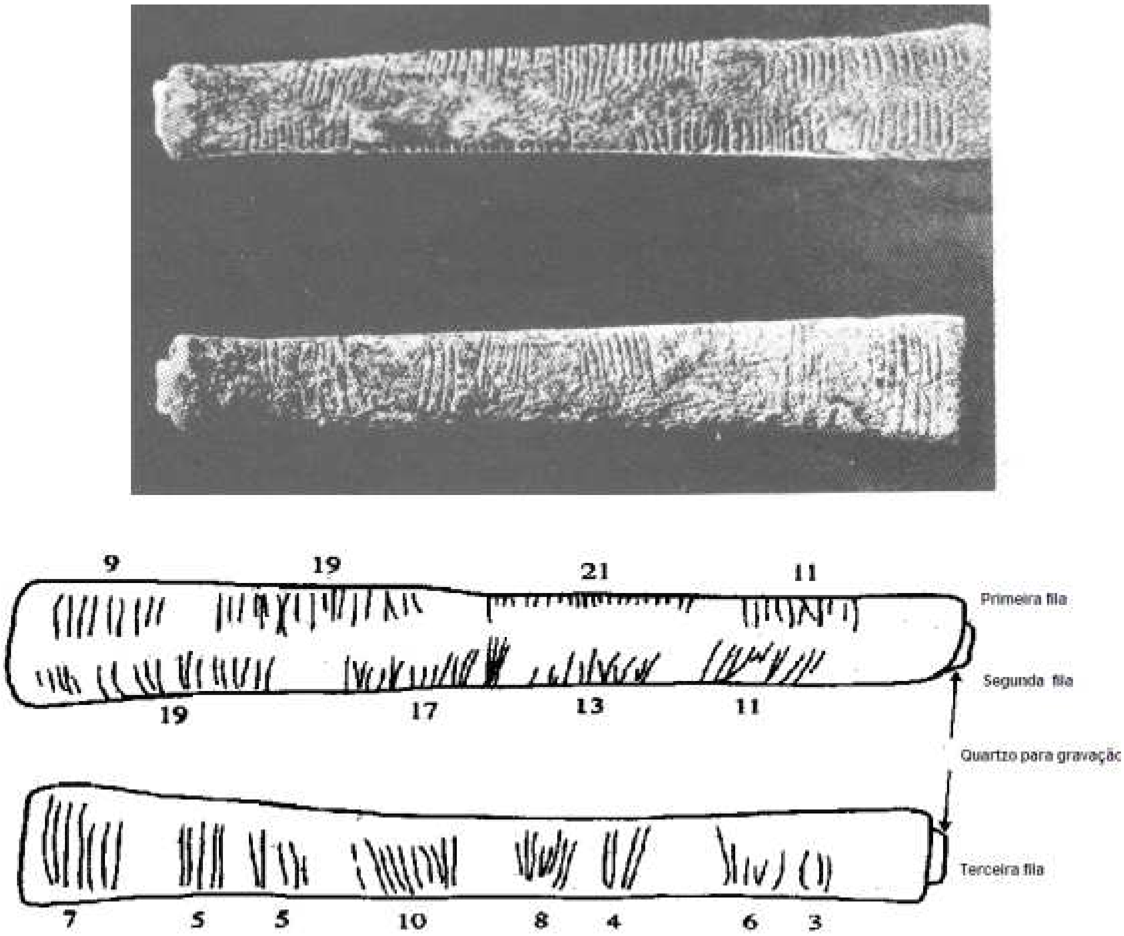


Figura 5: Marcas do osso de Ishango .[6]

No osso de Ishango, na figura 4, temos um exemplo disso. Em uma de suas extremidades está encravado um pedaço de quartzo, utilizado para produzir as marcas das três filas representadas na figura 5. Várias suposições são feitas a respeito das marcas contidas no osso, pois temos as seguintes coincidências:

- as somas das quantidades das marcas da segunda e terceira filas são iguais a 60;
- as marcas da primeira fila representam 10 + 1, 20 + 1, 20 – 1, 10 – 1;
- as marcas da segunda fila: 11, 13, 17 e 19 são números primos;

[6] Fonte: http://profjerriomarferreira.blogspot.com/2016/

- na terceira fila os números adjacentes passam a ideia de multiplicação ou divisão por 2: (3 e 6, 4 e 8, 5 e 10).

Depois de algum tempo, um registro verbal foi desenvolvido e, mais tarde, com o desenvolvimento da escrita, foram surgindo os símbolos para identificar esses números. Porém, algumas dificuldades no dia-a-dia não eram resolvidas quando envolviam grandes quantidades, então surgiu a necessidade de um outro método de contagem, que não fosse simplesmente a enumeração de objetos contados um a um, mas sim a noção de agrupamentos de objetos de um conjunto. A partir daí existem diversos rumores sobre o que poderia ter originado um princípio mais rudimentar da análise combinatória. A seguir, apresentamos três deles.

- Stomachion;
- O problema dos quadrados mágicos;
- Problema 79 do Papiro de Rhind.

Stomachion

Também conhecido como Loculus Archimedius. É um jogo de decomposição, similar ao Tangram Chinês, que consiste em determinar de quantas maneiras distintas podemos formar um quadrado agrupando 14 peças de formatos e tamanhos diferentes. Foi um problema geométrico proposto por Arquimedes de Siracusa (287 a.c. – 212 a.c.).

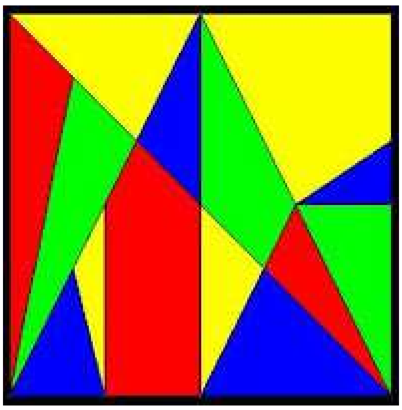


Figura 6: Stomachion.[7]

[7] Fonte: http://www.matthewpena.com/PHOTOS/FavPics2007/stomachion.html

Problema dos Quadrados Mágicos

Um dos problemas mais antigos que a história consegue datar. O quadrado mágico é todo arranjo de números naturais que produzem um quadrado nxn de forma que cada linha, coluna e diagonal possua soma constante. Cerca de 2200 a.c., o imperador Yu, o Grande, estava a beira de um rio quando viu uma tartaruga (na época considerado um animal sagrado), que em seu casco possuía marcas diferentes. Assim, Yu percebeu que as marcas no casco da tartaruga podiam ser transformados em números de um a nove formando um quadrado e que todos eles somavam quinze em todas as direções, como se estivessem em uma posição mágica. Esse quadrado ficou conhecido por Lo Shu.

Figura 7: Lo Shu.[8]

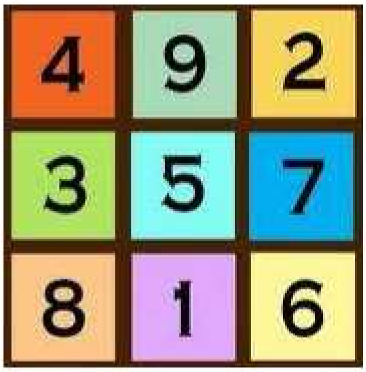


Figura 8: Lo Shu e o quadrado mágico.[9]

[8] Fonte: https://fengshuimechanics.com/2013/06/23/lo-shu-the-miracle-tortoise/

[9] Fonte: CARVALHO E SILVA, Jaime. A História dos Quadrados Mágicos. p.2.

Por esse motivo, os chineses acreditaram por muito tempo na relação entre esse quadrado e o misticismo. Esse quadrado mágico traria sorte e felicidade para seu dono por toda a vida. Acreditava-se que ele era o símbolo que reunia os princípios básicos que formavam o universo. A partir da ideia dos chineses quadrados mágicos maiores foram construídos pelos árabes e acabaram adquirindo um nome de acordo com seus tamanhos.

Saturno=15		
4	9	2
3	5	7
8	1	6

Jupiter=34			
4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Marte=65				
11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Solenóide=111					
6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Venus=175						
22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Mercúrio=260							
8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Luna=369								
37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Figura 9: Quadrados Mágicos[10]

Papiro de Rhind

O Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.) descreve que:

"Há sete casas, cada uma com sete gatos,
cada gato mata sete ratos,
cada rato teria comido sete espigas de trigo,
cada qual teria produzido sete hectares de grãos.
Quantos itens têm ao todo?"

[10] Fonte: CARVALHO E SILVA, Jaime. A História dos Quadrados Mágicos. p.4.

Desde as civilizações mais antigas as regras fundamentais de contagem e suas aplicações enfatizam a capacidade exagerada de memorização, como é visto no problema anterior.

BENS	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2401
Hectare de grãos	16807
TOTAL	19607

Figura 10: Problema Egípcio de Rhind.[11]

Mais tarde, um problema equivalente a esse foi apresentado no famoso *Liber Abaci* (1202) de Leonardo Fibonacci, enunciado da seguinte maneira:

"Há sete senhoras idosas na estrada de Roma.
Cada senhora tem sete mulos;
cada mulo transporta sete sacos;
cada saco contém sete pães;
com cada pão há sete facas;
para cada faca há sete bainhas.
Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?"

E uma terceira versão, mais familiar, do mesmo problema foi apresentada nos versos infantis ingleses:

" A caminho de St. Ives, encontrei um homem com sete esposas,
cada esposa tinha sete sacos,
cada saco tinha sete gatas,
cada gata tinha sete filhotes,
Entre filhotes, gatas, sacos e esposas, quantos iam a caminho de St. Ives?"

[11] Fonte: http://matematicosdemogi.blogspot.com/2016/07/os-papiros-da-matematica-egipcia-rhind.html

Todos os 3 problemas utilizam para a resolução o princípio multiplicativo como técnica de contagem. Técnica essa não utilizada com frequência na época tendo em vista que o primeiro trabalho publicado a respeito foi o livro chinês I – King ou o livro das permutações (1182 – 1135 a.C.).

No início da Era Cristã, a matemática e a Cabala, ciência mística dos hebreus, tinham uma relação muito grande que gerou estudos sobre agrupamentos, entenda isso como permutações e combinações. O trabalho místico Sefer Yetzirah (Livro da Criação), é um texto antigo pertencente ao corpus da cabala judaica que calculava os vários caminhos que as 22 letras do alfabeto hebreu podiam ser arranjadas, pois se acreditava que as combinações dessas letras tinham poderes mágicos. Na idade média, Rabbi ben Ezra (1092 – 1167), usou permutações e combinações com aplicações na astronomia.

No poema *"De Vetula"*, escrito em 1250, Richard de Fournival cria uma embate teórico sobre os cálculos de combinações referentes ao lançamento de três dados. Observando trechos deste poema percebemos que o método de contagem utilizado pelo autor se baseia em um raciocínio fundamentado na enumeração dos resultados possíveis para a soma dos pontos obtidos quando os dados são lançados.

"Talvez, no entanto, vós afirmaríeis que algumas são melhores
Que outras que os jogadores jogam, pela razão que,
Uma vez que um dado tem seis faces resultando seis números simples,
Sobre três dados existem dezoito,
Entre os quais somente três podem se apresentar.
Eles variam de diferentes formas, e entre as quais
Dezesseis somas compostas são produzidas. Elas não são contudo
De valores iguais, uma vez que o maior e o menor entre eles
Acontecem raramente e os intermediários frequentemente,
E as outras mais estas são próximas dos valores centrais,
Melhores elas são e mais frequentemente acontecem
[…]
Elas variam segundo cinqüenta e seis formas
segundo as configurações da face superior do dado,
E estas configurações segundo duzentas e dezesseis formas de aparecer.
Elas devem ser repartidas entre os números compostos interessando aos jogadores,

Assim que se deve,

Vós conheceis inteiramente o quão grande é seu ganho

Qualquer que possa ser, ou quão grande é sua perda."

(Bellhouse, 2000, pp. 134-135).

As aportes no campo da Análise combinatória não ficaram somente nas teorias. Os franceses Levi ben Gershon (1288 – 1344) e Nicole Oresme (1323 – 1382), foram os primeiros a dar sua contribuição ao estabelecer as regras para a permutação e combinação de *n* elementos tomados *k* a *k. Nicole, por exemplo,* escreveu em 1360, o trabalho "Tratactus de figuratione potentiorum et mensurarum difforitatum" , onde ele apresenta a soma dos números que representam as combinações de seis elementos tomados 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4 e 5 a 5.

Luca Pacioli (1455 – 1514) utiliza essa mesma notação para apresentar o número de permutações de qualquer quantidade de pessoas sentadas ao redor de uma mesa, na obra "*Summa de Arithimetica, Geometria, proportione et proportionalita*".

No Ocidente, o alemão Petrus Apianus (1495 – 1552) é o primeiro a apresentar o Triângulo Aritmético, futuramente conhecido por Triângulo de Pascal, na página de rosto de um livro de aritmética comercial, porém Niccolò Fontana Tartaglia (1499 -1559), foi o primeiro a relacionar o triângulo de Pascal com as potências de $(x + y)$ e a utilizar elementos de Análise Combinatória em jogos de dados.

A teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática em fins do século XVII e início do século XVIII. Dentro de poucos anos três notáveis livros surgiram e impulsionaram seu estudo, são eles:

- Traité du triangle arithmétique (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal;
- Dissertatio de ars combinatória (1666) de Leibniz e;
- Ars magna sciendi sive combinatoria (1669) de Athanasius Kircher.

Além deles, alguns trabalhos também tiveram um peso significativo, como os de John Wallis (1673), Bernard Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

Blaise Pascal (1623 – 1662) descreveu em 1654 como determinar os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$, mas não foi o primeiro a estudar o triângulo aritmético. Nos Elementos de Euclides, por volta de 300 a.C. podia ser encontrado o desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$. Esse triângulo também já era conhecido na China, por Chu Shih – Chieh, por volta de 1300, e antes disso pelos hindus e árabes.

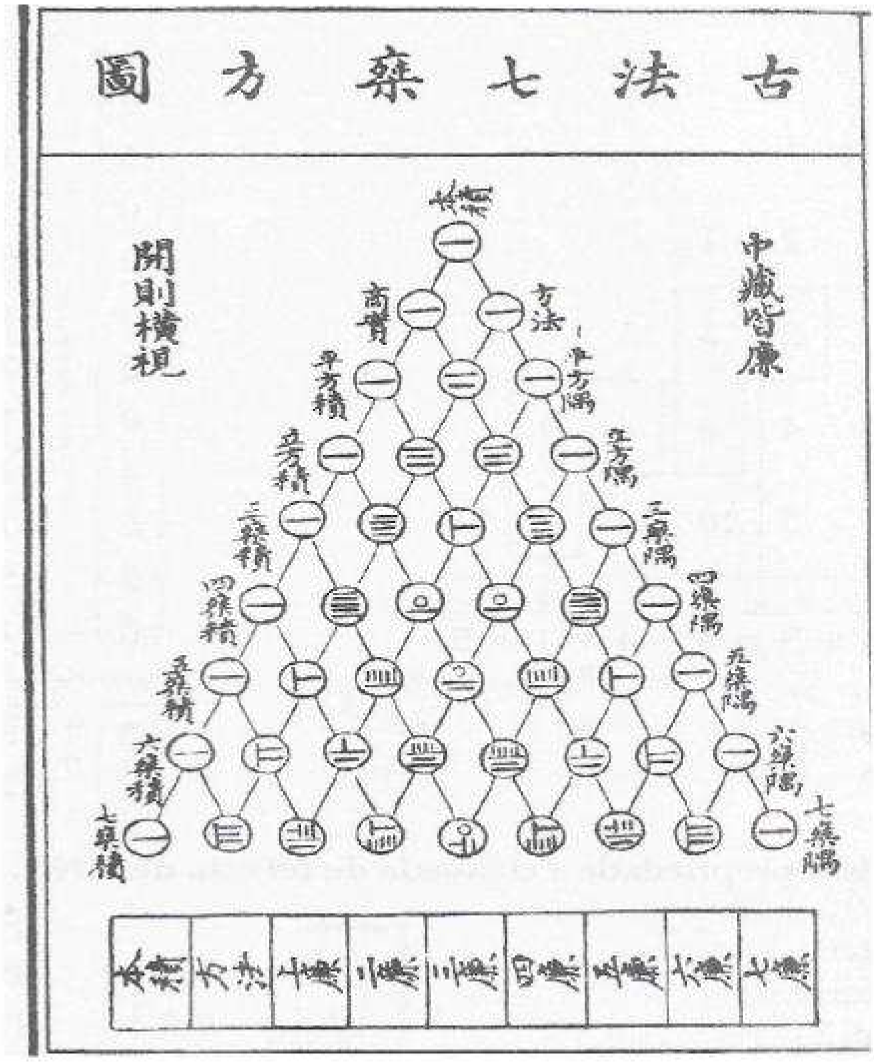


Figura 11: Triângulo Chu Shih-Chieh.[12]

Mesmo não sendo o primeiro ao estudar o triângulo aritmético, Pascal foi o pioneiro quando o assunto eram suas propriedades. Ele analisou as relações e aplicações das disposições dos números com as combinações e utilizava nas resoluções de problemas de probabilidade, devido a todas essas contribuições, o triângulo aritmético passou a ser conhecido por Triângulo de Pascal.

Dando continuidade aos trabalhos de Pascal, Michael Stifel, conseguiu determinar a lei de formação de cada elemento do triângulo de Pascal, essa lei recebeu o nome no Ocidente de Relação de Stifel, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Em 1550, mostrou como calcular $(1 + x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1 + x)^{n-1}$, nomeando os elementos como coeficientes binomiais. Apesar disso,

[12] Fonte: EVES, H, 2004, p. 250

o matemático árabe Al-Karaji, no final do século X, já conhecia a lei de formação dos elementos do triângulo de Pascal.

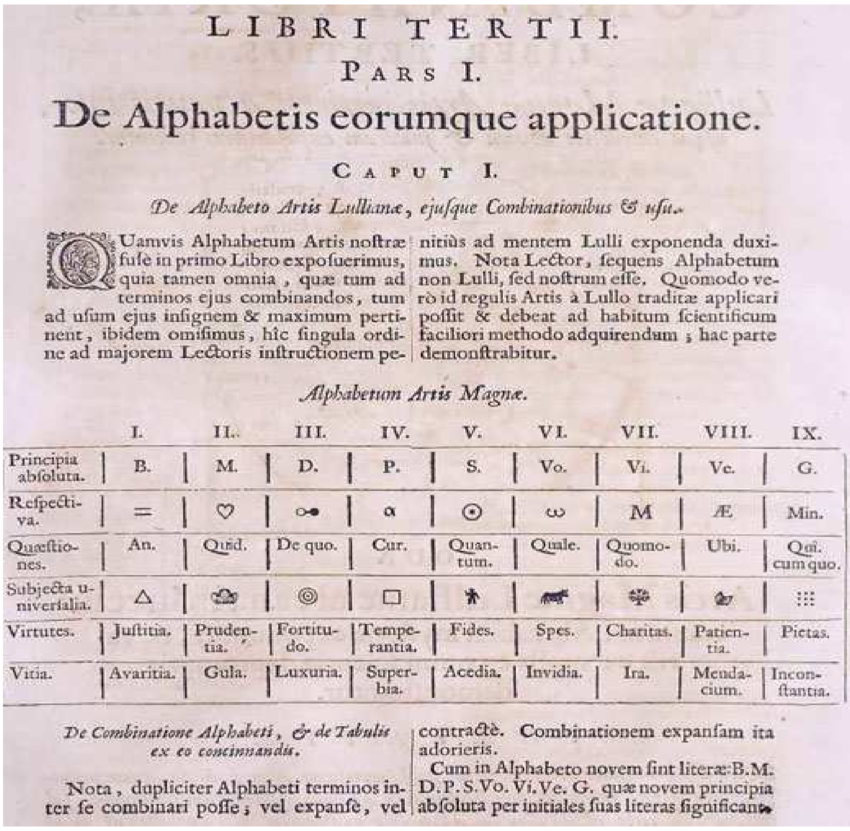
Jacob Bernoulli (1654 – 1705) usou a interpretação de Pascal para desenvolver $(x + y)^n$. A segunda parte do seu livro “*Ars Conjectandi*” foi publicada somente em 1713, e dedicada à teoria da Análise Combinatória como a conhecemos hoje.

Leibniz designava as permutações por variações, que é a palavra hoje utilizada por alguns autores para indicar arranjos. Em seu “*Dissertatio De Ars Combinatoria*” descreveu a combinatória como sendo “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos”. Seu livro teve muita influência no trabalho de Nicholson, que em 1818, definiu a análise combinatória como “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si”.

Ainda no século XVII, o alemão Athanasius Kircher (1602 - 1680) escreveu *“Ars magna sciendi sive combinatória”*. Apresenta nele essa nova e universal versão do método Lull para a combinação de conceitos, que se resumia em tentar calcular todas as combinações possíveis de alfabetos formados com 1, 2, 3, ..., 50 letras diferentes. Com esse conhecimento ele pretendia decifrar os hieróglifos egípcios.

Figura 12: Ars Magna Sciendi, Sive Combinatoria.[13]

[13] Fonte: https://history-computer.com/Dreamers/Kircher.html



LIBRI TERTII.

PARS I.

De Alphabetis eorumque applicatione.

CAPUT I.

De Alphabeto Artis Lullianæ, ejuſque Combinationibus & uſu.

Uamvis Alphabetum Artis noſtræ fusè in primo Libro expoſuerimus, quia tamen omnia, quæ tum ad terminos ejus combinandos, tum ad uſum ejus inſignem & maximum pertinent, ibidem omiſimus, hîc ſingula ordine ad majorem Lectoris inſtructionem penitiùs ad mentem Lulli exponenda duximus. Nota Lector, ſequens Alphabetum non Lulli, ſed noſtrum eſſe. Quomodo verò id regulis Artis à Lullo traditæ applicari poſſit & debeat ad habitum ſcientificum faciliori methodo adquirendum; hac parte demonſtrabitur.

Alphabetum Artis Magnæ.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
Principia abſoluta.	B.	M.	D.	P.	S.	Vo.	Vi.	Ve.	G.
Reſpecti-va.	=	♡	⊶	α	⊙	ω	M	Æ	Min.
Quæſtio-nes.	An.	Quid.	De quo.	Cur.	Quan-tum.	Quale.	Quomo-do.	Ubi.	Qui. cum quo.
Subjecta u-niverſalia.	△	[illegible]	◎	□	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	⁝⁝⁝
Virtutes.	Juſtitia.	Pruden-tia.	Fortitu-do.	Tempe-rantia.	Fides.	Spes.	Charitas.	Patien-tia.	Pietas.
Vitia.	Avaritia.	Gula.	Luxuria.	Super-bia.	Acedia.	Invidia.	Ira.	Menda-cium.	Incon-ſtantia.

De Combinatione Alphabeti, & de Tabulis ex eo concinnandis.

Nota, dupliciter Alphabeti terminos inter ſe combinari poſſe; vel expanſè, vel contractè. Combinationem expanſam ita adorieris.

Cum in Alphabeto novem ſint literæ: B. M. D. P. S. Vo. Vi. Ve. G. quæ novem principia abſoluta per initiales ſuas literas ſignificant

Figura 13: Alfabeto Lulliano.[14]

Leonard Euler (1707 – 1783) também contribuiu para o desenvolvimento da Análise Combinatória motivado pelo Problema das Sete Pontes de Königsberg, um teorema no campo da Teoria dos Grafos, parte importante da combinatória e também desenvolveu a técnica das funções geradoras, utilizadas para atacar o problema das partições de um inteiro.

No início do século XIX não havia significado preciso para o emprego dos termos arranjo e permutação. Ao longo do tempo muitos outros matemáticos deram sua contribuição aos problemas de contagem e a análise combinatória como um todo, porém o assunto ganhou popularidade, no século XX, após Percy Alexander MacMahon (1854 – 1929), publicar "Análise Combinatória", em 1915. Por suas publicações MacMahon foi equiparado aos grandes matemáticos Fermat, Pascal e Euler. Após MacMahon, um outro grande destaque surgiu: Gian-Carlo Rota (1932 – 1999). Ele começou como analista funcional e, após alguns anos mudou-se para análise combinatória, onde se tornou uma figura de destaque nacional e internacional ao

[14] Fonte: https://history-computer.com/Dreamers/Kircher.html

publicar o livro "*On the Foundations of Combinatorial Theory: I - Theory of Mobius Functions*" revolucionando toda a teoria da Análise Combinatória.

Além desses dois, Paul Erdos (1913 – 1996), matemático húngaro que trabalhou com problemas de análise combinatória, teoria dos grafos e teoria das probabilidades, publicou 1475 artigos, o que é um número bastante elevado a qualquer outro matemático na história, trabalhando com diversos colaboradores. Erdos não era um grande teórico, porém foi muito importante para a Análise Combinatória no desenvolvimento de diversos problemas.

Durante o desenvolvimento da análise combinatória diferentes símbolos foram adotados para denominar as mesmas operações. Gauss (1777-1855) designou por $\pi(n)$ o produto dos n primeiros números naturais, produto esse conhecido atualmente por fatorial de *n*. Legendre usava o símbolo $\Gamma(n+1)$. A notação atual, conhecida por $n!$, é devida a Cristian Kramp, enquanto, a Arbogast deve-se a denominação fatorial.

Durante a história, a análise combinatória aparece como uma ferramenta que teve uma enorme relevância no avanço da sociedade. Por exemplo, os anagramas, tema extremamente abordado em Análise Combinatória, em que são formados por diferentes disposições das letras de uma palavra, formando outras palavras com ou sem significado, foram amplamente utilizados durante as guerras e também por cientistas para se comunicarem com segurança, pois outros estudiosos poderiam se apossar de suas ideias e de seus trabalhos. De acordo com Morgado, esse desenvolvimento abundante da análise combinatória se faz devido à importância dada aos problemas pertinentes à enumeração, como o armazenamento de informações em bancos de dados, problemas operacionais e a problemas que podem ser modelados empregando a teoria dos grafos.

Atualmente a análise combinatória é aplicada como base de várias teorias: probabilidades, determinantes, estatística, teoria dos números, teoria dos grupos, topologia, etc.

2.2 - Análise Combinatória e o Pensamento Probabilístico

A Análise Combinatória é uma área da matemática que explora os conjuntos discretos e as configurações que se é capaz de conseguir com base em seus elementos, por meio de certas transformações que ocasionam modificações na disposição ou na arrumação dos mesmos. A disposição desses conjuntos pode ser de difícil compreensão, de acordo com a correspondência entre seus elementos. O raciocínio combinatório diz respeito ao refletir sobre todo processo frente à situações de enumeração, sendo assim, a combinatória exerce um papel essencial no crescimento das competências lógicas de um indivíduo. Considera-se que o entendimento do acaso trespassa pelos cálculos combinatórios - essenciais para o raciocínio formal.

Não devemos considerar a Análise Combinatória apenas como uma área da matemática, pois ela desempenha um papel fundamental à grande parte das formas de saberes imprescindíveis que a mente humana pode empregar ou desenvolver. A variedade de manifestações dessa área na natureza, seja por intermédio do ser humano ou não, dá origem a uma ampla quantidade de situações que podem ser difíceis de enumerar. A Combinatória é uma enorme ferramenta para auxiliar a enumeração de todos os diversos modos de ordenar ou combinar as possibilidades dessas manifestações. A solução de um problema combinatório requer engenhosidade e a total clareza das circunstâncias descritas pelo problema destacando-se assim a relevância das circunstâncias sugeridas e das representações simbólicas, tendo em vista a atribuição de sentido aos conceitos relacionados a essa área pelos estudantes.

Não só isso, mas ao tentar compreender os diferentes conceitos relativos aos tipos de problemas com os quais os estudantes tiveram contato, ressaltamos a necessidade da pesquisa, análise, investigação e classificação das diferentes situações que atribuem sentido a um conceito.

A combinatória, como dito anteriormente, nos auxiliará como um dispositivo para enumerarmos as combinações de possíveis eventos. Assim, poderemos utilizar os dados disponíveis para determinar as probabilidades de um evento qualquer, estabelecendo uma estreita conexão entre a Probabilidade e a Combinatória.

A Probabilidade foi por muito tempo inferiorizada na Matemática por se tratar de uma arte ligada a intervenções divinas. O cálculo das Probabilidades desenvolveu-se pelo interesse e análise dos jogos de azar, realizada principalmente por Blaise Pascal, Pierre Fermat, Pierre Simon Laplace e Jacques Bernoulli. Da noção inicial de uma incerteza, quando por exemplo buscamos identificar o resultado do lançamento de uma moeda, conseguimos atingir uma certeza aproximada a respeito de uma excessiva série de lançamentos. Essa passagem ao verificarmos longas séries de acontecimentos é um tema fundamental ao estudo do acaso. O pensamento probabilístico tem como orientação buscar realizações sólidas da realidade, mas, nem por isso, previstas e pré-determinadas por um desempenho constante. Por isso é indispensável reconhecer suas características particulares que vão de encontro com o raciocínio determinista. A noção de azar é um elemento essencial para o crescimento da compreensão probabilística e para se compreender a aleatoriedade. A noção de aleatoriedade tem mais de um sentido, porém essa pluralidade é o núcleo do pensamento probabilístico.

É muito comum supor que somente com o domínio de um esquema combinatório temos a ideia de Probabilidade e que de acordo com essa visão, a ideia de azar e Probabilidade, exige o desenvolvimento de raciocínio combinatório. De acordo com Piaget e Inhelder, 1951:

> *"[...]se o sujeito não é capaz de raciocinar sob a luz da Combinatória, não conseguirá compreender a ideia de Probabilidade, exceto em casos nos quais experimentos aleatórios muito elementares sejam tratados."*
>
> *(apud. NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996)*

Isso explica o atraso de algumas décadas no ensino da Probabilidade, na escola. Observem que, o emprego de conceitos probabilísticos é sempre posto em prática a partir de um enfoque clássico, baseando-se no cálculo combinatório - forma predominante de se ensinar Probabilidade no ensino médio de nossas escolas, até hoje. Talvez, por isso, a dificuldade de nossos alunos em desenvolver o pensamento probabilístico. Fischbein (1975) rejeita a opinião de Piaget e defende que a intuição primária relacionada ao acaso consiste na distinção entre o fenômeno aleatório e determinista, algo que não requer um raciocínio combinatório, e que está presente no cotidiano de cada pessoa. Ele se apoia no comportamento das crianças de praticarem jogos de azar, já que em jogos simples elas são capazes de identificar a opção de maior probabilidade. É comum ao trabalhar esses jogos, principalmente com crianças mais novas, ouvir que o resultado de um dado depende da forma como o mesmo é lançado. Assim, ao fazer o lançamento, e um determinado número demorar a sair, podem crer que esse número tenha chance menor de aparecer que outros. Crianças estimam situações de acaso através de experiências particulares. Elas se agarram as informações diretamente recebidas, ou seja, criam a própria percepção de previsão. Com isso é perceptível que elas apresentam desde cedo o raciocínio probabilístico mesmo que sem os conceitos da teoria das Probabilidades. Aliás, as primeiras ideias de Probabilidade, de um modo geral, aparecem em discussões de eventos que acontecerem nas histórias ou nas experiências infantis.

Essas experiências infantis oferecem uma base que viabiliza o desenvolvimento do pensamento probabilístico dando prosseguimento as manifestações probabilísticas através de critérios de quantificação de eventos e até mesmo do uso do raciocínio combinatório.

2.3 - Orientação e Disposição Curricular

De acordo com o MEC, em seu site, "A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que visa nortear o que é ensinado nas escolas do Brasil inteiro, englobando todas as fases da educação básica, desde a Educação Infantil até o final do Ensino Médio. Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). Trata-se de uma espécie de referência dos objetivos de aprendizagem de cada uma das etapas de sua formação. Longe de ser um currículo, a Base Nacional é uma ferramenta que visa orientar a elaboração do currículo específico de cada escola, sem desconsiderar as particularidades metodológicas, sociais e regionais de cada uma."

Por toda a extensão da Educação Básica – na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio –, os processos de adquirir conhecimentos fundamentais determinados na BNCC tem obrigação de contribuir com os estudantes garantindo o desenvolvimento de dez competências gerais, que consolidam os direitos do processo de aprendizado.

De acordo com a BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Assim, as competências são apresentadas através da Educação Básica da seguinte maneira.

- Educação Infantil;
    - ➢ Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento;
    - ➢ Campos de Experiência.
- Ensino Fundamental;
- Ensino Médio.

Atualmente já se encontra o modelo da BNCC que abrange o ensino infantil, fundamental e médio, porém esse último segmento é o mais recente homologado dentre os três e datado de 14 de dezembro de 2018. Por conta do ensino da Teoria da Probabilidade ficar a cargo dos Ensino Fundamental e Médio iremos direcionar a nossa pesquisa para esses dois segmentos.

2.3.1 - Ensino Fundamental

Está organizado em cinco áreas do conhecimento como mostra a figura 14.

	COMPONENTES CURRICULARES	
	Anos Iniciais (1º ao 5º ano)	Anos Finais (6º ao 9º ano)
Linguagens	Língua Portuguesa	
	Arte	
	Educação Física	
		Língua Inglesa
Matemática	Matemática	
Ciências da Natureza	Ciências	
Ciências Humanas	Geografia	
	História	
Ensino Religioso	Ensino Religioso	

Figura 14: Áreas de Conhecimento do Ensino Fundamental.[15]

O desenvolvimento das competências específicas de cada área deve ser estimulado ao longo dos nove anos. Essas competências são estabelecidas por cada área de conhecimento e especificam como as dez competências gerais se manifestam nessas áreas.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades. Essas habilidades são organizados em unidades temáticas. A matemática é dividida em 5 unidades temáticas:

- Números;
- Álgebra;
- Geometria;
- Grandezas e Medidas;
- Probabilidade e Estatística.

[15] Fonte: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/

A Análise Combinatória e a Probabilidade, objetos matemáticos dessa pesquisa, encontram-se em unidades temáticas distintas. A Análise Combinatória é trabalhada na unidade Números enquanto que a Probabilidade é vista na unidade temática Probabilidade e Estatística. Nosso interesse está profundamente relacionado com essa última unidade que sugere a abordagem de conceitos, acontecimentos e procedimentos que fazem parte de situações-problema do dia a dia. Assim, qualquer indivíduo que passa por essa etapa do ensino básico necessita desenvolver aptidões para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em diversos contextos, de modo que possa tomar decisões com embasamento e de forma adequada. Isso inclui refletir e aplicar conceitos, representações e índices estatísticos para representar, esclarecer e prever fenômenos.

No que diz respeito à aprendizagem de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é proporcionar o entendimento de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o começo da proposta de desenvolvimento do ensino da probabilidade está centrado na noção de aleatoriedade, de forma que os estudantes entendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que ao não estar habituado com o conteúdo exista, e lembrando a faixa etária, a chance de julgar impossíveis eventos que nunca virão acontecer. Nessa fase, é interessante que os estudantes coloquem em palavras, todos os resultados de eventos possíveis dentro de um experimento iniciando assim a construção do espaço amostral. No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser amplificado e aprofundado, mediante a atividades em que os estudantes realizem experimentos aleatórios e simulações para comparar os resultados alcançados com a parte teórica – probabilidade frequentista.

Vale salientar que os parâmetros de organização das habilidades na BNCC apresentam um arranjo aconselhado. Portanto, os grupos recomendados não precisam ser selecionados de modo obrigatório para a estrutura dos currículos. Essa divisão em unidades temáticas serve apenas para deixar mais claro o entendimento dos conjuntos de habilidades e de como eles se relacionam. Na elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas, deve-se realçar as articulações das habilidades com as de outras áreas do conhecimento, entre as unidades temáticas e no interior de cada uma delas. Os problemas de contagem, por exemplo, têm obrigação de, a princípio, estar limitados àqueles cujos resultados podem ser obtidos pela enumeração de todos os casos possíveis, por meio da utilização de esquemas ou diagramas, e, em seguida, àqueles cuja resolução resulta da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo.

2.3.2 - Ensino Médio

Ainda de acordo com o próprio site da BNCC, “As aprendizagens essenciais definidas na BNCC do Ensino Médio estão organizadas por áreas do conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas), conforme estabelecido no artigo 35-A da LDB. Desde que foram introduzidas nas DCNEM/1998 (Parecer CNE/CEB nº 15/199856), as áreas do conhecimento têm por finalidade integrar dois ou mais componentes do currículo, para melhor compreender a complexa realidade e atuar nela”.

A área de conhecimento conhecida por Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, tem como objetivo a construção de uma perspectiva completa da Matemática, posta em prática sob a realidade do indivíduo, em diversas circunstâncias. Portanto, quando a realidade é o parâmetro de observação, é indispensável levar em consideração as experiências cotidianas dos alunos impactados pelos avanços tecnológicos, pelas imposições do mercado de trabalho, pelo potencial das mídias sociais, entre outros.

Essa unidade é de grande importância devido aos conceitos de acaso e de probabilidade, pertinentes aos fenômenos aleatórios presentes no âmbito social e natural. Esse conteúdo possibilita o desenvolvimento e a formalização acerca do raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico, ocasionando aos estudantes uma perspectiva de destaque dos modelos probabilísticos da atualidade e de ver esses modelos em funcionamento. Um exemplo disso é o diagrama de árvore, utilizado na Combinatória, como uma importante estrutura que estabelece um vínculo entre os experimentos propostos e a combinatória, propiciando a visualização e a estrutura das etapas do experimento. O diagrama de árvore também é um grande facilitador ao trabalhar o Teorema da Probabilidade Total.

Ao trabalhar probabilidade com os alunos nessa fase, precisamos ter a certeza de sua compreensão quanto aos conceitos relacionados à chance e incerteza, termos que estão no nosso cotidiano. Nos casos de experiências aleatórias, os estudantes devem relacioná-las a um conjunto de eventos e reproduzi-las de forma esquemática. Também devem ter a capacidade de levantar hipóteses de equiprobabilidade.

Tanto Análise Combinatória quanto Probabilidade são os temas do segundo e terceiro bimestre do segundo ano do Ensino Médio, respectivamente. Nesses bimestres são abordadas de acordo com a ordem a seguir.

- **Análise Combinatória:** Princípio Fundamental da Contagem; Principio

Aditivo de Contagem; Arranjo Simples; Permutação, Permutação com elementos repetidos; Permutação circular; Combinações simples; Combinações completas; Binômio de Newton, Número Binomial; Triângulo de Pascal;

- **Probabilidade:** Conceito; Definição; Adição de Probabilidades; Probabilidade Condicional; Multiplicação de Probabilidade;

Nem todos esses tópicos aparecem com a mesma definição nos diversos livros didáticos pesquisados e nem em um mesmo capítulo ou sequer são apresentados nessa sequência. Alguns autores preferem fazer o estudo sobre Números Binomiais, Binômio de Newton, Triângulo de Pascal em um capítulo à parte.

2.4 - Abordagem de Probabilidade nos Livros Didáticos

O livro didático é um dos recursos mais utilizados no processo de ensino e aprendizagem, tendo dessa maneira um papel indispensável no cotidiano das escolas em todos os níveis de ensino, cumprindo um papel de extrema significância no sistema escolar. É sobretudo com base neste instrumento que o professor conduz o seu trabalho, sendo por muitas vezes o seu único instrumento pedagógico.

O livro didático atua como guia do trabalho do docente em sala de aula no que se refere aos objetivos a serem atingidos, conteúdos fundamentais a serem desenvolvidos, técnicas e estratégias a serem aplicadas para alcançar tais objetivos. Ele atua como um recurso importante que norteia o docente no curso das suas aulas. Todavia, o livro didático precisa ser visto como um dentre vários recursos auxiliares que permeiam o processo de ensino e aprendizagem, e não como o recurso preponderante desse processo. Esta prática pode engessar o trabalho docente causando limitações que façam com que o professor fique restrito a um único caminho no processo de ensino-aprendizagem.

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) foi elaborado com o objetivo de auxiliar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição gratuita de coleções de livros didáticos aos alunos da Educação Básica. Após a avaliação das obras, o Ministério da Educação (MEC) publica, a partir do ano de 1996, o Guia de Livros Didáticos (BRASIL, 1996) com sinopses das coleções consideradas aprovadas. Nele, as coleções são examinadas baseando-se em critérios predefinidos que assegurem as adequações de aspectos teórico-metodológicos, estrutura editorial e manual do professor. O guia é enviado às escolas, que adotam, entre as coleções disponíveis, aquelas que satisfazem seu projeto político pedagógico.

O Guia de Livros Didáticos PNLEM 2018, em seus princípios de avaliação, ensina:

> *"Para alcançar as finalidades propostas para o Ensino Médio no Brasil contemporâneo, as obras didáticas devem veicular informações corretas, precisas, adequadas e atualizadas, contribuindo para o exercício do trabalho docente, no sentido de propiciar, aos estudantes, oportunidades de desenvolver ativamente as habilidades envolvidas no processo de aprendizagem. Além disso, a obra didática, como mediador pedagógico, proporciona, ao lado de outros materiais pedagógicos e educativos, ambiente propício à busca pela formação cidadã, favorecendo que os estudantes possam estabelecer julgamentos, tomar decisões e atuar criticamente frente às questões que se colocam para a sociedade, a ciência, a tecnologia, a cultura e a economia."*
>
> *(BRASIL, 2018, p. 9).*

A partir da importância que é dada pelos docentes às coleções de livro didático, optamos por realizar uma análise que teve como objetivo principal, verificar como o conceito de Probabilidade é trabalhado nas coleções analisadas.

A nossa análise se dará sobre as coleções do Ensino Médio, aprovadas no PNLD para o ano de 2018, tabela 6, tendo em vista que o conteúdo avaliado neste trabalho é amplamente abordado neste segmento.

MATEMÁTICA			
CÓDIGO	TÍTULO DA COLEÇÃO	LIVRO	EDITORA
0008P18023	MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES	0008P18023101IL	EDITORA ÁTICA
0008P18023	MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES	0008P18023102IL	EDITORA ÁTICA
0008P18023	MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES	0008P18023103IL	EDITORA ÁTICA
0070P18023	QUADRANTE - MATEMÁTICA	0070P18023101IL	SM
0070P18023	QUADRANTE - MATEMÁTICA	0070P18023102IL	SM
0070P18023	QUADRANTE - MATEMÁTICA	0070P18023103IL	SM
0082P18023	MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES	0082P18023101IL	SARAIVA EDUCAÇÃO
0082P18023	MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES	0082P18023102IL	SARAIVA EDUCAÇÃO
0082P18023	MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES	0082P18023103IL	SARAIVA EDUCAÇÃO
0096P18023	MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO	0096P18023101IL	SARAIVA EDUCAÇÃO
0096P18023	MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO	0096P18023102IL	SARAIVA EDUCAÇÃO
0096P18023	MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO	0096P18023103IL	SARAIVA EDUCAÇÃO
0127P18023	MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA	0127P18023101IL	LEYA
0127P18023	MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA	0127P18023102IL	LEYA
0127P18023	MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA	0127P18023103IL	LEYA
0155P18023	#CONTATO MATEMÁTICA	0155P18023101IL	FTD
0155P18023	#CONTATO MATEMÁTICA	0155P18023102IL	FTD
0155P18023	#CONTATO MATEMÁTICA	0155P18023103IL	FTD
0180P18023	MATEMÁTICA - PAIVA	0180P18023101IL	MODERNA
0180P18023	MATEMÁTICA - PAIVA	0180P18023102IL	MODERNA
0180P18023	MATEMÁTICA - PAIVA	0180P18023103IL	MODERNA
0195P18023	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	0195P18023101IL	MODERNA
0195P18023	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	0195P18023102IL	MODERNA
0195P18023	CONEXÕES COM A MATEMÁTICA	0195P18023103IL	MODERNA

Tabela 6: Guia de livros didáticos de matemática PNLD 2018.[16]

Baseando-se em outras análises percebemos que as coleções analisadas anteriormente aparentavam não explorar satisfatoriamente a concepção frequentista de probabilidade, utilizam a abordagem clássica para expressar a probabilidade como uma razão, e que poucos oferecem atividades de pesquisa ou de resolução de problemas multidisciplinares que contribuem com

[16] Fonte: http://www.fnde.gov.br/centrais-de-conteudos/publicacoes/category/125-guias?download=10744:guia-pnld-2018-matematica

uma melhor compreensão da realidade, criando assim o interesse do autor em avaliar as novas coleções.

Para o estudo realizado foram escolhidos os volumes de três das oito coleções aprovadas.

Posteriormente, uma a uma, cada coleção foi examinada com o intuito de identificar os diversos enfoques adotados para o ensino do conceito de Probabilidade e através de quais exercícios propostos esses conceitos são abordados. Optamos por identificar as coleções pelos seus respectivos nomes. A princípio, observamos que nenhuma das três coleções analisadas aborda o tema Probabilidade no primeiro volume. De fato, em todas ele aparece no volume 2.

As três coleções têm uma perspectiva direcionada mais às questões voltadas para os jogos de azar, pouco explorando a dimensão histórica deste estudo, uma vez que esta teoria é originada destes jogos. Cada uma delas tem a ideia de trabalhar muito com exercícios que na prática só requerem que o aluno reproduza uma fórmula e aplique. A seguir, uma descrição desses livros.

A coleção, *Interação e Tecnologia – Volume 2,* inicia o capítulo de probabilidade com um texto sobre a doação de medula óssea. A ideia de abordar o conteúdo via transplante é mostrar que a probabilidade da compatibilidade é igual a $\frac{1}{4}$ entre doador e receptor quando os irmãos do paciente são consultados, já que pai e mãe só possuem metade do material genético do filho. Ao ocorrer uma incompatibilidade com os familiares, a busca passa a ser realizada nos bancos de medula onde se estima que a probabilidade de encontrar um doador seja de $\frac{1}{300.000}$.

O texto segue propondo a seguinte questão: “Qual a probabilidade de que, em uma sala com 30 alunos, dois deles façam aniversário no mesmo dia?”. Outro problema que achamos bastante motivador, pois cria no aluno o interesse pelo conteúdo e remete a atenção do mesmo a algo que pode ocorrer no seu dia a dia.

Ele aproveita este exemplo para falar sobre experimento aleatório, espaço amostral e evento. Após falar sobre esses tópicos ele define probabilidade através do conceito clássico, porém sentimos falta de uma explicação para espaços amostrais equiprováveis. Consideramos muito importante a maneira como o autor fez para chegar até a definição, começando por meio de um assunto do dia a dia e somente depois estruturando o conteúdo.

O livro didático dessa coleção expõe a teoria e a exemplifica, respaldando-se em exemplos referentes a jogos de azar. As propriedades são apresentadas de forma simples e clara. Os exercícios apresentados são variados e tentam retomar conteúdos estudados em capítulos anteriores, tais como geometria, a teoria de conjuntos e estatística.

O livro possui uma gama de exercícios que permite ao aluno uma enorme diversidade de abordagens. Traz alguns textos durante o capítulo em que o autor tenta instigar o aluno à pesquisa, à experiência, ao estudo reflexivo e crítico do que está aprendendo através de outras disciplinas, tais quais biologia, através do teste de DNA e de mutações genéticas. E é um dos poucos livros que além de abordar o conteúdo de probabilidade binomial traz consigo uma quantidade razoável de questões sobre o assunto.

Na coleção, *Ciência e Aplicações – Volume 2,* o autor inicia o capítulo com um texto sobre a Mega-Sena, no qual informa as regras do jogo.

“Todas as quartas-feiras e sábados, um banco estatal federal promove o sorteio dos números — aqui chamadas dezenas — da Mega-Sena. Nela você pode escolher de 6 (aposta mínima) a 15 números (aposta máxima), dentre os 60 disponíveis. O resultado do sorteio consiste em 6 dezenas e você recebe prêmios, em dinheiro, ao acertar 4, 5 ou as 6 dezenas sorteadas – este último prêmio por acertar a sena é o sonho de milhões de brasileiros que lotam as casas lotéricas para fazer suas apostas.”

Em seguida são citados vários outros experimentos de natureza aleatória: lançamento de uma moeda não viciada, em que se observa a face obtida; extração de uma carta de um baralho comum, em que se observa o naipe da carta; extração, ao acaso, de uma bola de uma caixa que contém 40 bolas de mesmo tamanho, sendo 25 pretas e 15 brancas, em que se observa a cor da bola; e um texto sobre a história da probabilidade, embora este acabe sendo demasiadamente curto ao tentar revelar os precursores desta teoria. Apesar da superficialidade do texto, consideramos válida a apresentação que o livro fez, pois tenta criar um ambiente de conhecimento mínimo para o aluno.

O livro opta pelo desenvolvimento tradicional: define o conteúdo, exemplifica usando os jogos de azar e apresenta uma boa quantidade de exercícios. As propriedades são expostas de modo claro, porém sem utilizar notação ou termos que possam complicar a compreensão do aluno. É demasiadamente vago a quem utiliza o livro didático estudar probabilidade sem conhecer de forma clara suas propriedades essenciais. A princípio as atividades são mais direcionadas às questões que envolvem os jogos de azar. Porém, a partir do tópico “Probabilidade da União de dois eventos”, o livro os diversifica.

Algo interessante neste livro é que ao final do capítulo o problema sobre a Mega-Sena reaparece em um quadro chamado “Troca de ideias”, em que os autores fazem algumas perguntas a respeito do jogo. Para finalizar, escrevem um texto bem atraente que relaciona a probabilidade e o futebol através da loteria. O que nos deixa preocupado ao avaliar essa obra é a ausência da probabilidade binomial e de uma sessão que trabalhe questões de vestibular, principalmente do ENEM.

Na coleção, *Matemática: Contexto & Aplicações – Volume 2*, o livro faz uma apresentação do conteúdo através de um jogo de azar, o jogo de roleta. Ele inicia a abordagem comparando o valor pago por cada tipo diferente de aposta no jogo através de três perguntas. As perguntas têm suas respostas a cargo do professor, já que o livro não as responde de forma imediata e também não o faz com o desenvolver do capítulo. É feita uma introdução sobre experimentos aleatórios, espaço amostral, evento e sobre o modelo clássico de cálculo de probabilidades, sempre os exemplificando. Não tem como único foco a apresentação por meio de jogos de azar, apesar destes serem a maioria, fornecendo também outros exemplos tais como: "número de peças defeituosas fabricadas por uma máquina, chance de filhos herdarem alguma deficiência dos pais, etc.".

O livro traz uma forma de passar o conteúdo bem simples, praticamente igual aos outros analisados nessa pesquisa, embora com uma apresentação mais sortida no momento de expor os exemplos para fixar o conteúdo. Os jogos de azar aparecem como exemplos e ainda em algumas questões, o que consideramos também importantíssimo. A estruturação diversa tira a ideia que a grande maioria tem sobre a probabilidade só ter aplicabilidade nos jogos de azar. Além disso, o livro faz algumas alusões à utilização de probabilidade em outros ramos, tais como biologia e teoria dos conjuntos. Este livro expõe organizadamente as propriedades e é um dos poucos livros que apresenta o conceito de probabilidade binomial, apesar de não conter muitos exercícios. Em contrapartida, agrega com uma alta quantidade de exercícios de vestibulares diversos.

É de suma importância mencionar que o livro dedica a parte final do capítulo para um resumo histórico da probabilidade, proporcionando ao leitor o conhecimento sobre outras áreas de aplicação da mesma.

Das três coleções examinadas, uma delas apresenta exercícios que exploram somente o enfoque clássico do conceito de Probabilidade, enquanto as outras duas, além do clássico, proporcionam alguns exercícios, mesmo que em quantidade pequena, com o enfoque frequentista. Vale observar que essas atividades aparecem distribuídas de forma totalmente desigual.

Podemos concluir que os livros estudados, em geral, possuem uma gama de exercícios úteis para o aprendizado do conteúdo em estudo. Porém, como apresentamos neste trabalho, notamos uma ausência de um vínculo maior com a realidade do estudante, já que tanto a proposta de apresentação do conteúdo, quanto a maior parte dos exercícios, abordam a matéria se atendo a falar sobre os jogos de azar, enquanto as sessões finais de duas coleções apresentam uma bateria de exercícios bem elaborados que envolvem muitos tópicos que eles nem sequer comentam. Por exemplo, alguns dos livros não possuem o capítulo de estatística no mesmo volume que o de probabilidade, mas apresentam alguns exercícios no qual o conhecimento de estatística seria importante para a melhor compreensão do que se está fazendo. Os alunos até resolvem as questões, porém com certa dificuldade. Outro problema bastante importante, e tema desse trabalho, é a ausência nos livros didáticos de situações que se baseiam em espaços não-equiprováveis. Essas são muito sentidas dado que os modelos de situações reais são em sua grande maioria baseados em espaços não-equiprováveis, e por conta disso, é um tanto quanto prejudicial ignorar essas aplicações nos livros.

Em resumo, podemos avaliar que os livros analisados possuem uma boa proposta de apresentação sistemática. Todavia, acreditamos que seria um ganho muito maior se o capítulo de probabilidade fosse iniciado não somente com uma curiosidade, mas também com alguma aplicação por parte do aluno que facilitasse a construção do conteúdo em sua mente tal qual preencher uma tabela com alturas, idades ou pesos e tirar proveito da mesma para responder simples perguntas sobre probabilidade e estatística. Algo baseado em conceitos simples da utilização de razão para abordar o conceito clássico de probabilidade. Para dar continuidade no incentivo, os exemplos devem ser os mais diversos possíveis, e não somente aqueles que envolvem jogos de azar. Preferencialmente uma abordagem que concilie ou harmonize com outras teorias do cotidiano do aluno, tais como Biologia, Estatística, Economia, e etc, aproveitando a não-equiprobabilidade estabelecida em cada um desses assuntos. Uma proposta para suavizar a retomada de temas anteriores é propor uma nova organização com o estudo da estatística sendo realizado no capítulo anterior à probabilidade e a inclusão de tópicos sobre a teoria dos conjuntos no capítulo de probabilidade. Ponderamos que seja muito interessante a assistência de notas de auxílio, no desenrolar do capítulo e alguns desafios. Se a história nos mostra o grau de exigência e dificuldade encontradas por matemáticos ao contribuir com todo o desenvolvimento e criação da teoria de probabilidades, pode-se presumir, que o mesmo se dê com alunos e professores. Sendo assim, mostrar a dificuldade enfrentada pelos precursores de toda essa caracterização pode servir como elemento motivacional, uma vez que reduz a resistência encontrada diante do assunto.

A importância e o emprego em diversas áreas desse conteúdo nos permite crer que todo autor pode tirar o maior proveito desse assunto que é tão rico em aplicações.

2.5 - Barreiras Metodológicas no Ensino

Uma grande dificuldade dessa unidade temática é que os conteúdos estão bastante interligados nos livros didáticos, principalmente em seus exemplos e exercícios. Se o aluno não compreende Análise Combinatória, possivelmente terá dificuldade em Probabilidade, pois muitos modelos de probabilidade são formalizados por meio de operações combinatórias. Consequentemente, muitas dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem desse tema podem estar relacionadas a um raciocínio combinatório pobre ou desenvolvido de forma insuficiente. Na tentativa de reduzir os obstáculos encontrados pelos estudantes, os docentes, conforme seu dever perante a formação dos indivíduos, frequentemente utilizam estratégias diversificadas em sala de aula com a intenção de tornar mais fácil o aprendizado. Entre os procedimentos ou técnicas utilizadas, destacam-se as analogias e metáforas. Ainda que aplicadas com boa vontade para auxiliar no entendimento de um conteúdo específico, essas estratégias representam um pretexto para esquivar-se das dificuldades pedagógicas, substituindo, assim, a visão própria e o raciocínio do aluno por esquemas e macetes, o que pode acabar se tornando por um lado, atrativo, enquanto por outro deixa estagnadas a intuição e maneira de pensar matemática.

Existe uma afinidade entre os dois conteúdos, mesmo assim, a combinatória não é apenas uma técnica de cálculo de probabilidade. O raciocínio combinatório é uma parte fundamental do pensamento formal e um pré-requisito essencial para o raciocínio lógico. Contudo, a realidade do ensino e da aprendizagem desses temas, nas classes da Educação Básica, carrega consigo muitos obstáculos. Entre as grandes adversidades temos abaixo aquelas que podemos destacar.

I. Probabilidade:
- A má interpretação dos problemas.
- A falta de entendimento dos comandos estruturais dos problemas.
- A aplicação incorreta de conteúdo.
- Defasagem no raciocínio combinatório.

II. Análise Combinatória:
- A má interpretação dos problemas.
- A falta de entendimento dos comandos estruturais dos problemas.

- Diferenciação entre arranjos e combinações, ou até mesmo perceber que esses dois conteúdos estão relacionados entre si.
- Melhor utilização de técnicas nas quais as fórmulas não desempenhem um papel mais importante.

A complexidade de transmitir esse tópico para os estudantes passa por etapas, tais como as dificuldades dos mesmos, expostas acima; a maneira como é apresentado nos livros didáticos; e até mesmo, as dificuldades do professor.

O livro didático adotado pelas escolas possui textos que ainda privilegiam a abordagem da memorização de fórmulas, entretanto é uma das peças mais importantes neste processo, pois ampara os professores e alunos há décadas. A construção das aulas, os exemplos de exercícios e a elaboração de provas acabam vindo sempre dessa fonte. Com base nisso, podemos afirmar que o livro não pode ser apenas um instrumento de simples consulta, mas que traga uma sustentação confiável ao docente e uma linguagem acessível ao aluno. Grande quantidade das obras didáticas trata o Ensino da Matemática exclusivamente com a demonstração de fórmulas e reprodução exaustiva de algoritmos de resolução de questões.

O professor não fica muito distante quando observamos o tratamento apresentado. Apesar de supostamente ser capacitado e ter uma qualificação maior, quando aborda esses conteúdos ele também está suscetível a falhas. No caso de Análise Combinatória a grande maioria opta pela memorização de fórmulas, corroborando ainda mais com a dificuldade dos alunos de apresentar um raciocínio lógico. O aluno não pensa, ele apenas decora uma fórmula e resolve um problema. Geralmente, numa aula tradicional, onde as fórmulas já foram expostas, os alunos buscam identificar, entre elas, aquela que acreditam ser mais adequada para permutação, ou arranjo ou combinação. Isso, em geral ocorre por eles participarem de uma etapa em que a utilização da fórmula foi o diferencial, e assim por não terem participado da construção desses conceitos resolvem o problema mecanicamente.

> *“Problemas combinatórios são usualmente considerados difíceis pela maioria dos alunos e professores de matemática. Talvez a principal dificuldade seja a da conexão correta entre o problema dado e a teoria matemática correspondente. É difícil determinar se o problema combinatório dado é um problema de arranjo, de permutação ou de combinação ou, então, se é suficiente usar diretamente o princípio multiplicativo.”*

(Hariki , 1996, p.29)

Por outro lado, ao ensinar Probabilidade, o professor se depara com uma formação deficiente, que pode causar prejuízo não só na evolução de seu raciocínio probabilístico como na sua capacidade de perceber as dificuldades de seus alunos e de produzir tarefas que lhes permitam superá-las. Sem a formação necessária, os professores terão dificuldade em se sentir seguros para lidar com as adversidades e pré-conceitos sobre Probabilidade de seus alunos ou mesmo, ainda não possuírem habilidade para lidar com erros e raciocínios destes no decorrer da solução de alguma situação problema, experimento ou jogo. Se a sua formação a todo momento prioriza a aplicação de fórmulas, pode se sentir inseguro com questionamentos mais informais.

Como professores, temos a obrigação de possuir uma base sólida para realizar uma análise na tentativa de detectar se os alunos com dificuldades no processo de aprender diferem quanto aos conceitos, habilidades e execuções em relação aos seus colegas, sem dificuldades de aprendizagem e após identificar tais situações devemos estabelecer estratégias que beneficiem o aluno tais como:

- fazer uma leitura sobre a necessidade de se realizar experimentos de simulação, mesmo que feitos por um computador de forma pseudoaleatória, já que a tecnologia atual nos permite essa aplicação em sala de aula;
- dar importância ao emprego de nomenclatura adequada para caracterizar e dimensionar situações relacionadas ao azar;
- produzir tabelas de frequências e gráficos para representação do comportamento de fenômenos aleatórios, dentre outras.

É necessária uma prática que favoreça ao aluno entender o procedimento adotado, propiciando significado, partindo de conhecimentos prévios tanto escolares como extraescolares, nas quais esse raciocínio se faz necessário. A partir dessas considerações, pode-se organizar situações didáticas que envolvam a observação de experimentos, com seus respectivos registros e análises.

É possível buscar novas alternativas para a construção de um ensino em que o aluno seja o centro, não as fórmulas. No mundo acadêmico já existem artigos que trazem formas alternativas de ensinar a Análise Combinatória e Probabilidade. Como exemplo, temos a proposta de Almeida e Ferreira (2009) em que faz uso de diagramas de árvores para a resolução de problemas reais da análise combinatória. Porém, é uma tarefa árdua:

> *“Em diversas situações de sala de aula, o professor conhece a resposta e um caminho mais rápido e fácil para chegar até ela. Neste sentido, torna-se difícil para ele assumir o perfil de ‘observador-interventor’. Entretanto, nem sempre a maneira mais fácil de ensinar algo a um estudante é a mais eficaz quando queremos que este atribua sentido ao que está aprendendo. Ser o educador que cria situações de aprendizagem que possibilitem aos alunos construírem suas próprias conjecturas e validá-las não é uma tarefa fácil.”*
>
> (ALMEIDA & FERREIRA, 2009, p. 26)

É necessário deixar claro que as fórmulas não favorecem o raciocínio lógico:

> *“O ensino da Análise Combinatória na escola de ensino médio foi considerado um dos assuntos mais difíceis de entendimento, pois geralmente se fazia de maneira mecânica, em situações padronizadas, ou ainda como um monte de fórmulas complicadas, quando não raramente era deixado de lado por professores”*
>
> (BASTOS, 2013, p. 1)

Para reduzir essas barreiras acreditamos no alto potencial que possa ser atingido ao se trabalhar noções de probabilidade desde a educação infantil. De acordo com a BNCC, entendemos que a inclusão de noções de probabilidade, desde os anos iniciais do ensino fundamental, pode facilitar a construção do raciocínio não determinístico, evitando possíveis obstáculos de conceituação.

3. Probabilidade Clássica no Ensino Médio

> *"A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto, uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis".*
>
> **Pierre Simon Laplace (**Ensaio filosófico sobre as Probabilidades)
>
> *"A Teoria das Probabilidades é o ramo da matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. O modelo matemático utilizado para estudar um fenômeno aleatório particular varia em sua complexidade matemática, dependendo do fenômeno estudado. Mas todos esses modelos têm ingredientes básicos comuns".*
>
> MORGADO, 2006

A Teoria das Probabilidades é o estudo dos fenômenos que envolvem incerteza e tem sua origem na modelagem de jogos de azar, como cartas e dados. Essa teoria serviu de base para a Estatística, ciência utilizada nas mais variadas atividades humanas, como Saúde, Educação, Política, Ciências Sociais, Economia e Administração. Amparados nela e em todo o seu desenvolvimento, é possível promover em cada estudante o aperfeiçoamento do raciocínio lógico, a habilidade de abstrair e generalizar abrangendo fenômenos aleatórios, e orientar para as tomadas de decisões, pois as probabilidades são uma ferramenta útil para que os indivíduos possam compreender criticamente as informações veiculadas em pesquisas, textos e imagens, veiculadas no mais das vezes nas mídias.

Apesar da enorme complexidade que é, atualmente, ensinar Probabilidade no Ensino Médio vale destacar que o ensino pode constituir-se em um eficiente recurso social, na medida em que viabiliza ao estudante uma melhor compreensão das estatísticas e dados governamentais ou políticos, tornando-o qualificado a exercer de forma mais lúcida seus direitos e deveres de cidadão.

Quando pensamos em introduzir o conceito de Probabilidade, não podemos deixar de considerar que a ideia intuitiva de probabilidade já faz parte do cotidiano dos indivíduos. Os diversos sorteios ou jogos exemplificados em rifas ou loteria são exemplos interessantes para desenvolver estratégias vencedoras em jogos de azar através do conhecimento probabilístico, pois mostram que a probabilidade é eficaz no sentido de ajudar a desmistificar o conceito intuitivo de sorte e azar. Em razão disso, o estudo da Probabilidade desperta bastante interesse na maioria dos alunos do Ensino Médio. A compreensão de estratégias que possam determinar ou aumentar a chance de vitória em determinados jogos instiga a curiosidade dos alunos e serve como ponto de partida para desenvolver um estudo mais aprofundado sobre o tema. No entanto, vários estudos em Educação Matemática vêm apontando para o fato de que a Teoria das Probabilidades é certamente uma das searas em que mais ocorrem concepções errôneas sobre o tema. Desfazer essas concepções equivocadas para um pleno entendimento da probabilidade é o desafio maior do professor de Ensino Básico. Como a temática é muito ampla, trataremos aqui de alguns conceitos básicos e aplicações.

As primeiras seções desse capítulo têm como propósito definir experimento aleatório, experimento determinístico, espaço amostral, evento e probabilidade simples. Em seguida, apresentaremos algumas propriedades básicas, como evento complementar, união e intersecção de eventos. Além disso, trataremos também da probabilidade condicional, com a generalização através do Teorema da Probabilidade Total e do Teorema de Bayes, da Lei Binomial e de alguns casos em que a probabilidade se imbui da visão geométrica.

3.1 - Experimento Aleatório e Experimento Determinístico

Na natureza classificamos essencialmente dois tipos de experimentos: os aleatórios e os determinísticos. Ao lançarmos um dado, com suas faces numeradas de 1 a 6, repetidas vezes, arremessando-o sempre com mesma intensidade, de uma mesma altura, realizando a mesma rotação, ou seja, em condições idênticas, veremos resultados diferentes. Os resultados desse dado dependem do acaso, e por conta disso, não temos a capacidade de determinar previamente qual será o resultado obtido. Experimento aleatório é, portanto, aquele que, repetido diversas vezes sob condições idênticas, produz resultados diferentes. Como exemplos de experimentos aleatórios podemos citar:

- o lançamento de uma moeda, pois não podemos prever com exatidão se o resultado será cara ou coroa;

- a extração de uma carta de um baralho comum, em que se observa o naipe da carta;
- a extração, ao acaso, de uma bola de uma caixa que contém 50 bolas de mesmo tamanho, sendo 30 pretas e 20 brancas, em que se observa a cor da bola;
- a observação do número de pessoas que ganharão a loteria em data futura.

Em contrapartida, vamos realizar um experimento para determinar qual será a temperatura em que um determinado objeto passa do estado sólido para o estado líquido. Essa situação em que um experimento, se repetido nas mesmas condições, terá sempre os mesmos resultados, é denominado determinístico. O experimento determinístico é único e previsível como mostram os exemplos abaixo.

- o ponto de fusão do gelo será 0º C;
- o ponto de ebulição da água é 100º C;
- Quando se atira uma moeda para o alto a força da gravidade faz com que a sua queda seja certa, e a aceleração da gravidade será constante e igual a 9,8 m/s^2.

3.2 - Espaço Amostral

Imagine que para jogar um certo jogo de dados você precisa entender como ele funciona. Então, a primeira condição é descrever o conjunto que contém todos os resultados possíveis no lançamento de um dado tradicional que possui 6 faces. Os resultados possíveis da face superior pós lançamento são 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Chamamos esse conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório de espaço amostral e representamos por **Ω**. Então, temos que o espaço amostral no lançamento desse dado é **Ω** = {1,2,3,4,5,6}.

Vejamos outros exemplos interessantes:

1. Suponha que um dado de 6 faces seja lançado duas vezes, de forma sucessiva,

e seja observado o número obtido em sua face superior após cada um dos dois lançamentos. O conjunto de resultados pode ser construído como contendo pares ordenados (x,y) em que x representa o resultado da face superior do 1º lançamento e y representa o resultado obtido na face superior do 2º lançamento.

lançamentos →

2º / 1º	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Assim, $\Omega = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ ...,\ (2,\ 1),\ ...,\ (3,\ 1),\ ...,\ (4,\ 1),\ ...,\ (5,\ 1),\ ...,\ (6,\ 1),\ ...,\ (6,\ 6)\}$; $n(\Omega) = 36$.

Figura 15: Espaço amostral para o lançamento de 2 dados.[17]

Dessa forma temos que o espaço amostral no lançamento desse dado é um conjunto com 36 elementos.

2. Para o lançamento de duas moedas, podemos construir o espaço amostral como o conjunto $\Omega = \{(K,K),(K,C),(C,K),(C,C)\}$, onde a letra K representa o resultado cara e a letra C representa o resultado coroa.

3. Seja agora o experimento dado pelo "sorteio das dezenas da Mega-Sena". Escrever um a um, todos os possíveis resultados do sorteio é inviável. Teríamos que representar todos os possíveis subconjuntos de seis elementos que podem ser formados a partir do conjunto {1, 2, ..., 60}. Nesse caso, teremos que lançar mão de representações sintéticas tais como $\Omega = \{\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}: x_i \in \{1, 2, 3, ...,59, 60\}$, para $i=1,2,...,6$, $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j\}$.

Para a obtenção da cardinalidade do espaço amostral, será necessário usar técnicas de contagem de Análise Combinatória. Trata-se de escolher, sem importar a ordem, seis dentre os sessenta números disponíveis. Assim, temos

$$\binom{60}{6} = C_{60,6} = \frac{60\,.59\,.58\,.57\,.56\,.55}{6!} = 50.063.860.$$

Assim, o número de resultados possíveis deste experimento aleatório é $n(\Omega) = 50.063.860$. Observe que no sorteio da Mega-Sena não importa a ordem dos números sorteados.

Uma das concepções errôneas dos alunos em relação ao espaço amostral é achar que ele define de forma unívoca o fenômeno estudado. De um ponto de vista da Teoria da Medida, pode-se construir diferentes espaços amostrais para um mesmo experimento, desde que todos contenham os resultados possíveis. No entanto, este não precisa ser minimal (quando o minimal pode ser reconhecido), pois é a medida de probabilidade que fará o trabalho de estabelecer a relação entre chance e resultados. Assim para um dado honesto, podemos tanto estabelecer $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, quanto $\Omega = \{1,2,3,4,\ ...\}$, ou mesmo $\Omega = \mathbb{Z}$, bastando para isso atribuir a

---

[17] Fonte: Matemática: Ciências e Aplicações, V.2

probabilidade de $\frac{1}{6}$ para os pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, e 0 (zero) para os demais pontos do espaço amostral. Por isso, não se deve dizer aos alunos que, para o lançamento de duas moedas, está errado construir o espaço amostral Ω = {(K,K),(K,C),(C,C)} em lugar de Ω = {(K,K),(K,C),(C,K),(C,C)}. O primeiro é tão legítimo quanto o segundo, desde que se atribua o valor de $\frac{1}{4}$ aos pares (K,K) e (C,C) e $\frac{1}{2}$ ao par (K,C), e não se queira responder a perguntas que envolvam o controle da ordenação, tais como: "qual a probabilidade de a primeira face ser coroa e a segunda face ser cara?". No problema do jogo da Mega-Sena, se tivéssemos optado por um espaço amostral em que a ordem fosse relevante, conduzindo-nos a $\Omega = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6): x_i \in \{1, 2, 3, ...,59, 60\}$, para i=1,2,...,6, $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j\}$, teríamos a cardinalidade dada pelo $A_{60,6} = 60 \,.\, 59 \,.\, 58 \,.\, 57 \,.\, 56 \,.\, 55$, um número 6! vezes maior que o anteriormente calculado. No entanto as probabilidades de todos os eventos envolvendo o jogo da Mega-Sena se equivaleriam nos dois casos.

Assim, os alunos devem entender que a depender das escolhas do espaço amostral teremos medidas de probabilidade para os pontos elementares do espaço amostral diferentes, mas não teremos respostas conflitantes para o mesmo fenômeno estudado se a sua gênese é conhecida.

3.3 - Eventos

Vamos supor que você participa junto a alguns amigos do jogo War e para ganhar um confronto de território precisa tirar um número maior ou igual a dois no lançamento de um dado comum de seis faces. O conjunto A = {2, 3, 4, 5, 6} possui todos os resultados que são favoráveis à sua vitória. Observe que esse conjunto é um subconjunto do espaço amostral Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e é o evento pretendido por você para vencer o confronto. Qualquer subconjunto do espaço amostral ao qual se pode atribuir uma medida de probabilidade é chamado de evento e geralmente é representado por letras maiúsculas do nosso alfabeto: A, B, C, ...

Vejamos alguns exemplos de eventos para determinados espaços amostrais construídos:

1) Uma caixa contém 20 bolas, de mesma massa e tamanho, numeradas de 1 a 20. Uma pessoa, com os olhos vendados, retira uma bola dessa caixa. Trata-se de um experimento aleatório cujo espaço amostral é Ω = {1, 2, ..., 20}. Vamos construir alguns eventos aleatórios, ou seja, subconjuntos de Ω:

• A: "a bola sorteada contém um múltiplo de 4":

A = {4, 8, 12, 16, 20}.

• B: “a bola sorteada contém um número formado por dois algarismos“:

$$B = \{10, 11, 12, ..., 20\}.$$

• C: “a bola sorteada contém um número primo“:

$$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$$

• D: “a bola sorteada contém um número natural não nulo menor ou igual a 20“:

$$D = \{1, 2, 3, 4, ..., 20\}.$$

Repare que o evento D determina um conjunto igual ao espaço amostral Ω. Quando um evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado *evento certo*.

• E: “a bola sorteada contém um número formado por três algarismos“:

$$E = \emptyset.$$

Quando um evento é vazio, ele é chamado *evento impossível*.

2) Uma moeda é lançada três vezes e observa-se a tripla de resultados obtidos em que cara é representada por K e coroa é representada por C. Seja o espaço amostral

$$\Omega =\{(K,K,K), (K,K,C), (K,C,K), (K,C,C), (C,K,K), (C,K,C), (C,C,K), (C,C,C)\}.$$

Eis alguns eventos:

A: “Ocorrência de cara (K) no primeiro lançamento”:

$$A =\{(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(K,C,C)\}.$$

B: “Ocorrência de exatamente uma coroa”:

$$B =\{(K,K,C),(K,C,K),(C,K,K)\}.$$

C: “Ocorrência de, no máximo, duas coroas”:

$$C =\{(K, K, K),(K, K, C),(K, C, K),(K, C, C), (C, K, K),(C, K, C),(C, C, K)\}.$$

D: “Ocorrência de pelo menos duas caras”:

$$D =\{(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(C,K,K)\}.$$

Finalmente, para $w \in \Omega$, denominamos $\{w\}$ o evento elementar.

3.4 - Probabilidade no Sentido Clássico

Nesta seção, trabalharemos a probabilidade construída por meio de espaços amostrais equiprováveis, a chamada Probabilidade Clássica, e faremos o tratamento de alguns resultados mais intuitivamente compreendidos quando restritos ao caso clássico. É preciso, entretanto, admitir que alguns dos resultados não podem ser demonstrados da forma como aqui se encontra, mas as “demonstrações” aqui expostas estão mais próximas da construção teórica da teoria na época clássica de Pascal, Fermat e Laplace. Vejamos como elicitar a estrutura clássica por meio de um diálogo com o sentido frequentista de probabilidade.

Ao realizarmos 75 lançamentos sucessivos de uma moeda honesta através de um simulador de lançamentos de moeda da ferramenta Geogebra, dos quais 32 resultaram em cara e 43 resultaram em coroa temos que a razão $\frac{número\ de\ caras}{número\ total\ de\ lançamentos} = \frac{32}{75} = 0{,}427$ representa a frequência relativa correspondente ao evento cara; a razão $\frac{número\ de\ coroas}{número\ total\ de\ lançamentos} = \frac{43}{75} = 0{,}573$ representa a frequência relativa correspondente ao evento coroa.

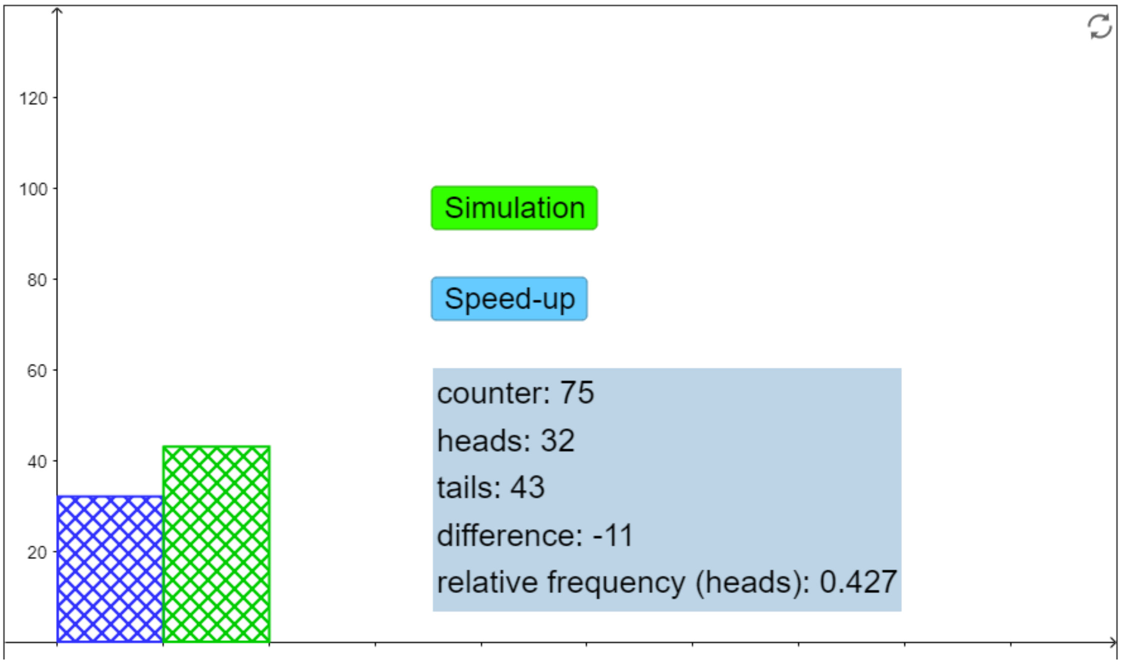


Figura 16: Distribuição de frequência no lançamento de um dado pelo Geogebra.

Imagine que tenham sido realizados mais 225 lançamentos dessa moeda, gerando o seguinte resultado acumulado para os 300 lançamentos: 142 caras e 158 coroas.

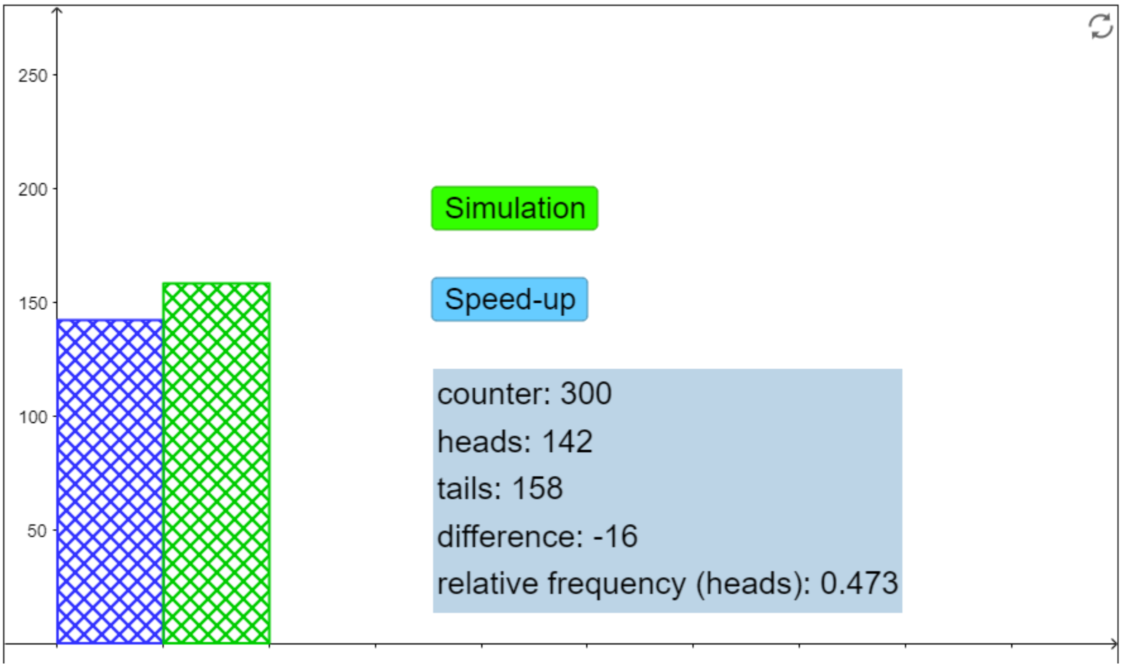


Figura 17: Distribuição de frequência no lançamento de um dado pelo Geogebra.

Desse modo, a frequência relativa correspondente ao evento cara passou a ser $\frac{142}{300} = 0{,}473$ e a frequência relativa correspondente ao evento coroa passou a ser $\frac{158}{300} = 0{,}527$. À medida que o número de lançamentos aumenta, verifica-se, experimentalmente, que as frequências relativas correspondentes às ocorrências de cara e coroa ficam cada vez mais próximas entre si, tendendo à igualdade, dada pelo valor 0,5.

A probabilidade no sentido clássico da ocorrência de um evento A, indicada por P(A) é definida pela razão entre o número de elementos do evento, n(A) e o número de elementos do espaço amostral, n(**Ω**), ou seja,

$$P(A) = \frac{\textit{número de elementos do evento } A}{\textit{número de elementos do espaço amostral}},$$

ou ainda

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favoráveis do evento } A}{\textit{número total de casos}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Esse conceito só é válido no contexto em que o espaço amostral é finito e de elementos equiprováveis. Essa era a maneira desenvolvida por Cardano em seu livro *Liber De Ludo Aleae*, apesar de ainda não possuir uma formalização, surgida apenas no século XVIII com Laplace.

A seguir, vejamos algumas aplicações.

Exemplo 1: Ao retirar uma bola de uma caixa que possui 20 bolas, de mesma massa e tamanho, numeradas de 1 a 20, qual a probabilidade de obtermos uma bola de número primo?

Solução: O evento A: "obter bola que contém um número primo" será dado por A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}. Logo, n(A) = 8. O espaço amostral é **Ω** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20} de elementos equiprováveis e n(**Ω**) = 20. Portanto, a probabilidade de obtermos um número primo ao retirar uma bola dessa caixa é calculada no sentido clássico como

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%.$$

Observe que os resultados podem ser dados em fração, decimal ou porcentagem.

Exemplo 2: Uma moeda é lançada três vezes e observa-se a tripla de resultados obtidos. Qual a probabilidade de ocorrer, no máximo, duas coroas?

Solução: Sobre o lançamento da moeda, consideremos que o evento A = "ocorrer, no máximo duas coroas" será dado por A = {(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C), (C, K, K), (C, K, C), (C, C, K)}. Logo, n(A) = 7. O espaço amostral é Ω = {(K,K,K), (K,K,C), (K,C,K), (K,C,C), (C,K,K), (C,K,C), (C,C,K), (C,C,C)}, também de lementos equiprováveis, pois, como a moeda é honesta, todas as triplas têm a mesma probabilidade. Como n(**Ω**) = 8, a probabilidade da ocorrência do evento A é

$$P(A) = \frac{7}{8} = 0{,}875.$$

Como consequência imediata da definição dada por Laplace, embora P(Ω) = 1 e 0 ≤ P(A) sejam axiomas da Teoria das Probabilidade e os resultados a seguir valham para conceitos outros que não o clássico de equiprobabilidade dos eventos elementares, temos:

Teorema 1. Seja Ω um espaço amostral qualquer. Temos P(Ω) = 1 e P(∅) = 0.

Demonstração: Pela definição clássica, temos:

$$P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1 \text{ e } P(\emptyset) = \frac{0}{n(\Omega)} = 0.$$

Um erro muito comum é achar que se P(A) = 1, então A é um evento certo, ou seja, A = Ω; e que se P(A) = 0, então A é um evento impossível, ou seja, A = ∅. Na Probabilidade Geométrica, por exemplo, todo resultado experimental se dá por um elemento do espaço amostral de probabilidade 0 antes de este ocorrer. Da mesma forma, podemos ter eventos de medida 1 que não são certos, os chamados eventos quase certos. Para ver isso, tome, por exemplo, o experimento de se selecionar um ponto do intervalo [0, 1] aleatoriamente. Obviamente a probabilidade do ponto se situar no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ deve ser $\frac{1}{2}$; a probabilidade de o ponto se situar em $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ deve ser $\frac{1}{3}$, e assim sucessivamente. Assim, a probabilidade de um ponto se situar num subintervalo de [0,1] deve ser o "comprimento" do intervalo. Logo, a probabilidade de se selecionar um ponto *c* do intervalo [0,1], por exemplo, deve ser o comprimento do intervalo $[c, c]$, que vale 0. Mas todo resultado é um ponto c em [0,1], que antes de ocorrer tinha 0% de chance. Da mesma forma a probabilidade de se obter um número do tipo $\frac{1}{n}$ para n = 1, 2, 3,... também terá medida nula. Assim um evento definido como "o ponto selecionado é diferente de $\frac{1}{n}$ para n = 1, 2, 3,..." terá medida 1 e este não é o espaço amostral Ω = [0,1].

Cabe ressaltar também que na construção axiomática de Kolmogorov, P(Ω) = 1 é um dos axiomas de probabilidade e, portanto, não é passível de demonstração.

Teorema 2. Seja Ω um espaço amostral finito e de elementos equiprováveis e sejam A e B dois eventos em Ω. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração:

(1) Se A = B, é imediato que P(A) = P(B).

(2) Se $A \subset B$ com $A \neq B$, então $n(A) < n(B)$. Logo, $\frac{n(A)}{n(\Omega)} < \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) < P(B)$. Assim, por (1) e (2), $P(A) \leq P(B)$.

Teorema 3. Seja Ω um espaço amostral finito e de elementos equiprováveis e seja A um evento em Ω. Então, temos $0 \leq P(A) \leq 1$.

Demonstração: É imediato que $\emptyset \subset A \subset \Omega$. Então, decorre imediatamente dos Teoremas 1 e 2 que

$$P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Teorema 4. (Probabilidade da União.) Seja Ω um espaço amostral finito e de elementos equiprováveis e sejam A e B dois eventos contidos em Ω. Então, temos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demonstração: Somando n(A) com n(B), os elementos pertencentes a $A \cap B$ são contados duas vezes, pois pertencem simultaneamente a A e B. Logo, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Então, temos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Corolário 4.1: Em particular, se A e B são eventos mutuamente excludentes, temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, que é o terceiro axioma de Probabilidade estabelecido pelo matemático russo Kolmogorov na definição rigorosa de medida de probabilidade.

Demonstração: Se A e B são eventos mutuamente excludentes, temos que $A \cap B = \emptyset$, ou seja, $n(A \cap B) = 0$ e, consequentemente, $P(A \cap B) = 0$. Daí, segue que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

Teorema 5. (Probabilidade do Evento Complementar) Seja Ω um espaço amostral qualquer e seja A um evento em Ω. Então, temos $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Demonstração: Como $A \cap A^c = \emptyset$ e $A \cup A^c = \Omega$, decorre do Teorema 4 que:

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c). \Rightarrow P(A) + P(A^c) = 1. \text{ Logo,}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Veremos agora alguns exemplos de aplicações dos resultados apresentados.

Exemplo 3: Ao retirar aleatoriamente uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que essa carta seja vermelha ou um ás?

Solução: A retirada aleatória de uma carta de um baralho é considerada um evento equiprovável.

Evento V: “a carta é vermelha”;

Evento A: “a carta é ás”;

Evento $(V \cup A)$: “a carta é vermelha ou ás”.

$$P(V \cup A) = P(V) + P(A) - P(V \cap A)$$

Em um baralho de 52 cartas, há 26 cartas vermelhas e 26 cartas pretas. Há também 4 ases, dos quais 2 são vermelhos. Logo,

$$P(V) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2},\ P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \text{ e } P(V \cap A) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}.$$

Assim,

$$P(V \cup A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{13} - \frac{1}{26} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$$

A probabilidade de a carta retirada ser vermelha ou ás é $\frac{7}{13}$.

Exemplo 4: Uma máquina produziu 50 parafusos, dos quais 5 eram defeituosos. Ao retirar ao acaso 3 parafusos, sem reposição, responda:

a) Qual é a probabilidade de que os 3 sejam perfeitos?

b) Qual é a probabilidade de que pelo menos um seja defeituoso?

Solução:

a) $n(\Omega)$ = número de combinações de 50 elementos tomados 3 a 3, ou seja,

$$n(\Omega) = C_{50,3} = \binom{50}{3} = \frac{50!}{3!47!} = \frac{50.49.48.47!}{3.2.47!} = 50\,.\,49\,.\,8.$$

Evento A: 3 parafusos são perfeitos. Assim

$$n(A) = C_{45,3} = \binom{45}{3} = \frac{45!}{3!42!} = \frac{45.44.43.42!}{3.2.42!} = 15\,.\,22\,.\,43 \text{ e}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15\,.22\,.43}{50.49.8} = \frac{1419}{1960} \cong 72\%.$$

b) o evento E: “pelo menos um é defeituoso” é o complementar do evento A: “os três são perfeitos” (que é o mesmo que “nenhum é defeituoso”). Logo,

$$P(E) = P(A) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}72398 = 0{,}27602.$$

Exemplo 5: (UERJ – 2009) Os baralhos comuns são compostos de 52 cartas divididas em quatro naipes, denominados copas, espadas, paus e ouros, com treze cartas distintas de cada um deles.

Observe a figura 18 que mostra um desses baralhos, no qual as cartas representadas pelas letras A, J, Q e K são denominadas, respectivamente, ás, valete, dama e rei.

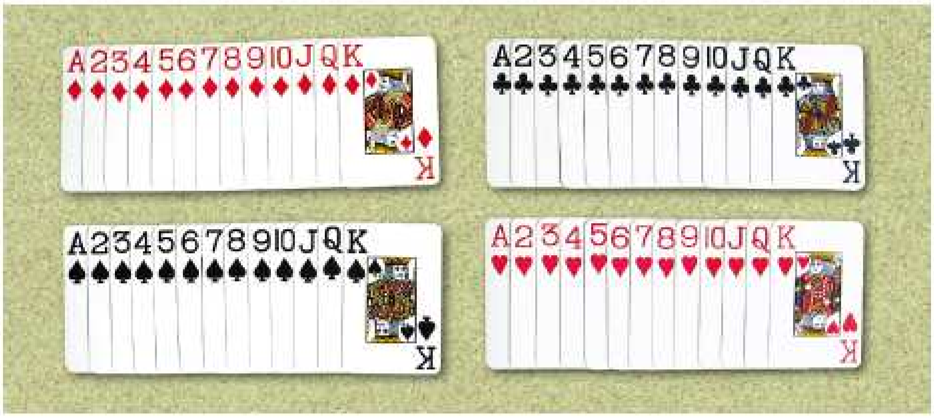


Figura 18: Cartas de um baralho.[18]

Uma criança rasgou algumas cartas desse baralho, e as n cartas restantes, não rasgadas, foram guardadas em uma caixa.

A tabela 7 apresenta as probabilidades de retirar-se dessa caixa, ao acaso, as seguintes cartas:

carta	probabilidade
um rei	0,075
uma carta de copas	0,25
uma carta de copas ou rei	0,3

Tabela 7: Probabilidade dos eventos em questão.[19]

[18] Fonte: Vestibular UERJ – 2009.

[19] Fonte: Vestibular UERJ – 2009.

Calcule o valor de n.

Solução: Como há rei de copas em um baralho, esta carta é a interseção do conjunto das cartas que são reis e do conjunto de copas. Temos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(um\ rei\ ou\ copas) = 0{,}3 = \frac{3}{10}$$

$$P(um\ rei) = 0{,}075 = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40}$$

$$P(uma\ \ copas) = 0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(um\ rei\ e\ copas) = \frac{3}{40} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{3+10-12}{40} = \frac{1}{40} \Rightarrow n = 40$$

Os exemplos anteriores, retirados de livros didáticos ou vestibulares, se utilizam de aplicações da Teoria da Probabilidade em espaços equiprováveis, o que não necessariamente é corriqueiro, dado que a maioria dos modelos presentes no dia a dia atuam sobre espaços não-equiprováveis.

3.4.1 - Probabilidade em Eventos Equiprováveis e Eventos Não-Equiprováveis

Como visto anteriormente, ao destacar a aplicação da definição de probabilidade conseguimos determinar que quando se faz o lançamento de uma moeda, a probabilidade de sair a face cara voltada para cima é de $\frac{1}{2}$ e de sair a face coroa é também de $\frac{1}{2}$. Já no lançamento de um dado honesto, ou não viciado, de seis faces, a probabilidade de sair qualquer uma das faces é $\frac{1}{6}$. Quando isso ocorre, dizemos que esses eventos, que têm a mesma probabilidade de ocorrer, são eventos equiprováveis.

Definição. Seja $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ um espaço amostral qualquer e sejam $P(\{a_1\})$, $P(\{a_2\})$, ..., $P(\{a_n\})$ as respectivas probabilidades de cada um dos eventos elementares de Ω. Dizemos que Ω é um espaço amostral equiprovável se $P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = ... = P(\{a_n\})$, ou seja, se todos os eventos elementares contidos em Ω tiverem a mesma probabilidade.

Teorema 6. Se $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ é um espaço amostral equiprovável, então,

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{n},\ \forall\ i\ \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Demonstração: Se Ω é um espaço amostral equiprovável, temos, pela definição de probabilidade equiprovável, que $P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = ... = P(\{a_n\})$, e pelo Teorema 1, $P(\Omega) = 1$. Logo,

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Teorema 7. Seja $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ um espaço amostral equiprovável, seja A um evento contido em Ω e sejam $n(A)$ e $n(\Omega)$, respectivamente, o número de elementos de A e de Ω. Então,

$$P(A) = \frac{n(A).}{n(\Omega)}$$

Demonstração: Por hipótese, $n(\Omega) = n$. Logo,

$P(A) = n(A). \frac{1}{n} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A).}{n(\Omega)}$

Vejamos alguns exemplos da aplicação desses teoremas:

Exemplo 1: Uma urna contém 15 bolas de mesmo tamanho e mesma massa numeradas de 1 a 15. Uma bola é extraída ao acaso da urna. Calcule:

a) Qual a probabilidade de ser sorteada a bola com o número 13?

b) Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com um número par?

c) Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com um número ímpar?

d) Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com número maior ou igual a 11?

Solução: Observe que a urna possui 15 bolas e portanto $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 15\}$. Esse espaço amostral é equiprovável, portanto $n(\Omega) = 15$ e, pelo Teorema 6, a probabilidade de obter cada bola ser retirada é igual a $\frac{1}{15}$. Sejam n(A), n(B), n(C) e n(D) o número de elementos de cada um dos eventos pedidos no enunciado. Assim, pelo Teorema 7, temos:

a) $A = \{13\} \Rightarrow n(A) = 1$ e $P(A) = \frac{1}{15} \Rightarrow P(A) \cong 0{,}067$.

b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \Rightarrow n(B) = 7$ e $P(B) = \frac{7}{15} \Rightarrow P(B) \cong 0{,}467$.

c) $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\} \Rightarrow n(C) = 8$ e $P(C) = \frac{8}{15} \Rightarrow P(C) \cong 0{,}534$.

d) $C = \{11, 12, 13, 14, 15\} \Rightarrow n(D) = 5$ e $P(C) = \frac{5}{15} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(C) \cong 0{,}33$.

Exemplo 2: Uma urna contém 50 bolinhas, numeradas de 1 a 50. Uma bolinha é sorteada aleatoriamente e observa-se o seu número. Assumindo que todas as bolinhas tem probabilidade $\frac{1}{50}$ de serem sorteadas, calcule a probabilidade de ocorrência de cada um dos eventos abaixo:

a) Sortear uma bolinha cujo número seja, simultaneamente, múltiplo de 3 e de 4.

b) Sortear uma bolinha cujo número seja múltiplo de 3 ou de 4.

c) Sortear uma bolinha cujo número não seja múltiplo de 7.

Solução: Temos $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 49, 50\}$, e os 50 eventos elementares são equiprováveis.

a) Perceba que se um número é simultaneamente múltiplo de 3 e 4, então é necessariamente, múltiplo de 12. Portanto, o evento desejado é A = {12, 24, 36, 48}. Assim, temos: P(A)= $\frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \frac{1}{50} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25} \Rightarrow$ P(A) = 0,08 ⇒ P(A) = 8%

b) Sejam os eventos:

B: sortear um múltiplo de 3 e C : sortear um múltiplo de 4.

Então, B = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48} e C = {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48 }. Logo, pelo Teorema 7, temos:

$P(B) = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$ e $P(C) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$.

Agora, devemos observar que B ∪ C é o evento desejado e B ∩ C é exatamente o evento A. Então, pelo Teorema 4, temos:

$P(A \cup B) = \frac{8}{25} + \frac{6}{25} - \frac{2}{25} = \frac{12}{25} \Rightarrow P(A \cup B) = 0{,}48 = 48\%$.

c) Considere o evento D: sortear um múltiplo de 7. Então, temos:

D = {7, 14, 21, 28, 35, 42, 49}. Portanto, $P(D) = \frac{7}{50}$. O evento desejado é D^c. Então, pelo Teorema 5, $P(D^c) = 1 - \frac{7}{50} = \frac{43}{50} \Rightarrow P(D^c) = 0{,}86$.

Agora, vamos supor que um dado de seis faces foi confeccionado de forma que a probabilidade de sair qualquer número é diretamente proporcional ao número da face retirada. Observe que os seis elementos do espaço amostral não são equiprováveis, tendo em vista que, por exemplo, a probabilidade de sair a face 2 tem o dobro de chances de ocorrer do que a face 1.

No lançamento desse dado, qual será a probabilidade do evento A = “sair a face com o número 6 voltada para cima”? E do evento B = “face voltada para cima é o número 2”? E do evento C = “face voltada para cima é o número 5”?

Ao calcular a probabilidade teremos, respectivamente, $P(A) = \frac{6}{21}$, $P(B) = \frac{2}{21}$ e $P(C) = \frac{5}{21}$. Observe que esses eventos não têm a mesma probabilidade de acontecer e são chamados de eventos não equiprováveis. O dado do exemplo anterior é chamado de dado imperfeito, desonesto ou viciado. Retornaremos mais tarde a esse exemplo para realizar um estudo mais minucioso sobre esses tipos de eventos.

É importante destacar que há infelizmente uma supremacia do tratamento da probabilidade no Ensino Básico por meio de espaços amostrais equiprováveis, em detrimento dos problemas caracterizados por espaços amostrais não equiprováveis, sendo estes os mais frequentes na modelagem de problemas reais. Com isso, viciam-se os alunos a raciocinarem sempre a probabilidade com a fórmula “casos favoráveis sobre casos possíveis”, não dissociando nunca a Probabilidade com a Análise Combinatória, o que é um desserviço à educação para o aleatório, já que há espaços amostrais finitos e infinitos não equiprováveis nos mais diversos contextos científicos.

Veremos mais à frente sugestões de atividades que discorrem sobre espaços amostrais não equiprováveis e podem naturalmente ser aplicadas durante as aulas do ensino médio.

3.5 - Probabilidade Condicional

Em Ciência, informação é o material mais precioso que existe. Quanto mais informação dispomos de determinados fenômenos, mais acurados serão nossos modelos e nossos cálculos de probabilidade. É nesse sentido que surge o conceito de probabilidade condicional: como reavaliar a chance de um evento A ocorrer dado que sabemos que um outro evento B ocorreu? Por exemplo, suponha o lançamento de um dado honesto, isto é, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Seja o evento A = {2, 4, 6}, "cair número par". Então, se nada soubermos sobre o experimento, temos que

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%.$$

Suponha agora que, tendo realizado o experimento, alguém nos informe que um número primo foi obtido. Assim sabemos que o evento B = {2, 3, 5} ocorreu. Qual deve ser a probabilidade agora de A ter ocorrido à luz dessa informação? Temos agora apenas 1 chance em 3. Ou seja

$$P(\text{A dado que B ocorreu}) = P(A \mid B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3} = 0{,}333\ ... = 33{,}33\%.$$

Assim a chance de A se reduz de 50% para 33,33% quando sabemos que um número primo ocorreu.

Utilizaremos a notação P(A | B) para significar a probabilidade da ocorrência do evento A à luz da informação de que o evento B ocorreu. Observe também que, em espaços amostrais finitos e equiprováveis, podemos escrever P(A | B) como

$$P(A \mid B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{n(A\cap B)/n(\Omega)}{n(B)/n(\Omega)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

É no contexto de equiprobabilidade que podemos justificar de forma mais intuitiva a definição de Probabilidade Condicional, mesmo que sua definição não dependa de espaços amostrais equiprováveis. Assim, temos a seguinte definição:

Definição. Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado B é o número $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Denotaremos essa probabilidade por P(A | B). Assim, temos:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Note-se que este número só está bem definido, matematicamente, quando

P (B) > 0.

A equação acima também pode ser escrita como: $P(A \cap B) = P(B)\ x\ P(A \mid B)$.

Se $P(A) > 0$, temos também o seguinte resultado: $P(A \cap B) = P(A)\ x\ P(B \mid A)$.

Vemos aí a primeira grande oportunidade do professor de matemática de fazer os alunos perceberem que em interseção de eventos, a aritmética associada é o produto de probabilidades, podendo inclusive ressaltar que o resultado desse produto será potencialmente inferior a cada uma das parcelas, reduzindo assim a chance de ocorrência, já que exigimos a ocorrência de dois eventos ao mesmo tempo.

Vejamos agora algumas propriedades básicas da probabilidade condicional:

Teorema 8. Seja A tal que $P(A) > 0$. Então,

a) $P(\emptyset \mid A) = 0$;

b) $P(\Omega \mid A) = 1$;

c) $0 \leq P(B \mid A) \leq 1$.

d) $P((B \cup C) \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A)$, se $B \cap C = \emptyset$.

Demonstração:

a) $P(\emptyset \mid A) = \frac{P(\emptyset \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$;

b) $P(\Omega \mid A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$.

c) Como $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$, temos :

$$0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1 \text{ , ou seja } 0 \leq P(B \mid A) \leq 1.$$

d) $P((B \cup C) \mid A) = \frac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)}$. Como $B \cap C = \emptyset$, temos

$P((B \cup C) \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = P(B \mid A) + P(C \mid A)$.

A seguir, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: Um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino a Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o voo, cada turista respondeu a duas perguntas:

1) Já voou antes?

2) Já esteve em Natal?

Os dados obtidos a partir das respostas dos passageiros encontram-se organizados no quadro seguinte:

	Voando pela primeira vez	Já havia voado	Total
Não conhecia Natal	83	22	105
Já conhecia Natal	23	12	35
Total	106	34	140

Tabela 8: Respostas dos passageiros.[20]

Um passageiro é selecionado ao acaso e verifica-se que ele nunca tinha viajado de avião. Qual é a probabilidade de que ele já conhecesse Natal?

Solução: Nesse caso, a questão fornece uma informação prévia a respeito do resultado do experimento: "o passageiro nunca tinha viajado de avião" o que é equivalente a "estar viajando pela primeira vez". Com isso, o número de casos possíveis que originalmente seria igual a quantidade de passageiros se reduz a 106. Nesse novo universo, que é o espaço amostral reduzido, o número de passageiros que já conheciam Natal é 23.

Assim, a probabilidade pedida é $\mathrm{P} = \frac{23}{106}$.

Esse número expressa a probabilidade de a pessoa escolhida conhecer Natal, sabendo que ela nunca havia viajado de avião. Vamos denominar tal número de probabilidade condicional e indicá-lo por:

P(*já conhecer Natal* **|** *nunca tinha viajado de avião*)

E vamos ler como a probabilidade de a pessoa escolhida já conhecer Natal "dado que" ou "sabendo que" nunca tinha viajado de avião.

Do valor encontrado em $\mathrm{P} = \frac{23}{106}$, podemos notar que:

• 23 corresponde ao número de passageiros que já estiveram em Natal e estavam voando pela primeira vez.

• 106 corresponde ao número de passageiros que voavam pela primeira vez. Temos, então:

[20] Fonte: Matemática: Ciências e Aplicações, v.2.

$$P(\,já\ conhecer\ Natal \mid primeira\ vez\ de\ avião) = \frac{\begin{array}{c} número\ de\ passageiros\ que\ já \\ conheciam\ Natal \\ e\ voavam\ pela\ primeira\ vez \end{array}}{\begin{array}{c} número\ de\ passageiros\ que \\ voavam\ \ pela\ primeira\ vez \end{array}}$$

Analisemos agora a seguinte situação adaptada retirada do livro texto Matemática vol.2 – Contexto e Aplicações (DANTE).

Exemplo 2: Os amigos Thiago, Leandro, Lucas, Pedro, Luciana, Lívia, Camila e Renata, estão reunidos para revelar seus amigos secretos durante uma confraternização de final de ano. Todos estão sentados na sala, escolhendo quem irá começar. Thiago se dispõe a ser o primeiro a falar. Ele se levanta e vai para o meio da roda. Nesse primeiro momento, a chance de qualquer um dos sete participantes sentados ser o amigo secreto de Thiago é de $\frac{1}{7}$.

Solução: Matematicamente, a situação atual é a seguinte:

Espaço amostral: Ω = {todos os 7 amigos} e assim, n(Ω) = 7.

Evento A = {Luciana}, e assim, n(A) = 1 e P(A) = $\frac{n(A)}{n(\Omega\,)} = \frac{1}{7}$.

Evento B = {Pedro}, e assim n(B) = 1 e P(B) = $\frac{n(B)}{n(\Omega\,)} = \frac{1}{7}$.

Thiago começa: “Meu amigo secreto é uma mulher!”. Nesse momento, Pedro exclama decepcionado. Ele sabe, mesmo que intuitivamente, que a partir desse momento a chance de um dos homens ser o amigo secreto de Thiago é zero. Ao mesmo tempo, a chance de Luciana, bem como das outras três mulheres, passou a ser de $\frac{1}{4}$. Essas probabilidades mencionadas, zero e $\frac{1}{4}$, são probabilidades condicionadas a uma informação extra. A presença dessa informação extra modifica as probabilidades iniciais, pois ela modifica o espaço amostral.

Agora vamos definir os eventos existentes nessa situação:

M é o evento “o amigo secreto de Thiago é mulher”, representado pelo conjunto

M = {Luciana, Lívia, Camila, Renata}.

A é o evento “o amigo secreto de Thiago é Luciana“, representado pelo conjunto A = {Luciana}

B é o evento “o amigo secreto de Thiago é Pedro”, representado pelo conjunto B = {Pedro}

Quando os eventos A e B não estavam condicionados a nenhuma informação extra, tínhamos P(A) = P(B) = $\frac{1}{7}$, como já visto anteriormente.

Mas agora, ambos estão condicionados ao fato que M ocorreu. Assim, devemos calcular P(A | M) e P(B | M).

Intuitivamente, sabemos que P(A | M) = $\frac{1}{4}$ e P(B | M) = 0.

Note que, quando o evento M ocorre, o espaço amostral passa a ser os elementos de M. No caso, são as 4 mulheres. Assim, o número de elementos de M é 4, ou seja, n(M) = 4. Para o cálculo de uma probabilidade condicional, é necessário verificar se o evento está ou não contido no novo espaço amostral. Pedro, que é homem, não pertence ao conjunto M das mulheres. Ou seja, B ∩ M = ∅ e portanto n(B ∩ M) = 0. Esse é o motivo pelo qual P(B | M) = 0.

$$\text{Assim, } P(B \mid M) = \frac{n(B \cap M)}{n(M)} = \frac{0}{4}.$$

Luciana, por sua vez, pertence a M, ou seja, A ∩ M = {Luciana} e n(A ∩ M) = 1. Então,

$$P(A \mid M) = \frac{n(A \cap M)}{n(M)} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 3: Uma família planejou ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha 3 homens, já que a primeira criança que nasceu é homem?

Solução: O nascimento de filhos é considerado um evento equiprovável. Assim, “nascer homem” e “nascer mulher” têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Nesse caso, chamando M: mulher e H: homem, temos: Ω = {HHH, HHM, HMM, MMM, MMH, MHH, HMH, MHM} ⇒ n(Ω) = 8

Evento A: a família tem 3 homens ⇒ A = {HHH}

Evento B: a primeira criança é homem ⇒ B = {HHH, HHM, HMH, HMM}

A ∩ B = {HHH}; P(A ∩ B) = $\frac{1}{8}$; P(B) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$;

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Exemplo 4: (VUNESP) Dois jogadores, A e B vão lançar um par de dados. Eles combinam que, se a soma dos números dos dados for 5, A ganha, e, se essa soma for 8, B é quem ganha. Os dados são lançados. Sabe-se que A não ganhou. Qual a probabilidade de B ter vencido?

(A) $\frac{10}{36}$

(B) $\frac{5}{32}$

(C) $\frac{5}{36}$

(D) $\frac{5}{35}$

Solução. O espaço amostral do lançamento de dois dados é composto de 36 elementos.

Evento A: “a soma é 5” = {(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)} e assim, n(A) = 4.

Evento B: “a soma é 8” = {(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)} e assim, n(B) = 5.

Os eventos “a soma é 5” e a “soma é 8” são disjuntos, logo não há interseção.

Se A não ganhou, o espaço amostral ficará reduzido para 36 – 4 = 32 elementos.

Logo, a probabilidade de B vencer será: P(soma 8 | não ocorre soma 5) = $\frac{5}{32}$.

Exemplo 5: (UFRGS) As máquinas A e B produzem o mesmo tipo de parafuso. A porcentagem de parafusos defeituosos produzidos, respectivamente, pelas máquinas A e B é de 15% e de 5%. Foram misturados, numa caixa 100 parafusos produzidos por A e 100 produzidos por B. Se tirarmos um parafuso ao acaso e ele for defeituoso, a probabilidade de que tenha sido produzido pela máquina A é de:

(A) 10%

(B) 15%

(C) 30%

(D) 50%

(E) 75%

Solução: Observe a tabela 9 com a distribuição dos parafusos quanto a máquina que o produz e quanto a ser defeituoso ou não:

	Máquina A	**Máquina B**	**Total**
Defeituoso	15	5	20
Não defeituoso	85	95	180
Total	100	100	200

Tabela 9: Distribuição dos parafusos.

A caixa possui um total de 200 parafusos, logo n(Ω) = 200. Sabemos que há 15% de 100 parafusos defeituosos da máquina A e 5% de 100 parafusos defeituosos da máquina B, o que é igual a 15 e 5, respectivamente. Portanto, existe um total de 20 parafusos defeituosos. Como temos o conhecimento de que o parafuso retirado é defeituoso, o espaço amostral fica reduzido de 200 para 20. Logo,

$$\text{P(A | defeituoso)} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \rightarrow 75\%.$$

O Teorema a seguir generaliza a regra do produto de probabilidades para interseções de eventos:

Teorema 9 (Teorema do Produto) Se $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_k) \neq 0$, para k = 1, 2,..., n - 1, então temos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}).$$

Demonstração: Para dois conjuntos A_1 e A_2 a fórmula é válida, pois coincide com a definição de probabilidade condicional. Para três eventos A_1, A_2 e A_3, temos:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \,.\, P(A_1 \cap A_2) \Rightarrow$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \,.\, P(A_2 \mid A_1) \,.\, P(A_1).$$

Para $n > 3$, o raciocínio é semelhante, e usa-se o Princípio de Indução Completa.

Exemplo 6: Em uma urna existem 10 bolas idênticas, sendo 4 vermelhas e 6 azuis.

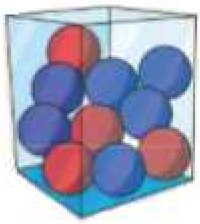


Figura 19: Urna com 10 bolas.[21]

Retirando-se aleatoriamente 2 bolas dessa urna, qual é a probabilidade de saírem 2 bolas vermelhas?

Solução: Retirar 2 bolas equivale a retirar uma de cada vez, sem reposição. Assim, para a primeira retirada, temos P(A) = $\frac{4}{10}$. A segunda retirada é condicionada à retirada da primeira, que já ocorreu. O espaço amostral agora é de 9 bolas, sendo 3 vermelhas e 6 azuis. Então,

$$\text{P(B | A)} = \frac{3}{9}.$$

$$\text{P(A} \cap \text{B)} = \text{P(A)} \,.\, \text{P(B | A)} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}.$$

Exemplo 7: (UERJ – 2018) Cinco cartas de um baralho estão sobre uma mesa, em que duas delas são Reis, como indicam as imagens.

[21] Fonte: Matemática: Contexto e Aplicações. V.2.

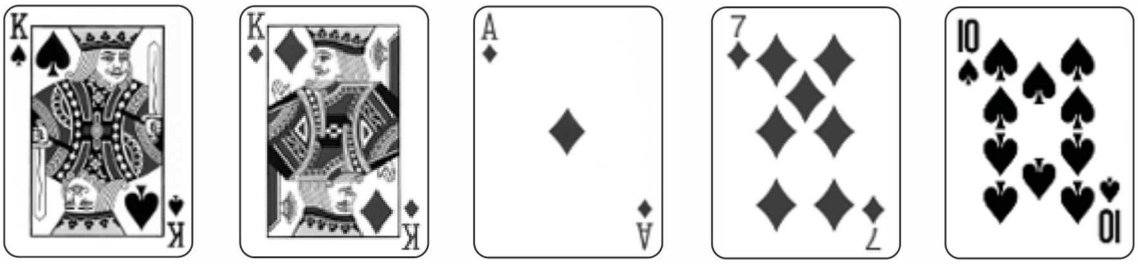


Figura 20: Cinco cartas sobre a mesa.[22]

Após serem viradas para baixo e embaralhadas, uma pessoa retira uma dessas cartas ao acaso e, em seguida, retira outra. Calcule a probabilidade de sair Rei apenas na segunda retirada.

Solução: O total de cartas determina o espaço amostral, logo n(Ω) = 5.

O evento A: "não sai um rei na primeira retirada" = {A, 7, 10} e n(A) = 3. Assim,

P(A) = $\frac{3}{5}$.

Entretanto, a segunda retirada é condicionada à retirada da primeira, que já ocorreu. O espaço amostral agora é de 4 cartas.

Seja o evento B: "sai um rei na segunda retirada". Assim, tendo em mente que n(B ∩ A) = 2 e n(A) = 4, temos

$$P(B \mid A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, pelo Teorema do Produto, segue que a probabilidade pedida é:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B \mid A) = \frac{3}{5} \,.\, \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

Exemplo 8: Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores do Flamengo. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se o cobrador for do Flamengo e de 70% em caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado:

a) Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador do Flamengo e ser convertido?

b) Qual a probabilidade do pênalti ser convertido?

Solução:

[22] Fonte: Vestibular UERJ – 2018.

a) A probabilidade desejada é:

P($\underbrace{\text{"}cobrador\ é\ do\ Flamengo\text{"}}_{F}$e $\underbrace{\text{"}pênalti\ é\ convertido\text{"}}_{C}$= P (F ∩ C).

Pelo Teorema do Produto:

$$P(F \cap C) = P(F) \,.\, P(C \mid F) = 0{,}8 \,.\, 0{,}4 = 0{,}32.$$

b) Note que, do enunciado, apenas sabemos as probabilidades condicionais do pênalti ser convertido, dado que o batedor seja do Flamengo ou pertença a um outro clube. Para fazer uso dessas probabilidades condicionais, decompomos o evento C: "o pênalti é convertido" na união de dois eventos disjuntos: "o cobrador é do Flamengo e o pênalti é convertido", representado por $F \cap C$ e "o cobrador não é do Flamengo e o pênalti é convertido" representado por $\bar{F} \cap$ C.

Isto é:

$$C = (F \cap C) \cup (\bar{F} \cap C).$$

Logo

$$P(C) = P(F \cap C) + P(\bar{F} \cap C).$$

Cada uma das probabilidades do lado direito pode ser calculada com auxílio do Teorema do Produto.

$$P(F \cap C) = P(F) \,.\, P(C \mid F) = 0{,}8 \,.\, 0{,}4 = 0{,}32;$$

$$P(\bar{F} \cap C) = P(\bar{F}) \,.\, P(C \mid \bar{F}) = 0{,}2 \,.\, 0{,}7 = 0{,}14.$$

Logo,

$$P(C) = 0{,}32 + 0{,}14 = 0{,}46.$$

Uma forma prática de resolver problemas como este é recorrer ao diagrama de árvore. Tais diagramas são úteis sempre que o experimento aleatório possua diversos estágios. O diagrama apropriado para o problema em questão é dado na figura 21.

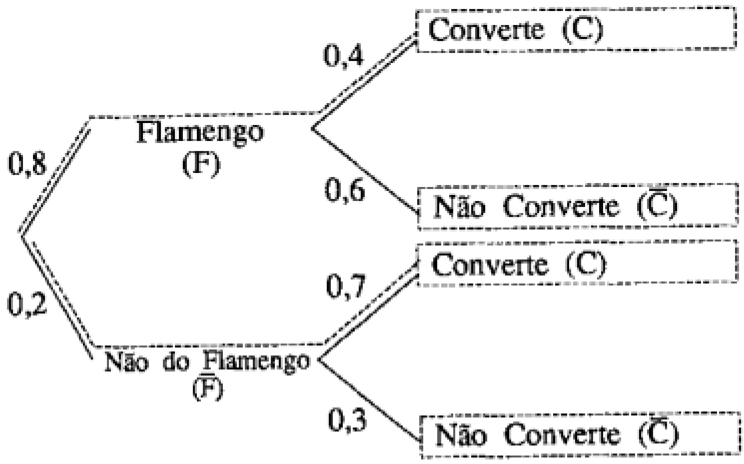


Figura 21: Diagrama de árvore da cobrança de pênaltis.[23]

Os números em cada ramo representam as probabilidades condicionais do evento associado ao final do ramo, dado a sequência de eventos que nos conduziu ao início do ramo.

A decomposição do evento "pênalti é convertido" em eventos disjuntos é feita, no diagrama, tomando-se todos os caminhos sobre a árvore que levam a este evento. A probabilidade correspondente a cada caminho é calculada usando o Teorema do Produto.

Desta forma, temos novamente:

$$P(C) = 0{,}8 \,.\, 0{,}4 + 0{,}2 \,.\, 0{,}7 = 0{,}46.$$

Exemplo 9: (ENEM – 2017) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

a) 0,075

b) 0,150

c) 0,325

d) 0,600

e) 0,800

Solução:

[23] Fonte: Análise Combinatória e Probabilidade.

Ele pode se atrasar chovendo ou não. A probabilidade será a soma dessas probabilidades condicionais, portanto:

$$P(atrasa|choveu) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20},$$

$$P(atrasa|não\ choveu) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{40},$$

$$P(atrasa) = \frac{3}{20} + \frac{7}{40} = \frac{13}{40} = 0{,}325.$$

Exemplo 10: João, ao partir para uma viagem, ficou de enviar um cartão postal para sua mãe. Sabemos que a probabilidade de que ele envie o cartão é igual a 70%. Além disso, a probabilidade de um cartão postal se extraviar é 10%.

a) Qual é a probabilidade de que a mãe de João receba um cartão postal dele?

b) Se ela não receber um cartão de João, qual é a probabilidade de que ele o tenha enviado?

Solução: Sejam os eventos:

A: “João enviar o cartão”. Logo P(A) = 70% = 0,7.

B: “O cartão não se extraviar”. Logo P(B) = 100% - 10% = 90% = 0,9

Temos:

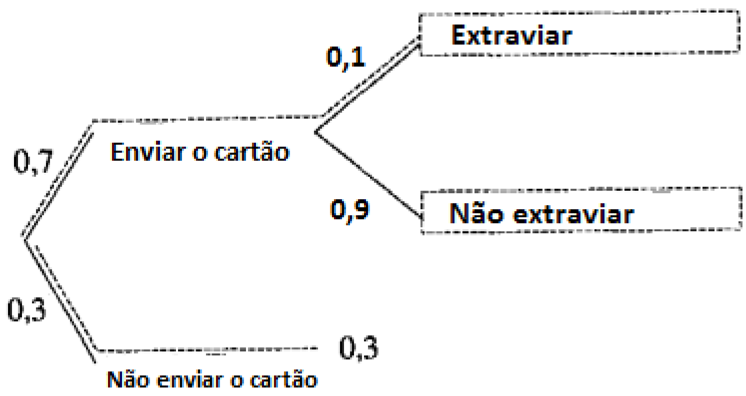


Figura 22: Diagrama de árvore da entrega do cartão.

a) O evento desejado é $A \cap B$. Então, temos: $P(A \cap B)$ = P(A) . P(B|A) = 0,7 . 0,9 = 0,63.

B) A mãe pode não receber o cartão em dois casos: João não envia o cartão ou João envia e o cartão é extraviado. Dessa forma, vamos considerar $(A \cap B)^C$ o evento em que a mãe de João não recebe o cartão, assim a probabilidade de a mãe não receber o cartão é $P((A \cap B)^C)$ = 1 − 0,63 = 0,37. A probabilidade de não receber o cartão por não ter sido enviado é 1 − 0,7 = 0,3 e a probabilidade dela não receber o cartão por ter havido extravio é $P(A \cap (A \cap B)^C)$ = 0,1 . 0,7 = 0,07. Portanto, $P(A \mid (A \cap B)^C) = \frac{0{,}07}{0{,}37} = \frac{7}{37} \Rightarrow P(A/D) \cong 0{,}19$.

Os exemplos apresentados anteriormente poderiam ser generalizados através de dois resultados: o **Teorema da Probabilidade Total** e o **Teorema de Bayes**. Ao generalizar a probabilidade condicional através do Teorema de Bayes podemos expressar essa probabilidade em termos de outras probabilidades condicionais.

Teorema 10. (Teorema da Probabilidade Total) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tais que $P(A_1) \geq 0$, $P(A_2) \geq 0, \ldots, P(A_n) \geq 0$, formam uma partição do espaço amostral, isto é, são disjuntos dois a dois e sua união devolve o espaço amostral, conforme a figura 23, e se B é também um evento, então

$$P(B) = P(A_1)\,.\,P(B \mid A_1) + P(A_2)\,.\,P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n)\,.\,P(B \mid A_n).$$

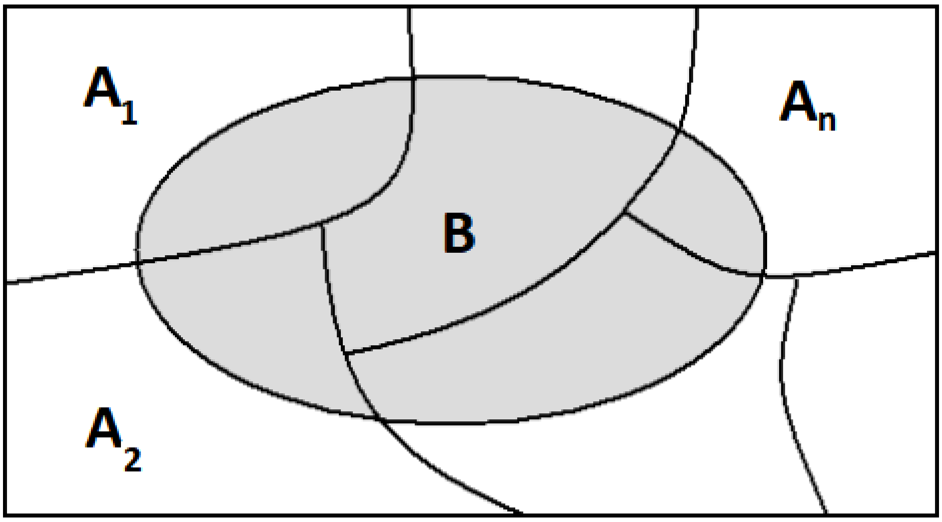


Figura 23: Ilustração da situação do teorema**.**

Demonstração: Temos que:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B) \Rightarrow$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) \Rightarrow$$

$$P(B) = P(A_1)\,.\,P(B \mid A_1) + P(A_2)\,.\,P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n)\,.\,P(B \mid A_n).$$

Teorema 11. (Teorema de Bayes) Nas condições do teorema anterior, se $P(B) > 0$, então, para todo i, $i = 1, 2, \ldots n$, temos:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\,.\,P(B \mid A_i)}{P(A_1)\,.\,P(B \mid A_1) + \ldots + P(A_n)\,.\,P(B \mid A_n)}.$$

Demonstração: Temos que:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\,.\,P(B \mid A_i)}{P(B)}.$$

Usando o resultado obtido no Teorema da Probabilidade Total, chega-se à fórmula dada.

Exemplo 11: Em dias sem chuva, 10% dos acidentes que ocorrem em uma rodovia são caracterizados como acidentes graves, enquanto em dias com chuva esse percentual é 5 vezes maior. Admita que a probabilidade de chover em um dia qualquer seja igual a 40% e que os eventos "chover em um dia" e "acidente grave nessa rodovia" sejam independentes. Dado que em um determinado dia houve um acidente grave nessa rodovia, qual é, aproximadamente, a probabilidade de que tenha chovido?

Solução: Usando o Teorema de Bayes, temos:

P(choveu | acidente grave) =

$$\frac{P(choveu)\,.\,P(acidente\ grave \mid choveu)}{P(choveu)\,.\,P(acidente\ grave \mid choveu)\ +\ P(não\ choveu)\,.\,P(acidente\ grave \mid não\ choveu\ )}$$

$$\Rightarrow\ P(A \mid B) = \frac{0{,}4\ .\ 0{,}5}{0{,}4\ .\ 0{,}5\ + 0{,}6\ .\ 0{,}1} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13} \Rightarrow P(A \mid B) = 0{,}769 \cong 77\%.$$

Exemplo. Imaginemos que o teste de mamografia se comporte da seguinte forma:

- 1% das mulheres têm câncer de mama (portanto, 99% não têm)
- 80% das mamografias detectam o câncer quando ele existe (portanto, 20% falham)
- 9,6% das mamografias detectam o câncer quando ele não existe (portanto, 90,4% retornam corretamente um resultado negativo)

Em uma tabela, temos:

#	Câncer (1%)	Sem câncer (99%)
Teste Positivo	80%	9,6%
Teste Negativo	20%	90,4%

Tabela 10: Teste de mamografia.[24]

Dadas todas essas informações, imagine que você se submeteu ao teste de mamografia e esse teste apresentou um resultado positivo. Quais são as chances de realmente se ter câncer, dado que o teste deu positivo?

Solução: Se o teste é positivo, logo direcionamos a nossa aplicação a linha de cima da tabela 10.

Sejam os eventos A: “ter câncer”, A^c: “não ter câncer” e B: “teste deu positivo”, então:

[24] Fonte: https://www.voitto.com.br/blog/artigo/teorema-de-bayes.

P(A | B) = probabilidade de ter câncer dado que o teste deu positivo.

P(B | A) = probabilidade de testar positivo dado que tem câncer. Essa é a chance de um positivo verdadeiro, que é 80%.

P(A) = probabilidade de ter câncer = 1%.

P(A^C) = probabilidade de não ter câncer = 99%

P(B | A^C) = probabilidade de testar positivo dado que não tem câncer, que é 9,6% nesse caso.

Como os testes não são totalmente confiáveis, temos que um teste pode dar positivo tanto se a mulher tiver câncer como se não tiver. Essas possibilidades são exatamente P(B | A) e P(B | A^C). Assim, temos que P(B) é igual a:

$$P(B) = P(B\,|A)\,.P(A) + P(B\,|A^C)\,.P(A^C)$$

Logo, para determinar a probabilidade de se ter câncer, dado que o teste deu positivo temos:

$$P(A\,|B) = \frac{P(A)\,.\,P(B\,|A)}{P(B\,|A)\,.\,P(A) + P(B\,|\,A^C)\,.\,P(A^C)}.$$

Substituindo os valores, temos:

$$P(A\,|B) = \frac{0{,}01\,.\,0{,}8}{0{,}01\,.\,0{,}8 + 0{,}99\,.\,0{,}096} \cong 0{,}078.$$

Ou seja, a probabilidade de se ter câncer de mama dado que a mamografia deu positivo é de apenas 7,8%.

Intuitivamente temos a impressão de que o valor seria muito maior, porém a grande questão é a influência que a porcentagem de pessoas que não possuem câncer exerce na probabilidade. A diferença é que a cada 100 pessoas apenas 1 tem a doença.

3.6 - Eventos Independentes

Independência é um conceito fundamental em Probabilidade e Estatística, já que muitos dos modelos utilizados na Estatística supõem observações de variáveis aleatórias independentes. Diremos que dois eventos A e B são independentes, se a informação a respeito de que um deles ocorreu não altera a probabilidade de o outro ocorrer, ou seja, a informação dada não contribui para a reavaliação do outro evento dado. Assim, temos a seguinte definição:

Definição (**Eventos Independentes**) Dois eventos A e B são chamados de eventos independentes, se

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ e } P(B \mid A) = P(B).$$

Vejamos um exemplo para ilustrar esse fato.

Exemplo 1: Considere o lançamento de dois dados honestos de cores distintas. Seja A o evento "sair 2 no 1° dado" e B o evento "sair 5 no 2° dado". Observe que n(Ω) = 36.

A = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)}, então n(A) = 6, e P(A) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

B = {(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5)}, então n(B) = 6, e P(B) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

A∩B = {(2,5)} ⇒ P(A∩B) = $\frac{1}{36}$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

Assim, P(B) = P(B | A) = $\frac{1}{6}$, ou seja, a probabilidade de "sair 5 no 2° dado" não foi afetada pelo fato de "sair 2 no 1° dado", ou, ainda, a probabilidade de ocorrer B não dependeu da ocorrência de A.

Um erro muito comum entre os alunos é associar independência com disjunção de eventos, interpretando erroneamente que se A e B são independentes, então A ∩ B = ∅. É justamente o contrário que se dá, ou seja, se A ∩ B = ∅, então A e B **não** são independentes (a menos que um deles tenha probabilidade zero). Isso, fica claro se pensarmos que, se P (A) = $p > 0$ e P (B) = $q > 0$, com A ∩ B = ∅, então

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{q} = 0 \neq p = P(A).$$

Assim P(A | B) $\neq P(A)$, o que prova que A e B **não** são independentes.

Outra maneira de justificar esse fato é pensar que se A e B são incompatíveis, então se B ocorre a probabilidade de A ter ocorrido é inevitavelmente nula, o que reduz a probabilidade inicial de A ocorrer a zero. Assim, para que dois eventos de probabilidade positiva sejam independentes, é necessário que eles tenham algo em comum, do contrário serão dependentes.

Teorema 12. (**Probabilidade da Intersecção de Eventos Independentes**.) Se A e B são dois eventos independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B).$$

Demonstração: Sejam A e B dois eventos independentes. Então, decorre imediatamente da definição de probabilidade condicional que

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B \mid A).$$

Consequentemente, decorre da definição de eventos independentes que

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B \mid A) = P(A) \,.\, P(B).$$

Vejamos algumas propriedades importantes:

P1) Eventos de probabilidade zero ou um, são independentes de qualquer outro.

Se $P(A) = 0 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$ e A e B são independentes, pois $P(A \cap B) = 0 = 0 \,.\, P(B) = P(A) \,.\, P(B)$.

Se $P(B) = 1$, então $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^C)$ e, como $P(A \cap B^C) \leq P(B^C) = 0$, temos $P(A \cap B^C) = 0$ e $P(A \cap B) = P(A) - 0 = P(A) = P(A) \,.\, 1 = P(A) \,.\, P(B)$.

Logo A e B são independentes.

P2) Se $A \cap B = \emptyset$, então A e B não são independentes, a menos que um destes tenha probabilidade zero.

Exemplo 2: Considere o lançamento de um dado honesto e os seguintes eventos e vamos supor 3 eventos nomeados por A, B e C, de forma que:

A:“o resultado é primo” = {2, 3, 5}, tal qual $P(A) = \frac{1}{2}$

B:“o resultado é menor do que 3” = {1, 2}, tal qual $P(B) = \frac{1}{3}$

C:“o resultado é um múltiplo de 2” = {2, 4, 6}, tal qual $P(C) = \frac{1}{2}$

Os eventos A e B e também os eventos A e C, ocorrerão simultaneamente quando o resultado do lançamento for 2. Segue-se que $P(A \cap B) = P(A \cap C) = \frac{1}{6}$.

Ao comparar estes valores com os produtos das probabilidades individuais temos que os eventos A e B serão independentes se, $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$. Como $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ e $P(A) \,.\, P(B) = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, então comprovamos o fato de A e B serem independentes.

Para que A e C sejam independentes, devemos ter $P(A \cap C) = P(A) \,.\, P(C)$, porém a probabilidade de $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$, enquanto $P(A).P(C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Logo como $P(A \cap C) \neq P(A) \,.\, P(C)$, os eventos A e C não são independentes.

Exemplo 3: Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros A e B. Os resultados dos jogos são independentes e a probabilidades de ganhar de A e de B são $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ respectivamente. O jogador vencerá o torneio se ganhar dois jogos consecutivos, de uma série de 3. Que série de jogos é mais favorável para o jogador: ABA ou BAB?

Solução: A probabilidade de o jogador vencer se escolher a primeira série ABA é:

- Ganha de A e ganha de B;
- Perde de A, ganha de B e ganha de A.

Assim:

$$\frac{1}{3} \,.\, \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \,.\, \frac{2}{3} \,.\, \frac{1}{3} = \frac{10}{27}.$$

Agora, a probabilidade de o jogador vencer se escolher a segunda série BAB é:

- Ganha de B e ganha de A;
- Perde de B, ganha de A e ganha de B.

Assim:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$$

Ou seja, a primeira série é mais favorável. O curioso é que seguindo um pensamento intuitivo acreditamos que esta deveria ser uma série mais complicada pelo fato de existir dois confrontos com o adversário de menor chance de vitória (adversário A). Entretanto, o que ocorre é que o jogo com A na segunda série é decisivo enquanto que na primeira série, o jogador tem duas chances para derrotar A.

Exemplo 4: (Enem PPL 2015) No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30% e a de chover no domingo é de 25%.

A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de:

a) 5,0%

b) 7,5%

c) 22,5%

d) 30,0%

e) 75,0%

Solução: Para que a aula ocorra no domingo é necessário que chova no sábado e não chova no domingo. Assim, pode-se escrever:

$P(chover_{sáb}) = 0{,}30.$

$P(chover_{dom}) = 0{,}25.$

$P(não\ chover_{dom}) = 1 - P(chuva_{dom}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$

$P(chover_{sáb})\ x\ P(não\ chover_{dom}) = 0{,}30\ x\ 0{,}75 = 0{,}225 = 22{,}5\%.$

3.7 - Probabilidade Binomial

Consideremos agora experimentos onde existem dois possíveis resultados: cara ou coroa, sucesso ou fracasso, item defeituoso ou item não defeituoso, e muitas outras dualidades. Por exemplo:

1) Lançamos uma moeda honesta, cara e coroa, e definimos a face cara como sucesso e a face coroa como fracasso.

2) Observamos um semáforo de duas cores, vermelho e verde, e definimos verde como sucesso e vermelho como fracasso.

3) Em uma linha de produção de peças, sorteamos uma delas e definimos sucesso como a peça selecionada não ser defeituosa e fracasso como a peça selecionada ser defeituosa.

Suponha que esses experimentos possam ser repetidos uma determinada quantidade finita de vezes, de forma independente, todos com a mesma probabilidade de sucesso e de fracasso em cada tentatica, e desejamos obter um número específico de sucessos. Qual é a probabilidade de isso ocorrer? Em outras palavras, qual é a probabilidade de obtermos k sucessos em n tentativas, com k, n $\in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$?

Teorema 13. (Teorema Binomial) A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em uma sequência de n experimentos iguais e independentes entre si, com k, n $\in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, na qual a probabilidade de sucesso em cada experimento é p, é dada por:

$$\mathrm{P} = \binom{n}{k}.\, \mathrm{p}^{\mathrm{k}} \,.\, (1-p)^{n-k}.$$

Demonstração: A probabilidade de nessas n provas obtermos k sucessos e, em consequência, n - k fracassos em uma ordem pré-determinada, por exemplo, os sucessos na k primeiras provas e os fracassos nas demais:

$$\underbrace{SSS\ldots SSS}_{kvezes}\,\underbrace{FFF\ldots FFF}_{n-kvezes}$$

é

$$\underbrace{p.p.p.p\ldots p.p.p}_{kfatores}\,.\,\underbrace{(1-p)\ldots(1-p)}_{n-kfatores} = p^k\,.\,(1-p)^{n-k},$$

pois as provas são independentes.

É claro que, em outra ordem, a probabilidade seria a mesma pois apenas a ordem dos fatores se alteraria. A probabilidade de obtermos k sucessos e n - k fracassos em qualquer ordem é $p^k\,.\,(1-p)^{n-k}$ multiplicado pelo número de ordenações possíveis que é $\binom{n}{k}$ (para escolher uma ordem basta escolher em quais das n provas ocorrerão os k sucessos).

Em particular, se o sucesso e o fracasso são equiprováveis, temos:

$$\mathrm{P} = \binom{n}{k}\,.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \Longrightarrow \mathrm{P} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Exemplo 1: (ENEM – 2009) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2 \,.\, (0{,}2\%)^4$.

b) $4 \,.\, (0{,}2\%)^2$.

c) $6 \,.\, (0{,}2\%)^2 \; x \; (99{,}8\%)^2$.

d) $4 \,.\, (0{,}2\%)$.

e) $6 \,.\, (0{,}2\%) \; x \; (99{,}8\%)$.

Solução: Queremos saber a probabilidade de obter dois aparelhos defeituosos e dois aparelhos em bom estado, ou seja, dois sucessos e dois fracassos. Então,

P(aparelho com defeito) = 0,2%.

Como a questão é dividida em sucessos e fracassos, temos que o evento "aparelho sem defeito" é complementar do evento "aparelho com defeito", assim:

P(aparelho sem defeito) = 100% – 0,2% = 99,8%

Logo,

$$P = \binom{4}{2} \,.\, (0{,}002)^2 \,.\, (0{,}998)^2 = 6 \,.\, (0{,}002)^2 \,.\, (0{,}998)^2.$$

Exemplo 2: (ENEM - 2017) Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

(A) $\frac{10 \, x \, 2}{3^{10}}$

(B) $\frac{10 \, x \, 2^9}{3^{10}}$

(C) $\frac{2^{10}}{3^{100}}$

(D) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$

(E) $\frac{2}{3^{10}}$

Solução: Queremos saber a probabilidade de obter um sinal da cor verde e nove da cor vermelha, ou seja, um sucesso e nove fracassos. De certa forma, não faz diferença a escolha de quem representa o sucesso e o fracasso já que o experimento só possui dois resultados. Então, calculando:

$$P = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^9} = \frac{10 \cdot 2}{3^{10}}.$$

3.8 - Probabilidade Geométrica

Há um caso peculiar em Probabilidade em que o espaço amostral seja infinito e não enumerável e ainda assim podemos fazer um apelo ao conceito Clássico de Probabilidade: a Probabilidade Geométrica, em que as probabilidades são obtidas por razões de área, volumes, etc.

Esta seção visa abordar a probabilidade de uma maneira não muito explorada nos problemas clássicos encontrados em livros didáticos. Entretanto, a forma de aplicar essas probabilidades se assemelha à definição Laplaciana, ou seja, através de uma razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, exceto que aqui os casos possíveis estão num conjunto infinito e não enumerável de resultados.

> *"Quando selecionamos um ponto ao acaso em uma parte do plano, é razoável supor que a probabilidade do ponto selecionado pertencer a uma certa região seja proporcional à área dessa região."*
>
> (MORGADO & CARVALHO, 2013, p.166).

O interessante dessas aplicações geométricas da probabilidade é a capacidade de quantificar os termos dessa razão em função de elementos da geometria, sejam eles da geometria plana, espacial ou analítica. Vejamos alguns exemplos que abordam essas aplicações de probabilidade na geometria.

Exemplo 1: (ENEM - 2001) Um município de $628\ km^2$ é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10km do município, conforme mostra a figura 24:

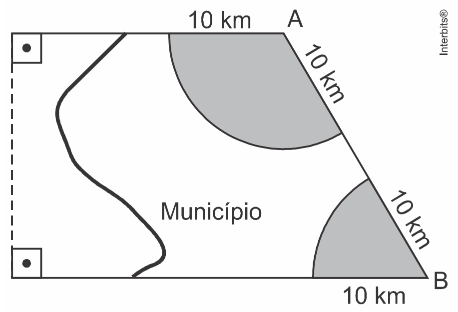


Figura 24: Representação de um município.[25]

Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.

Essa probabilidade é de, aproximadamente,

a) 20%.

b) 25%.

c) 30%.

d) 35%.

e) 40%.

Solução:

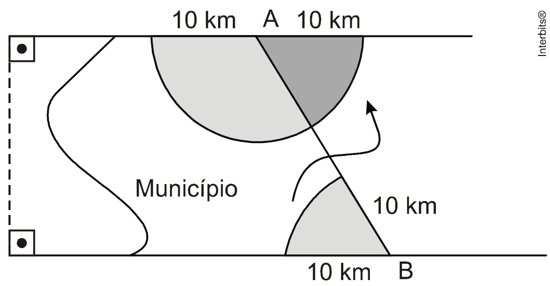


Figura 25: Representação de um município.[26]

O espaço amostral é formado por todos os pontos da superfície em que o morador pode circular pelo município. No entanto, como os pontos se distribuem uniformemente na superfície, levaremos em consideração a área total. Assim,

Ω: 'pontos da superfície do município" e $S(\Omega) = 628$ km² é a área do município.

[25] Fonte: Enem – 2001.

[26] Fonte: Enem – 2001.

Considerando os dois setores juntos têm-se um semicírculo de raio igual a $10\,\text{km}$. Esse semicírculo representa a área em que um morador se encontra na área de alcance dessa emissora e, portanto, representa os casos possíveis. Assim,

Evento A: "área de alcance da emissora" e S(A) = $\frac{\pi\,.10^2}{2}$ km².

Portanto, a probabilidade geométrica será dada por

$$P = \frac{\frac{\pi\,.\,10^2}{2}}{628} = 0{,}25 = 25\%.$$

Exemplo 2: (ENA – PROFMAT 2018) Escolhendo ao acaso três vértices de um hexágono regular, qual a probabilidade de se formar com eles um triângulo equilátero?

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{3}{10}$

(C) $\frac{1}{10}$

(D) $\frac{1}{5}$

(E) $\frac{1}{20}$

Solução:

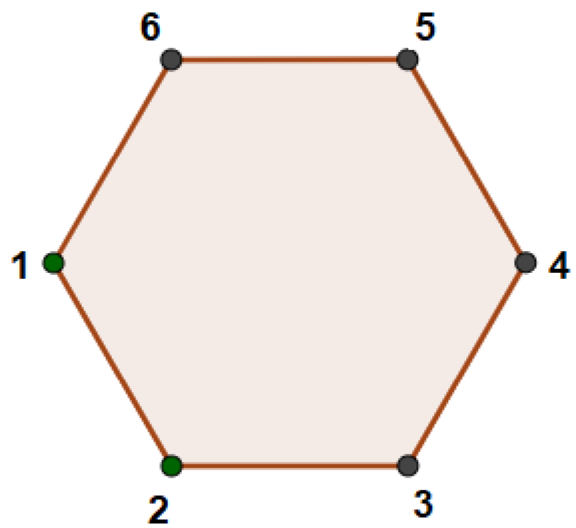


Figura 26: Hexágono regular.

Indicamos por 1, 2, 3, 4, 5 e 6 os vértices consecutivos de um hexágono regular. O número de elementos do espaço amostral é dado por $\frac{6\,.\,5\,.\,4}{3!}$ = 20.

Para se obter um triângulo equilátero temos 2 possibilidades: 1, 3, 5 ou 2, 4, 6.

Portanto a probabilidade e igual a $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Cabe ressaltar que esse exemplo, apesar de relacionado a geometria plana, não configura um caso de probabilidade geométrica visto que a contagem de vértices é determinada por um espaço amostral finito.

Exemplo 3: (FGV - 2012) Considere, no plano cartesiano, o pentágono ABCDE, de vértices A(0, 2), B(4,0), C(2π + 1, 0), D(2π + 1, 4) e E(0, 4).

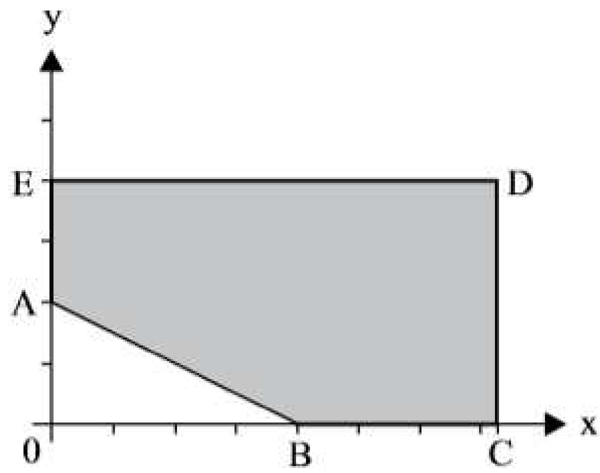


Figura 27: Polígono formado no plano cartesiano.[27]

Escolhendo aleatoriamente um ponto P no interior desse pentágono, a probabilidade de que o ângulo $A\widehat{P}B$ seja obtuso é igual a

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{5}{16}$

(D) $\frac{3}{8}$

(E) $\frac{4}{5}$

Solução: Para que o ângulo $A\widehat{P}B$ seja obtuso, é necessário que P seja um ponto no interior do semicírculo de diâmetro AB, contido no pentágono ABCDE, conforme a figura 28:

[27] Fonte: Vestibular FGV – 2012.

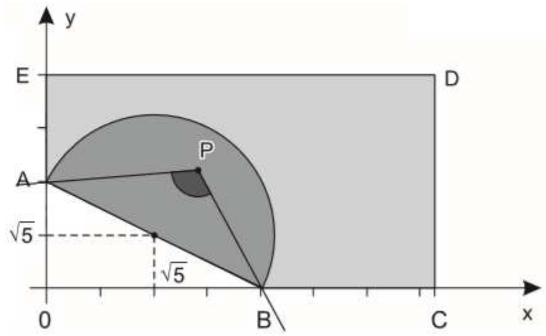


Figura 28: Triângulo obtusângulo no pentágono ABCDE.[28]

Desse modo:

A área do semicírculo de diâmetro AB é dado por

$$\frac{1}{2}\,.\,\pi\,.\left(\frac{d_{A,B}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,.\,\pi\,.\left(\frac{\sqrt{2^2+4^2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,.\,\pi\,.\,\frac{20}{4} = \frac{5\pi}{2}\ u.a.$$

E a área do pentágono ABCDE é igual a

$$2\,.\,(2\pi+1) + \frac{2\pi+1+2\pi-3}{2}\,.\,2 = 4\pi+2+4\pi-2 = 8\pi\ u.a.$$

Logo, a probabilidade é

$$\mathrm{P} = \frac{\frac{5\pi}{2}}{8\pi} = \frac{5}{16}.$$

Exemplo 4: (Espcex - 2014 adaptada) Considere as equações de nove retas distintas do plano cartesiano:

$$r_1: y = 3x-2 \qquad r_2: 3x+y+1 = 0 \qquad r_3: -x-3y+1 = 0$$

$$r_4: y = -\frac{x}{3}+\frac{1}{3} \qquad r_5: 3x + 9y+2 = 0 \qquad r_6: y = -3x+7$$

$$r_7: 6x+2y+4 = 0 \qquad r_8: -3x-y-9 = 0 \qquad r_9: \frac{x}{3}+\frac{y}{2} = 0$$

Sorteando aleatoriamente e sem reposição duas retas dessa lista, a probabilidade de obter duas retas cuja interseção é um conjunto não vazio é:

a) $\frac{3}{20}$.

b) $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{2}$.

[28] Fonte: Vestibular FGV – 2012.

d) $\frac{3}{4}$.

e) $\frac{2}{3}$.

Solução: Um par de retas em que a interseção é um conjunto vazio possui, obrigatoriamente, os mesmos coeficientes angulares e diferentes coeficientes lineares. Como a equação da reta na forma reduzida é $y = mx + n$, com *m* sendo seu coeficiente angular e *n* sendo o coeficiente linear, observe as transformações para a forma reduzida de cada uma das retas acima,

r_1: m = 3 e n_1 = -2	r_2: m_2 = -3 e n_2 = -1	r_3: $m_3 = -\frac{1}{3}$ e $n_3 = \frac{1}{3}$
r_4: $m_4 = -\frac{1}{3}$ e $n_4 = \frac{1}{3}$	r_5: $m_5 = -\frac{1}{3}$ e $n_5 = -\frac{2}{9}$	r_6: m_6 = -3 e n_6 = 7
r_7: m_7 = -3 e n_7 = -2	r_8: m_8 = -3 e n_8 = -9	r_9: $m_9 = -\frac{2}{3}$ e n_9 = 2

Pares de retas em que a interseção é um conjunto vazio: r_2 e r_6, r_2 e r_7, r_2 e r_8, r_3 e r_5, r_4 e r_5, r_6 e r_7, r_6 e r_8, r_7 e r_8.

Dos $C_{9,2} = 36$ pares de retas que podemos formar, em 8 deles temos pares de retas sem alguma interseção. Logo, a probabilidade de formarmos pares de retas com alguma interseção é $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

É importante deixar claro que esse trabalho depende de uma base sólida no campo da Teoria das Probabilidades e que esse capítulo aborda o que grande parte dos livros didáticos expõe para os alunos: a noção de probabilidade em espaços amostrais equiprováveis. No próximo capítulo discutiremos exemplos de aplicações da probabilidade em espaços amostrais não-equiprováveis em razão desse modelo se apresentar de forma mais recorrente no cotidiano.

4. Explorando a Não-Equiprobabilidade de Eventos no Ensino Básico

Apesar de não ser comum em livros didáticos ou através de exemplos dos professores muitas vezes um espaço amostral pode ser definido em termos de uma relação de eventos não equiprováveis. Devemos refletir que uma enorme parcela dos eventos probabilísticos existentes no cotidiano não é equiprovável e, desta maneira, necessitamos nos responsabilizar pelo desafio de integrar os conceitos de não-equiprobabilidade aos alunos. O objetivo deste capítulo é sugerir exemplos que se utilizam de conceitos da não-equiprobabilidade para auxiliar na necessidade de reflexão sobre a inclusão desse tópico na realidade da sala de aula.

4.1 – Espaço Amostral Não-Equiprovável

O espaço amostral de um experimento aleatório, visto anteriormente, é um conjunto Ω contendo todos os possíveis resultados do experimento, mas não há necessidade de que este seja minimal, essa é uma das convicções equivocadas dos alunos. De acordo com a perspectiva da Teoria da Medida, pode-se construir diferentes espaços amostrais para um mesmo experimento, desde que todos contenham os resultados possíveis. Assim, se o experimento consiste em lançar um dado e observar a sua face superior, podemos ter $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\Omega_2 = \mathbb{N}$ ou até mesmo, $\Omega_3 = (0, 1)$ como espaços amostrais legítimos para esse experimento. Em todos eles basta atribuir a probabilidade de $\frac{1}{6}$ para os pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e probabilidade nula para os demais pontos se houver.

Um espaço amostral para o qual pelo menos um elemento tem mais ou menos chances de ocorrer do que outros é dito não-equiprovável. Um possível exemplo é considerar o experimento "jogue dois dados regulares e adicione os resultados". O espaço amostral desse experimento é descrito pelo conjunto

$$\Omega = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Observe que os elementos deste conjunto não são equiprováveis em virtude de, por exemplo, existirem três diferentes combinações para se obter uma soma 4, que são os pares (1, 3), (3, 1) e (2, 2). No entanto, apenas o lançamento (1, 1) nos dá a soma 2.

Uma outra maneira de pensar a respeito da construção de espaços amostrais não-equiprováveis é observarmos o lançamento de uma mesma moeda, de forma consecutiva, 2 vezes. Neste caso, vamos determinar o espaço amostral de dois modos diferentes, dentre outros possíveis. O primeiro é defini-lo como Ω_1 = {0 cara, 1 cara, 2 caras} e o segundo é Ω_2 = {(cara,

cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}. É de nosso conhecimento que a probabilidade para o resultado da face superior nos dois lançamentos ser cara é equivalente $\frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. O mesmo pode-se dizer para qualquer um dos eventos do espaço amostral Ω_2, tendo em vista que o resultado da face superior ser cara ou coroa tem probabilidade igual a $\frac{1}{2}$ de ocorrer. Desta forma podemos afirmar que os eventos elementares do espaço amostral Ω_2 são equiprováveis. Entretanto, não podemos dizer o mesmo a respeito do espaço amostral Ω_1, pois enquanto a probabilidade do evento {0 cara} é igual a $\frac{1}{4}$, por só existir o caso único (coroa, coroa), temos que a probabilidade do evento {1 cara} é igual a $\frac{1}{2}$., pois podemos ter os casos (cara, coroa) ou (coroa, cara). Assim, o espaço amostral Ω_1 não é, portanto, definido em termos de eventos equiprováveis.

Para modelos de espaços amostrais mais complexos, podemos ter, caso seja mais apropriado, uma maior quantidade de elementos. Por exemplo, se o experimento for medir a altura de um ser humano, poderíamos definir o intervalo $\Omega = (0, \infty)$ como espaço amostral, mesmo que a maioria de seus elementos seja praticamente impossível.

Logo, é importante estudar o "número" de elementos em um espaço amostral. Daí, surgem três possibilidades:

- Finito;
- Infinito enumerável;
- Infinito não-enumerável.

Assim, para definir um espaço amostral finito, precisaremos denotar um subconjunto de N, chamado de F_n, composto de todos os números naturais menores do que ou iguais a um elemento fixo de $\mathbb{N}$, ou seja, $F_n = \{l, 2, 3, ... n\}$. Daí definiremos que um conjunto A é finito se é vazio ou se existe uma bijeção com domínio A e contradomínio em F_n. Se não existe tal função, o conjunto é infinito.

Nesse caso podemos ter infinitos enumeráveis ou não-enumeráveis. Se existe uma bijeção de A sobre $\mathbb{N}$, então A se diz enumerável, e podemos afirmar que A é contável. Do contrário classificamos esse conjunto de não-enumerável.

Além da cardinalidade do espaço amostral, existe a preocupação com o excesso de utilização da definição clássica de probabilidade. Ela é bastante empregada pelos professores do Ensino Básico em sala de aula, o que talvez, ocorra por conta da sua aplicação em demasia nos livros didáticos. É comum que os alunos adotem-na para todo problema. Uma explicação para isso é que os casos estudados nessa etapa da escolaridade apresentam, sempre, um espaço amostral Ω finito. Entretanto, nem todos os problemas de probabilidade podem ser resolvidos usando a definição clássica de probabilidade.

Nas próximas seções iremos desenvolver esses casos juntamente com a não-equiprobabilidade.

4.1 - Não-Equiprobabilidade em Espaços Amostrais Finitos

Nos casos em que os eventos não são equiprováveis exploramos o estudo das frequências relativas. E assim, seja um espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ finito, temos:

i) $\{a_i\}$ é um evento elementar;

ii) $\{a_i\} \cap \{a_j\} = \emptyset, para\ todo\ i \neq j.$

A cada evento elementar $\{a_i\}$ associaremos um número p_i, denominado probabilidade de $\{a_i\}$, que satisfaça às seguintes condições:

i) $p_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k;$

ii) $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1.$

Então, a probabilidade de um evento A é:

$p(A) = \sum_{a_i \in A} p(a_i).$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: (ENEM – 2012) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma,5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

Solução:

Esse primeiro problema tem como objetivo descontruir algumas ideias. Apesar de em sua gênese não constar como um exercício de probabilidade e muito menos de não-equiprobabilidade, ainda o consideramos importante pela construção de resultados. De fato, a ideia desse primeiro exemplo é mostrar diferentes abordagens realizadas por diversos alunos, estudantes da graduação e professores.

Primeiro precisamos recordar que não existe uma única maneira de se pensar nesse problema. Sabemos que a construção de resultados ou de espaços amostrais não é única. Já deixamos isso claro nessa obra. Em seguida, vamos relembrar que necessitamos escolher a representação para o conjuntos de valores que simboliza os resultados dos lançamentos. É muito comum, ao considerar o lançamento de dois dados honestos, contar com uma tabela. Vamos supor que D_1 e D_2 são os nossos dados com faces numeradas de 1 a 6 e montar a tabela 11 que apresenta as possíveis combinações de resultados.

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Tabela 11: Distribuição dos resultados ao lançar dois dados.

Ao montar a tabela 11 descrevemos os 36 pares possíveis desses lançamentos.

Entretanto, também é possível representar o resultado através de um conjunto de valores que indica a soma dos resultados obtidos pelas faces dos dados. Dessa forma, teríamos o conjunto

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Perceba que no primeiro caso, cada elemento da tabela 11 designa um par ordenado que consta com os resultados de cada face dos dados e que podemos descobrir a soma dos dados ao realizar tal operação com as coordenadas do par. Para enumerar a frequência absoluta da soma buscamos um a um os resultados da tabela 11. Observe na tabela 12 que cada célula colorida indica a soma adquirida entre o elemento da linha (D_1) e o elemento da coluna (D_2). A disposição de cores mostra aqueles que aparecem em mesma quantidade.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabela 12: Soma de dois dados.

A tabela 12 pode ser representada através de um gráfico em barras

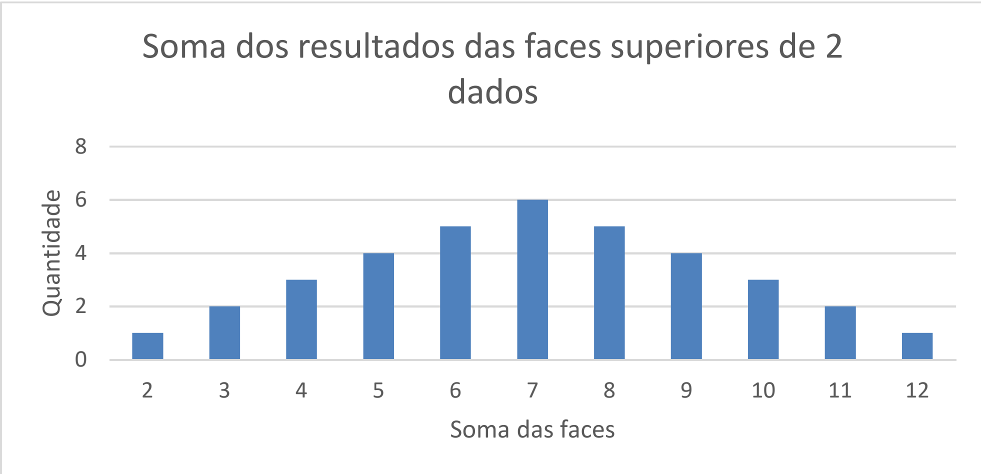


Figura 29: Gráfico em barras da frequência absoluta da soma de dois dados.

Entretanto, ao tentar fazer o mesmo tipo de atuação na segunda representação enfrentamos a dificuldade de não conseguir identificar a quantidade de vezes que cada soma ocorre. Por conta disso, a ideia da tabela é frequentemente encontrada nas resoluções de problemas que envolvem dados. No próximo exemplo iremos mostrar um caso de dado em que a tabela não será a melhor opção.

Voltando para o exemplo e utilizando a tabela 11, tem-se que dadas as condições iniciais.

Resultados que darão a vitória a José: {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (5, 2) (6, 1)}.

Resultados que darão a vitória a Paulo: {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}.

Resultados que darão a vitória a Antônio: {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) (6, 2)}.

José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

Exemplo 2: No lançamento de um dado viciado a probabilidade de sair qualquer número é diretamente proporcional a esse número. Calcule a probabilidade de sair:

a) o número 3;

b) o número 2 ou 4;

c) um número par.

Solução:

O espaço amostral para o experimento deve listar os possíveis resultados do lançamento de um dado. Assim, temos:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

De acordo com as condições dadas no problema, temos:

$p(1) = k, p(2) = 2k, p(3) = 3k, p(4) = 4k, p(5) = 5k$ e $p(6) = 6k.$

Observe que os seis elementos do espaço amostral não são equiprováveis, tendo em vista que, por exemplo, $p(2)$ tem o dobro de chances de ocorrer do que $p(1)$.

Sabemos também que a soma de todos os eventos elementares é igual a 1, e portanto:

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$$

$$k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1.$$

$$21k = 1$$

$$k = \frac{1}{21}$$

Logo, $p(1) = \frac{1}{21}, p(2) = \frac{2}{21}, p(3) = \frac{3}{21}, p(4) = \frac{4}{21}, p(5) = \frac{5}{21}$ e $p(6) = \frac{6}{21}$

Observe na figura 30 o gráfico em barras que contém a distribuição da probabilidade em função do resultado da face obtida.

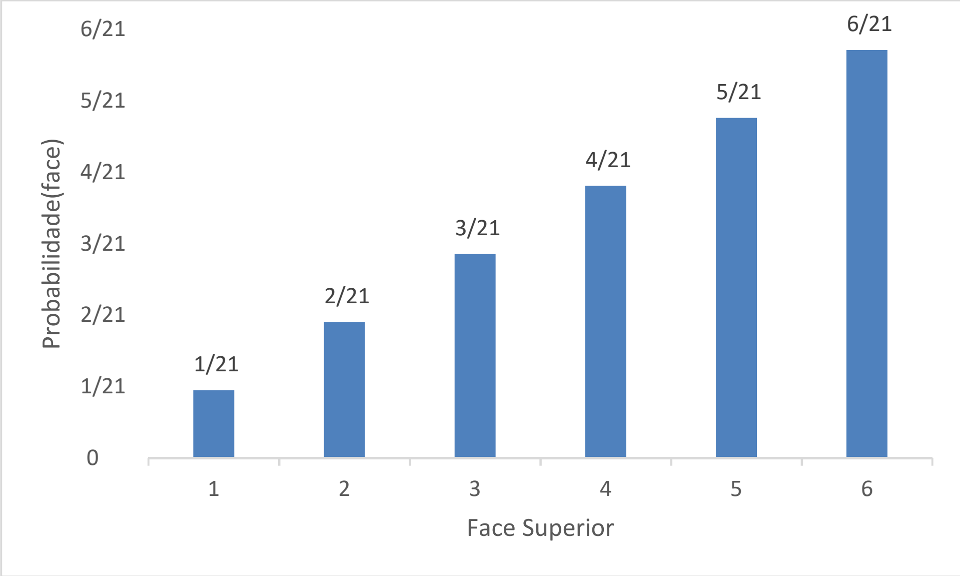


Figura 30: Frequência relativa do dado viciado.

Com os resultados obtidos e a representação no gráfico podemos perceber de modo visual e mais direto que o espaço amostral de fato é não-equiprovável

a) Desejamos obter a probabilidade de o resultado da face ser igual a 3. Logo, $p(3) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

b) Devemos obter a probabilidade do evento "sair 2 ou sair 4", o que se resume em calcular $P(2 \cup 4)$.

$$P(2 \cup 4) = P(2) + P(4) - P(2 \cap 4)$$

Porém, $P(2 \cap 4) = 0$, Assim,

$$\begin{aligned} P(\, 2 \cup 4) &= P(2) + P(4) \\ &= p(2) + p(4) \\ &= \frac{2}{21} + \frac{4}{21} \\ &= \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

c) Para conseguir a probabilidade do evento par precisamos obter os resultados 2, 4, ou 6 no lançamento do dado, e portanto:

$$\begin{aligned} P(par) &= \; p(2) + p(4) + p(6) \\ &= \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} \\ &= \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Exemplo 3: (VUNESP – 2004) Um jogo consiste num dispositivo eletrônico na forma de um círculo dividido em 10 setores iguais numerados, como mostra a figura 31.

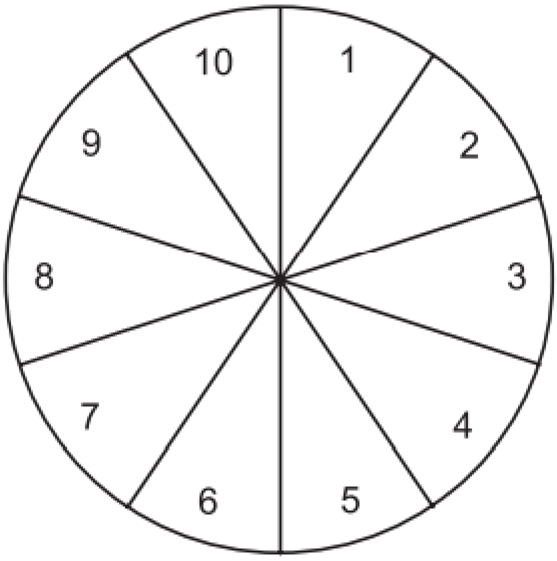


Figura 31: Círculo dividido em 10 setores iguais.[29]

Em cada jogada, um único setor do círculo se ilumina. Todos os setores com números pares têm a mesma probabilidade de ocorrer, o mesmo acontecendo com os setores com números ímpares. Além disso, a probabilidade de ocorrer o número 3 é o dobro da probabilidade de ocorrer o número 4. Denotando por $p(i)$ a probabilidade de, numa jogada, ocorrer o número i, determine:

a) $p(3)$ e $p(4)$.

b) a probabilidade de, numa jogada, ocorrer um número primo.

Solução:

De acordo com as condições dadas pelo problema, o espaço amostral **Ω** do experimento deve ser formado pelos 10 setores numerados e iguais que compõe o círculo. Dessa forma temos

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

O problema também informa que os setores com números pares possuem chance igual de ocorrer entre si, da mesma maneira que os setores de números ímpares. Assim,

$$\begin{cases} p(1) = p(3) = p(5) = p(7) = p(9) \\ p(2) = p(4) = p(6) = p(8) = p(10) \end{cases}.$$

Além disso, temos $p(3) = 2p(4)$.

Essa informação indica que o espaço amostral formado é não-equiprovável, pois a chance de dois eventos elementares ocorrer não é igual.

[29] Fonte: VUNESP – 2004.

Portanto, seja $p(2) = p(4) = p(6) = p(8) = p(10) = k$, então como das condições dadas $p(3) = 2p(4)$, temos $p(1) = p(3) = p(5) = p(7) = p(9) = 2k$. Consequentemente, como a soma das probabilidades p(i), com i variando de 1 a 10, é igual a 1, tomamos:

$$\begin{cases} 5p(3) + 5p(4) = 1 \\ p(3) = 2p(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(2p(4)) + 5p(4) = 1 \\ 10p(4) + 5p(4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15p(4) = 1 \\ p(4) = \frac{1}{15} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \mathrm{p}(4) = \frac{1}{15} \\ \mathrm{p}(3) = \frac{2}{15} \end{cases}$$

b) Os números primos que podem ser obtidos no jogo são 2, 3, 5 e 7. Logo a probabilidade pedida é:

$$\begin{aligned} p(primo) &= p(2) + p(3) + p(5) + p(7) \\ &= p(4) + 3p(3) \\ &= \frac{1}{15} + 3 . \frac{2}{15} \\ &= \frac{1}{15} + \frac{6}{15} \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

Exemplo 4: De uma dada população, 35% têm olhos azuis, 42% são ruivos e 20% são ruivos de olhos azuis. Escolhido ao acaso uma pessoa dessa população, qual a probabilidade de:

a) ser ruivo ou ter olhos azuis?

b) não ser ruivo e nem ter olhos azuis?

c) ser ruivo mas não ter olhos azuis?

Solução: O espaço amostral para o experimento deveria conter os possíveis registros duplos de cor dos olhos e cor dos cabelos. Assim, definindo a para olhos azuis, $\bar{a}$ para olhos não azuis, r para ruivo e $\bar{r}$ para não ruivo, temos os seguintes resultados do experimento:

Ω = {(a, r), (a, $\bar{r}$) ,($\bar{a}$, r), ($\bar{a}, \bar{r}$)}

Sejam os eventos A "a pessoa escolhida tem olhos azuis" e R "a pessoa escolhida é ruiva". Assim temos

A = {(a, r), (a, $\bar{r}$)}, R = {(a, r), ($\bar{a}$, r)} e A ∩ R = {(a, r)}

Temos, pelos dados fornecidos,

P (A) = 0,35, P (R) = 0,42 e P (A ∩ R) = 0,2.

Observe que os quatro elementos do espaço amostral não são equiprováveis, já que somente o par (a, r) tem 20% de chance e não 25%, caso os elementos fossem equiprováveis.

a) Desejamos a probabilidade do evento $A \cup R$, ser ruivo ou ter olhos azuis.

$P(A \cup R) = P(A) + P(R) - P(A \cap R)$

$= 0{,}35 + 0{,}42 - 0{,}2$

$= 0{,}57$

$P(A \cup R) = 57\%$.

b) Desejamos a probabilidade do evento $A^c \cap R^c$, não ser ruivo nem ter olhos azuis.

$P(A^c \cap R^c) = 1 - P[(A^c \cap R^c)^c]$

$= 1 - P(A \cup R)$

$= 1 - 0{,}57 = 0{,}43$

$P(A^c \cap R^c) = 43\%$.

c) Desejamos a probabilidade do evento $A^c \cap R$, ser ruivo mas não ter olhos azuis. Mas $A^c \cap R = R - (A \cap R)$, com $A \cap R \subset R$.

Assim temos

$P(A^c \cap R) = P[R - (A \cap R)]$

$= P(R) - P(A \cap R)$

$= 0{,}42 - 0{,}2$

$P(A^c \cap R) = 22\%$.

4.2 - Não-Equiprobabilidade em Espaços Amostrais Infinitos Enumeráveis

Em nossa busca por atividades identificamos que inúmeros problemas sobre probabilidade, no ensino básico, apresentam o espaço amostral caracterizado como sendo finito e estão assim, sustentados pelas propriedades e postulados apresentados no capítulo anterior. Entretanto, a mesma base desenvolvida em espaços amostrais finitos pode ser empregada em situações em que o espaço amostral é infinito, seja ele enumerável ou não enumerável. Observe, por exemplo, o lançamento de uma moeda sucessivas vezes até que ocorra uma face cara. Ao estabelecermos o espaço amostral temos

$\Omega = \{c, kc, kkc, kkkc, kkkkc, \ldots\}$, em que c = cara e k = coroa.

Nesse caso, além do espaço amostral ser classificado como infinito enumerável temos também um caso de ocorrência da não-equiprobabilidade. Note que a probabilidade de cada evento elementar do espaço amostral Ω é distinta entre si tendo em vista que, a probabilidade do evento {c} é igual a $\frac{1}{2}$, enquanto a probabilidade do evento {kc} é igual a $\frac{1}{4}$.

Veremos a seguir exemplos de aplicações desses casos.

Exemplo 1: Suponha que estejamos num jogo em que se lança uma moeda honesta até sair a primeira cara. Se o número de lançamentos necessários for par, ganhamos; se for ímpar, perdemos. Qual a probabilidade de vitória?

Solução: Vamos construir um modelo probabilístico para o experimento aleatório que seria lançar uma moeda honesta até sair a primeira cara. Ao representar o conjunto de todas as possibilidades, o espaço amostral, para o número de lançamentos temos

$$\Omega_1 = \{c, kc, kkc, kkkc, kkkkc, ...\} \text{ ou } \Omega_2 = \{1, 2, . . .\},$$

em que de Ω_1é formado pelo resultado obtido em cada face da moeda nos sucessivos lançamentos realizados até que o mesmo resulte em cara, ou seja, podemos ter cara no primeiro lançamento, ou somente no segundo lançamento, ou somente no terceiro, e etc. Enquanto que em Ω_2 representamos o espaço amostral através do número de lançamentos necessários para se obter a primeira face equivalente a cara.

Seguiremos a ideia mostrada anteriormente e atribuiremos probabilidades aos eventos elementares de cada espaço amostral. Com o intuito de não tornar a explicação desgastante optaremos pelo espaço amostral Ω_1 no momento de realizar nossos cálculos. Para tal, recorremos a distribuição de resultados de uma moeda honesta. Portanto, inicialmente temos que

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{c}\}) = \frac{1}{2} \text{ e } \mathrm{P}(\{\mathrm{k}\}) = \frac{1}{2}.$$

Dessa maneira, como dito anteriormente, a probabilidade do evento elementar $\{\mathrm{c}\}$ é igual a $\frac{1}{2}$, enquanto a probabilidade do evento elementar $\{\mathrm{kc}\}$ é igual a $\frac{1}{4}$. Visto isso, conseguimos afirmar que em qualquer um dos casos de espaço amostral selecionado temos um conjunto infinito enumerável. Note também que o fato dos eventos elementares possuírem probabilidades distintas garante a não-equiprobabilidade.

Agora, para calcularmos a probabilidade de vitória, devemos lembrar de duas situações: em primeiro, para ser vencedor o número de lançamentos da moeda necessita ser par, ou seja, devemos determinar o somatório de todas as situações em que a quantidade de lançamentos é par e em segundo, a quantidade de lançamentos anteriores a obtenção da face cara precisa ser em quantidade ímpar e suas faces coroa.

Então, vamos supor que a moeda é lançada i vezes. Como o número de lançamentos para se obter a vitória deve ser par, então i é par maior que zero e esse evento ocorrerá se os primeiros $i - 1$ lançamentos, em quantidade ímpar, resultarem em coroa. Assim, o evento vitória se dará pelo somatório de todos os casos em que i é par, ou seja, i ∈ {2, 4, 6, . . .}

$$\mathrm{P(Vitória)} = \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(6) + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots$$

Esse é o somatório dos termos de uma P.G de razão $\left(\frac{1}{4}\right)$.

Logo,

$$\text{P(vitória)} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 2: Um pesquisador está realizando sucessivos experimentos químicos independentes em busca de uma reação positiva. Sabe-se que a cada tentativa a probabilidade de que cada experimento apresente uma reação positiva é 0,4. Qual é a probabilidade de que menos de 7 reações negativas ocorram antes da primeira positiva?

Solução: Para resolver este problema, considere Ω como sendo a representação de um espaço amostral que contém o número de reações negativas até a ocorrência da primeira positiva. Neste caso, temos que

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

todos os números naturais positivos, um conjunto infinito enumerável.

Sabemos que a probabilidade da reação de um experimento ser positiva é 0,4, ou seja, P(reação ser positiva) = 0,4 e, como todo experimento possui natureza dual, ser positivo ou negativo, tem-se que P(reação ser negativa) = 1 – 0,4 = 0,6.

Daí, devemos calcular a probabilidade dos eventos elementares $\{0\}$, $\{1\}$, ..., $\{6\}$, pois

são aqueles que indicam que a quantidade de reações negativas no experimento foi menor que 7. O que significa que precisamos identificar a probabilidade até a 6ª reação negativa. Veja que:

P($\{0\}$) = P(reação positiva na primeira tentativa) = 0,4;

P($\{1\}$) = P(reação positiva na segunda tentativa) = (0,6) . (0,4);

P($\{2\}$) = P(reação positiva na terceira tentativa) = $(0{,}6)^2$. (0,4);

$$\vdots$$

P($\{6\}$) = P(reação positiva na oitava tentativa) = $(0{,}6)^6$. (0,4)

Portanto, a probabilidade de que ocorram menos do que 7 reações negativas antes

de uma positiva é P($\{0\}$) + P($\{1\}$) + ... + P($\{6\}$).

P(número de reações positivas menor que 7) = $(0{,}4) + (0{,}6)\ x\ (0{,}4) + (0{,}6)^2\ x\ (0{,}4) + \cdots + (0{,}6)^6\ x\ (0{,}4)$

$= 0{,}9720064.$

Exemplo 3: A e B lançam sucessivamente um par de dados até que um deles obtenha soma de pontos 7, caso em que a disputa termina e o vencedor é o jogador que obteve soma 7. Se A é o primeiro a jogar, qual é a probabilidade de A ser o vencedor?

Solução: Para A ganhar, ou A obtém soma 7 no primeiro lançamento, ou no seu segundo lançamento, ou no seu terceiro, etc. O espaço amostral do experimento deve listar a sequência dos possíveis resultados em que A obtém soma 7. Assim, definindo a para o evento {A obtém soma 7}, $\bar{a}$ para o evento {A não obtém soma 7}, b para o evento {B obtém soma 7} e $\bar{b}$ para o evento {B não obtém soma 7}, temos os seguintes resultados para o experimento:

$$\Omega = \{a, \bar{a}\bar{b}a, \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}a, \dots\}$$

Ou seja, como A começa e os lançamentos entre jogadores são alternados, temos que A pode obter soma 7 já no primeiro lançamento. Caso não consiga, para A obter essa soma na sua segunda jogada, A não pode obter soma 7 no primeiro lançamento, B não pode obter soma 7 no seu primeiro lançamento, o segundo na sequência geral, e A deve obter soma 7 no seu segundo lançamento, o terceiro na sequência geral. Para A obter soma de pontos 7 na sua terceira jogada, A não pode obter essa soma nas suas duas primeiras jogadas, B não pode obter soma 7 nas suas duas primeiras jogadas e A deve obter soma 7 na terceira jogada. Algebricamente falando, temos:

$$P(A\ obtém\ soma\ 7) = P(B\ obtém\ soma\ 7) = P(\{a\}) = P(\{b\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6};$$

$$P(\ A\ não\ obtém\ soma\ 7) = P(B\ não\ obtém\ soma\ 7) = P(\{\bar{a}\}) = P\big(\{\bar{b}\}\big) = 1 - \frac{6}{36}$$

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Agora, voltando ao problema, para calcular a chance de A ganhar, temos que:

- A obtém soma 7 no seu primeiro lançamento:

$$P(\{a\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- A obtém soma 7 somente no seu segundo lançamento:

$$P(\{\bar{a}\bar{b}a\}) = \left(\frac{5}{6}\right) . \left(\frac{5}{6}\right) . \left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 . \frac{1}{6}.$$

- A obtém soma 7 somente no seu terceiro lançamento:

$$P\big(\{\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}a\}\big) = \left(\frac{5}{6}\right) . \left(\frac{5}{6}\right) . \left(\frac{5}{6}\right) . \left(\frac{5}{6}\right) . \left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 . \frac{1}{6}$$

$$\vdots$$

E assim sucessivamente.

Os eventos elementares de Ω configuram um espaço amostral não-equiprovável, pois a chance de ocorrência do evento $\{a\}$ é $\frac{1}{6}$, enquanto a de $\{\bar{a}\bar{b}a\}$ é $\left(\frac{5}{6}\right)^2.\frac{1}{6}$. Além disso, os termos de Ω formam uma progressão geométrica infinita de razão $\left(\frac{5}{6}\right)^2$, o que estabelece um espaço amostral infinito enumerável. Portanto, a probabilidade de A ganhar é a soma das chances de o jogador obter soma 7 em qualquer lançamento realizado por ele, ou seja, no primeiro lançamento, ou no segundo, ou no terceiro, e daí em diante. Essa configuração caracteriza o somatório dos termos de uma PG infinita, o que implica em

$$\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2.\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4.\frac{1}{6}+\cdots=\frac{\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{6}{11}$$

4.3 - Não-Equiprobabilidade em Espaços Amostrais Infinitos Não-Enumeráveis

Já vimos, no tópico anterior, aplicações de não-equiprobabilidade em espaços amostrais infinitos. Entretanto, o direcionamento dado é a favor de aplicações enumeráveis desses casos. A partir deste momento vamos dar ênfase ao estudo sobre os espaços amostrais infinitos não-enumeráveis. Ao contrário do que a grande maioria pensa, esses espaços são bastante comuns no cotidiano e podem ser exemplificados. O tempo de sobrevida de pacientes com um tipo específico de câncer, a altura em um grupo de pessoas, o tempo de vida em horas de um certo dispositivo eletrônico, as temperaturas registradas durante um período, os pesos em um grupo de pessoas são pequenos exemplos da praticabilidade de espaços amostrais infinitos não-enumeráveis. Ao nos referirmos à esse tipo de variável estabelecemos o conceito da continuidade e por conta disso, a mesma é chamada de contínua, ou seja, seus possíveis valores pertencem a um intervalo de números reais. Note que em cada um dos exemplos acima não é possível listar individualmente todos os valores do espaço amostral. A característica principal de uma variável contínua é que sendo resultado de uma mensuração, o seu valor pode ser pensado como pertencendo a um intervalo ao redor do valor efetivamente observado. Por exemplo, quando dizemos que o peso de uma pessoa é 67 kg, estamos pesando-a usando kg como unidade de massa e, assim o valor observado é, na realidade, um valor entre 66,5 kg e 67,5 kg.

A forma como podemos engrandecer o raciocínio dos alunos ao nos depararmos com esses tipos de problema é resumir a informação através de uma tabela que represente a frequência com que cada valor observado aparece dentro de um dado intervalo, chamado de classe. A escolha das classes deve ser feita de forma cuidadosa. Quanto maior a familiaridade com os dados melhor. A quantidade e o tipo de classes que devem ser usadas precisam garantir que não corremos o risco de perder informação com uma escolha insuficiente de intervalos ou que, com um número grande de classes, o resumo dos dados não seja prejudicado. Apesar da familiaridade, frequentemente vemos a sugestão de uso de 5 a 15 classes com a mesma amplitude. Observe como construir uma tabela de frequência a partir de um exemplo:

Um pesquisador, contratado pela empresa de Telefonia Celular A, deseja estudar o tempo (em minutos gastos) por mês pelos seus assinantes. Para isso, ele seleciona uma amostra aleatória de 30 clientes e obtém os seguintes dados: 102, 124, 108, 86, 103, 82, 71, 104, 112, 118, 87, 95, 103, 116, 85, 122, 87, 100, 105, 97, 107, 67, 78, 125, 109, 99, 105, 99, 101, 92.

Como a variável tempo é quantitativa contínua (mesmo mensurando-a em unidades de minutos), a ideia é construir uma tabela de frequências em classes. A primeira pergunta que surge é: quantas classes utilizar? Não há resposta absoluta para essa questão e em geral é por tentativas que escolhemos a melhor. Claro que um número pequeno de classes não vai revelar uma boa distribuição dos dados e tampouco um número excessivo de classes, pois ficaríamos potencialmente com uma frequência ou nenhuma frequência por cada classe.

Em geral testamos inicialmente um número de classes k, dado por

$$k \cong \sqrt{n} \text{ ou então } k = 1 + 3{,}3 \log n.$$

onde n é o número de observações coletadas e log é o logaritmo decimal. No nosso caso, teríamos k = 5, pois n = 30 e $\sqrt{n} = 5{,}477225$.

Vamos construir agora nossa tabela de frequências com os seguintes passos:

Passo 1) obtenha os valores máximo e mínimo da amostra:

Valor mínimo = 67 e Valor máximo = 125.

Passo 2) escolha o número de classes para a tabela de frequência: $k = 5$ (pela nossa discussão anterior).

Passo 3) calcule a amplitude total dos dados (A) (a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo). No nosso exemplo, temos

$$A = 125 – 67 = 58.$$

Passo 4) calcule a amplitude das classes (h) onde $h = \frac{A}{k}$. Assim temos

$h = \frac{58}{5} = 11{,}6$, que arredondaremos para h = 12.

Passo 5) calcule os limites das classes. O limite inferior da classe é o valor mais baixo que pertence a ela e o limite superior é o mais alto. Use o valor mínimo (67) como limite inferior da primeira classe.

Passo 6) defina as 5 classes (intervalos), a saber: [67; 79), [79; 91), [91; 103), [103; 115) e [115; 127].

Passo 7) conte quantas observações se situam em cada classe, respeitando os intervalos fechados à esquerda e abertos à direita, e coloque as observações numa tabela igual a tabela 13.

$Classes$	$Frequência$	$Frequência\ Relativa\ (\%)$
$67 \vdash 79$	3	$10\% = \frac{3}{30} \times 100\%$
$79 \vdash 91$	5	$16,67\% = \frac{5}{30} \times 100\%$
$91 \vdash 103$	8	$26,66\% = \frac{8}{30} \times 100\%$
$103 \vdash 115$	9	$30\% = \frac{9}{30} \times 100\%$
$115 \vdash 127$	5	$16,67\% = \frac{5}{30} \times 100\%$
$Total$	30	$100\% = \frac{30}{30} \times 100\%$

Tabela 13: Tabela de classes, frequência absoluta e relativa de minutos gastos por assinantes.

Seguindo esse passo a passo, ao resumir os dados, percebemos que ao criar classes perdemos alguma informação. Por exemplo, não sabemos quais são os nove valores que representam os minutos gastos da classe de 103 a 115, a não ser que pesquisemos essa informação na listagem inicial do problema. Contanto que os valores estejam no referido intervalo podemos supor quaisquer números sem nenhuma preocupação, inclusive que todos os nove valores sejam iguais a 109, ponto médio do intervalo. Note também a importância da notação correta na tabela. Estamos usando a notação a ⊢ b para o intervalo de números contendo o extremo *a* mas não contendo o extremo *b*. Como mostrado no passo 6, essa não é a única maneira de representar o intervalo. Em alguns casos podemos também usar a notação [*a*, *b*) para designar a mesma classe.

Essa tabela de frequências para dados quantitativos contínuos enseja a construção de um gráfico extremamente importante na Estatística chamado Histograma. De acordo com Bussab e Morettin, em Estatística Básica 6ª edição,

> *"O histograma é um gráfico de barras contíguas, com as bases proporcionais aos intervalos das classes e a área de cada retângulo proporcional à respectiva frequência. Pode-se usar tanto a frequência absoluta, como a relativa. Quanto mais dados tivermos em cada classe,*

mais alto deve ser o retângulo. Com essa convenção, a área total do histograma será igual a um."

(Bussab e Morettin, 6ª edição, 2010, p.18)

Através desse gráfico reproduziremos uma figura geométrica compacta para que possamos futuramente pensar num modelo probabilístico contínuo para a variável em estudo.

O gráfico de frequências por intervalo de tempo, em minutos gastos, pelos assinantes da Telefonia Celular A é dado num histograma pela seguinte caracterização:

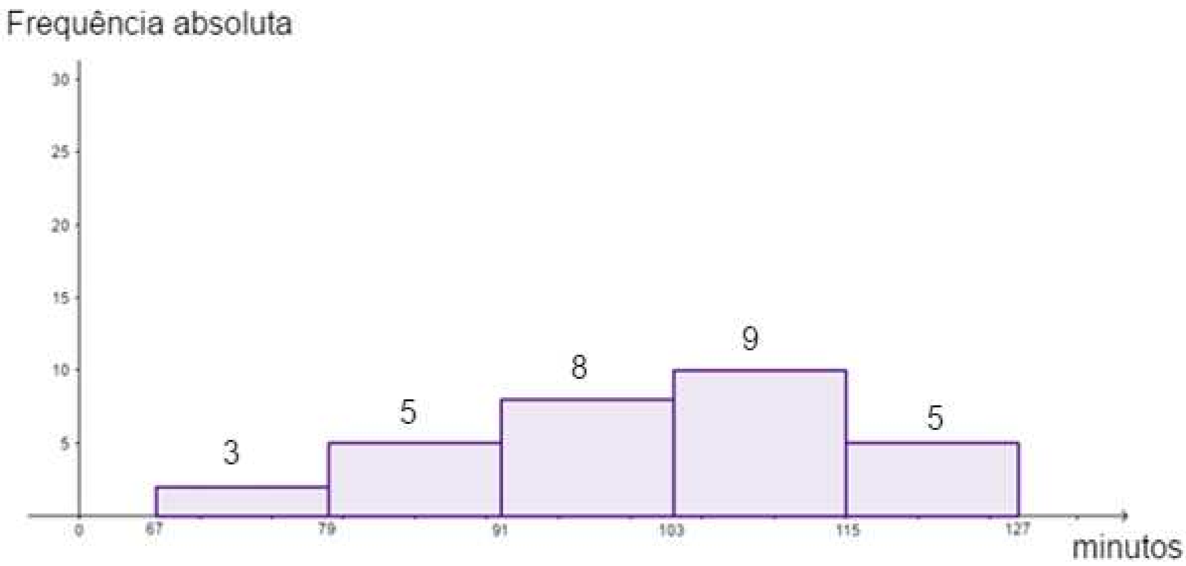


Figura 32: Histograma dos minutos gastos por assinantes.

No nosso estudo, o mais importante em um histograma será a sua forma. Quanto maior for a quantidade de dados coletados, mais o histograma vai adquirindo um formato específico. Dessa maneira nos baseamos em um campo da matemática chamado de distribuição probabilística, que tem por objetivo explicar a probabilidade de ocorrência de determinados eventos através de funções matemáticas. Assim sendo, iremos nos atentar ao cálculo da probabilidade de um dado número estar presente em algum intervalo de valores. As funções de distribuição probabilística também contemplam a área da distribuição. Então, para qualquer intervalo $[a, b]$, a probabilidade empírica de que um valor sorteado esteja entre a e b, a partir do histograma, é dada pela razão entre a área abaixo do histograma restrita entre a e b e a área total abaixo do histograma, conforme a figura 33.

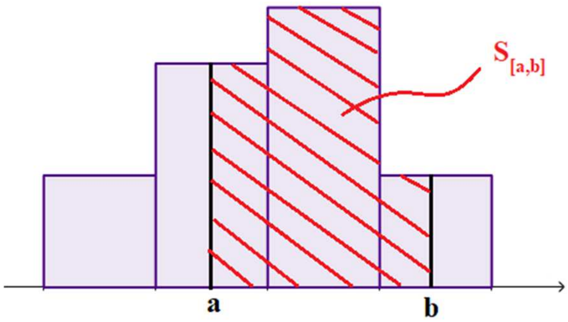


Figura 33: Histograma da probabilidade de um valor sorteado estar entre a e b.

Assim, a probabilidade empírica de que o resultado experimental ocorra entre a e b é dado por $\frac{S_{[a,b]}}{S_{total}}$.

A probabilidade calculada em intervalos de amplitude fixa irá variar de acordo com a posição do mesmo. Além disso, é preciso discutir com os alunos que no contexto de variáveis aleatórias contínuas não há diferenciação entre as probabilidades de intervalos do tipo [*a*,*b*], [*a*,*b*), (*a*,*b*] e (*a*,*b*), pois um ponto apenas não gera área. Assim esses quatro eventos possuem a mesma probabilidade no contexto de variáveis contínuas. Outra aspecto a ressaltar aos alunos é que regiões de alta densidade dos valores indicam maior ocorrência probabilística. Portanto, os histogramas são indicadores da concentração de probabilidade. Cabe destacar que essa estrutura não reflete ainda o modelo teórico de probabilidade do fenômeno em estudo, mas é a partir desse histograma que se pode pensar no modelo teórico tendo uma função de densidade que melhor se ajuste a ele. Essa função de densidade, quando construída, tem a característica de que a área sob sua curva entre dois extremos de um intervalo que irá fornecer diretamente a probabilidade de que a variável aleatória ocorra entre esses dois extremos, sem a necessidade de ser calculada com uma razão de áreas como no caso empírico determinado pelo histograma. Em outras palavras, ao estabelecer um intervalo [*a*, *b*] a probabilidade de que a variável aleatória assuma um valor do intervalo é apresentada por meio da integral da função de densidade entre a e b.

Entretanto, devemos lembrar que esse trabalho tem um apelo ao ensino de probabilidade na Educação Básica e por conta disso não empregaremos o conceito de função de densidade de probabilidade, pois este depende do conceito de integral, mas isso não nos impede de calcular a probabilidade empírica por meio de áreas retângulos formados por um intervalo previamente determinado do histograma e a área total de todos os retângulos.

Aproveitaremos todo o desenrolar acima para resolver outros problemas desse mesmo tipo.

Exemplo 1: Ao final de um trimestre, um professor de Matemática registrou através de uma pesquisa as seguintes alturas, em metros, de seus 35 alunos, listadas no quadro a seguir.

1,73	1,55	1,64	1,63	1,68
1,78	1,51	1,57	1,59	1,69
1,85	1,64	1,67	1,69	1,62
1,83	1,64	1,70	1,61	1,60
1,81	1,67	1,56	1,69	1,62
1,79	1,63	1,61	1,64	1,75
1,70	1,68	1,66	1,71	1,61

Tabela 14: Altura de 35 alunos.

Como a matéria ensinada no trimestre era probabilidade, o professor resolveu colocar o conteúdo em prática estimando a probabilidade de sortear uma altura em um determinado intervalo. Com base nisso, estime a probabilidade de uma altura sorteada estar entre 1,69 e 1,75.

Solução: Como a variável altura é contínua a ideia é construir uma tabela de frequências em classes. Vamos optar pela mensuração das alturas em centímetros. O problema nos fornece os dados em metros, então devemos fazer uma mudança de unidade de metro para centímetro. Agora, precisamos determinar o número de classes que iremos usar. Utilizando a aproximação por raiz quadrada, $k \cong \sqrt{n}$, onde n é o número de observações coletadas. No nosso caso, teríamos k = 6, pois n = 35 e $\sqrt{n} = 5{,}91607$.

Vamos agora para a construção da nossa tabela de frequências:

Passo 1) os valores máximo e mínimo da amostra:

Valor mínimo = 151 e Valor máximo = 185.

Passo 2) número de classes para a tabela de frequência: $k = 6$.

Passo 3) amplitude total dos dados (A):

$$A = 185 – 151 = 34.$$

Passo 4) amplitude das classes (h) onde $h = \frac{A}{k}$. Assim temos

$h = \frac{34}{6} = 5{,}\overline{6}$, que arredondaremos para h = 6.

Passo 5) os limites das classes. O limite inferior da primeira classe é 151 e o limite superior da última classe é o 187.

Passo 6) defina as 6 classes:

[151; 157), [157; 163), [163; 169), [169; 175), [175; 181) e [181, 187).

Passo 7) contamos quantas observações se situam em cada classe, respeitando os intervalos fechados à esquerda e abertos à direita, e obtemos a tabela 15.

Classes	**Frequência**
151 ├─ 157	3
157 ├─ 163	8
163 ├─ 169	11
169 ├─ 175	7
175 ├─ 181	3
181 ├─ 187	3
Total	**35**

Tabela 15: Tabela de frequência das alturas de 35 alunos distribuídas através de classes.

Com o auxílio da tabela de frequências para dados quantitativos contínuos iremos construir o histograma representado pela figura 34 e assim, estimar a probabilidade.

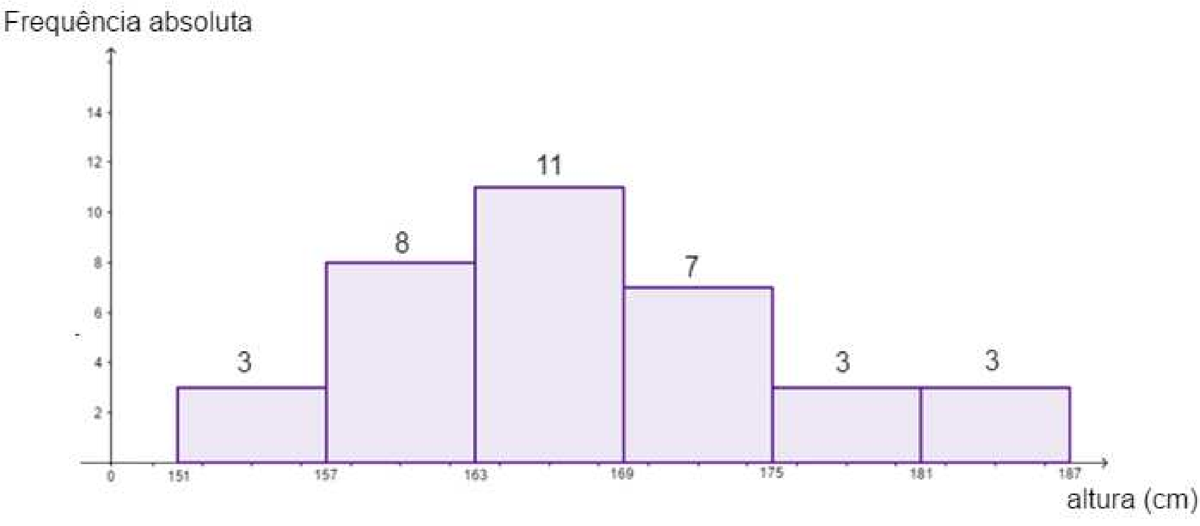


Figura 34: Histograma das alturas em cm de 35 alunos.

Como o histograma é uma representação da distribuição de frequências, então, para qualquer intervalo [*a*, *b*], a probabilidade de que um valor sorteado esteja entre *a* e *b*, é igual a razão entre o somatório da área dos retângulos formados nesse intervalo e a área total do histograma, o que é o mesmo que determinar a frequência relativa. Nesse caso, para a probabilidade empírica do evento $\{169 < X < 175\}$, com X a altura de um aluno sorteado aleatoriamente, temos

$$P(169 < X < 175) = \frac{\acute{A}rea\ (169 < X < 175)}{\acute{A}rea\ total}$$
$$= \frac{(175 - 169)\,.\,7}{6\,.\,(3 + 8 + 11 + 7 + 3 + 3)} = \frac{6\,.\,7}{6\,.\,35} = \frac{42}{210} = 0{,}2 = 20\%$$

Obviamente esse valor poderia ser facilmente calculado pela frequência da classe [169, 175) e a frequência total, isto é, $\frac{7}{35} = \frac{1}{5} = 0{,}2$, já que os valores são os extremos de uma classe. Para casos em que os intervalos possuam comprimentos diferentes devemos trabalhar igualmente por meio das áreas. Assim, suponha que desejemos calcular a probabilidade do evento $\{161 < X < 172\}$. Teremos assim, a seguinte probabilidade empírica

$$P(161 < X < 172) = \frac{\acute{A}rea\ (161 < X < 172)}{\acute{A}rea\ total}$$
$$= \frac{(163 - 161)\,.\,8 + (169 - 163)\,.\,11 + (172 - 169)\,.\,7}{6\,.\,(3 + 8 + 11 + 7 + 3 + 3)}$$
$$= \frac{16 + 66 + 21}{6\,.\,35} = \frac{103}{210} = 0{,}4904 = 49{,}04\%$$

Exemplo 2: A figura 35 ilustra um histograma construído para os 100 melhores tempos na maratona de Nova Iorque (2017) para a categoria homens, após a conversão destes tempos para minutos.

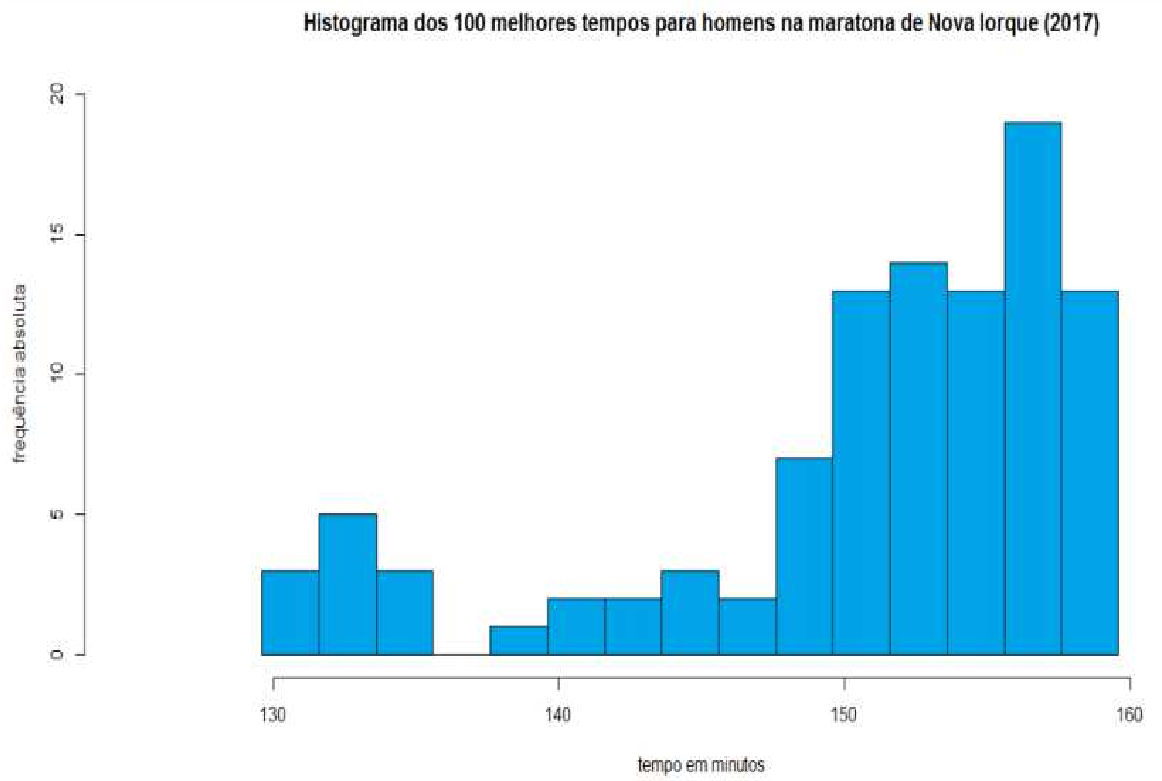


Figura 35: Histograma dos 100 melhores tempos para homens na maratona de Nova Iorque 2017.

Veja a tabela 16 com os intervalos, abertos à direita, e suas respectivas frequências, usados na construção do histograma.

limite inferior	limite superior	frequência
129,60	131,60	3
131,60	133,60	5
133,60	135,60	4
135,60	137,60	0
137,60	139,60	1
139,60	141,60	2
141,60	143,60	2
143,60	145,60	3
145,60	147,60	2
147,60	149,60	7
149,60	151,60	12
151,60	153,60	14
153,60	155,60	13
155,60	157,60	19
157,60	159,60	13

Tabela 16: Tabela da distribuição de tempo através de classes.

Suponha que o comportamento dos 100 melhores tempos para homens na Maratona de Nova Iorque (2017) represente bem os 100 melhores tempos para homens em qualquer Maratona de Nova Iorque. Com base nessa suposição, estime a probabilidade de que na próxima maratona de Nova Iorque o tempo de conclusão da corrida, entre os 100 melhores na categoria homens:

a) esteja entre 155,6 e 157,6 minutos;

b) seja inferior a 155,6 minutos;

c) seja superior a 152,6 minutos;

d) esteja entre 152,6 e 158 minutos.

Solução: Como a variável tempo é contínua estamos trabalhando com um problema em espaços infinitos não-enumeráveis. A questão já nos deixa a par das informações através da tabela de frequências e de um histograma.

a) Como a estimativa a ser feita é justamente a respeito de uma das classes do problema

é suficiente pensar no conceito de frequência relativa.

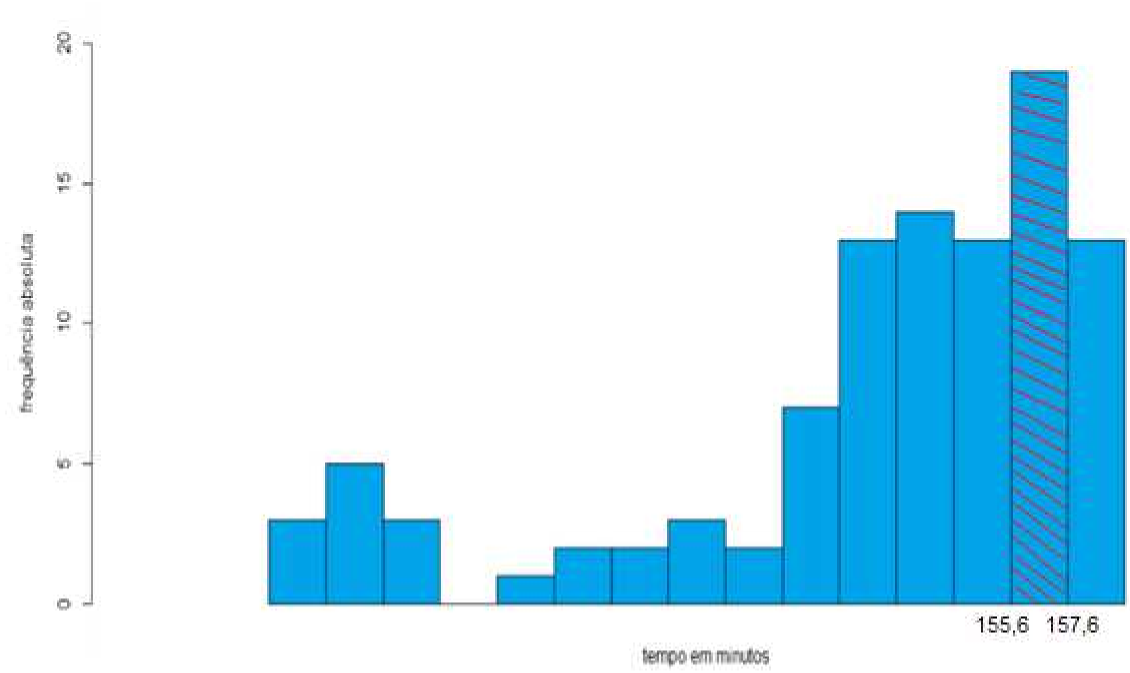


Figura 36: Histograma do intervalo entre 155,6 e 157,6.

Assim, denominando T o tempo, temos:

$$P(155{,}6 < T < 157{,}6) = \frac{\acute{A}rea\ ret\hat{a}ngulo\ (155{,}6 < T < 157{,}6)}{\acute{A}rea\ total}$$

$$= \frac{(155{,}6 - 157{,}6)\,.\,19}{2\,.\,(3+5+4+0+1+2+2+3+2+7+12+14+13+19+13)}$$

$$= \frac{2\,.\,19}{2\,.\,100} = \frac{38}{200} = \frac{19}{100} = 19\%.$$

b) O evento “ser inferior a 155,6 minutos” é equivalente ao intervalo [129,6; 155,6].

Daí, vamos estimar a razão entre o somatório da área dos retângulos formados nesse intervalo e a área total do histograma.

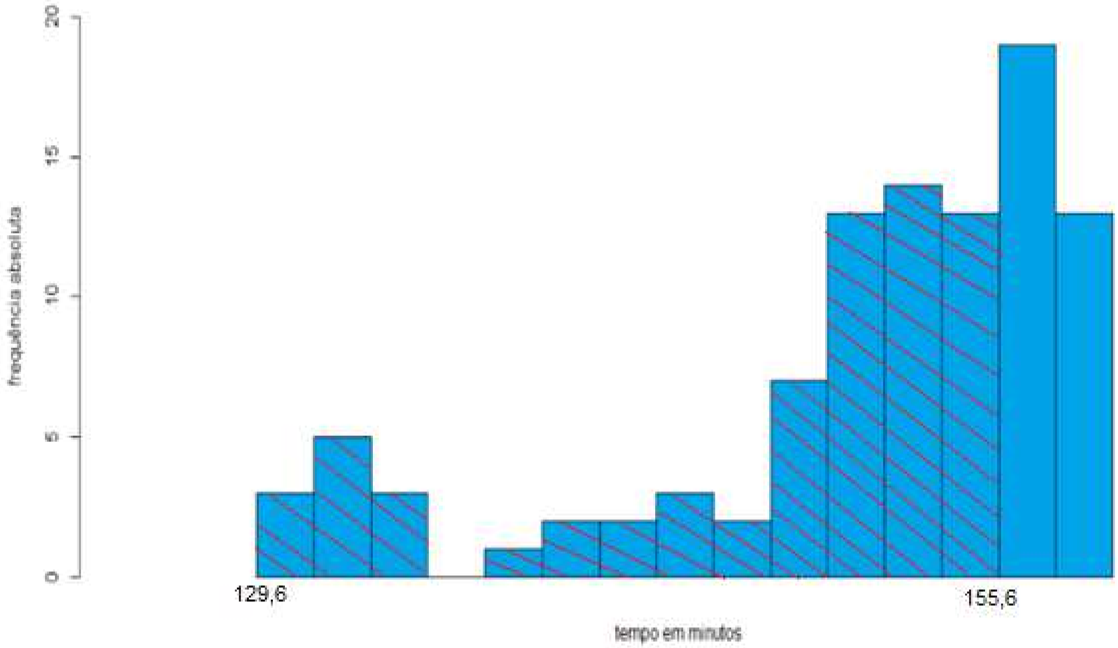


Figura 37: Histograma dos valores menores que 155,6.

Como o comprimento da base de cada retângulo é igual, pois representam a amplitude de cada intervalo, e todos possuem a mesma amplitude de classe, temos que a única alteração em nosso cálculo é na frequência absoluta de cada subintervalo de [129,6; 155,6]. Portanto,

$$P(129{,}6 < T < 155{,}6)$$

$$= P(129{,}6 < T < 131{,}6) + P(131{,}6 < T < 133{,}6) + \cdots + P(151{,}6 < T < 153{,}6) + P(153{,}6 < T < 155{,}6).$$

$$= \frac{\acute{A}rea\ ret\hat{a}ngulo\ (129{,}6 < T < 131{,}6)}{\acute{A}rea\ total} + \frac{\acute{A}rea\ ret\hat{a}ngulo\ (131{,}6 < T < 133{,}6)}{\acute{A}rea\ total} + \cdots + \frac{\acute{A}rea\ ret\hat{a}ngulo\ (151{,}6 < T < 153{,}6)}{\acute{A}rea\ total} + \frac{\acute{A}rea\ ret\hat{a}ngulo\ (153{,}6 < T < 155{,}6)}{\acute{A}rea\ total} =$$

$$= \frac{2\,.\,3}{200} + \frac{2\,.\,5}{200} + \frac{2\,.\,4}{200} + \frac{2\,.\,1}{200} + \frac{2\,.\,2}{200} + \frac{2\,.\,2}{200} + \frac{2\,.\,3}{200} + \frac{2\,.\,2}{200} + \frac{2\,.\,7}{200} + \frac{2\,.\,12}{200} + \frac{2\,.\,14}{200} + \frac{2\,.\,13}{200}$$

$$= \frac{136}{200} = \frac{68}{100} = 68\%.$$

Poderíamos também ter agido através da exclusão das áreas dos retângulos pertencentes as classes acima de 155,6 do total.

c) Para responder esse item vamos supor, em cada intervalo, que as frequências observadas são proporcionais aos comprimentos dos mesmos, para assim podermos avaliar a frequência em subintervalos.

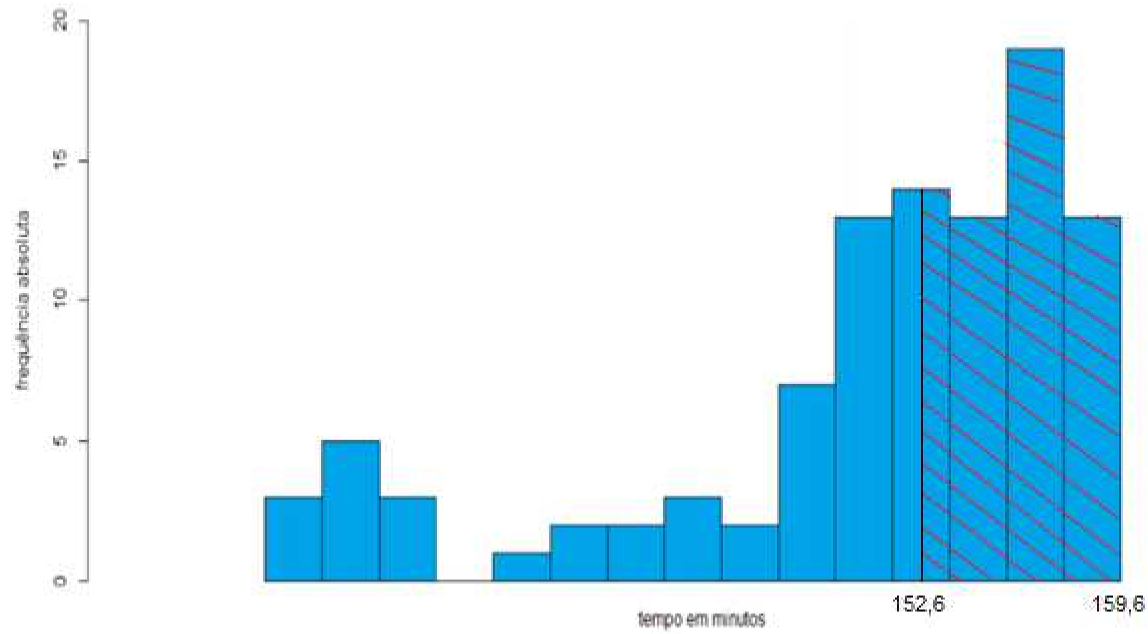


Figura 38: Histograma dos valores entre 152,6 e 159,6.

Dessa maneira, o intervalo que será avaliado é [152,6; 159,6]. Seguindo o conceito de estimativa através da razão temos,

$$P(152{,}6 < T < 159{,}6)$$
$$= P(152{,}6 < T < 153{,}6) + P(153{,}6 < T < 155{,}6) + P(155{,}6 < T < 157{,}6) + P(157{,}6 < T < 159{,}6)$$
$$= \frac{Área\ retângulo\ (152{,}6 < T < 153{,}6)}{Área\ total} + \frac{Área\ retângulo\ (153{,}6 < T < 155{,}6)}{Área\ total}$$
$$+ \frac{Área\ retângulo\ (155{,}6 < T < 157{,}6)}{Área\ total} + \frac{Área\ retângulo\ (157{,}6 < T < 159{,}6)}{Área\ total}$$
$$= \frac{(153{,}6 - 152{,}6)\,.\,14}{200} + \frac{(155{,}6 - 153{,}6)\,.\,13}{200}$$
$$+ \frac{(157{,}6 - 155{,}6)\,.\,19}{200}$$
$$+ \frac{(159{,}6 - 157{,}6)\,.\,13}{200}$$
$$= \frac{1\,.\,14}{200} + \frac{2\,.\,13}{200} + \frac{2\,.\,19}{200} + \frac{2\,.\,13}{200} = \frac{104}{200} = \frac{52}{100} = 52\%.$$

d) Para responder esse item vamos supor mais uma vez, em cada intervalo, que as frequências observadas são proporcionais aos comprimentos dos mesmos, para assim podermos avaliar a frequência em subintervalos. Procuramos estimar que o tempo de prova esteja entre 152,6 e 158.

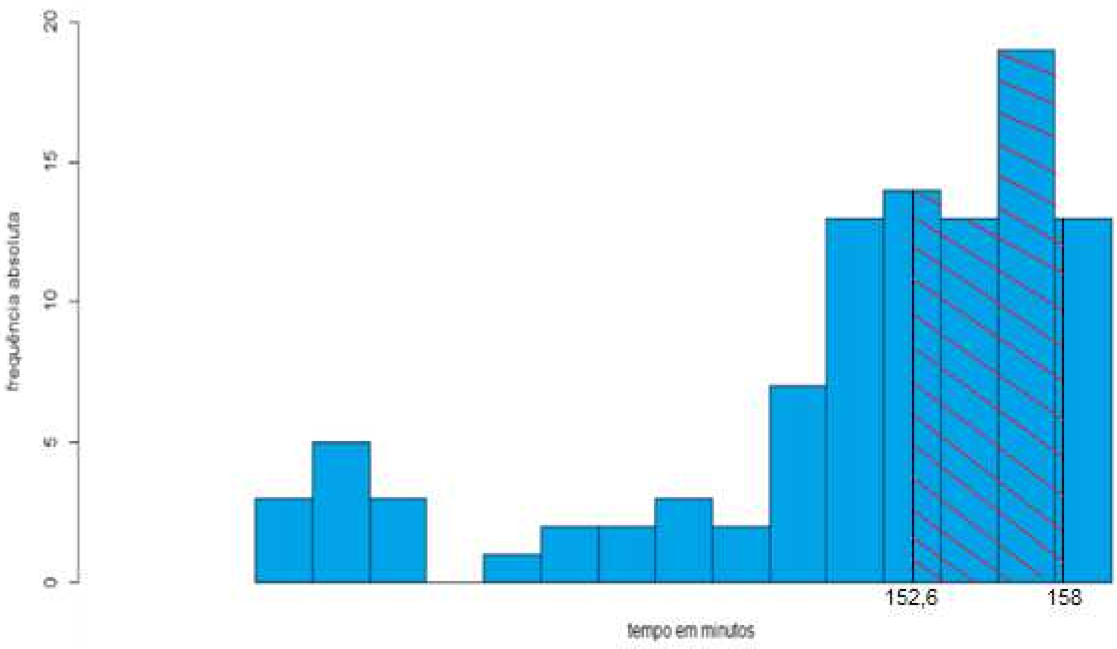


Figura 39: Histograma dos valores entre 152,6 e 158.

Dessa forma, temos:

$$P(152{,}6 < T < 158)$$
$$= P(152{,}6 < T < 153{,}6) + P(153{,}6 < T < 155{,}6) + P(155{,}6 < T < 157{,}6) + P(157{,}6 < T < 158)$$
$$= \frac{Área\ retângulo\ (152{,}6 < T < 153{,}6)}{Área\ total} + \frac{Área\ retângulo\ (153{,}6 < T < 155{,}6)}{Área\ total}$$
$$+ \frac{Área\ retângulo\ (155{,}6 < T < 157{,}6)}{Área\ total} + \frac{Área\ retângulo\ (157{,}6 < T < 158)}{Área\ total}$$
$$= \frac{(153{,}6 - 152{,}6)\,.\,14}{200} + \frac{(155{,}6 - 153{,}6)\,.\,13}{200}$$
$$+ \frac{(157{,}6 - 155{,}6)\,.\,19}{200}$$
$$+ \frac{(158 - 157{,}6)\,.\,13}{200}$$
$$= \frac{1\,.\,14}{200} + \frac{2\,.\,13}{200} + \frac{2\,.\,19}{200} + \frac{(0{,}4)\,.\,13}{200} = \frac{83{,}2}{200} = \frac{41{,}6}{100} = 41{,}6\ \%.$$

Este último capítulo tinha como objetivo finalizar a teoria desenvolvida ao longo desta dissertação mostrando que ainda existem lacunas a serem exploradas no ensino básico.

5. Considerações Finais

Esse trabalho teve como objetivo principal sugerir aos professores de Matemática do Ensino Básico, e principalmente do Ensino Médio, uma sequência didática cuja finalidade é promover, ou dar uma maior ênfase para aqueles que já abordam, o ensino da não-equiprobabilidade na Teoria das Probabilidades. A proposta inicial era conceder ao professor um material de apoio, buscando dar conhecimento mais amplo e assim, gerar uma maior expansão de conhecimento no ensino de Probabilidade.

Entendemos que seja uma proposta inovadora, dada a quase inexistência de tratamento dessa estrutura probabilística nos livros didáticos.

Aproveitamos também para contribuir ainda que de forma sintética com a evolução histórica da Teoria das Probabilidades, com o intuito de revelar que o atraso para a plena entrada dessa riquíssima teoria matemática se justifica por vários aspectos, desde o cognitivo até o religioso e social. Procurou-se também revelar alguns dos matemáticos importantes que colaboraram para o seu desenvolvimento. Temos a crença de que através da utilização da História da Matemática como um recurso didático alternativo podemos aproveitar a curiosidade dos jovens para realizar a introdução de qualquer conteúdo e desnaturalizar a teoria. Com ela podemos nos pautar pela realidade e desenvolver conceitos, esclarecer ideias e sugerir caminhos distintos, ajudando a constituir um olhar mais questionador.

Ao escrever essa dissertação, tentamos criar um alicerce para que o professor possa assegurar ao aluno a oportunidade de tomar decisões baseadas em previsões obtidas através de cálculos probabilísticos. Em nenhum momento tentamos nos esquivar da teoria ou deixamos de lado os conceitos matemáticos essenciais para o desenvolvimento do assunto. O básico da teoria foi cotejado juntamente com aplicações. Ancorados pelos livros didáticos indicados no PNLD, de 2018, e bastante solidificados no mercado, alguns desses exercícios foram resolvidos conforme os livros propõem.

Desejamos também nessa dissertação discutir as especificidades dos espaços amostrais discretos finitos e infinitos enumeráveis, bem como os espaços amostrais contínuos não enumeráveis, em cujas situações não seria possível quantificar casos favoráveis sobre casos possíveis. Acreditamos também, que as sugestões de aplicações que trouxemos são bem comuns e simples de realizar, para que, ao serem inseridas em sala de aula, possam originar um procedimento desafiador e criativo, podendo ser melhorado por alunos e professores.

Para finalizar, esperamos que a obra produzida possa contribuir para um ensino mais orgânico e moderno de probabilidade. A produção deste trabalho enriqueceu a minha formação acadêmica e fez crescer a chama de que todos podemos, e devemos, contribuir para a melhoria do ensino de Matemática em nosso país, se pudermos dar significado aos objetos matemáticos criados para um melhor entendimento do mundo. Muito nos alegraria saber que as ideias aqui expostas possam servir como fonte de apoio para professores ou estudantes de todos os níveis escolares.

Um possível desdobramento da presente dissertação seria trabalhar a modelagem de variáveis aleatórias absolutamente contínuas e a construção de suas funções de densidade, para um tratamento teórico em nível superior, dada as dificuldades dos alunos de graduação em Matemática em compreender plenamente a relação entre Probabilidade e Cálculo Diferencial e Integral.

6. Referências

ALMEIDA, A. L.; FERREIRA, A. C. . A Comunicação Matemática como ferramenta para o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio de Itabirito (MG): dois estudos de caso. In: XIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, 2009, Goiânia: As relações entre pesquisa e as práticas pedagógicas em sala de aula, 2009.

ALMEIDA, A. L. de. Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio. 2010. 166 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

ALVES, A. C. Uma introdução ao pensamento combinatório na 9º ano do Ensino Fundamental. 2010. 158 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Belo Horizonte.

BALESTRI , R. Matemática: interação e tecnologia, 2ª EDIÇÃO, São Paulo: Editora LEYA, 2016

Base Nacional Comum Curricular. – BNCC.Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 11 de novembro de 2018.

BASTOS, A.C. O Ensino da Análise Combinatória em Sala de Aula, a Partir de SituaçõesProblema e sob uma Abordagem Histórica. In: XVII EBRAPEM (Congresso), 2013.

BATALHA, T. V. Contribuições à Construção do Raciocínio Estatístico via Lei Forte dos Grandes Números e Teorema Central do Limite; 2017; Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

BATANERO, M.C.; GODINO, J.D. e NAVARRO-PELAYO, Vírgínia. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. Educación Matemática, 8, 26-39, 1997.

BATANERO, C.; BOROVCNIK, M.; Statistics and probability in high school. Sense Publishers. The Netherlands , 2016.

Bellhouse D.R. “De Vetula”: a medieval manuscript containing probability calculations. In International Statistical Review, 68/2, 123-136, 2000.

BERNOULLI, J. L’Ars Conjectandi, Texto original em latim, com tradução francesa de Norbert MEUSNIER. Publicação do IREM de ROUEN, 1987

BIANCHINI, E. Matemática Bianchini. Editora Moderna. 8ª edição. São Paulo, 2015.

BITTAR, M.; ABE, T. S. O ensino de probabilidade: a articulação entre as visões clássica, frequentista e geométrica. In COUTINHO, C.Q. (orgs). Discussões sobre a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica. Campinas: Mercado das Letras, p. 99-120, 2013.

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino médio. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. 2010.

BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.

BRASIL. Programa Nacional do Livro Didático(PNLD). Brasília, p. 9, 2018. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/centraisdeconteudos/publicacoes/category/165editais?download=11346:apresenta%C3%A7%C3%A3o-arte>. Acesso em 12 de dezembro de 2018.

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. Estatística Básica, 6a Edição, Editora Saraiva, São Paulo, 2010.

CARVALHO, D. L.; OLIVEIRA, P. C. Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura em matemática: clássica, frequentista, subjetiva e formal. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25., 2002, Caxambu. Anais... Caxambu: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 1999. Disponível em: <http://25reuniao.anped.org.br/excedentes25/dionelucchesicarvalhot19.rtf>. Acesso em 23 de outubro de 2018.

COUTINHO, C. de Q.S. Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista – Estudo epistemológico e didático. Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 1994.

COUTINHO, Cileda de Q.S. Introduction aux situations aléatoires dès Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II. Thése de docteur de l'Université Joseph Fourier – Grenoble 1, 2001.

DANTE, L, R. Matemática: contexto e aplicações - Volume 2. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DAVID, F. N. Games, Gods and Gambling. The origins and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era. New York: Hafner Publishing Company. P. 275, 1962.

DORNELAS, A. C. B. Resolução de problemas em análise combinatória: um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Salvador. Anais. Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, UFPE, Recife, p. 24.

ESTEVES, I. Investigando fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos: 8ª série do ensino fundamental. 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

Feller, W. An introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume I, John Wiley & Sons, 1950.

FERRAZ, M.C. O Tratamento da Análise Combinatória no Ensino Fundamental e seus Obstáculos Didáticos. 2002. Universidade Federal de Pernambuco.

GALILEI, G. Opere, Firenze, Barbera, n. 8, p. 591-594, 1898.

Geogebra. Disponível em:<https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc> Acesso em 21 de janeiro de 2019 e 28 de janeiro de 2019.

Gianella, R. O Lúdico na Teoria dos Jogos. Scientific American Brasil, n. 10, p. 36 – 43, 2003

Gianella, R. Teoria das Probabilidades: Aleae Geometria Principia Mathematica. Teoria dos jogos: o futuro administrando o presente. São Paulo: Edições Mandacaru Letra e Arte, 2006.

HARIKI, S. Conectar problemas: uma nova estratégia de resolução de problemas combinatórios. Revista Educação e Matemática, nº37, 1º trimestre de 1996 (Portugal).

HAZZAN, S. Fundamentos da Matemática Elementar: Combinatória/Probabilidade. 7ª ed, São Paulo: Editora Atual, 2004, vol. 5.

DEGENSZAJN, D.; IEZZI, G.; DE ALMEIDA, N.; DOLCE, O.; PÉRIGO, R. Matemática: Ciência e aplicações - Volume 2, Ensino Médio. 9ª ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2016.

JAMES, B. R. Probabilidade: um curso de nível intermediário. 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

KOLMOGOROV, A. Foundations of the Theory of Probability. Ed. 2. New York: Chelsea, 1956.

LAPLACE, P. Ensaio filosófico sobre as probabilidades.Rio de Janeiro: PUC – RJ, 2010.

LAPLACE, P. Théorie Analytique des Probabilités. Ed. 2. Paris, 1814.

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. A Matemática do Ensino Médio, v.2, 6a Edição, SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

Livro Aberto de Matemática- Oficina de Estatística- Medidas de posição e dispersão. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1_8OAzMHhwhpPxFv8QAQBibA0MoZA66RY/view> Acesso em 10 de fevereiro de 2019

LOPES, C. A. E. A Probabilidade e a Estatística no ensino fundamental: uma análise curricular. 1998, 125 folhas. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

LOPES, C. A. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. Cad. CEDES [online]. 2008, vol.28, n.74, p. 57-73.

MEYER, P. L. Probabilidade: Aplicações à Estatística. 2ª ed. Rio de Janeiro: Livro Técnicos e Científicos Editora S.A., 1983.

MORETTI, A. R.; SANTOS, V. G . Probabilidade Geométrica: Trabalhando com o Problema das Agulhas de Buffon. Revista Universidade Rural. Série Ciências Exatas e da Terra (UFRRJ) , v. 27/31, p. 58-61, 2012.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P. e FERNANDEZ, P. Análise Combinatória e Probabilidade. 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, M. C.; GODINO, J. D. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. Educación Matemática, v.8(1), p. 26-39, 1996.

PAIVA, M. Matemática Paiva Volume 2. São Paulo: Moderna, 2014.

Pereira, C.A.B., Alguns Tópicos em Probabilidade Geométrica, Dissertação de Mestrado, Unicamp, 2011.

PIAGET, J.; INHELDER, B. A ideia da origem do acaso na criança. Editora Record, 1951.

Pichard J. F. (1997). La théorie des probabilités au tournant du XVIIe siècle. In Chaput B. & Henry M. (coords.) Enseigner les probabilités au Lycée, 105-130. Reims : IREM de Reims.

PROFMAT/SBM, Matemática Discreta, 2ª Edição, SBM, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, 2015.

SILVA, I. de A. Probabilidades: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

SPIEGEL, M R. Probabilidade e Estatística. 2ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

TOMAZ, P. S. dos S. Girolamo Cardano: Pai da Teoria da Probabilidade
ou Um bom apostador de Jogos de Azar?. Anais do IX Seminário Nacional da História da Matemática. Sociedade Brasileira da História da Matemática. Disponível em: < http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Tomaz_P_S_S_Gerolamo_Cardano.pdf> Último acesso em 21 de maio de 2018.

TUNALA, N. Determinação de probabilidades por métodos geométricos. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 20, p. 16.22, 1995.

Vega-Amaya, Oscar. Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad. Apuentes de história de las matemáticas, v. 1, n. 1, p. 54 – 62, 2002.

VIALI, L.; OLIVEIRA, P. I. F. Uma Análise de Conteúdos de Probabilidade em Livros Didáticos do Ensino Médio. In: Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Brasília, 2009.

VIALI, L. Apostila IV – Elementos de Probabilidade. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~viali/sociais/mat02214/material/apostilas/apostila.htm>. Acesso em 7 janeiro de 2019

VIALI, L.; CURY, H. N. Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada. Educ. Matem. Pesq. São Paulo, v.11, n.2, pp.373-391, 2009.

VIANA, F.C.A. Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos, Dissertação de Mestrado, PROFMAT/SBM, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

WAGNER, E. Probabilidade geométrica. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 34, p. 28.35, 1997.