INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

ENRIQUECENDO O ENSINO MÉDIO: UMA TRIGONOMETRIA PARA ALÉM DO ENSINO BÁSICO

Rafael da Silva Pereira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues.

IFSP
São Paulo
2019

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P436e Pereira, Rafael da Silva
Enriquecendo o ensino médio: uma trigonometria para além do ensino básico / Rafael da Silva Pereira. São Paulo: [s.n.], 2019.
118 f.

Orientador: Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues

() - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2019.

1. Trigonometria. 2. Ensino Médio. 3. Identidades Trigonométricas. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD

RAFAEL DA SILVA PEREIRA

ENRIQUECENDO O ENSINO MÉDIO: UMA TRIGONOMETRIA PARA ALÉM DO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada e aprovada em 28 de Maio de 2019 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues
IFSP – Câmpus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Me. Emiliano Augusto Chagas
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi
Universidade Federal do ABC
Membro da Banca

"A Educação qualquer que seja ela, é sempre uma teoria do conhecimento posta em prática".

Paulo Freire

Dedico este trabalho aos meus pais, a minha esposa Cynthia, a minha recém-chegada filha Helena e a todos que me ajudaram nesta trajetória.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado forças durante a minha caminhada.

Aos meus pais pela educação e exemplos de vida aos quais me inspiro.

A minha esposa Cynthia, pela sua paciência e pelo apoio durante essa trajetória.

A minha filha Helena que foi a maior fonte de inspiração para a realização desse trabalho.

Ao Professor Leandro Albino Mosca Rodrigues, pela ajuda e orientação na elaboração deste trabalho.

Ao Instituto Federal de São Paulo, pelo apoio e pela oportunidade de realização desse mestrado.

A Sociedade Brasileira de Matemática, pela idealização e coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida.

Aos professores e colegas de minha turma no IFSP, pela ajuda e colaboração durante as aulas.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta para a utilização da Trigonometria em um contexto não comum ao que temos em uma sala de aula durante o ensino médio regular. Além da esquematização dos principais conteúdos presentes no currículo da educação básica, foram apresentados teoremas e identidades nas formas trigonométricas, de modo que as demonstrações desses resultados possam ser acompanhadas e entendidas por qualquer aluno que esteja ao final do ensino médio, tendo como principais ferramentas apenas os conteúdos em Trigonometria que pertencem a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).
De acordo com o desenvolvimento histórico da Trigonometria observa-se que, dado a maneira como ela foi manipulada e como as apropriações dos seus resultados foram aplicadas em diferentes contextos, favoreceu um ambiente propício para a expansão de seu conhecimento e de sua utilidade. Dessa maneira, a proposta desse trabalho será a utilização dos conteúdos de Trigonometria trabalhados durante o ensino médio em novos contextos que não estão presentes na BNCC.

Palavras-chaves: Trigonometria, Ensino Médio, Identidades Trigonométricas

ABSTRACT

This paper presents a proposal for the use of Trigonometry in a context not common to what we have in a classroom during regular high school. In addition to the schematization of the main contents present in the curriculum of basic education, the theorems and identities in the trigonometric forms were presented, so that the demonstrations of these results can be followed and understood by any student who is at the end of high school, having as main tools only the contents in Trigonometry that belong to the National Curricular Common Base (BNCC).

According to the historical development of Trigonometry it is observed that, given the way in which it was manipulated and how the appropriations of its results were applied in different contexts, it favored an environment conducive to the expansion of its knowledge and its usefulness. In this way, the proposal of this work will be the use of Trigonometry contents worked during high school in new contexts that are not present in the BNCC.

Keywords: Trigonometry, High School, Trigonometric Identities

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Trigonometria é um assunto que, devido a sua grande diversidade de definições e consequências, pode causar desconfortos tanto aos alunos, como aos professores, fazendo com que esse conteúdo não seja devidamente assimilado e nem explorado do modo como deve ser feito, visto que ela possui inúmeras aplicações em diversos campos nas ciências exatas.

O estímulo para esse trabalho está diretamente ligado ao processo de ensino/aprendizagem desse conteúdo no decorrer do Ensino Médio. Explorando a Trigonometria em contextos diferenciados ao que se tem desenvolvido na educação básica pode-se contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Dessa maneira, questiona-se como as relações e identidades trigonométricas obtidas durante o ensino regular podem ser aplicados em contextos e demonstrações que não são vistas durante os ensinos fundamental e médio?

Assim, temos como principal objetivo utilizar os conceitos trigonométricos desenvolvidos durante o ensino médio em situações não usuais a BNCC. Para isso, foram selecionados conteúdos que não estão presentes no currículo do ensino médio, mas cujas demonstrações e aplicações podem ser compreendidas pelos alunos, seja com a ajuda de um professor ou de maneira autônoma, em alguns casos.

Inicialmente, ao fazer uma investigação sobre o desenvolvimento histórico da Trigonometria, criou-se uma base de conhecimento considerada adequada para se dar pilares de sustentação aos conceitos que, em grande parte das vezes, são apenas apresentados como resultados prontos. Buscou-se ainda aprofundar o conhecimento histórico referente ao tema proporcionando um aumento significativo do repertório para o ensino.

Nos primeiros capítulos deste trabalho serão desenvolvidos os conceitos básicos de Trigonometria e algumas definições pertinentes ao conteúdo a ser utilizado durante praticamente todo o seu desenvolvimento. A sequência dos conteúdos segue o que se propõe a ser trabalhado nos ensinos fundamental e médio. Para a elaboração desse capítulo foram feitas análises de livros didáticos de Matemática do guia PNLD 2018, filtrando-se o que era mais relevante para a construção de conceitos e esquematização das primeiras referências de Trigonometria recebidas pelos alunos. O conteúdo foi apresentado por uma produção nova das definições após análise dos livros didáticos. Essa preparação dos conceitos fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho segue o que se tem como orientações curriculares para o ensino médio (PCNEM), o qual diz em seu documento

> a forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático [...] também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica (BRASIL, 2006, p. 69).

Os próximos capítulos utilizarão os conceitos discutidos até o presente momento para demonstrar e provar alguns resultados trigonométricos não usuais no ensino regular básico, com a finalidade de ampliar algumas discussões em sala de aula. Tais conteúdos terão como critérios de escolha o fato que, para qualquer caso, a Trigonometria envolvida para seu desenvolvimento seja a que um aluno ao final do ensino médio, ou até mesmo ao longo do ensino médio, possa ser capaz de acompanhar e desenvolver a linha de raciocínio utilizada. As demonstrações e construções estarão ligadas a situações envolvendo teoremas e identidades de Geometria Plana, especificamente ligadas a triângulos.

A última parte desse trabalho fará algumas considerações finais do autor a respeito da importância que o processo de aprendizado, tanto do aluno como do professor, possa ser melhorado com o desenvolvimento de novas ideias. A realização deste trabalho num contexto que está fora dos conteúdos propostos no currículo da educação básica, pode incentivar novas ideias e produções acerca dessa proposta.

2 HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Nesse capítulo apresento um histórico do desenvolvimento da Trigonometria levando em consideração a evolução através dos povos egípcios, babilônios, hindus, árabes e, por fim, na Europa.

Verificando a história do desenvolvimento da Trigonometria, pode-se dizer que seu início se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegação.

Segundo Boyer (1974) a Trigonometria como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Tanto no Egito quanto na Babilônia, os primeiros indícios de registros da Trigonometria surgiram a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes, o que pode ser observado no Papiro Ahmes (conhecido também como papiro Rhind (figura 2.1), homenagem feita a Henry Rhind, antiquário o qual o adquiriu em 1858) dado como o mais extenso papiro de natureza matemática.

Figura 2.1: Papiro Rhind

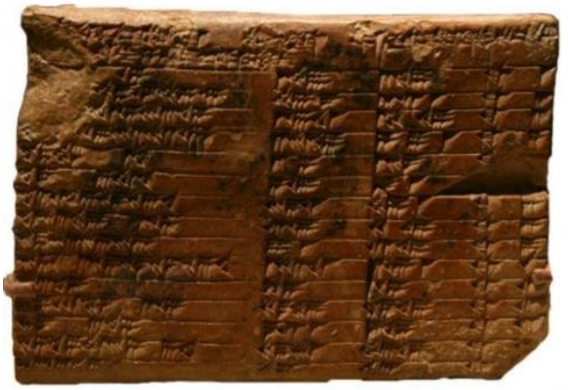
Fonte: Wikimedia (2019)

O papiro Rhind, o qual contém 84 problemas, dos quais 4 trazem um conceito que se relaciona com Trigonometria quando menciona *seqt* de um ângulo. O significado de *seqt* não está bem definido, mas pelo contexto, pode se concluir que o *seqt* de uma pirâmide regular seja equivalente a razão entre o cateto oposto adjacente e cateto oposto, ou seja, seria o equivalente à cotangente (REIS, 2016).

A preocupação em se manter uma inclinação constante das faces na construção de pirâmides, pode ter levado os egípcios a utilizar um conceito equivalente ao de cotangente, conforme visto anteriormente.

Denominada Plimpton 322, uma tableta datada do período babilônico antigo (1900 a 1600 a.C. aproximadamente), mostra, em seus registros, que há um significado matemático que talvez se relacionasse com uma espécie de trigonometria inicial.

Figura 2.2: Plimpton 322



Fonte: https://steemkr.com/mathematics/@citylogic/babylonian-tablet-plimpton-322-will-make-studying-maths-easier

Dada uma análise da imagem da Plimpton 322, conforme figura 2.3, podemos supor que ela era parte de uma tableta maior, vista pela quebra ao longo da margem esquerda. A parte que resta contém 4 colunas de números dispostos em quinze linhas horizontais. A coluna da direita contém os números de um a quinze o qual evidencia uma ordem dos itens nas outras três colunas.

Figura 2.3: Transcrição da Plimpton 322

1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
1,48,54,1,40	1,5	1,37	5
1,47,6,41,40	5,19	8,1	6
1,43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
1,41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
1,38,33,36,36	8,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45,0	1,15,0	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
1,27,0,3,45	2,41	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
1,23,13,46,40	56	1,46	15

Fonte: Boyer (1974)

Mesmo que nem egípcios e nem babilônios tenham introduzidos medidas de ângulos no sentido moderno, as linhas na Plimpton 322 não estão dispostas ao acaso, os números ali registrados estão bem próximos dos valores de sec²Â quando Â decresce por graus de 45° a 31°.

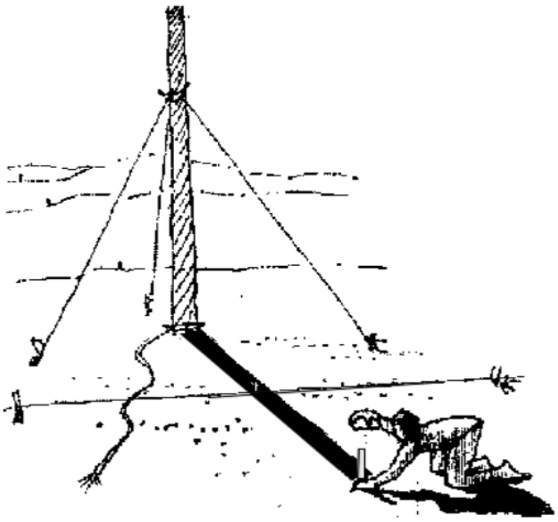
Para EVES (2008, p.66), "parece altamente provável que houvesse tabuas acompanhantes que davam informações análogas para ângulos variando de 0° a 15° e de 16° a 30°".

Foi também encontrada, no Oriente, vestígios de uma Trigonometria primitiva. Na China, por volta de 1110 a. C. para medir distâncias, comprimentos e profundidades eram usados triângulos retângulos.

Na literatura chinesa encontra-se uma passagem traduzida como: "O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnomon", mostrando que a Trigonometria plana já era conhecida na China no segundo milênio a. C. (COSTA, 1997).

No entanto, *gnomon* era também o nome dado, pelos gregos, ao relógio do Sol, que fora utilizado primeiramente pelos egípcios, por volta de 1500 a. C. e só chegou aos chineses através dos babilônios, a figura 2.4 representa o funcionamento de gnomon.

Figura 2.4: O gnomon



Fonte: http://williamcalvin.com/img/gnomon.gif

A Grécia produziu grandes sábios, os quais dentre eles Tales (625 - 546 a.C.), com seus estudos de semelhança que embasam a Trigonometria, e seu discípulo Pitágoras (570 - 495 a.C.), o qual atribui-se que tenha feito a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: "Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos". Deste teorema deriva a relação fundamental da Trigonometria (COSTA,1997).

Depois de Pitágoras aparecem na história da Matemática alguns matemáticos e filósofos muito importantes como: Platão (428-348 a. C.), Aristóteles (384-322 a. C.) e também Euclides que viveu por volta de 300 a.C. Euclides escreveu o mais antigo trabalho matemático grego ainda intacto, *Os Elementos*. Neste trabalho aparecem as leis de Cossenos para ângulos obtusos e agudos, respectivamente, enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonométrica.

De fato, nas obras de Euclides, a Trigonometria, no sentido estrito da palavra, não existe, porém existem teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas que podemos associá-las.

Para Boyer (1974),

> "as proposições II.12 e II.13 de Os elementos, por exemplo, são as leis de cossenos para ângulos obtuso e agudo respectivamente enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonométrica, e são provadas por método semelhante ao usado por Euclides para o teorema de Pitágoras" (BOYER, 1974, p.116).

Por volta de 287 a.C. viveu Arquimedes o qual é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos (COSTA,1997).

Dizem os árabes que o "teorema sobre a corda quebrada" atribui-se a Arquimedes, pelo fato dele ter desenvolvido várias provas para esse teorema. Não sabemos ainda se ele viu algum significado trigonométrico no teorema, mas tal teorema servia como uma fórmula análoga à $sen(x-y) = sen(x)\cos(y) - \cos(x)\,sen(y)$ e até mesmo para se obter outras identidades.

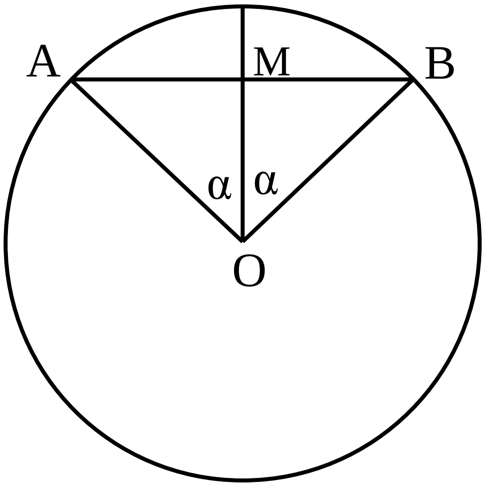
Outro matemático e astrônomo muito talentoso o qual se tem registro foi Eratóstenes (276 - 194 a.C.), na sua realização matemática mais importante, descobriu que a medida da circunferência da Terra deve ter pouco menos que cinquenta vezes a distância entre as cidades de Siena e Alexandria, para isso utilizou-se da igualdade entre ângulos.

Nessa época, destacou-se também, Aristarco de Samos (310-230 a.C.), que além de fazer observações que levariam a introdução sistemática do círculo em 360º, também observou a razão da distância entre Sol-Terra e Sol-Lua utilizando geometria trigonométrica. Ele procurou determinar a distância Terra-Lua em relação à distância Terra-Sol, considerando o triângulo retângulo formado por esses três astros quando metade da Lua é iluminada pelo Sol. Mostrando-nos que o ângulo entre a Lua ao Sol e da Lua a Terra formam um ângulo de 90°.

Durante a segunda metade do século segundo a. C. foi compilada a que se presume ser a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Niceia (190-120 a.C.), que assim passou ser chamado de “o pai da Trigonometria”.

Segundo Eves (2008), foi Hiparco, ou talvez Hipsicles, quem introduziu a divisão do círculo em 360 partes, ou seja, 360º. Hiparco teria escrito um tratado em doze livros que se ocupa da construção de uma tábua de cordas, onde relacionava um arco arbitrário e sua corda. Nota-se que existe uma equivalência a uma tábua de senos trigonométricos, conforme podemos concluir na figura 2.5 abaixo:

Figura 2.5: Senos Trigonométricos



Fonte: Eves (1974)

$$\frac{corda\ de\ 2\alpha}{2r} = \frac{\overline{AB}}{diâmetro\ do\ círculo} = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = sen\ \alpha$$

Por volta de 100 d.C. surge Menelaus de Alexandria (70-130) com uma de suas obras, a Sphaerica, composta por 3 livros, onde no livro III descreve o “Teorema de Menelaus” como parte do que é essencialmente Trigonometria Esférica. Este trabalho é considerado como um foco de luz intensa sobre o desenvolvimento da Trigonometria.

Segundo Boyer (1974) o teorema de Menelaus desempenhou papel fundamental na Trigonometria Esférica e na Astronomia, mas de longe a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade foi a *Syntaxis matemática*, obra de treze livros escrita por Ptolomeu de Alexandria (90-168) cerca de meio século depois de Menelaus.

Segundo Eves (2008)

> O trabalho grego definitivo sobre astronomia foi escrito por Cláudio Ptolomeu de Alexandria, por volta de 150 d.C. Baseado nos escritos de Hiparco, esse tratado de influência científica rara é famoso por sua compacidade e elegância. Posteriormente, para distingui-lo de trabalhos menores sobre astronomia, os comentadores associaram a ele o superlativo *magiste* ou "o maior". Mais tarde ainda, os tradutores árabes fizeram preceder essa designação do artigo (de sua língua) *al* e daí em diante o trabalho passou a ser conhecido como Almagesto (EVES, 2008, p.204).

O Almagesto era composto por 13 livros escritos por Ptolomeu, dos quais o primeiro livro, nos capítulos 10 e 11, desenvolveu o estudo da Trigonometria. No Almagesto não existe nenhuma tabela contendo as funções seno e cosseno, o que se tem no capítulo 11 é uma tabela com a função corda do arco x, ou crd x. A função corda do arco x era dada como o comprimento da corda que corresponde a um arco de x graus em um círculo cujo raio é 60. O capítulo 10 explica como tal tabela pode ser calculada.

No Almagesto temos, entre outros dados, uma tabela mais completa que a de Hiparco, com ângulos de meio em meio grau, de 0° a 180° e uso da base 60, com a circunferência dividida em 360 graus e o raio em 60 partes e frações sexagesimais.

Contudo, por volta do século IV d. C., a matemática grega enfraqueceu. Durante esse período entre guerras e combates, as condições não favoreciam as atividades intelectuais, ficando a matemática um pouco de lado.

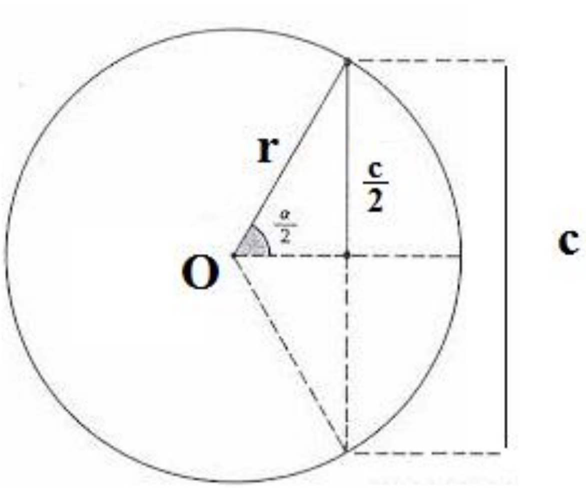
Assim, o centro da cultura começou a se deslocar para a Índia, onde a tradição matemática cresceu e floresceu. A contribuição dos Hindus revolucionou a Trigonometria com um conjunto de textos denominados *Siddhantas*, que significa sistemas de Astronomia.

Os autores dos *Siddhantas* realizaram o estudo da correspondência entre a metade de uma corda de um circulo e metade do ângulo subentendido no centro pela corda toda. Assim, nasceu na Índia a precursora da função trigonométrica que chamamos seno de um ângulo e a introdução da função seno representa a contribuição mais importante dos *Siddhantas* à história da Matemática.

No texto de *Surya Siddhanta*, que quer dizer Sistemas do Sol, de aproximadamente 400 d.C, contém poucas explicações e nenhuma prova, pois os hindus diziam que o autor do texto foi Surya, o deus do Sol, logo sendo escrito por um Deus, seria muita pretensão exigir provas.

Por não seguir o mesmo caminho de Ptolomeu, o *Surya Siddhanta* abriu novas perspectivas para a Trigonometria, pois ele usava a relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de *jiva*, veja na figura 2.6 a seguir:

Figura 2.6: Representação de *jiva*



Fonte: Costa (1997, p.9)

Segundo Costa (1997) “definiam o *jiva* como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa”.

$$jiva\,\frac{\alpha}{2} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r} = \frac{1}{2r} corda\ de\ \alpha$$

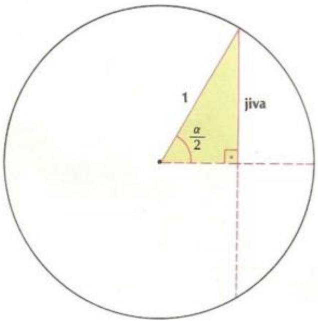
Logo depois da composição dos Siddhantas, outro importante matemático hindu chamado Aryabhata (476-550) escreveu em 499 d. C. sua obra mais conhecida, intitulada Aryabhatiya, um pequeno volume que além de outros resultados, continha tabelas que remetiam a resultados da função seno.

Boyer (1974, p. 153) afirma que “as mais antigas tabelas da função seno que se preservaram são as do *Siddhantas* e do *Aryabhatiya*”. A trigonometria hindu era evidentemente um instrumento útil e preciso para a astronomia (BOYER, 1974).

Com a expansão do império muçulmano, por volta de 850 d. C., esse povo teve um grande avanço no campo das artes e das ciências o que proporcionou uma nova era de criatividade matemática e cientifica.

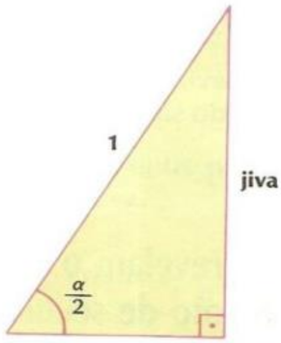
Segundo Eves (2008), um dos mais importantes estudiosos árabes foi Mohamed-bem-Geber, conhecido como Al-Battani (aproximadamente 850-929) que adotou a Trigonometria hindu introduzindo o círculo de raio unitário e, com isso, demonstrou que *jiva* é uma razão válida para qualquer triângulo retângulo, independente da hipotenusa conforme mostram as figuras 2.7 e 2.8 a seguir.

Figura 2.7: *Jiva* e o círculo de raio unitário



Fonte: Guelli (1995)

Figura 2.8: Triângulo retângulo e a razão *jiva*



Fonte: Guelli (1995)

Depois de Al-Battani, outro digno de nota entre os matemáticos árabes foi Abûl Wêfa (940-998) que, em 980, iniciou uma organização e uma sistematização de provas e teoremas de Trigonometria. Destaca-se também o astrônomo persa Nasîr ed-dên al-Tûsî, que em 1250 escreveu o primeiro trabalho no qual a Trigonometria plana apareceu como uma ciência por ela própria, desvinculada da Astronomia.

Ainda sobre as contribuições árabes para a Trigonometria, uma das mais importantes seria quanto à etimologia da palavra seno.

Segundo Eves,

> Aryabhata usava *ardhā-jyā* ("semicorda") e também j yā-ardhā ("corda metade") e por brevidade escrevia apenas *jyā* ("corda"). Partindo de *jyā* os árabes foneticamente derivaram *jiba* que, de vido à prática entre eles de se omitir as vogais, se escrevia *j b*. Afora seu significado técnico, hoje *jiba* é uma palavra que não tem sentido em árabe. Posteriormente, escritores que se depararam com *jb* como abreviação da palavra sem sentido *jiba* passaram a usar *jaib* que faz parte do vocabulário árabe e que significa "enseada" ou " baía". Mais tarde ainda, ao fazer a tradução de *jaib* para o latim, Gerardo de Cremona empregou o equivalente latino *sinus*, de onde vem nossa palavra atual seno (EVES, 2008, p. 267).

Por volta do século XIII surge Leonardo Fibonacci (1170-1250), dado como um dos matemáticos mais talentosos da Idade Média. Ele escreveu a obra *Practica geometriae*, de 1220, uma coleção sobre Geometria e Trigonometria.

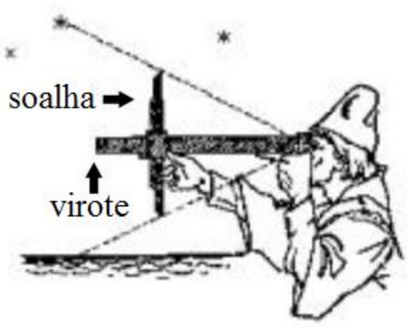
No século XV, as atividades matemáticas centraram-se nas cidades italianas e nas cidades de Nuremberg, Viena e Praga na Europa Central e giraram em torno da Aritmética, da Álgebra e da Trigonometria.

A Trigonometria, cada vez mais, passa a ser utilizada em situações práticas ao desenvolvimento das nações. Durante os séculos XV e XVI, período das Grandes Navegações, os europeus, em especial portugueses e espanhóis, se lançavam aos mares buscando novas rotas marítimas para as Índias. As navegações da época dos descobrimentos dependiam basicamente de conhecimentos astronômicos. Os instrumentos náuticos eram fundamentais para ajudar na localização das embarcações e determinar distâncias percorridas no mar. Dentre os instrumentos criados destacam-se alguns cujos funcionamentos tinham por base a trigonometria e cujos objetivos eram saber onde se encontrava a embarcação, determinando a distância entre o ponto de partida e o local onde se encontrava, baseando-se na altura da estrela Polar ou na inclinação do Sol.

A ***Balestilha*** tinha a função de medir a altura do astro em relação à linha que delimita o mar do horizonte, ou a distância entre dois astros, sendo essa medida de caráter angular. Foi o primeiro instrumento a usar o horizonte do mar e apareceu após o astrolábio e o quadrante.

Para medir a altura de uma estrela, colocava-se o olho na extremidade do virote e deslocava-se a soalha de modo que a aresta superior coincida com a estrela e a inferior com o horizonte, conforme figura 2.9 abaixo. A altura da estrela é dada pela leitura do número escrito no ponto do virote onde fica a soalha. Tal procedimento nada mais é do que a aplicação de razões trigonométricas no triângulo retângulo, bem como a noção de semelhança de triângulos.

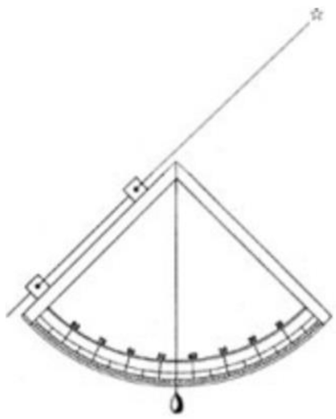
Figura 2.9: Uso da Balestilha



Fonte:www.cienciaviva.pt/projectos/concluidos/inventions/instrumentos.asp

O ***Quadrante Náutico*** foi um dos primeiros instrumentos utilizados pelos navegadores portugueses para determinar a localização das embarcações que viajaram mar adentro e perdiam contato visual com referências terrestres. Esse instrumento tem a forma de um quarto de círculo, possui dois pinos para realizar a visualização de um astro celeste e um fio de prumo para medir o ângulo. A medida efetuada determina o ângulo formado, pela Estrela Polar ou pelo Sol, com o horizonte.

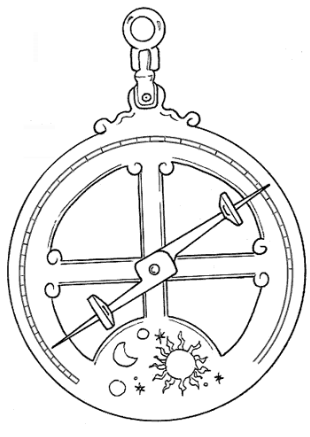
Figura 2.10: Quadrante Náutico



Fonte: http://cvc.instituto-camoes.pt/navegaport/a28.html

O ***Astrolábio Náutico*** trata-se de um resultado prático de diversas teorias matemáticas que foram desenvolvidas pelos gregos, mas principalmente por Hiparco, e Ptolomeu, que o difundiu em seu trabalho famoso denominado Almagesto. O aparelho, dado na figura 2.11 abaixo, tinha como função a medição da altura e posição dos astros, o que era útil para a navegação marítima. Ele, no entanto, não tinha seu uso restrito à sua utilização no meio naval, mas também poderia ser usado como forma de registrar o tempo e, inclusive, gerar horóscopos.

Figura 2.11: Astrolábio Náutico



Fonte: http://www.midisegni.it/Port/storia_exploracao.shtml

Um matemático desse período é Regiomontanus (1436-1476), tido como o mais capaz e influente matemático do século XV. Segundo Eves (2008), ele escreveu *De triangulis omnimodis* que tratava da primeira exposição europeia sistemática de Trigonometria plana e esférica, tratando como uma ciência independente da astronomia, tal obra marcou o renascimento da Trigonometria. Neste tratado, ele calculou novas tábuas trigonométricas, melhorando as de seno e introduzindo na Trigonometria europeia o uso de tangentes, fazendo uso delas em suas tábuas na obra *Tabulae directonum*, vista como a primeira obra impressa sobre Trigonometria com data anterior a 1485.

Nessa época, a ideia de cosseno era vista apenas como seno do complementar, ou seja, não existia uma denominação para cosseno. Para achar o valor deste, buscava-se usar o complementar do ângulo considerado. No século seguinte o cosseno passou a ser chamado de *sinus complementi*, e depois passou a ser apenas *co.sinus* e por fim *cosinus*.

Nicolau Copérnico (1473-1543), um astrônomo polonês, produziu o célebre tratado *De revolutionibus orbium coelestium*, publicado em 1543. Nele contém secções substanciais sobre Trigonometria, os quais são semelhantes ao do *De triangulis* de Regiomontanus.

No entanto, foi Georg Joachim Rheticus (1514-1574), aluno de Copérnico, quem publicou o tratado *Opus palatinum de triangulis*, juntando as ideias de seu professor as de Regiomontanus, considerado como o mais elaborado tratado de Trigonometria escrito até hoje. Nele, Rheticus abandonou a tradicional consideração de funções relativas ao arco de círculo e passou a considerar triângulos retângulos, ou seja, foram consideradas como funções de ângulos e entendidas como razões.

A maior parte da Europa ocidental participava agora do desenvolvimento da Matemática. Uma figura central na transição foi o francês François Viète (1540-1603), cuja vasta obra compreende trabalhos de Trigonometria, Álgebra e Geometria. Foi ele quem trouxe um tratamento analítico à Trigonometria (EVES, 2008).

Seu trabalho em *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579) gerou contribuições notáveis à Trigonometria. Talvez tenha sido o primeiro livro na Europa Ocidental a desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos planos e esféricos com o auxílio das seis funções trigonométricas.

Foi no ano de 1595 que Bartholomaus Pitiscus (1561-1613) publicou o primeiro livro que traz em seu título a palavra Trigonometria, conforme a figura 2.12, ficando marcado como o inventor desta palavra (REIS, 2016). Nesta obra havia aperfeiçoamentos das tabelas de Rheticus e mostra que a Trigonometria pode ser usada para resolver problemas práticos que envolvem triângulos sobre a terra, deixando de ser meramente uma parte de astronomia para servir como tópicos matemáticos com diferentes aplicações.

Figura 2.12: Livro de Pitiscus

Fonte: Wikipedia (2019)

Durante o século XVII, se abriram novos campos para a atividade matemática. John Napier (1550-1617) um matemático escocês que escreveu duas fórmulas trigonométricas para resolver triângulos esféricos obliquângulos, escreveu e determinou tabelas de logaritmos de funções trigonométricas que foram usadas durante quase um século. Napier também fez contribuições à trigonometria esférica e encontrou expressões exponenciais para funções trigonométricas.

No ano de 1626, Albert Girard (1595-1632) publicou uma obra no qual verifica-se o mais antigo uso das abreviações *sin*, *tan* e *sec* para seno, tangente e secante.

No entanto é apenas a partir de Leonhard Euler (1707-1783) que a Trigonometria toma sua forma atual. Isso é visível quanto às abreviações *sin*, *cos*, *tang*, *sec* e *cosec*, que foram usados por Euler na *Introductio in Analysin Infinitorum*, de 1748. O tratamento analítico das funções trigonométricas deste livro foi considerado a obra chave da Análise matemática. O seno, por exemplo, já não era um segmento de reta; era simplesmente um número ou uma razão – a ordenada de um ponto sobre um círculo unitário.

Enfim, a Trigonometria iniciada como um campo da agrimensura e astronomia, explorada e aplicada durante o período das grandes navegações e, ao final, transformada em uma parte da análise matemática, mostra a sua grande importância no desenvolvimento da história da Matemática. Surgida através das necessidades e desenvolvida com a contribuição de muitos matemáticos, a Trigonometria teve um longo caminho percorrido até chegar aos moldes que se trabalha em sala de aula hoje em dia. Ao ensinar Trigonometria, de alguma forma deve-se discutir com os alunos que o conhecimento matemático não era algo pronto e sim construído ao longo de muitos séculos, aplicando-se hoje em diversas áreas.

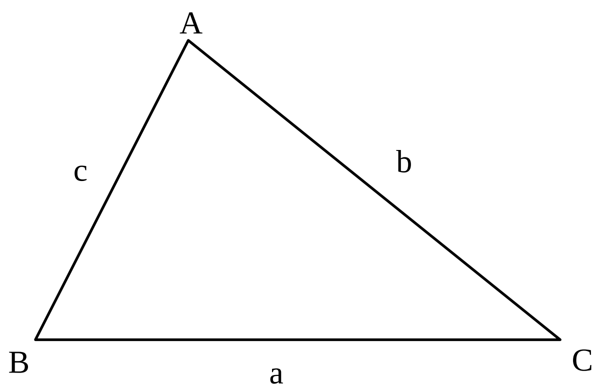
3 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capitulo adotaremos os conceitos, teoremas e algumas convenções que serão necessários para desenvolver as demonstrações. Em razão do objetivo desse trabalho, pressupõe-se a importância de indicar alguns resultados e notações que serão utilizadas durante todo o desenvolvimento desse trabalho para um melhor acompanhamento dos resultados obtidos.

3.1 Triângulo

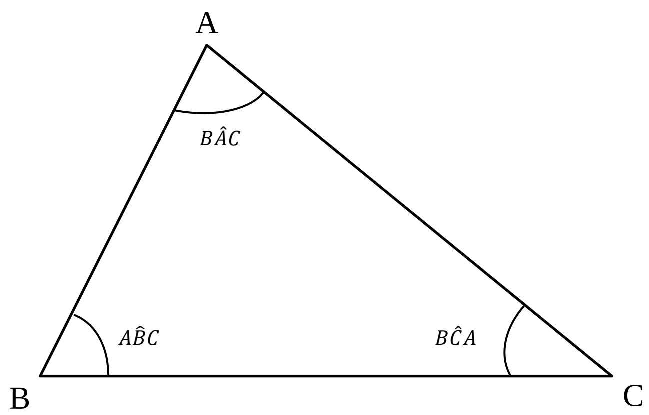
Definição 3.1.1: Dados três pontos não colineares A, B e C, a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se triângulo ABC. Os segmentos $\overline{AB}$ = c, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ chamam-se lados do triângulo ABC.

Figura 3.1: Triângulo ABC de lados a, b e c.



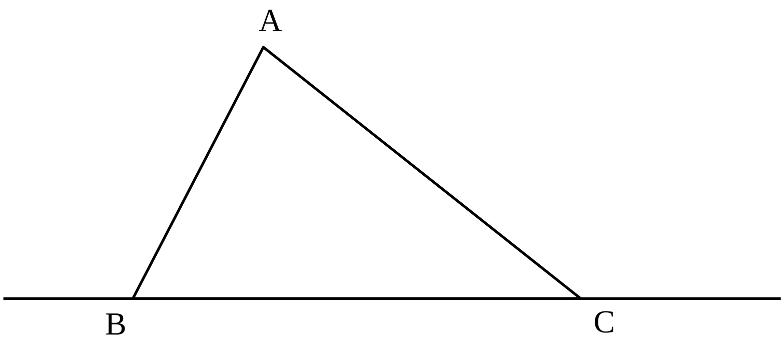
Definição 3.1.2: Os ângulos $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$ são os **ângulos internos** do triângulo ABC, ou seja, são os ângulos entre os lados de um triângulo.

Figura 3.2: Ângulos internos do triângulo ABC



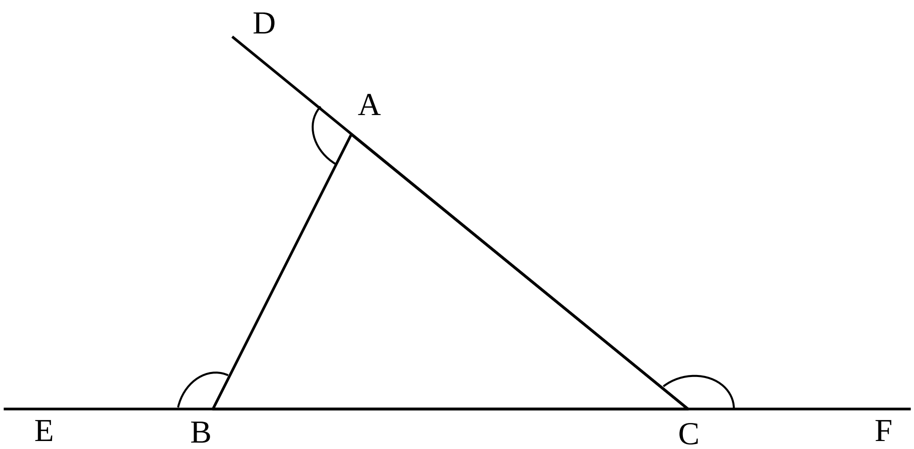
Definição 3.1.3: No triângulo ABC, chama-se $\overleftrightarrow{BC}$ a **reta suporte** do lado BC, a qual contém $\overline{BC}$.

Figura 3.3: Reta suporte do lado BC



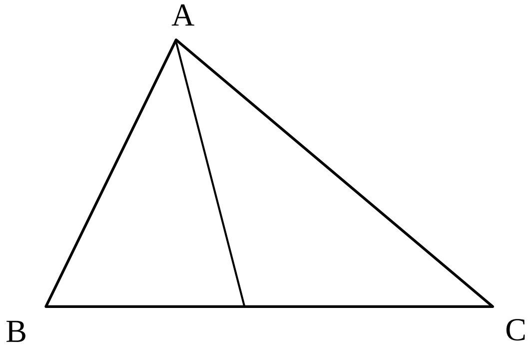
Definição 3.1.4: No triângulo ABC, temos $B\hat{A}D$, $A\hat{B}E$ e A$\hat{C}F$ como ângulos suplementares a $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$, respectivamente, chamados de **ângulos externos** do triângulo ABC.

Figura 3.4: Ângulos externos do triângulo ABC



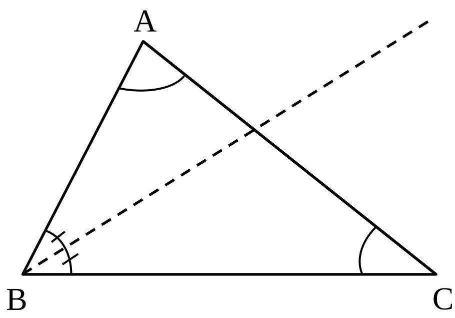
Definição 3.1.5: Em um triângulo ABC qualquer, chamam-se de **cevianas** as linhas que partem dos vértices do triângulo até ao seu lado oposto.

Figura 3.5: Exemplo de uma ceviana do triângulo ABC



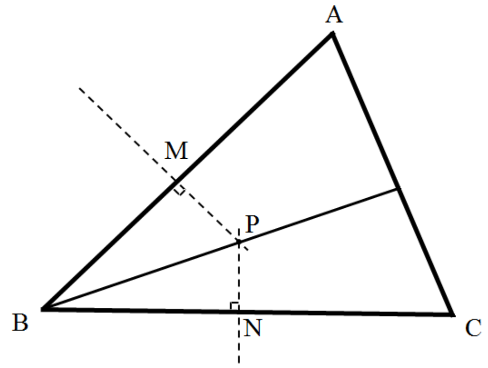
Definição 3.1.6: Dado um triângulo ABC qualquer, chama-se de **bissetriz interna** a semirreta de origem em um vértice do triângulo a qual divide um de seus ângulos internos em dois ângulos de mesma medida.

Figura 3.6: Bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$



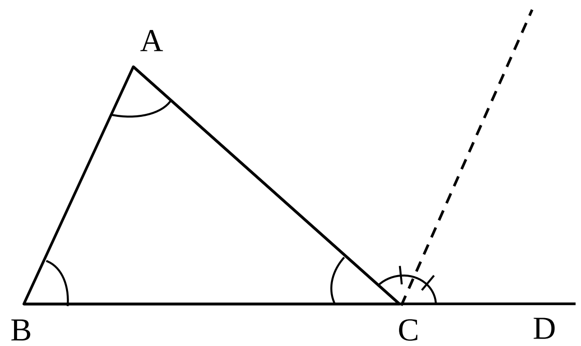
Definição 3.1.7: Dado um triângulo ABC qualquer. Tome $A\hat{B}C$ como um dos seus ângulos internos. Então P é um ponto pertencente à bissetriz de $A\hat{B}C$ se, e somente se, $d(P,\ \overline{AB}) = d(P,\ \overline{BC})$.

Figura 3.7: Ponto P pertencente à bissetriz de $A\hat{B}C$



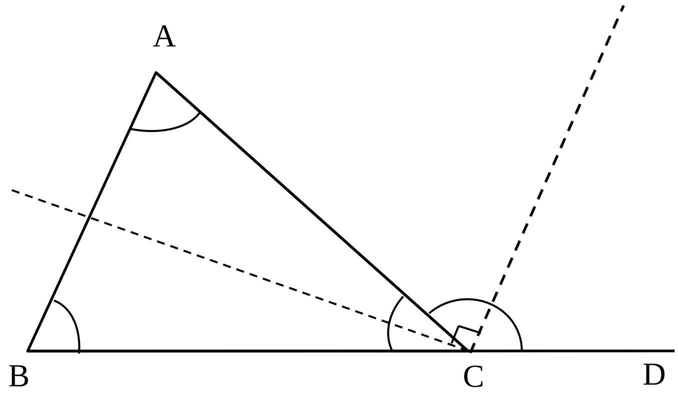
Definição 3.1.8: Dado um triângulo ABC, chama-se de **bissetriz externa** a semirreta de origem em um vértice a qual divide um de seus ângulos externos em dois ângulos de mesma medida.

Figura 3.8: Bissetriz externa do triângulo ABC



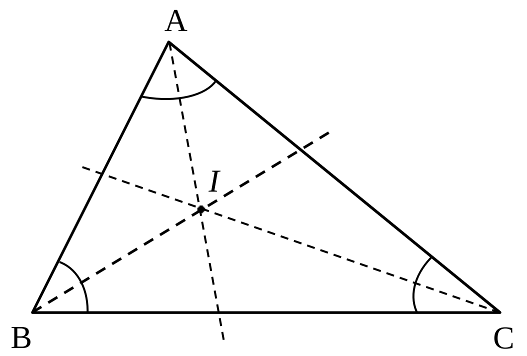
Definição 3.1.9: A soma do ângulo formado pelas bissetrizes interna e externa de um mesmo ângulo é 90°.

Figura 3.9: Soma das bissetrizes internas e externas do ângulo $A\hat{C}B$



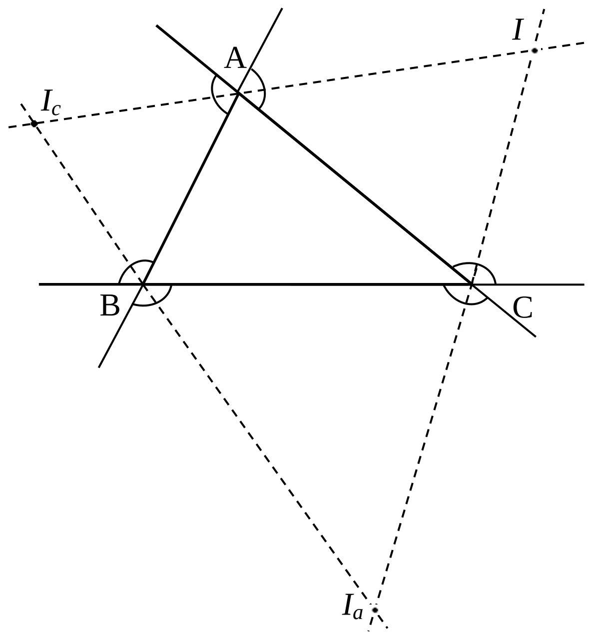
Definição 3.1.10: O ponto *I* de intersecção das bissetrizes internas de um triângulo ABC é denominado **Incentro**.

Figura 3.10: Incentro do triângulo ABC



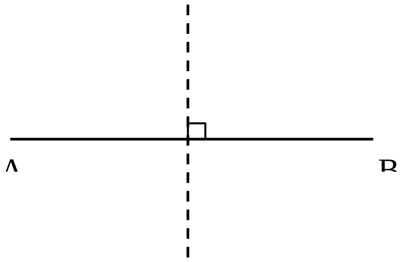
Definição 3.1.11: O ponto de intersecção das bissetrizes externas de um triângulo ABC é denominado **Ex-incentro**. Em todo triângulo temos três ex-incentros.

Figura 3.11: Ex-incentros do triângulo ABC



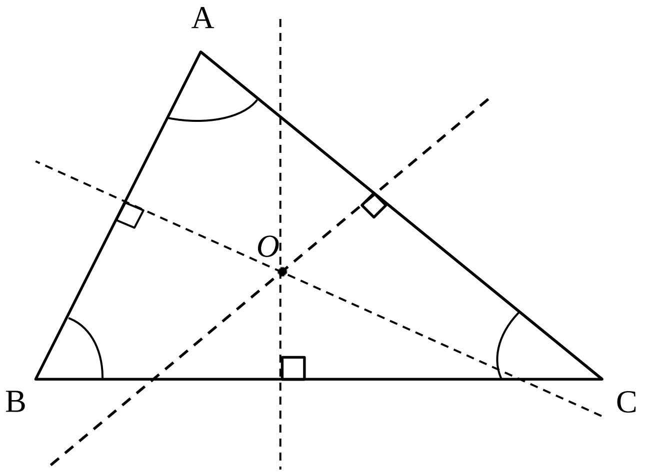
Definição 3.1.12: Denomina-se **mediatriz** de um segmento $\overline{AB}$ a reta perpendicular à $\overline{AB}$ que passa pelo seu ponto médio.

Figura 3.12: Mediatriz do segmento $\overline{AB}$



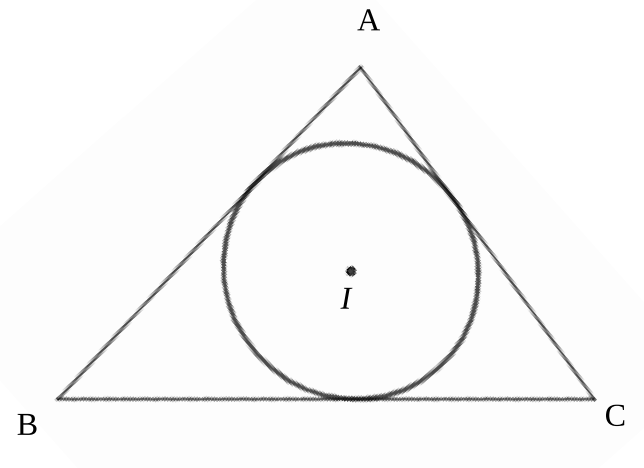
Definição 3.1.13: Em um triângulo ABC o ponto *O* de intersecção das mediatrizes de seus lados é denominado **circuncentro**.

Figura 3.13: Circuncentro do triângulo ABC



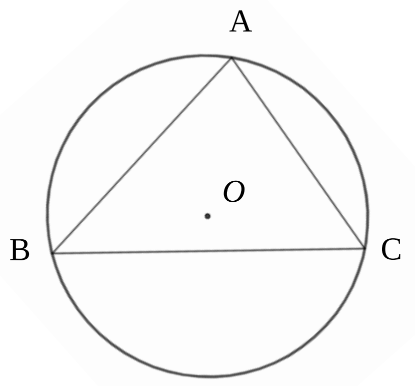
Definição 3.1.14: Denomina-se **circunferência inscrita** a um triângulo ABC a circunferência que tangencia internamente os lados do triângulo. Em um triângulo ABC o incentro *I* é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

Figura 3.14: Centro da circunferência inscrita ao triângulo ABC



Definição 3.1.15: Denomina-se **circunferência circunscrita** a um triângulo ABC a circunferência que contém todos os vértices do triângulo. Em um triângulo ABC o circuncentro *O* é o centro da circunferência que circunscreve o triângulo.

Figura 3.15: Centro da circunferência que circunscreve o triângulo ABC

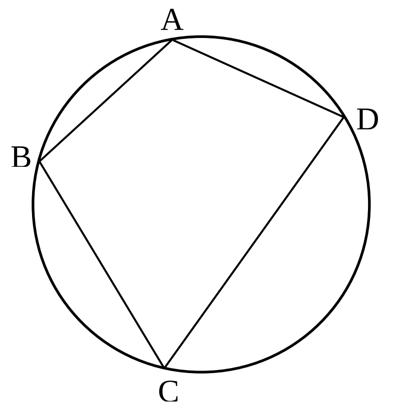


Definição3.1.16: Um quadrilátero convexo ABCD é dito **inscritível** se existir uma circunferência passando por seus vértices. Assim temos as seguintes condições:

(a)$D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180°$

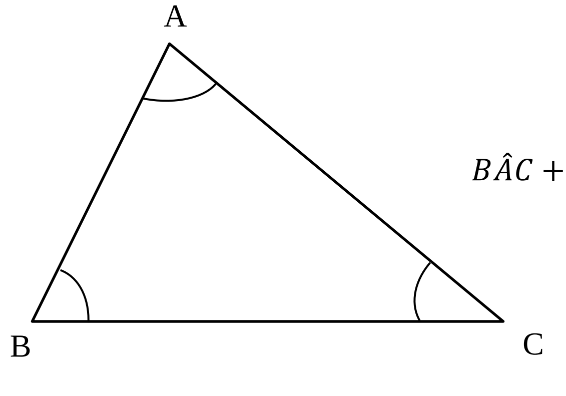
(b) $B\hat{A}C = B\widehat{D}C$

Figura 3.16: Quadrilátero ABCD inscritível



Teorema 3.1.1: Em um triângulo ABC qualquer a soma das medidas dos ângulos internos é 180°.

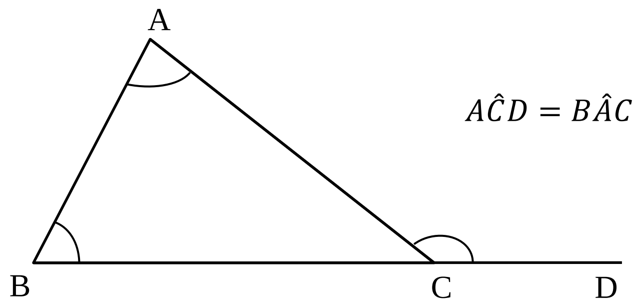
Figura 3.17: Soma doa ângulos internos do triângulo ABC



$$B\hat{A}C + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180° \quad (3.1)$$

Teorema 3.1.2: Em um triângulo ABC qualquer a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Figura 3.18: Ângulo externo do triângulo ABC



$$A\hat{C}D = B\hat{A}C + A\hat{B}C \qquad (3.2)$$

3.2 Tipos de Triângulos

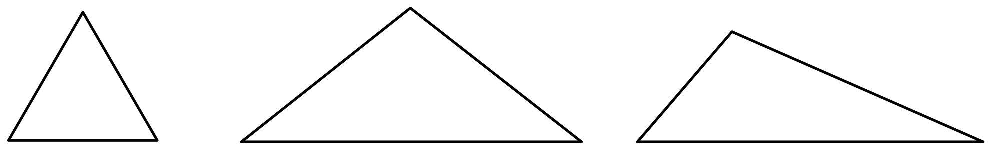
Quanto aos lados temos 3 tipos de classificações para triângulos:

Equilátero: Todos os lados têm medidas iguais.

Isósceles: Pelo menos dois lados têm medidas iguais.

Escaleno: Todos os lados têm medidas diferentes

Figura 3.19: Classificação de triângulos quanto aos lados



equilátero isósceles escaleno

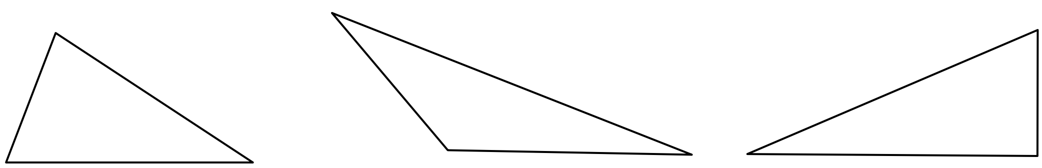
Quanto aos ângulos temos outros 3 tipos de classificações para triângulos:

Acutângulo: Todos os ângulos são agudos, ou seja, menores que 90°.

Obtusângulo: Possui um ângulo obtuso, ou seja, maior que 90°.

Retângulo: Possui um ângulo reto, ou seja, igual a 90°.

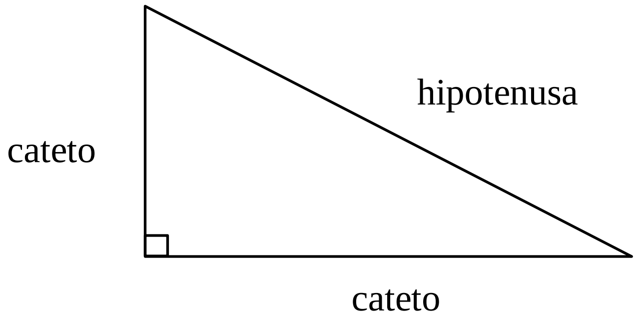
Figura 3.20: Classificação de triângulos quanto aos ângulos



acutângulo obtusângulo retângulo

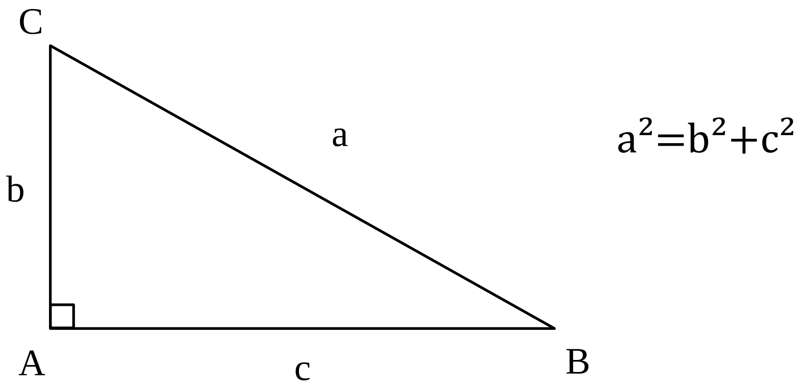
Definição 3.2.1: Em todo triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo de medida de 90° é definido como **hipotenusa**. Os dois lados restantes são denominados **catetos**.

Figura 3.21: Triângulo Retângulo



Teorema 3.2.1: (Teorema de Pitágoras) Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

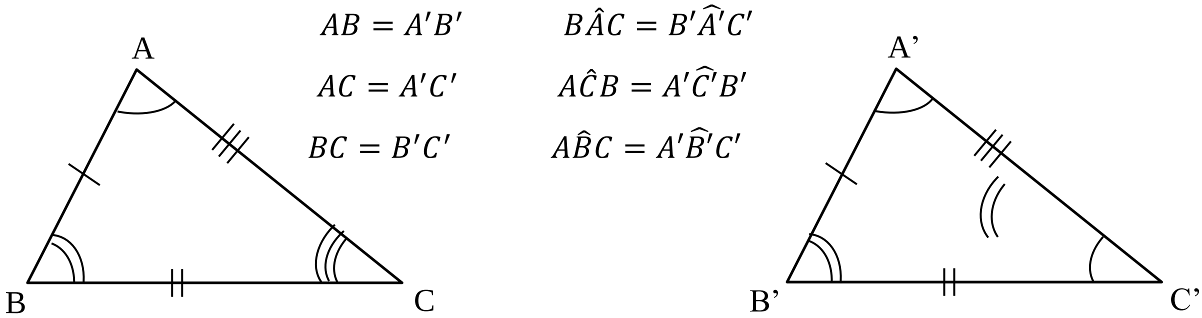
Figura 3.22: Triângulo retângulo ABC



3.3 Casos de Congruências de Triângulos

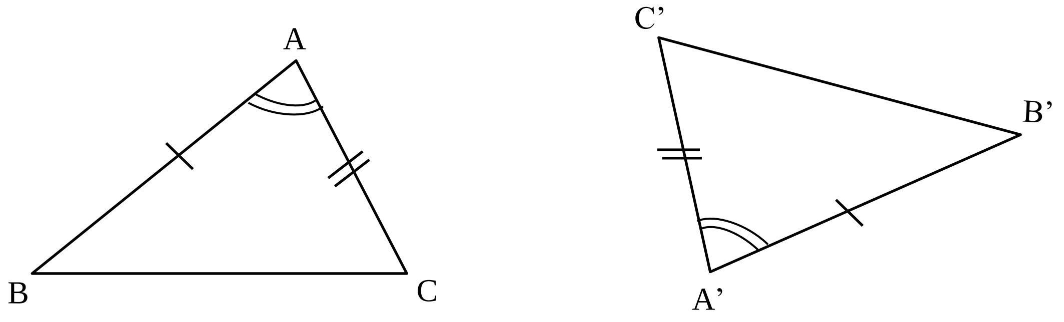
Definição 3.3.1: Dois triângulos são ditos congruentes se os lados correspondentes são iguais e os ângulos correspondentes são congruentes. De fato, não é necessário ter todas as medidas congruentes, como veremos nos casos adiante.

Figura 3.23: Triângulos ABC e A’B’C’ congruentes



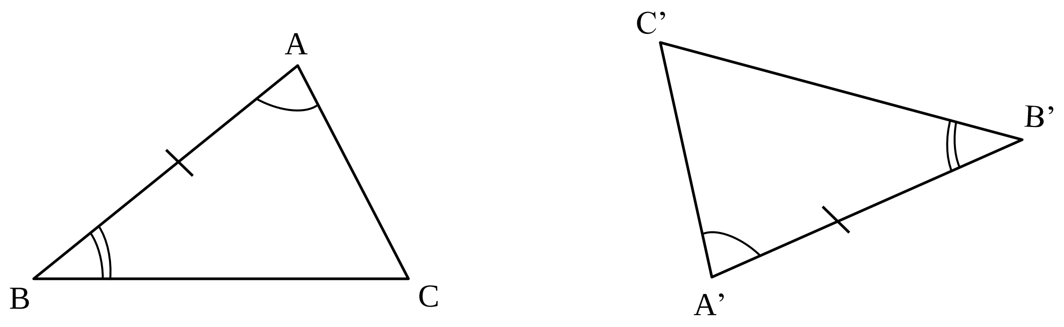
Caso ***LAL*** *(Lado-Ângulo-Lado):* Se dois triângulos têm, ordenadamente, a mesma medida em dois lados correspondentes e no ângulo compreendido entre esses dois lados, então eles são congruentes.

Figura 3.24: Triângulos ABC e A’B’C’ congruentes pelo caso LAL



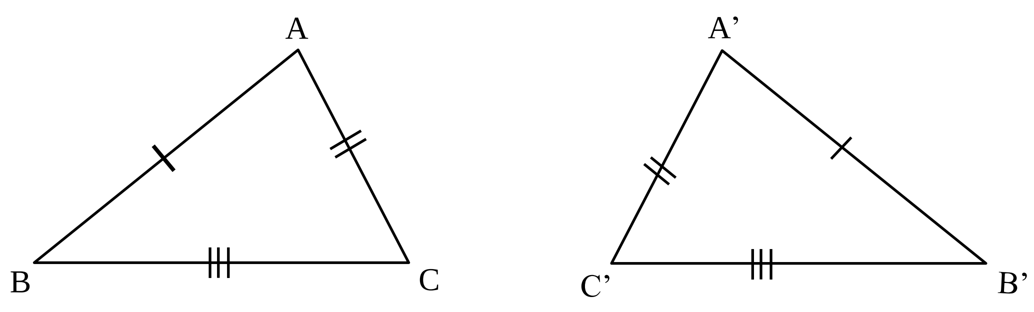
Caso ***ALA*** *(Ângulo-Lado-Ângulo):* Se dois triângulos têm, ordenadamente, a mesma medida em dois ângulos correspondentes e no lado compreendido entre esses dois ângulos, então eles são congruentes.

Figura 3.25: Triângulos ABC e A’B’C’ congruentes pelo caso ALA



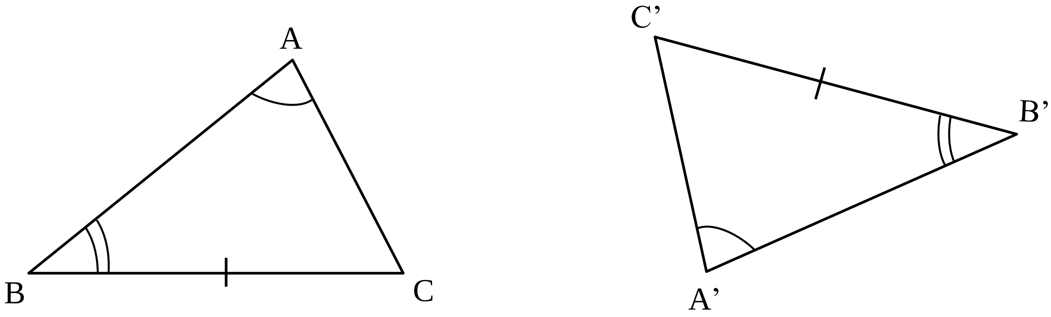
Caso ***LLL*** *(Lado-Lado-Lado):* Se dois triângulos têm, ordenadamente, a mesma medida nos lados correspondentes, então eles são congruentes.

Figura 3.26: Triângulos ABC e A’B’C’ congruentes pelo caso LLL



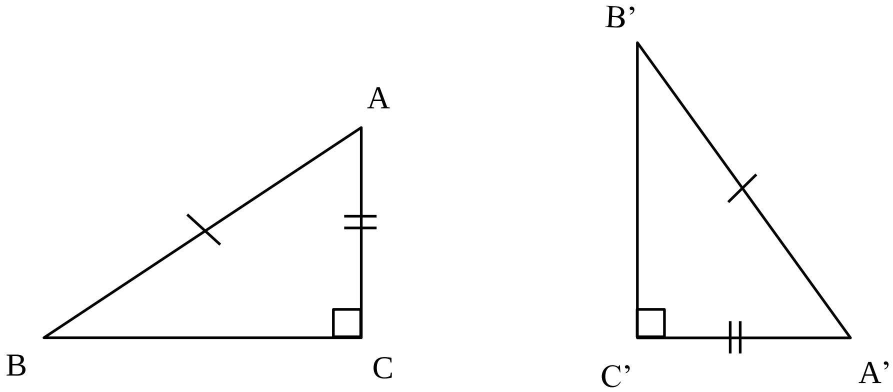
Caso ***LAA$_o$*** *(Lado-Ângulo-Ângulo oposto):* Se dois triângulos têm, ordenadamente, a mesma medida em um lado, no ângulo adjacente a esse lado e no ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes.

Figura 3.27: Triângulos ABC e A’B’C’ congruentes pelo caso LAA$_o$



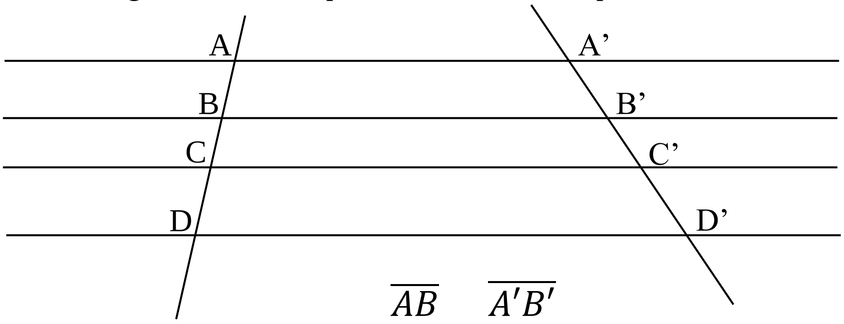
Caso Especial ***CH*** *(Cateto-Hipotenusa):* Se dois triângulos retângulos têm a mesma medida de um cateto e da hipotenusa, então eles são congruentes.

Figura 3.28: Triângulos ABC e A’B’C’ congruentes pelo caso CH



Teorema 3.3.1: *(Teorema de Tales)* Feixes de retas paralelas intersectadas por retas transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes.

Figura 3.29: Retas paralelas intersectadas por duas transversais

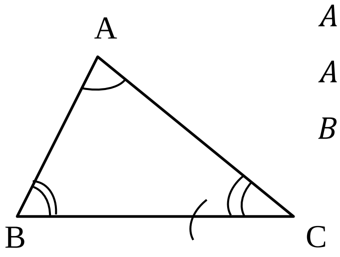


$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

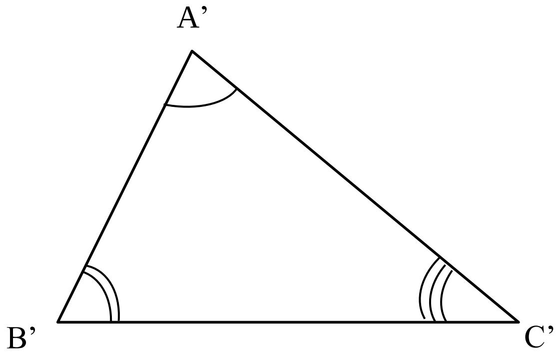
3.4 Casos de Semelhanças de Triângulos

Definição 3.4.1: Dois triângulos são ditos semelhantes se os três ângulos são, ordenadamente, de mesmas medidas e se os três lados correspondentes são proporcionais. De fato, não precisamos ter a ocorrência de todos os casos, o que veremos adiante.

Figura 3.30: Triângulos ABC e A’B’C’ semelhantes

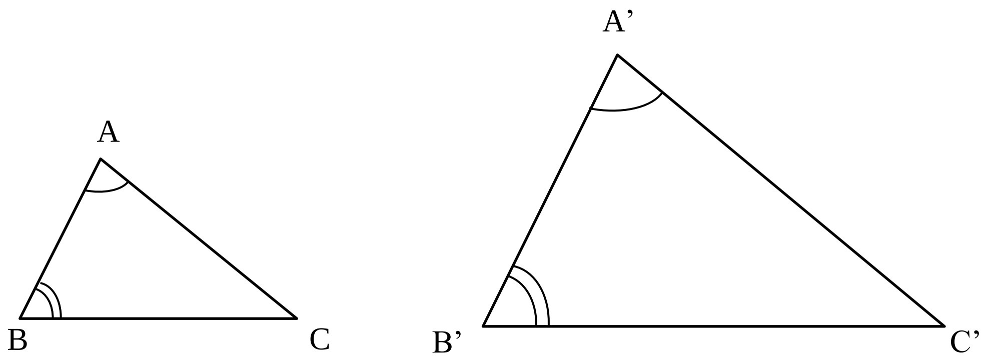


$$A'B' = k.AB$$
$$A'C' = k.AC$$
$$B'C' = k.BC$$



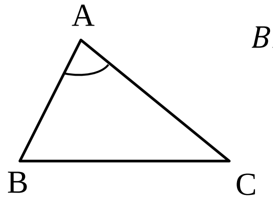
*Caso **AA** (Ângulo-Ângulo):* Se dois triângulos têm, ordenadamente, a mesma medida em dois ângulos correspondentes, então eles são semelhantes.

Figura 3.31: Triângulos ABC e A’B’C’ semelhantes pelo caso AA

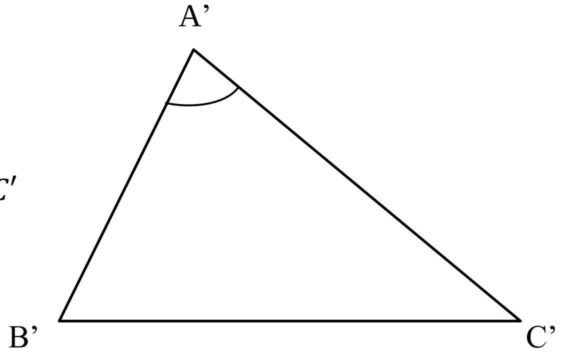


*Caso **LAL** (Lado-Ângulo-Lado):* Se dois triângulos têm, ordenadamente, dois lados correspondentes de medidas proporcionais e a mesma medida do ângulo entres esses lados, então eles são semelhantes.

Figura 3.32: Triângulos ABC e A’B’C’ semelhantes pelo caso LAL

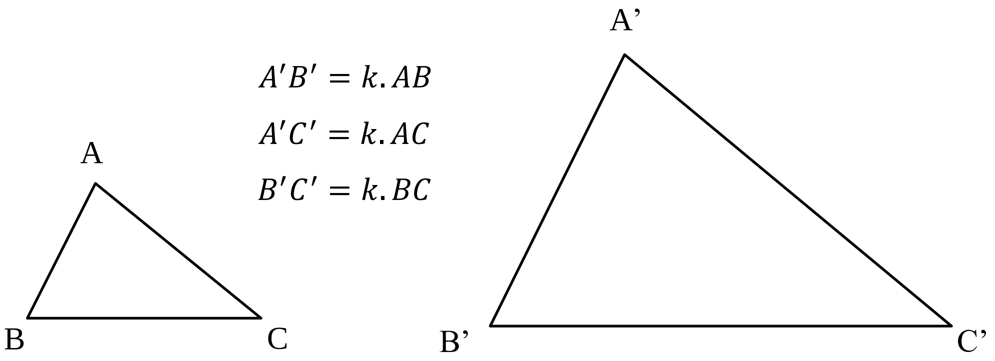


$$A'B' = k.AB$$
$$A'C' = k.AC$$
$$B\hat{A}C = B'\widehat{A'}C'$$



Caso ***LLL*** *(Lado-Lado-Lado):* Se dois triângulos têm, ordenadamente, cada um dos três lados correspondentes de medidas proporcionais, então eles são semelhantes.

Figura 3.33: Triângulos ABC e A’B’C’ semelhantes pelo caso LLL



3.5 Perímetro e Semiperímetro de triângulos

Definição 3.5.1: Dado um triângulo ABC com medidas de lados, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, a soma das medidas dos lados é seu **perímetro**, a qual denotamos por *2p.* Assim, *p* é o **semiperímetro** do triângulo, dado por:

$$p = \frac{a + b + c}{2} \qquad (3.1)$$

3.6 Área de triângulos

Existem diferentes formas para se determinar a área de um triângulo. Nos apropriamos de cada uma delas dependendo dos dados e da situação a qual dispomos. A seguir veremos alguns modos para se obter a área de um triângulo.

Definição 3.6.1: Dado um triângulo ABC de base *b* e altura *h*, obtemos a área *S* do triângulo ABC por:

$$S = \frac{b\ .\ h}{2} \qquad (3.2)$$

Definição 3.6.2: Dado um triângulo ABC com medidas de lados, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, seja α o ângulo entre os lados de medidas a e b, obtemos a área *S* do triângulo ABC por:

$$S = \frac{a \, . \, b \, . \, sen(\alpha)}{2} \tag{3.3}$$

Definição 3.6.3: Dado um triângulo ABC com medidas de lados, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, e semiperímetro *p*. Seja *r* o raio da circunferência que circunscreve o triângulo ABC, obtemos sua área *S* por:

$$S = r \, . \, p \tag{3.4}$$

Definição 3.6.4: Dado um triângulo ABC com medidas de lados, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, seja R o raio da circunferência que circunscreve o triângulo ABC, obtemos sua área *S* por:

$$S = \frac{a \, . \, b \, . \, c}{4R} \tag{3.5}$$

Definição 3.6.5: (*Fórmula de Heron*) Dado um triângulo ABC com medidas de lados, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Dado o semiperímetro *p*, obtemos a área *S* do triângulo ABC por:

$$S = \sqrt{p \, . \, (p - a) \, . \, (p - b) \, . \, (p - c)} \tag{3.6}$$

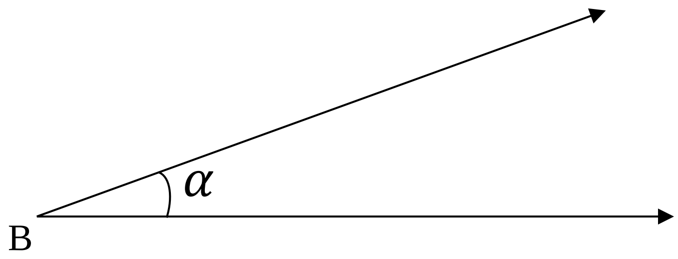
4 TRIGONOMETRIA BÁSICA

A seguir apresentamos os principais conceitos desenvolvidos em Trigonometria durante os ensinos fundamental e médio que serão utilizados como bases e referências para o desenvolvimento dos teoremas e identidades propostos neste trabalho.

4.1 Razões trigonométricas de um ângulo agudo

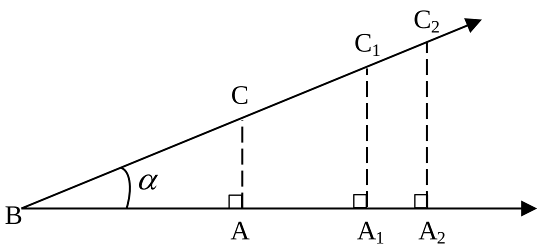
Considere o ângulo de medida α, que iremos daqui em diante denominar apenas por α, de vértice B, indicado na figura abaixo:

Figura 4.1: ângulo agudo α.



Sobre um dos lados do ângulo agudo α, tomamos arbitrariamente os pontos A, A_1, A_2, ... e por esses pontos traçamos perpendiculares ao lado $\overrightarrow{BA}$ que encontram o outro lado do ângulo nos pontos C, C_1, C_2, ..., respectivamente.

Obtemos, assim, os triângulos retângulos ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, ... que têm α em comum e $\hat{A} = \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 90°$, pelo caso de semelhança ângulo-ângulo, todos semelhantes entre si. Podemos, a partir deles, estabelecer as seguintes proporções:



$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = ... = k_1$$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = ... = k_2$$

$$\frac{AC}{BA} = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = ... = k_3$$

Note que as constantes k_1, k_2 e k_3 não dependem do triângulo considerado, mas dependem somente do ângulo α. Ou seja, as constantes k_1, k_2 e k_3 não dependem dos pontos A, A_1, A_2, ... só variam quando variar o ângulo α.

O número $\mathbf{k_1}$, assim obtido, é chamado **seno do ângulo agudo** α e é indicado por:

$$sen\ (\alpha) = \frac{AC}{BC} \qquad (4.1)$$

O número $\mathbf{k_2}$, assim obtido, é chamado **cosseno do ângulo agudo** α e é indicado por:

$$\cos\ (\alpha) = \frac{BA}{BC} \qquad (4.2)$$

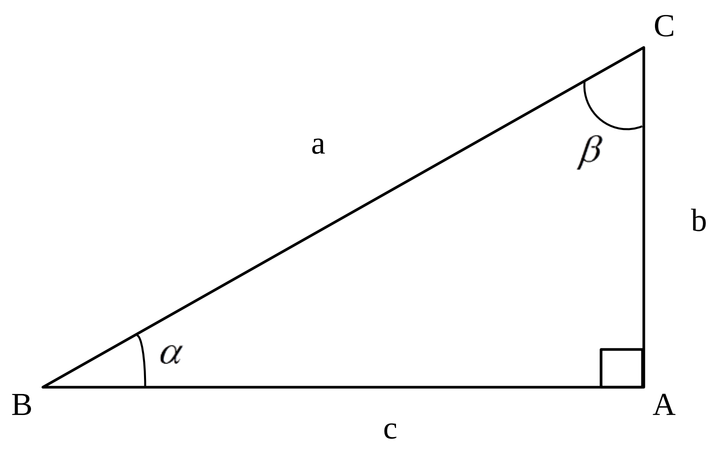
O número $\mathbf{k_3}$, assim obtido, é chamado **tangente do ângulo agudo** α e é indicado por:

$$tg\ (\alpha) = \frac{AC}{BA} \qquad (4.3)$$

4.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Observando o triângulo ABC retângulo A, temos:

Figura 4.2: Triângulo retângulo ABC



Definimos **cateto adjacente ao ângulo** α o lado do triângulo que está junto de α, ou seja, ao lado de α. Na figura, o cateto adjacente ao ângulo α é o cateto **AB** de medida **c**.

Definimos **cateto oposto ao ângulo** α o lado do triângulo que está oposto a α. Na figura, o cateto oposto ao ângulo α é o cateto **AC** de medida **b**.

Definimos **hipotenusa,** o lado do triângulo oposto ao ângulo reto Â. Na figura, temos a hipotenusa **BC** de medida **a**.

Considerando as relações trigonométricas de um ângulo agudo α, vistas anteriormente, obtemos:

$$sen\ (\alpha) = \frac{AC}{BC} = \frac{cateto\ \ oposto\ \ a\ \ \alpha}{hipotenusa} \Leftrightarrow\ sen\ (\alpha)\ = \frac{b}{a} \qquad (4.4)$$

$$\cos\ (\alpha) = \frac{AB}{BC} = \frac{cateto\ \ adjacente\ \ a\ \ \alpha}{hipotenusa} \Leftrightarrow\ \cos\ (\alpha)\ = \frac{c}{a} \qquad (4.5)$$

$$tg\ (\alpha) = \frac{AC}{AB} = \frac{cateto\ \ oposto\ \ a\ \ \alpha}{cateto\ \ adjacente\ \ a\ \ \alpha} \Leftrightarrow\ tg\ (\alpha)\ = \frac{b}{c} \qquad (4.6)$$

Por extensão, temos:

$$sen\ (\beta) = \frac{AB}{BC} = \frac{cateto\ \ oposto\ \ a\ \ \beta}{hipotenusa} \Leftrightarrow\ sen\ (\beta)\ = \frac{c}{a} \qquad (4.7)$$

$$\cos\ (\beta) = \frac{AC}{BC} = \frac{cateto\ \ adjacente\ \ a\ \ \beta}{hipotenusa} \Leftrightarrow\ \cos\ (\beta)\ = \frac{b}{a} \qquad (4.8)$$

$$tg\ (\beta) = \frac{AB}{AC} = \frac{cateto\ \ oposto\ \ a\ \ \beta}{cateto\ \ adjacente\ \ a\ \ \beta} \Leftrightarrow\ tg\ (\beta)\ = \frac{c}{b} \qquad (4.9)$$

4.3 Ângulos Complementares

Proposição 4.3.1: Dados α e β, com $0° < \alpha < 90°$ e $0° < \beta < 90°$, sempre que $\alpha + \beta = 90°$, tem-se que:

$$sen\ (\alpha) = \cos\ (90° - \alpha)\ \text{ e }\ \cos\ (\alpha) = sen\ (90° - \alpha) \qquad (4.10)$$

Observando novamente a figura 4.2, no triângulo ABC retângulo em A temos que $\alpha + \beta + 90° = 180° \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90°$, seque que $\beta = (90° - \alpha)$. Mas, como visto anteriormente, $sen\ (\alpha) = \frac{b}{a} = \cos\ (\beta)$, logo $sen\ (\alpha) = \cos\ (90° - \alpha)$. Analogamente, $\cos\ (\alpha) = \frac{c}{a} = sen\ (\beta)$, portanto $\cos\ (\alpha) = sen\ (90° - \alpha)$.

Portanto, se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Proposição 4.3.2: Para todo de ângulo $\alpha\ (0° < \alpha < 90°)$, temos que:

$$0 < sen(\alpha) < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \cos(\alpha) < 1 \qquad (4.11)$$

Em qualquer triângulo retângulo, a hipotenusa é definida como o lado de maior medida, logo, para todo $0° < \alpha < 90°$, $sen\ (\alpha) = \frac{cateto\ \ oposto\ \ a\ \ \alpha}{hipotenusa}$ é uma razão entre valores diferentes de zero, dos quais o numerador é menor que o denominador, ou seja, temos $0 < sen\ (\alpha) < 1$. O caso $0 < \cos\ (\alpha) < 1$, se vê analogamente.

Proposição 4.3.3: Para todo de ângulo α $(0° < \alpha < 90°)$, temos que:

$$tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} \tag{4.12}$$

De fato, observe que

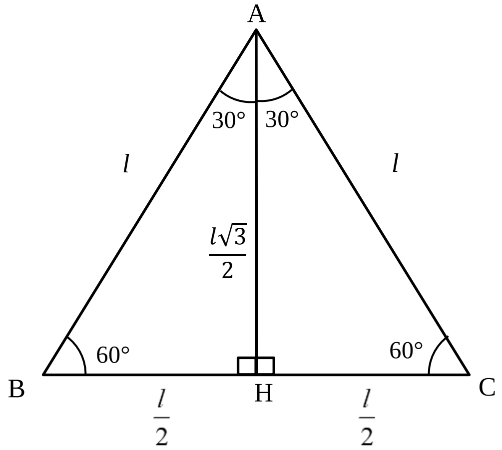
$$\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tg(\alpha).$$

4.4 Razões trigonométricas para ângulos notáveis (30°, 45° e 60°)

Considere o triângulo equilátero ABC de medida de lado igual a l. Utilizando o Teorema de Pitágoras, obtemos uma de suas alturas AH de medida h (que também é mediana e bissetriz) em função de seu lado l, dada por:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{4l^2 - l^2}{4}} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \Leftrightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \tag{4.13}$$

Figura 4.3: Triângulo isósceles ABC



Considerando a figura 4.3, no triângulo retângulo AHB retângulo em H, temos:

$$sen\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2} \qquad e \qquad sen\ 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

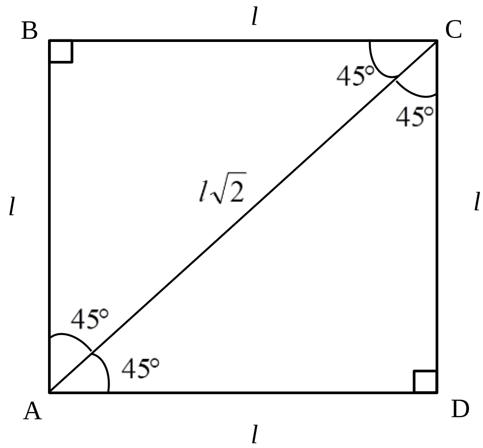
$$cos\ 30° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad e \qquad cos\ 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad e \qquad tg\ 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} = \sqrt{3}$$

Considere, agora, o quadrado ABCD de medida de lado igual a l. Utilizando do Teorema de Pitágoras, obtemos de sua diagonal AC em função de seu lado l, dada por:

$$AC^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2l^2} \Leftrightarrow AC = l\sqrt{2} \qquad (4.14)$$

Figura 4.4: Quadrado ABCD



Considerando a figura 4.4, no triângulo retângulo ADC retângulo em D, temos:

$$sen\ 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\ 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 45° = \frac{l}{l} = 1$$

Das considerações anteriores, temos a seguinte tabela:

Tabela 4.1: Razões Trigonométricas para arcos notáveis

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

De fato, dado que se $\alpha + \beta = 90°$, então $sen\ (\alpha) = \cos\ (90° - \alpha)$, temos que a soma 30° + 60° = 90°, logo $\frac{1}{2} = sen\ (30°) = \cos\ (90° - 30°) = \cos\ (60°) = \frac{1}{2}$. Para os demais valores o caso é análogo.

A tabela a seguir mostra valores do seno, cosseno e tangente de α, com $0° \le \alpha \le 90°$.

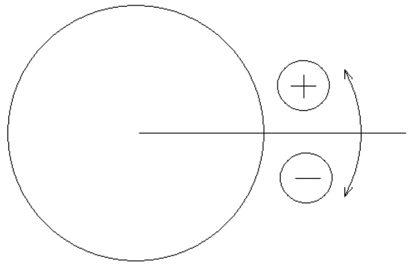
Tabela 4.2: Seno, cosseno e tangente para ângulos de 0° a 90°

α	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**	α	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
0°	0,0000	1,0000	0,0000	**46°**	0,7193	0,6947	1,0355
1°	0,0175	0,9998	0,0175	**47°**	0,7314	0,6820	1,0724
2°	0,0349	0,9994	0,0349	**48°**	0,7431	0,6691	1,1106
3°	0,0523	0,9986	0,0524	**49°**	0,7547	0,6561	1,1504
4°	0,0698	0,9976	0,0699	**50°**	0,7660	0,6428	1,1918
5°	0,0872	0,9962	0,0875	**51°**	0,7771	0,6293	1,2349
6°	0,1045	0,9945	0,1051	**52°**	0,7880	0,6157	1,2799
7°	0,1219	0,9925	0,1228	**53°**	0,7986	0,6018	1,3270
8°	0,1392	0,9903	0,1405	**54°**	0,8090	0,5878	1,3764
9°	0,1564	0,9877	0,1584	**55°**	0,8192	0,5736	1,4281
10°	0,1736	0,9848	0,1763	**56°**	0,8290	0,5592	1,4826
11°	0,1908	0,9816	0,1944	**57°**	0,8387	0,5446	1,5399
12°	0,2079	0,9781	0,2126	**58°**	0,8480	0,5299	1,6003
13°	0,2250	0,9744	0,2309	**59°**	0,8572	0,5150	1,6643
14°	0,2419	0,9703	0,2493	**60°**	0,8660	0,5000	1,7321
15°	0,2588	0,9659	0,2679	**61°**	0,8746	0,4848	1,8040
16°	0,2756	0,9613	0,2867	**62°**	0,8829	0,4695	1,8807
17°	0,2924	0,9563	0,3057	**63°**	0,8910	0,4540	1,9626
18°	0,3090	0,9511	0,3249	**64°**	0,8988	0,4384	2,0503
19°	0,3256	0,9455	0,3443	**65°**	0,9063	0,4226	2,1445
20°	0,3420	0,9397	0,3640	**66°**	0,9135	0,4067	2,2460
21°	0,3584	0,9336	0,3839	**67°**	0,9205	0,3907	2,3559
22°	0,3746	0,9272	0,4040	**68°**	0,9272	0,3746	2,4751
23°	0,3907	0,9205	0,4245	**69°**	0,9336	0,3584	2,6051
24°	0,4067	0,9135	0,4452	**70°**	0,9397	0,3420	2,7475
25°	0,4226	0,9063	0,4663	**71°**	0,9455	0,3256	2,9042
26°	0,4384	0,8988	0,4877	**72°**	0,9511	0,3090	3,0777
27°	0,4540	0,8910	0,5095	**73°**	0,9563	0,2924	3,2709
28°	0,4695	0,8829	0,5317	**74°**	0,9613	0,2756	3,4874
29°	0,4848	0,8746	0,5543	**75°**	0,9659	0,2588	3,7321
30°	0,5000	0,8660	0,5774	**76°**	0,9703	0,2419	4,0108
31°	0,5150	0,8572	0,6009	**77°**	0,9744	0,2250	4,3315
32°	0,5299	0,8480	0,6249	**78°**	0,9781	0,2079	4,7046
33°	0,5446	0,8387	0,6494	**79°**	0,9816	0,1908	5,1446
34°	0,5592	0,8290	0,6745	**80°**	0,9848	0,1736	5,6713
35°	0,5736	0,8192	0,7002	**81°**	0,9877	0,1564	6,3138
36°	0,5878	0,8090	0,7265	**82°**	0,9903	0,1392	7,1154
37°	0,6018	0,7986	0,7536	**83°**	0,9925	0,1219	8,1443
38°	0,6157	0,7880	0,7813	**84°**	0,9945	0,1045	9,5144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	**85°**	0,9962	0,0872	11,4301
40°	0,6428	0,7660	0,8391	**86°**	0,9976	0,0698	14,3007
41°	0,6561	0,7547	0,8693	**87°**	0,9986	0,0523	19,0811
42°	0,6691	0,7431	0,9004	**88°**	0,9994	0,0349	28,6363
43°	0,6820	0,7314	0,9325	**89°**	0,9998	0,0175	57,2900
44°	0,6947	0,7193	0,9657	**90°**	1	0	-
45°	0,7071	0,7071	1				

4.5 Circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico

Uma circunferência se diz **orientada** quando nela fixamos um sentido positivo de percurso.

Em Trigonometria, convencionou-se estabelecer como sentido positivo o sentido anti-horário. Naturalmente, o sentido negativo é o sentido horário.



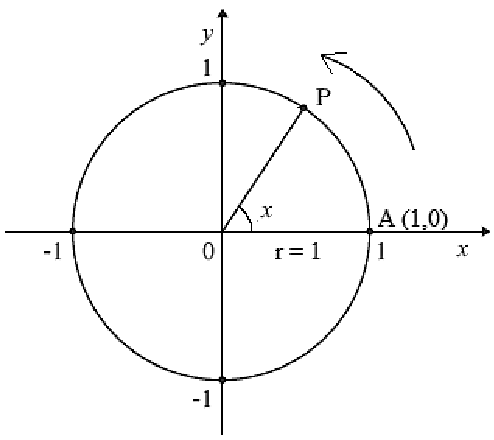
Todo arco de uma circunferência orientada chama-se **arco orientado**.

A cada arco orientado $\widehat{AP}$, em que A é a origem e P, a extremidade, está associado um número real x, que é a sua medida. O módulo de x é o comprimento do arco orientado.

Vamos fixar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $x\hat{O}y$ no plano.

A circunferência orientada de centro na origem do sistema, de raio unitário (r = 1) e cujo sentido positivo é o anti-horário, é denominada circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico. No ciclo trigonométrico, o ponto A (1,0) é a origem de todos os arcos, ou seja, é o ponto a partir do qual percorremos a circunferência até um ponto P qualquer para determinar o arco $\widehat{AP}$. Os arcos orientados do ciclo trigonométrico com origem no ponto A(1,0) são chamados arcos trigonométricos.

Figura 4.5: Ciclo Trigonométrico de raio unitário.



Ao tratarmos da medida de um arco, adotamos o grau (°) ou radiano (rad).

O valor de **1 grau** (1°) é a medida de um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência correspondente.

O valor de **1 radiano** (1 rad) é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém. Como o comprimento C de uma circunferência de raio r é $2\pi r$, temos que o raio r "cabe" 2π vezes nesse comprimento. Assim, um arco de comprimento igual a r mede 1 rad; um arco de comprimento igual a 2r mede 2 rad, etc..., então um arco de comprimento $2\pi r$ (volta completa) mede 2π rad. concluímos, desse modo, que as medidas 2π rad e 360° são equivalentes.

Observe as equivalências na tabela 4.3 seguinte:

Tabela 4.3: Equivalências entre radianos e graus.

$2\pi\, rad$	$-$	$360°$
$\pi\, rad$	$-$	$180°$
$\frac{\pi}{2}\, rad$	$-$	$90°$
$\frac{\pi}{3}\, rad$	$-$	$60°$
$\frac{\pi}{4}\, rad$	$-$	$45°$
$\frac{\pi}{6}\, rad$	$-$	$30°$
$\vdots$		$\vdots$

Quando trabalhamos com medidas de arcos em radianos não precisamos indicar a unidade de medida por escrito, dessa maneira, associaremos a cada ponto P da circunferência, a medida de $\widehat{AP}$ tal que $0 \leq m(\widehat{AP}) \leq 2\pi$ ou $0° \leq m(\widehat{AP}) \leq 360°$.

4.5.1 Quadrantes

As retas x e y, eixos do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xÔy, dividem o ciclo trigonométrico em quatro partes iguais, que são chamadas **quadrantes**.

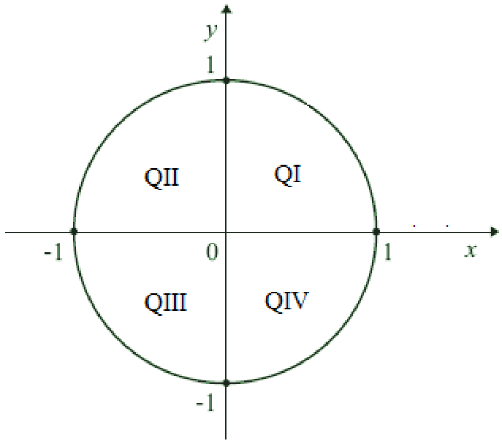
Figura 4.6: Quadrantes no ciclo trigonométrico.

Q I ⟶ 1° quadrante

Q II ⟶ 2° quadrante

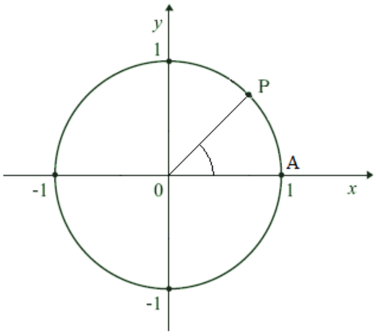
Q III ⟶ 3° quadrante

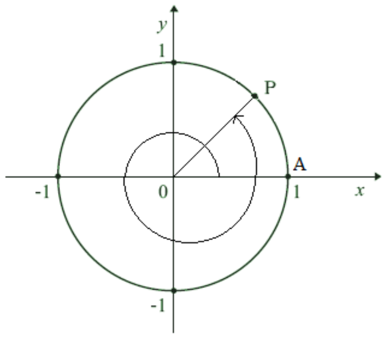
Q IV ⟶ 4° quadrante



4.6 Arcos Côngruos (ou congruentes)

Arcos côngruos são aqueles arcos que possuem a mesma extremidade e diferem apenas pelo número de voltas completas. De forma geral, se um arco mede α graus a expressão geral dos arcos côngruos a ele é $\alpha° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$. Se um arco mede x radianos, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é $x + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.





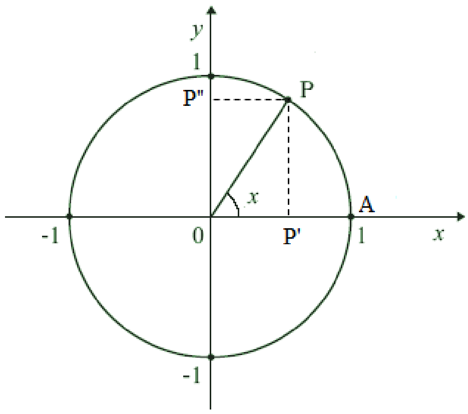
4.7 As funções circulares

As funções circulares constituem o objeto fundamental da trigonometria circular e são importantes devido à sua periodicidade pois elas podem representar fenômenos naturais periódicos, como as variações da temperatura terrestre, o comportamento ondulatório do som, a pressão sanguínea no coração, os níveis de água dos oceanos, etc.

4.7.1 A função seno

Consideremos o ciclo trigonométrico no qual marcamos o ponto P, que é imagem, no ciclo, do número real x, conforme indica a figura.

Figura 4.7: Seno de x.



Consideremos também o arco $\widehat{AP}$ ao qual corresponde o ângulo central x.

Sejam $\overline{OP}$ o raio do ciclo trigonométrico, P" e P' as projeções do ponto P nos eixos y e x, respectivamente.

Definimos como seno do arco $\widehat{AP}$ ou seno do ângulo x a ordenada do ponto P, e indicamos:

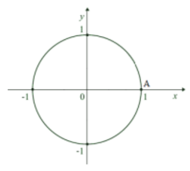
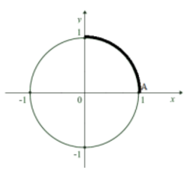
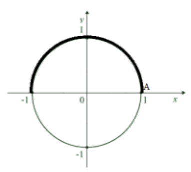
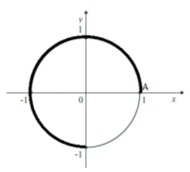
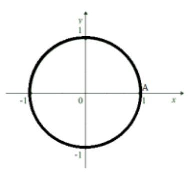
$$\mathrm{sen}(x) = \overline{OP''} \quad (4.15)$$

Observe que esta definição coincide com que conhecíamos para o triângulo OP’P retângulo em P’. Esta nova definição tem a vantagem de ser aplicada de uma forma mais completa, porque agora podemos falar em seno de ângulos maiores que 90°.

Valores importantes de seno de x

Marcando os pontos P, imagens dos números reais 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, temos:

Tabela 4.4: Valores para seno de x.

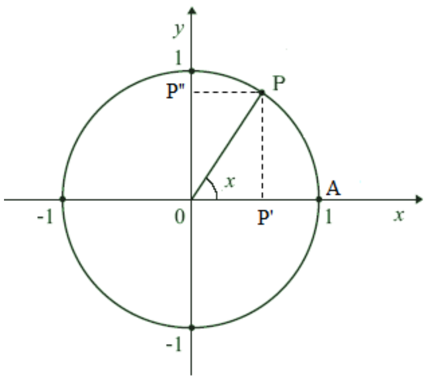
$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = \pi$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$x = 2\pi$
				
$sen\ 0° = 0$ $sen\ 0 = 0$	$sen\ 90° = 1$ $sen\ \frac{\pi}{2} = 1$	$sen\ 180° = 0$ $sen\ \pi = 0$	$sen\ 270° = -1$ $sen\ \frac{3\pi}{2} = -1$	$sen\ 360° = 0$ $sen\ 2\pi = 0$

A partir de 2π a função seno repete seus valores, portanto é uma função periódica e seu período é p = 2π, assim temos que $sen(x) = sen(x + 2k\pi)$, com k ∈ ℤ.

4.7.2 A função cosseno

Consideremos o ciclo trigonométrico no qual marcamos o ponto P, que é imagem, no ciclo, do número real x, conforme indica a figura.

Figura 4.8: Cosseno de x.



Consideremos também o arco $\widehat{AP}$ ao qual corresponde o ângulo central x.

Seja $\overline{OP}$ o raio do ciclo, e P” e P’ as projeções do ponto P nos eixos y e x, respectivamente.

Definimos como cosseno do arco $\widehat{AP}$ ou cosseno do ângulo x a abscissa do ponto P, e indicamos:

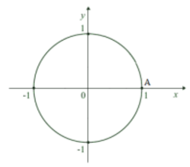
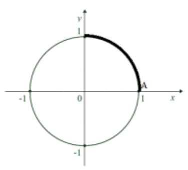
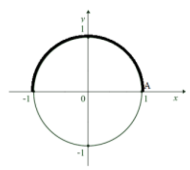
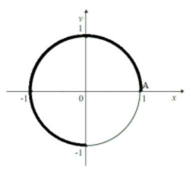
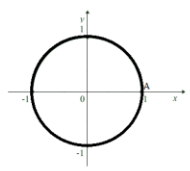
$$\cos(x) = \overline{OP'} \qquad (4.16)$$

Mais uma vez, esta definição coincide com que conhecíamos para o triângulo OP'P retângulo em P'. Esta nova definição tem a vantagem de ser aplicada de uma forma mais completa, porque agora podemos falar em cosseno de ângulos maiores que 90°.

Valores importantes de cosseno de x

Marcando os pontos P, imagens dos números reais 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, temos:

Tabela 4.5: Valores para cosseno de x.

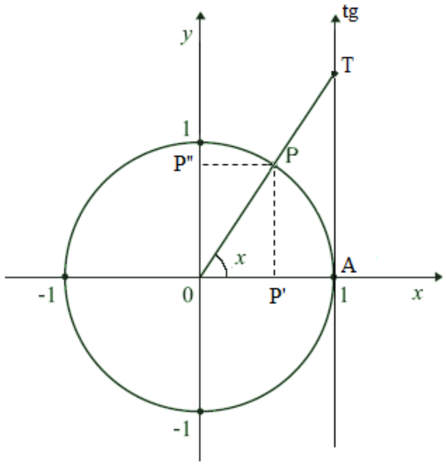
$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = \pi$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$x = 2\pi$
				
$\cos 0° = 1$ $\cos 0 = 1$	$\cos 90° = 0$ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$\cos 180° = -1$ $\cos\pi = -1$	$\cos 270° = 0$ $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$	$\cos 360° = 1$ $\cos 2\pi = 1$

A função cosseno é uma função periódica e seu período é p = 2π, isto é, $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$, com k $\in \mathbb{Z}$.

4.7.3 A função tangente

Seja o ciclo trigonométrico da figura e T a intersecção da semirreta $\overrightarrow{OP}$ com o eixo tangente à circunferência passando pelo ponto A.

Figura 4.9: Tangente de x.



Note que, como PP' $\perp \overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{AT}$, e ainda PÔP' = TÔA = x, pelo caso de semelhança ângulo-ângulo, temos que $\Delta POP' \sim \Delta TOA$. Assim, segue que:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{OP''}}{\overline{TA}} \iff \frac{\overline{OP'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OP''}}{\overline{TA}} \iff$$

$$\iff \frac{\overline{TA}}{1} = \frac{\overline{OP''}}{\overline{OP'}} \iff \overline{AT} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = tg(x)$$

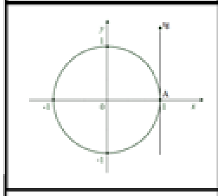
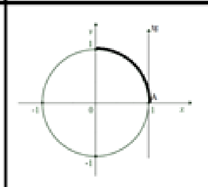
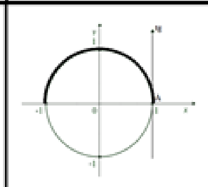
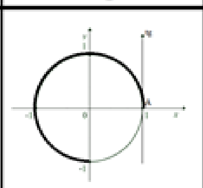
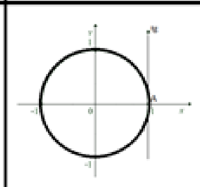
Definimos como tangente do arco $\widehat{AP}$ ou tangente do ângulo x a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$, e indicamos por:

$$tg(x) = \overline{AT} \tag{4.17}$$

Valores importantes de tangente de x

Marcando os pontos P, imagens dos números reais 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, temos:

Tabela 4.6: Valores para tangente de x.

$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = \pi$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$x = 2\pi$
				
$tg\ 0° = 0$ $tg\ 0 = 0$	$\nexists\ tg\ 90°$ $\nexists\ tg\ \frac{\pi}{2}$	$tg\ 180° = 0$ $tg\ \pi = 0$	$\nexists\ tg\ 270°$ $\nexists\ tg\ \frac{3\pi}{2}$	$tg\ 360° = 0$ $tg\ 2\pi = 0$

Também temos outros valores para tangente de x importantes a se tomar:

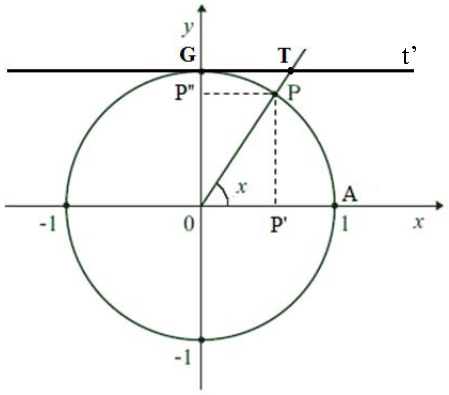
$$tg\ 45° = tg\ \frac{\pi}{4} = tg\ 225° = tg\ \frac{5\pi}{4} = 1 \quad \text{e} \quad tg\ 135° = tg\ \frac{3\pi}{4} = tg\ 315° = tg\ \frac{7\pi}{4} = -1$$

A função tangente é uma função periódica e seu período é p = π, isto é, $tg(x) = tg(x + k\pi)$, com k $\in \mathbb{Z}$.

4.7.4 Outras funções trigonométricas

4.7.4.1 Função cotangente

Figura 4.10: Cotangente de x.



No ciclo trigonométrico acima temos o ponto de intersecção G entre a circunferência e o eixo y. Considere t' a reta tangente à circunferência e que passa pelo ponto G. Seja T o ponto de intersecção da reta t' com a semirreta $\overrightarrow{OT}$. Temos que $\Delta POP' \sim \Delta TOG$, pelo caso de semelhança ângulo-ângulo, logo:

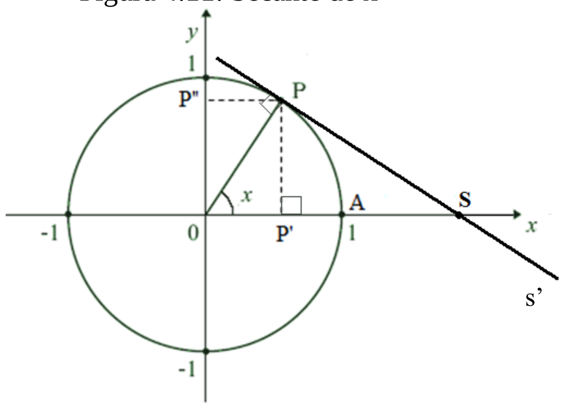
$$\frac{\overline{OP''}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{PP''}}{\overline{TG}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{TG}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OP''}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{TG}} \Leftrightarrow \frac{\overline{TG}}{1} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP''}} \Leftrightarrow \overline{TG} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = cotg(x) \tag{4.18}$$

Denomina-se **função cotangente** de x a função $f(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$, definida para todo x real diferente de kπ (pois *sen*(x) ≠ 0), com k ∈ ℤ. Representamos por:

$$cotg(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}, \text{ com } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{4.19}$$

4.7.4.2 Função secante

Figura 4.11: Secante de x



No ciclo trigonométrico acima temos o ponto P pertencente à circunferência. Considere s’ a reta tangente à circunferência e que passa pelo ponto P. Seja S o ponto de intersecção da reta s’ com o eixo x. Temos que $\Delta POP' \sim \Delta POS$, pelo caso de semelhança ângulo-ângulo, uma vez que $P\widehat{P'}O = S\hat{P}O = 90°$ e PÔP’ = SÔP = x, logo:

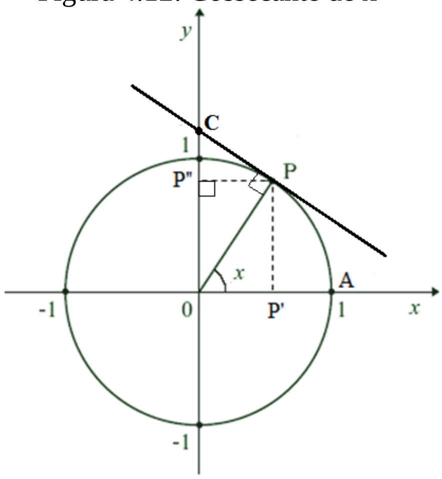
$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OS}}{1} = \frac{1}{\overline{OP'}} \Leftrightarrow \overline{OS} = \frac{1}{\cos(x)} = sec(x) \qquad (4.20)$$

Denomina-se **função secante** de x a função $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, definida para todo x real diferente de $\frac{\pi}{2}$ + kπ (pois *cos(x)* ≠ 0), com k ∈ ℤ. Representamos por:

$$sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \text{ com } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (4.21)$$

4.7.4.3 Função cossecante

Figura 4.12: Cossecante de x



No ciclo trigonométrico acima temos o ponto P pertencente à circunferência. Considerando s’ a reta tangente à circunferência e que passa pelo ponto P. Obtemos C o ponto de intersecção da reta s’, agora com o eixo y. Temos que $\Delta POP'' \sim \Delta COP$, pelo caso de semelhança ângulo-ângulo, uma vez que $P\widehat{P''}O = C\hat{P}O = 90°$ e PÔP’’ = CÔP = (90° - x), logo:

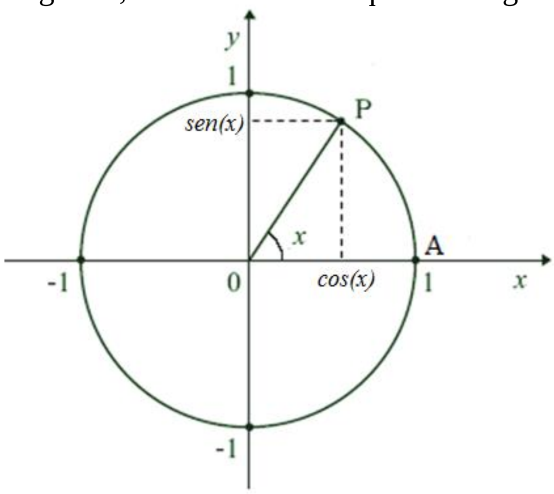
$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OP''}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OP}}{\overline{OP''}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OC}}{1} = \frac{1}{\overline{OP''}} \Leftrightarrow \overline{OC} = \frac{1}{\text{sen}(x)} = cossec(x) \qquad (4.22)$$

Denomina-se **função cossecante** de x a função $f(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$, definida para todo x real diferente de kπ (pois *sen*(x) ≠ 0), com k ∈ ℤ. Representamos por:

$$cossec(x) = \frac{1}{sen(x)}, \text{com } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (4.23)$$

4.8 A Relação Fundamental da Trigonometria

No ciclo trigonométrico, os valores do seno são representados no eixo vertical, e os valores do cosseno são representados no eixo horizontal. Ao determinarmos um ponto P qualquer pertencente à circunferência, temos sua projeção no eixo dos senos e dos cossenos. Ao traçarmos um segmento de reta da origem O dos eixos do círculo até o ponto P determinado, formamos um ângulo x, como mostra o esquema a seguir:



Com base no triângulo retângulo formado, aplicamos o teorema de Pitágoras, para verificar que:

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \qquad (4.24)$$

No caso acima temos x no primeiro quadrante, mas caso ele esteja em qualquer outro quadrante chegamos à mesma relação lembrando que:

$$sen(\pi - x) = sen(x) \qquad (4.25)$$

$$sen(\pi + x) = -sen(x) \qquad (4.26)$$

$$cos(\pi - x) = -cos(x) \qquad (4.27)$$

$$cos(\pi + x) = -cos(x) \qquad (4.28)$$

Como $\left(sen(x)\right)^2 = (-sen(x))^2$ e $\left(cos(x)\right)^2 = (-\cos(x))^2$, a relação fundamental continua válida.

Utilizando-se desse resultado, obtemos outras duas importantes relações: $cossec^2(x)$ e $sec^2(x)$. A primeira delas é dada quando dividimos os membros da igualdade por $sen^2(x)$, tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$\frac{sen^2(x)}{sen^2(x)} + \frac{cos^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{1}{sen^2(x)} \Leftrightarrow 1 + \frac{cos^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{1}{sen^2(x)} \Leftrightarrow\Leftrightarrow 1 + cotg^2(x) = cossec^2(x) \qquad (4.29)$$

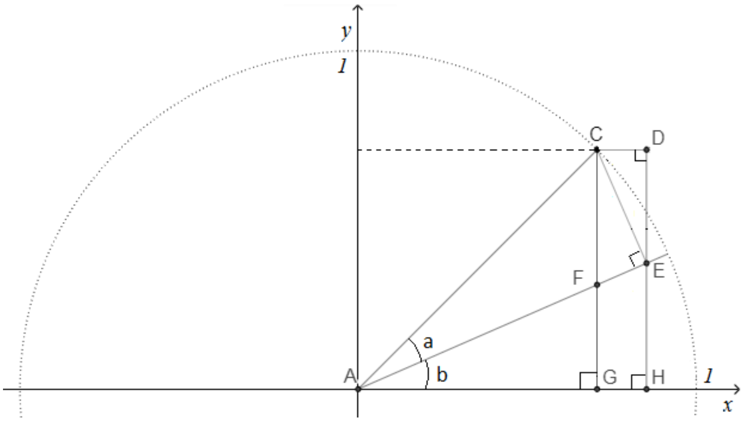
Analogamente, a segunda relação se obtém dividindo os membros da igualdade por $cos^2(x)$, tal que $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou seja,

$$\frac{sen^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} \Leftrightarrow \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)} + 1 = \frac{1}{cos^2(x)} \Leftrightarrow tg^2(x) + 1 = sec^2(x) \qquad (4.30)$$

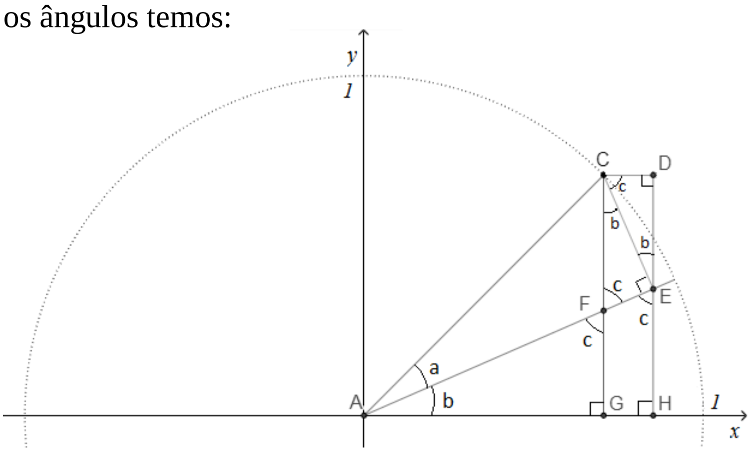
4.9 Soma e Subtração de arcos

Considere a semicircunferência de raio 1 representada abaixo. Temos os seguintes elementos: o triângulo ACE retângulo em E, o triângulo AEH retângulo em H, o triângulo ACG retângulo em G, o triângulo FEC retângulo em E, o triângulo CDE retângulo em D e que $\overline{CG} \parallel \overline{DH}$, com $\overline{CG} \equiv \overline{DH}$.

Figura 4.13: Semicircunferência de raio 1



Marcando os ângulos temos:



Do triângulo ACE, temos $sen(a) = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CE}}{1} = \overline{CE}$ e $cos(a) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{1} = \overline{AE}$.

Do triângulo CDE temos que $cos(b) = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{DE}}{sen(a)}$, logo $\overline{DE} = sen(a).\cos(b)$.

Da semelhança entre os triângulos AHE e CEF tiramos:

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CE}} \tag{4.31}$$

Segue que:

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{CF}.sen(b)} = \frac{\cos(a)}{\overline{CF}} \Longleftrightarrow \overline{EH} = \frac{\overline{\mathrm{CF}}.\,\mathrm{sen(b)}.\cos(a)}{\overline{CF}} = sen(b).\cos(a)$$

No triângulo ACG retângulo em G, tem-se que $sen(a+b) = \frac{\overline{CG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DH}}{1} = \overline{DE} + \overline{EH}$. Assim, obtemos o seguinte resultado:

$$sen(a+b) = sen(a).\cos(b) + sen(b).\cos(a) \tag{4.32}$$

Agora, da semelhança entre os triângulos AHE e AGF tiramos:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AF}.cos(b)} = \frac{\cos(a)}{\overline{AF}} \Longleftrightarrow \overline{AH} = \frac{\overline{\mathrm{AF}}.\cos(\mathrm{b}).\cos(a)}{\overline{AF}} = cos(a).\cos(b)$$

Ainda tratando da semelhança entre os triângulos AHE e AGF tiramos:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FE}} \Longleftrightarrow \overline{GH} = \frac{\overline{AG}.\overline{FE}}{\overline{AF}}$$

Note que no triângulo AGF temos que $\overline{AG} = \overline{AF}.cos(b)$ e no triângulo CEF temos que $\overline{FE} = \overline{FC}.sen(b)$ e $\overline{FC} = \frac{\overline{CE}}{\cos(b)} = \frac{sen(a)}{\cos(b)}$, logo:

$$\overline{GH} = \frac{\overline{\mathrm{AF}}.\cos(\mathrm{b}).\overline{\mathrm{FC}}.\,\mathrm{sen}(b)}{\overline{AF}} = cos(b).\frac{sen(a)}{\cos(b)}.\mathrm{sen}(b) \Longleftrightarrow \overline{GH} = sen(a).sen(b)$$

No triângulo ACG retângulo em G, tem-se que $cos(a+b) = \frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AG}}{1} = \overline{AH} - \overline{GH}$.

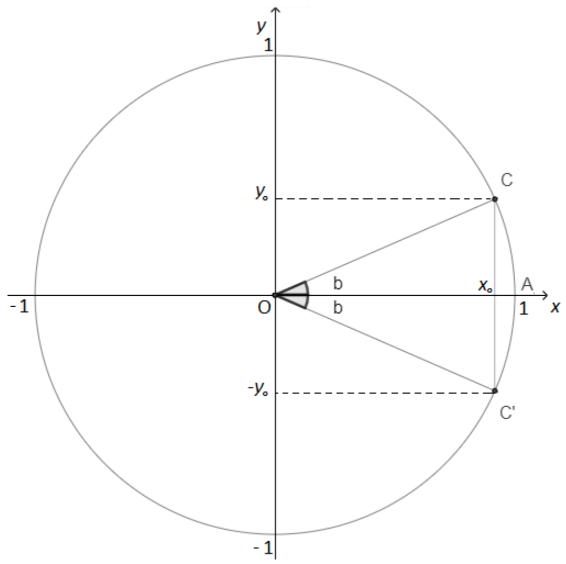
Assim, obtemos o seguinte resultado:

$$cos(a+b) = cos(a).\cos(b) - sen(a).\mathrm{sen}(b) \quad (4.33)$$

Note na figura 4.14 abaixo que $\cos(\widehat{AC}) = \cos(b) = \cos(\widehat{AC'}) = \cos(-b)$, logo temos que $\cos(-b) = \cos(b)$.

Analogamente, observa-se que $\mathrm{sen}(\widehat{AC}) = \mathrm{sen}(b) = -\mathrm{sen}(\widehat{AC'}) = -\mathrm{sen}(b)$, logo temos que $\mathrm{sen}(-b) = -sen(b)$.

Figura 4.14: Representação de cos(-b) e sen(-b)



Assim conseguimos demonstrar facilmente a subtração de arcos.

Seja $sen(a-b)$ escrito na forma $sen(a+(-b))$. Logo, pelos resultados anteriores temos:

$$sen\big(a+(-b)\big) = sen(a).\cos(-b) + sen(-b).\cos(a)$$

Mas como $\cos(-b) = \cos(b)$ e $\mathrm{sen}(-b) = -sen(b)$, segue que:

$$sen\big(a+(-b)\big) = sen(a).\cos(-b) + sen(-b).\cos(a) \iff$$

$$\iff sen\big(a+(-b)\big) = sen(a).\cos(b) + (-sen(b)).\cos(a) \iff$$

$$\iff sen(a-b) = sen(a).\cos(b) - sen(b).\cos(a) \quad (4.34)$$

Considere agora $cos(a-b)$ escrito na forma $cos(a+(-b))$. Logo, pelos resultados anteriores temos:

$$cos\big(a+(-b)\big) = cos(a).\cos(-b) - sen(a).sen(-b)$$

Mas como $\cos(-b) = \cos(b)$ e $\mathrm{sen}(-b) = -sen(b)$, segue que:

$$\begin{gathered} cos\big(a+(-b)\big) = cos(a).\cos(-b) - sen(a).sen(-b) \iff \\ \iff cos\big(a+(-b)\big) = cos(a).\cos(b) - sen(a).\big(-sen(b)\big) \iff \\ \iff cos(a-b) = cos(a).\cos(b) + sen(a).sen(b) \end{gathered} \tag{4.35}$$

Analisaremos a seguir os resultados para $tg(a+b)$ e $tg(a-b)$.

Para $tg(a+b)$, temos:

$$tg(a+b) = \frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{sen(a).\cos(b) + sen(b).\cos(a)}{\cos(a)\,.\cos(b) - sen(a).sen(b)}$$

Dividindo o numerador e o denominador dessa razão por $\cos(a)\,.\cos(b)$, obtemos:

$$tg(a+b) = \frac{\dfrac{sen(a).\cos(b) + sen(b).\cos(a)}{\cos(a)\,.\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\,.\cos(b) - sen(a).sen(b)}{\cos(a)\,.\cos(b)}} = \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a).tg(b)} \tag{4.36}$$

Para $tg(a-b)$, temos:

$$tg(a-b) = \frac{\dfrac{sen(a).\cos(b) - sen(b).\cos(a)}{\cos(a)\,.\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\,.\cos(b) + sen(a).sen(b)}{\cos(a)\,.\cos(b)}} = \frac{tg(a) - tg(b)}{1 + tg(a).tg(b)} \tag{4.37}$$

4.10 Arco duplo e arco metade

As fórmulas de arco duplo são usadas para calcular seno, cosseno e tangente de um arco multiplicado por 2. Dessa forma, para um arco x, teremos:

4.10.1 Seno de 2x

$$sen(2x) = sen(x + x) = sen(x).cos(x) + sen(x).cos(x) = 2.sen(x).cos(x) \tag{4.38}$$

4.10.2 Cosseno de 2x

$cos(2x) = cos(x + x) = cos(x).cos(x) - sen(x).sen(x) = cos^2(x) - sen^2(x)$. E como, $cos^2(x) + sen^2(x) = 1$, segue:

$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x) = cos^2(x) - \left(1 - cos^2(x)\right) = 2.cos^2(x) - 1 \tag{4.39}$$

Ou ainda,

$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x) = \left(1 - sen^2(x)\right) - sen^2(x) = 1 - 2.sen^2(x) \tag{4.40}$$

4.10.3 Tangente de 2x

$$tg(2x) = tg(x + x) = \frac{tg(x) + tg(x)}{1 - tg(x).tg(x)} = \frac{2.tg(x)}{1 - tg^2(x)} \tag{4.41}$$

Para os arcos metade, considere $2x = y$, segue que $x = \frac{y}{2}$, e das conclusões anteriores temos:

4.10.4 Seno de $\frac{y}{2}$

$$cos(2x) = 1 - 2.sen^2(x) \Longleftrightarrow \cos(y) = 1 - 2.sen^2\left(\frac{y}{2}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow sen^2\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1 - \cos(y)}{2} \quad \Longleftrightarrow sen\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(y)}{2}} \tag{4.42}$$

4.10.5 Cosseno de $\frac{y}{2}$

$$cos(2x) = 2.cos^2(x) - 1 \iff \cos(y) = 2.cos^2\left(\frac{y}{2}\right) - 1 \iff$$
$$\iff cos^2\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1+\cos(y)}{2} \iff \cos\left(\frac{y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(y)}{2}} \qquad (4.43)$$

4.10.6 Tangente de $\frac{y}{2}$

$$tg\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{y}{2}\right)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos(y)}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos(y)}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(y)}{1+\cos(y)}} \qquad (4.44)$$

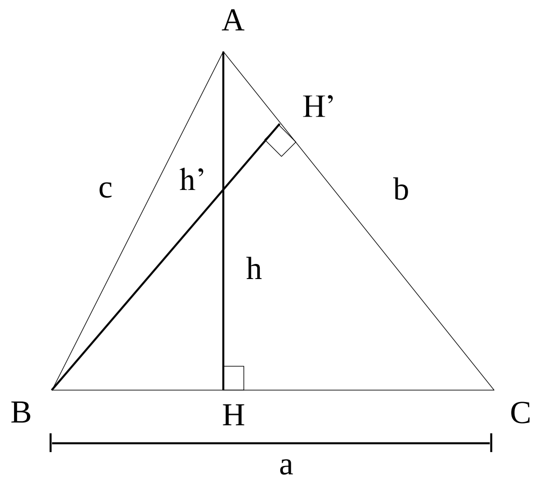
Observação: Veja que nas fórmulas do arco metade o valor poderá ser negativo ou positivo. Isso dependerá do quadrante onde está localizado o arco $\frac{y}{2}$.

4.11 Resolução de triângulos quaisquer

4.11.1 Lei dos Senos

Consideremos na figura 4.15 abaixo, o triângulo acutângulo ABC, com altura de medida h, relativa ao lado $\overline{BC}$.

Figura 4.15: Triângulo ABC de altura h



Temos que $sen(\hat{C}) = \frac{h}{b}$, ou $h = b\,.sen(\hat{C})$ e $sen(\hat{B}) = \frac{h}{c}$, ou $h = c\,.sen(\hat{B})$. Portanto, $b\,.sen(\hat{C}) = c\,.sen(\hat{B})$, ou ainda $\frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$. *(I)*

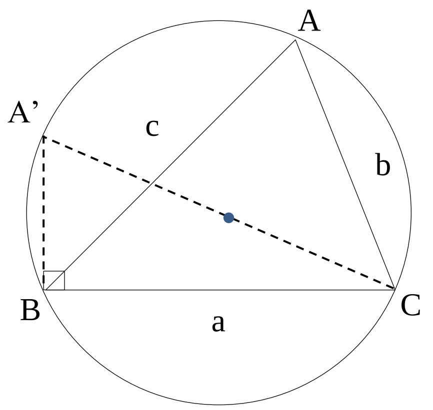
Considere agora a altura $\overline{\text{BH'}}$, de medida h', relativa ao lado $\overline{AC}$. Temos que $sen(\hat{C}) = \frac{h\prime}{a}$, ou $h' = a\,.sen(\hat{C})$ e $sen(\hat{A}) = \frac{h\prime}{c}$, ou $h' = c\,.sen(\hat{A})$. Portanto, a $.sen(\hat{C}) = c\,.sen(\hat{A})$, ou ainda $\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$. *(II)*

De (I) e (II), obtemos:

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})} \tag{4.45}$$

Observe, na figura 4.16 a seguir, o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio R, e o triângulo A'BC retângulo em B e inscrito na semicircunferência.

Figura 4.16: Triângulo ABC inscrito na circunferência de raio R



De acordo com o desenho acima temos:

$$\hat{A} = \frac{\overline{BC}}{2} \quad \text{e} \quad \widehat{A'} = \frac{\overline{BC}}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \widehat{A'}$$ (Â e Â' são ângulos inscritos)

No triângulo A'BC, temos:

$$sen(\widehat{A'}) = \frac{a}{2R} \ \Rightarrow\ sen(\hat{A}) = \frac{a}{2R} \ \Rightarrow\ 2R = \frac{a}{sen(\hat{A})}$$

Assim, das relações anteriores, temos em um triângulo ABC, de lados com medidas a, b e c opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, a relação:

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})} = 2R \tag{4.46}$$

onde R é o raio da circunferência em que o triângulo está inscrito.

Dessa maneira, pode-se observar mais facilmente a validade da lei dos senos para qualquer triângulo, de maneira que apenas deve-se variar algum de seus vértices sobre a circunferência de raio R.

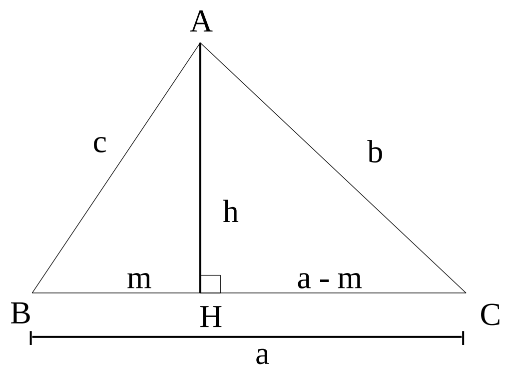
4.11.2 Lei dos Cossenos

Para a verificação da Lei dos Senos deve-se abordar os casos para triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos, os quais as demonstrações vêm a seguir.

4.11.2.1 Caso de triângulos acutângulos

Consideremos na figura 4.7 um triângulo acutângulo ABC, com altura $\overline{AH}$ de medida h, relativa ao lado $\overline{BC}$.

Figura 4.17: Triângulo acutângulo ABC de altura $\overline{AH}$



No triângulo AHC retângulo em H, temos:

$$b^2 = h^2 + (a-m)^2 \qquad (I)$$

No triângulo AHB retângulo em H, temos:

$$c^2 = h^2 + m^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = c^2 - m^2 \qquad (II)$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$b^2 = c^2 - m^2 + (a-m)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - m^2 + a^2 - 2am + m^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2am \qquad (III)$$

No triângulo AHB retângulo em H, temos:

$$cos\hat{B} = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c\ .cos\hat{B} \qquad (IV)$$

Substituindo (IV) em (III), teremos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.cos\hat{B} \qquad (4.47)$$

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, temos:

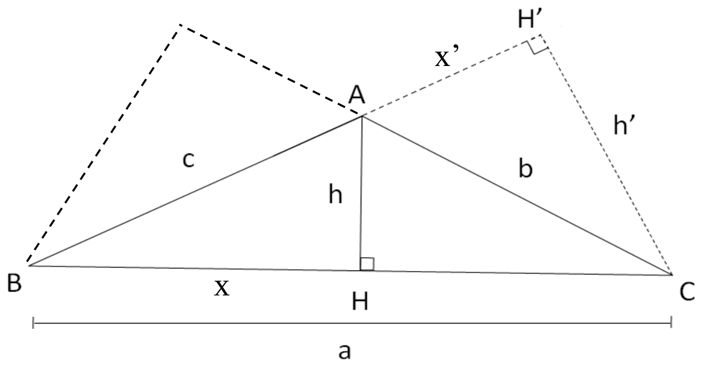
$$a^2 = b + c^2 - 2.b.c.cos\hat{A} \quad (4.48)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cos\hat{C} \quad (4.49)$$

4.11.2.2 Caso de triângulos obtusângulos

Consideremos um triângulo obtusângulo ABC, com altura $\overline{\mathrm{AH}}$ de medida h, relativa ao lado $\overline{\mathrm{BC}}$ e de altura $\overline{\mathrm{H'C}}$ de medida h', relativa ao lado $\overline{\mathrm{AB}}$.

Figura 4.18: Triângulo obtusângulo ABC de altura $\overline{AH}$



Considerando agora a altura h' referente ao lado AB, tiramos do triângulo CH'B retângulo em H' que $sen(180° - \hat{A}) = \frac{h'}{b} \Longleftrightarrow h' = b\,.sen(180° - \hat{A})$ e ainda que $cos(180° - \hat{A}) = \frac{x'}{b} \Longleftrightarrow x' = b\,.cos(180° - \hat{A})$. Por Pitágoras, no triângulo CH'B retângulo em H', temos que $a^2 = (x' + c)^2 + h'^2$, logo substituindo $(x' + c)\ e\ h'$, pelos resultados anteriores, segue que $a^2 = (b\,.cos(180° - \hat{A}) + c)^2 + (b.sen(180° - \hat{A}))^2$.

Mas como $sen(180° - \hat{A}) = sen(\hat{A})$ e $\cos(180° - \hat{A}) = -cos(\hat{A})$, segue que, da relação anterior:

$$a^2 = (b\,.(-cos(\hat{A})) + c)^2 + \left(b.sen(\hat{A})\right)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a^2 = b^2.\ cos^2(\hat{A}) + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A}) + b^2.\ sen^2(\hat{A}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a^2 = b^2\left(cos^2(\hat{A}) + sen^2(\hat{A})\right) + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$$

E como $cos^2(\hat{A}) + sen^2(\hat{A}) = 1$, segue que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A}) \quad (4.50)$$

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, com demonstrações idênticas aos casos anteriores, temos:

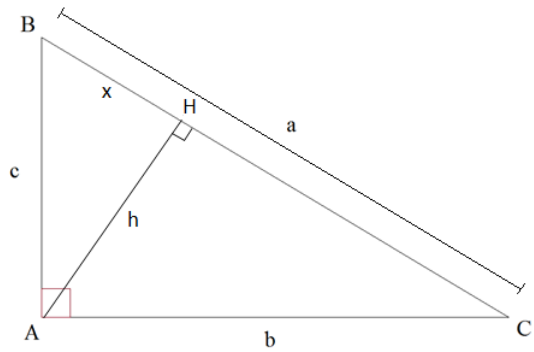
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos(\hat{B}) \quad (4.51)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\hat{C}) \quad (4.52)$$

4.11.2.3 Caso de triângulos retângulos

Consideremos na figura 4.19 abaixo, um triângulo ABC retângulo em A.

Figura 4.19: Triângulo retângulo ABC de altura $\overline{AH}$



Do triângulo CHA retângulo em H, temos que $sen(\hat{C}) = \frac{h}{b} \Longleftrightarrow h = b\,.sen(\hat{C})$ e $cos(\hat{C}) = \frac{(a-x)}{b} \Longleftrightarrow x = a - b\,.cos(\hat{C})$. Por Pitágoras, no triângulo AHB retângulo em H, temos $c^2 = x^2 + h^2$, logo segue:

$$c^2 = (a - b\,.cos(\hat{C}))^2 + \left(b.sen(\hat{C})\right)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow c^2 = a^2 - 2ab.\cos(\hat{C}) + b^2.cos^2(\hat{C}) + b^2.sen2(\hat{C}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow c^2 = a^2 + b^2\left(cos^2(\hat{C}) + sen^2(\hat{C})\right) - 2ab.\cos(\hat{C}).$$

E como $cos^2(\hat{A}) + sen^2(\hat{A}) = 1$, segue que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\hat{C}) \tag{4.53}$$

Para $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\hat{B})$, a demonstração é análoga a anterior.

Note que para a relação de $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\hat{A})$, temos $b^2 + c^2 = a^2$, logo temos $-2bc.\cos(\hat{A}) = 0$. De fato como o triângulo ABC é retângulo em A, ou seja, teremos $\cos(\hat{A}) = \cos(90°) = 0$, reduzindo-se ao caso do Teorema de Pitágoras.

4.12 Fórmulas de Prostaférese

4.12.1 $\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{cos}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{2}.\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}\right).\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}\right)$

Demonstração:

Temos para $\cos(x)$ que:

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{x+x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x+x+y-y}{2}\right) = \cos\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)+\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]$$

Logo,

$$\cos(x) = \cos\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)+\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (4.54)$$

Analogamente, para $\cos(y)$, temos:

$$\cos(y) = \cos\left(\frac{y+y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x-x+y+y}{2}\right) = \cos\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)-\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]$$

Logo,

$$\cos y = \cos\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)-\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (4.55)$$

Somando (4.54) e (4.55), temos:

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\,.\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (4.56)$$

4.12.2 $\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{cos}(\boldsymbol{y}) = -\mathbf{2}\,.\mathbf{sen}\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}\right).\mathbf{sen}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}\right)$

Subtraindo (4.55) de (4.54), temos:

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\,.\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (4.57)$$

4.12.3 $\mathbf{sen}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{sen}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{2}.\,\mathbf{sen}\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}\right).\,\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}\right)$

Demonstração:

Temos para $\operatorname{sen}(x)$ que:

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+x+y-y}{2}\right) = \operatorname{sen}\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right]$$

Logo,

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (4.58)$$

Analogamente, para $\operatorname{sen}(y)$, temos:

$$\operatorname{sen}(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{y+y}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x-x+y+y}{2}\right) = \operatorname{sen}\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right]$$

Logo,

$$\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}\left[\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (4.59)$$

Somando (4.58) e (4.59), temos:

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 2\,.\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (4.60)$$

4.12.4 $\mathbf{sen}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{sen}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{2}\,.\,\mathbf{sen}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}\right).\,\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}\right)$

Subtraindo (4.59) de (4.58), temos:

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2\,.\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (4.61)$$

4.13 Equações Trigonométricas

Toda equação em que figura uma função trigonométrica com arco desconhecido recebe o nome de **equação trigonométrica**.

Assim, são equações trigonométricas:

1) $sen(x) = sen(\pi)$

2) $cos(x) = \frac{1}{2}$

3) $2.sen(x) - cosec(x) = 1$

4) $cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = sen(x)$

5) $sen(x).tg(x) + 2.\cos(x) = 2$

6) $sen(2x) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Sejam *f(x)* e *g(x)* duas funções trigonométricas da variável real *x* e sejam D_1 e D_2 os seus respectivos domínios. **Resolver** a equação trigonométrica *f(x) = g(x)* significa determinar o conjunto *S*, denominado **conjunto solução** ou **conjunto verdade,** dos números *r* para os quais *f(r) = g(r)* é uma sentença verdadeira. Observemos que a condição necessária para que um certo *r* seja uma solução da equação dada é que $r \in D_1$ e $r \in D_2$.

Quase todas as equações trigonométricas reduzem-se a uma das três equações seguintes:

1ª) $sen(\alpha) = sen(\beta)$

2ª) $cos(\alpha) = cos(\beta)$

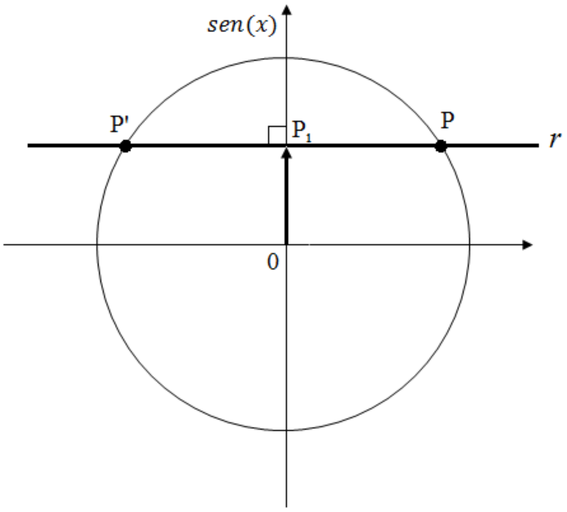
3ª) $tg(\alpha) = tg(\beta)$

denominadas, por esse motivo, *equações fundamentais*. Assim, antes de tudo, é necessário saber resolver as equações fundamentais para poder resolver qualquer outra equação trigonométrica.

4.13.1 Resolução da equação $sen(\boldsymbol{\alpha}) = sen(\boldsymbol{\beta})$:

Se $sen(\alpha) = sen(\beta) = OP_1$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, isto é, estão em P ou P'.

Figura 4.20: Representação $\mathrm{sen}(\alpha) = \mathrm{sen}(\beta) = \mathrm{OP}_1$



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são *côngruos*;

ou

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são *suplementares*.

Em resumo, temos:

$$sen(\alpha) = sen(\beta) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

1º exemplo: Resolver a equação $sen(x) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução:

$$sen(x) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ou \; x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2º exemplo: Resolver a equação $sen(3x) = 1$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução: Temos que

$$1 = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow sen(3x) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

3º exemplo: Resolver a equação $sen(x) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução:

$$sen(x) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4º exemplo: Resolver a equação $sen(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução: Temos que

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) \Rightarrow sen(x) = sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

5º exemplo: Resolver a equação $sen\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução:

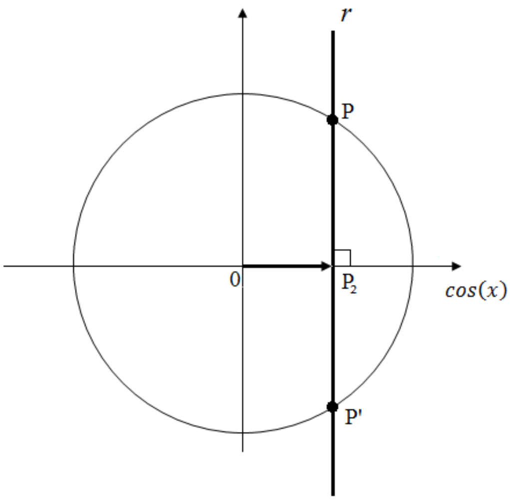
$$sen\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{2} = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ 2x - \frac{\pi}{2} = \pi - x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4.13.2 Resolução da equação $\boldsymbol{cos(\alpha) = cos(\beta)}$:

Se $cos(\alpha) = cos(\beta) = OP_2$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta *r* que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto P_2, isto é, estão em *P* ou *P'*.

Figura 4.21: Representação $\cos(\alpha) = \cos(\beta) = OP_2$



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são *côngruos*;

ou

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são *replementares ($\alpha + \beta = 360°$).*

Em resumo, temos:

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad ou \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

1º exemplo: Resolver a equação $cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução:

$$cos(x) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ } ou \text{ } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2º exemplo: Resolver a equação $cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução: Temos que

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow cos(x) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ou \; x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

3º exemplo: Resolver a equação $cos(x) = -\frac{1}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução:

$$-\frac{1}{2} = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Longrightarrow cos(x) = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{4} + 2k\pi \; ou \; x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4º exemplo: Resolver a equação $cos(2x) = cos(\pi)$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução:

$$cos(2x) = cos(\pi) \Rightarrow 2x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

5º exemplo: Resolver a equação $cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução:

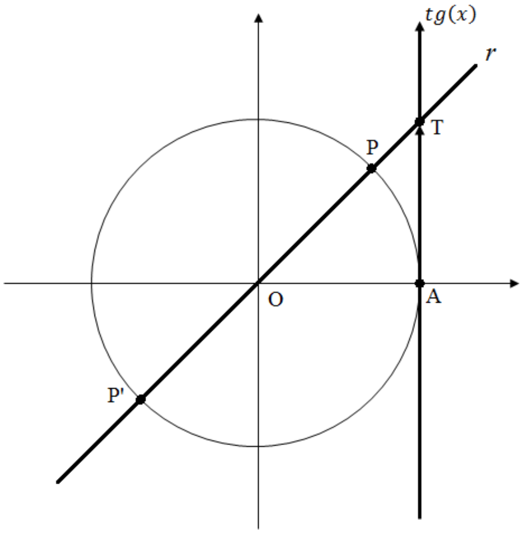
$$cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{2} = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ 2x - \frac{\pi}{2} = -x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \; ou \; x = \frac{\pi}{18} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4.13.3 Resolução da equação $\boldsymbol{tg(\alpha) = tg(\beta)}$:

Se $tg(\alpha) = tg(\beta) = AT$, então as imagens de α e β estão sobre a reta r determinada por O e T, isto é, estão em P ou P'.

Figura 4.22: Representação $\mathrm{tg}(\alpha) = \mathrm{tg}(\beta) = \mathrm{AT}$



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são *côngruos*;

ou

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, isto é, são *explementares (α - β=180°).*

Em resumo, temos:

$$tg(\alpha) = \mathrm{tg}(\beta) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \quad \alpha = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

1º exemplo: Resolver a equação $tg(x) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right)$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução:

$$tg(x) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2º exemplo: Resolver a equação $tg(2x) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução:

$$tg(2x) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

3º exemplo: Resolver a equação $tg(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução: Temos que

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow tg(x) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2º exemplo: Resolver a equação $tg\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, para $x \in \mathbb{R}$:

Resolução:

$$tg\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

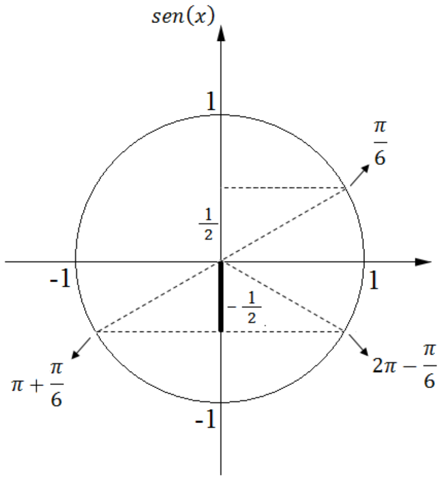
Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4.13.4 Soluções de equações trigonométricas diversas

1º exemplo: Vamos resolver a equação $sen(3x - \pi) = -\frac{1}{2}$, dando a solução geral.

Resolução: Observe a figura 4.23, abaixo:

Figura 4.23: Representação de $\text{sen}(3x - \pi) = -\frac{1}{2}$



Pela figura, temos:

$$sen(3x-\pi)=sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) \Longrightarrow 3x-\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \Longrightarrow 3x=\frac{7\pi}{6}+\pi+2k\pi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 3x=\frac{13\pi}{6}+2k\pi \Longrightarrow x=\frac{13\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

Ou

$$sen(3x-\pi)=sen\left(\frac{11\pi}{6}\right) \Longrightarrow 3x-\pi=\frac{11\pi}{6}+2k\pi \Longrightarrow 3x=\frac{11\pi}{6}+\pi+2k\pi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 3x=\frac{17\pi}{6}+2k\pi \Longrightarrow x=\frac{17\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$$

Resposta: $S=\left\{x\in\mathbb{R}\ |\ x=\frac{13\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\ \ ou\ \ x=\frac{17\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

2º exemplo: Vamos resolver a equação $sen(4x)=-1$, dando a solução geral.

Resolução:

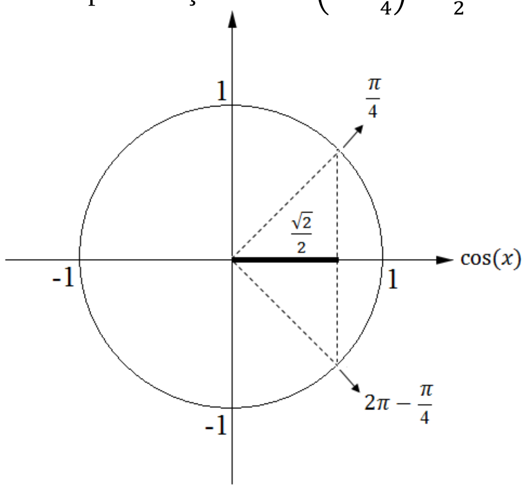
$$\left.\begin{array}{r}-1=sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\\ sen(4x)=-1\end{array}\right\} \Rightarrow sen(4x)=sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow 4x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Resposta: $S=\left\{x\in\mathbb{R}\ |\ x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

3º exemplo: Vamos resolver a equação $cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, dando a solução geral.

Resolução: Observe a figura 4.24, abaixo:

Figura 4.24: Representação de $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$



Pela figura, temos:

$$cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \Longrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2k\pi \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x=\frac{2\pi}{4}+2k\pi \Longrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) \Longrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}+2k\pi \Longrightarrow 3x=\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2k\pi \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x=\frac{8\pi}{4}+2k\pi \Longrightarrow x=2\pi+2k\pi=2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \;\; ou \;\; x=2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4º exemplo: Determinar a solução geral da equação $cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=0$.

Resolução: Como $0=cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, temos:

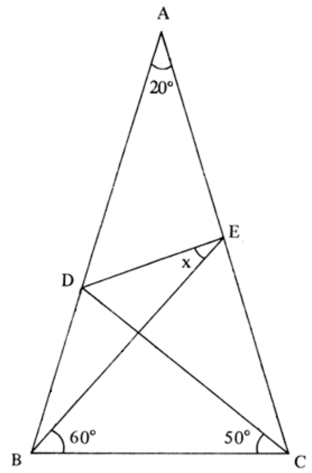
$$cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \Longrightarrow \frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Longrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+k\pi \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Resposta: $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

A seguir, apresento a resolução de um exercício que aparece com certa frequência em testes e avaliações matemáticas, conhecido como Triângulo Russo. Seguindo a proposta desse trabalho, apresento uma solução trigonométrica a esse exercício de maneira que utilizam-se vários conceitos já vistos até aqui.

4.14 Resolução Trigonométrica do Triângulo Russo

Na figura abaixo, sabendo que o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, determine a medida x, em graus, do ângulo $B\hat{E}D$.



Resolução:

Note que, como o triângulo ABC é isósceles, temos que $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 80°$. Seja $\{G\} = \overline{CD} \cap \overline{BE}$, obtemos assim o triângulo BCG, logo $B\hat{G}C = 70°$.

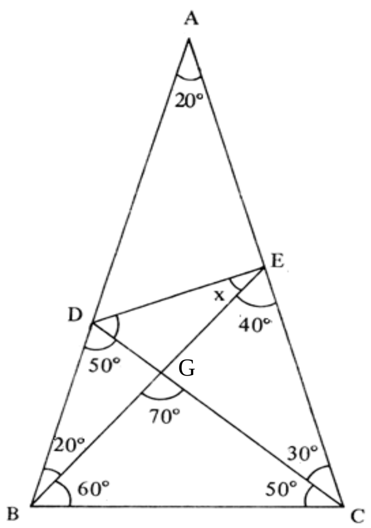
Observe que no triângulo BDG, $D\hat{B}G = A\hat{B}C - G\hat{B}C = 80° - 60° = 20°$. Note que $B\hat{G}C$ é ângulo externo do triângulo BDG, logo:

$$B\hat{G}C = D\hat{B}G + G\widehat{D}B \quad \Leftrightarrow \quad 70° = 20° + G\widehat{D}B \quad \Leftrightarrow \quad G\widehat{D}B = 50°$$

Analogamente, no triângulo CEG, $E\hat{C}G = A\hat{C}B - G\hat{C}B = 80° - 50° = 30°$. Temos também que $B\hat{G}C$ é ângulo externo do triângulo CEG, logo:

$$B\hat{G}C = E\hat{C}G + C\hat{E}G \quad \Leftrightarrow \quad 70° = 30° + C\hat{E}G \quad \Leftrightarrow \quad C\hat{E}G = 40°$$

Figura 4.25: Resolução do triângulo russo



Na figura 4.25 temos que $G\widehat{D}B = C\widehat{D}B$ e que $C\widehat{D}B$ é ângulo externo do triângulo ADC, isso implica que $B\widehat{D}C + A\widehat{D}C = 180°$, logo $A\widehat{D}C = 180° - 50° = 130°$.

Aplicando a lei dos senos no triângulo ACD, obtemos:

$$\frac{\overline{AC}}{sen\left(A\widehat{D}C\right)} = \frac{\overline{AD}}{sen\left(A\hat{C}D\right)} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{sen(A\widehat{D}C)}{sen(A\hat{C}D)} \qquad (4.62)$$

Substituindo $A\widehat{D}C = 130°$ e $A\hat{C}D = 30°$ na expressão (4.62), obtemos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{sen(130°)}{sen(30°)} = \frac{sen(90° + 40°)}{sen(30°)} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\cos(40°)}{sen(30°)} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = 2\,.\cos(40°) \qquad (4.63)$$

Aplicando agora, a Lei dos Senos no triângulo BCE, obtemos:

$$\frac{\overline{BE}}{sen\left(B\hat{C}E\right)} = \frac{\overline{BC}}{sen\left(B\hat{E}C\right)} \Leftrightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{sen(B\hat{C}E)}{sen(B\hat{E}C)} \qquad (4.64)$$

Substituindo $B\hat{C}E = 80°$ e $B\hat{E}C = 40°$ na expressão (4.64), obtemos:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{sen(80°)}{sen(40°)} \Leftrightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{sen(2\,.40°)}{sen(40°)} \Leftrightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{2\,.sen(40°)\cos(40°)}{sen(40°)} \Leftrightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = 2\,.\cos(40°) \qquad (4.65)$$

Das expressões (4.63) e (4.65), segue que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \qquad (4.66)$$

Como $B\hat{C}D = B\widehat{D}C$ temos que o triângulo BCD é isósceles, logo $\overline{BC} = \overline{BD}$. Substituindo em (4.66), temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \qquad (4.67)$$

Note agora que, dada a razão obtida em (4.67) e que $D\hat{B}E = D\hat{A}C = 20°$, pelo caso de semelhança LAL, temos que os triângulos BDE e ADC são semelhantes e portanto $A\hat{C}D = B\hat{E}D = 30°$, ou seja, $x = 30°$.

5 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo apresento algumas identidades e teoremas em suas formas trigonométricas, de maneira a demonstrá-las utilizando apenas conceitos desenvolvidos nos capítulos anteriores. Todas as passagens foram realizadas de modo que um aluno, ao final do ensino médio, possa acompanhar e entender os diferentes argumentos que são utilizados nas demonstrações e como os conceitos discutidos em uma aula regular podem ser aplicados a temas não frequentemente abordados em uma sala de aula.

5.1 Teorema de Menelaus

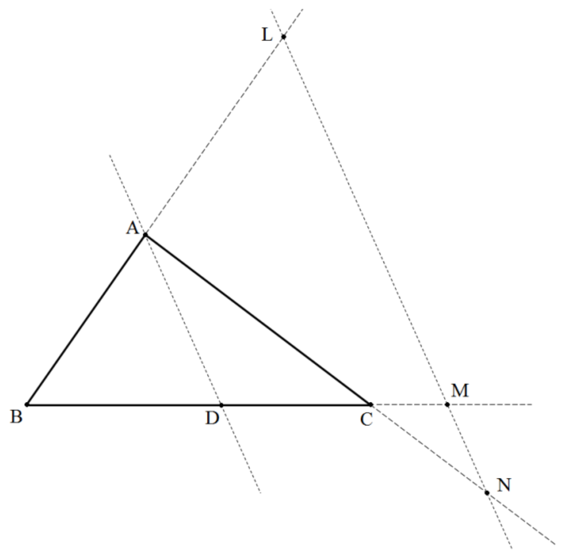
Sejam três pontos L, M e N localizados respectivamente nas retas suportes dos lados AB, BC e CA de um triângulo ABC (qualquer) e diferentes dos vértices. Então L, M e N são colineares se, e somente se

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \tag{5.1}$$

Demonstração:

Seja o ΔABC, e sejam L, M e N pontos colineares pertencentes as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$, respectivamente. Pelo vértice A, traça-se uma reta $\overleftrightarrow{AD}$ paralela a $\overleftrightarrow{LM}$, conforme figura 5.1. Pelo Teorema de Tales as paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{LM}$ cortam $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ em partes proporcionais, daí

Figura 5.1: Representação $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{LM}$



$$\frac{LA}{LB} = \frac{MD}{MB} \iff \frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MD} = 1 \tag{5.2}$$

Aplicando o Teorema de Tales às paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{LM}$ que cortam também $\overleftrightarrow{AN}$ e $\overleftrightarrow{DM}$ em partes proporcionais. Assim

$$\frac{MD}{NA} = \frac{MC}{NC} \iff \frac{MD}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1 \tag{5.3}$$

Multiplicando (5.2) e (5.3), temos que:

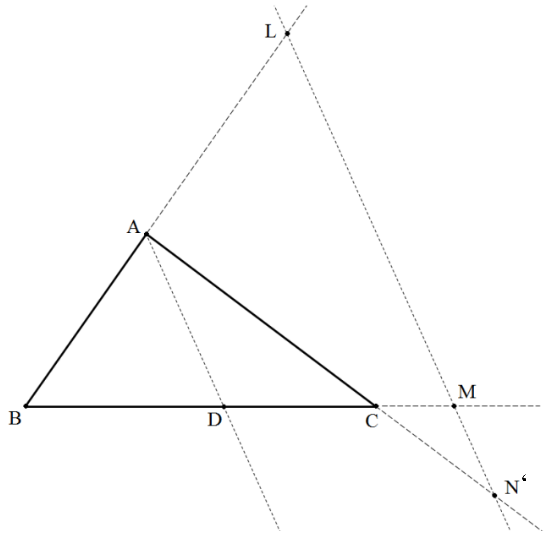
$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MD} \cdot \frac{MD}{NA} \cdot \frac{NC}{MC} = 1 \tag{5.4}$$

Logo

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \tag{5.5}$$

Reciprocamente, sejam L, M e N pontos pertencentes as retas suportes $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$, respectivamente, de um ΔABC tais que satisfazem a relação (5.5). Seja N' o ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{LM}$ com $\overleftrightarrow{AC}$, conforme figura 5.2 abaixo.

Figura 5.2: Representação de N'



Pelo que foi provado, temos que

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{N'C}{N'A} = 1 \tag{5.6}$$

De (5.5) e (5.6), temos

$$\frac{NC}{NA} = \frac{N'C}{N'A} \tag{5.7}$$

Como existe apenas um único ponto que divide o segmento $\overline{CA}$ numa dada razão, temos que N' = N.

Portanto L, M e N são colineares.

5.1.1 Forma Trigonométrica do Teorema de Menelaus

Sejam três pontos L, M e N localizados respectivamente nas retas suportes dos lados AB, BC e CA de um triângulo ABC (qualquer) e diferentes dos vértices. Então L, M e N são colineares se, e somente se

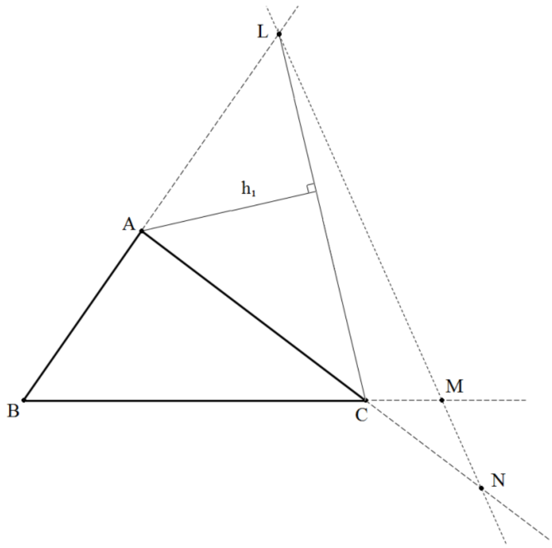
$$\frac{sen(L\hat{C}A)}{sen(L\hat{C}B)} \cdot \frac{sen(M\hat{A}B)}{sen(M\hat{A}C)} \cdot \frac{sen(N\hat{B}C)}{sen(N\hat{B}A)} = 1 \tag{5.8}$$

chamada forma Trigonométrica do Teorema de Menelaus.

Demonstração:

Ligando-se o vértice C de um triângulo ABC ao ponto L (distinto de A e de B) da semirreta $\overrightarrow{BA}$, temos o triângulo BCL. Considerando o triângulo ACL na figura 5.3 abaixo, seja h_1 a altura referente ao lado CL. Logo temos:

Figura 5.3: Triângulo ACL de altura h_1



$$sen(L\hat{C}A) = \frac{h_1}{AC} \iff h_1 = AC.sen(L\hat{C}A)$$

Note ainda que:

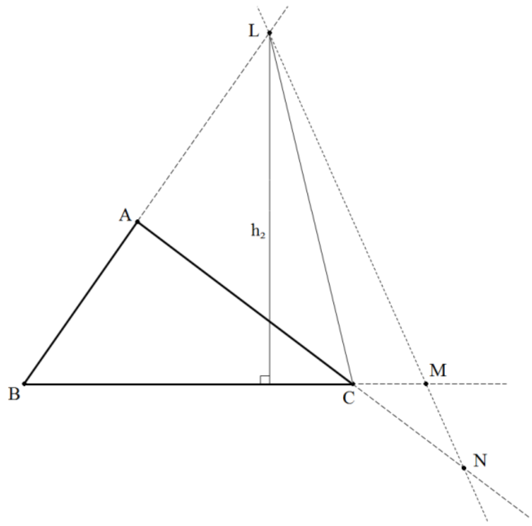
$$Área(\Delta ACL) = \frac{LC.h_1}{2}$$

Substituindo $h_1 = AC.sen(L\hat{C}A)$ na expressão anterior, temos:

$$2.\acute{A}rea(\Delta ACL) = LC.AC.sen(L\hat{C}A) \quad (5.9)$$

Considerando agora o triângulo BCL na figura 5.4 abaixo, seja h_2 a altura referente ao lado BC. Logo temos:

Figura 5.4: Triângulo BCL de altura h_2



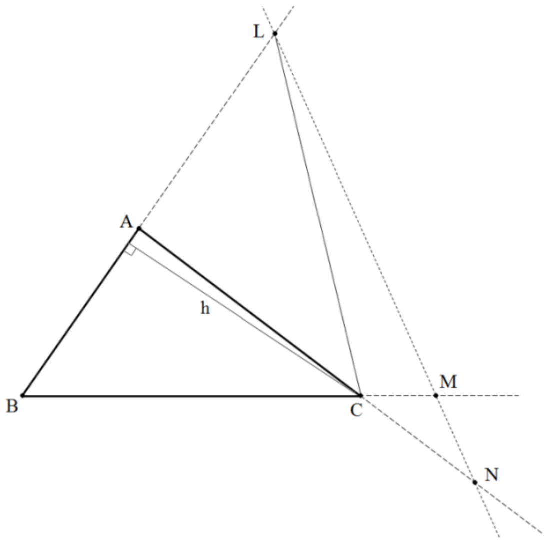
$$sen(L\hat{C}B) = \frac{h_2}{LC} \iff h_2 = LC.sen(L\hat{C}B)$$

Note ainda que, substituindo $h_2 = LC.sen(L\hat{C}B)$ ao determinar a área do triângulo BCL, temos

$$\acute{A}rea(\Delta BCL) = \frac{BC.h_2}{2} \iff 2.\acute{A}rea(\Delta BCL) = BC.LC.sen(L\hat{C}B) \quad (5.10)$$

Como a reta suporte dos lados BL e BA é a mesma, a altura h referente aos lados LA e LB dos triângulos ACL e BCL, respectivamente, tem a mesma medida. Assim, para o triângulo ACL na figura 5.5 abaixo, obtemos:

Figura 5.5: Triângulo ACL de altura h



$$Área(\Delta ACL) = \frac{LA.h}{2} \iff LA = \frac{2.Área(\Delta ACL)}{h} \quad (5.11)$$

Analogamente, para o triângulo BCL, temos:

$$Área(\Delta BCL) = \frac{LB.h}{2} \Longrightarrow LB = \frac{2.Área(\Delta BCL)}{h} \quad (5.12)$$

Por fim, a razão $\frac{LA}{LB}$ será dada por:

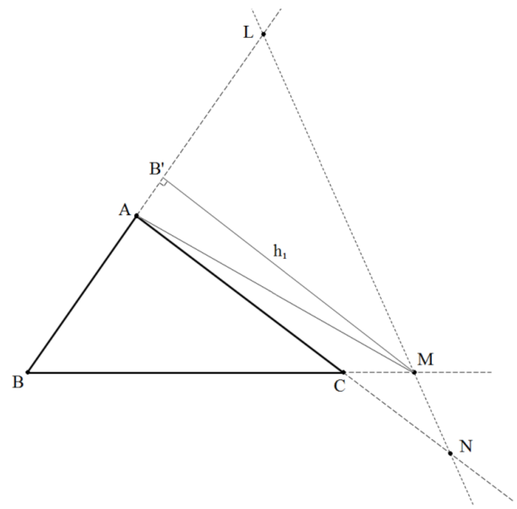
$$\frac{LA}{LB} = \frac{\frac{2.Área(\Delta ACL)}{h}}{\frac{2.Área(\Delta BCL)}{h}} = \frac{2.Área(\Delta ACL)}{2.Área(\Delta BCL)} \quad (5.13)$$

Substituindo os resultados obtidos em (5.9) e (5.10) na expressão (5.13), temos:

$$\frac{LA}{LB} = \frac{2.Área(\Delta ACL)}{2.Área(\Delta BCL)} = \frac{LC.AC.sen(L\hat{C}A)}{BC.LC.sen(L\hat{C}B)} = \frac{AC.sen(L\hat{C}A)}{BC.sen(L\hat{C}B)} \quad (5.14)$$

Ligando-se o vértice A do triângulo ABC ao ponto M (distinto de B e de C) da semirreta $\overrightarrow{BC}$, temos o triângulo AMB. Seja B' o pé da altura h_1 referente ao lado AB, conforme a figura 6.5 abaixo. Logo temos:

Figura 5.6: Triângulo AMB de altura h_1



$$sen(M\hat{A}B) = sen(180° - M\hat{A}B) = sen(M\hat{A}B') = \frac{h_1}{MA}$$

Segue que,

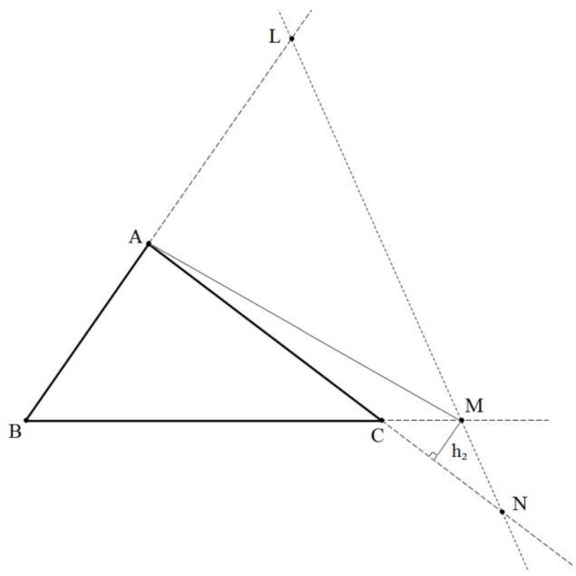
$$h_1 = MA.sen(M\hat{A}B') = MA.sen(M\hat{A}B) \qquad (5.15)$$

Substituindo $h_1 = MA.sen(M\hat{A}B)$ ao determinar a área do triângulo AMB, temos

$$\acute{A}rea(\Delta AMB) = \frac{AB.h_1}{2} \iff 2.\acute{A}rea(\Delta AMB) = AB.MA.sen(M\hat{A}B) \qquad (5.16)$$

Considerando agora o triângulo AMC, como na figura 5.7, seja h_2 a altura referente ao lado AC. Logo temos:

Figura 5.7: Triângulo AMC de altura h_2



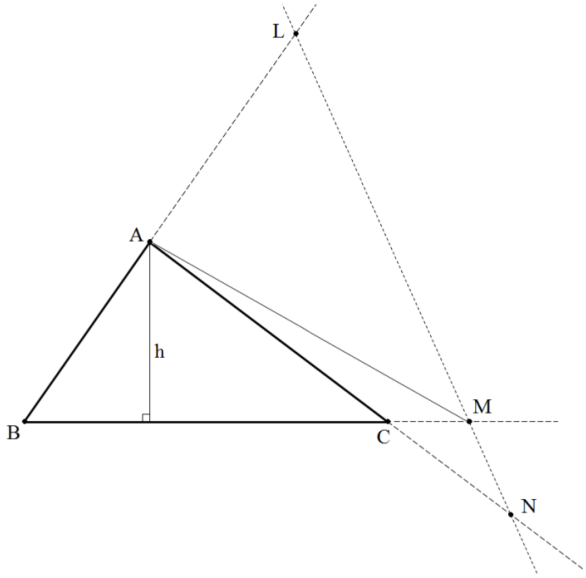
$$sen(M\hat{A}C) = \frac{h_2}{MA} \implies h_2 = MA.sen(M\hat{A}C) \qquad (5.17)$$

Note ainda que:

$$\acute{A}rea(\Delta AMC) = \frac{AC.h_2}{2} \iff 2.\acute{A}rea(\Delta AMC) = AC.MA.sen(M\hat{A}C) \qquad (5.18)$$

Como a reta suporte dos lados BM e MC é a mesma, a altura h referente aos lados BC e MC dos triângulos AMB e AMC, respectivamente, tem a mesma medida. Assim, para o triângulo AMB na figura 5.8 abaixo, obtemos:

Figura 5.8: Triângulo AMB de altura h



$$Área(\Delta AMB) = \frac{MB.h}{2} \iff MB = \frac{2.Área(\Delta AMB)}{h} \tag{5.19}$$

Analogamente, para o triângulo AMC, temos:

$$Área(\Delta AMC) = \frac{MC.h}{2} \iff MC = \frac{2.Área(\Delta AMC)}{h} \tag{5.20}$$

Por fim, a razão $\frac{MB}{MC}$ será dada por:

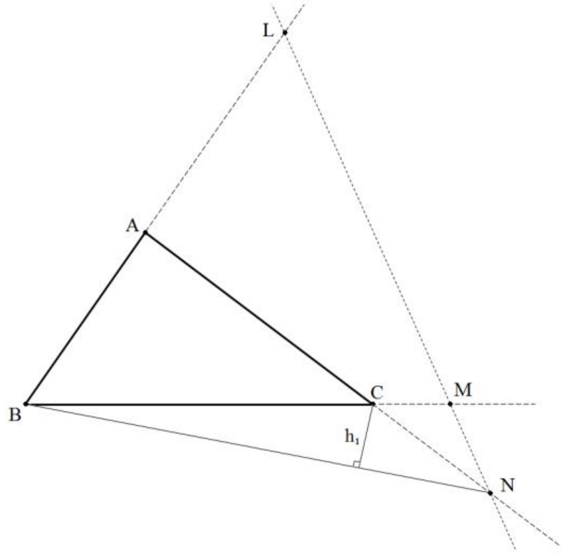
$$\frac{MB}{MC} = \frac{\frac{2.Área(\Delta AMB)}{h}}{\frac{2.Área(\Delta AMC)}{h}} = \frac{2.Área(\Delta AMB)}{2.Área(\Delta AMC)} \tag{5.21}$$

Substituindo os resultados obtidos em (5.16) e (5.18) na expressão (5.21), temos:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{2.Área(\Delta AMB)}{2.Área(\Delta AMC)} = \frac{AB.MA.sen(M\hat{A}B)}{AC.MA.sen(M\hat{A}C)} = \frac{AB.sen(M\hat{A}B)}{AC.sen(M\hat{A}C)} \tag{5.22}$$

Ligando-se o vértice B do triângulo ABC ao ponto N (distinto de A e de C) da semirreta $\overrightarrow{AC}$, temos o triângulo ABN. Considerando o triângulo BCN na figura 5.9 a seguir, seja h_1 a altura referente ao lado BN. Logo temos:

Figura 5.9: Triângulo BCN de altura h_1



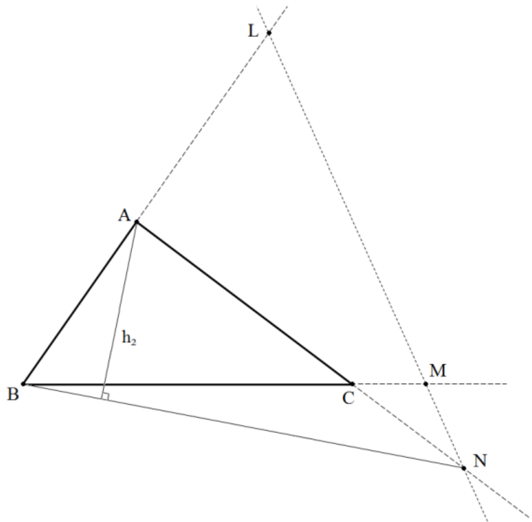
$$sen(N\hat{B}C) = \frac{h_1}{BC} \iff h_1 = BC.sen(N\hat{B}C) \quad (5.23)$$

Note que substituindo $h_1 = BC.sen(N\hat{B}C)$ ao determinar a área do triângulo BCN, temos:

$$Área(\Delta BCN) = \frac{BN.h_1}{2} \iff 2.Área(\Delta BCN) = BN.BC.sen(N\hat{B}C) \quad (5.24)$$

Considerando agora o triângulo ABN na figura 5.10 abaixo, seja h_2 a altura referente ao lado BN. Logo temos:

Figura 5.10: Triângulo ABN de altura h_2



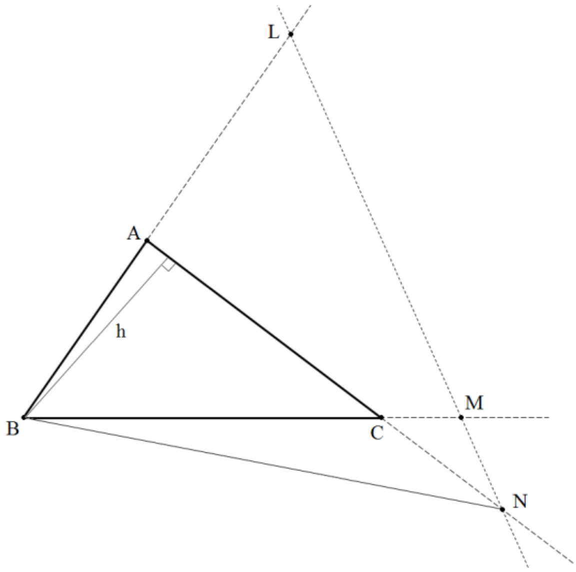
$$sen(N\hat{B}A) = \frac{h_2}{AB} \iff h_2 = AB.sen(N\hat{B}A) \quad (5.25)$$

Substituindo $h_2 = AB.sen(N\hat{B}A)$ ao determinar a área do triângulo ABN, temos:

$$Área(\Delta ABN) = \frac{BN.h_2}{2} \iff 2.Área(\Delta ABN) = BN.AB.sen(N\hat{B}A) \qquad (5.26)$$

Como a reta suporte dos lados NC e NA é a mesma, a altura h referente aos lados NC e NA dos triângulos BCN e ABN, respectivamente, tem a mesma medida. Assim, para o triângulo BCN na figura 5.11 abaixo, obtemos:

Figura 5.11: Triângulo BCN de altura h



$$Área(\Delta BCN) = \frac{NC.h}{2} \iff NC = \frac{2.Área(\Delta BCN)}{h} \qquad (5.27)$$

Analogamente, para o triângulo ABN, temos:

$$Área(\Delta ABN) = \frac{NA.h}{2} \iff NA = \frac{2.Área(\Delta ABN)}{h} \qquad (5.28)$$

Por fim, a razão $\frac{NC}{NA}$ será dada por:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{\frac{2.Área(\Delta BCN)}{h}}{\frac{2.Área(\Delta ABN)}{h}} = \frac{2.Área(\Delta BCN)}{2.Área(\Delta ABN)} \qquad (5.29)$$

Substituindo os resultados obtidos em (5.24) e (5.26) na expressão (5.29), temos:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{2.\acute{A}rea(\Delta BCN)}{2.\acute{A}rea(\Delta ABN)} = \frac{BN.BC.sen\left(N\hat{B}C\right)}{BN.AB.sen\left(N\hat{B}A\right)} = \frac{BC.sen\left(N\hat{B}C\right)}{AB.sen\left(N\hat{B}A\right)} \tag{5.30}$$

Pelo Teorema de Menelaus, temos que três pontos L, M e N localizados respectivamente nas retas suportes dos lados AB, BC e CA de um triângulo ABC (qualquer) e diferentes dos vértices são colineares se, e somente se

$$\frac{LA}{LB}.\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA} = 1$$

Substituindo os resultados obtidos em (5.14), (5.22) e (5.30) no Teorema acima, obtemos:

$$\frac{LA}{LB}.\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA} = \left[\frac{AC.sen\left(L\hat{C}A\right)}{BC.sen\left(L\hat{C}B\right)}\right].\left[\frac{AB.sen\left(M\hat{A}B\right)}{AC.sen\left(M\hat{A}C\right)}\right].\left[\frac{BC.sen\left(N\hat{B}C\right)}{BA.sen\left(N\hat{B}A\right)}\right] = 1$$

Concluímos assim que,

$$\frac{sen\left(L\hat{C}A\right)}{sen\left(L\hat{C}B\right)}.\frac{sen\left(M\hat{A}B\right)}{sen\left(M\hat{A}C\right)}.\frac{sen\left(N\hat{B}C\right)}{sen\left(N\hat{B}A\right)} = 1 \tag{5.31}$$

5.2 Teorema de Ceva

Cevianas são segmentos que possuem extremidades no vértice de um triângulo e na reta suporte ao lado oposto a este vértice.

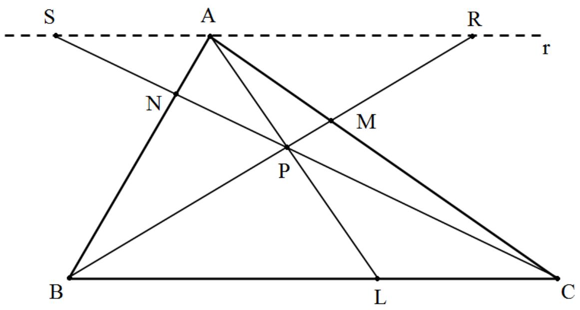
Seja ABC um triângulo e sejam N, L e M pontos sobre retas suportes dos lados AB, BC e CA, respectivamente. Então, as cevianas AL, BM e CN são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA} = 1 \tag{5.32}$$

Demonstração:

Seja r uma reta paralela a $\overline{BC}$ passando por A, conforme figura abaixo. Obtemos assim, $\{S\} = r \cap \overrightarrow{CN}$ e $\{R\} = r \cap \overrightarrow{BM}$.

Figura 5.12: Representação de $\{S\} = r \cap \overrightarrow{CN}$ e $\{R\} = r \cap \overrightarrow{BM}$



Como r é paralela a $\overline{BC}$, temos pelo caso AA, da figura 5.12 tiramos as seguintes semelhanças:

$$\Delta AMR \sim \Delta CMB \iff \frac{MA}{CM} = \frac{AR}{BC} \tag{5.33}$$

$$\Delta BNC \sim \Delta ANS \iff \frac{NB}{AN} = \frac{BC}{SA} \tag{5.34}$$

$$\Delta CPL \sim \Delta SPA \iff \frac{LC}{SA} = \frac{LP}{AP} \tag{5.35}$$

$$\Delta BPL \sim \Delta RPA \iff \frac{BL}{AR} = \frac{LP}{AP} \tag{5.36}$$

De (5.35) e (5.36) vem que

$$\frac{LC}{SA} = \frac{BL}{AR} \iff \frac{LC}{BL} = \frac{SA}{AR} \tag{5.37}$$

Multiplicando membro a membro (5.33), (5.34) e (5.37), obtemos

$$\frac{MA}{CM} \cdot \frac{NB}{AN} \cdot \frac{LC}{BL} = \frac{AR}{BC} \cdot \frac{BC}{SA} \cdot \frac{SA}{AR} \iff \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \tag{5.38}$$

Reciprocamente, dada a figura 5.12, seja agora, $\{P\} = \overline{BM} \cap \overline{AL}$.

Estendemos o segmento $\overline{PC}$ até intersectar $\overleftrightarrow{AB}$ gerando assim N'. Como $\overline{AL}, \overline{BM}$ e $\overline{CN'}$ são concorrentes, aplicando o que foi provado anteriormente temos

$$\frac{AN'}{N'B} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \tag{5.39}$$

mas por hipótese,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \tag{5.40}$$

o que implica

$$\frac{AN'}{N'B} = \frac{AN}{NB} \tag{5.41}$$

mas isso ocorre se, e somente se, $N' = N$.

5.2.1 Forma Trigonométrica do Teorema de Ceva

Seja ABC um triângulo e sejam N, L e M pontos sobre retas suportes dos lados AB, BC e CA, respectivamente. Então, as cevianas AL, BM e CN são concorrentes se, e somente se,

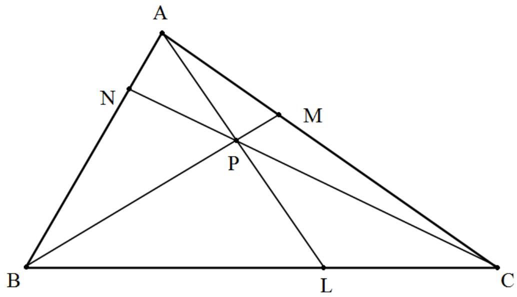
$$\frac{sen(A\hat{C}N)}{sen(B\hat{C}N)} \cdot \frac{sen(B\hat{A}L)}{sen(L\hat{A}C)} \cdot \frac{sen(C\hat{B}M)}{sen(A\hat{B}M)} = 1 \tag{5.42}$$

chamada forma Trigonométrica do Teorema de Ceva.

Demonstração:

Suponha que as cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ são concorrentes em P, conforme a figura 5.13 abaixo:

Figura 5.13: Cevianas do triângulo ABC concorrentes em P



Aplicando a Lei dos Senos nos triângulo $\Delta ABP, \Delta BCP$ e ΔACP, obtemos:

$$\frac{BP}{sen(B\hat{A}P)} = \frac{AP}{sen(A\hat{B}P)} \iff \frac{AP}{BP} = \frac{sen(A\hat{B}P)}{sen(B\hat{A}P)} \tag{5.43}$$

$$\frac{BP}{sen(B\hat{C}P)} = \frac{CP}{sen(C\hat{B}P)} \iff \frac{BP}{CP} = \frac{sen(B\hat{C}P)}{sen(C\hat{B}P)} \tag{5.44}$$

$$\frac{CP}{sen(P\hat{A}C)} = \frac{AP}{sen(A\hat{C}P)} \iff \frac{CP}{AP} = \frac{sen(P\hat{A}C)}{sen(A\hat{C}P)} \tag{5.45}$$

Multiplicando os resultados obtidos em (5.43), (5.44) e (5.45), membro a membro das igualdades, chegamos a:

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CP}{AP} = \frac{sen(A\hat{B}P)}{sen(B\hat{A}P)} \cdot \frac{sen(B\hat{C}P)}{sen(C\hat{B}P)} \cdot \frac{sen(P\hat{A}C)}{sen(A\hat{C}P)} \tag{5.46}$$

O que é equivalente a:

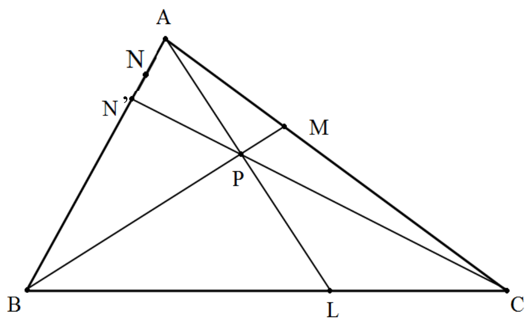
$$\frac{sen(A\hat{C}P)}{sen(B\hat{C}P)} \cdot \frac{sen(B\hat{A}P)}{sen(P\hat{A}C)} \cdot \frac{sen(C\hat{B}P)}{sen(A\hat{B}P)} = 1 \tag{5.47}$$

Note que, como se pode observar na figura 5.13, $\mathrm{sen}(\mathrm{A\hat{C}P}) = \mathrm{sen}(\mathrm{A\hat{C}N})$, $\mathrm{sen}(\mathrm{B\hat{C}P}) = \mathrm{sen}(\mathrm{B\hat{C}N})$, $\mathrm{sen}(\mathrm{B\hat{A}P}) = \mathrm{sen}(\mathrm{B\hat{A}L})$, $\mathrm{sen}(\mathrm{P\hat{A}C}) = \mathrm{sen}(\mathrm{L\hat{A}C})$, $\mathrm{sen}(\mathrm{C\hat{B}P}) = \mathrm{sen}(\mathrm{C\hat{B}M})$ e por fim $\mathrm{sen}(\mathrm{A\hat{B}P}) = \mathrm{sen}(\mathrm{A\hat{B}M})$. Logo

$$\frac{sen(A\hat{C}N)}{sen(B\hat{C}N)} \cdot \frac{sen(B\hat{A}L)}{sen(L\hat{A}C)} \cdot \frac{sen(C\hat{B}M)}{sen(A\hat{B}M)} = 1 \tag{5.48}$$

Reciprocamente, seja P o ponto de interseção das cevianas $\overline{AL}$ e $\overline{BM}$. Considere a ceviana que parte de C, passa por P e encontra o segmento $\overline{AB}$ no ponto N'. Veja a figura 5.14 ilustrativa abaixo:

Figura 5.14: Representação da ceviana CN'



Pela primeira parte da demonstração, uma vez que as cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN'}$ são concorrentes em P, temos:

$$\frac{sen\left(A\hat{C}N'\right)}{sen\left(B\hat{C}N'\right)}.\frac{sen\left(B\hat{A}L\right)}{sen\left(L\hat{A}C\right)}.\frac{sen\left(C\hat{B}M\right)}{sen\left(A\hat{B}M\right)} = 1 \tag{5.49}$$

Por outra parte, por hipótese:

$$\frac{sen(A\hat{C}N)}{sen(B\hat{C}N)}.\frac{sen(B\hat{A}L)}{sen(L\hat{A}C)}.\frac{sen(C\hat{B}M)}{sen(A\hat{B}M)} = 1 \tag{5.50}$$

Note que:

$$B\hat{C}N' + A\hat{C}N' = B\hat{C}N + A\hat{C}N = B\hat{C}A$$

Logo, temos:

$$A\hat{C}N' = B\hat{C}A - B\hat{C}N' \quad \text{e} \quad A\hat{C}N = B\hat{C}A - B\hat{C}N \tag{5.51}$$

Segue daí que:

$$\frac{sen(A\hat{C}N')}{sen(B\hat{C}N')}.\frac{sen(B\hat{A}L)}{sen(L\hat{A}C)}.\frac{sen(C\hat{B}M)}{sen(A\hat{B}M)} = \frac{sen(A\hat{C}N)}{sen(B\hat{C}N)}.\frac{sen(B\hat{A}L)}{sen(L\hat{A}C)}.\frac{sen(C\hat{B}M)}{sen(A\hat{B}M)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{sen(A\hat{C}N')}{sen(B\hat{C}N')} = \frac{sen(A\hat{C}N)}{sen(B\hat{C}N)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{sen(A\hat{C}N')}{sen(A\hat{C}N)} = \frac{sen(B\hat{C}N')}{sen(B\hat{C}N)} \tag{5.52}$$

Assim, substituindo (5.51) em (5.52), obtemos:

$$\frac{sen(B\hat{C}N')}{sen(B\hat{C}N)} = \frac{sen(B\hat{C}A - B\hat{C}N')}{sen(B\hat{C}A - B\hat{C}N)} \tag{5.53}$$

O que equivale a:

$$\frac{sen(B\hat{C}N')}{sen(B\hat{C}N)} = \frac{sen\left(B\hat{C}A\right).\cos\left(B\hat{C}N'\right) - sen\left(B\hat{C}N'\right).cos\left(B\hat{C}A\right)}{sen\left(B\hat{C}A\right).\cos\left(B\hat{C}N\right) - sen\left(B\hat{C}N\right).cos\left(B\hat{C}A\right)} \tag{5.54}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade em (5.54) por $\frac{sen(B\hat{C}N)}{sen(B\hat{C}N')}$, obtemos:

$$1 = \frac{sen(B\hat{C}N)}{sen(B\hat{C}N')} . \left[\frac{sen(B\hat{C}A).\cos(B\hat{C}N') - sen(B\hat{C}N').cos(B\hat{C}A)}{sen(B\hat{C}A).\cos(B\hat{C}N) - sen(B\hat{C}N).cos(B\hat{C}A)} \right] \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{sen(B\hat{C}N).sen(B\hat{C}A).\cos(B\hat{C}N') - sen(B\hat{C}N).sen(B\hat{C}N').cos(B\hat{C}A)}{sen(B\hat{C}N').sen(B\hat{C}A).\cos(B\hat{C}N) - sen(B\hat{C}N').sen(B\hat{C}N).cos(B\hat{C}A)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen(B\hat{C}N').sen(B\hat{C}A).\cos(B\hat{C}N) = sen(B\hat{C}N).sen(B\hat{C}A).\cos(B\hat{C}N') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen(B\hat{C}N').\cos(B\hat{C}N) = sen(B\hat{C}N).\cos(B\hat{C}N') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{sen(B\hat{C}N')}{\cos(B\hat{C}N')} = \frac{sen(B\hat{C}N)}{\cos(B\hat{C}N)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg(B\hat{C}N') = tg(B\hat{C}N) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad B\hat{C}N' = B\hat{C}N \tag{5.55}$$

De fato, temos que se $tg(B\hat{C}N') = tg(B\hat{C}N) \Longleftrightarrow B\hat{C}N' = B\hat{C}N$ ou $B\hat{C}N' = 180° + B\hat{C}N$, no qual para $tg(180° + B\hat{C}N)$, temos:

$$tg(180° + B\hat{C}N) = \frac{tg(180°) + tg(B\hat{C}N)}{1 - tg(180°).\ tg(B\hat{C}N)} = \frac{0 + tg(B\hat{C}N)}{1 - 0\ .\ tg(B\hat{C}N)} = tg(B\hat{C}N)$$

Agora, sendo $B\hat{C}N' = B\hat{C}N$, obtemos $N' = N$, portanto, a ceviana $\overline{CN'}$ coincide com a ceviana $\overline{CN}$. Concluímos que as cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ são concorrentes em P.

A seguir, apresento as demonstrações geométrica e trigonométrica de um dos pontos notáveis do triângulo, o incentro. A ideia é comparar as demonstrações e verificar uma possível aplicação do Teorema de Ceva Trigonométrico de maneira que seja possível visualizar a praticidade de sua utilização. De fato, concluímos mais rapidamente que as bissetrizes internas do triângulo concorrem em um único ponto.

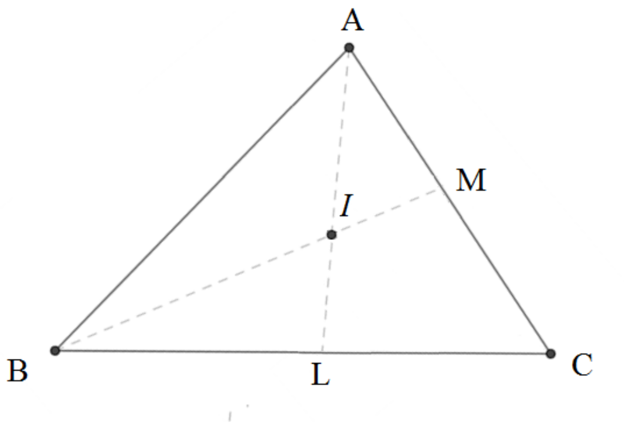
5.2.2 Demonstração do Incentro via Geometria

As bissetrizes internas de todos os triângulos concorrem em um único ponto, denominado **incentro** do triângulo.

Demonstração:

Considere o triângulo ABC na figura 5.15 abaixo e sejam $\overline{AL}$ e $\overline{BM}$ as bissetrizes internas dos ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}C$, respectivamente. Seja ainda I o ponto de intersecção entre $\overline{AL}$ e $\overline{BM}$.

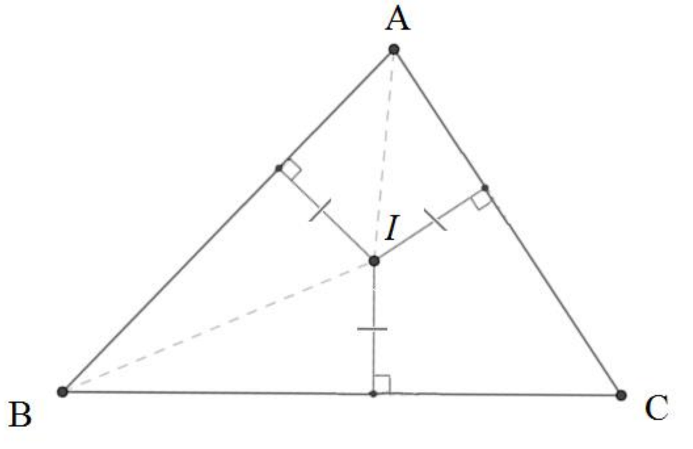
Figura 5.15: Ponto I de intersecção entre $\overline{AL}$ e $\overline{BM}$



Como I pertence à bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, segue que I equidista dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC. Mas I pertence também à bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, segue novamente que I equidista dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

Assim, temos que I equidista dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, segue que I equidista dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, conforme a figura 5.16 abaixo:

Figura 5.16: Ponto I equidistante de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$



Portanto I pertence à bissetriz interna do ângulo $B\hat{C}A$. Logo as bissetrizes internas do triângulo ABC concorrem em um único ponto.

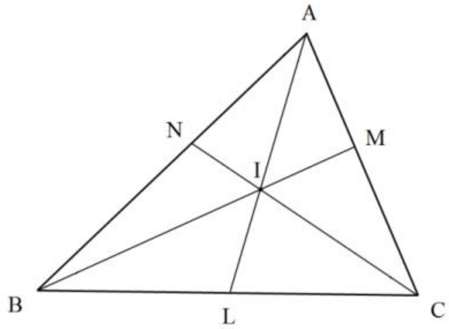
5.2.3 Demonstração do Incentro via Teorema de Ceva Trigonométrico

As bissetrizes internas de todos os triângulos concorrem em um único ponto, denominado **incentro** do triângulo.

Demonstração:

Considere um triângulo ABC representado baixo e sejam $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ as bissetrizes internas referentes aos ângulos $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$, respectivamente. Seja I o incentro do triângulo ABC, dado pela intersecção das bissetrizes internas, como na figura 5.17 abaixo:

Figura 5.17: Incentro I do triângulo ABC



De acordo com a forma trigonométrica do Teorema de Ceva, as cevianas $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ concorrem em um único ponto se, e somente se

$$\frac{sen(A\hat{C}N)}{sen(B\hat{C}N)}.\frac{sen(B\hat{A}L)}{sen(L\hat{A}C)}.\frac{sen(C\hat{B}M)}{sen(A\hat{B}M)} = 1$$

Como $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ são bissetrizes, considere $A\hat{C}N = B\hat{C}N = \gamma$,

$B\hat{A}L = L\hat{A}C = \alpha$ e $C\hat{B}M = A\hat{B}M = \beta$.

Segue que:

$$\frac{sen(A\hat{C}N)}{sen(B\hat{C}N)}.\frac{sen(B\hat{A}L)}{sen(L\hat{A}C)}.\frac{sen(C\hat{B}M)}{sen(A\hat{B}M)} = \frac{sen\,\gamma}{sen\,\gamma}.\frac{sen\,\alpha}{sen\,\alpha}.\frac{sen\,\beta}{sen\,\beta} = 1\,.\,1\,.\,1 = 1$$

Logo, temos:

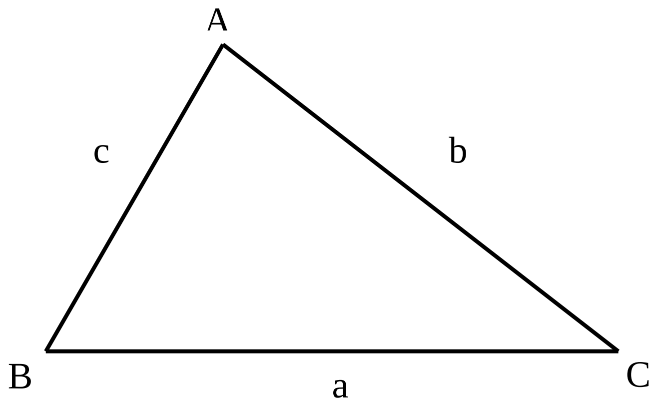
$$\frac{sen(A\hat{C}N)}{sen(B\hat{C}N)}.\frac{sen(B\hat{A}L)}{sen(L\hat{A}C)}.\frac{sen(C\hat{B}M)}{sen(A\hat{B}M)} = 1$$

Portanto, $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ concorrem em um único ponto, ou seja, o Incentro I é o ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo ABC.

5.3 Fórmulas de Napier

Dado um triângulo ABC qualquer, de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, conforme a figura 5.18 abaixo:

Figura 5.18: Triângulo ABC de lados a, b e c



Considerando as medidas $A = B\hat{A}C$, $B = A\hat{B}C$ e $C = A\hat{C}B$, temos as seguintes relações:

$$tg\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{b-c}{b+c}\ .\ cotg\left(\frac{A}{2}\right) \qquad (i)$$

$$tg\left(\frac{C-A}{2}\right) = \frac{c-a}{c+a}\ .\ cotg\left(\frac{B}{2}\right) \qquad (ii)$$

$$tg\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b}\ .\ cotg\left(\frac{C}{2}\right) \qquad (iii)$$

Demonstração:

Caso *(i):*

Pela Lei dos Senos, temos:

$$\frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)} \iff b = c\,.\frac{sen(B)}{sen(C)} \qquad (5.56)$$

Subtraindo *c* em ambos os membros da igualdade (5.56) obtemos:

$$b - c = c\,.\frac{sen(B)}{sen(C)} - c \ \Leftrightarrow\ b - c = c\,.\left(\frac{sen(B)}{sen(C)} - 1\right) \Leftrightarrow\ b - c = c\,.\left(\frac{sen(B) - sen(C)}{sen(C)}\right) \quad (5.57)$$

Analogamente, somando *c* em ambos os membros da igualdade (5.56) obtemos:

$$b + c = c\,.\frac{sen(B)}{sen(C)} + c \ \Leftrightarrow\ b + c = c\,.\left(\frac{sen(B)}{sen(C)} + 1\right) \Leftrightarrow\ b + c = c\,.\left(\frac{sen(B) + sen(C)}{sen(C)}\right) \quad (5.58)$$

Dividindo (5.57) por (5.58), temos:

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{c\,.\left(\dfrac{sen(B)-sen(C)}{sen(C)}\right)}{c\,.\left(\dfrac{sen(B)+sen(C)}{sen(C)}\right)} \iff \frac{b-c}{b+c}=\frac{sen(B)-sen(C)}{sen(B)+sen(C)} \qquad (5.59)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (5.59) por $cotg\left(\frac{A}{2}\right)$, obtemos:

$$\frac{b-c}{b+c}\;.\;cotg\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{sen(B)-sen(C)}{sen(B)+sen(C)}\;.\;cotg\left(\frac{A}{2}\right) \qquad (5.60)$$

De acordo com os resultados de Prostaférese, obtidos no capítulo 4.12, temos:

$$sen(B)-sen(C)=2.sen\left(\frac{B-C}{2}\right).cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \qquad (5.61)$$

$$sen(B)+sen(C)=2.sen\left(\frac{B+C}{2}\right).cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \qquad (5.62)$$

Substituindo (5.61) e (5.62) em (5.60), temos:

$$\frac{b-c}{b+c}\;.\;cotg\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{2.sen\left(\frac{B-C}{2}\right).cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{2.sen\left(\frac{B+C}{2}\right).cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}\;.\;cotg\left(\frac{A}{2}\right) \qquad (5.63)$$

Logo,

$$\frac{b-c}{b+c}\;.\;cotg\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{sen\left(\frac{B-C}{2}\right).cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{cos\left(\frac{B-C}{2}\right).sen\left(\frac{B+C}{2}\right)}\;.\;cotg\left(\frac{A}{2}\right) \qquad (5.64)$$

Assim

$$\frac{b-c}{b+c}\;.\;cotg\left(\frac{A}{2}\right)=tg\left(\frac{B-C}{2}\right)\;.\;cotg\left(\frac{B+C}{2}\right)\;.\;cotg\left(\frac{A}{2}\right) \qquad (5.65)$$

Note que $A+B+C=180°$, então $B+C=180°-A$, logo $\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$.
Dessa maneira, substituindo o resultado anterior em (5.65), obtemos:

$$\frac{b-c}{b+c}\;.\;cotg\left(\frac{A}{2}\right)=tg\left(\frac{B-C}{2}\right)\;.\;cotg\left(90°-\frac{A}{2}\right)\;.\;cotg\left(\frac{A}{2}\right) \qquad (5.66)$$

Observe que:

$$cotg\left(90° - \frac{A}{2}\right) = tg\left(\frac{A}{2}\right) \tag{5.67}$$

Substituindo (5.67) em (5.66), temos:

$$\frac{b-c}{b+c} \cdot cotg\left(\frac{A}{2}\right) = tg\left(\frac{B-C}{2}\right) \cdot \frac{sen\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} \cdot cotg\left(\frac{A}{2}\right) \tag{5.68}$$

Mas como $cotg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{cos\left(\frac{A}{2}\right)}{sen\left(\frac{A}{2}\right)}$, temos:

$$\frac{b-c}{b+c} \cdot cotg\left(\frac{A}{2}\right) = tg\left(\frac{B-C}{2}\right) \cdot \frac{sen\left(\frac{A}{2}\right)}{cos\left(\frac{A}{2}\right)} \cdot \frac{cos\left(\frac{A}{2}\right)}{sen\left(\frac{A}{2}\right)} = tg\left(\frac{B-C}{2}\right) \tag{5.69}$$

Portanto,

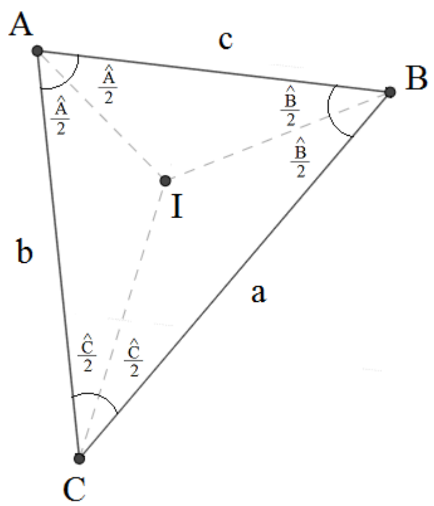
$$tg\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{b-c}{b+c} \cdot cotg\left(\frac{A}{2}\right) \tag{5.70}$$

Para os casos (ii) e (iii) a demonstração é análoga.

5.4 Raio da circunferência inscrita

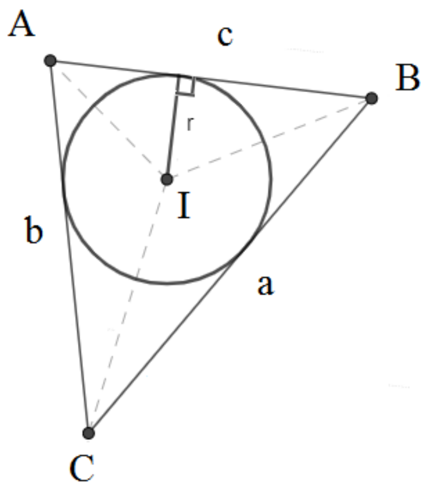
Dado um triângulo ABC qualquer, de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ e ângulos internos $\hat{A} = \angle B\hat{A}C$, $\hat{B} = \angle A\hat{B}C$ e $\hat{C} = \angle A\hat{C}B$. Seja I o ponto dado pela intersecção das bissetrizes internas do triângulo ABC, chamado ***Incentro***, conforme a figura 5.19 abaixo:

Figura 5.19: Incentro I do triângulo ABC



Temos o incentro I como o centro da circunferência inscrita ao triângulo ABC. Seja r o raio da circunferência inscrita ao triângulo ABC, conforme a figura 5.20 a seguir:

Figura 5.20: Circunferência de raio r inscrita ao triângulo ABC



5.4.1 Raio da circunferência inscrita em função da Área e do Semiperímetro do Triângulo

Dado um triângulo ABC qualquer, temos como sua área S a seguinte expressão:

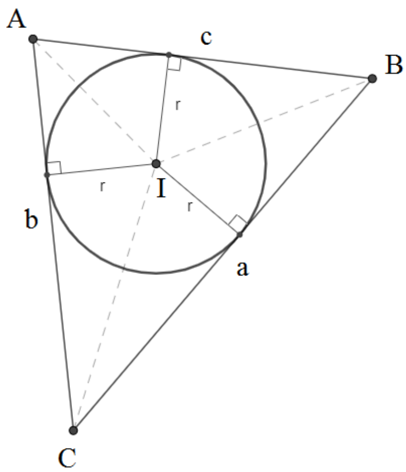
$$S_{\Delta ABC} = \frac{base\ .\ altura}{2}$$

Considere um triângulo ABC qualquer, de lados $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, obtemos seu Semiperímetro p através da expressão:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

Ligando os vértices do triângulo ABC ao seu incentro I, obtemos os triângulos AIB, BIC e AIC, conforme a figura 5.21 abaixo, todos de alturas r, tal que:

Figura 5.21: Triângulos AIB, BIC eAIC de alturas r



Assim temos que $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AIB} + S_{\triangle BIC} + S_{\triangle AIC}$, logo:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{c.r}{2} + \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} = \frac{r}{2}\,(a+b+c) = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = r.p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} \tag{5.71}$$

5.4.2 Raio da circunferência inscrita em função do raio da circunferência circunscrita e dos Senos de $\frac{\hat{A}}{2}$, $\frac{\hat{B}}{2}$ e $\frac{\hat{C}}{2}$.

Dado um triângulo ABC qualquer, de lados $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ e ângulos internos $\hat{A} = B\hat{A}C$, $\hat{B} = A\hat{B}C$ e $\hat{C} = A\hat{C}B$, temos para $sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$:

$$sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\hat{A})}{2}} \tag{5.72}$$

Do triângulo ABC, pela Lei dos Cossenos, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\hat{A}) \quad\Longleftrightarrow\quad \cos(\hat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \tag{5.73}$$

Logo, substituindo (5.73) em (5.72), obtemos:

$$sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right)}{2}} \;\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\; sen^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right)}{2} \;\Longleftrightarrow\; 2.sen^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

Assim

$$2.sen^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

Logo

$$2.sen^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{\big(a-(b-c)\big).(a+(b-c))}{2bc} = \frac{(a+c-b).(a+b-c)}{2bc} \qquad (5.74)$$

Note que dado o Semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, temos que:

$$a + c = 2p - b \qquad \text{e} \qquad a + b = 2p - c$$

Substituindo os valores de $a + c$ e $a + b$ na expressão (5.74), obtemos:

$$2.sen^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{(2p-2b).(2p-2c)}{2bc} = \frac{2.(p-b).(p-c).2}{2bc} \iff$$

$$\iff sen^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{(p-b).(p-c)}{bc}$$

Assim,

$$sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b).(p-c)}{bc}} \qquad (5.75)$$

Analogamente, obteremos:

$$sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a).(p-c)}{ac}} \qquad (5.76)$$

$$sen\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a).(p-b)}{ab}} \qquad (5.77)$$

Como determinado na expressão (5.71), temos $r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p}$. Considerando a área $S_{\Delta ABC} = S$, temos que:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{S^2}{S.p} \qquad (5.78)$$

Utilizando-se de $S = \frac{a\,.\,b\,.\,c}{4R}$ e $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ e substituindo em (5.78), temos:

$$r = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{\frac{a\,.\,b\,.\,c}{4R}\,.\,p} \iff r = 4R\,.\left[\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{a\,.\,b\,.\,c}\right] \qquad (5.79)$$

Note que:

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{a\,.\,b\,.\,c} = \sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{a^2\,.\,b^2\,.\,c^2}} \qquad (5.80)$$

Segue que:

$$\sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{a^2.\ b^2.\ c^2}} = \sqrt{\left[\frac{(p-a)(p-b)}{ab}\right].\left[\frac{(p-a)(p-c)}{ac}\right].\left[\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\right]} \quad (5.81)$$

Por tanto:

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{a\ .\ b\ .\ c} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}.\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad (5.82)$$

Substituindo os resultados obtidos em (5.75), (5.76) e (5.77) em (5.80), obtemos que:

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{a\ .\ b\ .\ c} = sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right).sen\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \quad (5.83)$$

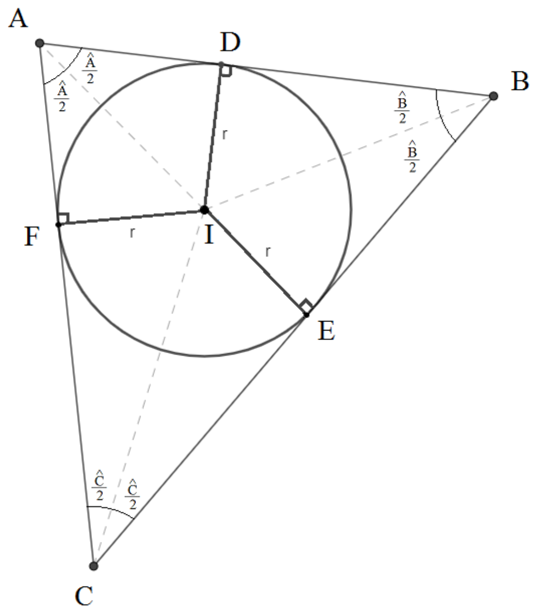
Voltando para a expressão (5.79) e substituindo o que foi obtido em (5.83), temos:

$$r = 4R\ .sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right).sen\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \quad (5.84)$$

5.5 Distância entre o Incentro e os Vértices do Triângulo

Dado um triângulo ABC qualquer, de lados BC, AC e AB e de ângulos internos $\hat{A} = B\hat{A}C$, $\hat{B} = A\hat{B}C$ e $\hat{C} = A\hat{C}B$. Sejam I e r o incentro e o raio da circunferência inscrita ao ΔABC, respectivamente, indicados na figura 5.22 abaixo:

Figura 5.22: Circunferência de centro I inscrita ao triângulo ABC



Do triângulo AID, temos:

$$sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{\overline{ID}}{\overline{IA}} \iff \overline{IA} = \frac{r}{sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} \tag{5.85}$$

Analogamente, nos triângulos BIE e CIF, respectivamente, obtemos:

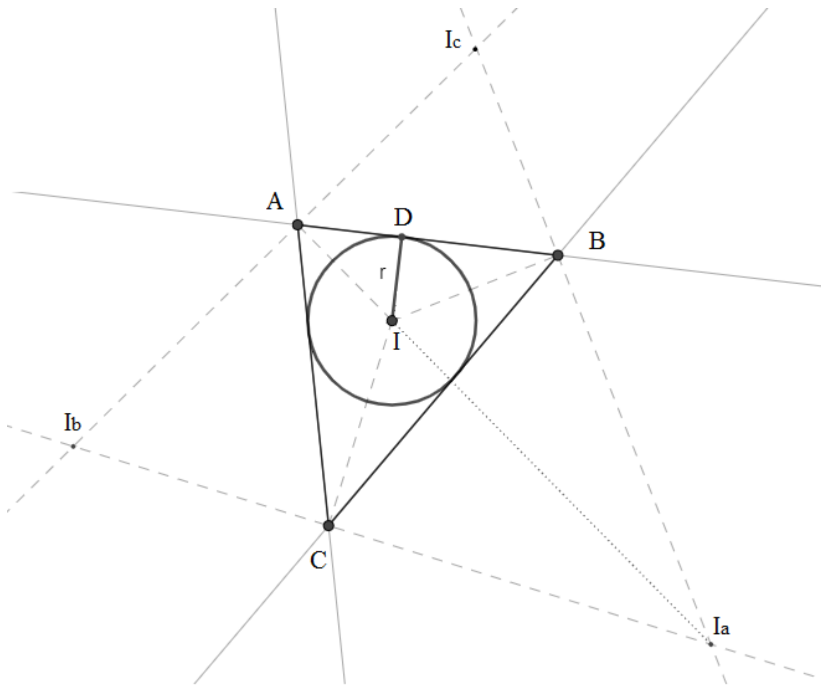
$$\overline{IB} = \frac{r}{sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)} \tag{5.86}$$

$$\overline{IC} = \frac{r}{sen\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \tag{5.87}$$

5.6 Distância entre o Incentro e os Ex-incentros do Triângulo

Dado um triângulo ABC qualquer, de lados BC, AC e AB e de ângulos internos $\hat{A} = B\hat{A}C$, $\hat{B} = A\hat{B}C$ e $\hat{C} = A\hat{C}B$. Sejam I e r o incentro e o raio da circunferência inscrita ao triângulo ABC, respectivamente. Considere I_a, I_b e I_c, os ex-incentros relativos aos lados BC, AC e AB, respectivamente, conforme a figura 5.23 abaixo:.

Figura 5.23: Ex-incentros do triângulo ABC



Do triângulo BID, temos:

$$\overline{IB} = \frac{r}{sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)} \tag{5.88}$$

Como $I\hat{B}I_a$ é formado por ângulos dados pelas bissetrizes interna e externa de $\hat{B}$, temos $C\hat{B}I_a + I\hat{B}C = I\hat{B}I_a = 90°$. Assim, do triângulo IBI$_a$, temos:

$$\cos\left(B\,\hat{I}I_a\right) = \frac{\overline{IB}}{\overline{II_a}} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{II_a} = \frac{\overline{IB}}{\cos\left(B\,\hat{I}I_a\right)} \tag{5.89}$$

Substituindo (5.88) em (5.89), obtemos:

$$\overline{II_a} = \frac{\frac{r}{sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)}}{\cos\left(B\hat{I}I_a\right)} = \frac{r}{sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right).\ \cos\left(\ B\hat{I}I_a\right)} \tag{5.90}$$

Observe que $\angle I\hat{B}I_a = 90°$ e, pela mesma propriedade, $I\hat{C}I_a = 90°$, ou seja, temos que o quadrilátero $BICI_a$ é inscritível, pois $I\hat{B}I_a + I\hat{C}I_a = 180°$, sendo assim, segue que $B\hat{I}I_a \equiv B\hat{C}I_a = \left(90° - \frac{\hat{C}}{2}\right)$. Logo, chegamos ao resultado de $\cos\left(\ B\hat{I}I_a\right) = cos\left(90° - \frac{\hat{C}}{2}\right) = sen\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$.

Assim, temos:

$$\overline{II_a} = \frac{r}{sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right).\ \cos\left(\ B\hat{I}I_a\right)} = \frac{r}{sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right).\ \mathrm{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \tag{5.91}$$

Analogamente, obtemos:

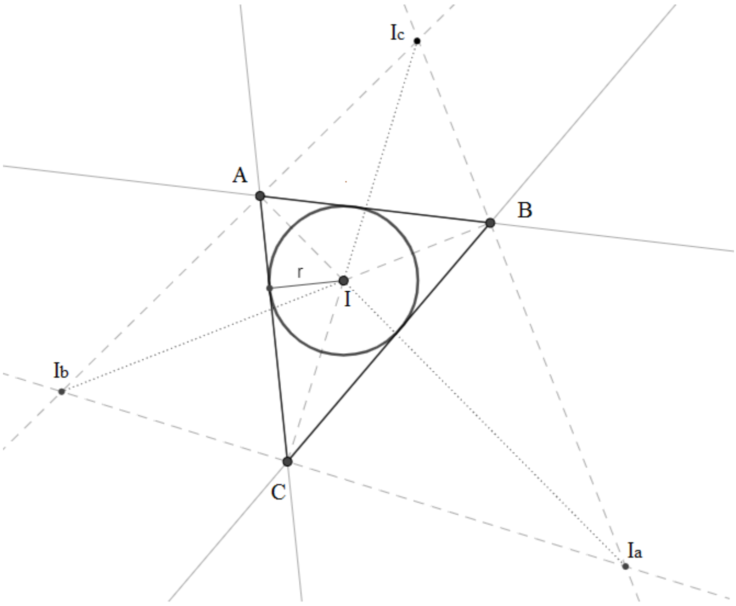
$$\overline{II_b} = \frac{r}{sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).\ \mathrm{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \tag{5.92}$$

$$\overline{II_c} = \frac{r}{sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).\ \mathrm{sen}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)} \tag{5.93}$$

5.7 Distância entre os Ex-incentros do Triângulo

Dado um triângulo ABC qualquer, de lados $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$ e de ângulos internos $\hat{A} = B\hat{A}C$, $\hat{B} = A\hat{B}C$ e $\hat{C} = A\hat{C}B$. Sejam I e r o incentro e o raio da circunferência inscrita ao triângulo ABC, respectivamente, e I_a, I_b e I_c os ex-incentros relativos os lados a, b e c, respectivamente, conforme a figura 5.24 abaixo:

Figura 5.24: Distância entre ex-incentros do triângulo ABC



Como visto anteriormente, quadrilátero $BICI_a$ é inscritível, segue que temos as medidas de $I\widehat{I_a}C \equiv I\hat{B}C = \frac{\hat{B}}{2}$. Analogamente, no quadrilátero $AICI_b$ inscritível, pois temos $I\hat{C}I_b + I\hat{A}I_b = 180°$, segue que $I\widehat{I_b}C \equiv I\hat{A}C = \frac{\hat{A}}{2}$.

Note que, no triângulo I I_aI_b, temos que $I_a\,\hat{I}\,I_b = 180° - (I\widehat{I_a}C + I\widehat{I_b}C)$, segue que:

$$I_a\,\hat{I}\,I_b = 180° - \left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) \tag{5.94}$$

Do triângulo I I_aI_b, pela Lei dos Senos, temos que:

$$\frac{\overline{II_a}}{sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{\overline{I_aI_b}}{sen\left(I_a\hat{I}I_b\right)} \tag{5.95}$$

Substituindo (5.94) em (5.95), obtemos:

$$\frac{\overline{II_a}}{sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{\overline{I_aI_b}}{sen\left[180° - \left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)\right]} \tag{5.96}$$

Veja que:

$$sen\left[180° - \left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)\right] = sen\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = sen\left(90° - \frac{\hat{C}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \qquad (5.97)$$

Assim, substituindo o resultado acima em (5.96), temos:

$$\frac{\overline{II_a}}{sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{\overline{I_aI_b}}{\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \qquad (5.98)$$

Substituindo $\overline{II_a} = \frac{r}{sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\ .\ \mathrm{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}$ em (5.98), obtemos:

$$\frac{\frac{r}{sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\ .\ \mathrm{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}}{sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{\overline{I_aI_b}}{\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \iff \frac{r}{sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).\ sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\ .\ \mathrm{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} = \frac{\overline{I_aI_b}}{\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \iff$$

$$\iff \overline{I_aI_b} = \frac{r.\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}{sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).\ sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\ .\ \mathrm{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)} \qquad (5.99)$$

Agora, como visto anteriormente, sendo $r = 4R\ .sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right).sen\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$, segue que $sen\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).sen\left(\frac{\hat{B}}{2}\right).sen\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \frac{r}{4R}$, o qual substituímos em (5.99), para se ter:

$$\overline{I_aI_b} = \frac{r.\cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}{\frac{r}{4R}} \iff \overline{I_aI_b} = 4R\ .\ \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \qquad (5.100)$$

Analogamente, segue que:

$$\overline{I_aI_c} = 4R\ .\ \cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \qquad (5.101)$$

$$\overline{I_bI_c} = 4R\ .\ \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \qquad (5.102)$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho foi apresentar algumas identidades em formas trigonométricas de maneira que alunos do ensino médio regular, através dos conteúdos desenvolvidos em sala de aula, pudessem acompanhar suas demonstrações, verificar suas utilizações ou simplesmente conhecê-las.

Realizando estudos sobre o tema tratado neste trabalho, eu, como professor da rede pública estadual, verifiquei o quanto uma seleção criteriosa dos materiais e a organização sistemática dos conteúdos pode impulsionar o papel daquele que vai transpassar o objeto de ensino e enriquecer a aula com propostas diferenciadas a que se tem no dia-a-dia. Uma proposta de utilizar conceitos e resultados não presentes em materiais básicos que existem nas escolas, os quais são grande parte, ou talvez até mesmo os únicos instrumentos de base para propor uma aula, traz uma reflexão sobre a ideia de que a seleção de materiais vai além de uma proposta a ser seguida. Através da pesquisa realizada, pude conhecer e, de certa forma, disponibilizar alguns teoremas e identidades que, antes desse trabalho, não imaginaria desenvolvê-los em uma sala de aula.

Ao estudar o desenvolvimento histórico da Trigonometria, verifiquei que, mesmo sendo construída em diferentes épocas e lugares, foi fundamental que existisse um olhar diferenciado para os resultados que já se tinham até o presente para que houvesse uma continuidade. Mesmo que de um modo diferente, vejo a relação com a proposta desse trabalho que visa abordar objetos diferentes dos usuais em sala de aula, possibilitando assim que o pensar matemático dos alunos se desenvolva com outros pontos de vista sobre a Trigonometria.

Espero conseguir despertar um sentimento de interesse aos alunos ao perceberem que eles têm condições de entender e assimilar conhecimentos que possam ir além do Ensino Básico. O que foi proposto neste trabalho é um olhar sobre como apresentar temas pouco conhecidos de maneira que as demonstrações de seus resultados possam ser desenvolvidas em sala durante o ensino médio. Outro fator importante na escolha de tais conteúdos foi o de relacionar triângulos e suas medidas. De fato, os triângulos são objetos geométricos bem familiares para a grande parte dos alunos da educação básica.

O desafio de abordar temas que estão fora do currículo regular da educação básica mostrou-me que uma educação pública de qualidade pode ser enriquecida sim com temas que exigem um pensamento matemático um pouco mais avançado. Nesse trabalho verifiquei a possibilidade de apresentar tais conceitos utilizando a Trigonometria como principal ferramenta para demonstrar a validade de cada um de seus resultados. Assim, acredito que esse trabalho possa contribuir para o desenvolvimento de outras ideias que sigam essa mesma linha de pensamento ou até mesmo que possa servir como ponta pé inicial para o desenvolvimento de sequências didáticas que utilizem essa proposta como instrumento de aperfeiçoamento ou de estudo para participações em competições matemáticas.

Enfim, dado o objetivo do PROFMAT, acredito que este trabalho foi muito relevante para o desenvolvimento de minhas aulas sobre Trigonometria e para a elaboração de métodos próprios de construção de um repertório com a finalidade de desenvolver habilidades que vão além do que se trabalha hoje em sala de aula, no qual a compreensão e o aprofundamento deste tema me proporcionaram encontrar novos caminhos e ideias.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRIL, Román Héctor. Demonstração de fórmulas matemáticas no Ensino Médio. Dissertação (PROFMAT), Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016.

ALVES, Diego Saochine. Os Teoremas esquecidos pelos professores de Geometria Plana do Ensino Médio. Dissertação (PROFMAT), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2015.

ÁVILA, Geraldo. O Ensino de Matemática. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 23, p. 1, 1992.

AYRES JÚNIOR, Frank. Trigonometria Plana e Esférica. Coleção Schaum. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico LTDA, 1966.

BARROS, Rony Henrique. Demonstrações no Ensino Médio: Por que não? Dissertação (PROFMAT), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2016.

BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, Editora Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais : Matemática, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC/SEF, 1997.

_______. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília : MEC, 2006.

_______. Orientações Curriculares para o Ensino Médio, volume 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

CABRERA, Rubén Alva. Trigonometria - Teoría y Práctica, Colección Uniciencia Sapiens. Lima, Peru: San Marcos, 2016.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. Trigonometria/Números Complexos: Coleção do Professor de Matemática. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

COSTA, Nielce M. da Costa. A História da Trigonometria. São Paulo, PUCSP, 1997. 18 p. Disponível em: < http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf>. Acesso em 12 jan. 2019.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução: Higino H. Domingues. 5. ed. Campinas. Ed. da UNICAMP: 2008.

GUELLI, Oscar. Dando Corta na Trigonometria. Coleção Contando a História da Matemática. V. 6. 3. ed. São Paulo: Ática, 1995.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar: vol. 3: trigonometria. 8ª. ed. São Paulo: Atual, 2004.

MENDES, Cleiton Dias. Demonstrações trigonométricas via Geometria Plana. Dissertação (PROFMAT), Universidade Federal de Goiás, 2014.

NETO, Antonio Caminha Muniz. Geometria - Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PAIVA, Manoel. Matemática, Volume único. 1ª Ed; São Paulo: Moderna, 2003.

REIS, Fabiana dos. Uma visão geral da trigonometria: história, conceito e aplicações. Dissertação (PROFMAT), Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2016.

SILVA, José Constantino da. Os teoremas de Menelaus e Ceva. Dissertação (PROFMAT), Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2015.

SILVA, Wellington da. O ensino de trigonometria: perspectivas do ensino fundamental ao médio. Dissertação (PROFMAT), Universidade Estadual Paulista, 2013.

SIQUEIRA, Anderson Rangel Batista. Uma proposta didática para o ensino da trigonometria no ensino fundamental. Dissertação (PROFMAT), Universidade Federal de Alagoas, 2014.