UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
REGIONAL CATALÃO
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

WALTER EPIFÂNEO DE SOUSA

RACIOCÍNIO LÓGICO-ANALÍTICO:
UMA PROPOSTA DE CONTEÚDO E ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO E PARA CONCURSOS PÚBLICOS

CATALÃO
2019

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Walter Epifâneo de Sousa

Título do trabalho: **RACIOCÍNIO LÓGICO-ANALÍTICO:** UMA PROPOSTA DE CONTEÚDO E ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO E PARA CONCURSOS PÚBLICOS

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Donald Mark Santee

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 05 / 04 / 2019

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

Walter Epifâneo de Sousa

RACIOCÍNIO LÓGICO-ANALÍTICO:
UMA PROPOSTA DE CONTEÚDO E ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO E PARA CONCURSOS PÚBLICOS

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) - Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, como requisito para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Dr. Donald Mark Santee

CATALÃO

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Sousa, Walter Epifaneo de
RACIOCÍNIO LÓGICO-ANALÍTICO: UMA PROPOSTA DE CONTEÚDO E ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO E PARA CONCURSOS PÚBLICOS [manuscrito] / Walter Epifaneo de Sousa. - 2019.
236 f.

Orientador: Prof. Dr. Donald Mark Santee.
Trabalho Final de Curso (Especialização) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Catalão, 2019.
Apêndice.
Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. Fundamentos da lógica. 2. Argumentação lógica. 3. Raciocínio crítico e analítico.. I. Santee, Donald Mark, orient. II. Título.

CDU 51

Universidade Federal de Goiás - UFG
Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia
Mestrado Profissional em Matemática

UFG

PROFMAT

Ata de Defesa da Dissertação

Em 05 de abril de 2019, às 8 h 38 min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) Dr. Donald Mark Santee (orientador), Dr. Paulo Roberto Bergamaschi, Dr. Tobias Anderson Guimarães para, em sessão pública realizada no Bloco J - Sala 03, da Regional Catalão (RC), da Universidade Federal de Goiás (UFG), procederem com a avaliação da Dissertação intitulado "Raciocínio Lógico-Analítico: uma proposta de conteúdo e abordagem para o ensino médio e para concursos públicos", de autoria de Walter Epifâneo de Sousa, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo(a) presidente da banca, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que, em 67 min procedeu a apresentação da Dissertação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado: **(x) Aprovado ou ( ) Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 10 h 27 min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Donald Mark Santee, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo discente.

Donald Mark Santee

Dr. Donald Mark Santee
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Dr. Paulo Roberto Bergamaschi
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Tobias AG

Dr. Tobias Anderson Guimarães
UFTM – Uberaba

Walter Epifâneo de Sousa
Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/RC/UFG

Dedico este trabalho:

À minha esposa
Rosângela

A meus filhos
Matheus e Paulo Víctor

A meus pais
Antônio e Antônia

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me dado forças e entendimento durante os meus estudos.

Agradeço à minha família, em especial à minha esposa e filhos, pela compreensão e apoio nos momentos difíceis.

A todos os meus professores do PROFMAT, lotados na Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, da Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão. Em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Donald Mark Santee.

Agradeço aos meus colegas de turma, especialmente aos amigos Anailton, Marcelino, Suenio e Gustavo, porque juntos combatemos o bom combate.

RESUMO

Este trabalho visa propor um método de ensino dos fundamentos da lógica matemática para os alunos do ensino médio, com vistas ao desenvolvimento do raciocínio crítico e analítico, capacitando-os para exames de seleção, em especial para concursos de órgãos públicos. A inclusão da prova de raciocínio lógico e analítico em diversos concursos públicos, de níveis médio e superior, mostra que a capacidade de pensar criticamente tem sido amplamente reconhecida no Brasil. Entretanto, o pensamento crítico, no geral, não é ensinado nas escolas brasileiras, infelizmente, pois o tema sequer faz parte da matriz curricular do ensino médio da matemática, em rede pública. O trabalho apresenta, em uma linguagem acessível e adaptada à formação média dos alunos, as bases lógicas para a construção e análise crítica de argumentos, não só os dedutivos, da lógica formal, mas também os indutivos, tão presentes no cotidiano das pessoas. Para isso, a partir da noção de conjuntos estudada no ensino médio, chegou-se ao sistema formal da lógica, onde foram apresentados o alfabeto, os operadores e as relações de equivalência, com suas definições e teoremas. Progressivamente, chegou-se ao estudo das argumentações. Para os argumentos dedutivos, a partir do teorema da validade, foi apresentado um conjunto de técnicas, incluindo uma inovadora técnica de diagramação, para a análise desses argumentos. Em sequência, um capítulo foi dedicado ao estudo das proposições categóricas de Aristóteles e os seus silogismos. Finalmente, foram apresentados os argumentos e falácias da lógica informal, através do estudo das induções analógica, enumerativa e hipotética.

Palavras – chave: Fundamentos da lógica; Argumentação lógica; Raciocínio crítico e analítico.

ABSTRACT

This work aims to propose a method of teaching the fundamentals of mathematical logic for high school students, with a view to the development of critical and analytical reasoning, enabling them to exams for selection, especially for competitions of public agencies. The inclusion of exams on logical and analytical reasoning in several public examinations at the middle and higher levels shows that the capacity to think critically has been widely recognized in Brazil. However, critical thinking in general is not taught in Brazilian schools, unfortunately, this subject is not even part of the curricular matrix of high school mathematics, for public schools. The work presents, in a language accessible and adapted to the average students level, the logical bases for the construction and critical analysis of arguments, not only the deductive ones, of the formal logic, but also the inductive ones, so present in the daily life of the people. For this, from the notion of sets studied in high school, we arrived at the formal system of logic, where we presented the alphabet, operators and equivalence relations, with their definitions and theorems. Progressively, we came to the study of arguments. For the deductive arguments, from the validity theorem, a set of techniques, including an innovative diagramming technique, was presented for the analysis of these arguments. In sequence, a chapter was devoted to the study of Aristotle's categorical propositions and their syllogisms. Finally, the arguments and fallacies of informal logic were presented through the study of analogic, enumerative and hypothetical inductions.

Keywords: Fundamentals of logic; Logical argumentation; Critical and analytical reasoning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Constituição Federal brasileira, promulgada em 1988, considerada avançada sob aspectos dos direitos individuais e sociais, deixa claro (art. 6º) que a educação é um direito social. Por “direito” à educação, constante da norma jurídica, entenda-se o de **acesso ao conhecimento** e à **capacitação**, que devem ser oferecidos regularmente e de forma organizada. O art. 205, da referida norma, é ainda mais enfático, ao determinar que “A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho”.

No Brasil, entretanto, é histórico o descaso do Estado, no que diz respeito ao oferecimento de uma rede de ensino que seja extensa e de qualidade. A consequência não poderia ser outra, senão a marginalização de setores amplos da sociedade, o que prejudica a concretização de outros direitos fundamentais, como o direito de participação política, para citar um exemplo. A esse respeito, Branco e Mendes (2014) ressaltam:

> Neste ponto, é interessante ressaltar o papel desempenhado por uma educação de qualidade na completa eficácia dos direitos políticos dos cidadãos, principalmente no que se refere aos instrumentos de participação direta, como o plebiscito e o referendo. Isso porque as falhas na formação intelectual da população inibem sua participação no processo político e impedem o aprofundamento da democracia (BRANCO e MENDES, 2014, p. 675).

O Governo Federal, por intermédio do Ministério da Educação (MEC), buscando se adequar ao dispositivo constitucional e à Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), disponibilizou a chamada Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que reúne a estrutura e a proposta para o Ensino Médio a ser apreciada e discutida pelo Conselho Nacional de Educação (CNE). Logo na introdução, a BNCC deixa claro seus objetivos: “[...] é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica”, e que “visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN)”.

No tópico das competências gerais da Educação Básica, a BNCC indica como deve ser o tratamento didático proposto: Com vistas ao desenvolvimento das habilidades e na formação de atitudes e valores dos alunos. Destaque-se o tópico 2, que faz referência ao desenvolvimento do pensamento crítico:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, **a análise crítica** (grifos do autor), a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (MEC, 2018, p. 9).

Aliado aos objetivos do Órgão Ministerial, o intento primordial deste trabalho é desenvolver uma metodologia de ensino dos fundamentos da lógica matemática, aplicável aos alunos e egressos do ensino médio, com vistas ao desenvolvimento de um raciocínio analítico e crítico, que possa auxiliá-los na preparação para o mercado de trabalho e ingresso no curso superior.

A lógica matemática é uma ferramenta importante para o desenvolvimento do pensamento crítico, na medida em que estimula os alunos a utilizar o conhecimento, de forma racional, em situações do cotidiano, para resolver seus problemas e os da coletividade.

Além disso, os alunos que desenvolvem o raciocínio lógico-analítico possuem uma enorme vantagem competitiva no mercado, pois podem se tornar profissionais melhores. Pode, ainda, evitar que caiam nas armadilhas das empresas, nas falácias das redes sociais e da internet e nos argumentos tendenciosos da mídia.

A palavra *intellectus* (do latim), intelecto, conhecimento, não deve ser associada apenas à formação acadêmica do indivíduo. Para o desenvolvimento intelectual do aluno, há dois pilares: a comunicação e o raciocínio lógico. A comunicação, escrita e oral, propicia o conhecimento explícito, adquirido por meio de livros, sinônimo de informação e está relacionada à memória, razão, percepção, experiência, criatividade, etc. Já o raciocínio lógico está associado à lógica, à capacidade de dedução e indução, à forma de aplicação do conhecimento em benefício próprio ou de terceiros, aliado à visão de mundo. No entanto, as escolas de ensino fundamental e médio atuam no desenvolvimento direto de apenas um deles, a comunicação; o raciocínio lógico é apenas abordado indiretamente, sem a formulação técnica e desprovido de bases matemáticas. Basta observar a grade curricular do ensino médio, das escolas públicas, em vários Estados da Federação, onde nenhum deles contempla o estudo dos fundamentos da lógica.

O desenvolvimento do intelecto é tão importante que passou a ser considerado, no mundo dos negócios, como o elemento essencial para o sucesso das organizações. Nos dizeres dos economistas, o ser humano deve ser valorizado por seu "capital intelectual". Então, estudar os fundamentos da lógica é essencial nas relações sociais e profissionais, porque atua diretamente no desenvolvimento intelectual.

Nos dizeres de Ferreira, Ramos e Scherner (2010, prefácio), "a importância do raciocínio analítico tem sido amplamente reconhecida no Brasil. Vários instrumentos de seleção de profissionais estão voltados à busca de candidatos com tal competência".

Entretanto, nos grupos sociais primários, como família e educação básica, o jovem é treinado a aceitar, sem questionamentos, os argumentos de autoridade. Porém, ao serem admitidos no mercado de trabalho, público, privado e/ou no ensino superior, é exigida uma postura totalmente diferente, onde se espera que o indivíduo apresente maturidade intelectual, relacionada a uma experiência técnica e de vida que ele não possui, porque não foi treinado para isso.

Nesse sentido, as instituições de ensino exercem um papel importante na formação profissional dos jovens, devendo estimular o desenvolvimento do senso crítico e a prática de refletir sobre suas opiniões, propiciando o desenvolvimento do intelecto.

Veja o que diz Copi (1978, p.20): "[...] o estudo da lógica proporcionará ao estudante certas técnicas e certos métodos de fácil aplicação para determinar a correção ou incorreção de todos os raciocínios, incluindo os próprios".

A grande motivação para ter apresentado este trabalho surgiu da experiência, por mais de 15 anos, com o ensino da disciplina lógica matemática, nos cursos preparatórios para concursos públicos, de níveis médio e superior, para diversos cargos em que a disciplina faz parte do conteúdo programático das provas. Candidatos aos cargos públicos mais concorridos do país, tais como Auditor Fiscal da Receita Federal, Auditor dos Tribunais de Contas dos Estados e da União, Técnicos e Analistas do Poder Judiciário e do Poder Legislativo, precisam se capacitar nessa disciplina, porque consta no conteúdo programático das provas.

Buscou-se apresentar uma sequência ordenada dos fundamentos da lógica matemática, aplicável em sala de aula, em uma linguagem técnica acessível a alunos secundaristas.

No capítulo 1, serão apresentados os conceitos básicos de sistemas formais em matemática e a consequente aplicação desses conceitos para a evolução da teoria de conjuntos, essencial para as ideias de natureza lógica que serão apresentadas nos capítulos seguintes. Inicialmente, serão mostrados os conceitos mais primitivos dentro da teoria de conjuntos, desde a sua criação por George Cantor, para depois evidenciar a relação existente entre a álgebra de conjuntos e a álgebra proposicional da lógica, que se tornou possível através da formalização daquela teoria no sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel.

No capítulo 2, serão apresentados os princípios da lógica formal, que regem o estudo das proposições atômicas e as fórmulas lógicas. Estabeleceu-se uma técnica de construção para tabelas-verdade. Além disso, será mostrado como esses conceitos iniciais são abordados nas provas de processos seletivos de candidatos a concursos públicos.

No capítulo 3, será feita a apresentação dos conectivos (operadores) lógicos do sistema formal, em linguagem corrente e simbólica. Foi mostrado o comportamento dos valores lógicos desses conectivos, resultantes das fórmulas, justificando-os por meio das operações básicas de conjuntos. Serão apresentadas, por meio de exemplos, aplicações práticas com esses operadores, no cálculo proposicional e em questões de raciocínio-lógico.

No capítulo 4, serão definidos os conceitos de tautologia, contradição e contingência lógica.

No capítulo 5, será feito o estudo das equivalências lógicas, com a consequente apresentação dos conjuntos completos de conectivos e do importante teorema das equivalências das fórmulas restritas.

No capítulo 6, será apresentada a lógica da argumentação. A forma como os indivíduos processam as informações e chegam a determinadas conclusões é o que, em lógica, chamamos de estudo das inferências e argumentos. Naquele capítulo, apresentamos um conjunto de técnicas para a análise crítica de validade dos argumentos, com ênfase nos argumentos dedutivos. Mostramos como é possível manipular e processar racionalmente uma coleção de dados e informações disponíveis, que chamaremos premissas da argumentação, componentes da base de conhecimento, para se chegar a conclusões plausíveis. Para Copi (1978, p.19), "Compete à lógica prover meios de análise que permitam verificar se o argumento é correto ou incorreto". Para o entendimento das técnicas de análise de argumentos, o aluno deve ter domínio pleno do comportamento lógico dos conectivos e das regras de equivalência lógica.

No capítulo 7, será feito o estudo das proposições categóricas, componentes dos silogismos de Aristóteles. As proposições categóricas estabelecem uma relação entre classes, por isso necessitam de técnicas distintas para a avaliação dos silogismos categóricos. Naquela oportunidade, foram apresentadas duas técnicas de análise desses argumentos.

No capítulo 8, será apresentada a lógica indutiva, componente de um sistema informal, cujos argumentos são muito presentes no cotidiano das pessoas. É tradicional, no estudo da argumentação indutiva, o exame e análise das formas incorretas de raciocínio, chamadas de falácias, com o intuito de estimular a análise crítica dos argumentos informais. Nesse sentido, foram apresentadas algumas falácias que figuram de forma mais consensual na literatura.

No capítulo 9, será apresentada a proposta de aplicação, trazendo sugestões aos professores e os resultados esperados em cada módulo de estudo. Naquela oportunidade, foi feita a sugestão de inclusão do campo "Lógica Matemática" na matriz curricular do ensino da matemática, com o conteúdo distribuído ao longo dos três anos do ensino médio.

E, por fim, trazem-se as considerações finais.

CAPÍTULO 1. CONCEITOS INICIAIS E A TEORIA BÁSICA DE CONJUNTOS

O grande desafio para o profissional da matemática é tornar a disciplina interessante, útil e necessária. A matemática é formada por um conjunto de técnicas e modelos abstratos, que devem ser aplicados em situações concretas. Isto tem a ver com conceitualização, que é a aplicação das teorias em problemas de natureza prática.

O ensino da matemática, com suas técnicas e teorias, poderia se fundamentar em três estruturas, nessa ordem: Conceituação, manipulação e aplicação.

A conceituação diz respeito à fundamentação teórica, ao estudo, com consistência, dos conceitos e teorias que fazem parte do assunto a ser discutido. Nessa fase, é interessante mostrar o contexto histórico em que se desenvolveu a teoria, bem como as dificuldades e críticas sofridas pelos matemáticos da época. No que couber, os teoremas devem ser demonstrados e não apenas mencionados.

A manipulação é a fase da resolução de problemas da matéria estudada. A resolução de questões, em ordem crescente de dificuldade, é uma forma importante para consolidar os conceitos, mas essa fase se segue à da conceituação. É preciso uma postura ativa para aprender matemática. Ocorre que o ensino da matemática é muito concentrado na fase da manipulação, sem uma fundamentação teórica adequada, de forma que muitos alunos acham que matemática se resume a fazer substituição de fórmulas prontas na resolução de problemas.

A aplicação é a contextualização da matemática com problemas práticos, do cotidiano. Em sala de aula, é comum a pergunta “pra quê que eu quero saber disso?” É necessário que o professor saiba responder! Não se deve confundir manipulação e aplicação. Por exemplo, na aula sobre Progressões Geométricas (PG), resolver uma questão típica de PG, em que o enunciado deixa claro que é PG, é manipulação. Agora, quando se utiliza o conceito de PG, em matemática financeira, para calcular as parcelas constantes, no sistema Price de financiamentos, está-se fazendo uma aplicação. É justamente nessa fase que os conhecimentos matemáticos podem se tornar mais interessantes e úteis para o aluno.

A teoria básica de conjuntos pode ser utilizada para justificar muitas ideias de natureza lógica, o que faz da lógica um excelente campo de aplicação dos conceitos básicos de conjuntos. Veremos que esta é uma via de mão dupla, ou seja, a lógica foi indispensável para a formalização da teoria axiomatizada dos conjuntos. A lógica e a teoria de conjuntos são sistemas formais, interligados.

1.1. **Os Sistemas Formais e o Método Axiomático**

A lógica matemática e a teoria de conjuntos foram desenvolvidas com base em um sistema formal. Significa dizer que a modelagem dessas teorias segue um processo dedutivo, que só é validado mediante demonstrações, ou seja, a partir de premissas, afirmações tomadas como verdadeiras por hipótese, deve-se chegar a conclusões que sejam necessariamente verdadeiras. Em ciências experimentais, o modelo de construção é o indutivo, com base na intuição e experimentação. No raciocínio indutivo, a conclusão é apenas provável, mas não necessariamente verdadeira. É claro que os matemáticos utilizam a intuição em seus modelos, mas o produto final de seus estudos, ou seja, a validação de suas teorias, se dá por dedução e abstração.

Naturalmente, nem tudo em matemática possui uma demonstração. No desenvolvimento de uma teoria, algumas leis são admitidas sem demonstração, simplesmente porque são as primeiras leis e não existem leis anteriores das quais elas são consequência. Os **axiomas** são estas primeiras leis e constituem o ponto de partida para a construção das teorias formais. Por exemplo, a geometria euclidiana foi toda construída com base num sistema axiomático, com os chamados axiomas e postulados de Euclides.

O que é um sistema formal? Para Feitosa e Paulovich (2005), o sistema formal de uma teoria é a sua linguagem, caracterizada por expressões simbólicas que constituem o alfabeto da linguagem. Nesses sistemas, dizem eles, conhecido o alfabeto, é preciso definir um conjunto de regras gramaticais que permita diferenciar expressões bem formadas, que têm interesse ao sistema, daquelas que são desprovidas de interesse. Por exemplo, em nossa língua vernácula, as palavras são expressões bem formadas, definidas a partir dos símbolos que compõem o alfabeto. Feitosa e Paulovich (2005, p.11) afirmam: “A linguagem é um objeto estritamente formal e gerativo, a qual fica bem determinada quando conhecidos os seus símbolos e regras gramaticais”.

Ocorre que a linguagem natural, influenciada por questões sociais ou culturais, é repleta de ambiguidades, de forma que um mesmo significante (parte física da palavra, grafia + som) pode assumir significados (conceito transmitido pelo significante) diferentes. Por exemplo, dependendo do contexto, a expressão “manga” pode ser uma fruta ou parte de uma peça de roupa; “salsa” pode ser um tempero ou um tipo de dança.

Na linguagem matemática, mais precisa e desprovida de ambiguidades, incluindo-se a lógica e a teoria dos conjuntos, são utilizadas designações (termos) e proposições. Uma designação caracteriza um objeto matemático, que pode ser um conjunto, um número, uma figura, etc. Por exemplo, designa-se por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. As designações podem ter relação de equivalência, quando caracterizarem os mesmos objetos, assim as designações 5 e 2 + 3 são equivalentes.

As proposições são sentenças, afirmações, que podem ser classificadas em verdadeiras ($\mathcal{V}$) ou falsas ($\mathcal{F}$), mas não ambos os valores. Por exemplo, são proposições as sentenças:

$$5 = 2 + 3, \quad Brasília \text{ é } a\ capital\ do\ Brasil, \quad 7 > 9.$$

O **método axiomático**, para a criação de teorias formais, consiste em definir um sistema de axiomas, consistente (livre de contradições), apresentando uma coleção completa de proposições, aparentemente evidentes, e de conceitos básicos.

Quando se faz uma **definição** em um sistema axiomático, fica estabelecido um novo conceito, validado a partir de conceitos primitivos.

Além disso, novas proposições podem ser criadas, chamadas de **teoremas**, cuja validação é o que se chama de demonstração ou prova, que se exige para todo e qualquer teorema.

A teoria de conjuntos precisou ser axiomatizada, para torná-la consistente. Muitos dos axiomas da teoria de conjuntos são construídos a partir de fórmulas lógicas. Uma fórmula lógica é criada a partir de um conjunto de símbolos e operações válidas. Em lógica, dadas as proposições p e q, tem-se os seguintes operadores e seus respectivos símbolos, mais comuns, que podem ser utilizados na construção das fórmulas:

a) Negação (não): $\neg p$
b) Conjunção (e): $p \wedge q$
c) Disjunção Inclusiva (ou): $p \vee q$
d) Condicional (Se ..., então): $p \rightarrow q$

e) Bicondicional (se e somente se): $p \leftrightarrow q$

Os operadores da lógica serão estudados e caracterizados nos capítulos 2 e 3, mas considerando que eles fazem parte do alfabeto que compõe a teoria de conjuntos, serão indicados os valores que as fórmulas lógicas podem assumir: A proposição $\neg p$ (leia "não p") será $\mathcal{V}$ se p for $\mathcal{F}$ e será $\mathcal{F}$ se p for $\mathcal{V}$. A proposição $p \wedge q$ (leia "p e q") será $\mathcal{V}$ somente se as duas componentes forem $\mathcal{V}$, caso contrário (ao menos uma delas é $\mathcal{F}$) será $\mathcal{F}$. A proposição $p \vee q$ (leia "p ou q") será $\mathcal{F}$ somente se as duas componentes forem $\mathcal{F}$, caso contrário (ao menos uma $\mathcal{V}$) será $\mathcal{V}$. A proposição condicional ou implicação $p \rightarrow q$ (leia "se p, então q), presente em muitos dos teoremas, será $\mathcal{F}$ somente se p for $\mathcal{V}$ e q for $\mathcal{F}$, caso contrário será $\mathcal{V}$. No caso da condicional, a proposição p será chamada antecedente (hipótese) e a proposição q será a consequente (tese). Por fim, a proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ (leia "p se e somente se q), abreviadamente "p sse q", é uma dupla implicação lógica e será $\mathcal{V}$ se os valores lógicos de p e q forem iguais e será $\mathcal{F}$, caso contrário.

Além dos símbolos da lógica e das designações, serão utilizadas variáveis, usualmente, letras minúsculas, $x, y, z, \cdots,$ para os elementos e letras maiúsculas, $A, B, C, \cdots,$ para os nomes dos conjuntos[1]. Expressões podem ser formadas com variáveis, por exemplo

$$2x + 1 \text{ e } x^2 - 5x + 6$$

são expressões que serão convertidas em designações, mediante a substituição da variável por determinado número real, que faça parte de um conjunto domínio da expressão; assim, se x for substituído por 2, o valor da primeira expressão se converterá na designação do número 5 e a segunda expressão, na designação do número 0. As expressões podem ser formadas com mais de uma variável, como em

$$(x + y)^2 \text{ e } x^2 + 2xy + y^2$$

[1] Na teoria axiomatizada de conjuntos não se faz essa distinção, comum nos livros didáticos do ensino médio. O alfabeto utilizado na linguagem da teoria de conjuntos é formado por variáveis $x, y, z, \cdots$ em que cada variável representa um termo, ou seja, pode simbolizar elemento e conjunto. Naquela teoria, todo elemento é conjunto. Esse é o motivo de alguns autores criticarem o fato de os livros didáticos dos ensinos fundamental e médio, no geral, afirmarem que a relação de pertinência é utilizada para relacionar elemento com conjunto e a relação de inclusão para relacionar conjuntos. "Esse é um erro grave, que pode causar um vício de aprendizagem que precisa ser derrubado", Fajardo (2017, p.27).

Proposições podem ser criadas a partir de expressões com variáveis, as quais serão chamadas de expressões proposicionais ou condições. Nestes casos, o valor lógico, $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{F}$, da expressão proposicional, dependerá do conjunto onde as variáveis assumem valor. Por exemplo, considere a expressão proposicional

$$P(n) \equiv n! > 2^n$$

Tem-se que $P(n)$ será verdadeira para todo número natural $n \geq 4$ e será falsa, caso contrário. Para se afirmar que uma expressão proposicional é verdadeira, para um certo conjunto de valores, pode-se aplicar uma definição ou se construir uma demonstração formal no sistema. Por exemplo, demonstre que $P(n)$ é verdadeira para $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Será feita por indução matemática sobre n.
Passo base: $P(4)$ é verdadeira. Com efeito, $P(4) \equiv 4! = 24 > 16 = 2^4$ $(\mathcal{V})$
Hipótese de indução: Suponha, por hipótese, que $P(k) \equiv k! > 2^k$, $k \geq 4$, é verdadeira.
Tese: $P(k+1)$ é verdadeira.
Deve-se provar que $P(k+1) \equiv (k+1)! > 2^{k+1}$. Com efeito,
$k! > 2^k$ (hipótese de indução) e, multiplicando por $k+1$ os dois lados da igualdade, $\Rightarrow$
$(k+1) \cdot k! > (k+1) \cdot 2^k \Rightarrow$
$(k+1)! > k \cdot 2^k + 2^k$ e, como $k \cdot 2^k > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, porque $k \geq 4$, $\Rightarrow$
$(k+1)! > k \cdot 2^k + 2^k > 2^{k+1} \Rightarrow P(k+1)$ é $\mathcal{V}$. ■

É possível gerar fórmulas lógicas com expressões proposicionais, cujos valores lógicos são determinados de forma análoga à das proposições. Assim, por exemplo, a condição $p(x) \rightarrow q(x)$ é falsa somente se $p(x)$ é $\mathcal{V}$ e $q(x)$ é $\mathcal{F}$ e será verdadeira nos demais casos[2].

Poderão ser utilizados os quantificadores lógicos universais afirmativos, cujo símbolo é ∀ (leia "para todo") e os existenciais afirmativos, cujo símbolo é ∃ (leia "existe"). Se x é uma variável e A é uma fórmula, então as expressões $\forall x(A)$ (leia "Para cada x, A") e $\exists x(A)$ (leia "existe $x,\ A$") também são fórmulas.

Na próxima sessão, será visto como foi formalizada a teoria de conjuntos.

[2] Esse resultado será justificado no capítulo 3.

1.2. A Teoria de Conjuntos de Cantor

Como surgiu a teoria de conjuntos? Surgiu a partir do estudo do infinito, que sempre representou um grande desafio aos pensadores matemáticos. Foi no desenvolvimento da teoria das séries infinitas que o matemático alemão, de origem russa, Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1849 – 1918), introduziu a teoria de conjuntos, através de artigos publicados entre os anos de 1874 a 1897. A partir de então, a teoria de conjuntos foi sendo aperfeiçoada, não deixando de desenvolver-se, de tal forma que, hoje, pode-se dizer que todos os ramos da matemática, incluindo a lógica moderna, foram bastante influenciados por esta teoria. A figura 1 apresenta uma fotografia de Georg Cantor.

Figura 1. Georg Cantor (1849 – 1918) - Fundador da Teoria de Conjuntos

Fonte: Biblioteca Virtual da Universidade de Coimbra.

As descobertas de Cantor foram tão extraordinárias que influenciaram muitos matemáticos da época, como o filósofo e matemático Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925), considerado o fundador da lógica moderna e Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916), que se destacou na área do Cálculo. A seguinte frase do célebre matemático Alemão, David Hilbert, ilustra a grandeza das ideias de Cantor."*Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können*.", que basicamente significa:

“Ninguém nos poderá expulsar do paraíso que Cantor criou”.

O que são conjuntos? A noção de conjuntos é primitiva em matemática, o que significa dizer que é um conceito adotado como ponto de partida e que servirá de base para os demais conceitos. Intuitivamente, conjunto é uma coleção de objetos de qualquer natureza, ao qual chamaremos elementos. Para Cantor, “um conjunto é uma coleção, considerada como um todo, de objetos distintos e definidos da nossa intuição ou pensamento. Os objetos são chamados de elementos do conjunto”, Coniglio (1997, p.3).

A partir dessa noção intuitiva de conjuntos, ficam definidas duas relações bivalentes na teoria de conjuntos, a de pertinência e a de igualdade, que se relacionam. As duas relações estão associadas aos princípios lógicos do terceiro-excluído e ao da não contradição, que serão vistos no capítulo 2.

Dado um elemento $x,$ e um conjunto S, a relação de pertinência será utilizada para associar o elemento com o conjunto. A proposição $x \in S$, que se lê “x pertence a S”, mas também “x é elemento de S”, será verdadeira quando x for elemento de S. A negação desta proposição será a sentença “não é o caso de x pertencer a S”, simbolicamente indicada por $x \notin S$, que se lê “x não pertence a S”. Naturalmente, temos apenas duas possibilidades: O elemento pertence ao conjunto ou não pertence a ele, daí a correlação com o princípio do terceiro-excluído em lógica, que afirma que toda proposição lógica só pode ser verdadeira ou falsa. Quando o elemento não pertence ao conjunto, indicamos que ele pertence ao complementar daquele conjunto.

A concepção “ingênua” de Cantor fez que seu trabalho sofresse fortes críticas de matemáticos de sua época, entre eles Leopold Kronecker (1823 – 1891), que até se opôs a Cantor para que este obtivesse um posto na Universidade de Berlim.

A “informalidade”, aliada ao uso indiscriminado da noção de conjuntos de Cantor, deu lugar aos primeiros paradoxos do sistema, que, de certa forma, abalaram a teoria. Um paradoxo é uma derivação de um processo lógico, que apresenta inconsistência. Suponha $P(x)$ uma afirmação que estabelece uma propriedade ou condição, e $\neg P(x)$[3] a sua negação. O paradoxo consiste em uma contradição lógica, na forma de uma bicondicional, $P(x) \leftrightarrow \neg P(x)$, que é sempre falsa[4]. Caso o elemento

[3] O símbolo $\neg$ (cantoneira) é utilizado para construir negações de sentenças e a forma $\neg P(x)$ deve ser lida: “não $P(x)$". Uma discussão desse operador será apresentada no capitulo 3, dos conectivos.
[4] O operador bicondicional, cujo símbolo é $\leftrightarrow$, de onde se lê “se e somente se, resulta uma afirmação falsa, somente se os valores das duas componentes forem diferentes, o que certamente ocorre, pois $P(x)$ e $\neg P(x)$ têm sempre valores opostos. Uma discussão sobre esse conectivo lógico será apresentada no capítulo 3.

x atenda às duas condições, $P(x)$ e $\neg P(x)$, ao mesmo tempo, teremos uma contradição. Seria o mesmo, na linguagem de conjuntos, que um elemento pertencesse a um conjunto e ao mesmo tempo ao complementar deste. O exemplo 1.1 caracteriza a ideia de paradoxo.

Exemplo 1.1. Considere um planeta do universo, no qual os habitantes sempre falam a verdade ou sempre mentem. Sejam as propriedades $P(x)$: $x\ só\ fala\ a\ verdade$ e $\neg P(x)$: $x\ sempre\ mente$. Defina o conjunto A, das pessoas do referido planeta, tal que $A = \{x: P(x)\}$. Em palavras: A é o conjunto formado por todas as pessoas x daquele planeta, tal que x só fala a verdade. Considere que José, habitante daquele planeta, faça a seguinte declaração, acerca de sua natureza lógica: "Eu sou mentiroso". Com base na declaração dada por José, qual é a natureza lógica dele?

Analisemos se José é elemento do conjunto A, dos que falam a verdade, ou de seu complementar (negação), dos que mentem. Primeiramente, qualquer habitante do planeta ou sempre diz a verdade ou sempre mente. Há duas hipóteses: Ou José sempre fala a verdade ou José sempre mente.

(i) Suponha que José sempre fala a verdade, ou seja, ele atende a condição $P(x)$. Se José só fala a verdade, então ele seria elemento do conjunto A. Mas ocorre que a declaração de José, "Eu sou mentiroso", seria falsa, contradizendo a hipótese inicial (alguém que só fala verdade não poderia jamais dizer que é mentiroso, pois estaria mentindo em sua declaração), o que faz José atender a condição $\neg P(x)$. Assim, chegou-se a uma inconsistência: José pertence ao conjunto A e ao mesmo tempo ao complementar de A. Tal contradição nos leva a refutar a hipótese de que José atende a condição $P(x)$.

(ii) Suponha que José sempre mente, ou seja ele atende a condição $\neg P(x)$. Se José é sempre mentiroso, então ele não pertence ao conjunto A. Mas ocorre que a declaração de José, "Eu sou mentiroso", seria verdadeira. Nova contradição! José sempre mente, mas está declarando verdades, o que tornaria José um elemento do conjunto A, dos que falam a verdade.

A declaração de José, "Eu sou mentiroso", é um paradoxo, pois se José atende a condição $P(x)$, então ele atende a condição $\neg P(x)$ e se José atende a condição $\neg P(x)$, então ele atende a condição $P(x)$. Pode-se reduzir isso a uma contradição lógica, na forma da bicondicional $P(x) \leftrightarrow \neg P(x)$, que é sempre falsa! E agora, José sempre mente ou sempre fala a verdade? Não há como afirmar a natureza lógica de José, só com base em sua declaração, porque é um paradoxo! Cabe, aqui, até um trecho do belíssimo poema de Carlos Drummond de Andrade, intitulado "José", publicado originalmente em 1942, na coletânea *Poesias*:

> E agora, José?
> A festa acabou,
> a luz apagou,
> o povo sumiu,
> a noite esfriou,
> e agora, José?
> e agora, você?
> ⋮
> (ANDRADE, 1942, p. 11)

Um dos primeiros paradoxos foi o do próprio Cantor, indicado por Coniglio (1997) da seguinte forma: "Considere U o conjunto de todos os conjuntos. Logo, o conjunto $P(U)$, das partes de U, tem cardinal estritamente maior do que o cardinal de U, o que contradiz a hipótese de que U seja o maior conjunto" (Coniglio,1997, p.4).

Por influência de Cantor, o matemático Frege surge com a chamada filosofia logicista, propondo que a matemática pudesse ser derivada a partir de princípios puramente lógicos, onde matemática e lógica seriam inseparáveis. O que se propunha, naquela época, é que qualquer propriedade poderia caracterizar um conjunto.

Estando prestes a publicar seu trabalho, Frege foi informado pelo matemático Bertrand Russel (1872 – 1970) que este havia encontrado um paradoxo em seu sistema lógico. Esse paradoxo ficou conhecido como o paradoxo de Russel e consiste no seguinte: Se qualquer propriedade define um conjunto, então existe o conjunto formado por todos os conjuntos, cuja propriedade é a de não pertencer a si mesmo. Poderia, então, ser definido um conjunto R de todos os conjuntos que não pertenciam a si mesmos, que simbolicamente poderia ser assim representado: $R = \{x/\ x \notin x\}$. Seria o caso de $R \in R$? Quando se verifica a propriedade para o próprio conjunto R, obtém-se uma contradição. Se $R \in R$, então ele não possui a propriedade requerida em R, de ser formado pelos conjuntos que não pertencem a si mesmos. De outro giro, se $R \notin R$, ele possui a propriedade definida para o conjunto R e, portanto, deveria pertencer a ele, o que é uma contradição do tipo "$R \in R$ se e somente se $R \notin R$.

O paradoxo de Russel possui uma versão popular, conhecida como *Paradoxo do Barbeiro*, dada no exemplo 1.2:

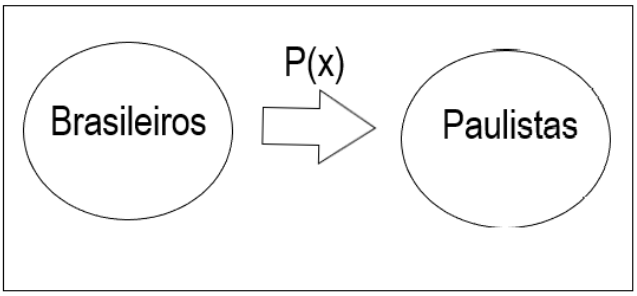
Exemplo 1.2. O Paradoxo do Barbeiro:

1. Considere uma cidade onde há apenas um barbeiro.
2. O barbeiro somente faz a barba de todas as pessoas que não se barbeiam sozinhas, e apenas dessas. Seria o caso de perguntar: O barbeiro pode fazer a própria barba?

Qualquer que seja a resposta, será obtida uma contradição. Se ele não faz a própria barba, então ele faz a própria barba, pois atende a propriedade em 2. De um outro lado, se ele faz a própria barba, então ele não faz a própria barba, porque ele só barbeia as pessoas que não se barbeiam sozinhas. Chegou-se a uma contradição: O barbeiro faz a própria barba se e somente se ele não faz a própria barba.

Pode-se observar que os paradoxos da teoria de conjuntos têm uma origem comum, que é a autorreferência. Uma maneira de evitá-los é estabelecer uma construção de conjuntos em etapas, a partir de conjuntos já bem definidos anteriormente. Veja, na figura 2, o conjunto dos paulistas construído com base em uma propriedade $P(x)$, a partir do conjunto dos brasileiros, definido anteriormente.

Figura 2. Conjuntos construídos etapa a etapa



Fonte: O autor.

Ficou evidente a necessidade de uma fundamentação mais segura para a teoria de conjuntos. Foi quando surgiu, em 1908, o matemático Ernst Zermelo (1871 – 1953) e sua primeira axiomatização da teoria de conjuntos. A teoria de Zermelo foi aperfeiçoada em 1922 pelos matemáticos Abraham Fraenkel (1891 – 1965) e Thoraef

Skolen (1887 – 1963), com o acréscimo do axioma da substituição, dando origem à teoria denominada ZF.

Não é objetivo deste trabalho apresentar uma teoria axiomatizada de conjuntos[5], mas serão apresentados alguns axiomas desse sistema, para melhor caracterizar as operações entre conjuntos, que são indispensáveis para a melhor compreensão dos operadores da lógica clássica.

A lógica e a teoria de conjuntos estão de tal forma relacionadas, que a caracterização de uma depende da outra, como num ciclo vicioso. Fica difícil dissociá-las e decidir por qual sistema iniciar os estudos. Normalmente, os alunos têm contato com a teoria básica de conjuntos no ensino fundamental e aprimoram os conhecimentos no ensino médio. Dessa forma, a proposta é que se estude as noções básicas de conjuntos e, após, pode-se fazer a fundamentação das operações da lógica de primeira ordem, a partir das operações entre conjuntos estudadas. Esta correlação será feita no capítulo 3 e muitos dos conceitos serão aplicados nos demais capítulos, sendo imprescindível que o aluno tenha pleno conhecimento das operações que serão revisadas a seguir.

1.3. Axioma da Extensão

Axioma A1 (Extensão). Dois conjuntos A e B são iguais se e somente se eles têm os mesmos elementos.

$$A = B \leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Em linguagem corrente: O conjunto A é igual ao conjunto B se e somente se, para cada elemento x, x pertence a A se e somente se x pertence a B.

A partir do Axioma da Extensão, é possível definir duas formas de representação para os conjuntos: Propriedade e Designação Direta (listagem) dos elementos. Propriedades são leis de formação para os conjuntos. Por exemplo, suponha um conjunto A, dos números ímpares, pode-se representá-lo na forma $A = \{x/x = 2k+1; k \in \mathbb{Z}\}$. Pela designação direta, os elementos serão listados entre

[5] Para uma consulta sobre a teoria axiomatizada de conjuntos, com aplicação ao ensino médio, o leitor pode acessar a dissertação do ex aluno do PROFMAT, agora mestre, intitulada Lógica Básica e o Método Axiomático: Uma Introdução Através da Teoria de Conjuntos. Veja [18].

chaves e separados por vírgula. Por exemplo, $B = \{a, e, i, o, u\}$ seria o conjunto das vogais da língua portuguesa.

Exemplo 1.3. Os conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,2,1\}$ e $C = \{1,1,2,2,3,3\}$ são dois a dois iguais?

Resolução. Pelo axioma da extensão, $A = B$ pois para cada elemento x de A, tem-se que x é elemento de B, e reciprocamente; de onde se conclui que a proposição bicondicional $x \in A \leftrightarrow x \in B$ é verdadeira. Analogamente, $A = C$, pois para cada elemento x de A, temos que x é elemento de C, e reciprocamente; de onde se conclui que a proposição bicondicional $x \in A \leftrightarrow x \in C$ é verdadeira. Por fim, verifica-se de forma análoga que $B = C$. Assim, é possível concluir que $A = B = C$.

Do exemplo 1.3, nota-se que, na teoria de conjuntos, a ordem de disposição dos elementos não é importante e que não há necessidade de repetir elementos já listados.

1.4. Axioma do Vazio

Axioma A2 (Vazio). Existe um Conjunto Vazio.

$$\exists A (\forall x) \neg (x \in A)$$

Em linguagem corrente: Existe um conjunto A, tal que para cada elemento x, não é o caso de x pertencer a A. A proposição $\neg(x \in A)$ (não é o caso de x pertencer a A) será abreviada por $x \notin A$, de onde teremos: $\exists A (\forall x)(x \notin A)$.

O conjunto vazio não possui elementos.

Teorema 1.1. O conjunto vazio é único.

Demonstração. Será feita por absurdo. Suponha, por absurdo, que existam dois conjuntos vazios, A e B, com $A \neq B$. Se $A \neq B$, então, pelo axioma da extensão, há duas hipóteses:

I. $(\exists x);\ x \in A$ e $x \notin B$.

II. $(\exists x);\ x \in B$ e $x \notin A$.

Mas, em qualquer das hipóteses chega-se a um absurdo, porque os conjuntos A e B são vazios e não pode existir elemento que pertença a qualquer deles. Logo, $A = B$ e os conjuntos são um só. ■

Demonstrada a unicidade, pode-se caracterizar um símbolo que represente o conjunto vazio. Serão utilizados os símbolos ϕ ou { }. Note que $\phi \neq \{\phi\}$.

1.5. O Axioma da Separação

Axioma A3 (Separação). Para toda fórmula $P(x)$, definida sobre os elementos x de um conjunto A, existe um conjunto B, subconjunto de A, formado pelos elementos de A para os quais a fórmula $P(x)$ é verdadeira e B não é variável livre em $P(x)$.

$$\exists B \forall x [x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge P(x)]$$

Em linguagem corrente: Existe um conjunto B, tal que para cada elemento x, x pertence a B se e somente se x pertence a A e a fórmula $P(x)$ é verdadeira. Pode-se expressar B da seguinte forma resumida:

$$B = \{x \in A; P(x)\}$$

Esse é um axioma esquema, porque garante que, a partir de uma fórmula lógica $P(x)$ e de um conjunto referência A, é possível “separar” alguns ou todos os elementos de A para formar um conjunto B, desde que esses elementos atendam a condição ou propriedade descrita em $P(x)$. Veja o exemplo 1.4, abaixo:

Exemplo 1.4. Dado o conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Defina o conjunto $B = \{x \in A; P(x)\}$, onde $P(x)$ é a propriedade que x tem de ser um número primo.

Solução. Um número é primo quando ele possui apenas dois divisores naturais: 1 e ele mesmo. Pelo axioma da separação, deve-se “separar” os elementos do conjunto A, que são primos, formando o conjunto $B = \{2,3,5,7\}$. Observe que $P(2), P(3), P(5)$ e $P(7)$ são todas proposições lógicas verdadeiras.

Do exemplo 1.4, mudando-se a propriedade $P(x)$ para "x é par", encontra-se o conjunto que é $\{2,4,6\}$. Por isso A3 é um axioma esquema.

Caso todos os elementos de A tornem uma $P(x)$ qualquer sempre verdadeira, então $B = A$. Caso $P(x)$ seja falsa para todos os elementos de A, então B é o conjunto vazio.

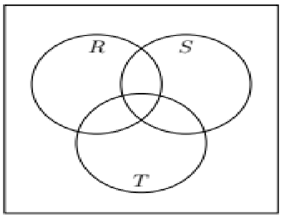
O resultado lógico mais importante desse axioma é que a restrição de $P(x)$ não apresentar B como variável livre impede o paradoxo de Russel, tornando o sistema livre de contradições. É vedado, portanto, que se defina para $p(x)$ a propriedade de x não pertencer a B, $P(x): x \notin B$, que é uma contradição, pois B seria o conjunto tal que $\exists B (\forall x)(x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in B \leftrightarrow x \notin B \Rightarrow$ **contradição!**

Estando o sistema livre de contradições, nas próximas seções serão apresentadas as definições e diagramações para as operações básicas de conjuntos.

1.6. Diagramas de John Venn

O matemático e historiador inglês John Venn (1834 – 1923) foi professor de lógica na universidade de Cambridge, na Inglaterra, tendo feito publicações importantes na área da lógica, como *Lógic of Chance*, em 1866 e S*ymbolic Lógic,* em 1881. Venn ficou mais conhecido entre os matemáticos e lógicos pela maneira diagramática de representar conjuntos e suas relações de interseção e união. John Venn tomou três conjuntos, R, S e T, e os representou como subconjuntos de um universo U, dividindo-o em 8 regiões disjuntas, na forma de uma partição. O conjunto U é chamado de universo do discurso, ou seja, depende do assunto em pauta. Definido o conjunto U, todos os elementos pertencerão a ele. Por exemplo, na matemática discreta de contagem, o universo U seria o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$. Mas se o assunto for cálculo de probabilidades, o universo será o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, no intervalo [0,1]. A figura 3 mostra as 8 regiões disjuntas.

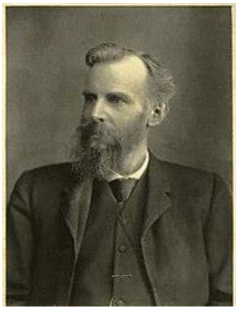
Figura 3. Diagramas de Venn



Fonte: O autor.

A utilização de diagramas é um recurso visual e será uma importante ferramenta para facilitar a compreensão das operações entre conjuntos. Umas das técnicas de análise de argumentos lógicos que será apresentada, utilizará diagramas de Venn nos testes de validade de argumentos dedutivos. Para tanto, será necessário que o aluno tenha plena habilidade para identificar setores nos diagramas, resultantes das operações entre os conjuntos. A figura 4 ilustra uma fotografia do matemático John Venn, idealizador da técnica de diagramação de conjuntos.

Figura 4. John Venn



Fonte: Wikipédia.

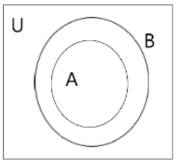
1.7. Relação de Inclusão

Definição 1.1 (Inclusão). Diz-se que um conjunto A está contido em um conjunto B, se todos os elementos de A são também elementos de B. Simbolicamente, indica-se $A \subseteq B$ (leia "A está contido em B"). Quando $A \subseteq B$, pode-se dizer que A é um subconjunto de B e representa-se assim:

$$(A \subseteq B) \leftrightarrow \forall x((x \in A) \rightarrow (x \in B))$$

Em linguagem corrente: A está contido em B se e somente se, para cada x, se x pertence a A então x pertence a B. A figura 5 ilustra o diagrama para a relação de inclusão.

Figura 5. Diagrama da inclusão A⊆B



Fonte: O autor.

Com essa definição, o axioma da extensão pode ser escrito da seguinte forma:

$$(A = B) \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Se todo elemento de A é elemento de B, com $A \neq B$, diz-se que A é um subconjunto próprio de B e pode-se indicar, $A \subset B$.

Teorema 1.2 – O conjunto vazio está contido em todo conjunto.

Demonstração. Vamos provar por absurdo. Suponha que existe um conjunto A, tal que o conjunto $\emptyset$ não está contido em A (indica-se $\emptyset \not\subset A$), então, pela definição de inclusão, $(\exists x); x \in \emptyset$ e $x \notin A$. Mas isso é absurdo, pois o axioma do vazio indica que tal conjunto não possui elementos. Assim, $\emptyset \subseteq A$. ■

1.8. Operação de Interseção

A interseção entre os conjuntos A e B será formada pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos, conforme a definição 1.2, abaixo:

Definição 1.2 (**Interseção**). Dados dois conjuntos A e B, a interseção de A com B, representada por $A \cap B$, é o conjunto formado por todos os elementos comuns aos dois conjuntos. Indica-se, simbolicamente, $A \cap B = \{x / x \in A$ e $x \in B\}$.

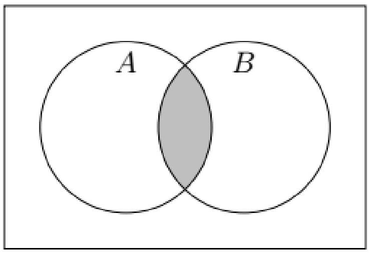
Define-se de forma análoga a interseção, no caso de serem dados mais que dois conjuntos ($A \cap B \cap C \cdots$).

Assim, existe a seguinte relação de pertinência de um elemento: $x \in A \cap B$ se, e somente se, $x \in A$ e $x \in B$.

Caso a interseção entre dois ou mais conjuntos seja o conjunto $\emptyset$, os conjuntos serão chamados de disjuntos.

A figura 6 representa a diagramação para os conjuntos A e B, onde a área sombreada indica o setor relativo à operação de interseção.

Figura 6. Diagrama da interseção entre conjuntos



$A \cap B$

Fonte: O autor.

1.9. Operação de União

A operação de união será formada pelos elementos que pertencem a algum dos conjuntos, conforme definição 1.3, abaixo:

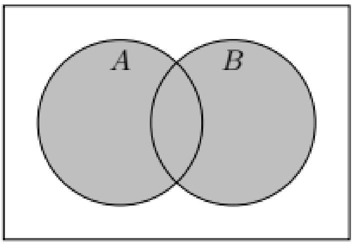
Definição 1.3 (União). Dados dois conjuntos A e B, a união de A com B, representada por $A \cup B$, é o conjunto formado por todos os elementos x que pertencem a algum dos conjuntos. Indica-se $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Assim, existe a seguinte relação de pertinência: $x \in A \cup B$ se, e somente se, $x \in A$ ou $x \in B$.

Define-se de forma análoga a operação de união, no caso de serem dados mais que dois conjuntos ($A \cup B \cup C \cup \cdots$).

A figura 7 representa a diagramação para os conjuntos A e B, onde a área sombreada indica o setor relativo à operação de união.

Figura 7. Diagrama da união entre conjuntos



$A \cup B$

Fonte: O autor.

1.10. Operação Diferença

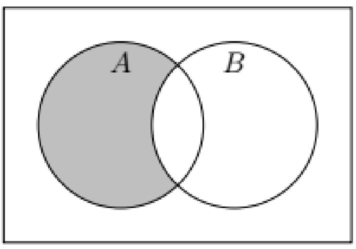
A operação diferença entre conjuntos irá formar o conjunto dos elementos que pertencem exclusivamente a um dos conjuntos, conforme definição 1.4, abaixo.

Definição 1.4 (Diferença). Dados dois conjuntos A e B, a diferença de A em relação a B, representada simbolicamente por $A - B$, ou $A \backslash B$, é o conjunto formado por todos os elementos x que pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao conjunto B. Indica-se $A - B = \{x \ / \ x \in A$ e $x \notin B\}$.

Assim, existe a seguinte relação de pertinência: $x \in A - B$ se, e somente se, $x \in A$ e $x \notin B$.

A figura 8 ilustra a diagramação relativa à operação de diferença entre os conjuntos A e B.

Figura 8. Diferença entre conjuntos.



$A - B$

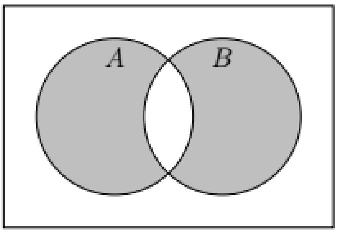
Fonte: O autor.

Definição 1.5 (**Diferença Simétrica**). Dados dois conjuntos A e B, a diferença simétrica de A para B é o conjunto representado por $A \triangle B,$ formado por todos os elementos que pertencem à união $(A - B) \cup B(-A)$. Indicamos $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

Assim, existe a seguinte relação de pertinência: $x \in A \triangle B$ se, e somente se, $x \in A$ e $x \notin B$ ou $x \in B$ e $x \notin A$.

A figura 9 ilustra a diagramação para a operação de diferença simétrica entre os conjuntos A e B.

Figura 9. Diferença simétrica



$A \triangle B$

Fonte. O autor.

1.11. O Complementar de um Conjunto

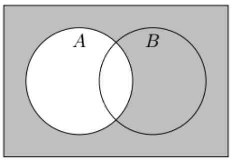
Dado um conjunto $A,$ para o caso de x não ser elemento do conjunto A, a qual conjunto ele pertencerá? A partir do conjunto universo $U,$ com $A \subseteq U$, o complementar do conjunto A é o conjunto A^c, tal que $A \cup A^c = U$ e $A \cap A^c = \emptyset$, onde A^c será o conjunto formado por todos os elementos do universo, que não pertencem a A. Veja a definição 1.6.

Definição 1.6 (**Complementar**). O complementar do conjunto A, representado por A^c, é formado por todos os elementos do universo U que não pertencem a A.

Pode-se indicar $A^c = \{x \in U / \ x \notin A\}$. Naturalmente, nenhum elemento poderá pertencer a um conjunto e ao seu complementar simultaneamente, o que torna evidente a correlação com o princípio lógico da não contradição, que afirma que uma proposição lógica não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa.

A figura 10 ilustra a diagramação para o conjunto complementar de A.

Figura 10. Diagramação do conjunto complementar



A^c

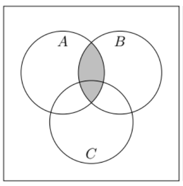
Fonte: O autor.

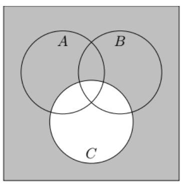
Exemplo 1.5. Dados os conjuntos A, B e C, que se interceptam, represente, no diagrama de Venn, de forma sombreada, os setores correspondentes às operações abaixo:

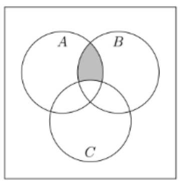
a) $(A \cap B) - C$

Solução. Primeiramente, note que o setor pedido corresponde aos elementos que pertencem somente a A e B (não inclui, naturalmente, os elementos de C). O setor sombreado da figura A1, abaixo, corresponde ao setor "A e B", simbolizado por $A \cap B$, de onde se percebe que isso pode incluir elementos de C. O setor sombreado da figura A2, indica o conjunto complementar de C, simbolizado por C^c. Por fim, o setor pedido, $(A \cap B) - C$, corresponde à interseção das duas primeiras figuras sombreadas, dada por $(A \cap B) \cap C^c$ que está representado na figura A3, ou seja $(A \cap B) - C = (A \cap B) \cap C^c$.

figura A1 figura A2 figura A3







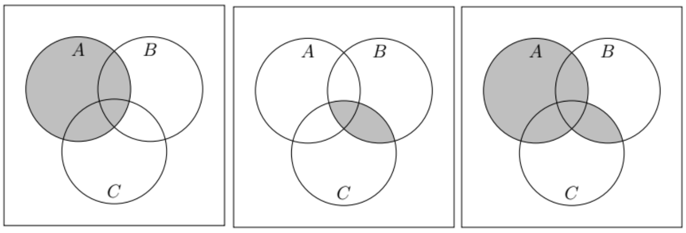
$A \cap B$ C^c $(A \cap B) - C$

b) $A \cup (B \cap C)$

Solução. O setor sombreado da figura B1 destaca o conjunto A. A área sombreada da figura B2 destaca o conjunto $B \cap C$, ou seja, os elementos comuns a B

e a C. A região sombreada da figura B3 destaca a união das duas regiões sombreadas anteriormente, dada por $A \cup (B \cap C)$.

figura B1 figura B2 figura B3

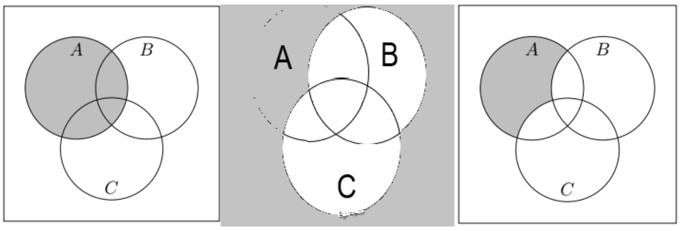


A $\quad B \cap C \quad$ $A \cup (B \cap C)$

c) $A \cap (B \cup C)^C$

Solução. A parte sombreada da figura C1 destaca o conjunto A; O setor sombreado da figura C2 destaca o conjunto complementar da união de B com C, simbolizado por $(B \cup C)^C$, de modo que os elementos dessa operação não pertencem a B, nem a C. Por fim, a figura C3 indica a região comum das duas figuras anteriores, representada pela interseção pedida.

figura C1 figura C2 figura C3



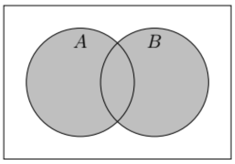
A $\quad (B \cup C)^C \quad$ $A \cap (B \cup C)^C$

Exemplo 1.6 Verifique, através de Digramas de Venn, que $(A \cup B)^C = A^c \cap B^c$.

Solução. O que se pede para verificar é que o conjunto complementar da união de dois conjuntos A e B é igual ao conjunto formado pela interseção de seus complementares. Esse resultado será comparado, no capítulo 4, sobre equivalências lógicas, às leis de Augustus De Morgan (1806 – 1871). Observe que o setor sombreado na figura F1 indica a operação de união do conjunto A com o B; Na figura F2, o setor sombreado representa o complementar da união dos conjuntos A e B, representado por $(A \cup B)^C$. No outro grupo de figuras, o setor sombreado da figura F3 representa o conjunto complementar de A, representado por A^c. Na figura F4, temos o conjunto complementar de B, representado por B^c. Agora, observe que o setor sombreado da figura F5 corresponde ao setor comum de A^c com B^c, representado simbolicamente por $A^c \cap B^c$. Perceba, por fim, que a região da figura F2 corresponde à mesma região da figura F5, tornando evidente, via diagramas, que $(A \cup B)^C = A^c \cap B^c$.

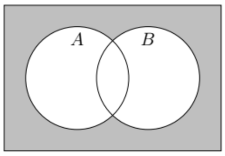
Além disso, cumpre observar que, no caso de os conjuntos A e B serem disjuntos, ou seja, $A \cap B = \phi$, a igualdade é válida.

figura F1



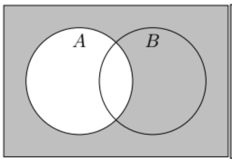
$A \cup B$

figura F2



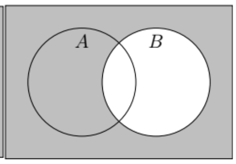
$(A \cup B)^C$

figura F3



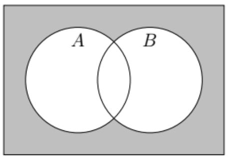
A^c

figura F4



B^c

figura F5



$A^c \cap B^c$

CAPÍTULO 2. PROPOSIÇÕES LÓGICAS

A Lógica Matemática surgiu como ciência na antiguidade. O notável filósofo grego Aristóteles (384 a.C a 322 a.C) em sua obra Organon, nos volumes intitulados Analíticos Anteriores e Analíticos Posteriores, deixa claro, desde os primórdios, o objetivo desta ciência: A análise do raciocínio.

A lógica é a ciência do raciocínio. Consiste de métodos e princípios que podem ser utilizados para distinguir o raciocínio correto do incorreto.

A lógica clássica é um sistema formal e possui uma linguagem caracterizada por símbolos. Enquanto sistema formal, é uma ciência segura, exata e livre de contradições, dotada de consistência e coerência. Tem como unidade fundamental a proposição, definida a seguir.

2.1. Proposição Lógica

Definição 2.1 (**Proposição Lógica**). Uma proposição lógica é toda sentença declarativa, afirmativa ou negativa, que pode ser classificada em verdadeira ($\mathcal{V}$) ou falsa ($\mathcal{F}$), mas não ambos os valores. Em circuitos digitais, os valores lógicos também costumam ser representados por 0 (zero) para proposições falsas (0 ou $\mathcal{F}$) e 1 (um) para proposições verdadeiras (1 ou $\mathcal{V}$).

Para Alencar Filho (2002), “chama-se proposição todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo. As proposições transmitem pensamentos, isto é, afirmam fatos ou exprimem juízos” (ALENCAR FILHO, 2002, p.11).

As proposições lógicas podem ser representadas por variáveis proposicionais, letras do alfabeto, maiúsculas ou minúsculas: $A, B, \cdots, P, Q, R, \cdots, a, b, \cdots p, q, r, \cdots$. No alfabeto da lógica, admite-se, inclusive, o uso e subscritos, $a_1, b_1, \cdots, p_1, q_1 \cdots, a_2, b_2, \cdots$.

Exemplo 2.1. As sentenças P e Q, descritas abaixo, são proposições lógicas:
$P \equiv$ A lua é um planeta. (afirmação falsa)
$Q \equiv$ 7 é um número primo. (afirmação verdadeira)

Na língua portuguesa, frase é um enunciado de sentido completo. Veja o que diz Paschoalin (2008): “frase é um conjunto de palavras que exprime sentido, capaz de estabelecer comunicação” (PASCHOALIN, 2008, p. 230). As frases podem ser nominais, se construídas sem verbo, ou verbais, se construídas com verbos ou locuções verbais. A frase verbal é chamada de oração. Neste sentido, uma frase pode ser simples como em “que belo dia!”, mas pode ser complexa, como em “Os números naturais, maiores do que 1, podem ser decompostos em um produto de fatores primos, de modo único, a menos da ordem dos fatores”.

Às vezes, frases diferentes têm o mesmo significado e frases iguais têm significados diferentes. Veja os exemplos abaixo, em que (1) e (2) indicam frases diferentes, mas com mesmo significado e em (3), uma frase que pode indicar mais de um significado.

(1) Em defesa do patrimônio público, diga não às privatizações.
(2) Diga não às privatizações, em defesa do patrimônio público.
(3) Oi! (Pode ser um cumprimento, uma resposta a um chamado ou um chamado).

Portanto, nem toda frase será uma proposição lógica, porque às vezes não faz sentido atribuir a elas um juízo de valor, verdadeiro ou falso. Veja o que diz Copi (1978):

> As proposições são verdadeiras ou falsas e nisto diferem das perguntas, ordens e exclamações. Só as proposições podem ser afirmadas ou negadas; uma pergunta pode ser respondida, uma ordem dada e uma exclamação proferida, mas nenhuma delas pode ser afirmada ou negada, nem é possível julgá-las como verdadeiras ou falsas (COPI, 1978, p. 22).

Por uma questão de simplicidade, à margem das discussões filosóficas[6], proposição lógica é uma sentença declarativa, exige verbo, sobre a qual é possível estabelecer um juízo de valor (verdadeiro ou falso). Assim, por não fazer sentido valorá-las como verdadeiras ou falsas, não são proposições as frases:

- Interrogativas (expressam perguntas, indagação)
  Exemplo: Qual é o seu nome?

[6] Há muita discordância sobre o que é uma proposição. Uns indicam que proposição é o significado de uma sentença declarativa, outros as identificam como sendo um conjunto de mundos possíveis e suas representações mentais; Segundo Mortari (2001), outros até estão convencidos de que proposição nem existe, porque não ocupam lugar no espaço, não são afetadas pela gravidade, nem refletem luz. “Na melhor das hipóteses, dizem eles, as proposições são complicações desnecessárias, e pode-se muito bem trabalhar apenas com sentenças” (MORTARI, 2001, p. 13).

- Imperativas (expressam ordem, pedido)
  Exemplo: Faça seu trabalho corretamente.
- Exclamativas (expressam admiração, indignação)
  Exemplo: Legal!
- Optativas (expressam desejo)
  Exemplo: Vá com Deus!
- Abertas: Uma sentença é aberta se o sujeito ou o referencial não estiverem quantificados.
  Exemplos: Ele é advogado. O Tribunal de Justiça do Distrito Federal e Territórios possui x varas criminais. Nesses exemplos, "Ele" e "x" são variáveis livres, que podem assumir qualquer valor. Enquanto não quantificadas, formam sentenças abertas.

2.1.1. Valores Lógicos das Proposições

Definição 2.2 (**Valor Verdade**). Dada uma proposição lógica $P,$ o seu valor lógico, também chamado valor verdade, será verdadeiro, indicaremos $v(P) = \mathcal{V},$ se a proposição for verdadeira ou será falso, indicaremos $v(P) = \mathcal{F},$ se a proposição for falsa.

Por uma questão de simplicidade, se $v(P) = \mathcal{V}$, pode-se indicar $P = \mathcal{V}$ e, se $V(P) = \mathcal{F},$ pode-se indicar $P = \mathcal{F}$.

2.1.2. Proposições Básicas (simples ou atômicas)

Denomina-se proposição básica, também chamada de simples ou de atômica, aquela que não possui outra proposição como componente, sendo uma oração simples. Para Feitosa e Paulovich (2005), "[...]aquela que não contém outra proposição como parte integrante de si mesma[...]" (FEITOSA e PAULOVICH, 2005, p. 19). São exemplos de proposições simples:

a) $A \equiv$ O número 9 é um quadrado perfeito.
b) $B \equiv$ José foi à praia.

2.1.3. Proposições Compostas (fórmulas ou moleculares)

Uma proposição composta, também chamada de fórmula lógica ou proposição molecular, é uma sentença gerada por duas ou mais proposições atômicas, através de conectivos lógicos. Para Feitosa e Paulovich (2005), “aquela que não é simples” (FEITOSA e PAULOVICH, 2005, p. 19). São exemplos de proposições compostas:

a) $P \equiv$ Hoje choveu e José não foi à praia.
b) $Q \equiv$ Todos os programas foram limpos e nenhum vírus foi encontrado.
c) $R \equiv$ Se a taxa de juros é alta, então a economia não cresce.

2.2. Princípios Lógicos (Leis do Pensamento)

Todas as proposições lógicas, simples ou compostas, devem atender aos seguintes princípios da lógica clássica, conhecidos como leis para o pensamento correto:

a) Princípio do terceiro excluído
Toda proposição lógica só pode ser classificada como verdadeira ou falsa, não havendo outra possibilidade.

b) Princípio da não-contradição
Uma proposição não pode ser classificada em verdadeira e falsa, simultaneamente.

c) Princípio da identidade lógica
Se uma proposição lógica é verdadeira, então ela não pode ser classificada como falsa. Analogamente, não se deve classificar como verdadeira aquela que for falsa. Toda proposição é idêntica a si mesma.

Para o estudo da lógica, é importante que o aluno saiba diferenciar as sentenças que representam proposições na lógica clássica, daquelas que não são interessantes a esse sistema. As bancas examinadoras, com frequência, propõem questões nas quais os candidatos serão avaliados nesse sentido. Veja alguns exemplos a seguir:

Exemplo 2.2 (Fundação Carlos Chagas – FCC, 2006). Das cinco frases abaixo, quatro delas têm uma mesma característica lógica em comum, enquanto uma delas não tem essa característica.

I. Que belo dia!
II. Um excelente livro de raciocínio lógico.
III. O jogo terminou empatado?
IV. Existe vida em outros planetas do universo.
V. Escreva uma poesia.

A frase que não possui essa característica comum é a

a) I   b) II   c) III   d) IV   e) V

Solução. Deve-se identificar a natureza lógica das sentenças de I a V:

I. Que belo dia!
Não é proposição lógica, por ser exclamativa.
II. Um excelente livro de raciocínio lógico.
Não é proposição porque não apresenta verbo. A proposição lógica deve ser declarativa (apresentar verbo).
III. O jogo terminou empatado?
Não é proposição porque é interrogativa.
IV. Existe vida em outros planetas do universo.
É proposição lógica porque é sentença declarativa que pode ser verdadeira ou falsa. Uma proposição é uma sentença declarativa que pode ser julgada como verdadeira (V) ou falsa (F) e, muitas vezes, não se exige que o julgador seja capaz de decidir qual é a alternativa válida.
V. Escreva uma poesia
Não é proposição porque é sentença imperativa.

Portanto, temos uma única sentença, a IV, que é uma proposição lógica, diferentemente das demais, que não o são. A questão pede a frase que não tem a característica comum, que está na alternativa d.

Exemplo 2.3 (Fundação Carlos Chagas – FCC, 2006). Considere as seguintes frases:

I. Ele foi o melhor jogador do mundo em 2005.

II. $\frac{X+Y}{5}$ é um número inteiro.

III. João da Silva foi o Secretário da Fazenda do Estado de São Paulo em 2000.

É verdade que apenas

(A) I é uma sentença aberta.
(B) II é uma sentença aberta.
(C) I e II são sentenças abertas.
(D) I e III são sentenças abertas.
(E) II e III são sentenças abertas.

Solução. Uma sentença é aberta se o sujeito ou referencial não é quantificado. Em I, temos uma sentença aberta porque o sujeito "Ele" não está quantificado. Se a frase fosse "Ronaldo foi o melhor jogador do mundo em 2005", teríamos uma proposição lógica. Em II, a sentença é aberta porque os valores de X e Y não estão quantificados. Logo, não é possível estabelecer juízo de valor à declaração. Em III, temos uma proposição lógica, pois o enunciado é de sentido completo, podendo ser verdadeiro ou falso. O gabarito para essa questão é a letra C.

2.3. Tabelas-Verdade

A tabela-verdade é um quadro de valorações lógicas, que estabelece todas as possibilidades de valores lógicos associados às proposições componentes. As colunas básicas da tabela irão representar as proposições atômicas, distintas, componentes da fórmula e as suas linhas indicarão os arranjos lógicos possíveis.

Seja $P(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ uma forma proposicional, na qual as n proposições atômicas, distintas, $p_1, p_2, \cdots, p_n$, ocorrem. A função exponencial $L: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida por $L(n) = 2^n$, retorna o número de linhas da tabela-verdade de P. A tabela-verdade de P terá 2^n linhas de arranjos lógicos e n colunas básicas.

Justificativa**:** Na construção da tabela-verdade de P, sabendo que cada proposição atômica só pode assumir 2 valores lógicos, $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{F}$, que se excluem, a proposição $P,$ formada por n proposições simples distintas, que representam as n etapas de construção das colunas básicas da tabela, pelo princípio multiplicativo de contagem, irá gerar uma tabela-verdade que terá $2 \times 2 \times 2 \cdots \times 2 = 2^n$ linhas. Portanto, $L(n) = 2^n$ é uma função exponencial de base 2 porque cada proposição atômica apresenta apenas duas possibilidades $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{F}$, não ambas.

Exemplo 2.4. Tabelas-verdade para fórmulas com duas ou três proposições atômicas.

a) Para uma fórmula com duas proposições atômicas distintas, A e B, temos $n = 2$, donde $L(2) = 2^2 = 4$ linhas. A tabela 1 ilustra os arranjos lógicos possíveis para um par de proposições:

Tabela 1. Tabela-verdade para duas proposições

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$

Fonte: O autor.

b) Para uma fórmula com três proposições atômicas distintas, A, B e C, temos $n = 3$, donde $L(3) = 2^3 = 8$ linhas. A tabela 2 ilustra os arranjos lógicos possíveis.

Tabela 2. Tabela-verdade para três proposições

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Fonte: O autor.

2.3.1. Método de preenchimento da tabela-verdade

As linhas da tabela representam os arranjos dos valores lógicos possíveis para o conjunto das proposições atômicas, que estão representadas nas colunas da tabela. O número de linhas cresce exponencialmente, à medida que n aumenta, gerando dificuldade para o preenchimento das linhas. O esquema abaixo pode auxiliar na formação das possibilidades associadas às proposições atômicas, onde o preenchimento da tabela será feito coluna a coluna e não linha a linha. Observe que em cada passo, a partir do segundo, a quantidade de valores $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$, a serem alternados para o preenchimento das colunas, corresponde à metade da quantidade utilizada no passo anterior.

- Passo 1: Primeira coluna (A)

  Atribua à primeira coluna uma quantidade de valores $\mathcal{V}$ igual a $\left(\frac{2^n}{2}\right)$, que corresponde à metade do total de linhas da tabela, seguidos de valores $\mathcal{F}$, na mesma proporção. Por exemplo, se a fórmula apresentar três proposições atômicas diferentes, $n = 3$ $(A, B$ e $C)$, temos $L(3) = 2^3 = 8$ linhas. A primeira coluna receberá uma quantidade de valores $\mathcal{V}$ igual a $\frac{8}{2} = 4$, seguidos de valores $\mathcal{F}$, na mesma proporção. A tabela 3 mostra como ficaria o preenchimento da coluna A, no caso de termos três proposições atômicas na fórmula.

Tabela 3. Preenchimento da coluna A

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$		
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$		
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$		
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$		
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$		
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$		
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$		
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$		

Fonte: O autor.

- Passo 2: Segunda coluna (B)

  Na segunda coluna, alterne valores $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$ em uma proporção igual a $\left(\frac{2^n}{4}\right)$, que corresponde à metade daquela utilizada na primeira coluna, até se completarem todas as linhas.

  Prosseguindo ao preenchimento da tabela-verdade do exemplo anterior, para $n = 3$, considerando que a proporção de valores alternados na coluna A foi 4, a proporção utilizada na segunda coluna B será $\frac{4}{2} = 2$ valores $\mathcal{V}$, alternados de 2 valores $\mathcal{F}$, até completarmos todas as linhas. A tabela 4 mostra o preenchimento da coluna B.

Tabela 4. Preenchimento da coluna B

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	

Fonte: O autor.

- Passo 3: Terceira coluna (C)

  Na terceira coluna, alterne valores $\mathcal{V}$ e $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ em uma proporção igual a $\left(\frac{2^n}{8}\right)$, que corresponde à metade daquela utilizada na segunda coluna (B), até se completarem todas as linhas.

  Dando prosseguimento ao preenchimento da tabela 4, do exemplo, considerando que a proporção de valores alternados na coluna B foi 2, a proporção utilizada na terceira coluna C será $\frac{2}{2} = 1$ valor $\mathcal{V}$, alternado de 1 valor $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, até serem completadas todas as linhas. A tabela 5 representa o preenchimento da coluna C, finalizado o preenchimento para uma tabela com três variáveis atômicas distintas.

Tabela 5. Preenchimento da coluna C

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$

Fonte: O autor.

- Aplica-se esse mesmo raciocínio até serem preenchidas todas as demais colunas da tabela, se houver.

Exemplo 2.4 (FUNCAB/2014). Determine o número de linhas da tabela-verdade da proposição: se trabalho e estudo matemática, então canso, mas não desisto ou não estudo matemática.

a) 4
b)16
c) 8
d) 64
e) 32

Solução. O número de linhas de uma tabela-verdade depende da quantidade de proposições atômicas componentes. Na proposição dada, pode-se nomear as seguintes proposições: A é proposição “trabalho”; B será “estudo matemática”, C é “canso”, D será “não desisto”. Observe que a sentença “não estudo matemática” é a negação da sentença “estudo matemática” e não deve ser contabilizada como uma proposição a mais, visto que o modificador “não” não acrescenta novas linhas à tabela, mas apenas modifica o valor lógico da afirmação, como será visto no estudo dos conectivos lógicos. Há, portanto, somente 4 proposições distintas. O número de linhas da tabela-verdade é dado por $L(n) = 2^n$ e, sendo $n = 4$, teremos: $L(4) = 2^4 = 16$ linhas. Gabarito: b.

Exemplo 2.5 (CESPE/2008). [...] De acordo com as definições apresentadas no texto acima, julgue os itens subsequentes. [...]
(59) Suponha-se uma comunidade na qual cada um de seus membros fala sempre proposições verdadeiras ou fala sempre proposições falsas. Sendo assim, se três membros dessa comunidade estiverem conversando, a quantidade de vezes em que é possível pelo menos dois deles dizerem a verdade é igual a 4.

Solução. A questão pode ser resolvida utilizando as técnicas de contagem da análise combinatória. Entretanto, vamos utilizar o conceito de tabela-verdade para a resolução. Considerando que cada membro da comunidade fala sempre proposições verdadeiras ou fala sempre proposições falsas, pode-se caracterizá-los como elementos proposicionais. Sejam A, B e C os membros da comunidade. Façamos uma tabela verdade para três proposições, cujo número de linhas é $L\,(3) = 2^3 = 8$. Retomando a tabela 5, reproduzida abaixo, e denotando as linhas por L1, L2, ⋯, L8, basta identificar as linhas com pelo menos (no mínimo) dois valores verdadeiros.

Tabela 5. Tabela para o exemplo 2.5

Linhas	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{L1}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{L2}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{L3}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{L4}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{L5}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{L6}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{L7}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{L8}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Fonte: O autor.

Observe, na tabela 5, que as quatro linhas sombreadas, L1, L2, L3 e L5, têm pelo menos dois valores verdadeiros. Na linha L1, temos a possibilidade de os três falarem sempre a verdade; na L2, A e B falam sempre a verdade e C sempre mente; Em L3, A e C sempre falam a verdade e B sempre mente; em L5, B e C sempre falam a verdade e A sempre mente. Nas demais linhas, no máximo um deles fala a verdade. Logo, há 4 possibilidades de pelo menos dois deles dizerem a verdade. Gabarito: Certo.

CAPÍTULO 3. CONECTIVOS LÓGICOS

As proposições atômicas podem ser interligadas por conectivos (operadores) lógicos, formando as proposições compostas, também chamadas de fórmulas. Alencar Filho (2002) define: “[...] chamam-se conectivos palavras que se usam para formar novas proposições a partir de outras” (ALENCAR FILHO, 2002, p. 13). O valor lógico de uma fórmula depende de dois fatores: da valoração das sentenças atômicas componentes, não necessariamente de todas, e dos conectivos lógicos utilizados. Os conectivos lógicos e as palavras mais comuns utilizadas em suas representações, bem como os respectivos símbolos, são dados a seguir:

a) Negação (não): $\neg A$
b) Conjunção (e): $A \wedge B$
c) Disjunção inclusiva (ou): $A \vee B$
d) Disjunção exclusiva (ou···ou): $A \veebar B$
e) Condicional (Se ..., então): $A \rightarrow B$
f) Bicondicional (se e somente se): $A \leftrightarrow B$

3.1. A Noção de Conjuntos e os Operadores Lógicos

A partir da noção intuitiva de conjuntos e suas operações, que são estudadas no ensino médio, não se descreve o que é um conjunto, mas o que pode ser feito com ele. Existe uma álgebra própria que pode ser utilizada para caracterizar as operações de união, interseção e diferença, como visto no capítulo 1. Naquela oportunidade, foram apresentados alguns axiomas da teoria formal de conjuntos, proposta por Zermelo no ano de 1908 e Fraenkel em 1932, no chamado sistema ZF, entre os quais, o axioma da separação, que evita o paradoxo de Russel, formalizando um sistema livre de contradições, dando garantia de aplicabilidade da teoria de conjuntos aos preceitos lógicos.

É possível correlacionar a álgebra de conjuntos com a álgebra proposicional da lógica. As relações de pertinência e igualdade entre conjuntos são bivalentes. Um elemento x pertence ou não pertente ao conjunto. Dois conjuntos A e B são iguais ou não são iguais. Aqui se inicia o processo de correlação entre os conceitos da teoria de conjuntos de Cantor e os princípios da lógica clássica: As proposições lógicas também são bivalentes, uma vez que só podem ser classificadas de duas formas, verdadeiro ($\mathcal{V}$) ou falso ($\mathcal{F}$), mas não ambos, conforme o já referido princípio do terceiro excluído.

Para ilustrar como as operações de interseção, união e diferença podem ser relacionadas às operações da lógica clássica, vejamos um exemplo:

Exemplo 3.1. Dados os conjuntos $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, determine os conjuntos indicados nas operações abaixo. Após, de acordo com as hipóteses dadas em cada linha da tabela, complete as colunas em branco com verdadeiro ($\mathcal{V}$), se o elemento x pertence ao conjunto indicado na operação da coluna, ou com falso ($\mathcal{F}$), caso o elemento x não pertença ao conjunto. Por exemplo, na primeira linha da tabela, L1, a proposição $x \in A \cap B$ receberá atributo $\mathcal{V}$, porque, de acordo com a hipótese dessa linha e da definição da operação de interseção, $\forall x$, onde x é elemento de algum dos conjuntos, se é verdade que $x \in A$ e é verdade que $x \in B$, então é necessariamente verdade que o referido elemento pertence ao conjunto $A \cap B$. Essa mesma proposição receberá atributo $\mathcal{F}$ na segunda linha da tabela, L2, porque se é verdade que $x \in A$ e é verdade que $x \notin B$, então é falsa a proposição da coluna que afirma $x \in A \cap B$.

a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $A - B$
d) $A \,\Delta\, B$

Linhas	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{x \in A \cap B}$	$\boldsymbol{x \in A \cup B}$	$\boldsymbol{x \in A - B}$	$\boldsymbol{x \in A \,\Delta\, B}$
L1	$x \in A$	$\boldsymbol{x} \in B$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$			
L2	$x \in A$	$\boldsymbol{x} \notin B$	$\boldsymbol{F}$			
L3	$x \notin A$	$\boldsymbol{x} \in B$				
L4	$x \notin A$	$\boldsymbol{x} \notin B$				

Solução. De acordo com as definições de interseção, união, diferença e diferença simétrica, entre conjuntos, dadas no capítulo 1, temos os conjuntos:

$A \cap B = \{1, 3, 5\}$

$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,7\}$

$A - B = \{0, 2, 4\}$

$A \,\Delta\, B = \{0, 2, 4, 7\}$

Agora, passemos ao preenchimento dos valores lógicos da tabela. Para isso, deve-se observar as afirmações indicadas em cada linha e calcular o valor lógico da proposição que está na coluna. Assim, a coluna referente à proposição $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, escrita na posição horizontal, é igual à sequência $(\mathcal{V}, \mathcal{F}, \mathcal{F}, \mathcal{F})$. Com efeito, pela definição 1.2, da interseção entre conjuntos, a proposição $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ é $\mathcal{V}$ somente se o elemento x pertencer aos dois conjuntos, situação indicada apenas na linha L1 da tabela; será $\mathcal{F}$, nos demais casos. A operação de interseção, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, será correlacionada ao conectivo de conjunção lógica, indicada por $A \wedge B$ (leia A e B).

A coluna da proposição $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, escrita na posição horizontal, é igual à sequência $(\mathcal{V}, \mathcal{V}, \mathcal{V}, \mathcal{F})$. Com efeito, pela definição 1.3, da união entre conjuntos, a proposição $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ só é $\mathcal{F}$ se o elemento x não pertencer ao conjunto A nem ao B, situação indicada na linha L4 da tabela; nos demais casos será $\mathcal{V}$. A operação de união entre conjuntos será correlacionada ao conectivo de disjunção da lógica, representado por $A \vee B$ (leia A ou B);

A coluna da proposição $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, escrita na posição horizontal, é igual à sequência $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{F}, \mathcal{F})$, pois, pela definição 1.4, da diferença entre conjuntos, a proposição $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ só é $\mathcal{V}$ se o elemento x pertence ao conjunto A, mas não pertence ao conjunto B, situação indicada na linha L2 da tabela; nos demais casos será $\mathcal{F}$. A operação diferença será correlacionada à negação da condicional lógica. Finalmente, a coluna da proposição $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \,\Delta\, \boldsymbol{B}$, escrita na posição horizontal, é igual à sequência $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \mathcal{V}, F)$, pois, pela definição 1.5, da diferença simétrica, a proposição $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \,\Delta\, \boldsymbol{B}$ é $\mathcal{V}$ no caso de o elemento ser exclusivo do conjunto A ou ser exclusivo do conjunto B, situações indicadas pelas linhas L2 e L3 da tabela; será $\mathcal{F}$ nos demais casos. A operação de diferença simétrica entre conjuntos será correlacionada ao conectivo lógico da disjunção exclusiva.

A tabela 6 indica o preenchimento lógico de todas as proposições constantes nas colunas:

Tabela 6. Tabela verdade da relação de pertinência entre conjuntos

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{x \in A \cap B}$	$\boldsymbol{x \in A \cup B}$	$\boldsymbol{x \in A - B}$	$\boldsymbol{x \in A \Delta B}$
$\boldsymbol{x \in A}$	$\boldsymbol{x} \in B$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{x \in A}$	$\boldsymbol{x} \notin B$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{x \notin A}$	$\boldsymbol{x} \in B$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{x \notin A}$	$\boldsymbol{x} \notin B$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$

Fonte: O autor.

Mesmo com eventual prejuízo do rigor, mas buscando uma adequação à formação média dos alunos, é possível justificar a natureza lógica de cada conectivo a partir das operações entre conjuntos. A tabela 7 mostra a correlação entre os conectivos da lógica e as operações com conjuntos.

Tabela 7. Operadores lógicos e conectivos

Conectivos Lógicos	Operação com conjuntos
Negação (não): $\neg\boldsymbol{A}$	Complementar $(\bar{A})$
Conjunção (e): $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$	Interseção $(A \cap B)$
Disjunção (ou): $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$	União $(A \cup B)$
Disjunção Exclusiva: $\boldsymbol{A} \underline{\vee} \boldsymbol{B}$	Diferença simétrica $(A \triangle B)$
Condicional: $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$	Inclusão $(A \subset B)$
Bicondicional: $\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$	Igualdade $(A = B)$

Fonte: O autor.

3.2. Conectivo da Negação

Símbolos: ¬ (cantoneira) ou ~ (til)

O conectivo negação é chamado de modificador lógico, pois muda o valor lógico da proposição. Assim, se P é uma proposição verdadeira, $v(P) = \mathcal{V}$, então a negação de P, representada por $\neg P$ (leia-se “não P") é falsa, $v(\neg P) = \mathcal{F}$.

A negação da proposição P pode ser feita incluindo o advérbio de negação, a palavra **não,** antes do verbo em P ou antepondo à proposição considerada as expressões do tipo: “Não é verdade que”**,** “É falso (mentira) que”:

$$\neg P \equiv \begin{cases} \text{"}\textbf{não}\text{" antes do verbo em } P. \\ \text{Não é verdade que } P. \\ \text{É falso que } P. \end{cases}$$

Veja, abaixo, dois exemplos de construção da operação de negação:

a) Seja a proposição $P \equiv$ A lua é um planeta[7]. Pode-se negar a proposição P por uma das seguintes formas:
   - $\neg P \equiv$ A lua não é um planeta.
   - $\neg P \equiv$ Não é verdade que a lua é um planeta.
   - $\neg P \equiv$ É falso que a lua é um planeta.

   Perceba que os valores lógicos de P e de $\neg P$ são opostos. Nesse exemplo, $v(P) = \mathcal{F}$, enquanto $v(\neg P) = \mathcal{V}$.

b) Dê a negação da proposição $Q \equiv$ Paulo não é paulista.
   - $\neg Q \equiv$ Paulo é paulista
   - $\neg Q \equiv$ Não é verdade que Paulo não é paulista.
   - $\neg Q \equiv$ É falso que Paulo não é paulista.

3.2.1. O Complementar de um Conjunto e a Lógica da Negação

A operação de negação em lógica pode ser correlacionada à noção de conjunto complementar. Dado um conjunto A, do universo U, para todo elemento $x \in U$, temos que $x \in A$ ou $x \in A^c$, mas não ambos, dado que $A \cup A^c = U$ e $A \cap A^c = \emptyset$. Além disso, vale a seguinte regra: $(A^c)^c = A$.

Dadas as proposições P e $\neg P$, apenas uma delas será verdadeira, não ambas. Se uma proposição nega a outra, uma delas é falsa e a outra é verdadeira. Assim,

[7] O símbolo matemático " ≡ " significa “idêntico a”.

uma proposição e sua negação nunca podem assumir os mesmos valores lógicos. A tabela 8 indica a tabela-verdade da negação:

Tabela 8. Tabela-verdade da negação

$\boldsymbol{P}$	$\neg\boldsymbol{P}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

Fonte: O autor.

A dupla negação de uma proposição equivale a uma afirmação: $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$[8]. O símbolo $\Leftrightarrow$ é utilizado para denotar que duas proposições são equivalentes, ou seja, que elas têm os mesmos valores lógicos, na tabela-verdade. Perceba a analogia dessa equivalência com a regra operatória do conjunto complementar do complementar de um conjunto A : $(A^c)^c = A$

Demonstração. Pode ser feita por tabela-verdade. Observe, na tabela 9, que os valores lógicos das colunas $\neg(\neg P)$ e P são os mesmos em todas as linhas da tabela-verdade. Portanto, as proposições são equivalentes e indicamos $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$. ■

Tabela 9. Tabela da dupla negação

$\boldsymbol{P}$	$\neg\boldsymbol{P}$	$\neg(\neg\boldsymbol{P})$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$

Fonte: O autor.

Por exemplo, se a proposição P é dada por $P \equiv$ Hoje choveu, então a sua negação poderá ser $\neg P \equiv$ Hoje não choveu. A dupla negação de P é a proposição $\neg(\neg P) \equiv$ Hoje choveu $\equiv P$ (Seria correto dizer “Não é verdade que hoje não choveu”, mas isso é o mesmo que afirmar “Hoje choveu”).

[8] Não se deve confundir o símbolo da equivalência " $\Leftrightarrow$ " com o símbolo da bicondicional lógica " $\leftrightarrow$ ". O primeiro deles é utilizado como operador de comparação. Assim, para indicar que duas proposições P e Q são equivalentes, ou seja, apresentam os mesmos valores lógicos, indicamos $P \Leftrightarrow Q$ (leia "P equivale a Q"). O símbolo da bicondicional é utilizado para criar novas proposições. $P \leftrightarrow Q$ é a proposição "P se e somente se Q". Em tempo, as equivalências serão estudas no capítulo 5.

Veja, a seguir, alguns exemplos de questões de lógica, cuja resolução poderá ser feita aplicando-se a técnica da negação. O objetivo principal é desenvolver o raciocínio, através de questões que envolvem verdades e mentiras a serem identificadas, a partir de hipóteses estabelecidas. No apêndice A, temos uma série de questões de verdades e mentiras, que o professor poderá propor como exercícios aos seus alunos.

Exemplo 3.2 (CESPE/PF-2008). Um líder criminoso foi morto por um de seus quatro asseclas: A, B, C e D. Durante o interrogatório esses indivíduos fizeram as seguintes declarações:

- A afirmou que C matou o líder
- B afirmou que D não matou o líder.
- C disse que D estava jogando dardos com A quando o líder foi morto e, por isso, não tiveram participação no crime.
- D disse que C não matou o líder.

Considerando a situação hipotética apresentada acima, sabendo que três dos comparsas mentiram em suas declarações, enquanto um deles falou a verdade, julgue os itens a seguir.

(1) A declaração de C não pode ser verdadeira.

(2) D matou o líder.

Uma solução. Devemos, inicialmente, identificar as premissas (hipóteses) do examinador (afirmações que serão tomadas como verdadeiras). São premissas do examinador:

- O líder criminoso foi morto por **um** dos quatro asseclas (apenas um assassino);
- Suspeitos: A, B, C e D
- Três dos comparsas mentiram (três declarações são falsas);
- Um deles falou a verdade (apenas uma declaração verdadeira).

A questão é restritiva, indicando que somente um dos comparsas falou a verdade. Vamos **verificar se entre os declarantes temos uma afirmação negando a outra,** porque se uma proposição nega a outra, elas têm valores lógicos opostos e a proposição verdadeira será uma delas. Dessa forma, é possível perceber que a declaração do comparsa D (“C não matou o líder”) é a negação da declaração do comparsa A (“C matou o líder”), o que permite concluir que um dos dois diz a verdade, e o outro mente. Considerando que existe apenas um verdadeiro (D ou A), os demais, por exclusão, são falsos: $v(B) = \mathcal{F}\ e\ v(C) = \mathcal{F}$. Isso já responde ao item (1), que está correto, pois a declaração de C não pode ser verdadeira, considerando que é falsa. Quem matou o líder? Para responder a essa pergunta, basta analisar o conteúdo da declaração de B, que sabemos ser falsa: B afirmou que “D não matou o líder”, mas como $V(B) = \mathcal{F}$, temos que a negação de B, $\neg B \equiv$ D matou o líder, será verdadeira, $v(\neg B) = \mathcal{V}$. Logo, é verdade que “D matou o líder” e o item (2) também está correto. Assim, o comparsa A mentiu em sua declaração, ao afirmar que “C matou o líder” e o comparsa D, o assassino, foi o único a dizer a verdade, ao declarar “C não matou o líder”.

Outra solução. Muitas questões de raciocínio lógico podem ser resolvidas pelo método de tentativa e erro, num processo de teste de hipóteses lógicas. O princípio do terceiro excluído limita as hipóteses a serem testadas (As afirmações serão $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{F}$, não ambos). Entretanto, cabe aqui uma ressalva. Ao testarmos hipóteses lógicas, caso a hipótese não contrarie as premissas do examinador, não é correto tomá-la como verdadeira, porque poderíamos estar diante de uma indeterminação lógica, onde seria possível que a afirmação admitida na hipótese fosse falsa. Isso será melhor explicado mais à frente, no estudo das técnicas de análise de argumentos. Por outro lado, caso a hipótese testada contrarie alguma premissa do examinador, esta deve ser refutada e obtém-se uma opção correta. Voltemos à questão proposta. Queremos encontrar o verdadeiro único. Suponha, por hipótese, que o declarante A tenha falado a verdade, $v(A) = \mathcal{V}$. Nesse caso, seria verdade que “C matou o líder”. Nesse cenário, o valor lógico da declaração do comparsa B, “D não matou o líder”, também seria verdadeira, e assim teríamos dois comparsas falando a verdade, o que contraria a premissa do examinador que afirma que somente um deles disse a verdade. A hipótese testada está incorreta e deve-se refutá-la. O declarante A não pode ter falado a verdade e a declaração “C não matou o líder” (negação de A) passa a ser verdadeira. Observe que foi exatamente isso que D afirmou. Logo, D era quem estava falando a verdade. Encontramos o verdadeiro! Como só pode haver um único verdadeiro, os outros dois declarantes são mentirosos. $v(B) = \mathcal{F}$ e $v(C) = \mathcal{F}$. Sendo $v(B) = \mathcal{F}$, é falso que “D não matou o líder”. Assim, $v(\neg B) = \mathcal{V}$, ou seja, é verdade que “D matou o líder”! Os dois itens a serem julgados estão corretos.

Exemplo 3.3 (ESAF-98). Um crime foi cometido por uma e apenas uma pessoa de um grupo de cinco suspeitos: Armando, Celso, Edu, Juarez e Tarso. Perguntados sobre quem era o culpado, cada um deles respondeu:

Armando: “sou inocente”.

Celso: “Edu é o culpado”.

Edu: “Tarso é o culpado”.

Juarez: “Armando disse a verdade”.

Tarso: “Celso Mentiu”.

Sabendo que apenas um dos suspeitos mentiu e que todos os outros disseram a verdade, pode-se concluir que o culpado é:

a) Armando.

b) Celso.

c) Edu.

d) Juarez.

e) Tarso.

Solução. Temos as seguintes premissas do examinador:

- Suspeitos: Armando, Celso, Edu, Juarez e Tarso;
- Apenas um culpado;
- Apenas um mentiu e todos os outros disseram a verdade;

Nesse estilo de questão, na qual há apenas um falso (ou naquelas em que há apenas um verdadeiro, como a do exemplo 3.2, já resolvido) é conveniente identificar as declarações contraditórias, em que uma nega a outras, pois os valores lógicos são sempre opostos. Observe que o suspeito Tarso, ao chamar Celso de mentiroso, está negando a afirmação de Celso. Se Tarso é a negação de Celso, os valores lógicos das declarações dele são contrários. Sendo assim, um dos dois está mentindo (se Tarso falou a verdade, então Celso mentiu e Se Tarso mentiu, então Celso falou a verdade). Assim o mentiroso será: Tarso ou Celso. Como só há um mentiroso (que só pode ser Tarso ou Celso), concluímos que os demais são verdadeiros (Armando = $\mathcal{V}$; Edu = $\mathcal{V}$ e Juarez = $\mathcal{V}$). Sendo a declaração de Edu verdadeira, temos que é verdade que “Tarso é o culpado”. Resposta: Letra e.

Exemplo 3.4 (ESAF-2002). Cinco aldeões foram trazidos à presença de um velho rei, acusados de haver roubado laranjas do pomar real. Abelim, o primeiro a falar, falou tão baixo que o rei – que era meio surdo – não ouviu o que ele disse. Os outros quatro acusados disseram:

Bebelim: “Cebelim é inocente”.
Cebelim: “Dedelim é inocente”.
Dedelim: “Ebelim é culpado”.
Ebelim: “Abelim é culpado”.

O mago Merlim, que vira o roubo das laranjas e ouvira as declarações dos cinco acusados, disse então ao rei: “Majestade, apenas um dos cinco acusados é culpado, e ele disse a verdade; os outros quatro são inocentes e todos os quatro mentiram”. O velho rei, que embora um pouco surdo era muito sábio, logo concluiu corretamente que o culpado era:
a) Abelim.
b) Bebelim.
c) Cebelim.
d) Dedelim.
e) Ebelim.

Uma solução. Temos as seguintes premissas do examinador:

- Suspeitos: Abelim, Bebelim, Cebelim, Dedelim e Ebelim;
- Apenas um culpado, o qual disse a verdade;
- São quatro inocentes e todos os quatro mentiram em suas declarações.

Temos apenas um culpado e esse diz a verdade. Dessa forma, quem acusa terceira pessoa (tanto Dedelim, quanto Ebelim fazem isso) não pode dizer a verdade, pois teríamos dois culpados, o declarante e quem ele acusa. Veja: Dedelim disse que “Ebelim é culpado”; assim, se a declaração de Dedelim fosse verdadeira, ele próprio seria o culpado, pois o culpado é o único que diz a verdade, mas daí seria verdade que “Ebelim é culpado” e, assim, teríamos dois culpados, o que contraria as premissas do examinador (apenas um pode ser culpado). Logo, Dedelim e Ebelim são ambos mentirosos. Como os que mentem são inocentes, concluímos que Dedelim e Ebelim são inocentes! Portanto, a declaração de Cebelim, que diz “Dedelim é inocente”, passa a ser verdadeira, o que nos permite concluir que Cebelim é o culpado do roubo, pois o culpado é aquele que disse a verdade! Gabarito: letra C).

Outra solução. Suponha, por hipótese, que Bebelim disse a verdade. Assim, Bebelim seria o culpado (o culpado é aquele que diz a verdade) e seria verdade a sua declaração de que “Cebelim é inocente”. Sendo Cebelim inocente, ele é mentiroso, pois todos os inocentes mentiram. Ocorre que a declaração de Cebelim foi de que “Dedelim é inocente”, o que seria mentira. Logo, é mentira que “Dedelim é inocente” e, assim, Dedelim é culpado. Temos aqui uma contradição com as premissas, porque teríamos dois culpados: Bebelim e Dedelim. Refute-se a hipótese, o que permite concluir que Bebelim é mentiroso. Ou seja, é falso que “Cebelim é inocente” e podemos concluir que Cebelim é o culpado do roubo.

3.3. Conjunção

Símbolo: ∧

A conjunção de duas proposições A e B é a proposição composta "A e B", representada simbolicamente por $A \wedge B$ (leia “A e B").

São exemplos de conjunções lógicas as sentenças P e Q abaixo:

$$P \equiv \underbrace{Ana\ estuda}_{A}\ e\ \underbrace{Ana\ trabalha.}_{B}$$

$$Q \equiv \underbrace{Tarso\ \text{é}\ culpado}_{R}, mas\ \underbrace{Armando\ \text{é}\ inocente}_{S}$$ [9]

As representações simbólicas seriam $P \equiv A \wedge B$ e $Q \equiv R \wedge S$.

3.3.1. Operação de Interseção e o Valor Lógico da Conjunção

A conjunção pode ser associada à operação de interseção entre conjuntos. A proposição $x \in A \cap B$ só é $\mathcal{V}$ se o elemento x atende a propriedade ou condição de

[9] As conjunções adversativas da língua portuguesa, como “mas”, “porém”, “contudo”, “entretanto”, parecem dar um sentido diferente à conjunção da forma ”A e B”, que é de afirmar A e B. Ao afirmarmos “Tarso é culpado, mas Armando é inocente”, além de indicarmos a ocorrência simultânea dos dois fatos, estamos indicando que a inocência de Armando não era esperada. Do ponto de vista lógico, o que mais importa é a ocorrência (ou não) de ambos os fatos, pouco importando se a inocência de Armando era de fato esperada em todos os mundos.

ambos os conjuntos. Analogamente, a conjunção $A \wedge B$ é verdadeira se e somente se as duas proposições componentes forem verdadeiras. Será falsa nos demais casos (alguma componente falsa). Define-se de forma análoga a conjunção, no caso de serem dadas mais que duas proposições $(A \wedge B \wedge C \cdots)$.

Defina $P = \{V, F\}$ o conjunto verdade. Assim, toda proposição lógica é elemento de P. O produto cartesiano de P por P, indicado por $P \times P$ (leia P cartesiano P) é formado pelos seguintes pares ordenados: $P \times P = P^2 = \{(\mathcal{V}, \mathcal{V}), (\mathcal{V}, F), (F, \mathcal{V}), (F, F)\}$. A partir do conjunto verdade, segue a função verdade da conjunção e a respectiva tabela de valoração:

a) Função de duas variáveis para a conjunção

Seja a função $f: P^2 \to P$, com $f(A, B) = A \wedge B$, a função de verdade da conjunção de duas proposições A e B. Então,

- $f(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} = \mathcal{V}$
- $f(\mathcal{V}, F) = \mathcal{V} \wedge \mathcal{F} = \mathcal{F}$
- $f(F, \mathcal{V}) = \mathcal{F} \wedge \mathcal{V} = \mathcal{F}$
- $f(F, F) = \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} = \mathcal{F}$

b) Tabela-verdade da conjunção

A tabela-verdade da conjunção de duas variáveis proposicionais A e B é dada na tabela 10, onde o valor lógico, em cada linha, deve ser calculado substituindo-se o valor lógico das variáveis, presente em cada linha.

Tabela 10. Tabela-verdade da Conjunção

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$

$$A \wedge B = \begin{cases} \mathcal{V}, somente\ se\ todas\ são\ \mathcal{V}. \\ \mathcal{F}, nos\ demais\ casos\ (alguma\ \mathcal{F}) \end{cases}$$

Fonte: O autor.

A conjunção é também chamada de produto lógico. A lógica é uma linguagem bivalente, cujos valores lógicos podem ser representados por 0 (zero) para proposições falsas (0 ou $\mathcal{F}$) ou 1 (um) para proposições verdadeiras (1 ou $\mathcal{V}$). Na aritmética binária, sistema de base 2, a operação de multiplicação é feita de forma análoga à multiplicação no sistema decimal, deslocamento e soma. A tabela 11 mostra a tabela-verdade da conjunção na notação binária 0 ou 1.

Tabela 11. Tabela da Conjunção em notação binária

- $1 \times 1 = \mathbf{1}$
- $1 \times 0 = \mathbf{0}$
- $0 \times 1 = \mathbf{0}$
- $0 \times 0 = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**0**
0	0	**0**

Fonte: O autor.

Exemplo 3.5. Calcule o valor lógico das proposições:

- $P \equiv 2$ é $par\ e$ 7 $não$ é $um\ número\ primo$.

  Solução.

  Sejam $\begin{cases} A: 2 \text{ é } par\ (\mathcal{V}) \\ B: 7\ não \text{ é } um\ número\ primo\ (\mathcal{F}) \end{cases}$

  $P \equiv \underbrace{2 \text{ é } par}_{A}\ e\ \underbrace{7\ não \text{ é } um\ número\ primo}_{B}.$

  $P \equiv \underbrace{2 \text{ é } par}_{\mathcal{V}}\ e\ \underbrace{7\ não \text{ é } um\ número\ primo}_{\mathcal{F}}.$

  $P \equiv \mathcal{V} \wedge \mathcal{F} = \mathcal{F}.$

- $Q \equiv A\ soma\ dos\ ângulos\ internos\ de\ um\ triângulo$ é $180°\ e\ 7 > 5$.

  Solução.

  seja$\begin{cases} A: A\ soma\ dos\ ângulos\ internos\ de\ um\ triângulo \text{ é } 180°\ (\mathcal{V}) \\ B: 7 > 5\ (\mathcal{V}) \end{cases}$

  $Q \equiv \underbrace{A\ soma\ dos\ ângulos\ internos\ de\ um\ triângulo \text{ é } 180°}_{A}\ e\ \underbrace{7 > 5}_{B}.$

  $Q \equiv \underbrace{A\ soma\ dos\ ângulos\ internos\ de\ um\ triângulo \text{ é } 180°}_{\mathcal{V}}\ e\ \underbrace{7 > 5}_{\mathcal{V}}.$

  $Q \equiv \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} = \mathcal{V}.$

Exemplo 3.6. Faça a tabela-verdade da proposição $A \wedge (\neg B)$.

Solução. A fórmula possui apenas duas variáveis distintas, A e $B,$ assim a tabela terá $2^2 = 4$ linhas. Pode-se preencher as possibilidades lógicas para A e $B,$ conforme método indicado no tópico 2.3, acrescentando-se a coluna $\neg B$ que servirá de guia. A fórmula $A \wedge (\neg B)$ tem como conectivo principal a conjunção. Os atributos $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$ da fórmula serão gerados de acordo com o resultado lógico obtido a partir dos valores lógicos indicados em cada linha, nas colunas A e $\neg B$. Assim, na linha 1 da tabela temos $v(A) = \mathcal{V}$ e $v(\neg B) = \mathcal{F}$ e, substituindo esses valores na fórmula $A \wedge (\neg B),$ teremos $A \wedge (\neg B) = \mathcal{V} \wedge \mathcal{F} = \mathcal{F}$. Para as demais linhas, procede-se de forma análoga e o resultado é apresentado na tabela 12.

Tabela 12. Tabela da fórmula $A \wedge (\neg B)$

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\neg B}$	$\boldsymbol{A \wedge (\neg B)}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	F	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$

Fonte: O autor.

3.4. Disjunção Inclusiva

Símbolo: ∨

A disjunção de duas proposições A e B é a proposição composta "A ou B", representada simbolicamente por $A \vee B$ (leia "A ou B").

A proposição P é um exemplo de disjunção inclusiva:

$$P \equiv \underbrace{Ana\ estuda}_{A}\ ou\ \underbrace{Ana\ trabalha}_{B}.$$

A forma lógica de P seria $P \equiv A \vee B$.

Observe, nesse exemplo, que Ana pode tanto estudar quanto trabalhar, de modo que a utilização da forma "A ou B" deve ser entendida como "A ou B, ou ambos".

Entretanto, na linguagem comum, a disjunção muitas vezes é utilizada no sentido exclusivo: A ou B, mas não ambos. Essa forma será discutida em outro tópico. [10]

3.4.1. Conjunto União e o Valor Lógico da Disjunção

A disjunção pode ser associada à operação de união entre conjuntos. Pela definição 1.30, um elemento qualquer pertence ao conjunto união, se pertencer a algum dos conjuntos.

A disjunção $A \vee B$ é verdadeira se e somente se pelo menos uma das proposições componentes for verdadeira. Será falsa somente se todas as componentes forem falsas.

Define-se de forma análoga a disjunção, no caso de serem dadas mais que duas proposições ($A \vee B \vee C \cdots$).

A partir do conjunto verdade $P = \{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$, segue a função verdade da disjunção inclusiva e a sua respectiva tabela-verdade.

a) Função de duas variáveis para a disjunção

Seja $P = \{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$ e a função $f: P^2 \to P$, com $f(A, B) = A \vee B,$ a função de verdade da disjunção de duas proposições A e B. Então,

- $f(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = \mathcal{V} \vee \mathcal{V} = \mathcal{V}$.
- $f(\mathcal{V}, F) = \mathcal{V} \vee \mathcal{F} = \mathcal{V}$.
- $f(F, \mathcal{V}) = \mathcal{F} \vee \mathcal{V} = \mathcal{V}$.
- $f(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \mathcal{F} \vee \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

---

[10] Na língua portuguesa, utiliza-se a mesma palavra “ou” para indicar as duas modalidades de disjunção, a inclusiva e a exclusiva. Não por ser uma língua pobre, muito pelo contrário, pois é rica e essencialmente interpretativa. Cabe ao leitor interpretar a distinção entre uma e outra forma. Por exemplo, na proposição “Ana é paulista ou carioca” a palavra “ou” está sendo utilizada no sentido exclusivo, pois uma Ana qualquer não poderá ser paulista e carioca ao mesmo tempo. Já no exemplo “Ana estuda ou Ana trabalha” temos a palavra “ou” indicando um sentido inclusivo, pois Ana pode tanto estudar quanto trabalhar. Em seu livro “Iniciação à Lógica”, Edgard Filho (2002) traz uma interessante nota: “A língua latina tem duas palavras diferentes correspondentes aos dois sentidos distintos da palavra “**ou**” na linguagem comum. A palavra latina “vel” exprime a disjunção no sentido **débil ou inclusivo**, ao passo que a palavra latina “aut” exprime a disjunção no seu sentido **forte** ou **exclusivo** (EDGAR FILHO, 2002, p.22)**.**

b) Tabela-verdade da disjunção

A tabela-verdade da disjunção de duas variáveis proposicionais A e B é dada na tabela 13, onde o valor lógico, em cada linha, deve ser calculado substituindo-se o valor lógico das variáveis, presentes na linha.

Tabela 13. Tabela-verdade da Disjunção

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \vee B}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$

$$A \vee B = \begin{cases} \mathcal{F}, \boldsymbol{somente\ se\ todas\ são\ \mathcal{F}.} \\ \mathcal{V}, \boldsymbol{nos\ demais\ casos\ (alguma\ \mathcal{V})} \end{cases}$$

Fonte: O autor.

A disjunção é também chamada de soma lógica. Na aritmética binária, a operação de soma é feita de forma análoga à soma no sistema decimal. A tabela 14 mostra a tabela-verdade da disjunção na notação binária 0 ou 1.

Tabela 14. Tabela da Disjunção no sistema binário

- $1 + 1 = 0$ (vai 1)
- $1 + 0 = \mathbf{1}$
- $0 + 1 = \mathbf{1}$
- $0 + 0 = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \vee B}$
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

Fonte: O autor.

Exemplo 3.7. Calcule o valor lógico das proposições:

a) $P \equiv 2\ \text{é}\ par\ ou\ 7\ não\ \text{é}\ um\ número\ primo.$

Solução.

Sejam $\begin{cases} A: 2\ \text{é}\ par\ (\mathcal{V}) \\ B: 7\ não\ \text{é}\ um\ número\ primo\ (\mathcal{F}) \end{cases}$

$$P \equiv \underbrace{2 \text{ é } par}_{A} \; ou \; \underbrace{7 \; não \text{ é } um \; número \; primo}_{B}.$$

$$P \equiv \underbrace{2 \text{ é } par}_{\mathcal{V}} \; ou \; \underbrace{7 \; não \text{ é } um \; número \; primo}_{\mathcal{F}}.$$

$$P \equiv \mathcal{V} \vee \mathcal{F} = \mathcal{V}.$$

b) $Q \equiv 7 \; não \text{ é } um \; número \; primo \; ou \; 7 > 9.$

Solução.

Sejam $\begin{cases} A: 7 \; não \text{ é } um \; número \; primo \; (\mathcal{F}) \\ B: 7 > 9 \; (\mathcal{F}) \end{cases}$

$$Q \equiv \underbrace{7 \; não \text{ é } um \; número \; primo}_{A} \; ou \; \underbrace{7 > 9}_{B}.$$

$$Q \equiv \underbrace{7 \; não \text{ é } um \; número \; primo}_{\mathcal{F}} \; ou \; \underbrace{7 > 9}_{\mathcal{F}}.$$

$$Q \equiv \mathcal{F} \vee \mathcal{F} = \mathcal{F}.$$

Exemplo 3.8. Faça a tabela-verdade da proposição $(\neg A) \vee B$.

Solução. A fórmula possui apenas duas variáveis distintas, A e B, assim a tabela terá $2^2 = 4$ linhas. Vamos preencher as possibilidades lógicas para A e B, acrescentando a coluna $\neg A$, que servirá de guia. A fórmula $(\neg A) \vee B$ tem como conectivo principal a disjunção. Os atributos $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$ da fórmula serão gerados de acordo com o resultado lógico obtido a partir dos valores lógicos indicados em cada linha, nas colunas $\neg A$ e B. A tabela 15 mostra o resultado obtido.

Tabela 15. Tabela-verdade da fórmula $(\neg A) \vee B$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}$	$(\neg\boldsymbol{A}) \vee \boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

Fonte: O autor.

3.5. Disjunção Exclusiva

Símbolo: $\underline{\vee}$

A disjunção exclusiva de duas proposições A e B é a proposição composta "ou A ou B", representada simbolicamente por $A \veebar B$ (leia de uma das seguintes formas: "ou A ou B"; "A ou B, mas não ambos"). Na disjunção exclusiva, não se admite a ocorrência simultânea das duas proposições.

Veja o exemplo da proposição P, que representa uma disjunção exclusiva:

$$P \equiv \underbrace{Ana \text{ é } paulista}_{A} \text{ ou } \underbrace{Ana \text{ é } carioca}_{B}.$$

A sua forma lógica será $P \equiv A \veebar B$.

No vernáculo latim, há duas palavras distintas para expressar cada um dos tipos de disjunção. A palavra latina "*vel*", que significa "ou" em português, é utilizada para expressar a disjunção inclusiva; enquanto que a palavra latina "*aut*", que significa "ora...ora", ou ainda "ou...ou", é utilizada para expressar a disjunção no sentido exclusivo (Edgar Filho, 2002). Ocorre que, na língua portuguesa, as disjunções inclusiva e exclusiva são expressas com a mesma palavra "ou" conectando as proposições. Assim, a interpretação de qual é o sentido, inclusivo ou exclusivo, dado à disjunção, fica a depender do contexto ou do significado das sentenças componentes. Por exemplo, na proposição P, dada por "Ana é paulista ou Ana é carioca", fica evidente o sentido exclusivo da disjunção, uma vez que Ana não pode ser paulista e carioca simultaneamente, ou seja, ela não pode ter nascido nos dois estados brasileiros ao mesmo tempo. Assim, a sentença é genericamente do tipo "A ou B, mas não ambos". Já a proposição "Ana estuda ou Ana trabalha" é uma disjunção inclusiva, pois a referida Ana pode tanto estudar quanto trabalhar, de modo que a sentença é do tipo geral "A ou B, ou ambos".

Para facilitar a interpretação, quanto ao sentido exclusivo ou inclusivo das disjunções lógicas, alguns lógicos utilizam duas formas, amplamente aceitas: A primeira delas, remetendo ao sentido "*aut*" do latim, estabelece que haverá um sentido exclusivo na disjunção quando se utiliza duas palavras "ou" na sentença, uma é colocada no início da frase e a outra conectando as proposições componentes, dando origem à forma geral "Ou A ou B". Por exemplo, a proposição "**Ou** o mordomo é culpado **ou** a governanta é culpada" passa a ter sentido exclusivo, enquanto que a sentença, sem o "ou" no início da frase, dada por "O mordomo é culpado ou a governanta é culpada" é uma disjunção inclusiva, porque é possível, pelo contexto, que o mordomo e a governanta sejam ambos culpados.

A outra forma, que também caracteriza o sentido exclusivo da disjunção, é quando se utiliza a expressão "**mas não ambos**" no final da frase, a qual exclui a possibilidade inclusiva de as duas proposições componentes serem verdadeiras. Por exemplo, "O mordomo é culpado ou a governanta é culpada, mas não ambos".

3.5.1. Diferença Simétrica e o Valor Lógico da Disjunção Exclusiva

A disjunção exclusiva pode ser associada à operação de diferença simétrica entre conjuntos. A definição 1.9, no capítulo 1, caracteriza a operação de diferença simétrica, enquanto que a definição 1.8 o faz para a operação de diferença.

A disjunção exclusiva $A \underline{\vee} B$ é verdadeira se e somente se apenas A for verdadeira ou apenas B for verdadeira (ou seja, quando os valores lógicos de A e B forem diferentes). Será falsa, se A e B forem simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas (ou seja, quando os valores de A e B forem iguais). A tabela-verdade da disjunção exclusiva é dada na tabela 16.

Tabela 16. Tabela-verdade da Disjunção Exclusiva

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \underline{\vee} B}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$

$$A \underline{\vee} B = \begin{cases} \mathcal{V}, somente\ se\ valores\ são\ diferentes. \\ \mathcal{F}, se\ os\ valores\ são\ iguais. \end{cases}$$

Fonte: O autor.

A partir do conjunto verdade $P = \{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$, segue a função verdade da disjunção exclusiva.

a) Função de duas variáveis

Seja $P = \{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$ e a função $f: P^2 \rightarrow P$, com $f(A, B) = A \underline{\vee} B$, a função de verdade da disjunção exclusiva de duas proposições A e B. Então,

- $f(V,V) = \mathcal{V} \veebar \mathcal{V} = F$.
- $f(V,F) = \mathcal{V} \veebar \mathcal{F} = \mathcal{V}$.
- $f(F,V) = \mathcal{F} \veebar \mathcal{V} = \mathcal{V}$.
- $f(F,F) = \mathcal{F} \veebar \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

A tabela-verdade da disjunção exclusiva de A com B possui a mesma sequência lógica da proposição $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$, que pode ser interpretada assim: “A ou B, mas não é o caso de A e B”. As duas últimas colunas da tabela 17 mostram esse resultado, ou seja, a equivalência $A \veebar B \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$.

Tabela 17. Uma equivalência para a Disjunção Exclusiva

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$	$\neg(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$	$\boldsymbol{A} \veebar \boldsymbol{B}$	$(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \wedge \neg(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$

Fonte: O autor.

3.6. Condicional

Símbolo: →

A condicional de duas proposições A e B é a proposição composta "Se A, então B", representada simbolicamente por $A \rightarrow B$ (leia: “A então B" ou "A implica B").

A proposição A será chamada de antecedente, ou hipótese, e a proposição B será chamada de consequente, ou tese, da condicional. Por isso, essa proposição é chamada de proposição hipotética.

Um exemplo seria a proposição condicional

$$P \equiv Se\ \underbrace{estudo\ lógica,}_{A(antecedente)} então\ \underbrace{aprendo\ matemática.}_{B(consequente)}$$

Sendo A a proposição "estudo lógica" e B a proposição "aprendo matemática", a proposição P será representada simbolicamente por $P \equiv A \rightarrow B$.

A condicional pode ser chamada de implicação lógica. Cabe ressaltar que há tipos diferentes de implicação. Destaquemos a implicação causal e a material. A implicação causal estabelece uma relação de causa e efeito entre o antecedente e o consequente. Por exemplo, na expressão proposicional "se $x = 2$, então $x^2 = 4$" há uma conexão empírica de $x = 2$ com o quadrado de x ser 4, uma coisa acarretará a outra. Já na implicação material, o antecedente nada tem a ver como o consequente, como em "se o Acre pertence à Bolívia, então Pelé foi o pior jogador de futebol de todos os tempos". Nos dizeres de Copi (1978), "A implicação material não sugere qualquer conexão real entre o antecedente e o consequente" (COPI,1978, p. 239). É importante observar que ao estabelecermos a proposição da forma "se A, então B", não estamos afirmando que a proposição A deva ocorrer, mas tão somente que caso A seja verdadeira, a proposição B também deverá ser, para que a implicação seja correta. Isso permite uma avaliação lógica comum às diversas categorias de implicação: A condicional lógica "Se A, então B" será falsa caso a antecedente A seja verdadeira e a consequente B seja falsa.

Não obstante, reconhecer algumas das diversas formas de expressão para a condicional lógica, $A \rightarrow B$, na linguagem corrente, pode ser útil para a análise desse operador. A lista a seguir não esgota, naturalmente, todas as formas, mas apresenta as que são mais frequentes.

- Se A, então B.
- A implica B.
- A é condição suficiente para B.
- B e condição necessária para A.
- A somente se B.
- B, se A.
- Todo A é B.

Por exemplo, todas as condicionais abaixo são equivalentes:

- Se neva, então faz frio.

- Nevar implica fazer frio.
- Nevar é condição suficiente para fazer frio.
- Fazer frio é condição necessária para nevar.
- Neva somente se faz frio.
- Faz frio, se neva.
- Sempre que neva, faz frio.

3.6.1. A Relação de Inclusão e o Valor Lógico da Condicional

A condicional pode ser associada à operação de inclusão entre conjuntos. Veja o que diz Lima (2013):

> A relação de inclusão entre conjuntos está estreitamente relacionada com a implicação lógica. Vejamos como. Sejam P e Q propriedades referentes a um elemento genérico de um conjunto U. Essas propriedades definem os conjuntos A, formado pelos elementos de U que gozam de P, e B, conjunto formado pelos elementos de U que têm a propriedade Q. Diz-se então que a propriedade P implica (ou acarreta) a propriedade Q, e se escreve $P \Rightarrow Q$, para significar que $A \subset B$ (LIMA, 2013, p. 4).

Por exemplo, a proposição “Todo político é honesto” estabelece uma relação de inclusão, na qual a classe, digamos A, dos políticos está contida na classe B, das pessoas honestas. Ou seja, tomando um elemento x do universo, “se x é político, então x é honesto”. Naturalmente, a afirmação “todo político é honesto” é falsa, no universo U dos brasileiros! Por que? A resposta é simples: é verdade que “Algum político não é honesto” ou ainda, “existe pelo menos um político que não é honesto”, ao menos um. A sentença do tipo “Algum A não é B” é um contraexemplo à fórmula condicional “Todo A é B”, pois afirma que um indivíduo x qualquer atende a propriedade A de ser político, mas não atende a propriedade B, de ser honesto, formando uma sentença do tipo $A \wedge (\neg B)$. Portanto, a condicional $A \rightarrow B$ é falsa quando $v(A) = \mathcal{V}$ e $v(B) = \mathcal{F}$, ou seja, quando a proposição $A \wedge (\neg B)$ for verdadeira.

Para melhor ilustrar a situação, veja uma implicação de natureza causal: “Se Paulo é paulista, então Paulo é brasileiro”. Genericamente, poderíamos até dizer “Todo paulista é brasileiro”, em que o conjunto dos paulistas é um subconjunto próprio do conjunto dos brasileiros. Sendo P a condição de ser paulista e Q a condição de ser brasileiro, a natureza da implicação entre P e Q, $P \rightarrow Q$, não quer dizer que o antecedente P deva ser necessariamente verdadeiro, mas que em sendo verdadeiro, o consequente Q também será. Se é verdade que **Paulo é paulista**, necessariamente deverá ser verdade que **Paulo é brasileiro**. Esta relação de inclusão permanece inalterada, caso se tenha as formas: $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ (podemos ter um indivíduo que seja paulista e brasileiro ao mesmo tempo), $\mathcal{F} \to \mathcal{V}$ (podemos ter um indivíduo que não seja paulista, mas seja apenas brasileiros) e $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ (podemos ter um indivíduo que não seja paulista, nem brasileiro). Entretanto, a forma $\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ (indicando que o indivíduo é paulista, mas não é brasileiro) é um contraexemplo que altera a relação de inclusão entre os conjuntos dos paulistas e dos brasileiros, a qual deixa de existir e se torna falsa a condicional indicada. A tabela-verdade da condicional é dada na tabela 18 e, a seguir, a sua função de verdade.

Tabela 18. Tabela-verdade da Condicional

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \to B}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

$$A \to B = \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{F}}, somente\ se\ A = \mathcal{V}\ e\ B = \boldsymbol{\mathcal{F}}. \\ \mathcal{V}, nos\ demais\ casos. \end{cases}$$

Fonte: O autor.

a) Função de duas variáveis

Seja $P = \{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$ e a função $f: P^2 \to P$, com $f(A, B) = A \to B$, a função de verdade da condicional de duas proposições A e B. Então,

- $f(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = \mathcal{V} \to \mathcal{V} = \mathcal{V}$.
- $f(\mathcal{V}, F) = \mathcal{V} \to F = \mathcal{F}$.
- $f(F, \mathcal{V}) = \mathcal{F} \to \mathcal{V} = \mathcal{V}$.
- $f(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \mathcal{F} \to \mathcal{F} = \mathcal{V}$.

Exemplo 3.9. Calcule o valor lógico das condicionais.

- $P \equiv Se\ \underbrace{2\ \acute{e}\ par}_{\mathcal{V}}, ent\tilde{a}o\ \underbrace{7\ n\tilde{a}o\ \acute{e}\ um\ n\acute{u}mero\ primo}_{\mathcal{F}}.$

$P \equiv \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}.$

- $Q \equiv Se\ \underbrace{7\ não\ \text{é}\ um\ número\ primo}_{\mathcal{F}}, então\ \underbrace{2\ \text{é}\ par}_{\mathcal{V}}.$

  $Q \equiv \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{V}.$

- $R \equiv Se\ \underbrace{o\ Acre\ pertence\ \text{à}\ Bolívia}_{\mathcal{F}}, então\ \underbrace{Pel\text{é}\ foi\ o\ pior\ jogador\ de\ futebol}_{\mathcal{F}}.$

  $R \equiv \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{V}.$

- $S \equiv Se\ \underbrace{7 > 5}_{\mathcal{V}}, então\ \underbrace{\sqrt{36} = 6}_{\mathcal{V}}$

  $S \equiv \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{V}.$

b) Diferença entre condição suficiente e condição necessária em $\boldsymbol{A \rightarrow B}$.

- A é condição suficiente para B.
- B e condição necessária para A.

Pode-se explicar as relações de suficiência e de necessidade que envolvem a condicional através da ideia de inclusão entre conjuntos. De fato, se um elemento atende a condição A, isso é suficiente para que ele atenda a condição de B, uma vez que $A \subset B$. Por exemplo, na condicional "Se Paulo é paulista, então Paulo é brasileiro", observe que "Paulo ser paulista é uma condição suficiente para que ele seja brasileiro". De outro giro, caso um elemento não pertença ao conjunto B, de modo algum pertencerá a A, pois $A \subset B$. Daí dizer-se que a sentença B é necessária para A. Logo, "Paulo ser brasileiro é condição necessária para que seja paulista".

c) Proposições associadas a uma condicional

A condicional $A \rightarrow B$ possui uma forma que lhe é equivalente, $(\neg B) \rightarrow (\neg A)$, chamada de contrapositiva (ou contrarrecíproca), pois apresenta os mesmos valores lógicos da condicional. Cabe ressaltar que a condicional não é comutativa, ou seja, $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$ são distintas. A proposição $B \rightarrow A$ é chamada de recíproca (ou oposta) da condicional, sendo equivalente a $(\neg A) \rightarrow (\neg B)$, chamada de contrária. A tabela 19 mostra as relações de equivalência entre as formas condicionais.

- $(\neg B) \rightarrow (\neg A)$: Contrapositiva.
- $B \rightarrow A$: Recíproca.

- $(\neg A) \to (\neg B)$: Contrária.

Tabela 19. Formas Condicionais

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \to B$	$(\neg B) \to (\neg A)$	$B \to A$	$(\neg A) \to (\neg B)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Fonte: O autor.

3.7. Bicondicional

Símbolo: $\leftrightarrow$

A bicondicional de duas proposições A e B é a proposição composta "A se e somente se B", representada simbolicamente por $A \leftrightarrow B$ (leia: "A sse B").

A proposição P, abaixo, é um exemplo de bicondicional lógica:

$$P \equiv \underbrace{passarei\ no\ concurso}_{A}\ se\ e\ somente\ se\ \underbrace{souber\ lógica.}_{B}$$

A forma lógica é $P \equiv A \leftrightarrow B$

Pode-se indicar uma bicondicional $A \leftrightarrow B$ por uma das seguintes formas equivalentes, entre outras:

- A se e somente se B.
- A é condição necessária e suficiente para B.
- B é condição necessária e suficiente para A
- A implica B e reciprocamente.

Por exemplo, são bicondicionais equivalentes as duas proposições abaixo:

- Ana será aprovada em cálculo se e somente se tirar nota 8 na prova final.
- Ana ser aprovada em cálculo é uma condição necessária e suficiente para que tenha tirado nota 8 na prova final.

3.7.1. Operação de Igualdade e o Valor Lógico da Bicondicional

A bicondicional é uma dupla implicação lógica. $A \leftrightarrow B$ equivale a afirmar que $(A \to B) \wedge (B \to A)$. A última coluna da tabela 20 mostra a dupla implicação.

Tabela 20. Dupla Implicação

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}$	$\neg\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \to B}$	$\boldsymbol{B \to A}$	$\boldsymbol{(A \to B) \wedge (B \to A)}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

Fonte: O autor.

A noção de igualdade entre conjuntos está estreitamente relacionada com a bicondicional lógica. De $A \to B$, temos que $A \subset B$ e de $B \to A$, temos que, $B \subset A$, logo os conjuntos A e B são iguais. Assim, a bicondicional será verdadeira se os valores lógicos de A e B forem iguais (ambos $\mathcal{V}$ ou ambos $\mathcal{F}$) e será falsa se A e B possuírem valores distintos. Abaixo, segue a função de verdade da bicondicional e a sua correspondente tabela-verdade é dada na tabela 21.

a) Função de duas variáveis

Seja $P = \{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$ e a função $f: P^2 \to P$, com $f(A, B) = A \leftrightarrow B$, a função de verdade da condicional de duas proposições A e B. Então,

- $f(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{V}$.
- $f(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}$.
- $f(\mathcal{F}, \mathcal{V}) = \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{F}$.
- $f(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{V}$.

Tabela 21. Tabela-verdade da Bicondicional

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

$$A \leftrightarrow B = \begin{cases} \mathcal{V}, se\ os\ valores\ são\ iguais. \\ \mathcal{F}, se\ os\ valores\ são\ diferentes. \end{cases}$$

Fonte: O autor.

Exemplo 3.10. Calcule o valor lógico das bicondicionais.

a) $P \equiv \underbrace{2\text{ é }par}_{\mathcal{V}}\ se\ e\ somente\ se\ \underbrace{7\ não\text{ é }um\ número\ primo}_{\mathcal{F}}.$

$P \equiv \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}.$

b) $Q \equiv \underbrace{\sqrt{9} = 4}_{\mathcal{F}}\ se\ e\ somente\ se\ \underbrace{7\ não\text{ é }um\ número\ primo}_{\mathcal{F}}.$

$Q \equiv \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{V}.$

3.8. Relação de Implicação Lógica

Símbolo: $\Rightarrow$

Definição 3.1 (**Relação de Implicação**). Diz-se que uma proposição P implica logicamente uma proposição Q, e indicaremos pela forma $P \Rightarrow Q$, leia “ P implica Q”, se na tabela-verdade da condicional associada $P \to Q$ não ocorrer $\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ em qualquer das linhas componentes.

Uma consequência imediata dessa definição é que a proposição Q será verdadeira todas as vezes que a proposição P também o for.

Exemplo 3.11. Verifique se a proposição $P \equiv A \wedge B$ implica a proposição $Q \equiv A \vee B$.

Solução. Verificaremos por tabela-verdade. Faremos uma coluna para P e outra para Q, a seguir devemos verificar se ocorre $\mathcal{V}$ seguido de $\mathcal{F}$ em alguma dessas linhas. A tabela 3.11 é a tabela para verificação:

Tabela 3.11. Resolução do exemplo 3.11

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$	$\boldsymbol{A \vee B}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Fonte: O autor.

Pela definição 3.1, a proposição P implica a proposição $Q, P \Rightarrow Q$, porque não ocorre $\mathcal{V}$ seguido de $\mathcal{F}$ em nenhuma das linhas da tabela 3.11, nas colunas de P e de Q. Observe que a proposição P, da coluna $A \wedge B,$ só é verdadeira na linha 1 e, nessa linha, a coluna de Q, indicada por $A \vee B,$ também é verdadeira.

3.9. Exercícios resolvidos

Vejamos algumas questões que foram propostas por bancas examinadoras, em concursos públicos, com ênfase no cálculo proposicional.

Exemplo 3.12 (CESPE/TJSE-2014). Sabendo-se que, para a construção da tabela verdade da proposição $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \wedge R)$, a tabela mostrada abaixo normalmente se faz necessária, é correto afirmar que, a partir da tabela mostrada, a coluna correspondente à proposição $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \wedge R)$, conterá, de cima para baixo e na sequencia, os seguintes elementos: V F F F V F F F.

P	Q	R	(P∨Q)↔(Q∧R)
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

( ) Certo

( ) Errado

Solução. Devemos completar o preenchimento da tabela-verdade apresentada na questão. A proposição constante na última coluna é a fórmula $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \wedge R)$, cujo operador principal é o bicondicional, porque dará o resultado final da fórmula. Para preenchermos a sequência lógica dessa bicondicional, sugere-se, primeiramente, preencher as colunas auxiliares da disjunção $P \vee Q$ e da conjunção $Q \wedge R$, que servirão de guias. Após, deve-se verificar a sequência lógica, de cima para baixo, como determinado no comando da questão. Para o preenchimento da coluna da disjunção, deve-se lembrar que esse operador é $\mathcal{F}$ em alguma linha, somente se as componentes, no caso P e Q, são ambos $\mathcal{F}$ e será $\mathcal{V}$, nos demais casos. Para o preenchimento da coluna da conjunção, devemos lembra que esse operador é $\mathcal{V}$ em alguma linha, somente se os valores de Q e R são ambos $\mathcal{V}$ e será $\mathcal{F}$ nos demais casos. Por fim, a bicondicional é $\mathcal{V}$ se os valores lógicos forem iguais e $\mathcal{F}$, caso contrário. A tabela 3.12 é a tabela dada na questão, acrescida das colunas que servirão de guias para o preenchimento da bicondicional.

Tabela 3.12. Solução do exemplo 3.12

$\boldsymbol{P}$	Q	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{P \vee Q}$	$\boldsymbol{Q \wedge R}$	$(\boldsymbol{P \vee Q}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q \wedge R})$
V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	**F**
V	F	V	V	F	**F**
V	F	F	V	F	**F**
F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	**F**
F	F	V	F	F	**V**
F	F	F	F	F	**V**

Fonte: O autor.

Observe que a sequência lógica da bicondicional, destacada na última coluna, diverge da sequência V F F F V F F F, se analisada, de cima para baixo, nas duas últimas linhas. Gabarito: Item errado!

Exemplo 3.13 (Fundação Carlos Chagas-FCC/2018). Considere que a afirmação I é falsa e que as demais são verdadeiras.

I. Se Bernardo é músico, então Andreia é cantora.
II. Cátia é baterista e Bernardo é músico.

III. Ou Danilo é violonista, ou Cátia é baterista.

A partir dessas afirmações, é correto concluir que

(A) Andreia é cantora ou Danilo é violonista.
(B) ou Bernardo é músico, ou Cátia é baterista.
(C) se Danilo é violonista, então Andreia é cantora.
(D) Cátia é baterista e Danilo é violonista.
(E) se Cátia é baterista, então Danilo é violonista.

Solução. Temos uma questão prática de cálculo proposicional. Nesta abordagem, a banca FCC nos deu o valor lógico das proposições I, II e III. A afirmação I é falsa e as demais são verdadeiras. Devemos encontrar um bom ponto de partida para iniciarmos o cálculo proposicional, que neste caso é a sentença I, porque uma proposição condicional, suponha $A \rightarrow B,$ só é falsa se $A = \mathcal{V}$ e $B = \mathcal{F}$ (veja a lógica da condicional no tópico 3.6) ou a sentença II, porque uma conjunção só e verdadeira se todas as componentes são verdadeiras (veja a lógica da conjunção, no tópico 3.3) Assim,

De I: $(\underbrace{Bernardo\ \text{é}\ músico}_{\mathcal{V}},\ \underbrace{então}_{\rightarrow}\ \underbrace{Andreia\ \text{é}\ cantora}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$, pode-se concluir que é verdade que “Bernardo é músico” e é falso que “Andreia é cantora”. Em relação a Andreia, é o mesmo que dizer que é verdade que ela “não é cantora”. Agora, deve-se substituir esse resultado em alguma proposição que faça referência a Bernardo ou a Andreia. No caso, a II.

De II: $(\underbrace{Cátia\ \text{é}\ baterista}_{\mathcal{V}}\ \ \underbrace{e}_{\wedge}\ \ \underbrace{Bernardo\ \text{é}\ músico}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V} \Rightarrow$ é verdade que “Cátia é baterista”. Agora, vamos utilizar esse resultada na última proposição, que é a III.

De III: $(Ou\ \underbrace{Danilo\ \text{é}\ violonista}_{?},\ \underbrace{ou}_{\veebar}\ \underbrace{Cátia\ \text{é}\ baterista}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}$. Qual é o valor lógico que substitui o sinal de interrogação na proposição “Danilo é violinista? Ora, tem-se uma disjunção exclusiva, caracterizada pela forma “ou...ou” (veja seção 3.5, para rever a lógica desse operador), que tem que ser verdadeira por hipótese da questão. Esse operador só é verdadeiro com valores lógicos diferentes em suas componentes. Como a proposição “Cátia é baterista” é $\mathcal{V}$, a outra, “Danilo é violinista”, tem de ser $\mathcal{F}$. Logo, é verdade que Danilo não é violinista (Diante de uma afirmação que é falsa, ao negá-la, obtém-se algo verdadeiro). As conclusões a seguir são necessariamente verdadeiras, obtidas a partir da análise lógica:

- ✓ Bernardo é músico, Andréia não é cantora, Cátia é baterista e Danilo não é violinista.

Agora, deve-se substituir, nas alternativas da questão, os valores lógicos obtidos, atentando-se aos conectivos utilizados nesses itens. A resposta será a alternativa necessariamente verdadeira.

(A) $\underbrace{Andreia\text{ é }cantora}_{\mathcal{F}}$ ou $\underbrace{Danilo\text{ é }violonista}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}.$

(B) ou $\underbrace{Bernardo\text{ é }músico}_{\mathcal{V}}$, ou $\underbrace{Cátia\text{ é }baterista}_{\mathcal{V}} = \mathcal{F}.$

(C) se $\underbrace{Danilo\text{ é }violonista}_{\mathcal{F}}$, então $\underbrace{Andreia\text{ é }cantora}_{\mathcal{F}} = \mathcal{V}.$

(D) $\underbrace{Cátia\text{ é }baterista}_{\mathcal{V}}$ e $\underbrace{Danilo\text{ é }violonista}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}.$

(E) se $\underbrace{Cátia\text{ é }baterista}_{\mathcal{V}}$, então $\underbrace{Danilo\text{ é }violonista}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}.$

A alternativa C é a única verdadeira. Gabarito: letra C.

CAPÍTULO 4. TAUTOLOGIAS, CONTRADIÇÕES E CONTINGÊNCIAS

Todas as proposições lógicas podem ser classificadas de três formas básicas: Tautologia, Contradição ou Contingência, dependendo de suas possíveis valorações lógicas.

Definição 4.1 (Tautologia). Uma proposição composta é uma **tautologia** se for sempre verdadeira, quaisquer que sejam os valores lógicos das suas proposições básicas componentes.

Quando uma proposição é tautológica, a sua coluna na tabela-verdade só apresenta valores verdadeiros.

Exemplo 4.1. Verifique se a proposição $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ é tautológica.

Solução. Deve-se construir a sua tabela-verdade. O operador principal, na fórmula, é o condicional. Para construí-lo, faremos duas colunas auxiliares que servirão de guias: $(A \wedge B)$ e $(A \vee B)$. A tabela 4.1 mostra o resultado.

Tabela 4.1. Verificação da tautologia, por tabela-verdade

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$	$\boldsymbol{A \vee B}$	$\boldsymbol{(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

Fonte: O autor.

Observe que na última coluna da tabela-verdade, destacada, só figuram valores verdadeiros. Logo, a fórmula é tautológica.

Definição 4.2 (Contradição). Uma proposição composta é uma **contradição** se for sempre falsa, quaisquer que sejam os valores lógicos das suas proposições básicas componentes.

Quando uma proposição é uma contradição, a sua coluna na tabela-verdade só apresenta valores falsos. As contradições são chamadas de proposições logicamente falsas ou contraválidas.

Se uma proposição P é tautológica, a sua negação, $\neg P$, será uma contradição. Com efeito, se P é tautológica, pela definição 4.1, só apresenta valores $\mathcal{V}$ em sua tabela-verdade. Assim, a negação de P, simbolizada por $\neg P,$ só apresentará valores $\mathcal{F}$, por isso é uma contradição lógica. ■

Exemplo 4.2. Verifique se a proposição $[(A \to B) \wedge A] \wedge (\neg B)$ é uma contradição.

Solução. Devemos construir a tabela-verdade da proposição e verificar se a última coluna só apresenta valores lógicos $\mathcal{F}$. Perceba que o operador principal é uma conjunção. Faremos as colunas auxiliares $A \to B$ e $\neg B,$ que servirão de guias para o cálculo. A tabela 4.2 mostra o resultado.

Tabela 4.2. Verificação de uma contradição, por tabela-verdade

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \to B}$	$\boldsymbol{\neg B}$	$\boldsymbol{(A \to B) \wedge A}$	$\boldsymbol{[(A \to B) \wedge A] \wedge (\neg B)}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$

Fonte: O autor.

Considerando que na última coluna da tabela, parte sombreada, só figuram valores $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, a proposição é uma contradição lógica.

Definição 4.3 (Contingência). Uma proposição composta é uma **contingência** se não for uma tautologia, nem uma contradição.

Quando uma proposição é uma contingência, em sua coluna na tabela-verdade irão aparecer valores $\mathcal{V}$ e valores $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, cada um pelo menos uma vez.

Exemplo 4.3. Verifique, através da tabela-verdade, que todos os conectivos da lógica clássica geram fórmulas que são contingências lógicas.

Solução. Basta fazer a tabela-verdade para todos os operadores e verificar se cada um deles apresenta os valores $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$, ao menos uma vez. Assim, sejam A e B duas proposições atômicas, a tabela-verdade é a que segue abaixo, já preenchida. Perceba que os valores $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$ figuram ao menos uma vez, em cada coluna destacada. Portanto, os conectivos representam contingências lógicas. A tabela 4.3 mostra esse resultado.

Tabela 4.3. Verificação de uma contingência, por tabela-verdade

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg \boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \veebar \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

Fonte: O autor.

Exemplo 4.4 (IADES-2016**).** Em relação à proposição $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$, assinale a alternativa correta.

(A) É uma tautologia.
(B) É uma contingência.
(C) É uma contradição.
(D) A tabela verdade que a representa é formada por oito linhas.
(E) É uma proposição composta formada a partir de três proposições simples.

Solução. Para resolver a questão, observe que o conectivo principal da fórmula é uma conjunção, formada por duas proposições, sendo uma delas bicondicional e a outra é uma condicional. Então, as colunas $(p \leftrightarrow q)$ e $(p \rightarrow q)$ servirão de guias para a conjunção. A tabela 4.4 mostra o resultado do preenchimento dos valores para a fórmula conjuntiva, lançada na última coluna, onde apresenta $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$ em sua construção. Logo, a proposição é uma contingência lógica. A resposta da questão é letra B.

Tabela 4.4. Resolução por tabela-verdade da questão 4.4

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Fonte: O autor.

Exemplo 4.5. Classifique a proposição $P \wedge Q \wedge R \rightarrow P \vee Q$ em tautologia, contradição ou contingência.

Uma solução. Faremos por tabela-verdade. Considerando que a sentença possui três proposições básicas componentes, serão necessárias oito linhas. Além disso, convém fazer uma coluna auxiliar para cada sentença componente, que servirão de guias e, por fim, deve-se preencher a coluna da condicional, pois esta é mais forte que a conjunção e a disjunção, por isso determinará a sequência lógica final. A tabela 4.5 mostra o resultado do preenchimento.

Tabela 4.5. Resolução por tabela-verdade da questão 4.5

P	Q	R	$P \wedge Q \wedge R$	$P \vee Q$	$P \wedge Q \wedge R \rightarrow P \vee Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Fonte: O autor.

Considerando que a última coluna da tabela só apresenta valores verdadeiros, a proposição $P \wedge Q \wedge R \rightarrow P \vee Q$ é uma tautologia lógica.

Outra solução. O método da tabela-verdade, para classificarmos uma proposição, possui um fator limitante que é o número de linhas da tabela. Dependendo da quantidade de proposições básicas componentes, fica extensa a construção. Uma alternativa para fazer a verificação é utilizar a técnica da demonstração por absurdo. Consiste basicamente no seguinte: Se quisermos provar que uma proposição é uma tautologia lógica, iremos supor, por absurdo, que a proposição é falsa. Caso a hipótese gere um absurdo lógico, que seria uma proposição ficar simultaneamente verdadeira e falsa, devemos refutá-la e concluir que ela é tautológica. De outro giro, caso a hipótese se configure, ou seja, por algum meio válido foi possível que a proposição ficasse de fato falsa, concluímos que ela não é tautológica, podendo ser uma contradição ou uma contingência. Analogamente, verificaremos se uma proposição é uma contradição lógica, supondo, por absurdo, que ela é verdadeira. Vejamos o exemplo prático. Verificar se $P \wedge Q \wedge R \rightarrow P \vee Q$ é uma tautologia lógica. Suponha, por absurdo, que a sentença é falsa. Nesse caso, por ser uma condicional lógica, o antecedente deve ser $\mathcal{V}$ e o consequente deve ser $\mathcal{F}$. Veja o esquema abaixo:

$$\underbrace{P \wedge Q \wedge R}_{\mathcal{V}} \rightarrow \underbrace{P \vee Q}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$$

Mas, se $P \wedge Q \wedge R = \mathcal{V}$, temos que cada componente é $\mathcal{V}$, porque a conjunção é $\mathcal{V}$ somente se todas as componentes são $\mathcal{V}$, assim, $v(P) = v(Q) = v(R) = \mathcal{V}$. Ocorre que, dessa forma, a disjunção $P \vee Q$, que figura como consequente da condicional, ficaria $\mathcal{V}$, o que é um absurdo, pois a disjunção tinha de ser $\mathcal{F}$, por consequência da hipótese. Portanto, devemos refutar que a condicional é falsa e concluir que ela é tautológica.

Exemplo 4.6 (CESPE/UnB-2013**)**. Considerando que P e Q representem proposições conhecidas e que V e F representem, respectivamente, os valores verdadeiro e falso, julgue os próximos itens.

(1) A proposição $[P \vee Q] \rightarrow Q$ é uma tautologia.

(2) Se P for F e $P \vee Q$ for V, então Q é V.

Solução. O Item (1) é falso! vejamos: Considerando que o item afirma que a proposição é uma tautologia, vamos utilizar a regra do absurdo (se quiser, faça a tabela). Suponha, por absurdo, que a proposição é falsa. Nesse caso, por ser uma condicional lógica, o antecedente deve ser $\mathcal{V}$ e o consequente deve ser $\mathcal{F}$. Devemos verificar se é possível obter esse resultado, convenientemente. De fato, observe o esquema para a condicional:

$$\underbrace{P \vee Q}_{\mathcal{V}} \rightarrow \underbrace{Q}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \Rightarrow \begin{cases} P \vee Q = \mathcal{V} \\ \quad Q = \mathcal{F} \end{cases} \Rightarrow P = \mathcal{V}$$

Considerando que a proposição Q é $\mathcal{F}$, nessa hipótese, devemos ter $v(P) = \mathcal{V}$, para que a disjunção fique verdadeira. Logo, é possível que essa condicional fique falsa e, assim, a sentença não pode ser uma tautologia. Item Errado!

O Item (2) é verdadeiro! Vejamos: A disjunção $(P \vee Q)$ é $\mathcal{V}$ somente se pelo menos uma das componentes for $\mathcal{V}$. Mas a proposição P é $\mathcal{F}$, o que acarreta $Q = \mathcal{V}$.

CAPÍTULO 5. EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

Símbolo: $\Leftrightarrow$

Definição 5.1 (Equivalência). Duas proposições lógicas P e Q são equivalentes quando elas apresentam as mesmas avaliações $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{F}$, na tabela-verdade.

Indica-se que P equivale a Q com a seguinte notação:

$$P \Leftrightarrow Q$$

Convém observar que os símbolos $\Leftrightarrow$ e $\leftrightarrow$ são distintos. O símbolo da equivalência ($\Leftrightarrow$) é um operador de comparação entre proposições lógicas, desse modo $P \Leftrightarrow Q$ deve ser lido "P equivale a Q", enquanto que o símbolo da bicondicional ($\leftrightarrow$) é utilizado para criar proposições, como visto no capítulo anterior.

Quando duas proposições são equivalentes, uma reescreve a outra, com o mesmo sentido lógico, por isso as tabelas-verdade são idênticas.

Teorema 5.1. Uma proposição P é logicamente equivalente a uma proposição Q se e somente se a bicondicional associada $P \longleftrightarrow Q$ for tautológica.

Demonstração. O teorema é uma bicondicional lógica. Assim, deve-se provar a dupla implicação:

(i) Se P é equivalente a Q, então, pela definição de equivalência, os valores lógicos de P e Q são iguais em todas as linhas da tabela-verdade. Dessa forma, a bicondicional $P \longleftrightarrow Q$ será tautológica, pois será dos tipos $\mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{V}$ ou $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{V}$, nas linhas da tabela.

(ii) Reciprocamente, se a bicondicional $P \leftrightarrow Q$ é tautológica, os valores lógicos de P e Q são ambos $\mathcal{V}$ ou ambos $\mathcal{F}$, em todas as linhas da tabela-verdade. Como P e Q têm os mesmos valores lógicos, as proposições são equivalentes. ■

Para verificar, testar ou comprovar a relação de equivalência entre proposições, pode-se proceder do seguinte modo:

- Constrói-se a tabela-verdade destacando uma coluna para cada proposição;

- Após a construção da tabela-verdade, verifique se os valores lógicos, em todas as linhas da tabela, são iguais. Em caso afirmativo, diz-se que as proposições são equivalentes.

Exemplo 5.1. Verifique se as proposições P_1 e P_2, abaixo, são equivalentes.
$P_1 \equiv$ Se estudo matemática, então obtenho boas notas.
$P_2 \equiv$ Se não obtive boas notas, então não estudei matemática.

Solução. Devemos representar simbolicamente as duas proposições e lançá-las na tabela-verdade. A tabela 5.1 mostra esse resultado.
Sejam $A \equiv$ estudo matemática e $B \equiv$ obtenho boas notas.
Formas lógicas:
$P_1 \equiv A \rightarrow B$
$P_2 \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A)$

Tabela 5.1. Resolução por tabela-verdade da questão 5.1

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}$	$\neg\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \rightarrow B}$	$(\neg\boldsymbol{B}) \rightarrow (\neg\boldsymbol{A})$	$(\boldsymbol{A \rightarrow B}) \leftrightarrow [(\neg\boldsymbol{B}) \rightarrow (\neg\boldsymbol{A})]$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

Fonte: O autor.

Conclusão: Os valores lógicos de P_1 e P_2 são iguais em todas as linhas da tabela, logo $P_1 \Leftrightarrow P_2$ (leia: P_1 equivale a P_2). Observe que a bicondicional, na última coluna, é uma tautologia lógica, mas essa construção é desnecessária porque já havíamos verificado, por definição.

5.1. Propriedades da equivalência

Sejam P, Q e R proposições. Valem as seguintes propriedades das equivalências lógicas:

a) Reflexiva

$P \Leftrightarrow P$

b) Simétrica

Se $P \Leftrightarrow Q$, então $Q \Leftrightarrow P$

c) Transitiva

Se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$, então $P \Leftrightarrow R$.

5.2. Principais Regras de Equivalências

O processo de verificação da relação de equivalência entre proposições, por meio da construção de tabelas, pode ser exaustivo, dependendo do número de linhas da tabela-verdade, que cresce exponencialmente em função do número de variáveis atômicas componentes.

Uma forma alternativa para se verificar a relação de equivalência é a utilização de algumas regras conhecidas de equivalência, que se destacam porque são mais frequentes em questões de lógica. Cada uma delas é demonstrável através da construção de tabelas-verdade. Serão, a seguir, apresentadas essas regras e será visto como podem ser utilizá-las para a análise de equivalências. Sejam A, B e C proposições lógicas, teremos as seguintes regras básicas de equivalência:

5.2.1. Regra da Dupla Negação

Uma dupla negação equivale a uma afirmação. Seja A uma proposição e $\neg A$ a sua negação, então $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$.

Verificação. Basta fazer a tabela-verdade. A tabela 22 mostra a equivalência da dupla negação. Observe que os valores lógicos de A e $\neg(\neg A)$ são os mesmos em todas as linhas da tabela.

Tabela 22. Regra da dupla negação

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\neg A}$	$\boldsymbol{\neg(\neg A)}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$

Fonte: O autor.

Exemplo 5.2. Qual é a negação da proposição “Paulo não é paulista”?

Solução. A sentença “Paulo não é paulista” já é negativa e, assim, ao negá-la, pode-se aplicar a regra da dupla negação, o que resulta a sentença “Paulo é paulista” ou, ainda, “Não é verdade que Paulo não é paulista”.

Exemplo 5.3. Na composição que faz parte da música “Sampa”, composta em 1978, e de autoria dos compositores Caetano Emmanuel Viana Teles Veloso e Elvira Perpinya Brull, no trecho descrito “Porque és o avesso do avesso do avesso do avesso”, falando da cidade de São Paulo, os compositores indicaram que a cidade está do avesso ou do lado certo?

> [...] Quando eu te encarei frente a frente e não vi o meu rosto.
> Chamei de mau gosto o que vi, de mau gosto, mau gosto.
> É que Narciso acha feio o que não é espelho.
> E à mente apavora o que ainda não é mesmo velho.
> Nada do que não era antes quando não somos mutantes
> E foste um difícil começo
> Afasto o que não conheço
> E quem vem de outro sonho feliz de cidade
> Aprende depressa a chamar-te de realidade
> Porque és o avesso do avesso do avesso do avesso
> [...]

Uma solução. A locução adverbial, do avesso, pode ser interpretada como “do lado contrário”, “em desordem”. Para ilustrar, o que significa dizer que uma meia está do avesso? significa dizer que está do lado contrário! Assim, se P é a proposição “A meia está do lado certo”, a negação de P, $\neg P,$ seria “A meia não está do lado certo”, ou seja, está do lado contrário, ou ainda “A meia está do avesso”. O que seria o avesso do avesso da meia? Seria uma dupla negação de P, $\neg(\neg P),$ que equivale a P, pela regra da dupla negação, e resulta a sentença “a meia está do lado certo”. Seguindo esse raciocínio, o que seria o avesso do avesso do avesso da meia? Seria a sentença $\neg[\neg(\neg P)] \Leftrightarrow \neg P$, que significa dizer “a meia está do avesso! E o que seria o “avesso do avesso do avesso do avesso? É o certo! Teríamos a sentença $\neg\{\neg[\neg(\neg P)]\} \Leftrightarrow \neg\{\neg P\} \Leftrightarrow P$ que é a sentença inicial “A meia está do lado certo”. Voltado à bela poesia de Caetano, basta o trocadilho “meia” por ‘São Paulo”, no raciocínio acima, e ficará fácil perceber que a estrofe diz “A cidade de São Paulo está do lado certo”.

5.2.2. Leis de Augustus de Morgan

São regras para a construção das negações da conjunção e da disjunção. Dadas A e B, proposições quaisquer, observe a mudança de conectivo, no processo de construção das negações.

a) $\neg(A \underbrace{\wedge}_{e} B) \Leftrightarrow (\neg A) \underbrace{\vee}_{ou} (\neg B)$

b) $\neg(A \underbrace{\vee}_{ou} B) \Leftrightarrow (\neg A) \underbrace{\wedge}_{e} (\neg B)$

As leis de De Morgan podem ser interpretadas assim: A negação de uma conjunção equivale a uma disjunção das negações. A negação de uma disjunção equivale a uma conjunção das negações.

Demonstração. Façamos a demonstração de a). Construindo-se a tabela-verdade das duas proposições, pode-se verificar que elas apresentam os mesmos valores lógicos em todas as linhas da tabela-verdade. Portanto, pela definição 5.1, as proposições são logicamente equivalentes. As duas últimas colunas da tabela 23 mostram a equivalência de De Morgan para a negação de uma conjunção. A demonstração de b) é análoga.

Tabela 23. Leis de De Morgan

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}$	$\neg\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$	$\neg(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})$	$(\neg\boldsymbol{A}) \vee (\neg\boldsymbol{B})$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

Fonte: O autor.

Cumpre observar que na aplicação da lei de De Morgan, em uma conjunção e na disjunção lógica, gera-se uma equivalência com a **negação** dessas proposições e não uma equivalência delas. Em tempo, perceba a mudança de conectivo lógico, na aplicação das regras: A negação de uma conjunção (e) é feita negando-se cada um dos componentes e mudando-se o conectivo lógico para uma disjunção (ou). A negação de uma disjunção (ou) é feita de forma análoga, mas mudando-se o conectivo para uma conjunção (e). Veja o exemplo 5.4, que mostra essa construção.

Exemplo 5.4. Dadas as proposições P_1 e P_2, abaixo relacionadas, aplique as leis de De Morgan e construa as respectivas negações dessas proposições.
$P_1 \equiv$ Os juros são altos **e** a economia não cresce.
$P_2 \equiv$ O réu roubou um carro **ou** roubou uma motocicleta.

Solução. Em P_1, deve-se negar uma conjunção, através da construção de uma disjunção das negações das proposições componentes. Em P_2, deve-se negar uma disjunção, através da construção de uma conjunção das negações das proposições componentes. O resultado é o que segue:
$\neg P_1 \equiv$ Os juros não são altos **ou** a economia cresce.
$\neg P_2 \equiv$ O réu não roubou um carro **e** não roubou uma motocicleta.
Observação: em $\neg P_2$ poder-se-ia trocar “e não” por “nem”, de onde se obteria a sentença “O réu não roubou um carro nem roubou uma motocicleta”.

5.2.3. Equivalências da Condicional

Dadas A e B, proposições quaisquer, as proposições condicionais da forma geral $\boldsymbol{A \to B}$ podem ser reescritas, de modo correto e equivalente, por uma das seguintes regras:

a) **Contrapositiva:** $(\neg B) \to (\neg A) \Leftrightarrow A \to B$
b) **Fórmulas restritas:** $\neg[A \wedge (\neg B)] \Leftrightarrow (\neg A) \vee B \Leftrightarrow A \to B$

Pela regra da contrapositiva, se uma proposição A implica uma proposição B, então a negação de B implica a negação de A, nessa ordem. Por exemplo, a sentença “Se corro, então fico cansado” é logicamente equivalente à sentença “Se não fico cansado, então não corro”, ou seja, uma proposição do tipo $\boldsymbol{A \to B}$ é equivalente a uma proposição do tipo $(\neg B) \to (\neg A)$.

Com relação às fórmulas restritas[11] da condicional, as regras indicam que é possível transformar uma condicional $\boldsymbol{A \rightarrow B}$ em uma disjunção, na forma $(\neg A) \vee B$. Note que essa disjunção pode ser obtida a partir da sentença $\neg[A \wedge (\neg B)]$, pela aplicação da lei de De Morgan. Por exemplo, a condicional “se corro, então fico cansado” é logicamente equivalente à proposição “Não corro ou fico cansado”, sem o uso da partícula “se” porque não é uma condicional, mas sim uma disjunção, da forma $(\neg A) \vee B$. A mesma condicional equivale à proposição “Não é verdade que, corro e não fico cansado”, fazendo uma referência à forma $\neg[A \wedge (\neg B)]$. Pela regra transitiva das equivalências, $(\neg B) \rightarrow (\neg A) \Leftrightarrow \neg[A \wedge (\neg B)] \Leftrightarrow (\neg A) \vee B$.

A tabela-verdade que comprova esses resultados é apresentada na tabela 24.

Tabela 24. Equivalências da Condicional

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\neg A}$	$\boldsymbol{\neg B}$	$\boldsymbol{A \rightarrow B}$	$\boldsymbol{(\neg B) \rightarrow (\neg A)}$	$\boldsymbol{\neg[A \wedge (\neg B)]}$	$\boldsymbol{(\neg A) \vee B}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

Fonte: O autor.

Exemplo 5.5. Escreva, em linguagem corrente, as equivalências da afirmação condicional: “Se neva, então faz frio”.

Solução. A proposição é da forma $P \equiv A \rightarrow B$, em que A é a proposição “neva” e B é a proposição “faz frio”.

As equivalências são:

- Contrapositiva: $(\neg B) \rightarrow (\neg A) \equiv$ Se não faz frio, então não neva.

- Formas restritas:

$(\neg A) \vee B \equiv$ Não neva ou faz frio.

$\neg[A \wedge (\neg B)] \equiv$ Não é verdade que, neva e não faz frio.

[11] As fórmulas restritas (veja definição 5.2, no tópico 5.3) são sentenças que só apresentam os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. Um resultado importante é apresentado por meio do teorema 5.2, que afirma que toda proposição lógica possui uma fórmula restrita que lhe é equivalente.

Exemplo 5.6. Escreva, em linguagem corrente, as equivalências da afirmação condicional: "Se os juros são altos, então a economia não cresce".

Solução. A proposição pode ser representada na forma $P \equiv A \rightarrow B$[12], em que A é a proposição "os juros são altos" e B é a proposição "a economia **não** cresce". Observe que a proposição B já é negativa, de modo que a sentença $\neg B$ será a proposição afirmativa "a economia cresce", pela regra da dupla negação.

As equivalências são:

- Contrapositiva: $(\neg B) \rightarrow (\neg A) \equiv$ Se a economia cresce, então os juros não são altos.
- Formas restritas:

$(\neg A) \vee B \equiv$ Os juros não são altos ou a economia não cresce.

$\neg[A \wedge (\neg B)] \equiv$ Não é verdade que, os juros são altos e a economia cresce.

5.2.4. A Negação da Condicional

Dadas A e B, proposições quaisquer, a negação da condicional pode ser obtida pela negação da sua equivalente restrita, aplicando-se, em seguida, a regra de De Morgan. Veja o esquema:

$\neg(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow \neg[(\neg\boldsymbol{A}) \vee \boldsymbol{B}] \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \wedge (\neg\boldsymbol{B})$, segue, por transitividade que

$$\neg(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \wedge (\neg\boldsymbol{B}).$$

Um resultado importante, nessa regra, é que a negação da condicional não é feita com outra fórmula condicional, mas com uma conjunção da antecedente com a negação da consequente da condicional. A tabela-verdade para a negação da condicional, que comprova esse resultado, é mostrada na tabela 25. Perceba a relação de equivalência nas duas últimas colunas.

---

[12] Perceba que o fato de a proposição B, componente da condicional $A \rightarrow B$, ser negativa, no exemplo dado, não acarretou uma condição obrigatória de, em sua representação simbólica, utilizarmos o símbolo "$\neg$", o que daria à proposição P a forma $P \equiv A \rightarrow (\neg B)$, onde B, agora, seria a proposição "a economia cresce". Isso porque o resultado lógico não seria modificado, de modo que as sentenças seriam as mesmas, em linguagem corrente. As formas de representação das equivalências passariam a ser $A \rightarrow (\neg B) \Leftrightarrow B \rightarrow (\neg A) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$.

Tabela 25. Negação da Condicional

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\neg\boldsymbol{A}$	$\neg\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \rightarrow B}$	$\neg(\boldsymbol{A \rightarrow B})$	$\boldsymbol{A} \wedge (\neg\boldsymbol{B})$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$

Fonte: O autor.

Exemplo 5.7. A negação da seguinte afirmação condicional: “Se neva, então faz frio” é dada por

Solução: a proposição é da forma $P \equiv A \rightarrow B$, em que A é proposição “neva” e B é a proposição “faz frio”.
A negação seria: $\neg P \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \wedge (\neg \boldsymbol{B}) \equiv$ Neva e não faz frio.

5.2.5. Equivalências e a Negação da Bicondicional

A bicondicional é uma dupla implicação lógica, podendo ser escrita na forma

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \text{ (1)}$$

Considerando que as condicionais podem ser escritas através de fórmulas restritas, $A \rightarrow B \Leftrightarrow (\neg A) \vee B$ e $B \rightarrow A \Leftrightarrow (\neg B) \vee A$, substituindo em (1), obtém-se a equivalente fórmula restrita da bicondicional,

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow [(\neg A) \vee B] \wedge [(\neg B) \vee A] \text{ (2)}$$

Para a construção da negação da bicondicional, deve-se observar que as duas fórmulas de equivalência indicadas em (1) e em (2) têm como operador principal a conjunção. Portanto, negar uma condicional equivale a negar uma conjunção e, pelas leis de De Morgan, aplicando-se a negação em (1) ou em (2), o resultado é o mesmo. Veja:

(i) Na dupla implicação, em (1):

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Rightarrow$

$\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)] \Rightarrow$

$\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow [\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow [A \wedge (\neg B)] \vee [B \wedge (\neg A)]$

(i) Na forma restrita, em (2)

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow [(\neg A) \vee B] \wedge [(\neg B) \vee A] \Rightarrow$

$\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg\{[(\neg A) \vee B] \wedge [(\neg B) \vee A]\} \Rightarrow$

$\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow \{\neg[(\neg A) \vee B] \vee \neg[(\neg B) \vee A]\} \Rightarrow$

$\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow [A \wedge (\neg B)] \vee [B \wedge (\neg A)]$

Outro resultado, é que a bicondicional pode ser negada pela disjunção exclusiva $A \underline{\vee} B$ (Ou A ou B), simbolicamente indicamos $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \underline{\vee} B$. Observe, na construção da tabela 26, que as colunas de $(A \leftrightarrow B)$ e $A \underline{\vee} B$ têm valorações contrárias.

Tabela 26. Negação da Bicondicional pela Disjunção Exclusiva

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$	$\neg(\boldsymbol{A \leftrightarrow B})$	$\boldsymbol{A \underline{\vee} B}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$

Fonte: O autor.

5.3. Fórmulas Restritas

Definição 5.2. (Forma Restrita). Uma proposição P está na forma proposicional restrita, se apresentar apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.

Uma fórmula restrita, também chamada de **forma normal**, não pode apresentar os conectivos da condicional (→) e da bicondicional (↔).

Exemplo 5.8. Todas as proposições abaixo estão na forma restrita:

$$(\neg A) \vee B \qquad \neg(A \wedge B\,) \qquad A \wedge [B \vee \neg(C)]$$

Um resultado importante é que o conjunto dos conectivos {¬, ∧, ∨} é completo, isto é, todas as funções de verdade podem ser obtidas a partir desse conjunto. Na tabela 24, mostramos que a forma $(\neg A) \vee B$ é a equivalente restrita da condicional $A \rightarrow B$. A bicondicional, por consequência, também possui uma forma restrita que lhe é equivalente: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow [(\neg A) \vee B] \wedge [(\neg B) \vee A]$. Tem-se o seguinte teorema:

Teorema 5.2. Para toda proposição P existe uma fórmula restrita Q, que é equivalente a P, $Q \Leftrightarrow P$.

Demonstração. Seja $P(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ uma fórmula em que cada P_i, $1 \leq i \leq n$ é uma proposição atômica distinta, componente de P. Assim, a tabela-verdade de P terá 2^n linhas distintas, que representam as possibilidades lógicas de P. A proposição P pode ser uma tautologia, uma contradição ou uma contingência lógica. Devemos mostrar que há uma forma restrita para P em cada um dos casos:

(i) P é uma tautologia.

Caso P seja uma tautologia lógica, todas as linhas da tabela-verdade de P apresentarão valor lógico $\mathcal{V}$. Seja Q uma proposição, na forma restrita, dada por

$$Q \equiv [P_1 \vee (\neg P_1)] \vee\, P_2 \vee\, \cdots \vee\, P_n.$$

Temos que Q é uma tautologia, pois para cada valor lógico de P_1, a componente $[P_1 \vee (\neg P_1)]$ é sempre verdadeira e, assim, o valor lógico de Q é verdadeiro, $V(Q) = \mathcal{V}$. Portanto, $Q \Leftrightarrow P$.

(ii) P é uma contradição.

Caso P seja uma contradição lógica, todas as linhas da tabela de P apresentarão valor lógico $\mathcal{F}$. Seja Q uma proposição, na forma restrita, dada por

$$Q \equiv [P_1 \wedge (\neg P_1)] \wedge\, P_2 \wedge\, \cdots \wedge\, P_n.$$

A fórmula de Q é uma contradição, pois para cada valor lógico de P_1, a componente $[P_1 \wedge (\neg P_1)]$ é sempre falsa e, assim, o valor lógico de Q é falso, $V(Q) = \mathcal{F}$. Portanto, $Q \Leftrightarrow P$.

$(iii) P$ é uma contingência.

Se P é uma contingência, existe ao menos uma linha em que $v(P) = \mathcal{V}$, para alguma combinação de valores de cada P_i. Defina $A_k \equiv B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n$, com $1 \leq k \leq 2^n$, uma fórmula conjuntiva tal que cada $B_i = P_i$, se na k-ésima linha $v(P_i) = \mathcal{V}$ e $B_i = \neg P_i$, se na k-ésima linha $v(P_i) = \mathcal{F}$. Temos que $v(A_k) = \mathcal{V}$, na k-ésima linha, e $v(A_k) = \mathcal{F}$, nas demais linhas, pois cada linha da tabela de P é uma combinação diversa da outra.

Seja Q uma proposição, na forma restrita, formada pela disjunção de todas as A_k em que, na k-ésima linha, $v(P) = \mathcal{V}$. Chamaremos cada A_k de **disjuntivo**. Segue que o valor lógico de Q também será igual a $\mathcal{V}$, nessa linha, $v(Q) = \mathcal{V}$, pois existe um disjuntivo A_k que é verdadeiro, na k-ésima linha em que $v(P) = \mathcal{V}$. Se o valor lógico de P for falso, $v(P) = \mathcal{F}$, então A_k não é um disjuntivo de Q e, assim, o valor lógico de Q também será falso, $V(Q) = \mathcal{F}$. Portanto, Q é a equivalente restrita de P. ■

Exemplo 5.9. Dada a tabela abaixo, para uma proposição $P(P_1, P_2)$, em que P_1 e P_2 são proposições atômicas, componentes de P, construa a sua fórmula restrita.

$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$	$\boldsymbol{P}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Solução. P é uma contingência lógica que apresenta apenas duas variáveis atômicas, P_1 e P_2, cuja tabela-verdade possui 4 linhas. Deve-se, pelo teorema 5.2, criar um conjuntivo da forma $A_k \equiv B_1 \wedge B_2$, $1 \leq k \leq 4$, em que $B_i = P_i$, se na k-ésima linha $v(P_i) = \mathcal{V}$ e $B_i = \neg P_i$, se na k-ésima linha $v(P_i) = \mathcal{F}$, para cada linha em que $v(P) = \mathcal{V}$. Esses conjuntivos passarão a compor a proposição Q, formada por uma disjunção lógica desses conjuntivos, que será a equivalente restrita da P. Observe que as linhas L1 e L4 da tabela são as únicas em que $v(P) = \mathcal{V}$. Assim, os conjuntivos que interessam são apenas A_1 e A_4, tais que $A_1 \equiv P_1 \wedge P_2$ e $A_4 \equiv (\neg P_1) \wedge (\neg P_2)$.

Agora, defina a proposição $Q \equiv A_1 \vee A_4$. Pelo referido teorema, Q é equivalente a P. Ou seja, substituindo A_1 e A_4 em Q, teremos $Q \equiv (P_1 \wedge P_2) \vee [(\neg P_1) \wedge (\neg P_2)] \Leftrightarrow P$. A tabela 5.9 confirma o resultado, pois as colunas de P e Q têm os mesmos valores lógicos, em todas as linhas.

Tabela 5.9. Demonstração, por tabela-verdade, da construção de uma fórmula restrita

$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$	$\boldsymbol{(P_1 \wedge P_2)}$	$\boldsymbol{(\neg P_1) \wedge (\neg P_2)}$	$\boldsymbol{Q \equiv (P_1 \wedge P_2) \vee [(\neg P_1) \wedge (\neg P_2)]}$	$\boldsymbol{P}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

Fonte: O autor.

CAPÍTULO 6. ARGUMENTAÇÃO LÓGICA

6.1. O que é uma Argumentação?

Uma argumentação é uma sequência finita de afirmações, que se relacionam, e podem ser separadas em dois grupos: O da conclusão e o das evidências ou provas, chamadas de premissas. No cotidiano, argumentar, muitas vezes, é sinônimo de contenda, discussão ou controvérsia. No campo da lógica, argumentar tem outro sentido: O analítico e crítico! É interesse da lógica analisar qual é a relação entre as premissas e a conclusão, provendo meios, técnicas, que permitam verificar se as premissas são de fato uma boa base de sustentação para a conclusão.

Por vezes, a argumentação é tida como a arte do convencimento, da retórica. Mas esse não é o campo de maior interesse da lógica, porque o poder de convencimento de um argumento, o seu grau de força, dependerá do conteúdo presente nas premissas, e a aceitação, muitas vezes, é questão de ponto de vista. Veja o que diz Cabrera (2017), em seu texto sobre argumentação negativa.

> Segundo os critérios de uma das partes, o argumento será convincente; de acordo com os critérios da outra parte, os mesmos argumentos serão frouxos ou mesmo insustentáveis. Isto é o que aparece em discussões reais. O argumento de que o aborto é legítimo em situação de estupro é contundente sobre bases utilitaristas, mas fraco em bases deontológicas. O argumento pró eutanásia é forte assumindo um princípio forte de autonomia, sem o qual o mesmo argumento se apresenta como fraco, e assim por diante (CABRERA, 2017, p. 157).

Além disso, as premissas de uma argumentação podem tratar das mais diversas áreas do conhecimento humano, tais como filosofia, ciências jurídicas, matemática, estatística, etc. O lógico não é conhecedor de todas as áreas, desta forma não será capaz, muitas vezes, de afirmar se o conteúdo presente nas premissas é de fato verdadeiro ou falso. Mas esta preocupação é da ciência e do cientista, não do lógico.

O conhecimento, sinônimo de inteligência ou sabedoria, naturalmente não está associado apenas ao campo científico; existe a sabedoria popular, daquele que é simples, do humilde não estudado, que até serve de base para o conhecimento científico. No campo da argumentação lógica, o conhecimento pode ser representado de duas formas: a forma explícita e a forma implícita. A forma explícita do conhecimento ocorre através da formalização, oral ou por escrito, das sentenças, que serão a base do conhecimento; já a forma implícita do conhecimento se dá através de **Consequência Lógica**. É justamente nesse campo da consequência lógica que rege a importância do estudo da argumentação lógica. O que é consequência lógica? Pereira (2010) define que “Consequência lógica é o elo entre o que um agente “acredita” e aquilo que é explicitamente representado em sua base de conhecimento” (PEREIRA, 2010, p. 19). Uma consequência lógica é gerada por fatos derivados de sentenças, que são a base do conhecimento, num processo de inferência adequado, correto. Por exemplo, suponha que seja verdade que “Todo professor de matemática é rico” e que seja verdade que “José é professor de matemática”. Uma consequência lógica seria deduzir que José é rico. Agora, quando se diz “O sistema previdenciário brasileiro é deficitário, logo é preciso uma reforma urgente”, e não é apresentado cálculos, balanços, números, estudos, então não temos uma consequência lógica. Consequência lógica não pode ser fruto de opiniões desprovidas de provas, não pode advir de gosto ou de crenças pessoais, irrelevantes para outros indivíduos.

A importância da lógica está no fato de fornecer critérios técnicos de construção, entendimento e análise dos argumentos. Propõe-se uma disputa no campo da inteligência, da técnica - em oposição a gritos e impropérios, que muitas vezes fazem parte das “discussões” no cotidiano –, estimulando os indivíduos a raciocinar corretamente e a refletir, antes de aceitar, sem contestação, os argumentos próprios e o dos outros.

Nem toda argumentação se dá na esfera formal da lógica, muito pelo contrário, a maior parte dos argumentos são construídos no campo informal da lógica. Para melhor compreender o universo dos argumentos, veja dois exemplos:

Exemplo 6.1. Argumento I

Considere que José da Silva, devidamente qualificado, foi investigado pela suposta prática do crime de roubo, art. 157 do Código Penal Brasileiro. Concluídas as investigações, a autoridade policial elaborou, nos autos, um relatório de todas as informações apuradas e o encaminhou ao Ministério Público, indicando haver indícios de culpabilidade. Em tempo, se o promotor de justiça oferecer a denúncia e encaminhá-la ao Poder Judiciário, então o réu é culpado. Se o perito criminal encontrou vestígios do réu na cena do crime, então o réu será condenado. De fato, o promotor de justiça ofereceu a denúncia, a encaminhou ao judiciário, mas o réu não foi condenado. Portanto, o réu é culpado, mas o perito criminal não encontrou vestígios do réu na cena do crime**.**

Exemplo 6.2. Argumento II

Paulo é advogado e não sabe lógica. Maria é advogada e não sabe lógica. José é advogado e não sabe lógica. João é advogado e não sabe lógica. Portanto, nenhum advogado sabe lógica.

O que os dois argumentos apresentam em comum e quais as suas diferenças? Essencialmente, os dois argumentos são formados por uma sequência de afirmações ou fatos relacionados, que podem ou não ser verdadeiros, num certo contexto, e que nos conduzem a conclusões, precedidas da palavra “portanto”, em ambos. O que os difere, além do universo do discurso, naturalmente, é que o argumento I é do tipo dedutivo, possui forma lógica, pois percebe-se a presença dos conectivos da lógica formal, enquanto que o argumento II é do tipo indutivo, porque a conclusão se deu por generalização. Os argumentos indutivos não possuem forma lógica, ou seja, fazem parte de um sistema chamado de lógica informal. Em termos gerais, podemos definir argumento da seguinte forma:

Definição 6.1 (**Argumentação**). Uma argumentação é uma sequência finita de proposições, $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n$, em que as $n-1$ primeiras proposições representarão as premissas e a n-ésima e última será a conclusão.

Um primeiro aspecto a se observar, nessa definição, é que um argumento é um grupo de proposições que deve conter ao menos uma premissa e uma conclusão, que podem ser enumeradas. Segundo, não se está afirmando que a conclusão de uma argumentação será dada no final de um texto. Ela pode aparecer no início, entre as premissas, ou no final da sequência de proposições. Será importante identificar, no texto, quais são as premissas e qual é a conclusão, para depois, pela enumeração, separar os grupos. Por uma questão de organização, a conclusão será a última delas a ser enumerada, independentemente da ordem em que apareça. Veja, no exemplo abaixo, a frase atribuída a Aristóteles, na obra Órganon[13] (1985, p.29):

> Os pais que ensinam os filhos são mais dignos de estima do que os que se contentam em lhes dar a vida, pois estes dão apenas o meio de viver e, os primeiros, o meio de bem viver (ARISTÓTELES).

O argumento acima apresenta a conclusão no início do texto e duas premissas (ou evidências), que são dadas em seguida, precedidas pela palavra “pois”. Pode-se organizá-lo da seguinte forma, onde P_1 e P_2 serão as premissas e P_3 será a conclusão:

- P_1: Os pais que se contentam em dar a vida aos filhos, lhes dão apenas o meio de viver.
- P_2: Os pais que ensinam os filhos, lhes dão o meio de bem viver.
- P_3: Portanto, os pais que ensinam os filhos são mais dignos de estima do que os que se contentam em lhes dar a vida.

A lógica possui técnicas e ferramentas que podem auxiliar as pessoas na avaliação da argumentação, quanto aos aspectos de validade ou força das conclusões. O estudo da argumentação visa capacitar e treinar o indivíduo para a análise dos diversos tipos de argumentos, dando-lhe suporte para decidir se as premissas são de fato uma boa base de sustentação para a conclusão. Veja o que diz Salmon (2010):

> [...] examinamos os argumentos e dissemos que a Lógica pode ser usada para analisa-los e avalia-los. Essa é uma das importantes funções da Lógica. A maioria das pessoas, entretanto, associa a Lógica a uma outra função: ela tem algo a ver com o pensamento e o raciocínio. Pensar e raciocinar consiste, pelo menos em parte, em realizar inferências (SALMON, 2010, p. 5)

Os argumentos fazem parte do cotidiano das pessoas e, independentemente da área que atuam, quer na filosofia, nas ciências jurídicas ou da natureza, o que se espera é que haja um processo lógico adequado de construção do pensamento, no

---

[13] Órganon, significa “órgão” ou ‘instrumento”, é uma coleção de seis livros que reúnem os escritos lógicos de Aristóteles e seus discípulos, intitulados: Categorias, Da Interpretação, Analíticos Anteriores (divididos em dois livros: O livro I, que trata da teoria dos silogismos e o livro II, que trata das propriedades dos silogismos e suas falsas conclusões), Analíticos Posteriores (também divididos em dois livros: O livro I, que trata das demonstrações visando as condições formais, e o livro II, que expõe a teoria da definição e da causa), Tópicos e o último deles é o Elencos Sofisticos.

qual as questões possam ser decididas com clareza e de forma objetiva. Naturalmente, nem sempre isso é possível, porque, dependendo das questões filosóficas (aborto, existência de Deus, natureza do mal, moral, etc), os debates se transformam em disputas infindáveis.

Quando se estuda argumentação, é preciso observar um conjunto mínimo de passos que, ao serem observado, irão colaborar no processo de construção e crítica dos argumentos: Critérios de existência, autoria e público alvo, organização/reconstrução do argumento, valor de verdade das premissas, análise de validade ou grau de força das conclusões e, por fim, a efetividade. Passemos a esta discussão.

6.2. A Existência do Argumento

O primeiro passo para a análise de um argumento é verificar se estamos mesmo diante de uma argumentação. Por definição, a existência de uma argumentação fica condicionada à presença de pelo menos uma premissa e uma conclusão, estabelecendo uma linha de raciocínio, na qual as conclusões devem ser decorrências, em tese, das afirmações presentes nas premissas. A argumentação pode ou não ser correta, a depender de quão adequado é o processo de inferência.

Quando as pessoas raciocinam, usualmente elas fazem inferências que podem ou não estarem fundamentas por evidências ou provas. O processo de raciocinar e fazer inferências pode ou não gerar argumentos. Se o raciocínio for constituído de uma sequência de pensamentos desestruturados, desconexos, apenas descritivos ou na forma de um desabafo emocional, então não há um argumento. Portanto, o primeiro passo para se fazer a análise dos argumentos é saber, de fato, se existe uma argumentação lógica. Considere o enunciado do exemplo 6.3:

Exemplo 6.3. *Se a criminalidade é alta e não há criminosos livres, então a justiça é eficaz.*

Observe que a proposição, nesse exemplo, é uma afirmação condicional, onde o antecedente é a sentença "*a criminalidade é alta e não há criminosos livres*", e o consequente é a sentença "a justiça é eficaz". Tal afirmação, ainda que fosse verdadeira, não garantiria a veracidade das componentes, porque todas as componentes poderiam ser falsas e, mesmo assim, a condicional seria verdadeira. Não há premissas declaradas, nem inferências. Nesse caso, não estamos diante de uma argumentação.

Observe, agora, a sequência no exemplo 6.4:

Exemplo 6.4. *Se a criminalidade é alta e não há criminosos livres, então a justiça é eficaz. Há criminosos livres. Portanto, a justiça não é eficaz.*

Nesse caso, tem-se uma argumentação lógica, formada por duas premissas e uma conclusão. Foi construído um processo de inferência. A proposição “a justiça não é eficaz” fica evidenciada como conclusão da argumentação, por causa do indicador de conclusão, “portanto”, que a precede. O que se vê é a tentativa de fundamentar a ineficácia da justiça, com base na premissa de que “há criminosos livres” e no fato de que a eficácia da justiça está condicionada à criminalidade ser alta, aliada à não existência de criminosos livres. Analisar se o processo de inferência foi adequado ou não, é outro assunto, que interessa à lógica, mas que será visto mais à frente. Veremos que esse argumento é inválido, ou seja, as premissas não sustentam a conclusão, porque é possível termos premissas verdadeiras, com conclusão falsa.

É necessário ter cuidado, porque nem sempre as palavras indicadoras de conclusão, “portanto”, “consequentemente”, “logo”, irão caracterizar argumentos lógicos. Veja o exemplo 6.5 abaixo:

Exemplo 6.5. A prisão foi ilegal. Portanto, espeça-se o alvará de soltura.

Apesar de a palavra “portanto” ter sido utilizada, ela precede uma sentença imperativa, uma ordem: “espeça-se o alvará de soltura”. Uma ordem é cumprida ou não, mas não será classificada em verdadeira ou falsa, logo não é uma proposição. Em uma argumentação lógica, as premissas e as conclusões dos argumentos são afirmadas e poderão ser classificadas em verdadeiras ou falsas, do ponto de vista da realidade. No exemplo, não há argumentação.

6.3. Os Interlocutores da Argumentação

Não é suficiente, em muitos casos, apenas saber que existe uma argumentação, é preciso saber quem se responsabiliza por ela. Os interlocutores, aqueles que fazem parte das interações argumentativas, são os que, em tese, assumirão o ônus da prova, das evidências. Se aquele que apresenta a argumentação é uma autoridade no assunto, digamos um cientista, um renomado pesquisador, isso corrobora para a aceitação das conclusões, mas não é condição suficiente, pois os chamados argumentos de autoridade, podem ser falaciosos. Naturalmente, mesmo que uma pessoa não seja qualquer autoridade no assunto, ainda assim poderá apresentar argumentos convincentes, desde que tenha conhecimento da matéria tratada.

Nessa fase, além da autoria, é importante caracterizar o público alvo (aluno, professor, dono da empresa, cliente, etc) e os objetivos da argumentação: convencimento de clientes da organização, refutar alguma tese, provar uma tese, escandalizar, etc.

O público alvo deve influenciar a forma de construção dos argumentos. Uma situação é a argumentação do dia a dia das pessoas, repleta de informalidades, onde os indivíduos não buscam evidências externas para comprovar suas escolhas e preferências, utilizando-se de evidências irrelevantes, e às vezes até absurdas, como, por exemplo, a de justificar a preferência por determinado político, porque “ele rouba, mas faz”. Outra situação é a da vida profissional, onde a argumentação deve ser construída em parâmetros formais, bem estruturados, com clareza e objetividade, para que todos compreendam quais são os objetivos. Na vida profissional, deve-se buscar evidências externas, quando possível, que comprovem as afirmações. Por exemplo, um analista financeiro, não deve dizer a um cliente que um projeto de investimento A é melhor do que o projeto B, sem mostrar a projeção dos fluxos de caixa (entradas e saídas de capital) dos projetos, para uma dada taxa de atratividade do mercado financeiro. Ferreira, Ramos e Scherner (2010), afirmam que tais argumentos, da vida profissional, precisam apresentar aspectos de validade (processo de inferência correto) e veracidade, dando origem aos argumentos sólidos:

> Preferencialmente, na vida profissional, devemos apresentar argumentos que, além de serem encadeados logicamente (as premissas levam, de fato, à conclusão apresentada), devem ter estreita conexão com o mundo dos fatos (argumento verdadeiro). Podemos chamar essa argumentação (logicamente válida e verdadeira) de **argumentos sólidos** (FERREIRA, RAMOS e SCHERNER, 2010, p. 4).

6.4. A Organização e Reconstrução dos Argumentos

Para se fazer uma análise crítica da argumentação, é preciso identificar e separar o grupo das premissas e o da conclusão. Essa fase consiste na organização da argumentação, identificando-se quais afirmações são as premissas e quais são as conclusões. É possível que se tenha mais de um argumento. Um interlocutor, para justificar uma de suas premissas, pode até ter construído um argumento para isso.

Cabe ao leitor interpretar e identificar quais são as premissas e qual é a conclusão da argumentação. Algumas palavras ou frases são bons indicadores da conclusão: ‘logo”, “portanto”, “consequentemente”, “assim”. Entre as que indicam as premissas, temos: “Como”, “porque”, “desde que”, “em função de”. Veja o que diz Copi (1978):

> [...] um argumento pode ser enunciado com a sua conclusão em primeiro lugar, em último lugar ou entre suas várias premissas. Logo, a conclusão de um argumento não pode ser identificada em função da sua posição no enunciado de um argumento. Então como reconhece-las? Há certas palavras ou frases que servem, tipicamente para introduzir a conclusão de um argumento. Entre os mais comuns indicadores de conclusão temos: “Portanto”, “daí”, “logo”, “assim”, “consequentemente”, “segue-se que” [...] (COPI, 1978, p. 24).

Exemplo 6.6. Identificar as premissas e a conclusão no trecho da obra “A riqueza das nações”, de Adam Smith, reproduzido por Copi (1978).

> Quando todas as demais circunstâncias são idênticas, os salários são, geralmente, mais elevados nos novos ramos da indústria e comércio do que nos antigos. Quando um empresário tenta estabelecer uma nova indústria, deve, em primeiro lugar, atrair os operários de outros empregos com salários superiores aos que ganham em seus próprios ramos ou, então, aos que a natureza do seu trabalho de algum modo exige; e um tempo considerável deve transcorrer antes de ele se arriscar a reduzi-los ao nível comum (SMITH, apud COPI, 1978, p. 33).

Solução.

<u>Premissas</u>:

P_1: Quando um empresário tenta estabelecer uma nova indústria, deve, em primeiro lugar, atrair os operários de outros empregos com salários superiores aos que ganham em seus próprios ramos ou, então, aos que a natureza do seu trabalho de algum modo exige.

P_2: um tempo considerável deve transcorrer antes de ele se arriscar a reduzi-los ao nível comum.

Conclusão:

P_3: Quando todas as demais circunstâncias são idênticas, os salários são, geralmente, mais elevados nos novos ramos da indústria e comércio do que nos antigos.

Exemplo 6.7 Identifique e separe o grupo de premissas e a conclusão do argumento de Aristóteles:

"Todo homem é mortal. Se Sócrates é homem, logo Sócrates é mortal."

Solução.

Premissas:

P_1: Todo homem é mortal.

P_2: Sócrates é homem.

Conclusão:

P_3: Sócrates é mortal.

Exemplo 6.8. Identifique as premissas e a conclusão na seguinte argumentação: Na esfera penal, não se utiliza analogia, costumes e princípios gerais de direito, para tipificar crimes. Embora o artigo 4º da lei de introdução ao código civil brasileiro, prevê que o juiz, na ausência de lei, deva decidir conforme a analogia, os costumes e os princípios gerais de direito, na esfera penal, se há ausência de lei, o juiz simplesmente decide que não há crime. Além disso, a Constituição Federal (C.F/88), que é superior ao código civil, na hierarquia das leis, em seu artigo 5º, estabelece que "não haverá crime, sem lei anterior que o defina".

Solução.

Premissas:

P_1: o artigo 4º da lei de introdução ao código civil brasileiro, prevê que o juiz, na ausência de lei, deva decidir conforme a analogia, os costumes e os princípios gerais de direito.

P_2: Na esfera penal, se há ausência de lei, o juiz simplesmente decide que não há crime.

P_3: A Constituição Federal (C.F/88) é superior ao código civil, na hierarquia das leis.
P_4: A Constituição Federal (C.F/88), em seu artigo 5º, estabelece que “não haverá crime, sem lei anterior que o defina.”

<u>Conclusão</u>:
P_5: Na esfera penal, não se utiliza analogia, costumes e princípios gerais de direito, para tipificar crimes.

6.5. O Valor Verdade das Premissas

Na argumentação, as premissas compõem a **base de conhecimento**. A base de conhecimento, chamaremos, aqui, de **base** Δ (delta), é o conjunto de premissas que serão utilizadas como forma de justificativa para a conclusão da argumentação. Novas proposições podem ser acrescidas à base Δ de conhecimento, sob certas condições, no intuito de auxiliar o processo decisório quanto à correção ou não do raciocínio. Portanto, a base Δ não é rígida.

Há dois tipos principais de argumentos: Os argumentos **dedutivos**, veja o exemplo 6.1, da lógica formal, e os **indutivos**, exemplo 6.2, da lógica informal. Nos argumentos dedutivos, o acréscimo de novas proposições à base Δ de conhecimento pode auxiliar o processo de análise de validade, mas não altera o resultado final, válido ou inválido, e só pode ser feito seguindo regras da lógica clássica. Já nos argumentos indutivos, o acréscimo de novas proposições à base Δ pode ampliar ou reduzir a força das conclusões. Essa é uma diferença angular entre os argumentos dedutivos e os indutivos.

Os argumentos dedutivos possuem forma lógica, por isso podem ser representados simbolicamente. Nesse tipo de argumento, o que importa é a forma lógica e não o conteúdo das informações presentes nas premissas. Pode-se ter vários argumentos com uma mesma forma lógica, mas com conteúdos distintos. Assim, iremos considerar, nos argumentos dedutivos, que as premissas serão sempre verdadeiras, por hipótese. Veja o que diz Copi (1978):

> Determinar a veracidade ou a falsidade das premissas é uma tarefa que incumbe à ciência, em geral, pois as premissas podem referir-se a qualquer tema. O lógico não está tão interessado na verdade ou falsidade das proposições quanto nas relações lógicas que entre elas existem, sempre que

> por relações “lógicas” entre proposições entendemos aquelas que determinam a correção ou incorreção dos argumentos em que podem ocorrer. [...] O lógico está interessado na correção até daqueles argumentos cujas premissas possam ser falsas (COPI, 1978, p. 39).

Nos argumentos indutivos, mais comuns em ciências experimentais, a veracidade ou a falsidade das premissas é objeto de discussão, porque tal resultado influencia diretamente o grau de força da conclusão argumentativa, por isso o acréscimo de novas proposições à base Δ pode alterar o resultado final. Veja o que diz Cabrera (2017)

> Tem que perguntar se na reconstrução feita no passo 3 há termos que precisam ser esclarecidos ou melhor definidos; também é necessário explicitar os pressupostos que estão sendo assumidos e quais as premissas cuja verdade será aceita sem argumentação. Ambas as coisas estão conectadas porque pode acontecer de aceitarmos a verdade de uma premissa quando os termos são entendidos de certa forma, e rejeitá-la como falsa com outras definições desses termos. Também tem que ser checado se as premissas e pressupostos assumidos não têm mais força do que a conclusão que se pretende obter com eles (por exemplo, numa discussão sobre se o aborto é eticamente legítimo, alguém não pode pretender que a outra parte aceite que os fetos não são pessoas, ou que Deus considera a vida sagrada, pois estes pontos são ainda mais controversos que o que se pretende provar com eles).(CABRERA, 2017, p. 150).

6.6. A Análise de Validade e o Grau de Força da Argumentação

A decisão sobre a correção ou incorreção do raciocínio presente na argumentação vai depender do tipo de argumentação que estamos analisando. Se é da forma dedutiva ou indutiva. Os argumentos dedutivos serão válidos ou inválidos, já os indutivos têm grau de força.

Os argumentos do tipo dedutivo, e somente eles, serão classificados em **válidos** ou **inválidos**. Essa classificação depende somente da forma lógica do argumento, que é sua representação simbólica, e não do conteúdo presente nas premissas e na conclusão. Esses argumentos fazem parte de um sistema formal, por isso existem diversas técnicas que podem ser utilizadas para a análise precisa de validade dos argumentos dedutivos. O resultado que iremos apresentar, por meio do teorema 6.1, da validade, é que estes argumentos serão válidos somente se for impossível, do ponto de vista lógico, que a conclusão seja falsa, sempre que considerarmos as premissas verdadeiras, caso contrário, será inválido.

A análise de validade dos argumentos dedutivos irá nos conduzir a um resultado mutuamente excludente: Ou o argumento é válido ou ele é totalmente inválido, sem meio termo ou qualquer gradação de valor.

Outro aspecto, é que a avaliação, nesse sistema formal, independe da veracidade ou falsidade do conteúdo das afirmações presentes nas premissas e na conclusão dos argumentos; independe da realidade dos fatos na vida cotidiana, porque só depende da forma. É possível termos um argumento dedutivo válido, do ponto de vista lógico, mesmo que o conteúdo das proposições presentes nas premissas e/ou na conclusão seja falso, bem como é possível termos um argumento inválido, formado por premissas e conclusões verdadeiras. Veja os exemplos:

Exemplo 6.9. O argumento a seguir, proposto pela banca CESPE/UnB em 2004, no concurso da Polícia Federal é válido, porque sua forma é correta, não obstante as proposições categóricas componentes serem todas falsas: “Todo cachorro é verde, e tudo que é verde é vegetal, logo todo cachorro é vegetal”.

Exemplo 6.10. O argumento a seguir é inválido, não obstante as proposições componentes serem todas verdadeiras, porque a sua forma lógica é inadequada: “Todo homem é mortal. Todo mamífero é mortal. Logo, todo homem é mamífero”.

Os métodos que serão apresentados para a análise de validade dos argumentos dedutivos serão de dois tipos:

- **Semânticos**: São aqueles baseados em interpretações; por exemplo, o método das tabelas-verdade, o do cálculo proposicional e os diagramas lógicos.
- **Sintáticos**: São aqueles baseados em regras de inferências e equivalências, como o método inferencial e o da redução ao absurdo.

No campo da lógica informal (ou lógica material), típica nos argumentos indutivos (ou informais), a aplicação do raciocínio está mais voltada para as problemáticas da vida cotidiana e suas realidades, tais como na filosofia, política, religião, arte, medicina, etc. Aqui, o interesse maior é o conteúdo e a natureza da matéria tratada nas premissas e na conclusão. Nos argumentos indutivos, a conclusão não é necessariamente verdadeira, mas apenas provável. Nesse sentido, os argumentos indutivos não serão classificados como válidos ou inválidos, mas a eles se atribui um grau de força da conclusão, dependendo das premissas estabelecidas. A análise crítica desses argumentos irá depender das premissas serem de fato verdadeiras, dependerá do grau de conhecimento que os interlocutores possuem, na matéria tratada, pode depender da maturidade intelectual de cada um, entre outros aspectos que serão discutidos no tópico da análise indutiva. Veja o que diz Salmon (2010):

> [...] a correção dedutiva (conhecida como validade...) é uma questão de tudo-ou-nada. Um argumento ou se qualifica totalmente como dedução correta ou fracassa completamente: não existe uma gradação de validade dedutiva. As premissas sustentam completamente a conclusão ou não a sustentam. Em contrapartida os argumentos indutivos corretos admitem graus de força, dependendo do montante de sustentação que as premissas fornecem à conclusão (SALMON, 2010, p. 8)

Observe o exemplo abaixo, de um argumento indutivo, cuja conclusão se deu num processo de generalização, de casos particulares para uma conclusão generalizada, mas que é classificado como fraco: Falácia[14] da estatística insuficiente.

Exemplo 6.11. Um argumento indutivamente fraco: A padaria do seu Joaquim abriu às 10:00h, neste domingo. O mercadinho da dona Maria também abriu às 10:00h. Portanto, o comércio em Catalão, aos domingos, só abre às 10:00h.

Veja como novas premissas podem ser inseridas na argumentação e alterar a força do argumento: Suponha, no exemplo 6.11, que uma nova premissa seja: "O prefeito de Catalão sancionou a seguinte lei municipal: fica determinado que, aos domingos, em Catalão/GO, o comércio em toda a cidade só pode abrir após as 10:00h.". Nesse caso, teríamos boas evidências para classificar o argumento como indutivamente forte.

Veja o que diz Copi (1978), acerca da análise de argumentos indutivos:

> Um raciocínio indutivo, por outro lado, envolve a pretensão, não de que suas premissas proporcionem provas convincentes da verdade de sua conclusão, mas de que somente forneçam algumas provas disso. Os argumentos indutivos não são válidos nem inválidos no sentido em que estes termos se

[14] O temo Falácia, do latim *Cavillatio*, traduzido do grego *Sophisma,* é utilizado para classificar um tipo de argumento que é criado com o propósito de enganar o leitor. Nos argumentos dedutivos, formais, é utilizado para denotar argumentos inválidos. Nos argumentos informais, indutivos, é uma tipificação para raciocínios logicamente fracos ou incorretos.

> aplicam aos argumentos dedutivos. Os raciocínios indutivos podem, é claro, ser avaliados como melhores ou piores, segundo o grau de verossimilhança ou probabilidade que as premissas confiram às respectivas conclusões (COPI, 1978, p. 35).

6.7. A Efetividade da Argumentação

Por fim, a última fase na análise do argumento é a efetividade, que diz respeito ao propósito do argumento. No cotidiano das pessoas, principalmente na vida profissional, não é suficiente dizer que o argumento é dedutivamente válido ou é indutivamente forte, é preciso verificar se os objetivos e metas foram alcançados. Por exemplo, quando um analista financeiro recomenda a um cliente a implementação de um projeto de investimento A, em detrimento de um projeto B, com o argumento de que o projeto A possibilitará, com base na taxa de atratividade de mercado, um ganho de capital superior, é preciso verificar, se de fato, o resultado, após a implementação do projeto foi o esperado. Veja o que ensina Cabrera (2017):

> O argumento pode ter passado com sucesso o passo 5 [análise crítica de correção] e ser considerado um bom argumento e, não obstante isso, não ter conseguido alcançar o propósito que fora estabelecido[...] assim como não afetar ao público-alvo. [...] Se isso não for atingido, o argumento fracassou, mesmo sendo um bom argumento segundo os critérios (CABRERA, 2017, p. 151).

Serão apresentadas, a seguir, as técnicas de análise de validade para os argumentos dedutivos, com a consequente resolução de questões sobre o assunto.

6.8. Os Argumentos Dedutivos

Os argumentos formais, chamados de dedutivos, são aqueles construídos dentro dos parâmetros da lógica clássica e formal de Frege, ou seja, as premissas e a conclusão possuem forma lógica, podendo ser representadas simbolicamente através dos operadores lógicos.

Um aspecto importante da análise lógica desse tipo de argumento é que não importa o conteúdo das proposições componentes da argumentação, mas apenas a forma lógica, ou seja, a sua representação simbólica. Se uma forma é válida, qualquer argumento lógico que possua essa mesma forma é analogamente válido. Caso uma forma seja inválida, qualquer argumentação com essa forma será igualmente inválida.

Observe os exemplos abaixo em que os argumentos 1 e 2, a menos das variáveis, têm a mesma forma lógica, mas conteúdos diferentes. P_1 e P_2 são as premissas e P_3 é a conclusão dos argumentos.

Argumento 1: Se chove, então faz frio. Não chove. Logo, não faz frio.

Pode-se representar esse argumento da seguinte forma simbólica:

$$Premissas \begin{cases} P_1: Se \ \underbrace{chove}_{A}, então \ \underbrace{faz\ frio}_{B}. \\ P_2: \underbrace{Não\ chove}_{\neg A}. \end{cases}$$

$$\text{C}onclusão \ \{P_3: \underbrace{Não\ Faz\ frio.}_{\neg B}$$

$P_1: A \rightarrow B \qquad \Delta$

$P_2: \neg A \qquad \Delta$

$\therefore P_3: \neg B$

Argumento 2: Se leio, então compreendo. Não leio. Portanto, não compreendo.

Pode-se representar esse argumento da seguinte forma simbólica:

$$Premissas \begin{cases} P_1: Se \ \underbrace{leio}_{P}, então \ \underbrace{compreendo}_{Q}. \\ P_2: \underbrace{Não\ leio}_{\neg P}. \end{cases}$$

$$\text{C}onclusão \ \{P_3: \underbrace{Não\ compreendo}_{\neg Q}$$

$P_1: P \rightarrow Q \qquad \Delta$

$P_2: \neg P \qquad \Delta$

$\therefore P_3: \neg Q$

6.8.1. Forma Lógica dos Argumentos Dedutivos

A forma lógica de um argumento dedutivo é a representação simbólica das premissas e da conclusão, através da linguagem lógica. Nada mais é que uma tradução da linguagem corrente para a linguagem simbólica da lógica. Da definição 6.1 de argumento, a sequência finita $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1} \therefore P_n$ será utilizada para representar as proposições, em que as $n - 1$ primeiras proposições representarão as premissas (componentes da base Δ de conhecimento) e a n-ésima e última será a conclusão (tese). O passo a passo é o seguinte:

- Deve-se identificar quais são as premissas e quem é a conclusão da argumentação.
- Se as premissas e a conclusão forem fórmulas lógicas, identifique os conectivos lógicos utilizados nessas sentenças.
- Atribua, a cada proposição atômica, as variáveis proposicionais $A, B, C, \cdots, P, Q, R, \cdots$ e suas respectivas negações, se houver.
- Por fim, iremos escrever cada premissa e a conclusão em sua fórmula lógica adequada, com os respectivos símbolos e variáveis escolhidas, em um dos seguintes modos: linha ou coluna. O símbolo ∴ significa "logo" ou "de onde se deduz":

  Em linha:

  $$\underbrace{P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}}_{Premissas} \quad \therefore \quad \underbrace{P_n}_{conclusão}$$

  Em coluna:

  $$\left.\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{array}\right\} Premissas \text{ (base } \Delta\text{)}$$
  $$\overline{\therefore P_n \;\} conclusão}$$

Exemplo 6.12. Represente simbolicamente o argumento: Se chove, então faz frio. Não chove. Logo, não faz frio.

Solução. Temos duas premissas e uma conclusão: Sejam P_1 e P_2 as premissas e P_3 será a conclusão.

Esse argumento contém apenas duas variáveis proposicionais distintas e as indicaremos por P e Q, onde P será a proposição "**chove**" e Q será a proposição "**faz frio**". Assim, a proposição "**não chove"** será $\neg P$ (a negação de P) e "**não faz frio"** será $\neg Q$ (a negação de Q).

P_1: Se $\underbrace{chove}_{P}$, então $\underbrace{faz\ frio}_{Q}$.

P_2: $\underbrace{Não\ chove}_{\neg P}$.

$\therefore P_3$: $\underbrace{Não\ faz\ frio}_{\neg Q}$

Podemos representar o argumento em linha ou coluna: A premissa P_1 é uma condicional lógica e as demais proposições são básicas:

Representando em linha, teríamos: $P \to Q, \neg P \therefore \neg Q$

Representando em coluna, teríamos:

- $P_1: P \to Q$ Δ
- $P_2: \neg P$ Δ

\-------------

$\therefore$ $P_3: \neg Q$

Exemplo 6.13. Represente simbolicamente a argumentação abaixo, de uma questão da banca CESPE/UnB (2007).

- Se estudo, obtenho boas notas.
- Se me alimento bem, me sinto disposto.
- Ontem estudei e não me senti disposto.
- Logo, obterei boas notas, mas não me alimentei bem.

Solução. Temos três premissas e uma conclusão. Sejam P_1, P_2 e P_3 as premissas e P_4 será a conclusão. O argumento apresenta quatro variáveis proposicionais distintas, que indicaremos assim: A: estudo; B: obtenho boas notas; C: me alimento bem e D: me sinto disposto.

P_1: Se $\underbrace{estudo}_{A}$, $\underbrace{obtenho\ boas\ notas}_{B}$. (“Se” é indicador de condicional)

P_2: Se $\underbrace{me\ alimento\ bem}_{C}$, $\underbrace{me\ sinto\ disposto}_{D}$. (“Se” é indicador de condicional)

P_3: $\underbrace{Ontem\ estudei}_{A}$ e $\underbrace{não\ me\ senti\ disposto}_{\neg D}$. (“e” é indicador de conjunção)

$\therefore P_4$: $\underbrace{Obterei\ boas\ notas}_{B}$, mas $\underbrace{não\ me\ alimentei\ bem}_{\neg C}$. (“mas” é indicador de conjunção).

A representação poderia ser feita em linha ou coluna, conforme abaixo:

Em linha: $A \to B$, $C \to D$, $A \wedge (\neg D) \therefore B \wedge (\neg C)$

Em coluna

$P_1: A \to B$ Δ
$P_2: C \to D$ Δ
$P_3: A \wedge (\neg D)$ Δ

$\therefore P_4: B \wedge (\neg C)$

6.8.2. Validade dos Argumentos Dedutivos

Definição 6.2. Um argumento dedutivo $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1} \therefore P_n$ é válido se e somente se a conclusão for necessariamente verdadeira, sempre que as premissas forem consideradas verdadeiras.

Uma consequência dessa definição é que os argumentos dedutivos, formados pela sequência de proposições $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n$, em que as $n-1$ primeiras proposições representam as premissas e a n-ésima e última proposição é a conclusão (tese), são válidos, se a conclusão for obrigatoriamente verdadeira, sempre que as premissas forem consideradas verdadeiras. Para que um argumento dedutivo seja válido deve-se provar que é **impossível** que a **conclusão** fique **falsa**, sempre que considerarmos as premissas verdadeiras. A conclusão deve ser uma consequência lógica das premissas, de tal modo que qualquer circunstância que torne as premissas verdadeiras, acarretará que a conclusão seja verdadeira. Mortari (2001, p. 19) dá a seguinte definição: “Um argumento é válido se qualquer circunstância que torna suas premissas verdadeiras faz com que sua conclusão seja automaticamente verdadeira”.

Apresentamos o seguinte teorema, da validade:

Teorema 6.1. Um argumento $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1} \therefore P_n$ é válido se e somente se a condicional associada $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \to P_n$ for tautológica.

Demonstração. Com efeito, se o argumento é válido, por definição, a conclusão P_n é necessariamente verdadeira. Como as premissas $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ são verdadeiras, por hipótese, temos que a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \to P_n$ é tautológica, da forma $(\mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \wedge \cdots \wedge \mathcal{V}) \to \mathcal{V} = \mathcal{V}$. Reciprocamente, se a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \to P_n$, associada ao argumento, é tautológica, não ocorre $\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ em sua tabela-verdade.

Como as premissas são $\mathcal{V}$, por hipótese, a conclusão terá de ser obrigatoriamente $\mathcal{V}$, o que acarreta a validade do argumento. ■

Uma consequência do teorema acima é que a validade de um argumento dedutivo está condicionada à sua forma lógica e não ao seu conteúdo. Assim, há argumentos válidos mesmo que alguma (ou todas) as suas premissas e a conclusão sejam falsas, bem como há argumentos inválidos mesmo que todas as suas premissas e a conclusão sejam verdadeiras. Veja o que diz Alencar Filho (2002):

> A validade de um argumento depende exclusivamente da relação existente entre as premissas e a conclusão. Portanto, afirmar que um dado argumento é **válido** significa afirmar que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa se as premissas são verdadeiras (ALENCAR FILHO, 2002, p. 88).

Veja os dizeres de Salmon (2010, p. 11): "A validade dos argumentos dedutivos é determinada pela forma lógica e não pelo conteúdo dos enunciados que os constituem" e, ainda, "a Lógica ocupa-se da correção dos argumentos e não da verdade ou falsidade de premissas ou conclusões".

Outra consequência do teorema é que a condicional associada ao argumento estabelece uma implicação lógica da conjunção das premissas na conclusão, do tipo $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \Rightarrow P_n$. Ou seja, não se admite a forma $\mathcal{V} \to \mathcal{F} = \mathcal{F}$ em nenhuma linha da tabela-verdade dessa condicional.

Pelo exposto, destacam-se alguns aspectos importantes que deverão ser observados na análise dos argumentos dedutivos:

- Todas as premissas serão consideradas verdadeiras, <u>por hipótese</u>. As premissas são estabelecidas pelo pesquisador, cientista, autor do discurso, assim, na análise dedutiva, não é função do lógico questionar as premissas, mas analisar se estas são de fato base de sustentação para a conclusão.
- Conclusão falsa é incompatível com premissas verdadeiras, nos argumentos válidos. De fato, como as premissas são $\mathcal{V}$ por hipótese, a antecedente da condicional associada será sempre $\mathcal{V}$, pois é uma conjunção e esse conectivo é $\mathcal{V}$ caso todas as componentes sejam $\mathcal{V}$. A análise da condicional, agora, dependerá da conclusão P_n. Se $P_n = \mathcal{F}$, teremos para a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \to P_n$ a forma $(\mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \cdots \wedge \mathcal{V}) \to \mathcal{F} = \mathcal{F}$, que não é tautológica, o que

acarreta invalidade. Se $P_n = \mathcal{V}$, a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n$ é da forma $(\mathcal{V} \wedge \mathcal{V} \cdots \wedge \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{V}$, portanto é tautológica e o argumento será válido.

- Os argumentos inválidos poderão ser chamados de sofismas ou falácias.
- Dizer que um argumento é válido não significa dizer que ele é verdadeiro. Validade é atributo dos argumentos, que é um grupo de proposições lógicas. Veracidade é atributo das proposições em particular. Não é adequado dizer que um argumento dedutivo é verdadeiro ou falso. Deve-se dizer válido ou inválido (falácia).

A seguir, serão apresentadas algumas técnicas de análise de validade para argumentos dedutivos.

6.8.3. Análise de Validade por Tabelas-Verdade

A utilização de tabelas-verdade é uma das principais ferramentas para a avaliação de validade dos argumentos. Uma limitação para a utilização dessa técnica é o número de linhas da tabela, que cresce exponencialmente com a quantidade de variáveis proposicionais, atômicas, presentes na argumentação.

O objetivo é lançar a condicional associada ao argumento, $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n$ na tabela-verdade e verificar se esta é tautológica. Em caso afirmativo, o teorema 6.1 garantirá a validade do argumento.

A sequência de passos a seguir indica como utilizar essa técnica:

- **Passo 1:** Faça a representação simbólica do argumento (forma).
- **Passo 2:** Represente cada premissa e a conclusão na tabela-verdade, com os possíveis valores lógicos.
- **Passo 3:** Lance na tabela a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n$
- **Passo 4:** Decisão: Se a condicional associada for tautológica, o argumento será válido. Caso contrário, o argumento será inválido.

Exemplo 6.14. Verifique, através da tabela-verdade, a validade do argumento: Se Paulo é paulista, então Paulo é brasileiro. Paulo é paulista. Logo, Paulo é brasileiro.

Solução. Deve-se fazer a tabela-verdade, executando o passo a passo indicado. Primeiramente, deve-se dar forma lógica ao argumento. Seja P a proposição "Paulo é paulista" e Q a proposição "Paulo é brasileiro". Temos duas premissas, P_1 e P_2, e a conclusão P_3. A forma será:

1º) Forma do argumento:

- $P_1: P \rightarrow Q \qquad \Delta$
- $P_2: P \qquad \Delta$

$\therefore \quad P_3: Q$

2º) O passo seguinte é lançar na tabela uma coluna para cada premissa e para a conclusão, com os respectivos valores lógicos. A tabela 27 mostra esse resultado.

Tabela 27. Tabela base para o argumento

P_2 $\boldsymbol{P}$	P_3 $\boldsymbol{Q}$	P_1 $\boldsymbol{P \rightarrow Q}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$

Fonte: O autor.

3º) Façamos a coluna para a condicional associada ao argumento, $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_3$, cuja forma lógica será a forma $[(P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow Q$, apresentada na tabela 28.

Tabela 28. Tabela com a condicional associada ao argumento

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P \rightarrow Q}$	$\boldsymbol{(P \rightarrow Q) \wedge P}$	$\boldsymbol{[(P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow Q}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

Fonte: O autor.

4º) Decisão: O argumento é **válido**, pois a condicional associada, com as valorações destacadas em vermelho, é tautológica.

Exemplo 6.15. Faça a análise de validade do argumento: Se Paulo é paulista, então Paulo é brasileiro. Paulo não é paulista. Logo, Paulo não é brasileiro.

Solução. Agora, de forma mais imediata, lançaremos uma tabela com todas as colunas. A tabela 29 é a tabela já com a condicional associada e preenchida, para o argumento, cuja forma pode ser:

- $P_1: P \rightarrow Q$ Δ
- $P_2: \neg P$ Δ

$\therefore P_3: \neg Q$

Tabela 29. Tabela-verdade do argumento com a condicional associada

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P \rightarrow Q}$	$\boldsymbol{\neg P}$	$\boldsymbol{\neg Q}$	$(\boldsymbol{P \rightarrow Q}) \wedge (\boldsymbol{\neg P})$	$[(\boldsymbol{P \rightarrow Q}) \wedge (\boldsymbol{\neg P})] \rightarrow (\boldsymbol{\neg Q})$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\boldsymbol{\mathcal{V}}$

Fonte: O autor.

Decisão: O argumento é inválido, pois a condicional associada, representada na última coluna, não é tautológica ($\mathcal{F}$ na linha 3).

A técnica de análise por tabela pode se tornar exaustiva, dependendo da quantidade de variáveis básicas. No entanto, de forma mais simples, a validade de um argumento pode ser testada através da utilização de tabelas-verdade, sem a necessidade de construção da coluna da condicional associada, mas somente das premissas e da conclusão. Veja o esquema de construção e decisão:

- Constrói-se a tabela-verdade, destacando-se uma coluna para cada premissa e outra para a conclusão;
- Deve-se destacar cada linha dessa tabela, em que as premissas são todas verdadeiras.

- Decisão: Se, em todas essas linhas destacadas, o valor lógico relativo à conclusão também for $\mathcal{V}$, o argumento é válido. Se pelo menos uma das linhas de premissas $\mathcal{V}$ apresentar conclusão $\mathcal{F}$, então o argumento será inválido.

Nesse esquema, desconsidera-se, para análise da validade do argumento, as linhas que apresentam valorações falsas para as premissas. Tal fato se justifica porque, nessas linhas, não há possibilidade de a condicional associada ao argumento ser falsa, pois a conjunção das premissas, $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}$, será falsa se alguma premissa for falsa, o que torna a condicional associada ao argumento na forma $\mathcal{F} \rightarrow P_n$, que será sempre verdadeira, independentemente do valor lógico da conclusão. Com efeito, a condicional associada, $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n,$ tem risco de não ser tautológica, somente nas linhas da tabela em que as premissas são todas verdadeiras, pois a conjunção das premissas será $\mathcal{V}$, nesses casos, e a condicional se reduzirá à forma $\mathcal{V} \rightarrow P_n$, cujo resultado lógico depende da conclusão P_n: Se a conclusão for $\mathcal{V}$ em todas as linhas destacadas, a condicional será tautológica, o que é garantia de validade, pelo teorema 6.1.

Exemplo 6.16. Considere o seguinte argumento, extraído de uma prova elaborada pelo CESPE/UnB: Se lógica é fácil, então Sócrates foi mico de circo. Lógica não é fácil. Portanto, Sócrates não foi mico de circo. Este argumento é válido? Vejamos:

Solução. Façamos, primeiramente a sua representação simbólica (forma), em que P é a proposição “lógica é fácil” e Q é a proposição “Sócrates foi mico de circo”.

- $P_1: P \rightarrow Q$ $\quad \Delta$
- $P_2: \neg P$ $\quad \Delta$

$\therefore \quad P_3: \neg Q$

Representaremos, na tabela, uma coluna para cada premissa e para a conclusão. A tabela 30 mostra as colunas preenchidas. A seguir, foram destacadas, em vermelho, as linhas em que as premissas P_1 e P_2 são todas verdadeiras. Tal fato ocorreu nas linhas L3 e L4, mostradas na tabela 30.

Tabela 30. Tabela com esquema reduzido para a análise de validade

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg Q$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Fonte: O autor.

Observe que nas linhas L3 e L4 da tabela 30, as premissas são todas verdadeiras, mas na linha L3, a conclusão é falsa. Portanto, o argumento é inválido.

Exemplo 6.17. Vamos modificar o argumento anterior, invertendo a segunda premissa com a conclusão, modificando a sua forma: Se lógica é fácil, então Sócrates foi mico de circo. Sócrates não foi mico de circo. Portanto, lógica não é fácil. Este argumento é válido? Vejamos:

Solução. Façamos, primeiramente, a sua representação simbólica (forma), onde P é a proposição "lógica é fácil" e Q é a proposição "Sócrates foi mico de circo".

- $P_1: P \to Q$ $\quad\Delta$
- $P_2: \neg Q$ $\quad\Delta$

$\therefore P_3: \neg P$

Representaremos uma coluna para cada premissa e para a conclusão e devemos destacar as linhas em que as premissas são todas verdadeiras. A mesma tabela 30, do exemplo 6.16, pode ser utilizada para a análise, colocando-se as premissas lado a lado, para facilitar a visualização, ficará assim:

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Fonte: O autor.

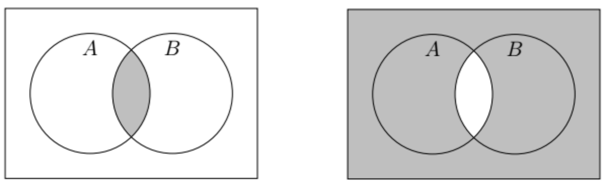
Observe que somente na linha L4 as premissas são todas elas verdadeiras e, nessa linha, a conclusão também é verdadeira. Concluímos que o argumento é **válido**.

6.8.4. Análise de Validade por Diagramas de Venn

No capítulo 3, foi visto que é possível estabelecer uma correlação entre a álgebra de conjuntos e a álgebra proposicional.

Nos argumentos lógicos, as premissas e a conclusão estabelecem uma relação entre as variáveis proposicionais, básicas, que é evidenciada pelos conectivos lógicos utilizados. Considerando que cada conectivo está associado a uma operação entre conjuntos, pode-se representar esta relação, entre as variáveis proposicionais, através de diagramas de Venn. Por exemplo, se uma premissa da argumentação é formada por uma conjunção do tipo $A \wedge B$, sendo verdadeira, por hipótese, devemos de imediato concluir que tanto A quanto B são proposições verdadeiras, conforme exigência desse conectivo. Nos diagramas de Venn, a área de aceitação para esta premissa seria indicada pelo conjunto cujos objetos satisfazem a condição A e a condição B, ou seja, é o setor da interseção, $A \cap B$. Se é possível delimitar a área de aceitação para a premissa, pode-se delimitar a sua área de rejeição, que será indicada pela respectiva negação, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$[15], que poderá gerar a área, no diagrama, indicada pelo complementar da interseção, $(A \cap B)^C$. A figura 11 ilustra a construção da área de aceitação e de rejeição de uma premissa formada por uma conjunção do tipo $A \wedge B$.

Figura 11. Diagramação dos setores de aceitação e rejeição.



Aceitação: $A \cap B$ Rejeição: $(A \cap B)^C$

Fonte: O autor.

[15] Aqui, foram aplicadas as leis de De Morgan, estudadas no capítulo 4 e que serão de extrema importância aos nossos propósitos nessa seção.

O teorema 6.1 condiciona o critério de validade de um argumento à análise de tautologia da condicional associada: $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n$. Uma condicional do tipo $p \rightarrow q$ pode ser associada a uma operação de inclusão entre conjuntos, $A \subset B$, em que A é o conjunto cujos objetos cumprem a condição p e B é o conjunto cujos objetos cumprem a condição q. Portanto, a partir da condicional associada ao argumento, $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n$, podemos estabelecer uma relação de inclusão entre conjuntos, do tipo $P \subset Q$, em que P é o conjunto cujos objetos comprem a condição imposta por $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}$ e Q é o conjunto cujos objetos cumprem a condição P_n, da conclusão. Quando a condicional associada ao argumento é tautológica, o argumento é válido e a relação de inclusão $P \subset Q$ necessariamente existirá.

Esse resultado nos conduz ao seguinte critério de validade: O argumento dedutivo é válido somente se o conjunto P, formado pelos objetos que cumprem a condição imposta pela conjunção das premissas estiver contido no conjunto Q dos objetos que cumprem a condição imposta pela conclusão. Isso poderá ser verificado através de diagramas de Venn.

O diagrama para o conjunto P, gerado a partir da conjunção das premissas, será resultado de uma operação de interseção entre conjuntos. Ocorre que, dependendo da quantidade de variáveis proposicionais do argumento e dos conectivos presentes, essa operação pode não ser tão simples de visualização, nos diagramas de Venn. Buscando facilitar essa construção, é possível utilizar um artifício comum em algumas demonstrações matemáticas, que é substituir uma condicional direta por sua equivalente na forma contrapositiva. Pela regra da contrapositiva, a condicional $p \rightarrow q$ é equivalente a $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$. Por analogia a essa regra, a relação de inclusão $P \subset Q$ será estabelecida entre os conjuntos complementares de P e de Q, ou seja $Q^c \subset P^c$. O conjunto P^c é o complementar de uma operação de interseção e, pelas propriedades dos conjuntos, equivale a fazer uma união dos complementares dos conjuntos componentes de P. Em tese, os setores da união de complementares são mais simples de serem identificados e hachurados, nos diagramas. Observe o passo a passo da construção da contrapositiva da condicional associada ao argumento:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n \Leftrightarrow (\neg P_n) \rightarrow \neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \Leftrightarrow$$

$(\neg P_n) \rightarrow [(\neg P_1) \vee (\neg P_2) \vee \cdots \vee (\neg P_{n-1})]$.

A forma contrapositiva nos permite a seguinte afirmação: O argumento é válido se o setor do diagrama de conjuntos, delimitado através da negação da conclusão, $\neg P_n$, estiver contido no setor delimitado pela união das negações de cada uma de suas premissas. Observe que a operação de disjunção, indicada na contrapositiva, $[(\neg P_1) \vee (\neg P_2) \vee \cdots \vee \neg(P_{n-1})]$, está associada à operação de união, na teoria de conjuntos, e a negação está associada à operação complementar. Desse modo, ao resultado dessa união dos complementares, chamaremos **área de aceitação** do argumento. O conjunto formado pela negação da conclusão irá formar o que chamaremos de **área crítica**. Esse resultado será aplicado conforme figura 12:

Figura 12: Esquema de validação por diagramas

$$\boxed{\begin{array}{c} Argumento\ válido\ \leftrightarrow\ área\ crítica\ \subseteq\ área\ de\ aceitação \\ Argumento\ inválido\ \leftrightarrow\ área\ crítica\ \nsubseteq\ área\ de\ aceitação \end{array}}$$

Fonte: O autor.

Para a análise de validade, por diagramação, primeiramente deve-se dar forma lógica ao argumento e representar as respectivas negações de cada premissa e da conclusão. O teorema 5.2 nos garante que as negações de cada premissa e da conclusão poderão ser expressas numa forma restrita, cujos conectivos pertencem ao conjunto completo $\{\neg,\ \wedge,\ \vee\}$, o que será feito.

Após, deve-se desenhar os diagramas dos conjuntos, um para cada variável distinta presente na argumentação, e hachurar os setores indicados pelas negações das premissas. Aqui, iremos correlacionar o conjunto lógico completo $\{\neg,\ \wedge,\ \vee\}$, no qual as negações das premissas foram representadas, com as respectivas operações de conjuntos {complementar, interseção, união}, respectivamente. O resultado final será a área de aceitação para análise de validade da argumentação.

Finalmente, deve-se verificar se o conjunto delimitado pela negação da conclusão está contido no conjunto representado pela área de aceitação. Em caso afirmativo, o argumento é válido. Se a inclusão não se verificar, o argumento é inválido.

Para ilustrar esses passos iniciais, veja o exemplo abaixo:

Exemplo 6.18. Construa as áreas de aceitação e crítica para o seguinte argumento: Se leio, então compreendo. Não compreendo. Portanto, não leio. Teste sua validade por meio da técnica de diagramas de conjuntos.

Solução. Primeiramente, vamos representar a forma do argumento e lançar em uma tabela as respectivas negações das premissas e da conclusão, com as correspondentes operações com conjuntos. A tabela 31 mostra esse resultado, onde a variável A é a proposição "leio" e B é a proposição "compreendo".

Forma:

$P_1: A \to B \quad \Delta$

$P_2: \neg B \quad \Delta$

$\therefore\ P_3: \neg A$

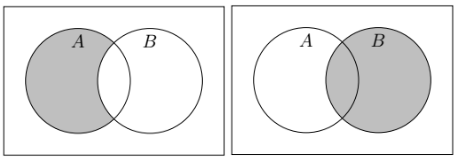
Tabela 31. Tabela auxiliar para a diagramação do argumento

Premissas/Conclusão	**Negações**	**Operação em conjuntos**
$\boldsymbol{P_1: A \to B}$	$\neg P_1: A \wedge (\neg B)$	$A \cap B^c$
$\boldsymbol{P_2: \neg B}$	$\neg P_2: B$	B
$\boldsymbol{P_3: \neg A}$	$\neg P_3: A$	A

Fonte: O autor.

Na tabela 31, os conjuntos indicados na terceira coluna foram obtidos a partir da correspondência com a coluna das negações. Essa coluna indicará os setores a serem hachurados. A área de aceitação da argumentação, colorida em verde, figura 14, será formada pela união de todos os setores hachurados da figura 13. Veja:

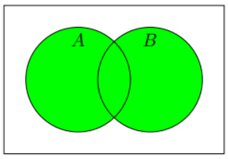
Figura 13. Conjuntos complementares das premissas



$A \cap B^c$ $\qquad$ B

Fonte: O autor.

Figura 14. Área de aceitação: União dos complementares das premissas

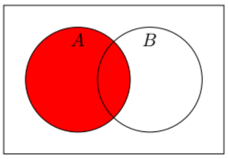


$[A \cap B^c] \cup B$

Fonte: o autor.

Agora, representando o setor para a negação da conclusão: $\neg P_3 \equiv A$, que será a área crítica do argumento, em vermelho, na figura 15, tem-se:

Figura 15. Região crítica



A

Fonte: o autor.

Decisão: A área crítica, figura 15, em vermelho, está contida na área de aceitação, figura 14, em verde. Logo, o argumento é válido.

Exemplo 6.19. (CESPE/UnB-2008/Cargo de Delegado) Uma proposição é uma frase afirmativa que pode ser julgada como verdadeira ou falsa, mas não ambos. Uma dedução lógica é uma sequência de proposições, e é considerada correta quando, partindo-se de proposições verdadeiras, denominadas premissas, obtêm-se proposições sempre verdadeiras, sendo a última delas denominada conclusão. Considerando essas informações, julgue o item, a respeito de proposições.

Considere a seguinte sequência de proposições:

(1) Se o crime foi perfeito, então o criminoso não foi preso.

(2) O criminoso não foi preso.

(3) Portanto, o crime foi perfeito.

Se (1) e (2) são premissas verdadeiras, então a proposição (3), a conclusão, é verdadeira, e a sequência é uma dedução lógica correta.

( ) Certo ( ) Errado

Solução. Primeiramente, deve-se dar forma ao argumento e lançar em uma tabela as respectivas negações das premissas e da conclusão e as correspondentes operações com conjuntos. Sejam as proposições A: o crime foi perfeito; B: O criminoso não foi preso. A tabela 32 ilustra esse resultado, para a seguinte forma:

$P_1: A \to B \quad \Delta$

$P_2: B \quad \Delta$

$\therefore P_3: A$

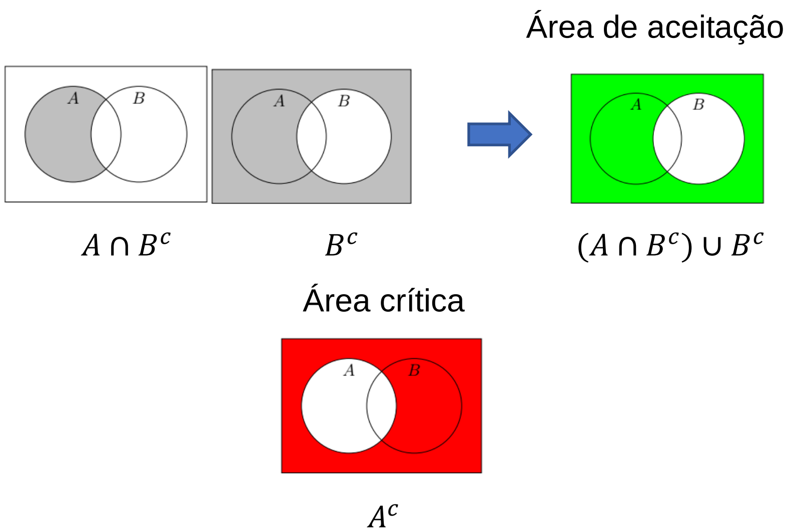
Tabela 32. Tabela auxiliar para a construção dos diagramas

Premissas/Conclusão	Negações	Operação em conjuntos
$\boldsymbol{P_1: A \to B}$	$\neg\boldsymbol{P_1}: A \wedge (\neg B)$	$A \cap B^c$
$\boldsymbol{P_2: B}$	$\neg\boldsymbol{P_2}: \neg\boldsymbol{B}$	B^c
$\boldsymbol{P_3: A}$	$\neg\boldsymbol{P_3}: \neg\boldsymbol{A}$	A^c

Fonte: O autor.

Na tabela 32, os conjuntos indicados na terceira coluna foram obtidos a partir da correspondência com a coluna das negações. Essa coluna indicará os setores a serem hachurados. A área de aceitação da argumentação, colorida em verde, abaixo, será formada pela união de todos os setores hachurados. A área crítica, em vermelho, é o setor para a negação da conclusão: $\neg\boldsymbol{P_3} \equiv \neg A$, que é o conjunto A^c. A figura 16 ilustra a sequência da construção.

Figura 16. Diagramação das regiões de aceitação e crítica



Fonte: O autor.

Decisão: A área crítica, em vermelho, não está contida na área de aceitação. Logo, o argumento não é válido. Julgamento da assertiva: item errado!

Exemplo 6.20. (CESPE/TSE 2007 – adaptada) Considere a sequência de proposições e verifique se o argumento é válido.

P1: Se ontem choveu e estamos em junho, então hoje fará frio.

P2: Ontem choveu e hoje fez frio.

P3: Logo, estamos em junho.

Solução. Primeiramente, daremos forma ao argumento e lançaremos em uma tabela, tabela 33, as respectivas negações das premissas e da conclusão: Sejam as proposições A: ontem choveu; B: estamos em junho e C: hoje fará frio.

Forma:

$P_1: A \wedge B \to C \quad \Delta$

$P_2: A \wedge C \quad \Delta$

$\therefore \overline{P_3: B}$

Tabela 33. Tabela auxiliar para a construção dos diagramas.

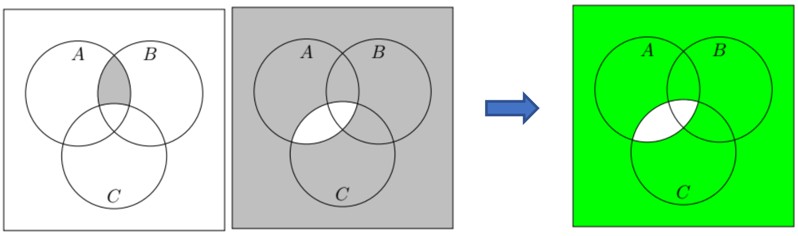
Premissas/Conclusão	Negações	Operação em conjuntos
$\boldsymbol{P_1: A \wedge B \to C}$	$\neg \boldsymbol{P_1}: A \wedge B \wedge (\neg C)$	$A \cap B \cap C^c$
$\boldsymbol{P_2: A \wedge C}$	$\neg \boldsymbol{P_2}: \neg \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{C}$	$A^c \cup C^c$
$\boldsymbol{P_3: B}$	$\neg \boldsymbol{P_3}: \neg \boldsymbol{B}$	B^c

Fonte: O autor.

Existem três conjuntos a considerar. Na tabela auxiliar, tabela 33, os conjuntos indicados na terceira coluna foram obtidos a partir da correspondência com a coluna das negações. Essa coluna indicará os setores a serem hachurados. A área de aceitação da argumentação, colorida em verde, abaixo, será formada pela união de todos os setores hachurados. A área crítica, em vermelho é o setor para a negação da conclusão. A figura 17 ilustra a sequência da construção.

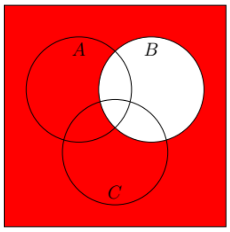
Figura 17. Diagramação das regiões de aceitação e crítica

Área de aceitação



$A \cap B \cap C^c$ $\quad$ $A^c \cup C^c$ $\quad$ $(A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cup C^c)$

Área crítica



B^c

Fonte: O autor.

Decisão: A área crítica, em vermelho, não está contida na área de aceitação (o setor "somente A e B", dado por $A \cap B - C$, na área crítica, não está contido na área de aceitação). Logo, o argumento não é válido.

Exemplo 6.21 (CESPE/UnB-2006-MPTO-Analista). Texto I [...] Uma argumentação é uma sequência finita de k proposições (que podem estar enumeradas) em que as $(k - 1)$ primeiras proposições ou são premissas (hipóteses) ou são colocadas na argumentação por alguma regra de dedução. A k-ésima proposição é a conclusão da argumentação. [...] Com base nas informações do texto I, julgue os itens que se seguem.

É correto afirmar que, simbolizada adequadamente, a argumentação abaixo é válida.

1. Se um casal é feliz, então os parceiros têm objetivos comuns.
2. Se os parceiros têm objetivos comuns, então trabalham no mesmo Ministério Público.
3. Há rompimento se o casal é infeliz.
4. Há rompimento se os parceiros não trabalham no mesmo Ministério Público.

( ) Certo

( ) Errado

Solução. A questão trata de um argumento dedutivo. O texto base indica que a argumentação é uma sequência finita de k proposições, em que as $k - 1$ primeiras são as premissas e a k-ésima é a conclusão. No caso, k = 4 e, assim, as 3 primeiras proposições são as premissas e a 4ª e última é a conclusão. Primeiramente, daremos forma ao argumento e lançaremos em uma tabela as respectivas negações das premissas e da conclusão: Sejam as proposições A: o casal é feliz; B: os parceiros têm objetivos comuns; C: os parceiros trabalham no mesmo Ministério Público e D: há rompimento. Observe a presença de quatro variáveis proposicionais, o que torna mais complexa a solução. Deve-se ter cautela na representação simbólica da 3ª premissa e da conclusão, pois as condicionais não estão na ordem direta. A proposição "Há rompimento se o casal é infeliz" será representada por "Se o casal é infeliz (causa), então há rompimento (consequência)"; analogamente, a proposição "Há rompimento se os parceiros não trabalham no mesmo Ministério Público" será representada na forma "Se os parceiros não trabalham no mesmo Ministério Público (causa), então há rompimento (consequência)". A forma simbólica do argumento é dada a seguir e a tabela auxiliar para a construção dos setores é dada na tabela 34.

Forma

$P_1: A \rightarrow B \quad \Delta$

$P_2: B \rightarrow C \quad \Delta$

$P_3: (\neg A) \rightarrow D \quad \Delta$

$\therefore P_4: (\neg C) \rightarrow D$

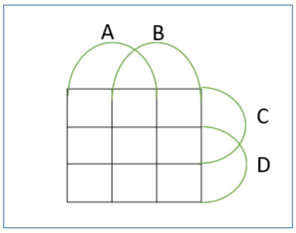
Tabela 34. Tabela auxiliar para a construção dos diagramas.

Premissas/Conclusão	**Negações**	**Operação em conjuntos**
$\boldsymbol{P_1: A \rightarrow B}$	$\neg \boldsymbol{P_1}: A \wedge (\neg B)$	$A \cap B^c$
$\boldsymbol{P_2: B \rightarrow C}$	$\neg \boldsymbol{P_2: B \wedge \neg C}$	$B \cap C^c$
$\boldsymbol{P_3}: (\neg \boldsymbol{A}) \rightarrow \boldsymbol{D}$	$\neg \boldsymbol{P_3: \neg A \wedge \neg D}$	$A^c \cap D^c$
$\boldsymbol{P_4}: (\neg \boldsymbol{C}) \rightarrow \boldsymbol{D}$	$\neg \boldsymbol{P_4: \neg C \wedge \neg D}$	$C^c \cap D^c$

Fonte: O autor.

O diagrama base para 4 variáveis deve apresentar $2^4 = 16$ setores que representam todas as operações possíveis com 4 conjuntos. O modelo abaixo, figura 18, será utilizado:

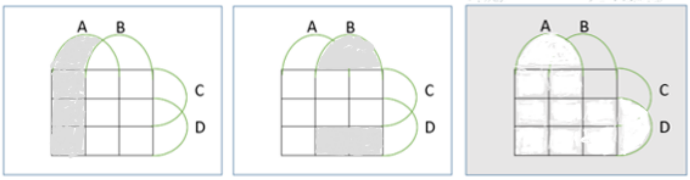
Figura 18. Diagrama para 4 variáveis



Fonte: o autor

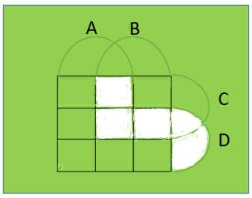
Na tabela 34, os conjuntos indicados na terceira coluna foram obtidos a partir da correspondência com a coluna das negações. Essa coluna indicará os setores a serem hachurados. A área de aceitação da argumentação, colorida em verde, abaixo, será formada pela união de todos os setores hachurados. A área crítica, em vermelho, é o setor para a negação da conclusão, $\neg \boldsymbol{P_4} \equiv \neg \boldsymbol{C} \wedge \neg \boldsymbol{D}$, que é o conjunto $C^c \cap D^c$. A figura 19 ilustra a sequência de construção das respectivas regiões.

Figura 19. Diagramação das regiões de aceitação e crítica



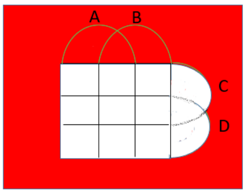
$A \cap B^c$ $\qquad$ $B \cap C^c$ $\qquad$ $A^c \cap D^c$

Área de aceitação



$(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) \cup (A^c \cap D^c)$

Área crítica



$C^c \cap D^c$

Fonte: O autor.

Decisão: A área crítica, em vermelho, está contida na área de aceitação, representada em verde. Logo, o argumento é válido. Gabarito: item certo!

6.8.5. Análise de Validade por Cálculo Proposicional

Os métodos de análise de validade para argumentos, apresentados até aqui, tanto o de tabelas-verdade, quanto o de diagramas de Venn, têm um fator limitante, de ordem prática, que é o número de variáveis proposicionais presentes na argumentação. Lembramos que o número de linhas da tabela pode ser calculado pela exponencial $L(n) = 2^n$. Por exemplo, se um argumento dedutivo apresentar 7 variáveis proposicionais em suas premissas, serão necessárias $L(7) = 2^7 = 128$ linhas para a sua análise, consequentemente teremos um diagrama de 7 conjuntos, com 128 setores disjuntos para avaliarmos, o que é impraticável.

Assim, como alternativa, uma forma de avalição consiste em realizar o cálculo algébrico das variáveis proposicionais, presentes nas premissas, quando este puder ser determinado. É sabido que toda premissa, componente da base Δ de conhecimento, é $\mathcal{V}$, por hipótese. Esse método é efetivamente mais prático se houver, entre essas premissas, um bom ponto de partida para desenvolver o cálculo proposicional. Por exemplo, uma premissa atômica (simples) ou uma premissa cuja fórmula é uma conjunção são ótimos pontos de partida. A premissa atômica, porque seu valor é imediato e a conjunção, porque é verdadeira somente se todas as componentes são verdadeiras. Deve-se evitar, como ponto de partida, as premissas formadas por condicionais ou disjunções, porque esses conectivos apresentam mais de uma possibilidade para as variáveis componentes, quando forem verdadeiros.

Conhecidos os valores lógicos das variáveis, buscaremos calcular o valor lógico da conclusão. Teremos três possibilidades:

I. A conclusão é necessariamente verdadeira, o que acarreta validade do argumento. Nesse caso, a condicional associada é tautológica;
II. A conclusão é falsa, o que acarreta invalidade do argumento, pois é incompatível conclusão falsa com premissas verdadeiras, uma vez que a condicional associada ao argumento é não tautológica.
III. A conclusão é indeterminada, porque depende da valoração de alguma variável que não foi possível calculá-la nas premissas. Nesse caso, o

argumento é inválido porque a conclusão não é necessariamente verdadeira, indicando que a condicional associada é não tautológica.

O passo a passo para executar essa técnica é o que segue:

- **Passo 1**: Atribuir valor $\mathcal{V}$ a cada premissa, lembrando que cada premissa é verdadeira por hipótese.
- **Passo 2**: Escolher um bom ponto de partida e calcular o valor lógico das variáveis presentes nas premissas, se possível.
- **Passo 3**: Calcular o valor lógico da conclusão. Se a conclusão for necessariamente verdadeira, o argumento será válido. Se for falsa ou indeterminada, será inválido.

Vejamos alguns exemplos a seguir.

Exemplo 6.22 (CESPE/UnB – 2008 – Delegado). Uma proposição é uma frase afirmativa que pode ser julgada como verdadeira ou falsa, mas não ambos. Uma dedução lógica é uma sequência de proposições, e é considerada correta quando, partindo-se de proposições verdadeiras, denominadas premissas, obtêm-se proposições sempre verdadeiras, sendo a última delas denominada conclusão. Considerando essas informações, julgue os itens a seguir, a respeito de proposições. O raciocínio de Pedro está correto, ou o julgamento de Paulo foi injusto. O raciocínio de Pedro não está correto. Portanto, se a conclusão for a proposição, o julgamento de Paulo foi injusto, tem-se uma dedução lógica correta.

( ) Certo

( ) Errado

Solução. Primeiramente, deve-se dar forma ao argumento. Sejam as proposições A: o raciocínio de Pedro está correto; B: O julgamento de Paulo foi injusto. A forma ficaria assim:

$P_1: A \vee B$ (afirmação $\mathcal{V}$, por hipótese)

$P_2: \neg A$ (afirmação $\mathcal{V}$, por hipótese)

$\therefore P_3: B$

A premissa $P_2 \equiv \neg A$ será o ponto de partida, porque é uma proposição simples, ou seja, $v(\neg A) = \mathcal{V}$, então $v(A) = \mathcal{F}$. Conhecido o valor de A, deve-se buscar uma premissa que faça referência à proposição A. Tem-se em $P_1: A \vee B$ uma disjunção que é verdadeira, por hipótese. Assim, pelo menos uma das componentes de P_1 tem de ser verdadeira, pois essa é a lógica da disjunção. Como $v(A) = \mathcal{F}$, substituindo em P_1 teremos a forma $P_1: \mathcal{F} \vee B = \mathcal{V} \Rightarrow v(B) = \mathcal{V}$. Agora, calculando o valor lógico da conclusão P_3, que é formada apenas pela variável B, chega-se a $P_3: B = \mathcal{V}$. A conclusão é necessariamente verdadeira, logo o argumento é válido. Gabarito: item certo!

Exemplo 6.23. Verificar se a forma abaixo é válida, através do cálculo proposicional.

$P_1: P \to Q \quad \Delta$

$P_2: \neg Q \quad \Delta$

$\therefore P_3: \neg P$

Solução. Por cálculo proposicional, utilizaremos como ponto de partida a P_2. Os passos da solução são os seguintes:

I. $P_2: \neg Q = \mathcal{V} \Rightarrow v(Q) = \mathcal{F}$.

II. Substituindo o resultado de $v(Q) = \mathcal{F}$ em P_1, deve-se calcular o valor da variável P, para que a condicional fique verdadeira. A única possibilidade é que P seja falsa, pois $\mathcal{F} \to \mathcal{F} = \mathcal{V}$. Se atribuíssemos $\mathcal{V}$ ao valor de P, teríamos $\mathcal{V} \to \mathcal{F} = \mathcal{F}$, o que invalidaria a premissa. Lembre-se que toda premissa deve ser verdadeira, por hipótese. Veja o esquema abaixo:
   - $P_1: P \to \underbrace{Q}_{\mathcal{F}} = \mathcal{V}$

   $\therefore \overline{P = \mathcal{F}}$ (pois a condicional, sendo premissa, deve ser $\mathcal{V}$, por hipótese).

III. Avaliação: O argumento é **válido**, pois a conclusão será necessariamente verdadeira, sempre que considerarmos, por hipótese, as premissas verdadeiras.

Exemplo 6.24. Verificar se a forma abaixo é válida, através do cálculo proposicional.

- $P_1: P \to Q \quad \Delta$
- $P_2: \neg P \quad \Delta$

$\therefore \quad P_3: \neg Q$

Solução. Por cálculo proposicional, utilizaremos como ponto de partida a P_2. Os passos da solução são os seguintes:

I. P_2: $\neg P = \mathcal{V} \Rightarrow v(P) = \mathcal{F}$

II. Substituindo o resultado de $v(P) = \mathcal{F}$ em $P_{1,}$ devemos calcular o valor da variável $Q,$ para que a condicional fique verdadeira:

P_1: $\underbrace{P}_{F} \rightarrow Q = \mathcal{V}$

$\therefore Q = ?$ (indeterminada)

A variável Q é indeterminada, pois quando a proposição antecedente (P) de uma condicional é falsa, a condicional resulta verdadeira, independentemente do valor da consequente (Q): Se $Q = \mathcal{V}$, $P_1 \equiv F \rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{V}$ e se $Q = F$, teríamos $P_1 \equiv F \rightarrow F = \mathcal{V}$. A condicional fica verdadeira em qualquer dessas hipóteses para Q.

III. Cálculo da conclusão: $v(\neg Q)$ **é indeterminada.**

IV. Avaliação: O argumento é **inválido**, pois a conclusão pode ser falsa.

Exemplo 6.25 (CESPE/UnB – 2013 – PCDF- Agente de Polícia).

P1: Se a impunidade é alta, então a criminalidade é alta.

P2: A impunidade é alta ou a justiça é eficaz.

P3: Se a justiça é eficaz, então não há criminosos livres.

P4: Há criminosos livres.

C: Portanto a criminalidade é alta.

Considerando o argumento apresentado acima, em que P1, P2, P3 e P4 são as premissas e C, a conclusão, julgue os itens subsequentes.

(1) O argumento apresentado é um argumento válido.

(2) A negação da proposição P1 pode ser escrita como “Se a impunidade não é alta, então a criminalidade não é alta.”

Solução. Primeiramente, deve-se dar forma ao argumento. Há quatro premissas, P_1, P_2, P_3 e P_4, todas verdadeiras por hipótese, e uma conclusão C que chamaremos P_5. Sejam as proposições A: a impunidade é alta; B: a criminalidade é alta; C: a justiça é eficaz; D: não há criminosos livres (nota: aqui, poderíamos chamar D a proposição “há criminosos livres”, o que resultaria $\neg D \equiv$ não há criminosos livres, mas essa inversão não iria alterar o resultado final da análise, apenas os nomes na forma do argumento).

Forma:

- $P_1: A \rightarrow B \quad \Delta$
- $P_2: A \vee C \quad \Delta$
- $P_3: C \rightarrow D \quad \Delta$
- $P_4: \neg D \quad \Delta$

$\therefore P_5: B$

Agora, aplicando a técnica do cálculo proposicional, deve-se calcular, se possível, o valor verdade de cada variável componente das premissas, com o objetivo de determinar a variável B da conclusão. Lembrando que cada premissa é sempre verdadeira, por hipótese. A $P_4: \neg D$ será o ponto de partida porque é uma premissa básica. Os passos da resolução são os seguintes:

I. De $P_4: \neg D = \mathcal{V} \Rightarrow v(D) = \boldsymbol{\mathcal{F}}$

II. Substituindo o valor de D em P_3, teremos:

$$P_3: \left[C \rightarrow \underbrace{D}_{\mathcal{F}}\right] = \mathcal{V} \Rightarrow v(C) = \boldsymbol{\mathcal{F}}$$

A conclusão de que $v(C) = \boldsymbol{\mathcal{F}}$ é uma consequência de a fórmula condicional, figurando como premissa, não poder assumir a forma geral $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$, que é falsa para esse conectivo. Como a consequente D é falsa, a proposição antecedente C da condicional é necessariamente falsa, para que a condicional seja verdadeira.

III. Substituindo o valor de C em P_2, resulta:

$$P_2: \left[A \vee \underbrace{C}_{\mathcal{F}}\right] = \mathcal{V} \Rightarrow v(A) = \mathcal{V}$$

Concluiu-se que a proposição A é verdadeira, porque a disjunção é verdadeira somente se ao menos uma de suas componentes for verdadeira. Como $v(C) = \boldsymbol{\mathcal{F}}$, $v(A)$ tem de ser $\mathcal{V}$.

IV. Substituindo o valor de A em P_1, teremos:

$$P_1: \left[\underbrace{A}_{\mathcal{V}} \rightarrow B\right] = \mathcal{V} \Rightarrow v(B) = \mathcal{V}$$

Conclui-se que o valor de B é $\mathcal{V}$, porque a premissa condicional não pode ser do tipo $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$, que seria $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

V. Decisão: Devemos calcular o valor lógico da conclusão $P_5 : B$. Ora, o cálculo é simples, porque a conclusão apresenta apenas a variável B, que é verdadeira. $v(B) = \mathcal{V}$ e o argumento é **válido**. Gabarito: item (1) é certo!

Agora, passemos a resolver o item (2) da questão. Pede-se a negação da proposição P1, que é uma condicional. A negação de uma condicional foi discutida no capítulo 5, das equivalências lógicas. Assim, $\neg P_1 \equiv \neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B)$. Em linguagem corrente, seria "A impunidade é alta e a criminalidade não é alta". O item utiliza uma condicional para negar P1, o que é inadequado. Gabarito: item (2) é errado!

Exemplo 6.26 (CESPE/UnB/2010 – Analista). Um argumento válido é uma sequência finita de proposições em que algumas são chamadas premissas e assumidas como verdadeiras, e as demais são conclusões que se garantem verdadeiras em consequência da veracidade das premissas e de conclusões previamente estabelecidas. Suponha que a proposição "Se Josué foi aprovado no concurso e mudou de cidade, então Josué mudou de emprego" seja uma premissa de um argumento. Se a proposição "Josué não mudou de emprego" for outra premissa desse argumento, uma conclusão que garante sua validade é expressa pela proposição.

a) Josué foi aprovado no concurso e não mudou de cidade.
b) Josué não foi aprovado no concurso e mudou de cidade.
c) Josué não foi aprovado no concurso ou não mudou de cidade.
d) Se Josué não mudou de emprego, então Josué não mudou de cidade.
e) Se Josué não mudou de emprego, então Josué não foi aprovado no concurso.

Solução. Primeiramente, vamos dar forma ao argumento. Temos duas premissas, P_1 e P_2 e uma conclusão P_3, que será escolhida dentre as alternativas da questão, de modo a tornar o argumento válido. As premissas são:

- P_1: "Se Josué foi aprovado no concurso e mudou de cidade, então Josué mudou de emprego".
- P_2: "Josué não mudou de emprego".

Sejam as proposições A: Josué foi aprovado no concurso; B: Josué mudou de cidade; C: Josué mudou de emprego. A forma seria:

- $P_1: A \wedge B \rightarrow C$
- $P_2: \neg C$

$\therefore \quad P_3$: ?

Agora, apliquemos a técnica do cálculo proposicional para calcular, se possível, o valor verdade de cada variável componente das premissas. Lembrando que cada premissa é sempre verdadeira, por hipótese. A $P_2: \neg C$ será nosso ponto de partida porque é uma premissa básica. Os passos da resolução são os seguintes:

I. De $P_2: \neg C = \mathcal{V} \Rightarrow v(C) = \boldsymbol{\mathcal{F}}$

II. Substituindo o valor de C em P_1, teremos:

$$P_1: \left[(A \wedge B) \rightarrow \underbrace{C}_{\boldsymbol{\mathcal{F}}}\right] = \mathcal{V} \Rightarrow (A \wedge B) = \boldsymbol{\mathcal{F}}$$

A conclusão de que $(A \wedge B) = \boldsymbol{\mathcal{F}}$ é uma consequência de a fórmula condicional, figurando como premissa, não poder assumir a forma geral $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$, que é falsa para esse conectivo. Nenhuma premissa pode assumir valor $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Da conjunção $(A \wedge B) = \boldsymbol{\mathcal{F}}$, deve-se tentar calcular os valores de A e de B. Mas os valores de A e de B são indeterminados, nesse caso, porque uma conjunção é falsa, se ao menos uma de suas componentes for falsa. Há, portanto, três possibilidades de valorações para as variáveis A e B, quando $(A \wedge B) = \mathcal{F}$, conforme a tabela-verdade da conjunção. Entretanto, se uma conjunção é falsa, a sua negação resultará uma proposição necessariamente verdadeira. Em símbolos, $(A \wedge B) = \boldsymbol{\mathcal{F}} \Rightarrow \neg(A \wedge B) = \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Ocorre que, pelas leis de De Morgan, a negação de uma conjunção gera uma disjunção das negações, $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$, e, em linguagem corrente, a proposição seria "Josué não foi aprovado no concurso ou não mudou de cidade". Por ser uma proposição necessariamente verdadeira, essa fórmula pode figurar como conclusão da argumentação, para torná-la válida, não obstante as proposições atômicas componentes serem indeterminadas. Veja que a banca examinadora coloca essa alternativa na letra c). Gabarito: letra c).

6.8.6. Análise de Validade por Regras de Dedução

As premissas de uma argumentação lógica são componentes de sua base de conhecimento, a chamada "base delta" e utilizou-se o símbolo Δ para representá-la.

Da definição 6.1, a sequência finita de proposições $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1} \therefore P_n$ forma uma argumentação, em que as $n-1$ primeiras proposições são as premissas componentes de sua base Δ de conhecimento.

É possível acrescentar novas proposições à base Δ de conhecimento, por equivalências lógicas ou por alguma regra de inferência[16]. Por exemplo, se uma premissa de uma argumentação é da forma $A \rightarrow B$, então $(\neg B) \rightarrow (\neg A)$ pode ser acrescentada à base Δ, por equivalência lógica. Uma regra de inferência é um padrão de raciocínio válido que, a partir de uma manipulação sintática das fórmulas constantes na base Δ da argumentação, define como uma fórmula pode ser deduzida corretamente.

Quando um argumento é válido, a sua conclusão é necessariamente verdadeira, sempre que suas premissas forem consideradas verdadeiras, portanto a conclusão de qualquer argumento válido pode compor a base Δ de conhecimento de outro argumento lógico, desde que entre as suas premissas figure as premissas do argumento válido.

Uma prova por dedução, de uma fórmula da conclusão P_n, da argumentação, partindo-se de sua base Δ, consiste em um sequência finita de proposições, $P_1, P_2, \cdots, P_k,\ 1 \leq k \leq n,$ em que as $k-1$ primeiras proposições ou são premissas (hipóteses) ou são acrescidas à argumentação, por equivalências lógicas ou por regras de inferência, e a k-ésima e última proposição é a conclusão, $P_k = P_n$.

6.8.6.1. Regras Clássicas de Inferências

Algumas regras de inferência são amplamente conhecidas na literatura e a validade de algumas delas já foi demonstrada aqui, através dos exemplos. Elas são regras simples, de uso corrente, mas surgem como um poderoso dispositivo para a análise de argumentos lógicos. As regras de inferência, *Modus Ponens* (MP), *Modus Tollens* (MP) e o *Silogismo Hipotético* (SH), figuram entre as principais regras de inferência e, tradicionalmente, recebem nomes latinos.

a) *Modus Ponens* (MP)

---

[16] Um fato importante é que o acréscimo de novas proposições à “base Δ" de conhecimento, nos argumentos dedutivos, não “amplia” o conhecimento, mas tão somente pode colaborar para a análise de validade. Isso porque o resultado, válido ou inválido, depende apenas da forma originária do argumento, mas não do conteúdo, tema ou assunto tratado nas premissas.

A regra *Modus Ponens*, também chamada regra da separação, estabelece que se $A \rightarrow B$ e A são premissas (base Δ) da argumentação, então B pode ser colocada na argumentação. A sua forma lógica é a seguinte, onde abaixo da linha tracejada está a conclusão do argumento:

Forma geral:

$P_1: A \rightarrow B \qquad \Delta$

$P_2: A \qquad\qquad \Delta$

$\therefore P_3: B$

Demonstração de validade: Foi feita por tabela-verdade, no exemplo 6.14.

b) *Modus Tollens* (MT)

A regra *Modus Tollens* estabelece que se $A \rightarrow B$ e $\neg B$ são premissas da argumentação, então $\neg A$ pode ser colocada na argumentação. A sua forma lógica é a seguinte:

Forma geral:

$P_1: A \rightarrow B \qquad \Delta$

$P_2: \neg B \qquad\qquad \Delta$

$\therefore P_3: \neg A$

Demonstração. Foi feita por tabela-verdade, no exemplo 6.16.

c) ***Silogismo Hipotético* (SH)**

A regra do Silogismo[17] Hipotético (SH) estabelece que se $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$ estão presentes na argumentação, como premissas, então $A \rightarrow C$ pode ser colocada na argumentação. Sua forma lógica é a seguinte:

Forma geral:

$P_1: A \rightarrow B \qquad \Delta$

[17] O silogismo é uma forma de raciocínio aplicada a argumentos dedutivos. Na sua forma padronizada, é constituído por três proposições: as duas primeiras, digamos P_1 e P_2, são as *premissas* e a terceira, P_3, é a conclusão.

$P_2: B \rightarrow C$ Δ

$\therefore P_3: A \rightarrow C$

Demonstração: Pode ser feita por tabela-verdade. São três variáveis proposicionais atômicas (A, B e C), logo será necessária uma tabela-verdade com $2^3 = 8$ linhas. A tabela 35 é a tabela-verdade para a análise de validade do Silogismo Hipotético.

Tabela 35. Tabela-verdade para o Silogismo Hipotético

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{A \rightarrow B}$	$\boldsymbol{B \rightarrow C}$	$\boldsymbol{A \rightarrow C}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Fonte: O autor.

Observe que nas linhas L1, L5, L7 e L8, destacadas em vermelho, na tabela 35, as premissas P_1 e P_2 são todas verdadeiras e a conclusão P_3 é sempre verdadeira em cada uma dessas linhas, por isso a condicional associada, $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_3$ será tautológica. O argumento é válido.■

d) Regra da Simplificação (SIMP)

Se uma conjunção $A \wedge B$ está presente na argumentação, em sua base de conhecimento, então tanto A quanto B podem ser colocadas na argumentação.

Formas gerais

$P_1: A \wedge B$ Δ	$P_1: A \wedge B$ Δ
----------	---------
$\therefore P_2: A$	$\therefore P_2: B$

Demonstração. Pode ser feita por cálculo proposicional. Com efeito, se $A \wedge B$ é base Δ, será verdadeira por hipótese. Como uma conjunção só é verdadeira se todas as suas componentes forem verdadeiras, tanto A quanto B serão necessariamente verdadeiras. Logo é válido o raciocínio que apresenta como conclusão qualquer das duas variáveis proposicionais, A ou B, quando a conjunção das duas figurar como premissa. ■

e) Regra da Conjunção (RC)

Se as proposições A e B são premissas (base Δ), então a conjunção $A \wedge B$ pode ser colocada na argumentação.

Forma geral:

$P_1: A \quad \Delta$

$P_2: B \quad \Delta$

\- - - - - - - - - - -

$\therefore P_3: A \wedge B$

Demonstração. Com efeito, se A e B compõem a base Δ da argumentação, cada uma delas é verdadeira, por hipótese. Assim, a conjunção $A \wedge B$ é da forma $\mathcal{V} \wedge \mathcal{V} = \mathcal{V}$ e pode ser colocada como conclusão de uma argumentação, porque é necessariamente verdadeira. ■

Vejamos alguns exemplos de análise de argumentos aplicando essas regras de inferência.

Exemplo 6.27. Demonstre, com a utilização das regras de inferência, a validade do seguinte argumento lógico: Se leio, então compreendo. Se não leio, então não aprendo lógica. Se compreendo, então obtenho boas notas. Não obtive boas notas. Portanto, não aprendi lógica.

Solução. O primeiro passo é dar forma lógica ao argumento. Indicaremos por Δ a base de conhecimento, formada pelas premissas. Utilizaremos uma linha tracejada, abaixo da qual estarão as proposições que poderão ser acrescidas à base de conhecimento, por equivalências lógicas ou por regras de inferência (por exemplo,

MP, MT e SH). Caso seja possível obter a conclusão do argumento, a partir dessas regras, o argumento será válido.
Sejam as proposições: A: leio; B: Compreendo. C:não aprendo lógica e D: Obtenho boas notas. A forma lógica será representada assim:
Forma lógica: $A \to B, (\neg A) \to C, B \to D, \neg D \therefore C$

A sequência finita de proposições é a seguinte:

$P_1: A \to B$ (Δ)
$P_2: (\neg A) \to C$ (Δ)
$P_3:\ B \to D$ (Δ)
$P_4: \neg D$ (Δ)

$P_5: A \to D \quad SH\ (1{,}3)$
$P_6: \neg A \quad MT\ (4{,}5)$
$P_7: C \quad MP\ (2{,}6)$

Para gerar a proposição P_5, foi aplicada a regra do Silogismo Hipotético a partir das premissas P_1 e P_3. Indicamos essa ação por SH (1,3). A proposição P_6 foi obtida pela aplicação da regra *Modus Tollens* em P_4 e em P_5, que acabara de ser acrescida à base, indicou-se essa ação por MT (4,5). Observe que na sequência finita de proposições, gerada acima, a última proposição, $P_7: C,$ é a conclusão da argumentação, obtida por regra válida, *Modus Ponens,* aplicada a partir das proposições P_2 e P_6, indicou-se essa ação por MP (2,6). Portanto, a conclusão é uma consequência lógica das premissas e o argumento é válido. ■

Exemplo 6.28 (CESPE/UnB- 2006 - MPTO-Analista). [...] Uma argumentação é uma sequência finita de k proposições (que podem estar enumeradas) em que as (k – 1) primeiras proposições ou são premissas (hipóteses) ou são colocadas na argumentação por alguma regra de dedução. A k-ésima proposição é a conclusão da argumentação [...]. Julgue os itens que se seguem.

É correto afirmar que, simbolizada adequadamente, a argumentação abaixo é válida.

1. Se um casal é feliz, então os parceiros têm objetivos comuns.

2. Se os parceiros têm objetivos comuns, então trabalham no mesmo Ministério Público.
3. Há rompimento se o casal é infeliz.
4. Há rompimento se os parceiros não trabalham no mesmo Ministério Público.

( ) Certo.
( ) Errado.

Solução. O primeiro passo é dar forma lógica ao argumento. Observe que a conclusão da argumentação é a k-ésima (última) proposição, no caso a 4. Indicaremos por Δ a base de conhecimento, formada pelas premissas. Utilizaremos uma linha tracejada, abaixo da qual estarão as proposições que poderão ser acrescidas à base de conhecimento, por equivalências lógicas ou por regras de inferência, tais como MP, MT ou SH. Caso seja possível obter a conclusão do argumento a partir dessas regras, o argumento será válido.

Sejam as proposições: A: casal é feliz; B: os parceiros têm objetivos comuns. C: trabalham no mesmo Ministério Público e D: Há rompimento.

Deve-se ter atenção na representação da 3ª premissa e da conclusão, porque os termos da condicional estão invertidos. Na terceira premissa, “Há rompimento, se o casal é infeliz”, o antecedente da condicional (causa) é a proposição “o casal é infeliz” e o consequente (efeito) é a proposição “há rompimento”, assim, ela será representada por $P_3: (\neg A) \rightarrow D$. Analogamente, devemos representar a conclusão. A forma, em linha, ficará assim:

Forma lógica: $A \rightarrow B, B \rightarrow C, (\neg A) \rightarrow D \therefore (\neg C) \rightarrow D$

A sequência finita de proposições é a seguinte:

$P_1: A \rightarrow B$ (Δ)

$P_2: B \rightarrow C$ (Δ)

$P_3: (\neg A) \rightarrow D$ (Δ)

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$P_4: A \rightarrow C$ $SH\ (1,2)$

$P_5: (\neg C) \rightarrow (\neg A)$ (equivalência da contrapositiva de P_4)

$P_6: (\neg C) \rightarrow D$ $SH\ (5,3)$

Observe que na sequência finita de proposições, gerada acima, a última proposição obtida, $P_6: (\neg C) \rightarrow D$, é a conclusão da argumentação. Portanto, a conclusão é uma consequência lógica das premissas e o argumento é válido. Gabarito: Item certo!

6.8.7. Análise de Validade por Redução ao Absurdo

A técnica de demonstração por absurdo, em matemática, é uma poderosa ferramenta para provar teoremas e proposições. O termo "redução ao absurdo" provém do latim *reductio ad absurdum* e se fundamenta no princípio lógico do terceiro excluído: Toda proposição só pode ser classificada em verdadeira ou falsa. Logo, se uma proposição não pode ser falsa, ela tem de ser verdadeira e vice-versa. Em matemática, uma demonstração por absurdo é feita da seguinte forma:

- Admite-se a hipótese (base Δ do conhecimento);
- Supõe-se, por absurdo, que a tese (conclusão) é falsa.
- Utilizando-se de raciocínio matemático correto, chega-se a uma afirmação falsa, que contraria a hipótese admitida. Nesse caso, temos uma contradição e devemos refutar a falsidade da tese.

Por exemplo, vamos demonstrar a validade da proposição: Se x^2 é par, então x é par.

Demonstração. Será feita por redução ao absurdo.

- Hipótese: x^2 é par.
- Tese: x é par.
- Seja x^2 um número par (está-se admitindo a hipótese).
- $\Rightarrow$ x^2 é da forma $2p$, $p \in \mathbb{N}$ (aplicou-se um raciocínio matemático correto. Com efeito, todo número par é múltiplo de 2, sendo da forma $2p$).
- Suponha, por absurdo, que x não é par (ou seja, x é ímpar).
- $\Rightarrow x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ (Foi aplicado um raciocínio matemático correto. Dado que x não é par, ele é ímpar e todo número ímpar é da forma $2k + 1$);
- $\Rightarrow x^2 = (2k + 1) \cdot (2k + 1) \Rightarrow x^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow x^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Fazendo $2k^2 + 2k = p \Rightarrow x^2 = 2p + 1 \Rightarrow x^2$ é ímpar. Tem-se um absurdo, pois, por hipótese, x^2 é par.

- Portanto, deve-se refutar a hipótese de que x é ímpar. Ou seja, x é par.■

A técnica de redução ao absurdo pode ser aplicada para a análise de validade dos argumentos dedutivos. Para isso, deve-se considerar o teorema 6.1 da validade, onde foi mostrado que um argumento formado pela sequência $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1} \therefore P_n$ é válido se a condicional associada, $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1}) \rightarrow P_n$, for tautológica. Para a aplicação da técnica deve-se proceder do seguinte modo:

- Admite-se as hipóteses, que são a premissas da argumentação, componentes da base Δ de conhecimento.
- Supõe-se, por absurdo, que a conclusão é falsa. Fazer $P_n = \mathcal{F}$, implica sua negação ser $\mathcal{V}$ e, assim, pode-se acrescentar $\neg P_n = \mathcal{V}$ à base Δ, como se fosse uma "nova premissa" da argumentação. Outro detalhe importante, é que fazer $P_n = \mathcal{F}$ pode permitir o cálculo das variáveis componentes da fórmula da conclusão e, sendo possível esse cálculo, substitua esses valores nas premissas da argumentação, para tentar calcular as demais variáveis do argumento.
- Regra de decisão: A partir das manipulações sintáticas das fórmulas, se for gerada uma contradição lógica, que na prática significa alguma premissa ficar falsa, contrariando a hipótese inicial, ou surgir, por regra de inferência, uma proposição do tipo $P \wedge (\neg P)$, que também é uma contradição lógica, deve-se refutar a hipótese de falsidade da conclusão, admitindo-a como verdadeira. Nesse caso, o argumento será válido, porque a condicional associada é tautológica. Por um outro lado, basta que seja possível, através de cálculo válido, obter todas as premissas verdadeiras, a partir da hipótese de falsidade da conclusão, para que o argumento seja inválido, porque, nesse caso, um absurdo não foi obtido e a condicional associada não seria tautológica.

Vejamos alguns exemplos práticos de aplicação dessa técnica:

Exemplo 6.29. Verifique, por redução ao absurdo, se o seguinte argumento é válido: Se uma mulher vive nervosa, então ela é infeliz. Se uma mulher é infeliz, então ela não casa. Portanto, mulheres que vivem nervosas não casam.

Solução. Primeiramente, deve-se dar forma lógica ao argumento, identificando a sua base Δ de conhecimento (premissas) e a conclusão. Sejam as proposições: A: a mulher vive nervosa; B: a mulher é infeliz; C: a mulher não casa. A forma lógica é a do silogismo hipotético, já demonstrada a sua validade por tabela e, agora, veja outra prova para essa mesma forma:

Forma geral:

$P_1: A \to B \qquad \Delta$

$P_2: B \to C \qquad \Delta$

$\therefore P_3: A \to C$

Hipótese inicial: Admita que cada premissa da base é verdadeira: $P_1 = \mathcal{V}$ e $P_2 = \mathcal{V}$.

Suponha, por absurdo, que a conclusão é falsa. $P_3 = \mathcal{F} \Rightarrow A \to C = \mathcal{F}$, de onde se deduz que $v(A) = \mathcal{V}$ e $v(B) = \mathcal{F},$ porque a condicional só é $\mathcal{F}$ na forma $\mathcal{V} \to \mathcal{F}$. Substituindo esses valores em P_1 e em P_2, tem-se:

$P_1: \underbrace{A}_{\mathcal{V}} \to B = \mathcal{V} \Rightarrow v(B) = \mathcal{V}$. Mas, sendo $v(B) = \mathcal{V}$, e substituindo em $P_2,$ veja que $P_2: \underbrace{B}_{\mathcal{V}} \to \underbrace{C}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$. Absurdo!, pois P_2 é premissa verdadeira, por hipótese. Assim, deve-se refutar a hipótese de falsidade da conclusão e admiti-la como necessariamente verdadeira. Cumpre observar, que no passo anterior, se tivéssemos iniciado o cálculo por $P_2 = \mathcal{V}$, ao invés de P_1, iríamos deduzir que $v(B) = \mathcal{F}$ e o absurdo iria surgir em P_1. Portanto, o argumento é **válido**.

Exemplo 6.30. Verifique, por redução ao absurdo, a validade do argumento:

$A \to B, C \to \neg B \therefore \neg(A \wedge C)$

Solução: Primeiramente, a partir da forma lógica do argumento, dada em linha, identificam-se duas premissas, que serão a sua base Δ de conhecimento, e a conclusão, conforme abaixo:

$P_1: A \to B \qquad \Delta$

$P_2: C \to \neg B \qquad \Delta$

$\therefore P_3: \neg(A \wedge C)$

Hipótese inicial: Admita que cada premissa da base é verdadeira: $P_1 = \mathcal{V}$ e $P_2 = \mathcal{V}$. Após, suponha, por absurdo, que a conclusão é falsa. $P_3 = \mathcal{F} \Rightarrow: \neg(A \wedge C) =$

$\mathcal{F}$, de onde se deduz que $(A \wedge C) = \mathcal{V}$, logo $v(A) = \mathcal{V}$ e $v(C) = \mathcal{V}$. Substituindo esses valores em P_1 e P_2, teremos:

$P_1: \underbrace{A}_{\mathcal{V}} \rightarrow B = \mathcal{V} \Rightarrow v(B) = \mathcal{V}$. Mas, sendo $v(B) = \mathcal{V}$, teremos $v(\neg B) = \mathcal{F}$ e, substituindo em P_2, teremos que $P_2: \underbrace{C}_{\mathcal{V}} \rightarrow \underbrace{\neg B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$. Absurdo!, pois P_2 é premissa verdadeira, por hipótese. Assim, deve-se refutar a hipótese de falsidade da conclusão e admiti-la como necessariamente verdadeira. O argumento é **válido**.

Exemplo 6.31. Verifique, por redução ao absurdo, se é válido o argumento:

$A \rightarrow B, \neg A \therefore \neg B$

Solução. Primeiramente, a partir da forma lógica do argumento, dada em linha, identificam-se duas premissas, que serão a sua base Δ de conhecimento, e a conclusão, conforme indicado abaixo:

$P_1: A \rightarrow B \quad \Delta$

$P_2: \neg A \quad \Delta$

$\therefore P_3: \neg B$

Hipótese inicial: Admita que cada premissa da base é verdadeira: $P_1 = \mathcal{V}$ e $P_2 = \mathcal{V}$. Após, suponha, por absurdo, que a conclusão é falsa. $P_3 = \mathcal{F} \Rightarrow v(\neg B) = \mathcal{F}$, de onde se deduz que $v(B) = \mathcal{V}$. De $P_2 = \mathcal{V}$, temos $v(\neg A) = \mathcal{V}$, de onde se deduz que $v(A) = \mathcal{F}$. Substituindo esses valores em P_1, obteremos $P_1: \underbrace{A}_{\mathcal{F}} \rightarrow \underbrace{B}_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$. Finalizada a análise, foi visto que nenhum absurdo foi gerado. Esse resultado confirma que é possível a conclusão ser falsa, com as premissas verdadeiras, o que torna o argumento **inválido**.

Exemplo 6.32. O chamado Dilema Construtivo (DC) é uma regra de inferência com três premissas e uma conclusão. Duas das premissas são condicionais da forma $p \rightarrow q$ e $r \rightarrow s$ e a outra premissa é uma disjunção da forma $p \vee r$, construída a partir dos antecedentes das condicionais. A conclusão do argumento é uma disjunção, da forma $q \vee s$, construída com os consequentes das condicionais das premissas. Prove, por redução ao absurdo, a validade dessa regra.

Solução. Primeiramente, deve-se dar forma lógica ao argumento, identificando a sua base Δ de conhecimento (premissas) e a conclusão. A forma será:

$P_1: p \to q \qquad \Delta$

$P_2: r \to s \qquad \Delta$

$P_3: p \vee r \qquad \Delta$

$\therefore P_4: q \vee s$

Hipótese inicial: Admita que cada premissa da base é verdadeira: $P_1 = \mathcal{V}$, $P_2 = \mathcal{V}$ e $P_3 = \mathcal{V}$. Após, suponha, por absurdo, que a conclusão é falsa. $P_4 = \mathcal{F} \Rightarrow q \vee s = \mathcal{F} \Rightarrow v(q) = \mathcal{F}$ e $v(s) = \mathcal{F}$. Substituindo esses valores lógicos nas duas primeiras premissas, tem-se:

De $P_1: p \to \underbrace{q}_{\mathcal{F}} = \mathcal{V} \Rightarrow v(p) = \mathcal{F}$.

De $P_2: r \to \underbrace{s}_{\mathcal{F}} = \mathcal{V} \Rightarrow v(r) = \mathcal{F}$.

Agora, substituindo os valores de p e r em P_3, observe que a disjunção ficará falsa, $P_3: \underbrace{p}_{\mathcal{F}} \vee \underbrace{r}_{F} = \mathcal{F}$, o que é um absurdo, porque contraria a hipótese inicial de que P_3 é verdadeira. Assim, deve-se refutar a hipótese de falsidade para a conclusão, sendo esta necessariamente verdadeira, o que torna **válido** o argumento.■

CAPÍTULO 7. PROPOSIÇÕES CATEGÓRICAS

As proposições categóricas são afirmações (enunciados) que relacionam dois termos, que chamaremos **classes**. Uma classe é formada por um conjunto de elementos (podem ser de objetos ou de pessoas, por exemplo) que tem uma característica comum. Quando falarmos em classes, estamos falando em termos coletivos e não individuais. Por exemplo, a afirmação “Todo professor de matemática é filósofo” está relacionando uma classe, digamos S, de todos os professores de matemática a uma classe P, de filósofos, numa relação de inclusão total. Ou seja, a afirmação do tipo “Todo S é P” é um enunciado categórico e indica que a classe S está contida na classe P. De um modo geral, as proposições categóricas afirmam ou negam uma relação de inclusão total ou parcial entre as classes.

Uma classe é um conjunto, portanto pode até ser vazia. Por exemplo, retomemos a forma geral “Todo S e P” e agora vamos afirmar que “Todos os presidentes do Brasil, entre 1964 e 1985, foram eleitos democraticamente”. Um fato importante é que os enunciados “Todo S é P” subentendem uma forma condicional, do tipo “Se algo é S, então é P”. Assim, estamos estabelecendo uma relação condicional, da forma “se alguém foi presidente do Brasil entre 1964 e 1985, então foi eleito democraticamente”. Refletindo um pouco, podemos recordar que entre 1964 e 1985, no Brasil, viveu-se o regime militar, que tem como característica a falta de democracia e supressão de direitos, portanto a classe desses presidentes é vazia, naquela época. Mas isso não invalida a afirmação, pois a relação condicional é verdadeira quando o antecedente é falso, ou seja, mesmo que não exista qualquer elemento que satisfaça a propriedade ou condição imposta por S.

As proposições categóricas foram, originalmente, introduzidas na antiguidade pelo filósofo Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) e faziam parte de seus silogismos, que eram argumentos lógicos formados por duas premissas e uma conclusão. Há quatro tipos de enunciados categóricos: Os afirmativos: “Todo S é P” e “Algum S é P”, e os do tipo negativos: “Algum S não é P” e “Nenhum S é P”. Segundo Feitosa e Paulovich (2005, p. 147), tradicionalmente, os enunciados são representados pela sequência das vogais A, E, I e O, como referência às palavras “***A****FF****I****RMO* e *N****E****G****O*** (do Latim)”:

- A: Todo S é P.
- E: Nenhum S é P.
- I: Algum S é P.

- O: Algum S não é P.

Exemplo 7.1. São enunciados categóricos, dos tipos A, E, I e O:

A: Todo professor de matemática é filósofo.
E: Nenhum professor de matemática é filósofo.
I: Algum professor de matemática é filósofo.
O: Algum professor de matemática não é filósofo.

Cada enunciado categórico relaciona duas classes: A classe do sujeito (S) e a classe do predicado (P). Por isso, diz-se que fazem parte da chamada Lógica de Predicados. No exemplo 7.1, a proposição do tipo A, “Todo professor de matemática é filósofo”, tem a classe “professor de matemática” como sujeito e “filósofo” como predicado.

A lógica proposicional, que se utiliza dos conectivos da conjunção (e), disjunção (ou), condicional (se,...então) e bicondicional (se e somente se) apresenta alguma limitação para a análise de argumentos lógicos que são construídos com as proposições categorias, porque as classes componentes desse enunciados não são proposições. Ocorre que também é possível caracterizar cada enunciado categórico através de operações entre conjuntos, o que facilitará bastante o estudo das relações entre classes, em problemas práticos. Veja o exemplo 7.2, proposto pela Escola de Administração Fazendária (ESAF), no concurso da Secretária do Tesouro Nacional, no qual devemos estabelecer a relação entre três classes: filósofos, ricos e professores. A solução desse problema será dada por meio do exemplo 7.7.

Exemplo 7.2. (ESAF-2000) Em uma pequena comunidade, sabe-se que: “nenhum filósofo é rico” e que “alguns professores são ricos”. Assim, pode-se afirmar, corretamente, que nesta comunidade

a) alguns filósofos são professores.
b) alguns professores são filósofos.
c) nenhum filósofo é professor.
d) alguns professores não são filósofos.

e) nenhum professor é filósofo.

Para resolvermos problemas desse tipo e termos condições de analisar argumentos lógicos com proposições categóricas, será necessário criarmos um modelo que facilite a visualização da correlação existente entre as classes. Isso se dará através de diagramas lógicos, criados a partir das ideias de John Venn.

7.1. Proposição Universal Afirmativa - Todo S é P

As proposições categóricas do tipo A, “Todo S é P”, são chamadas de universais afirmativas e indicam que todo elemento da classe sujeito S é elemento da classe predicado P, numa relação de subconjunto. Por exemplo, a proposição “Todo policial é honesto” indica que a classe dos policiais (sujeito) está contida na classe das pessoas honestas (predicado). O fato de a classe S está contida na classe P, não implica, necessariamente, a existência de elementos exclusivos da classe P, porque se as classes forem iguais, vale a inclusão. Agora, pode existir elemento da classe P que não seja elemento da classe S, nesse caso S é subconjunto próprio de P, mas isso não está garantido pela proposição universal afirmativa. Se uma proposição “Todo S é P” for verdadeira, isso não garante que a recíproca “Todo P é S” seja verdadeira, daí podemos concluir que as proposições universais afirmativas não atendem à propriedade comutativa.

Além disso, a forma “Todo S é P” não é rígida. Há várias maneiras de expressarmos, de forma correta e equivalente, uma relação de inclusão entre classes. Por exemplo, a proposição “Todo poeta é melancólico” pode ser expressa por alguma das seguintes formas, entre outras:

- Quando alguém é poeta é melancólico.
- Se alguém é poeta, então é melancólico.
- Se alguém não é melancólico, então não é poeta.
- Ser poeta é uma condição suficiente para que alguém seja melancólico.
- Ser melancólico é uma condição necessária para que alguém seja poeta.
- Alguém é poeta, somente se for melancólico.
- Qualquer indivíduo que for poeta é melancólico.

- Somente pessoas melancólicas são poetas.
- Todo não-melancólico é um não-poeta.

7.1.1. Representação simbólica

A representação simbólica do enunciado categórico é a sua forma lógica. A proposição universal afirmativa “Todo S é P” denota uma relação condicional, do tipo “se algo é S, então é P” e será representada na forma:

$$(\forall x)[S(x) \rightarrow P(x)]$$

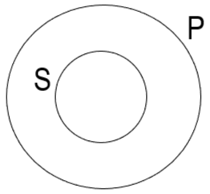
O símbolo $\forall x$ significa “para cada x” e representa o quantificador universal afirmativo, podendo ser interpretado como “para todo x” ou, ainda, “qualquer que seja x”, onde x denota um elemento qualquer das classes. A forma $(\forall x)[S(x) \rightarrow P(x)]$ pode ser interpretada assim: Para cada x, se x é elemento de S, então x é elemento de P.

No exemplo “Todo policial é honesto”, sendo $S(x)$ e $P(x)$ as classes, respectivamente, dos policiais e dos honestos, onde x representa um elemento qualquer, podemos representar a proposição da seguinte forma: $(\forall x)[S(x) \rightarrow P(x)]$. Nesse caso, se é verdade que um elemento x é policial, então espera-se que x seja honesto, por isso a condicional lógica é a sua forma de representação. Naturalmente, se x é policial, mas não é honesto, então esse elemento representa um contraexemplo à afirmação universal, dando origem a uma proposição chamada existencial negativa, aquela do tipo O: Algum S não é P. A seguir, apresentamos o diagrama lógico para a proposição universal afirmativa.

7.1.2. Diagrama lógico para a proposição universal afirmativa.

Para a representação, em diagramas, do quantificador universal afirmativo, pode-se utilizar a relação de inclusão entre conjuntos, definida no capítulo 1, e apresentada na figura 20.

Figura 20. Diagrama para a proposição universal afirmativa



"Todo S é P": $S \subseteq P$

Fonte: O autor.

7.2. Proposição Existencial Negativa - Algum $\boldsymbol{S}$ não é $\boldsymbol{P}$

As proposições categóricas do tipo O, "algum S não é P", são chamadas de existenciais (ou particulares) negativas e indicam que a classe S possui pelo menos um elemento que não pertence à classe P. As proposições categóricas "Todo S é P" e "Algum S não é P" são contraditórias, ou seja, uma é a negação da outra. Por exemplo, a proposição "Todo policial é honesto" é negada pela proposição "Algum policial não é honesto".

7.2.1. Representação Simbólica

A representação simbólica da proposição existencial negativa é construída de forma análoga à negação da proposição condicional, que é dada pela relação de equivalência, vista no capítulo 5: $\neg(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow \ \boldsymbol{A} \wedge (\neg\boldsymbol{B})$**.**

Assim, "Algum S não é P" será representada na forma:

$$(\exists x)[S(x) \wedge \neg P(x)]$$

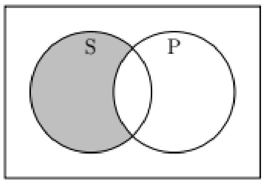
O símbolo "$\exists x$" significa "existe x" e representa o quantificador existencial. A forma $(\exists x)[S(x) \wedge \neg P(x)]$ pode ser interpretada assim: Existe x, que pertence a S e não pertence a P.

Além da palavra "Algum", pode-se utilizar expressões do tipo "Pelo menos um" ou "Ao menos um" na construção das proposições existenciais. Por exemplo, a proposição "Alguns políticos não são honestos" pode ser indicada como "Pelo menos um político não é honesto" ou, ainda, "Ao menos um político não é honesto".

7.2.2. Diagrama Lógico para a Proposição Existencial Negativa.

O diagrama lógico para a proposição “Algum S não é P” é construído a partir da noção de diferença $S - P$ entre conjuntos, conforme a figura 21, onde foi destacado, região sombreada, o setor dos elementos exclusivos da classe S:

Figura 21. Diagrama para a proposição Existencial Negativa



“Algum S não é P”: $S - P$

Fonte: O autor.

7.3. Proposição Existencial Afirmativa - Algum S é P

As proposições categóricas do tipo I, “Algum S é P”, são chamadas de existenciais (particulares) afirmativas e indicam que as classes S e P possuem pelo menos um elemento comum. Por exemplo, a proposição “Alguns policiais são honestos” denota a existência de pelo menos um elemento que pertence à classe policial e também à classe dos honestos. Naturalmente, quando se utiliza a palavra “alguns”, forma plural de “algum”, indica-se a existência de mais de um elemento comum, mas isto não invalida “existe um”.

As proposições existenciais afirmativas “Algum S é P” nada afirmam sobre a existência de elementos exclusivos das classes S e P. Tampouco garante a relação de inclusão entre essas classes. Por exemplo, se é verdade que “Alguns policiais são honestos”, isso não acarreta, necessariamente, que seja verdade que algum policial não é honesto (ou que existam pessoas honestas que não sejam policiais).

Outro detalhe a ser considerado é que, caso a proposição universal afirmativa “Todo S é P” seja verdadeira, isso acarreta a veracidade da proposição existêncial “algum S é P”, ou seja, se é verdade para “todos”, é verdade para um particular.

7.3.1. Representação Simbólica

A interpretação dada à proposição existencial afirmativa "Algum S é P" é construída de forma análoga à da operação de interseção entre conjuntos, que se correlaciona à operação de conjunção, na lógica sentencial. Por esse motivo, a proposição "algum S é P" é comutativa, ou seja, equivale a dizer "algum P é S". A representação simbólica de "Algum S é P" será feita da seguinte forma:

$$(\exists x)[S(x) \wedge P(x)]$$

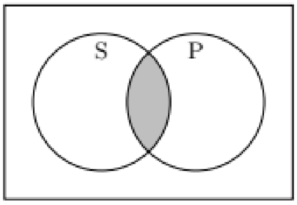
A forma $(\exists x)[S(x) \wedge P(x)]$ pode ser interpretada assim: Existe x, tal que x pertence a S e x pertence a P. A Proposição "algum S é P" possui algumas variantes, em sua escrita, ilustradas por meio do exemplo "Alguns poetas são melancólicos":

- Pelo menos um poeta é melancólico.
- Alguns melancólicos são poetas.
- Ao menos um poeta é melancólico.
- Há poetas que são melancólicos.

7.3.2. Diagrama Lógico para a Proposição Existencial Afirmativa.

O diagrama lógico para a proposição "Algum S é P" é construído a partir da noção de interseção, $S \cap P = \{x/x \in S \text{ e } x \in P\}$, entre conjuntos, conforme a figura 22 apresentada abaixo, em que a área sombreada indica o setor dos elementos comuns às duas classes.

Figura 22. Diagrama para a proposição Existencial Afirmativa



"Algum S é P": $S \cap P$

Fonte: O autor.

7.4. Proposição Universal Negativa - Nenhum S é P

As proposições categóricas do tipo E, “Nenhum S é P”, são chamadas de universais negativas e indicam que as classes S e P não possuem qualquer elemento comum. Por exemplo, a proposição “Nenhum policial é honesto” denota que a classe policial não possui qualquer elemento comum com a classe dos honestos.

As proposições “Nenhum S é P” e “algum S é P” são contraditórias. Uma é a negação da outra. A proposição “Nenhum S é P” indica que as classes S e P não têm elementos comuns, ou seja, a interseção entre essas classes é vazia, enquanto que a proposição “algum S é P” diz o contrário. Por exemplo, a negação da proposição “Alguns políticos são honestos” será a proposição “Nenhum político é honesto”.

7.4.1. Representação Simbólica

A interpretação dada à proposição universal negativa “Nenhum S é P” é construída de forma análoga à da operação complementar da interseção (associada à forma “Algum S é P") entre conjuntos, $(S \cap P)^c = S^c \cup P^c$. Portanto, pode ser correlacionada à operação de negação da conjunção, na lógica sentencial. Por esse motivo, a proposição “Nenhum S é P” é comutativa, ou seja, equivale a dizer “Nenhum P é S”. Além disso, a representação simbólica de “Nenhum S é P” poderá ser feita de duas formas:

$$\neg(\exists x)[S(x) \wedge P(x)]$$

A forma $\neg(\exists x)[S(x) \wedge P(x)]$ pode ser interpretada assim: Não existe x, tal que x pertence a S e x pertence a P.

A outra representação que pode ser feita para a proposição “Nenhum S é P” é uma referência à equivalência da forma restrita da condicional: $(\neg A) \vee B \Leftrightarrow A \rightarrow B$. Essa equivalência lógica transforma uma disjunção (ou) em uma forma condicional, da seguinte maneira: nega-se uma das componentes da disjunção, neste caso $(\neg A)$, que passa a ser a antecedente A da condicional, enquanto a consequente será a proposição B.

A forma para “Nenhum S é P”, dada por $\neg(\exists x)[S(x) \wedge P(x)]$, tem um viés condicional, porque na lógica sentencial, é análoga à operação $\neg(S \wedge P) \Leftrightarrow (\neg S) \vee (\neg P)$ (equivalência de De Morgan) e $(\neg S) \vee (\neg P) \Leftrightarrow S \rightarrow (\neg P)$ (a disjunção é uma forma restrita da condicional). Lembrando que a proposição “Todo S é P” tem esse viés condicional $(\forall x)[S(x) \to P(x)]$, podemos indicar $S \to (\neg P)$ como “Todo S não é P”, que passa a ser uma forma de reescrever “Nenhum S é P”. Simbolicamente será:

$$(\forall x)[S(x) \to \neg P(x)].$$

A forma $(\forall x)[S(x) \to \neg P(x)]$ é equivalente a $(\forall x)[P(x) \to \neg S(x)]$ (regra contrapositiva das condicionais) e pode ser interpretada assim: “Para cada x, se x pertence a S, então x não pertence a P.

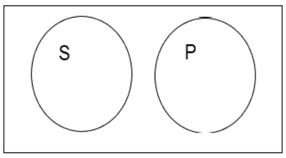
A Proposição “Nenhum S é P” possui muitas variantes em sua escrita. Veja algumas, por meio do exemplo “Nenhum poeta é melancólico”:

- Todo poeta é não-melancólico.
- Todo melancólico é não-poeta.
- Não há poeta que seja melancólico.
- Nada que seja poeta pode ser melancólico.
- Se alguém é poeta então não é melancólico.
- Se alguém é melancólico, então não é poeta.

7.4.2. Diagrama Lógico para a Proposição Universal Negativa.

O diagrama lógico para a proposição “Nenhum S é P” é construído a partir da noção complementar da interseção, estabelecendo uma interseção vazia. As classes S e P são disjuntas. A figura 23 é a diagramação para a proposição universal negativa.

Figura 23. Diagrama para a proposição Universal Negativa



“Nenhum S é P”

Fonte: O autor.

Vejamos alguns exemplos, de ordem prática, sobre duas abordagens iniciais para as relações lógicas entre proposições categóricas: Uma diz respeito às formas de construção das negações das proposições categóricas, e a outra, decorrente da análise da relação entre as classes, com vistas a identificarmos conclusões que devam ser necessariamente verdadeiras, a partir das premissas dadas. Essa última abordagem tem a ver com a lógica da argumentação, mas esta será formalizada no próximo tópico, onde discutiremos as técnicas de análise de validade de argumentos formados por silogismos com proposições categóricas.

Exemplo 7.3 (FCC – 2016 – Metrô-SP - Engenheiro**).** Ao considerar a afirmação: "todos os motoristas habilitados são habilidosos", como sendo uma afirmação falsa, então é verdade que

(A) os motoristas não habilitados são habilidosos.

(B) os motoristas habilidosos não são habilitados.

(C) há motorista habilitado que não é habilidoso.

(D) a maioria dos motoristas habilitados não são habilidosos.

(E) há motorista habilidoso que não é habilitado.

Solução. A proposição é do tipo universal afirmativa "Todo S é P", onde S indica a classe dos motoristas habilitados e P é a classe dos motoristas habilidosos.

Como a proposição é considerada falsa, a sua negação será necessariamente verdadeira. A negação da forma "Todo S é P" é a proposição da forma "Algum S não é P", que, em linguagem corrente, poderia ser "Algum motorista habilitado não é habilidoso", que é análoga à sentença da alternativa (C): "Há motorista habilitado que não é habilidoso". Gabarito: C).

Exemplo 7.4 (FCC-2018-ALESE-Técnico). Em uma empresa, todos os funcionários devem receber vale-refeição mensalmente e nenhum deles pode fazer mais do que 20 horas extras em um mesmo mês. O setor de recursos humanos da empresa identificou que essa regra não foi cumprida em determinado mês. Dessa forma, é correto concluir que nesse mês, necessariamente,

(A) nenhum funcionário recebeu vale-refeição e alguns deles fizeram mais do que 20 horas extras.

(B) alguns funcionários não receberam vale-refeição e pelo menos um deles fez mais do que 20 horas extras.
(C) aqueles funcionários que fizeram menos do que 20 horas extras não receberam vale-refeição.
(D) todos os funcionários deixaram de receber vale-refeição ou fizeram mais do que 20 horas extras.
(E) pelo menos um funcionário não recebeu vale-refeição ou fez mais do que 20 horas extras.

Solução. A Proposição "todos os funcionários devem receber vale-refeição mensalmente e nenhum deles pode fazer mais do que 20 horas extras em um mesmo mês" é formada por uma conjunção de duas proposições categóricas: Uma da forma geral "Todo S é P" e outra da forma "Nenhum S é P". Ocorre que temos três classes, as quais chamaremos A, B e C: a Classe A é a dos funcionários; a classe B é a dos que recebem vale-refeição e a classe C é a dos que fazem mais que 20 horas extras no mesmo mês. A proposição dada fica do tipo "todo A é B e nenhum A é C". Como a regra não foi cumprida em determinado mês, temos que a proposição é falsa naquele mês. O que é correto concluir? Ora, a negação da proposição! Temos que negar as duas componentes, ligadas por uma conjunção, aplicando a lei de De Morgan (a negação de uma conjunção é equivalente a uma disjunção das negações). A negação de "Todo A é B" é a proposição "Algum A não é B" e a negação de "Nenhum A é C" é a sentença "Algum A é C". A resposta fica assim: "Algum A não é B **ou** algum A é C" e, substituindo A, B e C pelas classes, teremos: "Algum funcionário não recebeu vale-refeição ou algum deles fez mais do que 20 horas extras em um mesmo mês". A alternativa (E) é a melhor resposta. Gabarito: E).

Exemplo 7.5 (CESPE-2013-MME-Técnico). Assinale a opção que apresenta uma proposição logicamente equivalente à negação da proposição "Todo ser humano é responsável pelo bem que não faz".

(A) Todo ser humano não é responsável pelo bem que não faz.
(B) Algum ser humano não é responsável pelo bem que não faz.
(C) Todo ser humano é responsável pelo bem que faz.
(D) Todo ser humano é responsável pelo mal que não faz.

(E) Algum ser humano não é responsável pelo bem que faz.

Solução. A proposição é do tipo universal afirmativa, “Todo S é P”. Seja S a classe dos seres humanos e P a classe dos responsáveis pelo bem que não fazem. Devemos encontrar uma sentença equivalente à negação de “Todo S é P’, que é dada pela proposição categórica “Algum S não é P”. Assim, a resposta é a sentença “Algum ser humano não é responsável pelo bem que não faz”. Aqui cabe um alerta: Na construção da negação, o advérbio de negação, “não”, deve incidir antes do verbo principal da frase, no caso o verbo ser, e não antes do verbo fazer, que consta no complemento da palavra responsável. Por esse motivo, a alternativa (E) está incorreta, porque nela foi feita a negação de “não faz”, que é “faz”. No trecho “é responsável pelo bem que não faz”, temos o verbo ser como verbo principal, por isso a forma “**não é** responsável pelo bem que não faz”. Alternativa correta: letra (B).

Exemplo 7.6 (ESAF-2001-SERPRO) Todos os alunos de matemática são, também, alunos de inglês, mas nenhum aluno de inglês é aluno de história. Todos os alunos de português são também alunos de informática, e alguns alunos de informática são também alunos de história. Como nenhum aluno de informática é aluno de inglês, e como nenhum aluno de português é aluno de história, então:

a) pelo menos um aluno de português é aluno de inglês.
b) Pelo menos um aluno de matemática é aluno de história.
c) nenhum aluno de português é aluno de matemática.
d) todos os alunos de informática são alunos de matemática.
e) todos os alunos de informática são alunos de português

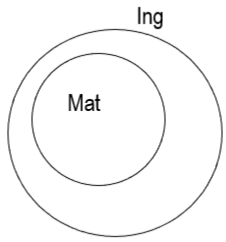
Solução. Deve-se encontrar uma alternativa que seja necessariamente verdadeira, a partir das proposições dadas como premissas: Temos as seguintes classes:

- Mat: alunos de matemática.
- Ing: alunos de inglês.
- Hist: alunos de história.
- Port: alunos de português.

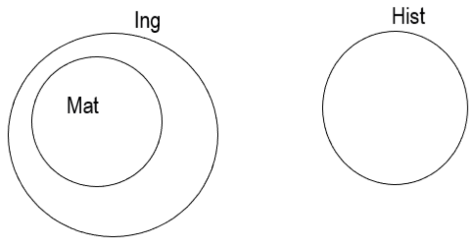
- Info: alunos de informática.

Os diagramas lógicos indicados pelas premissas, P_1, P_2, ..., P_6, da questão serão:

P_1: Todos os alunos de matemática são, também, alunos de inglês. Inclusão das classes.



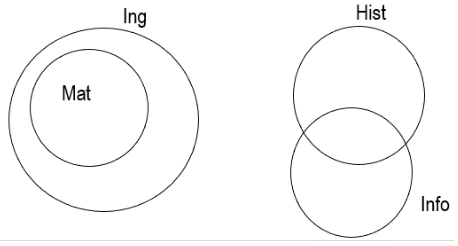
P_2: Nenhum aluno de inglês é aluno de história. Essas classes são disjuntas:



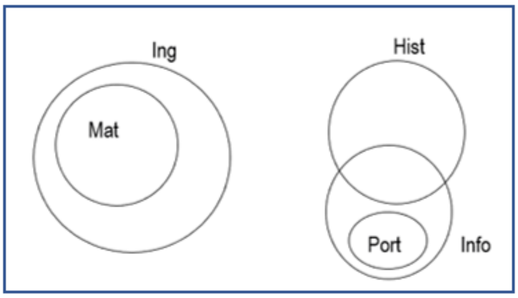
P_3: Todos os alunos de português são também alunos de informática. Essa premissa deve aguardar, porque não se sabe a correlação da classe “Port” e “Info” com as classes já representadas anteriormente.

P_4: Alguns alunos de informática são também alunos de história. Essa premissa deve aguardar, porque não sabemos a relação da classe “Info” com a classe “Mat” e “Ing”, já representadas. Essa relação será dada na premissa seguinte:

P_5: Nenhum aluno de informática é aluno de inglês. A classe “Info” não intersecta a classe “Ing”, esclarecendo a dúvida suscitada na premissa anterior, que, agora, poderá ser representada em conjunto com esta. Observe que ainda não podemos representar a premissa P_3, porque não sabemos a correlação da classe “Port” com a classe Hist. Essa correlação será dada na premissa P_6. O diagrama parcial ficará assim:



P_6: Nenhum aluno de português é aluno de história. Agora é possível representar a inclusão da classe “Port” na classe “Info”, indicada em P_3, sabendo que a classe “Port” é disjunta da classe “Hist”. O diagrama final será o que segue:



Analisando as alternativas, a única que é necessariamente verdadeira é a letra C, porque, pelo diagrama final, “nenhum aluno de português é aluno de matemática”. Gabarito: Letra C).

Exemplo 7.7 (ESAF-2000-Secretaria do Tesouro Nacional-Analista)**.** Em uma pequena comunidade, sabe-se que: “nenhum filósofo é rico” e que “alguns professores são ricos”. Assim, pode-se afirmar, corretamente, que nesta comunidade

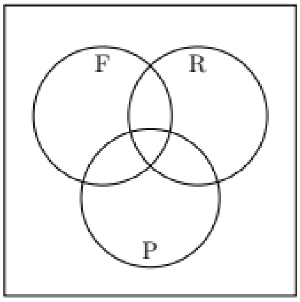
a) alguns filósofos são professores.
b) alguns professores são filósofos.
c) nenhum filósofo é professor.
d) alguns professores não são filósofos.
e) nenhum professor é filósofo.

Solução. Deve-se encontrar uma alternativa que seja necessariamente verdadeira, a partir das proposições dadas como premissas: Temos as seguintes classes:

- F: filósofos
- R: ricos
- P: professores.

Considerando que são apenas três classes, é possível pensar em um diagrama de Venn para relacioná-las, como o da figura 24. As proposições categóricas afirmam ou negam uma relação de inclusão, total ou parcial, entre as classes. A partir das premissas que estabelecem a relação entre as classes, basta indicar os setores vazios, ou que podem conter pelo menos um elemento.

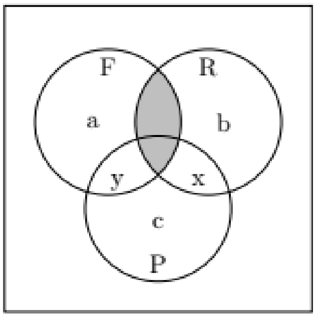
Figura 24. Diagrama de Venn para correlação entre três classes



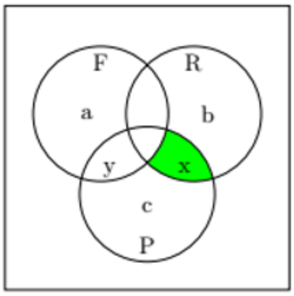
Fonte: O autor.

O enunciado da questão apresenta apenas duas premissas, P_1 e P_2, tais que:

P_1: nenhum filósofo é rico. As classes F e R são disjuntas ($F \cap R = \emptyset$). A área sombreada na figura abaixo é vazia, ilustrando essa operação. A premissa P_1, isoladamente, não permite qualquer conclusão quanto às demais regiões do diagrama. Indicaremos essas regiões pelas letras $a, b, c, x,$ e y, as quais podem ou não conter elementos. O diagrama da figura 24, agora, fica assim:



P_2: alguns professores são ricos. As classes P e R têm pelo menos um elemento comum. A área indicada pelo setor x ($(R \cap P) - F$) possui “alguns professores”, os quais são também “ricos” (só não podem ser filósofos, porque pela P_1, “nenhum filósofo é rico”), logo não é uma área vazia (veja setor sombreado na cor verde, no diagrama abaixo). A premissa não deixa clara a correlação entre as classes P e F e nenhuma outra premissa foi dada no texto; portanto, pode haver professor que seja filósofo (área de y), mas pode ser que, no universo proposto, nenhum professor seja filósofo (área de y seria vazia). Inclusive, os setores indicados por a, b e c também podem ser vazios, porque as premissas não garantem a existência de tais elementos.



A partir da solução final para o diagrama, é possível concluir que existe pelo menos um professor (área do x) que não pode ser filósofo, porque é rico. A alternativa d) é necessariamente verdadeira, pois "alguns professores não são filósofos". Resposta: letra d).

7.8. Silogismos Categóricos

As proposições categóricas, de um modo geral, estabelecem uma relação entre duas classes, S e P, onde a classe S é chamada de sujeito da proposição e a classe P é chamada de predicado. Abaixo, temos os quatro tipos de proposições categóricas e uma maneira alternativa de indicá-las:

- Universal Afirmativa - Tipo $\boldsymbol{A}$: Todo S é P e será indicada por $S\boldsymbol{A}P$.
- Universal Negativa - Tipo $\boldsymbol{E}$: Nenhum S é P e será indicada por $S\boldsymbol{E}P$.
- Existencial Afirmativa -Tipo $\boldsymbol{I}$: Algum S é P e será indicada por $S\boldsymbol{I}P$.
- Existencial Negativa - Tipo $\boldsymbol{O}$: Algum S não é P e será indicada por $S\boldsymbol{O}P$.

Um silogismo é um argumento lógico formado por apenas duas premissas, P_1 e P_2, e uma conclusão P_3. Um silogismo categórico é um argumento em que as duas premissas e a conclusão são proposições categóricas e apresentam exatamente três termos distintos: O termo maior (P), o termo menor (S) e o termo médio (M). Tomando-se duas a duas as proposições categóricas dos silogismos, cada duas delas contém exatamente um desses termos em comum. Os termos maior e menor aparecem na conclusão da argumentação, da seguinte forma: O sujeito S da conclusão será chamado de termo menor, enquanto o predicado P será o termo maior. O termo médio (M) aparece nas duas premissas. A premissa que contém o termo maior será chamada de premissa maior e a premissa que contém o termo menor será chamada de premissa menor. Para ilustrar, veja o exemplo 7.8 de um silogismo categórico:

Exemplo 7.8. Todo advogado é bacharel em direito. Todo bacharel em direito sabe lógica. Portanto, todo advogado sabe lógica.

O primeiro passo para se classificar os três termos de um silogismo categórico é identificar quem é a conclusão do silogismo, pois ela nos dará os termos maior e menor, o termo médio será obtido por exclusão, nas premissas. No exemplo 7.8, a conclusão é "todo advogado sabe lógica". Assim, o termo maior é o predicado da conclusão, ou seja, é a classe dos que sabem lógica, enquanto que o termo menor é a classe dos advogados, que é o sujeito da conclusão. A classe dos bacharéis em direito, que figura nas duas premissas, é o termo médio. A premissa maior será "Todo bacharel em direito sabe lógica", porque contém o termo maior. A premissa menor será "Todo advogado é bacharel em direito", porque contém o termo menor.

A representação simbólica dos silogismos categóricos é a sua forma lógica e poderá ser feita, de acordo com as proposições categóricas presentes nas premissas, conforme visto anteriormente:

- Todo S é P: $(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))$
- Nenhum S é P: $\neg(\exists x)\big(S(x) \wedge P(x)\big)$.
- Algum S é P: $(\exists x)\big(S(x) \wedge P(x)\big)$.
- Algum S não é P: $(\exists x)\big(S(x) \wedge \neg P(x)\big)$.

Observação: A forma "Nenhum S é P" é comutativa e, como visto anteriormente, admite as seguintes representações alternativas: $(\forall x)(S(x) \rightarrow \neg P(x))$ ou a equivalente $(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg S(x))$. Além disso, a forma "Algum S é P" é equivalente a "Algum P é S".

Exemplo 7.9. Represente simbolicamente o seguinte argumento: Todo professor de matemática fala alemão. Alguns filósofos falam alemão. Logo, todo professor de matemática é filósofo.

Solução. A partir da conclusão, “todo professor de matemática é filósofo”, iremos identificar os termos maior e menor do silogismo: O termo maior é o predicado P, que é a classe dos filósofos, e o termo menor é o sujeito S, que é a classe dos professores de matemática. O termo médio M é aquele que aparece nas duas premissas, no caso é a classe dos que falam alemão. As premissas e a conclusão são do tipo:

- $P_1\!: Todo\ S$ é M. Δ
- $P_2\!: Algum\ P$ é M. Δ
- $\therefore P_3\!: Todo\ S$ é P.

Façamos, agora, a representação simbólica para o argumento:

- $P_1\!: (\forall x)(S(x) \rightarrow M(x))$
- $P_2\!: (\exists x)\big(P(x) \wedge M(x)\big)$.
- $\therefore P_3\!: (\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))$

Por uma questão de simplicidade, pode-se representar as proposições categóricas do silogismo, e seus termos maior (P), médio (M) e menor (S), através das siglas genéricas SAP, SEP, SIP e SOP, que representam os quatro tipos de proposições categorias. Naturalmente, adaptando-se em cada posição da sigla o nome da classe relacionada. O exemplo 7.9 pode ser representado assim:

- $P_1\!: Todo\ S$ é $M\!: SAM$
- $P_2\!: Algum\ P$ é $M\!: PIM$

$\therefore P_3\!: Todo\ S$ é $P\!: SAP$

De onde teríamos a seguinte forma reduzida:

- $P_1\!: SAM$ Δ
- $P_2\!: PIM$ Δ
- $\therefore P_3\!: SAP$

Sendo S o termo menor e P o termo maior, toda conclusão de um silogismo categórico é, genericamente, do tipo "SP" (SAP, SEP, SIP ou SOP). Para cada um dos quatro tipos de proposições categóricas (A, E, I e O), que podem fazer parte das premissas maior e menor, o termo médio M, pode figurar como sujeito ou predicado delas: SM, MS, PM ou MP. A tabela 36 mostra as possibilidades genéricas.

Tabela 36. Modelos de Silogismos

	MODELOS			
Proposições	1ª Forma	2ª Forma	3ª Forma	4ª Forma
Premissa Maior	MP	PM	MP	PM
Premissa Menor	SM	SM	MS	MS
Conclusão	SP	SP	SP	SP

Fonte: O autor.

Na tabela 36, cada uma das três proposições componentes dos modelos pode ter qualquer dos quatro tipos de proposições categóricas. Então, pelo princípio multiplicativo de contagem, para cada um dos quatro modelos indicados, haverá $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ silogismos que podem ser construídos. Como são quatro modelos, teremos $64 \times 4 = 256$ silogismos possíveis que podem ser criados, a partir das ideias de Aristóteles. Naturalmente, alguns são válidos e outros inválidos. Passemos à discussão da análise de validade.

7.8.1. Análise de Validade para Silogismos Categóricos

As técnicas para análise de validade, vistas no capítulo anterior, se mostraram eficientes para a análise dos argumentos cujas premissas e as conclusões eram formadas por proposições lógicas, associadas aos conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

A validade ou invalidade dos argumentos dedutivos depende somente da forma lógica e não do conteúdo tratado internamente nas proposições. Ocorre que as proposições categóricas estabelecem uma relação entre classes e uma classe não é uma proposição lógica. Assim, os argumentos categóricos, formados por premissas e conclusões compostas por proposições categóricas, apresentam algumas limitações de ordem técnica, no caso para o cálculo proposicional.

Considerando que as relações lógicas entre as classes, nas proposições categóricas, dependem da estrutura interna de seus enunciados, que é determinada pelas formas universal ou existencial presentes nas proposições, elas podem estabelecer uma referência a todos os membros da classe ou apenas a alguns desses membros. Isso tem a ver com o *conceito de distribuição*, que será essencial para uma das técnicas de análise de validade dos silogismos categóricos:

Definição 7.1 (Termo Distribuído). Um dado termo, componente de uma proposição categórica, é distribuído se o enunciado afirma algo a respeito de todos os elementos da classe à qual o termo se refere.

A definição 7.1 estabelece que um termo (sujeito ou predicado) do enunciado categórico está distribuído se o enunciado fizer uma referência a todos os membros da classe a que se refere, a cada um deles. Veja o que diz Salmon (2010):

> Todos os enunciados categóricos dizem algo a respeito das classes a que seus termos se referem, mas esses enunciados são coletivos. Além disso, um enunciado categórico pode falar distributivamente a respeito de alguns, mas não necessariamente de todos os membros de uma classe. Por vezes, mas não sempre, um enunciado categórico fala distributivamente sobre cada um dos membros de certa classe; em tais casos, o termo que se refere à classe está distribuído (SALMON, 2010, p. 29).

Por exemplo, na proposição “Nenhum filósofo é rico” os dois termos estão distribuídos, a classe dos filósofos e a dos ricos, porque a afirmação faz referência à totalidade dos membros das duas classes, ou seja, “todos os filósofos são não-ricos” e “todos os ricos são não-filósofos”. No geral, qualquer proposição do tipo “Nenhum S é P” tem os dois termos distribuídos, o sujeito e o predicado.

A proposição “Todo homem é mortal” tem apenas um termo distribuído, que é a classe dos homens, pois faz uma referência à totalidade de elementos da classe dos homens, qualquer que seja o homem, mas não deixa clara a existência de elementos mortais e não-homens. As proposições do tipo “Todo S é P” têm apenas o sujeito S distribuído, mas o predicado P é não-distribuído.

Já o enunciado “Alguns políticos são honestos” não apresenta qualquer termo distribuído, porque faz referência apenas a “alguns” dos elementos das classes a que se refere. Toda proposição da forma “Algum S é P” têm os dois termos não-distribuídos.

Por fim, a proposição “Alguns políticos não são honestos” não afirma algo a respeito da totalidade dos políticos, mas apenas a “alguns” dessa classe, por isso a classe dos políticos é um termo não-distribuído. Um detalhe sutil é que essa proposição indica que a totalidade dos elementos da classe dos honestos é disjunta do setor cujos elementos são da classe dos políticos não-honestos. Pela definição 7.1, o termo relativo à classe dos honestos é distribuído. Proposições do tipo “Algum S não é P” têm o predicado P distribuído, mas o sujeito S é não-distribuído.

7.8.1.1. Análise de Validade por Regras de Validação

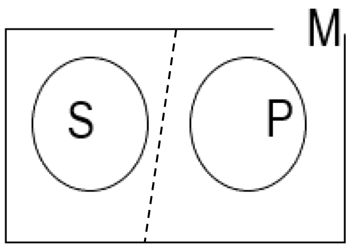
Para que um silogismo categórico seja válido é necessário que as relações lógicas entre os as classes (termos maior e menor), estabelecidas na conclusão da argumentação, estejam plenamente justificadas pelas relações indicadas nas premissas. Considerando que a relação entre o sujeito S (termo menor) e o predicado P (termo maior), dada na conclusão, já está presente nas premissas, basta observar algumas regras e verificar se a inferência foi adequada. Dessa forma, há um conjunto de três regras que podem ser utilizadas para validação dos argumentos categóricos, de modo que os argumentos são válidos somente se todas as três regras forem cumpridas:

- **Regra R1**: Em qualquer silogismo categórico válido, o termo médio M deve estar distribuído em alguma das premissas.
  Justificativa: A conclusão de um argumento categórico é do tipo SP e estabelece uma relação entre o termo maior P, predicado da conclusão, e o termo menor S, sujeito da conclusão, que deverá ser justificada pelas premissas, através de uma ligação feita através do termo médio M. Suponha, sem perda de generalidade, que o termo médio M seja particionado (partes disjuntas) em duas partes e que a premissa maior, que contem P, estabeleça uma relação com uma das partes e a premissa menor, que contém S, se relacione com a outra parte. Então o termo médio fica não-distribuído e, assim, a relação entre S e P não se justifica. Veja o exemplo 7.10 no qual o termo médio, mortal, é não-distribuído:

Exemplo 7.10. No argumento a seguir, o termo médio é não-distribuído nas premissas, o que acarreta invalidade da argumentação:
Premissa Maior: Todo mamífero é mortal.
Premissa menor: Todo homem é mortal.
Conclusão: Todo homem é mamífero.

De fato, a conclusão de que "Todo homem é mamífero", nesse argumento, é inadequada. Observe que a classe dos homens (S) (termo menor da conclusão) poderia estar associada a um setor da classe do termo médio M, mortal, e a classe dos mamíferos (P) a outro setor. Assim, concluir que "Todo homem é mamífero" não é necessariamente verdadeiro, apenas com base nas premissas estabelecidas. A figura 25 ilustra essa possibilidade.

Figura 25. Termo médio (M) não distribuído



Fonte: O autor.

Outro detalhe, no exemplo 7.10, é que todas as premissas e a conclusão são verdades do ponto de vista da realidade, mas mesmo assim o argumento é falacioso porque as premissas não justificam a conclusão. Temos a chamada falácia do termo médio.

- **Regra R2**: Em qualquer silogismo categórico válido, se um termo extremo (termo maior ou termo menor) estiver distribuído na conclusão, então ele tem de estar distribuído em alguma premissa e reciprocamente.
  Justificativa: Suponha que um termo extremo esteja distribuído na conclusão, então, pela definição 7.1, de termo distribuído, a proposição categórica da conclusão estabelece uma relação lógica que envolve a totalidade dos elementos da classe relativa ao termo extremo distribuído. Suponha agora, que nenhuma premissa tenha esse mesmo termo também distribuído, assim, ela

faz referência apenas a algum (ou alguns) dos elementos dessa classe, o que faz a conclusão (que fala de todos os elementos) extrapolar o que está previsto pelas premissas, tornando o raciocínio inválido. Veja o que diz Copi (1978, p. 186) em relação a essa regra violada: “A conclusão de um argumento (ou raciocínio) válido não pode ir mais além nem afirmar mais do que está contido (implicitamente) nas premissas. Se a conclusão, de maneira ilegítima, “vai mais além” do que é afirmado pelas premissas, o argumento é inválido.” Veja o exemplo 7.11, que ilustra essa situação:

Exemplo 7.11. Argumento em que um termo extremo está distribuído na conclusão, mas não está distribuído nas premissas:
Premissa maior: Todas as plantas desse bosque são comestíveis.
Premissa menor: Todas as plantas desse bosque são verdes.
Conclusão: Nesse bosque, tudo que é verde é comestível

Observe, no exemplo 7.11, que a conclusão faz referência a tudo que é verde, por isso o termo extremo “verde” está distribuído (lembre-se que as proposições do tipo A: “Todo S é P” tem somente o termo S distribuído), mas este termo não está distribuído em nenhuma premissa, nesse caso na premissa menor, que faz referência a ele. Esta é a falácia do termo menor (quando o termo menor está distribuído na conclusão, mas não está distribuído na premissa menor).

- **Regra R3**: Em qualquer silogismo categórico válido, a quantidade de premissas negativas deve ser igual ao número de conclusões negativas.
  Justificativa: Essa regra estabelece, na prática, duas restrições: A primeira delas é que, se a conclusão do argumento é afirmativa (SAP ou SIP), as duas premissas têm de ser afirmativas. As sentenças afirmativas estabelecem uma relação de inclusão, total ou parcial, entre as classes, e, dessa forma, se a conclusão for afirmativa, esta relação de inclusão só pode ser justificada por proposições afirmativas nas premissas, em relação ao termo médio M, comum. Com efeito, a relação lógica entre os termos maior (P) e menor (S) da conclusão se dá através do termo médio M, nas premissas, o qual faz essa “ponte” e, nas palavras de Copi (1978, p. 188), “Uma conclusão afirmativa indica que uma

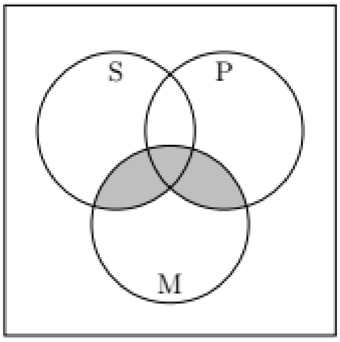
classe está total ou parcialmente contida numa segunda. Isso só pode ser justificado pela existência de uma terceira classe que contém a primeira e está, por sua vez, contida na segunda". A segunda restrição é que, de duas premissas negativas nada se pode concluir. Com efeito, se S, P e M são os termos menor, maior e médio, e sendo as duas premissas negativas, elas negam a inclusão total ou parcial entre S e M e entre P e M, isso impede que o termo médio M estabeleça a ligação, "ponte", entre os termos S e P. Veja o exemplo 7.12, que ilustra a situação:

Exemplo 7.12. Argumento com duas premissas negativas.

Premissa Maior: Nenhum filósofo é rico.
Premissa Menor: Nenhum advogado é filósofo.
Conclusão: Nenhum advogado é rico

A figura 26 é o diagrama que ilustra a relação entre as três classes, onde S é a classe dos advogados, P é a classe dos ricos e M é a classe dos filósofos. A área sombreada indica os setores que devem ser excluídos por força das premissas. Observe que a relação entre S e P é indeterminada, pois não se pode afirmar, necessariamente, que SAP, SEP, SIP ou SOP.

Figura 26. Duas premissas negativas impedem a conclusão



Fonte: O autor.

Para a análise dos silogismos categóricos, com as regras de validação, deve-se memorizar as três regras. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 7.13. Verifique se o argumento a seguir é válido: Todo professor de matemática é lógico. Alguns filósofos não são lógicos. Logo, alguns filósofos não são professores de matemática.

Solução. A conclusão do argumento é a proposição “alguns filósofos não são professores de matemática”. Assim, o termo “filósofos” é o termo menor (S) e o termo “professores de matemática” é o termo maior (P). O termo médio (M) é “lógico” e aparece nas duas premissas, que formam a base Δ de conhecimento do argumento. Vamos dar forma lógica simplificada ao silogismo categórico, onde P_1 e P_2 são as premissas e P_3 é a conclusão:

- $P_1: PAM \quad \Delta$
- $P_2: SOM \quad \Delta$
- $\therefore P_3: SOP$

A regra R1 está satisfeita, pois o termo médio está distribuído em P_2; A regra R2 está satisfeita, pois o termo extremo P está distribuído na conclusão e também na premissa P_1; A regra R3 está satisfeita, pois a quantidade de proposições negativas da conclusão é igual à quantidade de premissas negativas. Portanto, como todas as três regras estão satisfeitas e o argumento é válido.

Exemplo 7.14 (FUNIVERSA-2010-CEB). Toda mulher é sentimental. Existem homens que são sentimentais. Logo, existem homens que são mulheres.

Solução. A conclusão do argumento é a proposição “existem homens que são mulheres”. Assim, o termo “homens” é o termo menor (S) e o termo “mulheres” é o termo maior (P). O termo médio (M) é “sentimental” e aparece nas duas premissas, que formam a base Δ de conhecimento do argumento. Vamos dar forma lógica simplificada ao silogismo categórico, onde $P_1\ e\ P_2$ são as premissas e P_3 é a conclusão:

- $P_1: PAM \quad \Delta$
- $P_2: SIM \quad \Delta$
- $\therefore P_3: SIP$

A regra R1 não está satisfeita, pois o termo médio é não-distribuído em P_1 e em P_2. Portanto, o argumento é inválido. Para que um argumento seja válido é necessário que a três regras sejam satisfeitas. É suficiente que uma das regras não seja satisfeita, para que o argumento seja inválido.

Exemplo 7.15 (CESPE/UnB-2004-DPF). Uma noção básica da lógica é a de que um argumento é composto de um conjunto de sentenças denominadas premissas e de uma sentença denominada conclusão. Um argumento é válido se a conclusão é necessariamente verdadeira sempre que as premissas forem verdadeiras. Com base nessas informações, julgue os itens que se seguem. É válido o seguinte argumento: "Todo cachorro é verde, e tudo que é verde é vegetal, logo todo cachorro é vegetal".
( ) Certo
( ) Errado

Solução. A conclusão do argumento é a proposição "todo cachorro é vegetal". Assim, o termo "cachorro" é o termo menor (S) e o termo "vegetal": é o termo maior (P). O termo médio M será "verde" e aparece nas duas premissas, que formam a base Δ de conhecimento do argumento. Vamos dar forma lógica simplificada ao silogismo categórico, onde P_1 e P_2 são as premissas e P_3 é a conclusão:

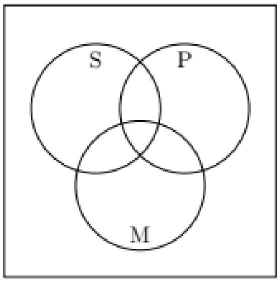
- $P_1: SAM \quad \Delta$
- $P_2: MAP \quad \Delta$
- ----------
- $\therefore P_3: SAP$

A regra R1 está satisfeita, pois o termo médio está distribuído em P_2; A regra R2 está satisfeita, pois o termo extremo S está distribuído na conclusão e também na premissa P_1; A regra R3 está satisfeita, pois a quantidade de proposições negativas na conclusão (nesse caso, a quantidade é zero) é igual à quantidade de premissas negativas. Portanto, considerando que todas as três regras estão satisfeitas, o argumento é válido. Gabarito: item certo!

7.8.1.2. Análise de Validade por Diagramas de Venn

A utilização dos diagramas de Venn se mostrou eficiente para a análise de argumentos proposicionais que envolviam até quatro variáveis proposicionais, conforme visto no capítulo anterior. Considerando que os silogismos categóricos apresentam apenas três termos distintos, que chamamos classes, S, P e M, que designam os termos menor, maior e médio, respectivamente, é possível utilizar, com certa tranquilidade, os diagramas de Venn para a análise dos argumentos categóricos. Para tanto, vamos fixar um diagrama padrão, figura 27, que apresenta oito setores distintos, que formam uma partição das classes. Qualquer dessas oito regiões pode ser vazia.

Figura 27. Diagrama padrão para análise de silogismos



Fonte: O autor.

As premissas irão ser utilizadas para identificarmos a área de aceitação e as regiões críticas para a conclusão da argumentação. O passo a passo é o seguinte:

- **Primeiro passo**: Diagramação das premissas. Devemos diagramar as premissas da argumentação (base Δ de conhecimento), e somente elas, iniciando, preferencialmente, pelas premissas universais, se houver, e depois as existenciais.
- **Segundo passo**: Decisão de validade. Após a diagramação das duas premissas, deve-se inspecionar o resultado para ver se a conclusão foi diagramada automaticamente. Em caso afirmativo, o argumento é válido, ou seja, os termos maior e menor se relacionam, através do termo médio, em um processo de inferência adequado, de modo que a relação estabelecida na conclusão é necessariamente verdadeira, na hipótese de as premissas também serem verdadeiras. Por um outro lado, se a conclusão não foi diagramada automaticamente, após a diagramação das premissas, então a relação entre

as classes, estabelecida na conclusão, não é necessariamente correta e o argumento será inválido.

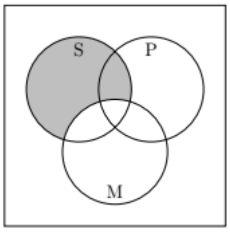
As premissas universais (tipos A e E) são mais simples de diagramar, porque as suas relações podem ser visualizadas por exclusão de setores (que serão as áreas hachuradas) no diagrama padrão, aquele indicado na figura 27. Esse é o motivo de, preferencialmente, iniciarmos a diagramação das premissas que são universais. Iremos estabelecer esse padrão de diagramação para as proposições universais e definiremos outro para as existenciais que fazem parte das premissas.

As premissas universais, tanto as do tipo A quanto as do tipo E, de um modo geral, indicam que determinadas regiões do diagrama padrão são vazias. Por exemplo, quando se diz "Todo político é honesto", proposição categórica do tipo A, em uma base Δ (premissas) de conhecimento, a proposição indica que a região formada por indivíduos que são políticos e ao mesmo tempo não-honestos é vazia. Já a proposição "Nenhum político é honesto", do tipo $E,$ em uma base Δ, indica que a região formada por indivíduos que são políticos e também honestos é vazia. Por isso, a diagramação dessas premissas universais será feita pela exclusão, através do sombreamento, dessas regiões vazias, que serão chamadas de regiões críticas.

a) Premissa Universal Afirmativa, tipo A: SAM, MAS, PAM ou MAP

Para as proposições universais afirmativas, de forma geral "Todo S é M", devemos sombrear o setor do diagrama padrão que representa a região de S, que não pertence a M. Para isso, podemos ignorar o diagrama P. Por exemplo, se a premissa estabelece que "Todo matemático é lógico", iremos sombrear o setor do diagrama que corresponde aos indivíduos que são matemáticos e não-lógicos. Essa passa a ser uma região crítica. Para os casos MAS, PAM ou MAP, o raciocínio é análogo. A figura 28 ilustra essa situação.

Figura 28. Área de exclusão para “Todo S é M”

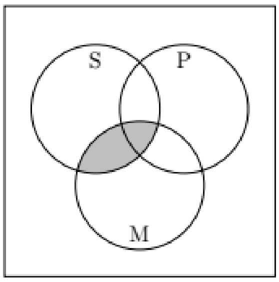


Fonte: o autor.

b) Premissa Universal Negativa, tipo E: SEM ou PEM

Caso a premissa seja universal negativa, do tipo SEM (Nenhum S é M), a área crítica a ser sombreada será o setor cujos elementos pertencem a ambas as classes (interseção), lembrando que o caso PEM é análogo. Por exemplo, se uma premissa é a proposição “Nenhum aluno é estudioso”, iremos sombrear o setor da interseção da classe S, dos alunos, com a classe M, dos estudiosos. A figura 29 ilustra essa situação:

Figura 29. Área de exclusão para “Nenhum S é M”



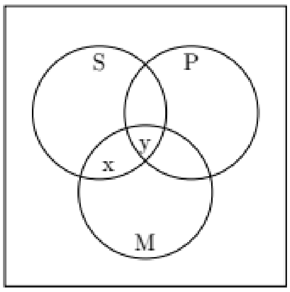
Fonte: autor.

As premissas existenciais do tipo I afirmam a existência de “algum” elemento que atende determinada condição ou propriedade imposta pela proposição categórica, mas elas nada afirmam sobre a existência ou não de elementos exclusivos das classes a que se referem. Os setores exclusivos das classes podem ou não ser vazios. As premissas categóricas do tipo O nada afirma sobre a existência de elementos comuns às classes ou elementos exclusivos do termo distribuído. Por esse motivo, não é possível diagramar essas proposições existenciais por meio de sombreamento de áreas críticas. Assim, uma alternativa é utilizar as variáveis de apoio, $x, y, \cdots$, nas regiões não vazias, indicadas pelas premissas, apenas para assinalar que naquelas regiões, em pelo menos uma delas, há “pelo menos um”, “algum” elemento. Vejamos essa representação nos tópicos c e d, abaixo:

c) Premissa Existencial Afirmativa, tipo I: SIM ou PIM

Se a premissa for existencial afirmativa, do tipo SIM (Algum S é M), iremos colocar variáveis de apoio no setor da interseção. Naturalmente, como o diagrama padrão é para três conjuntos, a interseção $S \cap M$ está particionada em dois setores, o exclusivo de S e M, que indicaremos por x, e o da interseção $S \cap P \cap M$, que indicaremos por y. Os setores de x e de y podem ser vazios individualmente, mas não ambos, porque a região tem que possuir “algum” elemento. Para o caso PIM (algum P é M) o raciocínio é análogo. A figura 30 ilustra essa situação.

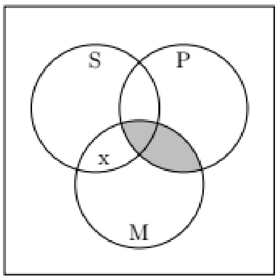
Figura 30. Diagrama para “Algum S é M”



Fonte: o autor.

Na figura 30, se uma premissa adicional excluir o setor da interseção das três classes, a variável y dessa área será eliminada. Por exemplo, suponha que uma argumentação categórica tenha uma premissa universal, do tipo “Nenhum P é M” e a outra premissa seja “Algum S é M”, o diagrama conjunto é o da figura 31, onde y foi excluído:

Figura 31. Diagrama conjunto para duas premissas: “Algum” e “Nenhum”



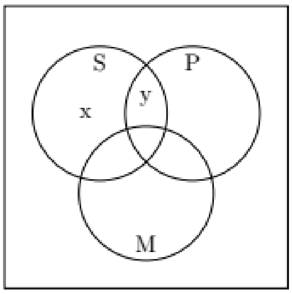
Fonte: o autor.

A simulação apresentada na figura 31 ilustra o motivo de, na diagramação das premissas, preferencialmente, iniciarmos com as premissas universais, setores sombreados (que são os setores vazios). O objetivo é evitar o preenchimento das áreas existenciais com as variáveis de apoio, x ou y, ao iniciar a diagramação com premissas existenciais, e, depois, temos que “apagar” a variável auxiliar, porque o setor era vazio.

d) Premissa Existencial Negativa, tipo O: SOM, MOS, POM ou MOP

Para o caso de uma premissa ser existencial negativa, do tipo “Algum S não é M, SOM (os casos MOS, POM e MOP são análogos), iremos proceder de modo semelhante à existencial afirmativa, mas fixando as variáveis de apoio, $x, y, z, ..$, nos setores de S, cujos elementos não pertencem a M . Cumpre observar, como no caso anterior, que os setores de x e de y podem ser vazios individualmente, mas não ambos, porque a região tem que possuir “algum” elemento. A figura 32 ilustra essa possibilidade:

Figura 32. O x e o y indicam “Algum S não é M”



Fonte: O autor.

Passemos à resolução de algumas questões de ordem prática, para melhor entenderemos a aplicação dessa técnica de análise de silogismos categóricos:

Exemplo 7.16. Vamos retomar a forma do exemplo 7.15 e analisar aquele argumento como a técnica de diagramação.

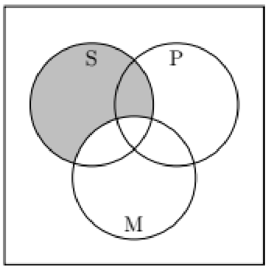
- $P_1: SAM$ Δ
- $P_2: MAP$ Δ
- $\therefore P_3: SAP$

Solução. Primeiramente, deve-se construir o diagrama padrão, da figura 27. A seguir, vamos diagramar cada premissa da argumentação, iniciando pelas universais, se houver. Nesse caso, as duas premissas são do tipo A (universal afirmativa).

Diagramação da premissa P_1:

A premissa é do tipo "Todo S é M". Como essa premissa estabelece uma relação entre as classes S e M, o foco é em relação aos dois círculos dessas classes. Podemos até ignorar o círculo P, como se ele nem existisse. A premissa diz que "todo S é M", devemos eliminar do diagrama padrão a parte de S que não é M. A área sombreada mostra esse processo, que ficará conforme modelo da figura 33 abaixo:

Figura 33. Diagramação de "Todo S é M"

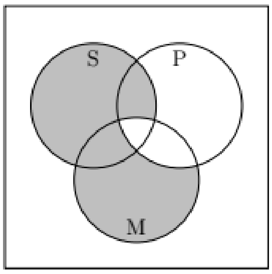


Fonte: O autor.

Diagramação da premissa P_2:

A premissa P_2, "todo M é P", é do mesmo tipo que a P_1, logo o processo de diagramação é análogo. Devemos utilizar a mesma figura já diagramada anteriormente, a partir de P_1, e sombrear a área de M que não pertence a P. A figura 34 ilustra a diagramação.

Figura 34. Diagramação de "todo M é P"



Fonte: O autor.

Decisão: Após a diagramação das duas premissas, devemos inspecionar a conclusão da argumentação, que é a afirmação "Todo S é P", para ver se ela foi diagramada automaticamente. Como efeito, através do diagrama final, podemos perceber que a região de S, restante (nesse caso é a área comum aos três diagramas), está completamente contida na região de P, o que torna necessariamente verdadeira a afirmação "Todo S é P", feita na conclusão. Assim, o argumento é válido.

Exemplo 7.17. Verifique, através da técnica de diagramação, se o argumento do exemplo 7.13, cuja forma é dada abaixo, é válido.

- $P_1: PAM \quad \Delta$
- $P_2: SIM \quad \Delta$

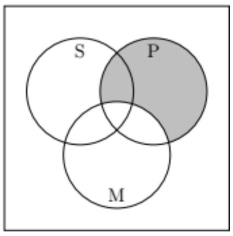
$\therefore P_3: SIP$

Solução. Primeiramente, devemos construir o diagrama padrão, da figura 27. A seguir, vamos diagramar cada premissa da argumentação, iniciando pelas universais, se houver. Nesse caso, a premissa P_1 é universal (Todo P é M) e a P_2 é existencial. Iniciaremos por P_1.

Diagramação da premissa P_1:

Essa premissa é do tipo "Todo P é M". Devemos sombrear o setor de P, que está fora do círculo que representa M. O diagrama é o da figura 35.

Figura 35. Diagramação de P_1

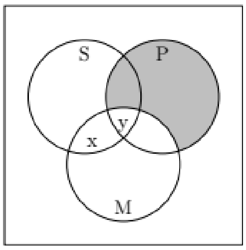


Fonte: O autor.

Diagramação da premissa P_2:

Essa premissa é existencial afirmativa, "algum S é M". A partir do diagrama feito através de P_1, utilizaremos as variáveis de apoio, x e y, na área da interseção de S com M, pois a interseção está particionada. Alguma dessas regiões, indicadas por x e y, pode ser vazia, mas não ambas. A figura 36 ilustra essa diagramação.

Figura 36. Diagramação de P_2



Fonte: O autor.

Decisão: Após a diagramação das duas premissas, devemos inspecionar a conclusão da argumentação, que é a afirmação "algum S é P", para ver se ela foi diagramada automaticamente. Observe, através do diagrama final, que a proposição da conclusão, Algum S é P, não é necessariamente verdadeira, porque é possível que o setor indicado por y, em S, seja vazio (neste caso o setor de x não seria vazio, por força da premissa P_2). Assim, o argumento é inválido.

Exemplo 7.18. Verifique a validade do seguinte argumento lógico: Alguns ricos são ótimos investidores. Todo político é rico. Logo, alguns políticos são ótimos investidores.

Solução. Primeiramente vamos dar forma lógica ao argumento e, após, vamos diagramar suas premissas. A conclusão do argumento é a proposição “alguns políticos são ótimos investidores”, de onde identificaremos os termos S: políticos (menor) e P: ótimos investidores (maior). O termo médio M é a classe dos ricos, que aparece nas duas premissas, que formam a base Δ de conhecimento do argumento. Vamos dar forma lógica simplificada ao silogismo categórico, onde P_1 e P_2 são as premissas e P_3 é a conclusão:

- $P_1: MIP \quad \Delta$
- $P_2: PAM \quad \Delta$

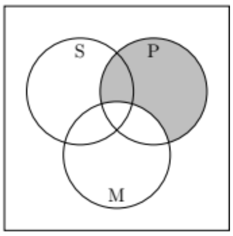
- $\therefore P_3: SIP$

Primeiramente, devemos construir o diagrama padrão, da figura 27. A seguir, vamos diagramar cada premissa da argumentação, iniciando pelas universais, se houver. Nesse caso, a premissa P_2 é universal (todo P é M) e a P_1 é existencial. Iniciaremos por P_2.

Diagramação da premissa P_2:

Esta premissa estabelece uma relação universal afirmativa entre as classes P e M. Vamos sombrear o setor de P, que está fora do círculo que representa M. A figura 37 ilustra essa diagramação.

Figura 37. Diagramação da P_2



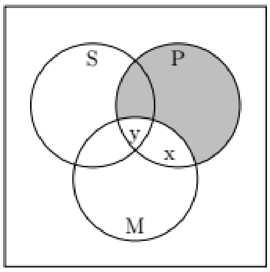
Fonte: O autor.

Diagramação da premissa P_1:

Essa premissa é existencial afirmativa, “algum M é P”. A partir do diagrama feito através de P_2, vamos preencher a área da interseção de M com P, neste caso, vamos utilizar as variáveis de apoio, x e y, pois a interseção está particionada.

Lembre-se que essa premissa não implica dizer que as duas regiões indicadas por x e y possuem elementos, porque uma delas pode ser vazia, mas não ambas. A figura 38 ilustra essa diagramação.

Figura 38. Diagramação da P_1



Fonte: O autor.

Decisão: Após a diagramação das duas premissas, devemos inspecionar a conclusão da argumentação, que é a afirmação "algum S é P", para ver se ela foi diagramada automaticamente. Observe, através do diagrama final, que a proposição da conclusão, "Algum S é P", não é necessariamente verdadeira, porque é possível que o setor indicado por y, em S, seja vazio (neste caso o setor de x não seria vazio, por força da premissa P_1). Assim, o argumento é inválido.

Exemplo 7.19. Verifique a validade do argumento Aristotélico: "Todo homem é mortal. Se Sócrates é homem, logo Sócrates é mortal."

Solução. Embora este não seja um silogismo de forma típica, podemos utilizar a técnica de diagramação para avaliação de sua validade. A conclusão do argumento é "Sócrates é mortal. Temos que o elemento x representa "Sócrates" e faz parte da classe dos homens. Temos duas premissas, a primeira delas é categórica, com apenas duas classes: A classe S é a dos "homens" e a classe P é a dos mortais. A forma lógica do argumento, onde P_1 e P_2 são as premissas e P_3 é a conclusão, é a seguinte:

$P_1: SAP \quad \Delta$

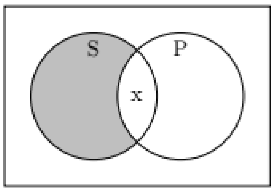
$P_2: S(x) \quad \Delta$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$\therefore P_3: P(x).$

Agora, vamos fazer o diagrama para duas classes, representando P_1. A figura 39 ilustra essa diagramação.

Figura 39. Diagramação para duas classes.



Fonte: O autor.

Decisão: A conclusão da argumentação é a afirmação "Sócrates é mortal". Com efeito, x, que representa "Sócrates" é elemento da classe dos mortais. O argumento é válido.

CAPÍTULO 8. ARGUMENTAÇÃO INDUTIVA

O formalismo lógico provê meios e técnicas para a análise da correção do raciocínio dedutivo. Para o lógico, não interessa se o argumento dedutivo é moral ou imoral, se é a favor ou contra o aborto, se é da religião A ou da B, se foi uma autoridade acadêmica quem o apresentou ou se foi um bêbado no bar, para ele, o que importa mesmo é a forma lógica e não o conteúdo das informações presentes nas premissas e na conclusão. O exemplo 7.14, no capítulo 7, mostra que é possível termos argumentos válidos, mesmo que as premissas e a conclusão sejam formadas por proposições falsas, do ponto de vista do conteúdo. O exemplo 7.10 evidencia que o contrário também existe, ou seja, pode-se ter um argumento inválido, mesmo que este apresente premissas e conclusões verdadeiras, dentro da realidade dos fatos. Isso é possível porque, na dedução, o que importa mesmo é a forma lógica e não o conteúdo das afirmações. Os argumentos dedutivos ou são classificados como válidos ou são totalmente inválidos, sem meio termo. Em um primeiro momento, preocupar-se apenas com a forma, mas não com o conteúdo das informações, parece torná-los pouco interessantes, mas em ciências exatas, como na matemática, a argumentação dedutiva, com suas técnicas de validação, possui grande importância, porque estimula o raciocínio inferencial correto.

Os argumentos indutivos, muito presentes no cotidiano das pessoas, como na filosofia, na argumentação jurídica, por exemplo, fazem parte da chamada lógica informal. Nesse tipo de argumentação, a conclusão é apenas provável, mas não necessariamente verdadeira. Esses argumentos não serão classificados de forma bivalente, como os dedutivos, mas a eles é atribuído um grau de força, uma probabilidade de veracidade. A base do raciocínio indutivo é a generalização: a partir de casos particulares, chega-se a conclusões de cunho geral. Nesse processo de generalização, as conclusões extrapolam o conteúdo das informações presentes nas premissas e passam a ser apenas prováveis, mas não necessariamente verdadeiras. Veja o que diz Copi (1978)

> Um raciocínio indutivo, por outro lado, envolve a pretensão, não de que suas premissas proporcionem provas convincentes da verdade de sua conclusão, mas de que somente forneçam algumas provas disso. Os argumentos indutivos não são ‘válidos’ nem ‘inválidos’ no sentido em que estes termos se aplicam aos argumentos dedutivos. Os raciocínios indutivos podem, é claro, ser avaliados como melhores ou piores, segundo o grau de verossimilhança

> ou probabilidade que as premissas confiram às respectivas conclusões (COPI, 1978, p. 35).

São exemplos de raciocínio indutivo, nos quais a conclusão se dá por generalização:

Exemplo 8.1. Argumentação indutiva:

P_1: João é político e é corrupto.

P_2: José é político e é corrupto.

P_3: Pedro é político e é corrupto.

$\therefore P_4$: Portanto, todo político é corrupto.

Exemplo 8.2. O sol nasceu todas as manhãs até hoje. Portanto, amanhã o sol vai nascer.

Exemplo 8.3. Atirei uma pedra no rio e ela afundou. Atirei outra pedra no rio e ela afundou. Atirei uma terceira pedra no rio e ela também afundou. Logo, toda pedra que for atirada ao rio irá afundar.

Para melhor entendermos o raciocínio indutivo, façamos uma analogia com o que ocorre na Estatística. Em Estatística, chama-se **População** ao conjunto universo de todos os elementos que tem uma característica comum, objeto de estudo. Uma **Amostra** é todo subconjunto não vazio de uma população. Um **Parâmetro** é qualquer medida estatística gerada a partir de dados populacionais e tem como característica principal a confiabilidade ser igual a 100%. Já um **Estimador** é qualquer medida gerada a partir de dados amostrais, de um subconjunto da população, e tem como característica a confiabilidade não ser igual a 100%. Por causa da confiabilidade, o ideal é pesquisar dados populacionais e não amostrais. Mas, às vezes, não é possível pesquisar toda a população, por fatores de custo, tempo, entre outros. Já pensou um fabricante de pneus que quer testar a qualidade dos pneus que ele produz e decide fazer um teste com a população dos pneus fabricados? Possivelmente vai quebrar as finanças da empresa, porque acabaria com o estoque todo. Por isso, o mais comum são as pesquisas amostrais. Mas elas estão sempre associadas a uma margem de erro; é o famoso “5 pontos percentuais para mais ou para menos”, porque a confiança nunca é 100%. A Estatística, por um lado, contém um ramo chamado Estatística Inferencial, que é caracterizado por um conjunto de técnicas para a análise e interpretação de dados amostrais, por meio das quais é possível tomar decisões para toda a população. A partir de dados amostrais, busca-se generalizar a informação para toda a população, mas sempre sujeitos a margem de erro.

Assim como na Estatística, esse processo de generalização, na argumentação indutiva, precisa ser analisado com cautela, verificando se os dados disponíveis são representativos do grupo. A esse respeito, Walton (2012) alerta:

> Quando as alegações estatísticas são a base de conclusões a que se chega através de argumentação causal ou indutiva, é bom fazer um questionamento crítico a respeito do processo que levou a tais conclusões, já que a prova estatística é, hoje em dia, uma base de argumentação muito comum em vários contextos de diálogo racional do dia-a-dia (WALTON, 2012, p. 279).

No exemplo 8.1, a conclusão de que “todo político é corrupto” é inadequada, fraca, pois foi fundamentada a partir de evidências obtidas de três casos (os supostos políticos corruptos, representados por João, José e Pedro).

Os argumentos indutivos, por conta das generalizações apresentadas, são suscetíveis a falácias importantes e comuns, chamadas de falácias indutivas, nas quais as premissas não sustentam a conclusão. Por exemplo, existe a **falácia da estatística insuficiente**, na qual se efetua uma generalização a partir de pequenas amostras, como no caso de alguém que deixa de comprar um modelo de aparelho eletrônico, porque o do vizinho apresentou problemas. Para Salmon (2010, p. 47), “consiste em efetuar uma generalização indutiva antes de contar com dados suficientes para sustentar a generalização”. Há, também, **a falácia do desvio estatístico**, ou estatística tendenciosa, que se comete, por exemplo, quando se conclui que o nível de renda de uma cidade é tal, apenas tendo pesquisado o bairro mais nobre. Veja o que afirma Salmon (2010):

> Os argumentos indutivos, ao invés dos argumentos dedutivos, fornecem conclusões cujo conteúdo excede o das premissas. É precisamente essa característica que torna os argumentos indutivos úteis; ao mesmo tempo, dá origem a problemas filosóficos extremamente difíceis na análise do conceito indutivo (SALMON, 2010, p. 45).

Um outro aspecto importante, é o acréscimo de novas evidências à argumentação. Nos argumentos dedutivos, foi mostrado que novas premissas podem ser acrescidas à argumentação, por regras válidas de equivalência ou inferências, sem que isso modifique o seu resultado lógico, mas no caso dos raciocínios indutivos, o acréscimo de novas premissas pode alterar o grau de apoio da conclusão, aumentando-o ou diminuindo-o. Veja o que diz Salmon (2010):

> [...] o grau de apoio da conclusão pelas premissas de um argumento indutivo pode aumentar ou diminuir em consequência de premissas adicionais fornecidas a título de evidência adicional. Como a conclusão de um argumento indutivo pode ser falsa ainda que as premissas sejam verdadeiras, a evidência relevante adicional pode habilitar-nos a determinar de um modo mais confiável se a conclusão é, de fato, verdadeira ou falsa (SALMON, 2010, p. 45).

O grande desafio para os interlocutores, emissor (o que apresenta o argumento e se responsabiliza por ele) e ouvinte (a quem se destina a argumentação), nos raciocínios indutivos, sem um sistema formal para análise de correção, é apresentar um comportamento inteligente. Comportamento inteligente da parte do emissor tem a ver com a habilidade de apresentar conclusões fortes, plausíveis, a partir da base de conhecimento disponível, que muitas vezes é limitada, por ser do tipo amostral. Um comportamento inteligente por parte do ouvinte, tem a ver com a capacidade de assumir uma postura crítica e ativa diante dos argumentos apresentados a ele, verificando se, de fato, as premissas ou evidências apresentadas são verdadeiras e conseguem sustentar a conclusão apresentada na argumentação.

Considerando que no diálogo argumentativo as figuras do emissor e do ouvinte se revezam, uma postura crítica é condição permanente. Cabe ressaltar que ter postura crítica diante de uma argumentação, tem a ver com a capacidade de análise e verificação do encadeamento lógico das ideias, a fim de verificar se a conclusão está adequada às premissas. Postura crítica não é “espírito” de crítica, naquele sentido depreciativo das ideias apresentadas pelo autor da argumentação. Estamos falando de uma postura analítica, que permita identificar os pontos fortes e os fracos, se houver, da argumentação.

Uma postura crítica adequada exige do emissor e ouvinte alguns requisitos:

- **Maturidade intelectual**. Está relacionada à capacidade técnica e conhecimento do assunto tratado. Por exemplo, conhecer as técnicas dedutivas e saber reconhecer as falácias informais mais comuns auxiliam a análise e o raciocínio crítico do processo de inferência.
- **Perspicácia**. É a habilidade de perceber, de forma prudente e com bom critério, além do óbvio, além daquilo que foi dito, de perceber as entrelinhas.

- **Humildade**. Está relacionada à capacidade de reconhecer os próprios erros e assumir uma nova postura. Como foi dito, na lógica informal, nenhuma conclusão é necessariamente verdadeira, no máximo é provável. Como diz Cabrera (2017, p. 157), “segundo os critérios de uma das partes, o argumento será convincente; de acordo com os critérios da outra parte, os mesmos argumentos serão frouxos ou mesmo insustentáveis”.

Os argumentos indutivos, basicamente, se classificam em três tipos: Indução analógica, indução enumerativa e indução hipotética. Vejamos suas características.

8.1. A Argumentação Indutiva Analógica

Os argumentos por analogia ou comparativos, estabelecem uma relação entre objetos distintos, mas que podem ter características semelhantes. Compara-se uma ou mais situações conhecidas, tidas como referenciais, com uma outra situação desconhecia, total ou parcialmente, aplicando a ela as informações das referenciais. Para Ferreira, Ramos e Scherner (2010, p. 12), “A analogia, um tipo de indução, pode ser clamada de raciocínio por semelhança. Neste tipo de raciocínio, a inferência se dá por comparação”.

Muitos autores consideram os argumentos analógicos como sendo indutivos, porque também a eles é possível estabelecer um grau de força. À medida que aumentam as características de semelhanças entre os objetos, a analogia é fortalecida, ou seja, a probabilidade de a conclusão ser correta cresce quanto maior for a similaridade. Por um outro lado, ela será enfraquecida, se ampliada a dessemelhança. Veja o exemplo 8.4, de um argumento analogicamente fraco:

Exemplo 8.4. Meu melhor amigo foi trabalhar na França e ficou muito rico. Logo, eu vou trabalhar na França e ficarei muito rico também.

Agora, o exemplo 8.5 traz uma analogia forte:

Exemplo 8.5. A pescaria no mar é influenciada pelas fases da lua. Portanto, a pescaria nos rios também será influenciada pelas fases da lua.

São recorrentes, na esfera judicial, as decisões por analogia, quando não há previsão legal para o julgamento das lides. Veja, abaixo, os termos de uma decisão, acórdão nº 1143751, proferida por colegiado da 6ª turma Cível, composta por desembargadores do Tribunal de Justiça do Distrito Federal e Territórios – TJDFT- em um processo judicial, no qual a parte requerente teve provido o seu recurso:

> DIREITO DO CONSUMIDOR. CONTRATOS DE EMPRÉSTIMO BANCÁRIO. DESCONTO EM FOLHA DE PAGAMENTO. LIMITAÇÃO EM 30% DOS RENDIMENTOS. DÉBITO EM CONTA
> CORRENTE. ANALOGIA.
> I – O empréstimo consignado em folha de pagamento realizado pelo servidor público distrital é regulado pela Lei Complementar nº 840/2011, cujo § 2º do art. 116 estabelece que a soma das consignações não poderá exceder a 30% da remuneração ou do vencimento do servidor.
> II – Os débitos em conta corrente, relativos aos pagamentos de empréstimos bancários regularmente contraídos, não são abusivos ou ilegais quando autorizados pelo contratante e previstos no contrato. Todavia, quando verificado que o credor contribuiu para o estado de incapacidade financeira do devedor, os descontos efetuados pela instituição financeira devem se limitar, por analogia (grifos nossos), a 30% dos vencimentos do mutuário, de forma a assegurar o mínimo necessário à sua subsistência e de sua família.
> III – Deu-se provimento ao recurso.

8.2. Os Argumentos Indutivos por Enumeração

O raciocínio indutivo por enumeração expressa a essência dos argumentos indutivos. A partir dos elementos de uma amostra, ou de um conjunto de amostras, obtida de uma classe, são geradas premissas, as quais serão utilizadas para se chegar a conclusões acerca de toda a classe, em um processo tipicamente estatístico.

Seja S uma classe e A, uma amostra obtida de S. Considere P uma característica ou propriedade qualquer. A forma geral desses argumentos é a seguinte:

P_1: x % dos elementos de A são P.

$\vdots$

$\therefore\ P_n$: x % de S são P

Exemplo 8.6. Em uma pesquisa com 200 eleitores de uma grande cidade, 20% declararam que votariam no candidato X. Logo, 20% da população eleitoral daquela cidade votarão em X.

Naturalmente, a indução por enumeração está sujeita a conclusões erradas, por força da variabilidade amostral. Assim como na Estatística, aumentando-se o tamanho da amostra, reduz-se o erro máximo admitido. Ou seja, a conclusão do argumento será mais forte, se a amostra for representativa e suficientemente grande.

8.3. Argumentação Indutiva Hipotética.

A indução hipotética, ou abdução, é a chamada “inferência pela melhor explicação”. É uma forma de raciocínio muito comum no dia-a-dia das pessoas. Por exemplo, é comum se buscar a melhor explicação nos diagnósticos médicos para doenças, no laudo de um perito policial ou mesmo no parecer de um mecânico de veículos, para algum defeito do carro. De uma forma geral, nem todas as explicações para um acontecimento são igualmente boas, mas deve-se buscar a “melhor explicação” para os fatos. Veja, no exemplo 8.7, uma situação hipotética, porém comum, de um suposto diagnóstico médico, que busca a melhor explicação para a doença de um paciente.

Exemplo 8.7. Um médico recebe em seu consultório um paciente queixando-se de fortes dores no lado inferior direito do abdome. Inicia-se o seguinte diálogo:
- Médico: Náuseas ou vômitos?
- Paciente: Sim!
- Médico: Está tendo febre?
- Paciente: Sim, persistente e está entre 37,5°C e 38,5°C.
- Médico: Está com perda de apetite?
- Paciente: Sim. Estou sem vontade de comer coisa alguma!

O médico, então, pede ao paciente que se deite em uma maca, de barriga para cima. Após, pressiona com uma mão sobre o lado inferior direito na barriga do paciente, aliviando rapidamente a pressão. Nesse momento, o paciente grita, se queixando que a dor ficou mais intensa. O médico conclui: Existe boas chances de ser apendicite.

8.4. As Falácias Informais

As falácias são tipos incorretos de raciocínio. São cometidas quando o processo de inferência é inadequado. Estão presentes em todos os tipos de argumentos, tanto os dedutivos quanto os indutivos.

O estudo das falácias informais é útil porque pode evitar que caiamos nas armadilhas e enganos provocados por argumentos tendenciosos, na medida em que amplia o senso crítico e, por assim dizer, melhora a autodefesa intelectual. Nos dizeres de Copi (1978, p. 73), "[...] definimos falácia como uma forma de raciocínio que parece correta, mas que, quando examinada cuidadosamente, não o é", afirma, ainda, que "é proveitoso estudar tais raciocínios, pois a familiaridade com eles e seu entendimento impedirão que sejamos iludidos".

No geral, quando um argumento informal é falacioso, ou seja, apresenta um raciocínio incorreto que leva a conclusões inadequadas, a sua base de conhecimento, formada pelas premissas, contem afirmações inaceitáveis, irrelevantes ou insuficientes.

Uma premissa é inaceitável quando ela for duvidosa ou incerta, às vezes, até mais do que a conclusão. Por exemplo, o seguinte argumento é falacioso, porque utiliza a própria premissa na conclusão: "José falou a verdade na reunião, porque José não mente quando fala". Outro exemplo seria o "Falso Dilema", que é um tipo de argumentação em que é apresentado ao ouvinte apenas algumas alternativas, no geral duas, quando na realidade há outras. O exemplo 8.8 ilustra essa situação.

Exemplo 8.8. Ou você vota no candidato A ou o Brasil afunda de vez. Você não quer que o Brasil afunde de vez. Logo, você tem que votar no candidato A.

Por um outro lado, a premissa é irrelevante quando ela não estabelece uma relação direta com a verdade dos fatos, apresentada na conclusão. É comum a utilização de premissas irrelevantes nos argumentos contra a pessoa, também chamados argumentos "contra o homem", os quais serão melhor caracterizados mais à frente. Veja o exemplo 8.9.

Exemplo 8.9. Não devemos acreditar no que o Ministro da Economia afirma, sobre a política fiscal, porque ele foi empresário e não será atingido por ela.

Uma premissa é dita insuficiente quando ela não estabelece a conclusão. por exemplo, no processo de generalização indutiva, quando as premissas são estabelecidas a partir de uma pequena amostra, não representativa do todo, elas são ditas insuficientes. Tal fato pode ocorre, também, nos argumentos por analogia, quando se deixa de considerar aspectos que eram relevantes à comparação (a chamada “Falsa Analogia”). Veja o exemplo 8.10.

Exemplo 8.10. 60% dos alunos do PROFMAT são homens. Portanto, a maioria dos estudantes de mestrado em matemática são do sexo masculino.

Com vistas ao desenvolvimento da postura crítica, passaremos a avaliar algumas falácias, mais comuns na literatura, e que apresentam razoável concordância. Esses argumentos, tradicionalmente, recebem nomes da língua latina. Não se pretende, aqui, fazer um estudo exaustivo da matéria, mas apresentar as falácias informais mais comuns e enganadoras.

8.4.1. O Argumento *ad Baculum* (apelo à força)

É o argumento no qual o emissor, pelo uso da ameaça ou força, obriga o ouvinte a aceitar seu ponto de vista, a sua conclusão. Copi (1978, p. 74) indica que “é a falácia que se comete, quando se apela para a força ou a ameaça de força para provocar a aceitação de uma conclusão”. Para Ferreira, Ramos e Scherner (2010, p. 56) “O interlocutor é obrigado a concordar com o argumento se quiser evitar consequências drásticas. Veja o exemplo 8.11.

Exemplo 8.11. Em uma reunião com a equipe de vendas de uma empresa, a diretoria argumentou: O país está em crise. As vendas caíram drasticamente. A empresa precisa reduzir custos. Haverá redução no percentual da comissão de vendas, de 10% para 5%. Portanto, ou você aceita a proposta de redução no percentual da comissão de vendas ou será demitido.

8.4.2. O Argumento *ad Hominem* (Argumentação contra a pessoa)

O argumento *ad Hominem* é o ataque “contra o homem”. É o tipo de falácia que se comete quando se busca refutar a conclusão do argumento, por meio da desqualificação de quem apresentou o argumento, num ataque pessoal. Copi (1978, p. 75) afirma que “é o argumento dirigido contra o homem.”, alertando, ainda, que “este argumento é falaz, porque o caráter pessoal de um homem é logicamente irrelevante para determinar a verdade ou falsidade do que ele diz ou a correção ou incorreção de seu raciocínio”.

É bastante comum nos debates políticos, quando os interlocutores, ao invés de debater propostas para o povo, buscam denegrir a imagem do opositor, em ataques pessoais. A bem da verdade, o ataque pessoal, embora perigoso porque favorece a exaltação dos ânimos, na política, pode ser um fator favorável, para que se conheça o caráter e a conduta pessoal dos candidatos a cargos públicos. O exemplo 8.12 ilustra o argumento contra a pessoa.

Exemplo 8.12. É uma falácia contra a pessoa a seguinte argumentação: “Certamente o réu é culpado e mentiu ao dizer que é inocente, pois já cometeu crime semelhante, quando era menor de idade”.

Comentário. A culpa ou a inocência de um acusado deve ser medida pelos atos que ele cometeu, mediante provas. Não pela vida pregressa, ou por ato praticado quando menor.

8.4.3. O Argumento *ad Ignorantiam* (argumento pela ignorância)

O *argumentum ad ignorantiam* é a falácia que se comete ao admitir que algo é verdadeiro, simplesmente porque ninguém provou que é falso e vice-versa. Ferreira, Ramos e Scherner (2010, p. 56) chama de “apelo à ignorância” e diz: “aqui existem duas conotações possíveis: ou se acredita que algo é verdadeiro porque nunca se provou que era falso, ou se defende que é falso porque nunca se provou que era verdadeiro”. Veja o exemplo 8.8, que apresenta uma falácia de apelo à ignorância:

Exemplo 8.13. Cometemos essa falácia, ao afirmarmos “é impossível que existam ETs, porque nunca vimos um”.

8.4.4. Argumentum *ad Misericordium* (Apelo à piedade)

É a falácia que se comete ao buscar o convencimento pela misericórdia ou piedade. Esse tipo de argumento é muito utilizado em ciências jurídicas, em particular nos Tribunais do Júri, que julgam os crimes dolosos contra a vida. Por exemplo, a falácia *ad misericordium* ocorre quando o advogado de defesa, ou mesmo o réu em seu interrogatório, pede a absolvição, apelando para o senso de misericórdia dos jurados, sob o argumento do tipo “a pena para crimes hediondos é muito alta e o réu é muito jovem”; Ou quando pedem a absolvição, porque “cadeia não ressocializa ninguém”. O exemplo 8.14 apresenta um argumento de apelo à piedade.

Exemplo 8.14. Exemplo de duas falácias *ad Misericordium:* “devolva a guarda dos meus filhos, porque senão eu posso me matar”. “Professor, não me reprove porque eu sou bolsista da Capes”.

8.4.5. O Argumento *ad Populum* (Apelo popular)

A falácia do *argumentum ad populum*, apelo popular, é cometida de forma semelhante à do apelo à piedade, mas apela-se “ao povo”, recorrendo a ideias amplamente aceitas, mas sem provas. Para Copi (1978, p. 78), “Podemos definir o *argumentum ad populum* de um modo mais circunscrito como a tentativa de ganhar a concordância popular para uma conclusão, despertando as paixões e o entusiasmo da multidão”.

Exemplo 8.15. Falácia de apelo popular: Todo mundo sabe que manga com leite faz mal à saúde. Portanto, pare de chupar manga com leite.

8.4.6 O Argumento *ad Verecundiam* (Apelo à autoridade)

O argumentum ad verecundiam é o chamado apelo à autoridade. Busca-se fundamentar a conclusão da argumentação, através da citação de pessoas, peritos, obras ou instituições de renome. Nem sempre esse recurso é falacioso, porque justificar uma conclusão com base em tese de renomado cientista pode enriquecer a argumentação e colaborar efetivamente para a conclusão. Salmon (2010, p. 50) afirma

“Seria um equívoco primário supor que todo recurso à autoridade é ilegítimo. Pois o recurso à autoridade desempenha um papel indispensável na acumulação e aplicação dos conhecimentos”. Mas é importante diferenciar os recursos corretamente utilizados, dos incorretos ou falaciosos. A falácia *ad verecundiam* é cometida quando o interlocutor busca fundamentar suas ideias, utilizando-se da figura de famosos, pessoas reconhecidas ou peritos em determinados assuntos, muitas fezes sem identificá-los ou até mesmo fazendo referências não ditas por eles, em assuntos que sequer são especialistas. Os argumentos *ad verecundiam* seguem o seguinte esquema básico, Salmon (2010, p. 51):

P_1: x é uma autoridade a respeito de P

P_2: x afirma P

$\vdots$

$\therefore P_n$: P

Veja o exemplo 8.16 de uma falácia de apelo à autoridade.

Exemplo 8.16. “Einstein estudava 12 horas por dia, por isso, se você quiser ser um gênio, deve estudar pelo menos 12 horas por dia”.

CAPITULO 9. PROPOSTA DE APLICAÇÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, para que se alcance o resultado esperado, que é o desenvolvimento do pensamento crítico, apresenta-se a sequência ordenada dos assuntos a serem estudados e as expectativas de aprendizagem do aluno.

A proposta é que seja criado o campo "Lógica Matemática" na matriz curricular da matemática para o ensino médio. Sugere-se que os conteúdos programáticos sejam distribuídos, na sequência em que foram discutidos no trabalho, ao longo dos três anos do ensino médio.

Caso o estudante seja egresso do ensino médio, ou superior, e esteja se preparando na matéria para concorrer a algum cargo público, a sequência lógica de estudo dos assuntos, constante neste trabalho, capítulo a capítulo, mostrou-se eficiente para o processo de ensino-aprendizagem. Após numerosos cursos já ministrados, é possível fazer o treinamento intensivo em 10 aulas de 4 horas.

9.1. Primeiro Ano do Ensino Médio (10º ano)

I. **Conjuntos**

a) Evolução histórica. Definição e Representação.
b) Relações bivalentes: Pertinência e Igualdade. O conjunto universo e a noção de complementar.
c) O paradoxo de Russel.
d) Operações com conjuntos. Diagramas de Venn.

Expectativas de aprendizagem: A partir dos conceitos intuitivos de conjuntos, saber expressar ideias e resolver problemas de aplicação. Saber diagramar as operações com conjuntos.

Sugestões ao professor: Leitura do capítulo 1. É importante ressaltar a importância da História da Matemática para auxiliar os alunos a desenvolver atitudes mais positivas em relação à matéria. Nesse sentido, mostrar a evolução da teoria de conjuntos, a partir de sua criação por Georg Cantor, bem como as dificuldades enfrentadas pelos matemáticos da época na formulação da teoria, é interessante.

Para isso, sugere-se a releitura do tópico 1.2. Seria importante mostrar o que é um paradoxo, onde se sugerem os exemplos 1.1 e 1.2. Após apresentar cada definição (definições 1.1 a 1.6) das operações entre conjuntos, ter feito a resolução de questões práticas, sugere-se uma atenção maior às questões de diagramação, como as do exemplo 1.5.

II. **Sistemas Formais**

a) Definição. O alfabeto e a linguagem. Termos e proposições e a utilização de variáveis. As expressões proposicionais e o valor verdade. O método axiomático. As definições e os Teoremas.
b) A Formalização da Teoria de Conjuntos. Axioma da Extensão. Axioma do Vazio. Axioma da Separação.

Expectativas de aprendizagem: Compreender os processos de construção dos Sistemas Formais da matemática. Saber o que são os axiomas. Saber demonstrar o teorema da unicidade do vazio. Saber calcular o valor verdade para as expressões proposicionais, a partir do conjunto domínio das variáveis.

Sugestões ao professor: Nesse tópico, é importante que sejam criadas expressões proposicionais (por enquanto sem conectivos lógicos), com uma ou mais variáveis (veja um exemplo na página 23), e, a partir de um domínio definido, pedir aos alunos que calculem o correspondente valor lógico das expressões. Após a formalização dos axiomas básicos, atividades como as do exemplo 1.4 são interessantes, porque estimulam os alunos a criar conjuntos a partir de outro conjunto já definido anteriormente, desde que certa propriedade, fixada pelo professor, seja verdadeira. Sugere-se que sejam demonstrados os teoremas 1.1 e 1.2.

III. **Proposições Lógicas**

a) Definição. Proposições lógicas atômicas e proposições compostas. O alfabeto e os símbolos da lógica.
b) O valor verdade das proposições.
c) Os princípios da lógica clássica.

d) Construção de tabelas-verdade.

Expectativas de aprendizagem: O aluno deve ser capaz de identificar quais sentenças são proposições lógicas e quais não são proposições. Saber construir tabelas-verdade para sentenças com duas ou mais proposições atômicas distintas.

Sugestões ao professor: Releitura de todo o capítulo 2. Após a apresentação das definições (o que é e o que não é proposição lógica) e dos princípios lógicos, sugere-se como atividade os exemplos 1.1 e 1.2 e a questão 1 do apêndice A. Crie proposições lógicas, com múltiplas variáveis, para que o aluno identifique as proposições componentes e indique o número de linhas necessárias na tabela-verdade (veja o exemplo 2.4).

IV. **Os Operadores Lógicos**

a) Operador Negação.
b) Operador Conjunção.
c) Operador Disjunção Inclusiva.
d) Operador Disjunção Exclusiva.
e) Operador Condicional.
f) Operador Bicondicional.

Expectativas de aprendizagem: Compreender as relações lógicas dos conectivos, suas funções de verdade e tabelas-verdade. Saber identificar e representar as proposições em linguagem simbólica. Saber fazer cálculos proposicionais básicos. Resolver problemas de verdades e mentiras.

Sugestões ao professor: Leitura de todo o capítulo 3. Seria importante fazer o exemplo 3.1 em sala. A seguir, apresente a tabela de correlação dos conectivos lógicos (tabela 1) com as operações entre conjuntos. Sugere-se que a ordem de estudo dos conectivos seja aquela apresentada no trabalho, que se inicia com o operador negação, tópico 3.2. Após apresentar o conectivo negação, lance desafios para que os alunos resolvam questões de verdades e mentiras (veja os exemplos 3.2, 3.3, 3.4 e as questões 3 a 8 do apêndice A). Para essa atividade, apresente um dos problemas, por exemplo o 3.2, e peça que eles resolvam (no prazo de 5 minutos). Veja se alguém resolveu e discuta os argumentos apresentados. Após, recomenda-se que o professor mostre as duas possibilidades técnicas de resolução para esse problema. Para a resolução dos demais exercícios, pode-se formar grupos de alunos, mas cada grupo deve apresentar as suas conclusões. Na sequência, os estudos dos demais conectivos podem ser feitos de forma análoga, com questões práticas de cálculo proposicional (veja os exemplos 3.5 a 3.13).

9.2. Segundo Ano do Ensino Médio (11º ano)

I. **A Álgebra e o Cálculo Proposicional**

a) As propriedades dos conectivos lógicos.
b) O cálculo das fórmulas proposicionais.

Expectativas de aprendizagem: A partir dos conceitos, compreender as propriedades dos conectivos. Saber realizar cálculos proposicionais de fórmulas lógicas com múltiplas variáveis. Conseguir determinar o valor lógico de proposições atômicas, a partir do valor lógico das fórmulas.

Sugestões ao professor: Releitura do capítulo 3. Primeiramente, fazer uma avaliação diagnóstico, para se certificar que os alunos conhecem os conectivos. Feita a revisão de todos os operadores, recomenda-se treinar o preenchimento de tabelas (como as do exemplo 3.12). Fazer questões de cálculo proposicional em que o aluno tenha um ponto de partida (exemplo 3.14). Sugere-se, ainda, as questões 12 a 15 e 24 a 33, do apêndice A.

II. **Tautologias, Contradições e Contingências.**

a) Tautologia. Definição.
b) Contingência. Definição.
c) Contradição. Definição.

Expectativas de aprendizagem: A partir dos conceitos, saber classificar as proposições compostas em tautologia, contradição ou contingência.

Sugestões ao professor: Releitura do capítulo 4. Apresentadas as definições, recomenda-se os exemplos 4.1 a 4.6.

III. **As Equivalências Lógicas**

a) Definição de equivalência.
b) As fórmulas restritas e os conjuntos completos de conectivos.
c) As Leis de Augustus De Morgan.
d) As equivalências da condicional. A negação da condicional.
e) As equivalências da bicondicional.

Expectativas de aprendizagem: Saber demonstrar as principais regras de equivalência lógica e o teorema da equivalência. Saber representar qualquer proposição em uma fórmula restrita. Saber reescrever proposições mantendo o mesmo sentido lógico, a partir das regras de equivalência. Saber construir a negação de todos os operadores da lógica, a partir das regras básicas de equivalência.

Sugestões ao professor: Releitura do capítulo 5. Seria importante demonstrar o teorema 5.1 (Equivalência) e mostrar uma aplicação, como a do exemplo 5.1. Apresentar as regras de equivalência, iniciando pela regra da dupla negação e as leis de De Morgan, fazendo questões como a do exemplo 5.4. As equivalências da condicional são muito importantes (tópicos 5.2.3 e 5.2.4), por isso recomenda-se as construções como as dos exemplos 5.5 e 5.6 e as questões 34 a 36, do apêndice A. Deve-se mostrar que toda proposição possui uma fórmula restrita, através do teorema 5.2.

9.3. Terceiro Ano do Ensino Médio (12º ano)

I. **Argumentação Lógica**

a) Definição de argumentação.

b) As bases do conhecimento.
c) Os tipos de argumentação.
d) As fases da argumentação. A existência. Os interlocutores. A organização e reconstrução. O valor verdade das premissas. A efetividade da argumentação.
e) Validade dedutiva e o grau de força indutiva.

Expectativas de aprendizagem: Ao fim desse módulo o aluno deverá ser capaz de definir o que é uma argumentação lógica e classificar os argumentos em dedutivos ou indutivos. Deverá entender as fases da argumentação e desenvolver habilidades para identificar e organizar as premissas e a conclusão dos argumentos. Deverá saber que a base de conhecimento de uma argumentação é formada por suas premissas e que pode ser alterada. Deverá compreender que os argumentos dedutivos podem ser válidos ou inválidos, independentemente do conteúdo das afirmações presentes na argumentação. Entender que os argumentos indutivos possuem grau de força. Entender a importância da efetividade na argumentação.

Sugestões ao professor: Releitura do capítulo 6. Apresentar a definição de argumentação de forma gradativa, ou seja, dando um exemplo de cada um dos tipos de argumentos e estimulando os alunos para que percebam a ideia e as diferenças (veja os exemplos 6.1 e 6.2). Defina argumento e dê início ao estudo das fases da argumentação (tópicos 6.2 a 6.7), sempre apresentado exemplos práticos (como os exemplos 6.3 a 6.11).

II. **Os argumentos dedutivos**

a) Forma lógica.
b) Definição de validade.
c) Teorema da validade.
d) Análise de validade: Por tabelas-verdade; por diagramação; por cálculo proposicional; por regras de inferência e por redução ao absurdo.

Expectativas de aprendizagem: O aluno deverá saber representar formalmente os argumentos dedutivos. Definir validade e demonstrar o teorema da validade. Entender que a validade dos argumentos dedutivos está associada à forma lógica e não ao conteúdo das afirmações constantes nas premissas. Diferenciar validade e veracidade nos argumentos dedutivos. Conhecer e aplicar as diversas técnicas de análise de validade para os argumentos dedutivos.

Sugestões ao professor: Recomenda-se iniciar o estudo dos argumentos dedutivos (tópico 6.8) treinando os alunos a fazer a representação formal (tópico 6.8.1) (exemplos 6.12 e 6.13); após, apresente a definição de validade e a demonstração do teorema 6.1. Todas as técnicas apresentadas são importantes, por isso recomenda-se que todas elas sejam estudadas, pois, dependendo da argumentação a ser analisada, uma ou outra se mostra mais plausível. Sugere-se que o estudo das técnicas de análise dedutiva seja iniciado pela técnica das tabelas-verdade, tópico 6.8.3, por ser de fácil aplicação (exemplos 6.14 a 6.17). Em sequência, mostre a técnica de validade por diagramação, tópico 6.8.4, que é uma forma mais visual e que usa a teoria de conjuntos (exemplos 6.18 a 6.21). Após, apresente a técnica do cálculo proposicional (aplicação nos exemplos 6.22 a 6.26). Por fim, para a análise de validade por regras de dedução (tópico 6.8.6) e por redução ao absurdo (tópico 6.8.7), recomenda-se os exemplos 6.27 a 6.32). É muito importante que o aluno perceba, na argumentação dedutiva, que o acréscimo de novas premissas à base de conhecimento, só pode ser feito por regras de inferência ou equivalência lógica, mas que isso não altera o resultado final da análise.

III. **Proposições Categóricas**

a) As proposições categóricas. Forma e representação simbólica.
b) Diagramação das proposições categóricas.
c) Os silogismos categóricos.
d) Análise de validade dos silogismos categóricos. As regras de validação e a técnica de diagramação para análise de validade.

Expectativas de aprendizagem: O aluno deverá conhecer os quatro tipos de proposições categóricas de Aristóteles e suas formas lógicas. Deverá saber fazer a construção dos diagramas lógicos que representam as proposições categóricas.

Saber o que é silogismo categórico, identificar suas componentes e como analisar a validade desses argumentos.

Sugestões ao professor: Releitura do capítulo 7. Recomenda-se para os estudos das proposições categóricas (tópico 7.1 a 7.4) a construção dos diagramas lógicos que as representam. O ideal é que se apresente um problema prático, que possa ser resolvido por meio dos diagramas (veja os exemplos 7.2 e o 7.6). É importante destacar quais proposições categóricas são contraditórias (veja uma aplicação nos exemplos 7.3 a 7.5). Após, deve-se apresentar os argumentos categóricos (tópico 7.8), indicando os tipos e as técnicas de análise de validade dos silogismos (tópico 7.8.1). Os exemplos 7.11 a 7.18 são aplicações para as duas técnicas discutidas.

IV. **Argumentação indutiva.**

a) O grau de força na argumentação indutiva.
b) A indução analógica.
c) A indução por enumeração.
d) A indução hipotética.
e) As principais falácias indutivas: O apelo à força; a argumentação contra a pessoa; a argumentação pela ignorância; o apelo à piedade; o apelo popular e o apelo à autoridade.

Expectativas de aprendizagem: O aluno deverá entender que o acréscimo de novas premissas aos argumentos indutivos pode alterar o grau de força da argumentação. Deverá perceber que o grau de força é relativo e depende, em alguns casos, da aceitação dos interlocutores. Saber identificar os principais tipos de argumentos indutivos. Conhecer as principais falácias indutivas e saber se posicionar frente a elas.

Sugestões ao professor: Releitura do capítulo 8. Deve-se apresentar as características principais do raciocínio indutivo, por meio de exemplos práticos (veja exemplos 8.1 a 8.7), que ilustrem os três tipos básicos de indução: Analógica, por enumeração e a hipotética (tópicos 8.1 a 8.3). É muito importante destacar que, no raciocínio indutivo, o acréscimo de novas premissas à base de conhecimento pode mudar o grau de força da argumentação, diferentemente do que ocorre nos dedutivos.

10. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal desse trabalho foi apresentar bases lógicas para o desenvolvimento do raciocínio analítico e crítico, por parte dos alunos do ensino médio. Muitos desses alunos ingressarão em universidades e no serviço público, como servidores da sociedade. Além de promover a autodefesa intelectual, na medida em capacita as pessoas a tomar decisões mais lógicas e coerentes, o desenvolvimento do pensamento crítico tornará esses alunos profissionais melhores, quer sejam professores, médicos, advogados, policiais, filósofos, etc.

No geral, o pensamento crítico não é ensinado nas escolas. Esse é um grave erro que o trabalho procura resolver, ao propor que se inclua a disciplina lógica matemática na grade curricular do ensino médio, como forma de desenvolver o raciocínio lógico dos alunos.

Foi mostrado que tal inclusão é perfeitamente possível, pois a partir das noções básicas das operações com conjuntos, assunto estudado no ensino médio, pode-se fazer uma correlação com a álgebra proposicional, componente do sistema formal da lógica, e avançar até o estudo das argumentações, formando a base para o desenvolvimento do intelecto.

É consenso entre os educadores matemáticos que os resultados obtidos na educação brasileira, nos ensinos fundamental e médio, não são satisfatórios. Embora haja avanços nas políticas públicas na área de educação, tais como a implantação de programas de treinamento, aperfeiçoamento e formação continuada do educador matemático (o PROFMAT é um exemplo), o acesso a material didático com inclusão digital e, em alguns casos, melhoria nas instalações, os resultados são pífios.

É preciso mudar esse cenário! Os indicadores revelam que os métodos de ensino atuais são frágeis. O professor de matemática precisa inovar e romper o paradigma de que a matemática é só para gênios, que nasceram com o dom para a matéria, e criar no aluno o interesse pelo estudo da disciplina. É necessário mostrar que a matemática não é formada apenas por modelos algébricos, com aplicações de fórmulas em exercícios repetitivos, na busca de se obter somente resultados exatos.

Neste sentido, o estudo da lógica é uma janela de oportunidades, pois as inúmeras aplicações de seus conceitos permitirão que se discuta temas que vão da filosofia ao direito, da matemática à engenharia.

A lógica constitui uma das ciências que mais evoluíram no século XX, com várias aplicações teóricas e práticas, como no estudo da argumentação, nos modelos e circuitos digitais da eletrônica, nas telecomunicações, na inteligência artificial (sobretudo robótica), na engenharia da produção e na ciência da computação, em geral.

Além disso, foi mostrado que o raciocínio lógico pode ampliar a capacidade do aluno de aprender sozinho, de ser autodidata, pois estimula o aluno a buscar respostas e ir além do que está escrito. A ampliação da habilidade de pensar criticamente pode reduzir a dependência gradativa do aluno em relação ao professor, uma postura que se espera dos alunos egressos do ensino médio, quando chegam às universidades.

Outro fato que merece destaque, é que todos os professores, independentemente de suas áreas de atuação, podem se beneficiar a partir das ideias contidas nesse trabalho. O ensino crítico de sua própria disciplina, mais adaptado ao dia a dia dos alunos, tornará a matéria mais interessante, além de efetivamente colaborar para que os alunos se tornem profissionais melhores.

Por fim, o desenvolvimento do pensamento crítico pode permitir ao aluno que exerça protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva, na medida que estimula a comunicação e a produção de conhecimento, de forma mais significativa, reflexiva e ética, nas diversas práticas sociais, tanto na escola, quanto fora dela.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] COPI, Irving Marmer. **Introdução à Lógica**. 2ª ed. São Paulo: Mestre Jou,1978.

[2] FEITOSA, Hércules de Araújo; Paulovich, Leonardo. **Um prelúdio à lógica.** São Paulo: Unesp, 2005.

[3] MORTARI, César A. **Introdução à lógica.** São Paulo: Unesp, 2001.

[4] SALMON, Wesley C. **Lógica**. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

[5] ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à Lógica Matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

[6] FERREIRA, Jane Mendes; RAMOS, Simone Cristina; SCHERNER, Maria L. Trevisan. **Raciocínio Analítico**. São Paulo: Atlas, 2010.

[7] ENDERTON, Herbert B. **A Mathematical Introduction to Logic**. 2ª ed. Los Angeles: Harcourt, 2001.

[8] DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e Álgebra de Boole**. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2009.

[9] ROCHA, Enrique. **Raciocínio Lógico**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

[10] PASCHOALIN, Maria Aparecida. **Gramática: Teoria e Exercícios**. Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2008.

[11] LIMA, Elon Lages: **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[12] CONIGLIO, Marcelo Esteban. **Teoria Axiomática de Conjuntos**: Uma Introdução. Disponível em <http://www.cle.unicamp.br/prof/coniglio/CONJUN.pdf> acessado em 15/09/2018.

[13] CABRERA, Júlio. **Introdução a uma abordagem negativa da argumentação**. Disponível em <https://online.unisc.br/seer/index.php/signo/article/view/7990>. Acessado em 15/10/2018.

[14] PEACH, Glen. **Visualização gráfica dos fundamentos da lógica matemática por meio de diagramas de conjuntos**. Disponível em <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/9278>. Acessado em 31/10/2017.

[15] PEREIRA, Silvio do Lago. **Lógica Proposicional**. Disponível em <https://www.ime.usp.br/~slago/ia-2.pdf>. Acessado em 15/10/2018.

[16] WALTON, Douglas N. **Lógica Informal**. 2ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2012.

[17] FAJARDO, Rogério Augusto dos Santos. **Teoria de Conjuntos**. Disponível em https://www.ime.usp.br/~fajardo/Conjuntos.pdf. Acessado em 12/11/2018.

[18] NUNES, André Anderson da Silva. **Lógica Básica e o Método Axiomático: Uma Introdução Através da Teoria dos Conjuntos.** Disponível em **http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/18944/1/2015_AndreAndersondaSilvaNunes.pdf. Acessado em 03/12/2017.**

[19] MENDES, Gilmar Ferreira; BRANCO, Paulo Gustavo Gonet. **Curso de Direito Constitucional**. 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

[20] BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **BNCC - Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 2018. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/**.** Acessado em 03/01/2019.

APÊNDICE A

LISTA DE QUESTÕES PROPOSTAS

1) (Cespe) A lógica formal representa as afirmações que os indivíduos fazem em linguagem do cotidiano para apresentar fatos e se comunicar. Uma proposição é uma sentença que pode ser julgada como verdadeira (V) ou falsa (F) (embora não se exija que o julgador seja capaz de decidir qual é a alternativa válida). Para designar as proposições, usam-se freqüentemente as letras maiúsculas do alfabeto: A, B, C etc.Tendo como referência as informações acima, julgue os itens que se seguem.

(1) Nas sentenças abaixo, apenas A e D são proposições.

A: 12 é menor que 6.

B: Para qual time você torce?

C: x + 3 > 10.

D: Existe vida após a morte.

(2) Há duas proposições no conjunto de sentenças

- O Banco do Brasil foi criado em 1980.
- Faça seu trabalho corretamente.
- Manuela tem mais de 40 anos de idade.

(3) Na lista de frases a seguir há exatamente três proposições.

- “A frase dentro destas aspas é mentira”
- A expressão x + y é positiva.
- O valor de $\sqrt{4}+3=7$.
- Pelé marcou 10 gols para a seleção brasileira.
- O que é isto?

(4) Na lista de frases a seguir, há exatamente 2 proposições.

I Esta frase é falsa.

II O TCE/AC tem como função fiscalizar o orçamento do estado do Acre.

III Quantos são os conselheiros do TCE/AC?

2) (CESPE) Julgue os itens seguintes*

(1) O número de linhas da tabela-verdade da proposição $(P \wedge Q \rightarrow R)$ é inferior a 6.

(2) Considere que A, B e C sejam proposições simples, distintas, e que a proposição D seja definida por D = [A↔B] →[¬A] →C. Nesse caso, a tabela-verdade da proposição D tem 16 linhas.

(3) Suponha-se uma comunidade na qual cada um de seus membros fala sempre proposições verdadeiras ou fala sempre proposições falsas. Sendo assim, se três membros dessa comunidade estiverem conversando, a quantidade de vezes em que é possível pelo menos dois deles dizerem a verdade é igual a 4.

(4) Considere-se o conjunto de dois elementos Γ = {0, 1}. A quantidade de códigos com até três caracteres que se pode construir usando os elementos de Γ, de modo que esses códigos sejam iguais quando lidos da esquerda para a direita e da direita para a esquerda é no máximo 7.

* itens de provas diversas.

3) (FGV/Senado) Um crime é cometido por uma pessoa e há quatro suspeitos: André, Eduardo, Rafael e João. Interrogados, eles fazem as seguintes declarações:

- André: Eduardo é o culpado.
- Eduardo: João é o culpado.
- Rafael: Eu não sou culpado.
- João: Eduardo mente quando diz que eu sou culpado.

Sabendo que apenas um dos quatro disse a verdade, o culpado:

(A) é certamente André.

(B) é certamente Eduardo.

(C) é certamente Rafael.

(D) é certamente João.

(E) não pode ser determinado com essas informações.

4) (FCC-TST/2017) Cássio, Ernesto, Geraldo, Álvaro e Jair são suspeitos de um crime. A polícia sabe que apenas um deles cometeu o crime. No interrogatório, os suspeitos deram as seguintes declarações:
Cássio: Jair é o culpado do crime.
Ernesto: Geraldo é o culpado do crime.
Geraldo: Foi Cássio quem cometeu o crime.
Álvaro: Ernesto não cometeu o crime.
Jair: Eu não cometi o crime.
Sabe-se que o culpado do crime disse a verdade na sua declaração. Dentre os outros quatro suspeitos, exatamente três mentiram na declaração. Sendo assim, o único inocente que declarou a verdade foi

(A) Cássio.
(B) Ernesto.
(C) Geraldo.
(D) Álvaro.
(E) Jair.

Texto para as questões 5 e 6

(FUNIVERSA/PCDF-Papiloscopista) Um grupo de 4 jovens foram encontrados por um policial que passava pelo local em frente a um muro recém-pichado. O policial, tentando encontrar o autor do vandalismo, perguntou:

- Quem prichou o muro?
- Jorge, um dos jovens responde: Não fui eu. Estava apenas de passagem por aqui, assim como o senhor.
- Marcelo responde em seguida, apontando para outro rapaz: Quem pichou o muro foi marcos.
Pedro defende o amigo
- Marcelo está mentido.
- Marcos se manifesta acusando outra pessoa: eu jamais picharia o muro. Quem pichou foi o Pedro.
O policial percebe que apenas um deles mentiu.

5) Assinale a alternativa correta.

(A) Jorge mentiu.
(B) Marcos mentiu.
(C) Marcelo mentiu.
(D) Pedro mentiu.
(E) O diálogo e a dedução do policial são insuficientes para descobrir qual dos jovens mentiu.

6) Assinale a alternativa correta.

(A) Jorge pichou o muro.
(B) Marcos pichou o muro.
(C) Marcelo pichou o muro.
(D) Pedro pichou o muro.
(E) O diálogo e a dedução do policial são insuficientes para descobrir qual dos jovens é o autor do vandalismo.

7) (ESAF) Cinco amigas, Ana, Bia, Cati, Dida e Elisa, são tias ou irmãs de Zilda. As tias de Zilda sempre contam a verdade e as irmãs de Zilda sempre mentem. Ana diz que Bia é tia de Zilda. Bia diz que Cati é irmã de Zilda. Cati diz que Dida é irmã de Zilda. Dida diz que Bia e Elisa têm diferentes graus de parentesco com Zilda, isto é: se uma é tia a outra é irmã. Elisa diz que Ana é tia de Zilda. Assim, o número de irmãs de Zilda neste conjunto de cinco amigas é dado por:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

8) (FGV) - Perguntou-se a três pessoas qual delas se chamava Antônio. A primeira pessoa respondeu: “Eu sou Antônio”. A seguir, a segunda pessoa respondeu: “Eu não sou Antônio”. Finalmente, a terceira respondeu: “A primeira pessoa a responder

não disse a verdade". Sabendo-se que apenas uma delas se chama Antônio e que duas delas mentiram, é correto concluir que Antônio:

A) foi o primeiro a responder e que somente ele disse a verdade.
B) foi o primeiro a responder e que a segunda pessoa foi a única a dizer a verdade.
C) foi o primeiro a responder e que a terceira pessoa foi a única a dizer a verdade.
D) foi o segundo a responder e que somente ele disse a verdade.
E) foi o segundo a responder e que a terceira pessoa foi a única a dizer a verdade.

9) (CESPE/INSS-2016) Julgue os itens a seguir, relativos a raciocínio lógico e operações com conjuntos.

(1) A sentença "Bruna, acesse a Internet e verifique a data da aposentadoria do Sr. Carlos!" é uma proposição composta que pode ser escrita na forma $P \wedge Q$.
(2) Para quaisquer proposições p e q, com valores lógicos quaisquer, a condicional $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$será, sempre, uma tautologia.

(3) Caso a proposição simples "Aposentados são idosos" tenha valor lógico falso, então o valor lógico da proposição " Aposentados são idosos, logo eles devem repousar" será falso.

(4) Dadas as proposições simples p: " Sou aposentado" e q: "nunca faltei ao trabalho" a proposição composta " Se sou aposentado e nunca faltei ao trabalho, então não sou aposentado " deverá ser escrita na forma $p \wedge q \rightarrow \sim p$ usando-se os conectivos lógicos.

10)(CESPE/INSS) Proposições são sentenças que podem ser julgadas como verdadeiras — V — ou falsas — F —, mas não como ambas. Se P e Q são proposições, então a proposição "Se P então Q", denotada por P→Q, terá valor lógico F quando P for V e Q for F, e, nos demais casos, será V. Uma expressão da forma ¬P, a negação da proposição P, terá valores lógicos contrários aos de P. P ∨ Q, lida como "P ou Q", terá valor lógico F quando P e Q forem, ambas, F; nos demais casos, será V. Considere as proposições simples e compostas apresentadas abaixo, denotadas por A, B e C, que podem ou não estar de acordo com o artigo 5.º da Constituição Federal.

A: A prática do racismo é crime afiançável.

B: A defesa do consumidor deve ser promovida pelo Estado.

C: Todo cidadão estrangeiro que cometer crime político em território brasileiro será extraditado.

De acordo com as valorações V ou F atribuídas corretamente às proposições A, B e C, a partir da Constituição Federal, julgue os itens a seguir.

(1) Para a simbolização apresentada acima e seus correspondentes valores lógicos, a proposição $B \to C$ é V.

(2) De acordo com a notação apresentada acima, é correto afirmar que a proposição $(\neg A) \vee (\neg C)$ tem valor lógico F.

11) (Cespe/PCDF-2013) Considerando que P e Q representem proposições conhecidas e que V e F representem, respectivamente, os valores verdadeiro e falso, julgue os próximos itens.

(1) A proposição $[P \vee Q] \to Q$ é uma tautologia.

(2) Se P for F e P $\vee$ Q for V, então Q é V.

12) (FGV/2016) Sobre as atividades fora de casa no domingo, Carlos segue fielmente as seguintes regras: - Ando ou corro. - Tenho companhia ou não ando. - Calço tênis ou não corro. Domingo passado Carlos saiu de casa de sandálias. É correto concluir que, nesse dia, Carlos:

(A) correu e andou;

(B) não correu e não andou;

(C) andou e não teve companhia;

(D) teve companhia e andou;

(E) não correu e não teve companhia.

13) (FUNIVERSA-APEX) Pedro namora ou trabalha; lê ou não namora; rema ou não trabalha. Sabendo-se que Pedro não rema, é correto concluir que ele:

(A) trabalha e namora.
(B) não namora e lê.
(C) não lê e trabalha.
(D) não trabalha e não lê.
(E) lê e namora.

14)(FCC/2017) Considere, abaixo, as afirmações e o valor lógico atribuído a cada uma delas entre parênteses.

− Ou Júlio é pintor, ou Bruno não é cozinheiro (afirmação FALSA).
− Se Carlos é marceneiro, então Júlio não é pintor (afirmação FALSA).
− Bruno é cozinheiro ou Antônio não é pedreiro (afirmação VERDADEIRA).

A partir dessas afirmações,

(A) Júlio não é pintor e Bruno não é cozinheiro.
(B) Antônio é pedreiro ou Bruno é cozinheiro.
(C) Carlos é marceneiro e Antônio não é pedreiro.
(D) Júlio é pintor e Carlos não é marceneiro.
(E) Antônio é pedreiro ou Júlio não é pintor.

15)(FCC) Considere verdadeiras as afirmações abaixo.

I. Ou Bruno é médico, ou Carlos não é engenheiro.
II. Se Durval é administrador, então Eliane não é secretária.
III. Se Bruno é médico, então Eliane é secretária.
IV. Carlos é engenheiro.

A partir dessas afirmações, pode-se concluir corretamente que

(A) Eliane não é secretária e Durval não é administrador.
(B) Bruno não é médico ou Durval é administrador.
(C) se Eliane não é secretária, então Bruno não é médico.
(D) Carlos é engenheiro e Eliane não é secretária.
(E) se Carlos é engenheiro, então Eliane não é secretária.

16) (ESAF/CGU – Analista) Amigas desde a infância, Beatriz, Dalva e Valna seguiram diferentes profissões e hoje uma delas é arquiteta, outra é psicóloga, e outra é economista. Sabe-se que ou Beatriz é a arquiteta ou Dalva é a arquiteta. Sabe-se, ainda, que ou Dalva é a psicóloga ou Valna é a economista. Sabe-se, também, que ou Beatriz é a economista ou Valna é a economista. Finalmente, sabe-se que ou Beatriz é a psicóloga ou Valna é a psicóloga. As profissões de Beatriz, Dalva e Valna são, pois, respectivamente,

a) psicóloga, economista, arquiteta.
b) arquiteta, economista, psicóloga.
c) arquiteta, psicóloga, economista.
d) psicóloga, arquiteta, economista.
e) economista, arquiteta, psicóloga.

17) (Cespe/INSS) Roberta, Rejane e Renata são servidoras de um mesmo órgão público do Poder Executivo Federal. Em um treinamento, ao lidar com certa situação, observou-se que cada uma delas tomou uma das seguintes atitudes:

*A*1: deixou de utilizar avanços técnicos e científicos que estavam ao seu alcance;
*A*2: alterou texto de documento oficial que deveria apenas ser encaminhado para providências;
*A*3: buscou evitar situações procrastinatórias.

Cada uma dessas atitudes, que pode ou não estar de acordo com o Código de Ética Profissional do Servidor Público Civil do Poder Executivo Federal (CEP), foi tomada por exatamente uma das servidoras. Além disso, sabe-se que a servidora Renata tomou a atitude A3 e que a servidora Roberta não tomou a atitude A1. Essas informações estão contempladas na tabela a seguir, em que cada célula, correspondente ao cruzamento de uma linha com uma coluna, foi preenchida com V (verdadeiro) no caso de a servidora listada na linha ter tomado a atitude representada na coluna, ou com F (falso), caso contrário.

	A_1	A_2	A_3
Roberta	F		
Rejane			
Renata			V

Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

(1) A atitude adotada por Roberta ao lidar com documento oficial fere o CEP.

(2) A atitude adotada por Rejane está de acordo com o CEP e é especialmente adequada diante de filas ou de qualquer outra espécie de atraso na prestação dos serviços.

(3) Se P for a proposição “Rejane alterou texto de documento oficial que deveria apenas ser encaminhado para providências” e Q for a proposição “Renata buscou evitar situações procrastinatórias”, então a proposição P→Q tem valor lógico V.

18)**(CESPE/MEC Analista/2015)**

	P	Q	R
①	V	V	V
②	F	V	V
③	V	F	V
④	F	F	V
⑤	V	V	F
⑥	F	V	F
⑦	V	F	F
⑧	F	F	F

A figura acima apresenta as colunas iniciais de uma tabela-verdade, em que P, Q e R representam proposições lógicas, e V e F correspondem, respectivamente, aos valores lógicos verdadeiro e falso.

Com base nessas informações e utilizando os conectivos lógicos usuais, julgue os itens subsecutivos.

(1) A última coluna da tabela-verdade referente à proposição lógica $P \vee (Q \leftrightarrow R)$ quando representada na posição horizontal é igual a

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
$P \vee (Q \leftrightarrow R)$	V	V	V	F	V	F	V	V

(2) A última coluna da tabela-verdade referente a proposição lógica $P \rightarrow (Q \wedge R)$ quando representada na posição horizontal é igual a

	1	2	3	4	5	6	7	8
$P \rightarrow (Q \wedge R)$	V	V	F	F	V	F	V	V

19)(Cespe) Camila, Fátima, Juliana, Maria e Renata são advogadas e, juntas, abriram um escritório de advocacia. Cada uma dessas advogadas se especializou em uma das seguintes áreas do direito: cível, constitucional, penal, trabalhista e tributária. Maria, Juliana e a da área penal são solteiras. Nos fins de semana, a da área tributária vai ao cinema com Fátima. Camila, Juliana e Maria têm menos idade que a da área trabalhista. A da área cível divide a mesma sala do escritório com Camila, Juliana e Renata; a da área tributária ocupa sala individual. Tendo como referência a situação hipotética apresentada acima, julgue os itens que se seguem, a respeito de lógica da argumentação. Caso queira, utilize a tabela no espaço para rascunho.

nome	área do direito				
	cível	Constitucional	penal	trabalhista	tributária
Camila					
Fátima					
Juliana					
Maria					
Renata					

(1) Juliana é da área constitucional e Maria, da área tributária.

(2) Camila não é da área cível, Fátima é da área penal e Renata, da área trabalhista.

20)(CESPE/TCE2009) Em uma investigação, um detetive recolheu de uma lixeira alguns pedaços de papéis semidestruídos com o nome de três pessoas: Alex, Paulo e Sérgio. Ele conseguiu descobrir que um deles tem 60 anos de idade e é pai dos outros dois, cujas idades são: 36 e 28 anos. Descobriu, ainda, que Sérgio era advogado, Alex era mais velho que Paulo, com diferença de idade inferior a 30 anos, e descobriu também que o de 28 anos de idade era médico e o outro, professor. Com base nessas informações, assinale a opção correta.

a) Alex tem 60 anos de idade, Paulo tem 36 anos de idade e Sérgio tem 28 anos de idade.
b) Alex tem 60 anos de idade, Paulo tem 28 anos de idade e Sérgio tem 36 anos de idade.
c) Alex não tem 28 anos de idade e Paulo não é médico.
d) Alex tem 36 anos de idade e Paulo é médico.
e) Alex não é médico, e Sérgio e Paulo são irmãos.

21) (CESPE) Três contadores — A, B e C — estão sendo avaliados para o preenchimento de uma posição em uma empresa. Esses contadores estudaram em diferentes universidades (USP, UnB e UFMG), possuem diferentes tempos de experiência na profissão (3, 5 e 8 anos) e foram classificados em três opções: 1.ª, 2.ª e 3.ª. Considere também que

I. o contador A estudou na USP e tem menos de 7 anos de experiência.
II. o contador C ficou na 3.ª opção, não estudou na UnB e tem 2 anos de experiência a menos que o contador que foi classificado na 2.ª opção.

Com base nas informações acima, conclui-se que

A) o contador B estudou na UnB, tem 8 anos de experiência e ficou em primeira opção.
B) o contador B estudou na UnB, tem 5 anos de experiência e ficou em primeira opção.
C) o contador C estudou na UFMG e tem 5 anos de experiência.
D) o contador A tem 3 anos de experiência.

22) (CESPE/DPF 2014) Em um restaurante, João, Pedro e Rodrigo pediram pratos de carne, frango e peixe, não necessariamente nessa ordem, mas cada um pediu um único prato. As cores de suas camisas eram azul, branco e verde; Pedro usava camisa azul; a pessoa de camisa verde pediu carne e Rodrigo não pediu frango.

Essas informações podem ser visualizadas na tabela abaixo, em que, no cruzamento de uma linha com uma coluna, V corresponde a fato verdadeiro e F, a fato falso.

	carne	frango	peixe	João	Pedro	Rodrigo
azul					V	
branca						
verde	V					
João						
Pedro						
Rodrigo		F				

Considerando a situação apresentada e, no que couber, o preenchimento da tabela acima, julgue os itens seguintes.

(1) Se João pediu peixe, então Rodrigo não usava camisa branca.
(2) Das informações apresentadas, é possível inferir que Pedro pediu frango.
(3) As informações apresentadas na situação em apreço e o fato de João ter pedido peixe não são suficientes para se identificarem a cor da camisa de cada uma dessas pessoas e o prato que cada uma delas pediu.

23)(Cespe/ANAC 2009) Paulo, Mauro e Arnaldo estão embarcando em um vôo para Londres. Sabe-se que:

- os números de suas poltronas são C2, C3 e C4;
- a idade de um deles é 35 anos, e a de outro, 22 anos;
- Paulo é o mais velho dos três e sua poltrona não é C4;
- a poltrona C3 pertence ao de idade intermediária;
- a idade de Arnaldo não é 22 anos.

Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

(1) A poltrona de Paulo é C2.
(2) Se a idade de Arnaldo for 35 anos, então a poltrona de Mauro terá numeração C4.
(3) Se a soma das idades dos três passageiros for 75 anos, então as idades de Paulo, Mauro e Arnaldo serão, respectivamente, 35, 22 e 18 anos.

(4) Se a soma das idades dos três passageiros for 90 anos, então a poltrona de número C3 será a de Arnaldo e Mauro será o mais jovem dos 3 passageiros.
(5) Se a soma das idades dos três passageiros for 100 anos, então a poltrona de número C4 pertencerá a Mauro, que terá 35 anos.

24)(FGV/2016) Carlos costuma dizer, ao chegar do trabalho: “Se estou cansado, não leio e, se não leio, vejo televisão. Porém, quando leio, coloco óculos.” Certo dia, ao chegar do trabalho, Carlos não colocou os óculos. Então, é correto deduzir que Carlos

(A) viu televisão.
(B) estava cansado.
(C) não viu televisão.
(D) não estava cansado.
(E) leu.

25)(CESPE/DPU 2016) Considere que as seguintes proposições sejam verdadeiras.

- Quando chove, Maria não vai ao cinema.
- Quando Cláudio fica em casa, Maria vai ao cinema.
- Quando Cláudio sai de casa, não faz frio.
- Quando Fernando está estudando, não chove.
- Durante a noite, faz frio.

Tendo como referência as proposições apresentadas, julgue os itens subsecutivos.

(2) Se Maria foi ao cinema, então Fernando estava estudando.
(3) Durante a noite, não chove.

26)(FGV/2016) Sem A, não se tem B. Sem B, não se tem C. Assim, conclui-se que:

(A) A é suficiente para B e para C;
(B) B é necessário para A e para C;

(C) C é suficiente para A e para B;

(D) A e B são suficientes para C;

(E) B é necessário para A e suficiente para C.

27) (FGV) Em cada uma das cinco portas A, B, C, D e E está inscrita uma sentença, conforme a seguir:

- Porta A: Eu sou a porta de saída.
- Porta B: A porta de saída é a porta C
- Porta C: A sentença escrita na porta A é verdadeira.
- Porta D: Se eu sou a porta de saída, então a porta de saída não é a E.
- Porta E: Eu não sou a porta de saída.

Sabe-se que dessas cinco sentenças há uma única verdadeira e que há somente uma porta de saída. A porta de saída é a:

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

28) (ESAF/Gestor) Considere a afirmação P:

P: “A ou B”

Onde A e B, por sua vez, são as seguintes afirmações:

A: “Carlos é dentista”.

B: “Se Enio é economista, então Juca é arquiteto”.

Ora, sabe-se que a afirmação P é falsa. Logo:

A) Carlos não é dentista; Enio não é economista; Juca não é arquiteto.

B) Carlos não é dentista; Enio é economista; Juca não é arquiteto.
C) Carlos não é dentista; Enio é economista; Juca é arquiteto.
D) Carlos é dentista; Enio não é economista; Juca não é arquiteto.
E) Carlos é dentista; Enio é economista; Juca não é arquiteto.

29) (ESAF/MPOG-Gestor) Suponha que um pesquisador verificou que um determinado defensivo agrícola em uma lavoura A produz o seguinte resultado: “Se o defensivo é utilizado, as plantas não ficam doentes”, enquanto que o mesmo defensivo em uma lavoura distinta B produz outro resultado: “Se e somente se o defensivo é utilizado, as plantas não ficam doentes”. Sendo assim, se as plantas de uma lavoura A e de uma lavoura B não ficaram doentes, pode-se concluir apenas que:

a) o defensivo foi utilizado em A e em B.
b) o defensivo foi utilizado em A.
c) o defensivo foi utilizado em B.
d) o defensivo não foi utilizado em A e foi utilizado em B.
e) o defensivo não foi utilizado nem em A nem em B.

30) (ESAF) O reino está sendo atormentado por um terrível dragão. O mago diz ao rei: “O dragão desaparecerá amanhã se e somente se Aladim beijou a princesa ontem”. O rei, tentando compreender melhor as palavras do mago, faz as seguintes perguntas ao lógico da corte:

1. Se a afirmação do mago é falsa e se o dragão desaparecer amanhã, posso concluir corretamente que Aladim beijou a princesa ontem?
2. Se a afirmação do mago é verdadeira e se o dragão desaparecer amanhã, posso concluir corretamente que Aladim beijou a princesa ontem?
3. Se a afirmação do mago é falsa e se Aladim não beijou a princesa ontem, posso concluir corretamente que o dragão desaparecerá amanhã?

O lógico da corte, então, diz acertadamente que as respostas logicamente corretas para as três perguntas são, respectivamente:

a) Não, sim, não

b) Não, não, sim

c) Sim, sim, sim

d) Não, sim, sim

e) Sim, não, sim

31)(Esaf) Ana é prima de Bia, ou Carlos é filho de Pedro. Se Jorge é irmão de Maria, então Breno não é neto de Beto. Se Carlos é filho de Pedro, então Breno é neto de Beto. Ora, Jorge é irmão de Maria. Logo:

a) Carlos é filho de Pedro ou Breno é neto de Beto.

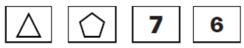
b) Breno é neto de Beto e Ana é prima de Bia.

c) Ana não é prima de Bia e Carlos é filho de Pedro.

d) Jorge é irmão de Maria e Breno é neto de Beto.

e) Ana é prima de Bia e Carlos não é filho de Pedro.

32)(FGV/Senado-Analista) Cada um dos cartões abaixo tem de um lado um número e do outro lado uma figura geométrica.



Alguém afirmou que todos os cartões que têm um triângulo em uma face têm um número primo na outra. Para afirmar se tal afirmação é verdadeira:

(A) é necessário virar todos os cartões.

(B) é suficiente virar os dois primeiros cartões.

(C) é suficiente virar os dois últimos cartões.

(D) é suficiente virar os dois cartões do meio.

(E) é suficiente virar o primeiro e o último cartão

33)(CESPE) Em um posto de fiscalização da PRF, cinco veículos foram abordados por estarem com alguns caracteres das placas de identificação cobertos por uma tinta que não permitia o reconhecimento, como ilustradas abaixo, em que as interrogações indicam os caracteres ilegíveis.

A E U-2 3 7 ?	K J I-? ? 2 2	? ? A-1 ? ? ?	? ? ?-? ? ? 8
I	II	III	IV

U A ?-1 ? 8 9

V

Os policiais que fizeram a abordagem receberam a seguinte informação: se todas as três letras forem vogais, então o número, formado por quatro algarismos, é par. Para verificar se essa informação está correta, os policiais deverão retirar a tinta das placas

a) I, II e V.
b) I, III e IV.
c) I, III e V.
d) II, III e IV.
e) II, IV e V.

34)(FCC/2017) A negação lógica da afirmação: “Corro bastante e não tomo chuva” é

(A) Não corro bastante e tomo chuva.
(B) Tomo chuva ou não corro bastante.
(C) Tomo chuva porque não corro bastante.
(D) Se eu corro bastante, então não tomo chuva.
(E) Corro bastante ou tomo chuva.

35)FGV/SENADO – Analista) Uma sentença logicamente equivalente a “Se gosto de estudar e pratico esportes, então tenho uma vida saudável” é

(A) gosto de estudar e pratico esportes, mas não tenho uma vida saudável.
(B) Não gosto de estudar ou não pratico esportes ou tenho uma vida saudável.
(C) Se não tenho uma vida saudável, então não gosto de estudar nem pratico esportes.
(D) Se tenho uma vida saudável, então gosto de estudar e pratico esportes.

(E) Se não gosto de estudar nem pratico esportes, então não tenho uma vida saudável.

36) (ESAF/ATRF) A negação da proposição “se Paulo estuda, então Marta é atleta” é logicamente equivalente à proposição

a) Paulo não estuda e Marta não é atleta.
b) Paulo estuda e Marta não é atleta.
c) Paulo estuda ou Marta não é atleta.
d) se Paulo não estuda, então Marta não é atleta.
e) Paulo não estuda ou Marta não é atleta.

37) (FCC/2010 – TCE/SP) Considere as seguintes afirmações:
− Todo escriturário deve ter noções de Matemática.
− Alguns funcionários do Tribunal de Contas do Estado de São Paulo são escriturários.
Se as duas afirmações são verdadeiras, então é correto afirmar que:

(A) Todo funcionário do Tribunal de Contas do Estado de São Paulo deve ter noções de Matemática.
(B) Se Joaquim tem noções de Matemática, então ele é escriturário.
(C) Se Joaquim é funcionário do Tribunal de Contas do Estado de São Paulo, então ele é escriturário.
(D) Se Joaquim é escriturário, então ele é funcionário do Tribunal de Contas do Estado de São Paulo.
(E) Alguns funcionários do Tribunal de Contas do Estado de São Paulo podem não ter noções de Matemática.

38)(FGV) Em cada um dos três blocos abaixo há duas premissas e uma conclusão. Verifique se, em cada bloco, a conclusão decorre logicamente das premissas.

Bloco I
Premissa 1: Todas as cobras pretas são venenosas.
Premissa 2: Sirtalis é uma cobra preta.
Conclusão: Sirtalis é venenosa.

Bloco II
Premissa 1: Todo adolescente quer liberdade.

Premissa 2: Jorge quer liberdade.
Conclusão: Jorge é adolescente.

Bloco III
Premissa 1: Todos os pescadores gostam de cozinhar.
Premissa 2: Existem advogados que são pescadores.
Conclusão: Todos os advogados gostam de cozinhar.

Assinale:

(A) se apenas no bloco I a conclusão decorre logicamente das premissas.
(B) se apenas no bloco II a conclusão decorre logicamente das premissas.
(C) se apenas no bloco III a conclusão decorre logicamente das premissas
(D) se apenas nos blocos I e II as conclusões decorrem logicamente das premissas.
(E) se apenas nos blocos II e III as conclusões decorrem logicamente das premissas.

39) (Esaf) Se Iara não fala italiano, então Ana fala alemão. Se Iara fala italiano, então ou Ching fala chinês ou Débora fala dinamarquês. Se Débora fala dinamarquês, Elton fala espanhol. Mas Elton fala espanhol se e somente se não for verdade que Francisco não fala francês. Ora, Francisco não fala francês e Ching não fala chinês. Logo,

a) Iara não fala italiano e Débora não fala dinamarquês.
b) Ching não fala chinês e Débora fala dinamarquês.
c) Francisco não fala francês e Elton fala espanhol.
d) Ana não fala alemão ou Iara fala italiano.
e) Ana fala alemão e Débora fala dinamarquês.

40) (ESAF) Se não leio, não compreendo. Se jogo, não leio. Se não desisto, compreendo. Se é feriado, não desisto. Então,

a) Se jogo, não é feriado
b) Se é feriado, não leio
c) Se não jogo, é feriado.
d) Se não é feriado, não leio.
e) Se é feriado, jogo.

Gabaritos

1) C C E E
2) E E C E
3) C
4) E
5) C
6) D
7) D
8) E
9) E C E C
10) E E
11) E C
12) D
13) E
14) C
15) C
16) D
17) C E C
18) C E
19) C E
20) D
21) A
22) C E E
23) C C C C E
24) A
25) E C
26) C
27) E
28) B
29) C
30) D
31) E
32) E

33)C

34)B

35)B

36)B

37)E

38)A

39)A

40)A