



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM**  
**MATEMÁTICA – PROFMAT**



**CARLOS ALBERTO FERREIRA DA SILVA**

**ABORDAGEM GEOMÉTRICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO**  
**LINEAR NO ESPAÇO 3D**

MACAPÁ/AP  
2019

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA –**  
**PROFMAT**

**CARLOS ALBERTO FERREIRA DA SILVA**

**ABORDAGEM GEOMÉTRICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO**  
**LINEAR NO ESPAÇO 3D**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof.<sup>o</sup> Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá  
Elaborado por Cristina Fernandes - CRB2/1569

---

Silva, Carlos Alberto Ferreira da.

Abordagem geométrica de problemas de programação linear no espaço 3D / Carlos Alberto Ferreira da Silva ; Orientador, José Walter Cárdenas Sotil. – Macapá, 2019.  
97 f.

Dissertação (Mestrado) – Fundação Universidade Federal do Amapá,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT).

1. Programação (Matemática). 2. Geogebra 3D. 3. Matemática (Ensino Médio). 4. Representação Gráfica. I. Sotil, José Walter Cárdenas, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

519.72 S586a  
CDD. 22 ed.

---

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Amapá foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **CARLOS ALBERTO FERREIRA DA SILVA** intitulada: **Abordagem Geométrica de Problemas de Programação Linear no Espaço 3D**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita a homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

MACAPÁ, 03 de Junho de 2019.



Dr. José Walter Cárdenas Sotil  
Presidente da Banca Examinadora (UNIFAP)



Me. Hilton Bruno Pereira Viana  
Avaliador externo (IFAP)



Dr. Erasmo Senger  
Avaliador interno (UNIFAP)

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus que na sua infinita misericórdia sempre atendeu minhas súplicas.

Aos meus pais, Manoel Raimundo e Maria Marlúcia e aos meus irmãos pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A minha amada esposa e companheira, Regiane Salazar Correa, que fez com que essa caminhada se tornasse mais fácil, contribuindo direta e indiretamente nessa jornada de aprendizado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil, pelas valiosas contribuições que me fizeram ir mais além do que tinha pensado inicialmente com relação a temática desta dissertação, e claro pela paciência e empenho dedicado à elaboração desse trabalho;

À Universidade Aberta do Brasil (UAB) – polo Santana, que por meio do convênio junto a Universidade Federal do Pará – UFPA me proporcionou um ambiente bastante profissional no decorrer da graduação;

À Universidade Federal do Amapá - UNIFAP que oportunizou a realização da continuidade de minha formação;

Aos professores deste curso, pelos ensinamentos que levarei por toda a vida.

A Prof. Ana Paula Castro que foi a primeira pessoa que me incentivou a estudar para o Exame Nacional de Acesso – ENA em 2017.

Meus agradecimentos aos amigos do Mestrado que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida.

## EPÍGRAFE

“O homem não pode receber coisa alguma, se não lhe for dada do céu”.  
(João 3.27)

## RESUMO

Neste trabalho apresenta-se a relevância da abordagem geométrica de problemas de Programação Linear (PL) no espaço 3D. O objetivo geral desta dissertação foi servir de base aos docentes de Matemática a fim de que estes tenham subsídios para desenvolverem com os discentes, aplicações de determinados assuntos do ensino médio em problemas práticos, reais e interessantes de PL direcionados a temas da região Norte. O objetivo específico foi proporcionar aos professores uma proposta de ensino – aprendizagem contemplando a PL no espaço tridimensional por intermédio de uma Sequência Didática utilizando o software Geogebra. Esta pesquisa se configura como bibliográfica e de base qualitativa, afinal valeu-se de algumas pesquisas menores e pontuais para sustentar seu arcabouço de informações. Conclui-se que o estudo de Programação Linear juntamente com a abordagem geométrica no espaço 3D pode ser uma relevante contribuição pedagógica o que facilitará o trabalho docente ao que tange aplicações de modelos matemáticos.

**Palavras – chave:** Programação Linear. Geogebra 3D. Abordagem Matemática.

## **ABSTRACT**

This paper presents the relevance of the geometric approach of linear programming (LP) problems in 3D space. The general objective of this dissertation was to serve as a basis for teachers of Mathematics in order that they have subsidies to develop with students, applications of certain subjects of high school in practical, real and interesting problems of LP directed to subjects of the North region. The specific objective was to provide teachers with a teaching - learning proposal contemplating LP in the three - dimensional space by means of a Didactic Sequence using Geogebra software. This research is configured as a bibliographical and qualitative basis, after which it was used some minor and punctual research to support its information framework. It is concluded that the study of Linear Programming along with the geometric approach in the 3D space can be a relevant pedagogical contribution which will facilitate the teaching work to the applications of mathematical models.

**Key words:** Linear Programming. 3D Geogebra. Mathematical Approach.



## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Disponibilidade diária de madeira e mão de obra .....	56
Tabela 5.2: Valores da função objetivo do Problema 1 nos vértices da região factível .....	64
Tabela 5.3: Valores da função objetivo do Problema 2 nos vértices da região factível .....	71
Tabela 5.4: Valores da função objetivo do Problema 3 nos vértices da região factível .....	78
Tabela 5.5: Valores da função objetivo do Problema 4 nos vértices da região factível .....	84

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	George Bernard Dantzig 1914-2005.....	17
Figura 3.1	Três eixos determinam três planos coordenados em $\mathbb{R}^3$ .....	23
Figura 3.2	Oito subplanos partindo da origem.....	23
Figura 3.3	Obtenção das coordenados do ponto P no sistema tridimensional .....	24
Figura 3.4	Retas $r_0, r_1$ e $r$ como projeções ortogonais dos pontos.....	26
Figura 3.5	Interseção da reta com a superfície .....	27
Figura 3.6	Pontos $P_0$ e $P_1$ no plano $\Pi = ax + by + cz = d$ .....	28
Figura 3.7	Plano intersecta os eixos $x, y$ e $z$ .....	30
Figura 3.8	Semiespaço correspondente a inequação: $2x + 3y + z \geq 6$ .....	30
Figura 3.9	Os planos $\Pi_1, \Pi_2$ e $\Pi_3$ são paralelos dois a dois.....	32
Figura 3.10	$\Pi_1, \Pi_2$ e $\Pi_3$ são três planos distintos que têm uma reta $r$ em comum .....	33
Figura 3.11	Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas $r, s$ e $t$ , .....	34
Figura 3.12	- Os três planos $\Pi_1, \Pi_2$ e $\Pi_3$ têm um único ponto em comum .....	35
Figura 3.13	– Principais objetos de um Poliedro.....	36
Figura 3.14	Poliedro convexo e poliedro não-convexo .....	37
Figura 4.1	Interface do Software Geogebra 3D .....	41
Figura 4.2	Exibir Janela de Visualização 3D .....	42
Figura 4.3	Janela de Visualização 3D .....	43
Figura 4.4	Barra de ferramentas .....	43
Figura 4.5	Pontos A, B e C em seus respectivos eixos .....	44
Figura 4.6	Polígono ABCA .....	45
Figura 4.7	Plano $b: x + y + z = 2$ passando pelos pontos A, B e C.....	46
Figura 4.8	Redefinir a variação nos eixos das superfícies.....	47
Figura 4.9	Antes e depois da redefinição das superfícies.....	47
Figura 4.10	Região que compreende os pontos A, B e C.....	48
Figura 4.11	Janela de álgebra juntamente com o poliedro ABCD .....	49
Figura 4.12	Interseção do plano $r : x + y = 1$ com o poliedro ABCD .....	50
Figura 4.13	Polígono EFGH – interseção das superfícies .....	50
Figura 4.14	Comando de Interseção na Barra de Entrada .....	51
Figura 4.15	Obter das coordenadas do polígono EFGH.....	51
Figura 4.16	Ícone “Girar janela de visualização 3D” .....	52

Figura 4.17	Opções da Janela de visualização 3D.....	53
Figura 4.18	Configurações na janela de visualização.....	53
Figura 5.1	Equação do plano $2x + 3y + z = 12$ passando por A, B e C .....	59
Figura 5.2	Região que satisfaz a desigualdade $2x + 3y + z \leq 12$ .....	60
Figura 5.3	Polígono EFGH – interseção do plano com o poliedro .....	60
Figura 5.4	Região que cumpre ambas as desigualdades .....	61
Figura 5.5	Região Factível .....	61
Figura 5.6	Plano $100x + 60y + 30z = 120$ intersectando a região factível .....	62
Figura 5.7	Plano $100x + 60y + 30z = 400$ intersectando a região factível .....	63
Figura 5.8	A coordenada F (3,2,0) como solução do problema .....	63
Figura 5.9	Equação do plano $4x + 3y + z = 24$ passando por A, B e C .....	66
Figura 5.10	Região que satisfaz a inequação $4x + 3y + z \leq 12$ .....	67
Figura 5.11	Polígono AFGA – interseção do plano com o poliedro.....	67
Figura 5.12	Região que cumpre ambas as desigualdades .....	68
Figura 5.13	Polígono JMLOQ – interseção do plano com o poliedro .....	68
Figura 5.14	Região que satisfaz as três inequações .....	69
Figura 5.15	Região Factível .....	69
Figura 5.16	Plano $13x + 7.5y + 4z = 20$ intersectando a região factível .....	70
Figura 5.17	Plano $13x + 7.5y + 4z = 73$ intersectando a região factível .....	70
Figura 5.18	A coordenada A(6,0,0) será solução do problema.....	71
Figura 5.19	Equação do plano $x + y + z = 30$ passando por A, B e C .....	73
Figura 5.20	Região que satisfaz a inequação $x + y + z \leq 30$ .....	74
Figura 5.21	Polígono EFGE – interseção do plano com o poliedro .....	74
Figura 5.22	Região que cumpre ambas as desigualdades .....	75
Figura 5.23	Polígono JHILJ – interseção do plano com o poliedro .....	75
Figura 5.24	Região que satisfaz as três inequações .....	76
Figura 5.25	Região Factível .....	76
Figura 5.26	Plano $8x + 6y + 10z = 70$ intersectando a região factível.....	77
Figura 5.27	Plano $8x + 6y + 10z = 246$ intersectando a região factível .....	77
Figura 5.28	A coordenada I (10,5,15) como solução do problema .....	78
Figura 5.29	Equação do plano $x + y + z = 7$ passando por A, B e C .....	80
Figura 5.30	Região que satisfaz a inequação $x + y + z \leq 7$ .....	81
Figura 5.31	Polígono EFHGE – interseção do plano com o poliedro.....	81

Figura 5.32 Região que cumpre ambas as desigualdades .....	82
Figura 5.33 Região Factível .....	82
Figura 5.34 Plano $600x + 650y + 700z = 3000$ intersectando a região factível .....	83
Figura 5.35 Plano $600x + 650y + 700z = 4450$ intersectando a região factível .....	83
Figura 5.36 A coordenada $G(2,0,5)$ como solução do problema .....	84
Figura 6.1 Análise do assunto de Programação Linear nos livros didáticos .....	86
Figura 6.2 Coleções do PNLD.....	87
Figura 6.3 Orientações para modelagem de um PPL.....	91
Figura 6.4 Orientações para encontrar a região móvel de um PPL.....	92



## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>2 HISTÓRIA DA PROGRAMAÇÃO LINEAR</b> .....	16
2.1 HISTÓRIA DO GEOGEBRA.....	20
<b>3 CONCEITOS BÁSICOS MATEMÁTICOS ASSOCIADOS AO TEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR</b> .....	22
3.1 SISTEMAS DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS .....	22
3.2 AS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE UMA RETA .....	25
3.3 EQUAÇÃO DO PLANO .....	27
3.4 INEQUAÇÕES LINEARES .....	29
3.5 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA INEQUAÇÃO COM TRÊS VARIÁVEIS NO PLANO $\mathbb{R}^3$ .....	29
3.6 TRÊS EQUAÇÕES LINEARES COM TRÊS INCÓGNITAS .....	31
3.7 POSSIBILIDADES PARA AS POSIÇÕES RELATIVAS DOS TRÊS PLANOS NO ESPAÇO.....	32
3.8 POLIEDROS .....	35
3.9 DEFINIÇÕES E TEOREMAS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR .....	37
<b>4 O GEOGEBRA NA PROGRAMAÇÃO LINEAR</b> .....	41
4.1 GEOGEBRA 3D – APRESENTAÇÃO .....	41
4.2 JANELA DE VISUALIZAÇÃO 3D .....	42
4.3 BARRA DE FERRAMENTAS .....	43
4.3.1 Construção de um ponto .....	44
4.3.2 Construção de um polígono .....	45
4.3.3 Construção de plano .....	45
4.3.4 Redefinição do espaço $\mathbb{R}^3$ ao primeiro octante .....	46
4.3.5 Análise gráfica da inequação no primeiro octante .....	48
4.3.6 Construção de uma região convexa .....	49
4.3.7 Interseção de duas superfícies .....	50
4.3.8 Obtenção das coordenadas de um ponto .....	51
4.3.9 Movimentação e rotação da malha 3D .....	52
4.3.10 Configuração do plano 3D .....	53
<b>5 APLICAÇÕES DA PL EM 3D UTILIZANDO O GEOGEBRA DIRECIONADO A TEMAS DA REGIÃO NORTE</b> .....	55
5.1 APLICAÇÃO DO MÉTODO GRÁFICO .....	55
<b>6 PROPOSTA DE PLANO DE AULA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR 3D NO ENSINO MÉDIO</b> .....	86

6.1 ANÁLISE DO MAPEAMENTO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NOS LIVROS DIDÁTICOS.....	87
6.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA APLICAÇÃO .....	89
6.2.1 Modelagem do problema .....	90
6.2.2 Método gráfico .....	91
6.3 RESULTADOS E REFLEXÕES ESPERADOS COM A PROPOSTA .....	93
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>95</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>97</b>

## INTRODUÇÃO

Considerando a necessidade de se desenvolver um estudo voltado para uma das vertentes da Matemática, esta pesquisa é intitulada “Abordagem geométrica de problemas de programação linear no espaço 3D” e se justifica mediante a escassez de trabalhos que evidencie a temática em questão, e também pelos discursos – fronteiras levantadas por alguns alunos nortista mediante resoluções de questões problemas concatenados no cotidiano.

Compreendendo que o software Geogebra disponibiliza de uma interface de fácil manuseio de geometria dinâmica, e também apresenta vantagens didáticas, pois é composto por duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: a geometria e a álgebra. Assim, a relevância da Programação Linear (PL) consta em poder ser aplicada usando este software para solucionar questões de várias áreas, principalmente em departamentos que envolvem projetos e controle de produção.

O objetivo geral desta dissertação foi servir de base aos docentes de Matemática a fim de que estes tenham subsídios para desenvolver, com os discentes, aplicações de determinados assuntos do ensino médio em problemas práticos, reais e interessantes de PL direcionados a temas da região Norte. O objetivo específico foi proporcionar aos professores uma proposta de Sequência Didática (SD) contemplando o Geogebra na PL no espaço tridimensional.

É notório enfatizar que, a problemática desta pesquisa versa sobre a dificuldade de se encontrar trabalhos que aludissem ao tema desta dissertação, em especial ao enfoque ao ensino – aprendizagem de Matemática contemplado o Geogebra e a análise gráfica da PL num espaço tridimensional. Haja vista que, essas ferramentas enriquecem o conhecimento de cada aluno, em especial de cada discente nortista, ao passo que os instigam a relacionarem questões – problemas com atividades simples do dia a dia.

Esta tese poderá contribuir pedagogicamente facilitando o trabalho docente de colegas que não têm disponibilidade e tempo para pesquisarem ou construírem modelos de programação diferentes de aplicações na Matemática. Bem como, norteará o ensino – aprendizagem num painel que favorecerá e minimizará as



dificuldades de alguns alunos a correlacionarem a teoria com a prática, isto é, correlacionarem o conhecimento escolar com o extraescolar.

Este trabalho se encontra estruturado em sete capítulos, o primeiro refere-se a introdução desta dissertação, o segundo aborda a “História da Programação Linear”, o terceiro capítulo fomenta “Conceitos básicos matemáticos associados ao tema de Programação Linear”, já o quarto capítulo evidencia “O Geogebra na Programação Linear”, o quinto capítulo focaliza “Aplicações da PL em 3D utilizando o Geogebra direcionado a temas da região Norte”, o sexto capítulo faz alusão a uma “Proposta de Plano de aula de Programação Linear 3D no ensino médio”, e o último são as considerações finais.

## 2 HISTÓRIA DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Prado (1999) salienta que, os estudos sobre a Programação Linear (PL) tiveram análises pioneiras em 1936 pelo economista Wassily Leontieff (1905-1999). No seu artigo intitulado “Quantitative input and output Relations in the Economics Systems of the United States, o autor mostra um modelo matricial linear de entradas e saídas que é usado em problema de PL, ou seja, Leontieff desenvolveu um modelo formado por um agrupamento de equações lineares, considerado como passo inicial para as técnicas relacionadas à PL. Ele recebeu o prêmio Nobel de Economia em 1973, por desenvolver uma teoria de insumo-produto, a “Matriz de Leontief”, e a sua aplicabilidade em Economia.

Segundo Passos (2009), em 1939 o Matemático e economista russo Leonid Vitaliyevich Kantorovich (1912-1986) contribuiu com a aplicação da Matemática a problemas econômicos, relacionadas com a otimização. Em 1975 ganhou o Prêmio Nobel de Economia, pela contribuição a teoria da alocação ótima de recursos escassos.

Em 1940, Frank Lauren Hitchcock (1875-1957) apresentou abordagem ao problema de transportes. Nesta direção, considerando a ordem cronológica durante o grande conflito militar nos EUA ocorreu o “Problema da Dieta”, no qual o objetivo era descobrir alimentos com baixos custos, visto que o ser humano precisa ser alimentado para se manter saudável.

Em 1945, George Stigler, após a repercussão nacional, do desafio, apresentou resultado considerável, o qual considerou somente o aspecto econômico, chegando à seguinte solução inusitada: a privação de alimentos (dieta) teria um custo anual de US\$ 59,88 tratando-se de fígado de porco, farinha de trigo e repolho. Uma dieta difícil de alguém manter.

Stigler chegou nesse resultado combinando, por tentativas, 77 alimentos e considerando 9 nutrientes entre um e outro. Mesmo sendo o resultado motivo de diversas chacotas, a técnica usada poderia ser empregada em campos parecidos, como modelo, na alimentação de animais. Mas, a técnica de tentativas utilizada por Stigler, foi passível de erros, além de nem sempre resultar na solução esperada.

É notório observar que, apenas em 1947 esta técnica de planejamento se firmou com George Bernard Dantzig (1914-2005), o Matemático e físico Norte-Americano (Figura 2.1), o qual criou e desenvolveu um método chamado Simplex a fim de encontrar respostas às questões de otimização formulados a partir de questões de logística da Força Aérea dos E.U.A, durante a Segunda Guerra Mundial. Por este feito também é considerado o "Pai da Programação Linear".

Entre 1941 e 1945 o autor a qual se tem frisado desempenhou serviços como especialista em programas e planejamentos correspondentes as tarefas militares.

Figura 2.1 - George Bernard Dantzig 1914-2005



Fonte: Prado (1999)

Inicialmente, foi na área militar que a temática focalizada neste trabalho recebeu grande enfoque, especialmente com os estudos de Dantzig, durante o grande combate militar (1939-1945). Em 1947, ele e outros estudiosos do Departamento da Força Aérea Americana difundiram o Método Simplex, o qual consiste em resolver problemas de PL. Neste cunho, o avanço da informática foi de fundamental importância para a expansão da ferramenta em foco (SALLES NETTO, 2006).

Após o conflito militar global de 1939 a 1945 (Guerra-Fria), a PL foi crescendo em diversos campos, pois era notória sua eficácia no auxílio aos processos de análise e decisão atingindo resultados mais versáteis, assertivos, rápidos e economicamente viáveis, em diversos lugares do mundo, e conseqüentemente no Brasil não foi diferente.

Segundo Loss (apud. MARINS, 2011) no Brasil a Pesquisa Operacional (PO) surgiu após seu desenvolvimento na Grã-Bretanha e nos Estados Unidos. Vale destacar que, o primeiro Curso de Engenharia de Produção (a nível de graduação) da

Escola Politécnica da Instituição de Ensino Superior de São Paulo (EPUSP) foi criada em 1957.

Já no ano de 1958 criou-se o curso supracitado no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), bem como, foram criados cursos voltados para a temática aqui abordada; dentre outros, oportunistas aos acadêmicos de Engenharia de Produção USP e do ITA.

Esse autor ressalta ainda que, as primeiras aplicações de PO a problemas cotidianos deram-se em 1960. A exemplo tem-se a Petrobrás, na qual teve o primeiro grupo formal em 1965, no ano seguinte (1966) esta empresa organizou o primeiro seminário de PO no Brasil. Nesta época foi criada a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO) com grande almejo no uso e técnicas do assunto em voga.

No Brasil a Programação Linear iniciou-se na década de 1960 com um simpósio realizado no ITA, em São José dos Campos, em 1968. Temos uma abordagem um pouco mais detalhada e mais contribuições históricas no livro de Arenales [et al. 2007].

De acordo com Hiller (2006), o instrumento PL é crucial e de suma importância no campo científico, pois seu desenvolvimento proporcionou grande lucratividade para inúmeras empresas.

A Programação Linear pode ser aplicada para solucionar questões de várias áreas, principalmente em departamentos que envolvem projetos e controle de produção, tais como: controle de perdas e desenvolvimento de energia elétrica, planejamento de produção avícola; de cortes de bobina de papel, dentre outros. Daí a importância dessa técnica pelos diversos profissionais de engenharia, para ajudá-los a obter decisão mais eficiente.

São apresentadas exemplificações de vereditos relacionados a temática trabalhada nesta dissertação, (ARENALES 2007):

- **Problemas de mistura** são combinações de materiais depositados no meio ambiente proporcionando a fabricação de novas matérias-primas. Exemplo: composição de areias para filtro.
- **Problemas de transporte** ligado a distribuição dos materiais ou produtos até aos consumidores, almejando baixo custo do meio de locomoção.
- **Problemas de preparação da produção** que está atrelado a proporção de produção, ou seja, quando, qual e quanto produto produzir.

- **Problemas de programação** de projetos permite determinar a ordem que as atividades serão realizadas, proporcionando melhor o controle da produção.
- **Problemas de gestão financeira** (fluxo de caixa) mantém a correlação com a movimentação do dinheiro de caixa, principalmente valores provenientes de débitos e créditos projetados, buscando aumentar a lucratividade.
- **Problemas de meio ambiente** propiciam que a empresa possa ter posicionamento cauteloso em relação ao meio ambiente, por exemplo, poluindo menos.

Como observado, as exemplificações acima mostram a relevância da PL no dia a dia. Logo, a Otimização Linear se coloca como uma importante ferramenta que atua em vários campos, buscando um melhor aproveitamento de recursos sem perder os objetivos esperados. Sua aplicabilidade, dessa forma, fica sendo reconhecida em vários ramos profissionais, principalmente pela necessidade de maximizar os lucros ou minimizar as despesas.

Para Hillier e Liberman (2006), a PL faz parte da Matemática Aplicada que usa um modelo Matemático na descrição do problema. Para eles o objetivo é buscar a melhor destinação dos recursos disponíveis.

Com isso, temos que um grande desafio do mundo contemporâneo é o melhor aproveitamento de recursos, sem com isso abrir mão dos confortos com os quais estamos acostumados. Nesse intuito, o estudo sobre Programação Linear, juntamente com as facilidades tecnológicas, tem como expectativas sempre a busca por melhores soluções, isto é, torna-se auxiliadora na tomada de inferências.

Como este trabalho do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, foram e estão sendo feitos vários outros e diversas pesquisas no Brasil voltados a PL, que também está sendo abordada em cursos de graduação, principalmente na Engenharia de Produção e Economia, mas pode perfeitamente ser introduzida no Ensino Médio, já que os pré-requisitos básicos são estudados, tais quais as equações e inequações do primeiro grau, plano cartesiano, equação da reta, conjuntos convexos e outros.

A proposta de inserir Problemas de Programação Linear (PPL) no Ensino Médio é fazer com que novos problemas de otimização sejam apresentados, aproveitando

conteúdos, citados acima, já trabalhados ao longo da vida escolar do aluno. A ideia é apresentar novos problemas que de fato podem surgir no cotidiano do aluno que mora na região Norte do Brasil. A inserção desta proposta no ensino médio permitiria aos alunos o contato com problemas interessantes e reais, justificando e motivando amplamente o estudo dos tópicos mencionados acima.

Abaixo verifica-se a História do Software Geogebra para que se possa compreender melhor a temática tratada. Denotando sua relevância ao que tange a aplicabilidade no cotidiano, e de forma geral ao Ensino Aprendizagem de Cálculos Matemáticos.

## 2.1 HISTÓRIA DO GEOGEBRA

O Geogebra é um software gratuito criado em 2001 pelo professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgna da Áustria, destinado ao ensino da Matemática nas escolas e serve para todos os níveis de ensino, que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos em 2D e 3D, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos e recebeu diversos prêmios (BASNIAK; ESTEVAM, 2014).

- EASA 2002 - European Academic Software Award (Ronneby, Suécia).
- Learnie Award 2003 - Austrian Educational Software Award (Viena, Áustria)
- Digita 2004 - German Educational Software Award (Colônia, Alemanha).
- Comenius 2004 - German Educational Media Award (Berlim, Alemanha).
- Learnie Award 2005 - Austrian Educational Software Award for "Spezielle Relativitätstheorie mit GeoGebra" (Viena, Áustria).
- Trophées du libre 2005 - Prêmio Internacional de Software Livre, categoria Educação (Soissons, França) Twinning Award 2006 - 1º Prêmio no "Desafio dos Círculos" com GeoGebra (Linz, Áustria).
- Learnie Award 2006 - Prêmio Austríaco de Software Educacional (Viena, Áustria).

De acordo com Araújo e Nóbriga (2010) o software está escrito em Java, o que permite que ele seja acessado em várias plataformas operacionais tais como Windows, Linux, Mac e, atualmente, na plataforma Android, permitindo o uso para dispositivos de informática mais versáteis como tablets e smartphones. O download

do software na versão mais atualizada pode ser realizado através do link: <http://www.geogebra.org/>.

O Geogebra também disponibiliza ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica e ainda apresenta uma vantagem didática, pois é composto por duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: a geometria e a álgebra.

A janela de geometria é o local destinado aos objetos construídos, a qual é possível modificar e colorir os objetos, alterar a espessura de linhas, medir ângulos e distâncias, exibir cálculos, etc. A janela de álgebra exibe a representação algébrica de todo objeto que foi construído.

Segundo Castro (2017), o software Geogebra permite trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da Educação Matemática, pois a abordagem está embasada nas exigências dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio.

Ainda de acordo a autora supramencionada, diversos conteúdos matemáticos que estão presentes nos PCN's do Ensino Médio, podem ser trabalhados em sala de aula de maneira dinâmica quando utilizado o Geogebra. Observa-se alguns exemplos: noções de funções, trigonometria do triângulo retângulo, funções trigonométricas, geometria analítica com representações do plano cartesiano e resolução de sistemas de equações com duas variáveis.

A seguir trabalhar-se-á com temas da Matemática do Ensino Médio envolvidos em PPL, ressaltando principais assuntos inseridos na seara educacional que possibilitam a utilização do Geogebra.

### 3 CONCEITOS BÁSICOS MATEMÁTICOS ASSOCIADOS AO TEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Neste capítulo apresenta-se conceitos de diferentes assuntos que fazem parte dos conteúdos abordados no Ensino Médio, sendo estes também ferramentas essenciais para se encontrar respostas na programação linear (PPL) especificamente no espaço tridimensional.

Serão abordados assuntos como: Sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, equação da reta e plano em  $\mathbb{R}^3$ , inequações lineares, sistemas de equações lineares com três incógnitas, poliedros convexos e outros. Para um estudo mais completo da Geometria Analítica Espacial, ver o livro “Coordenadas no Espaço”, da coleção do Professor da Matemática da S.B.M.

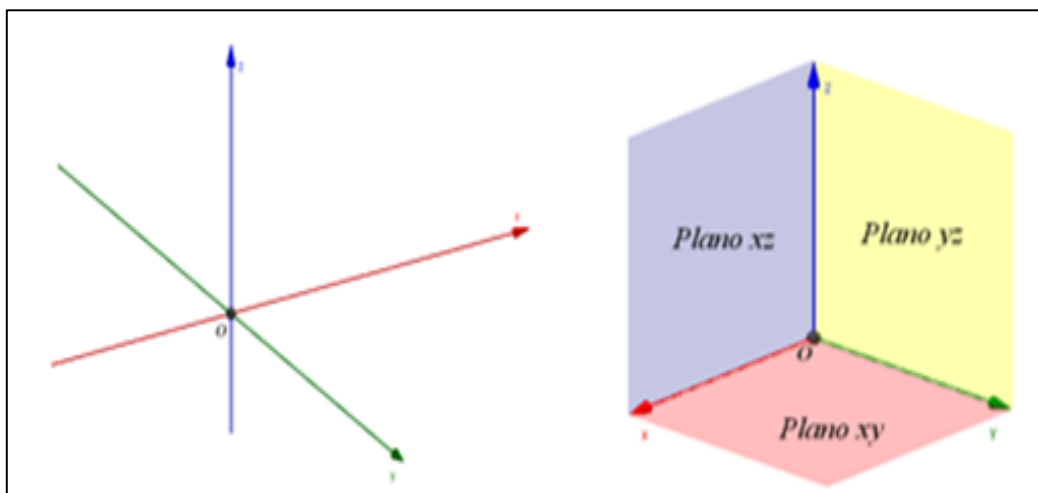
Como trabalhar-se-á com o exemplo de resolução gráfica, é relevante que os educandos conheçam alguns tópicos da Matemática básica, para que possam acompanhar e entender as construções feitas no GeoGebra, que será o software usado nesta dissertação como ferramenta tecnológica para auxiliar na visualização do modelo de programação.

#### 3.1 SISTEMA DE COORDENADAS TRIDIMENSIONAIS

Para se realizar construções em  $\mathbb{R}^3$ , deve-se fazê-la, obviamente, em uma perspectiva que nos dê uma melhor visão dos elementos a representar. A maneira canônica é traçar os eixos z e y perpendiculares, sendo o eixo z na vertical apontando para cima, enquanto que, os três eixos determinam três planos coordenados mostrados pela Figura 3.1.



Figura 3.1 – Três eixos determinam três planos coordenados em  $\mathbb{R}^3$

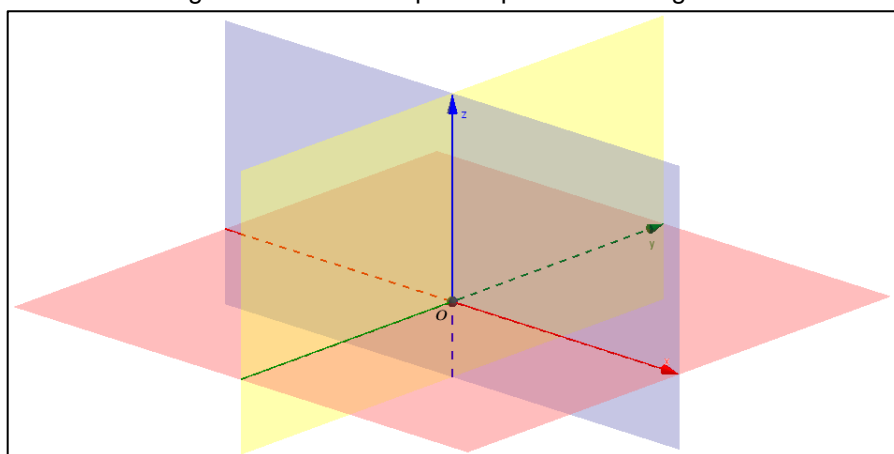


Fonte: O autor

Veja o sistema OXYZ, denominaremos de  $\Pi_{xy}$ ,  $\Pi_{yz}$  e  $\Pi_{xz}$  os planos determinados pelos eixos OX e OY, OY e OZ, OX e OZ, respectivamente.

Segundo Lima (2006), a ocorrência do sistema OXYZ denota que se pode relacionar a cada ponto P do espaço um terço ordenado  $(x, y, z)$  de números reais conhecidos como as linhas do ponto P relativamente a esse sistema. Isto é, precisa-se de três informações, para encontrar um ponto no espaço e assim representamos qualquer ponto no espaço pela tripla  $(x, y, z)$  de números reais.

Figura 3.2 – Oito subplanos partindo da origem



Fonte: O autor

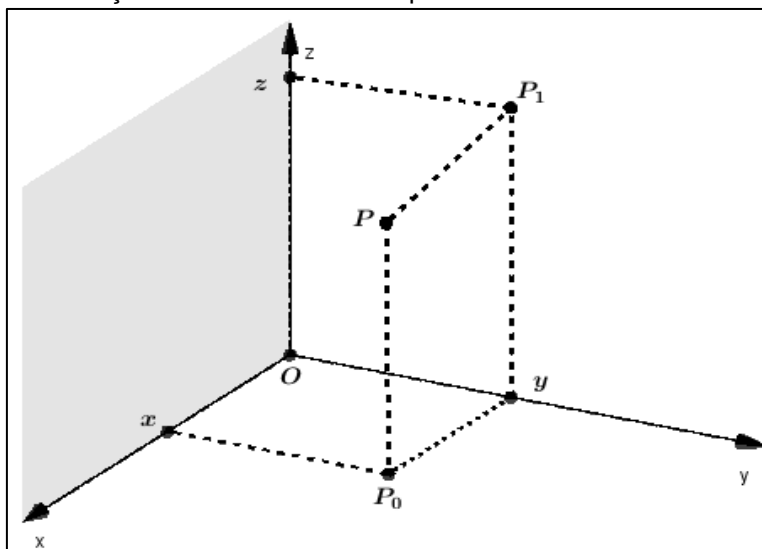
Estas três informações são dadas por intermédio de um mecanismo tridimensional de eixos ortogonais entre si (como ilustra a Figura 3.2), perpassando pelo ponto O, conhecido como origem, que chamaremos de eixos coordenados, os

quais denotaremos por eixo  $x$ , eixo  $y$  e eixo  $z$ . Cada segmento de eixo partindo da origem gera um octante, visto que o sistema tem oito subplanos partindo da origem.

Conforme afirma Lima (2006, p.74) que o espaço tridimensional  $E$  é focalizado como superfície euclidiana tridimensional, matéria-prima da ótica da Geometria Espacial. Assim, o Sistema de Coordenadas em  $E$  possui minimamente três coordenadas em três alicerces  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$ , com a mesma origem  $O$ , nos quais qualquer um deles é ortogonal a cada um dos outros dois.

As coordenadas  $(x, y, z)$ , do ponto  $P$  no sistema  $OXYZ$  podem ser auferidas assim: a reta paralela ao eixo  $OZ$  perpassando pelo ponto  $P$  corta o plano  $\Pi_{xy}$  no plano  $P_0$ . Sejam  $(x, y)$  as coordenadas de  $P_0$  no sistema  $OXY$  no plano  $\Pi_{xy}$ . Estas são as duas primeiras coordenadas de  $P$ . Assim, a reta paralela ao eixo  $OX$  passando por  $P$  corta o plano  $\Pi_{yz}$  no ponto  $P_1$ . Sejam  $(y, z)$  as coordenadas de  $P_1$  no sistema  $OYZ$ . O número  $y$  é o mesmo já obtido e  $z$  é a coordenada restante do ponto  $P$ . Vejamos a Figura 3.3.

Figura 3.3 – Obtenção das coordenados do ponto  $P$  no sistema tridimensional



Fonte: O autor

Para representar o conjunto cujos elementos são os ternos ordenados  $(x, y, z)$  de números reais, usa-se a notação  $\mathbb{R}^3$ . O número  $x$  é a primeira coordenada do terno  $(x, y, z)$ ,  $y$  é a segunda coordenada e  $z$  é a terceira. Dois ternos  $(x, y, z)$  e  $(x', y', z')$  são iguais se, e somente se,  $x = x'$ ,  $y = y'$  e  $z = z'$ . Em particular,  $(1, 2, 3)$  e  $(1, 3, 2)$  são ternos diferentes.

De acordo com Lima (2006) o sistema OXYZ mostra uma correlação biunívoca  $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ . A cada ponto P do espaço associa o terno  $(x, y, z)$  de coordenadas desse ponto no sistema dado. Quando estiver claro o sistema OXYZ escreveremos  $P = (x, y, z)$  para significar que  $x, y$  e  $z$  são as coordenadas do ponto P.

As coordenadas da origem O são  $(0,0,0)$ . Os pontos dos planos  $\Pi_{xy}$ ,  $\Pi_{yz}$  e  $\Pi_{xz}$  têm coordenadas  $(x, y, 0)$ ,  $(0, y, z)$  e  $(x, 0, z)$ , respectivamente.

“Um plano chama-se vertical quando contém o eixo OZ ou é paralelo a ele. Um plano diz-se horizontal quando é perpendicular ao eixo OZ. Todos os planos de um plano horizontal têm coordenadas  $(x, y, c)$ , onde a constante  $c$  é a coordenada no eixo OZ. Todos os pontos de um plano horizontal têm coordenadas  $(x, y, c)$ , onde a constante  $c$  é a coordenada no eixo OZ, da interseção do plano dado com esse eixo. Diz-se então que  $z = c$  é a equação do referido plano. De modo análogo, os planos perpendiculares aos eixos OX e OY tem equações do tipo  $x = a$ ,  $y = b$  respectivamente. Evidentemente, um plano horizontal é paralelo a, ou coincide com o plano  $\Pi_{xy}$ ”. (LIMA, 2006, p. 75).

Neste cunho, é crucial fomentar a respeito das equações paramétricas de uma reta, haja visto que, este assunto é elementar para o trabalho desenvolvido até aqui. Assim, seguiremos trazendo breves noções sobre isso.

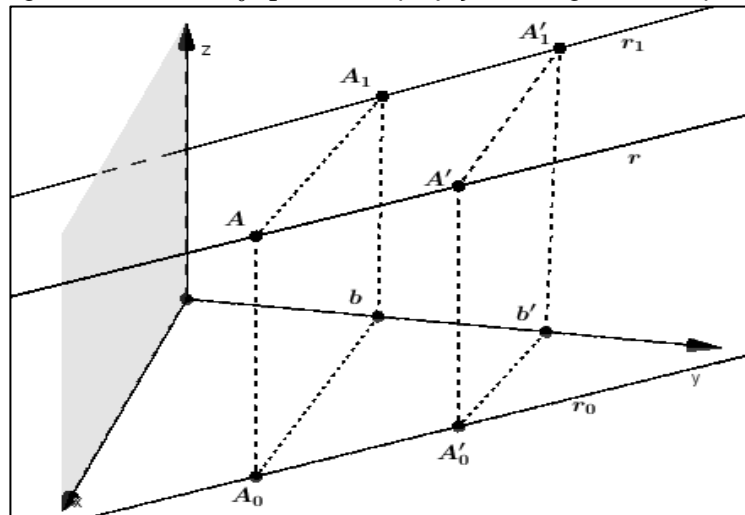
### 3.2 AS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DE UMA RETA

Nesta direção, vale ressaltar nas palavras de Lima:

“ Se  $P = (x, y, z)$  são as coordenadas relativas ao sistema OXYZ no espaço então as coordenadas, no sistema OXY, da projeção ortogonal  $P_0$  do ponto P sobre o plano  $\Pi_{xy}$  e da projeção  $P_1$  do mesmo ponto P sobre o plano  $\Pi_{yz}$  são  $P_0 = (x, y)$  e  $P_1 = (y, z)$ . Seja  $r$  a reta do espaço passando pelos pontos  $A = (a, b, c)$  e  $A' = (a', b', c')$ . Sua projeção ortogonal sobre o plano  $\Pi_{yz}$  é a reta  $r_0$  que passa pelos pontos  $A_0 = (a, b)$  e  $A'_0 = (a', b')$ , cujas coordenadas são referentes ao sistema OXY” (2006, p. 75).

A Figura 3.4 mostra as retas  $r_0$  e  $r_1$  como projeções ortogonais da reta  $r$  sobre os planos  $\Pi_{xy}$  e  $\Pi_{yz}$ .

Figura 3.4 – Retas  $r_0, r_1$  e  $r$  como projeções ortogonais dos pontos



Fonte: O autor

Desta forma, as equações paramétricas da reta  $r_0$  são:

$$x = a + t(a' - a), \quad y = b + t(b' - b).$$

Nesta direção, as equações paramétricas da reta  $r_1$ , projeção ortogonal de  $r$  sobre o plano  $\Pi_{yz}$ , são

$$y = b + t(b' - b), \quad z = c + t(c' - c).$$

Ora, o ponto  $P = (x, y, z)$  faz parte de  $r$  se, e somente se,  $P_0 = (x, y)$  pertence a  $r_0$  e  $P_1 = (y, z)$  está atrelado a  $r_1$ . Diante disso,  $(x, y, z)$  pertence a  $r$  se, e somente se,

$$x = a + t(a' - a),$$

$$y = b + t(b' - b) \text{ e}$$

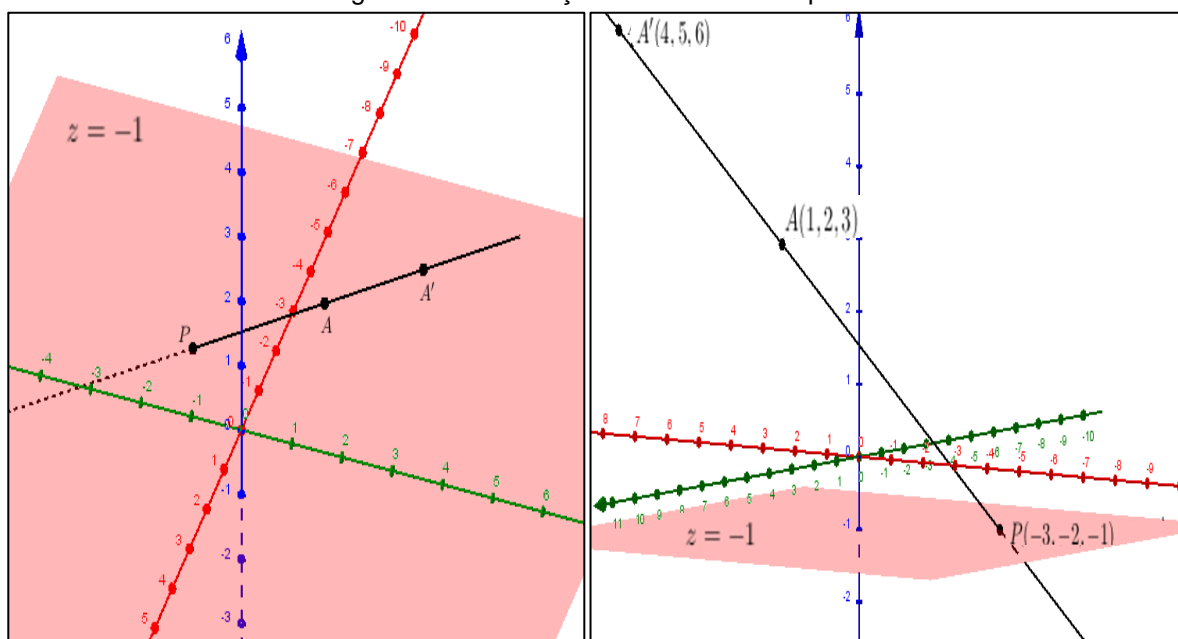
$$z = c + t(c' - c),$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ .

“Estas são, portanto, as equações paramétricas da reta que contém os pontos  $A = (a, b, c)$  e  $A' = (a', b', c')$ . Quando  $t$  varia de 0 a 1, o ponto  $P = (x, y, z)$ , cujas coordenadas são dadas pelas equações acima, descreve o segmento de reta  $AA'$ . Quando  $t < 0$ ,  $A$  se situa entre  $P$  e  $A'$ . Finalmente, quando  $t > 1$ , tem-se  $A'$  entre  $A$  e  $P$ . No caso particular da reta  $AO$ , que passa pela origem e pelo ponto  $A = (a, b, c)$ , suas equações paramétricas assumem a forma mais simples  $x = ta, y = tb, z = tc$ , ou seja, seus pontos são  $P = (ta, tb, tc)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  (LIMA, 2006, p. 77). Salvo em circunstâncias muito especiais, as equações paramétricas são mais convenientes, principalmente quando se quer encontrar a interseção da reta com uma superfície, pois tem-se apenas que determinar o valor do parâmetro  $t$  de modo que o ponto satisfaça a equação da superfície. Por exemplo: qual a interseção da reta que passa pelos pontos  $A = (1, 2, 3)$  e  $A' = (4, 5, 6)$  com o plano horizontal cuja equação é  $z = -1$ ? As equações paramétricas da reta  $AA'$  são  $x = 1 + 3t, y = 2 + 3t, z = 3 + 3t$  (LIMA, 2006, p. 77).

Com isso, para que um ponto desta reta esteja sobre o plano  $z = -1$ , deve-se ter  $3 + 3t = -1$ , ou seja,  $t = -\frac{4}{3}$ . Então  $x = 1 + 3t = 1 + 3\left(-\frac{4}{3}\right) = -3, y = 2 + 3t = 2 + 3\left(-\frac{4}{3}\right) = -2$  e  $z = -1$ . O ponto procurado é  $P = (-3, -2, -1)$  (ver Figura 3.5).

Figura 3.5 – Interseção da reta com a superfície



Fonte: O autor

Uma vez que definimos as equações da reta, podemos agora encontrar relações entre duas retas no espaço. De modo geral, temos três condições nas quais podemos relacionar duas retas no espaço, estas podem ser paralelas, reversas ou concorrentes. Nesta direção, apresenta-se breves noções sobre a equação do plano, pensando nisso focalizá-lo-emos imediatamente.

### 3.3 EQUAÇÃO DO PLANO

Sejam  $\Pi$  um plano no espaço tridimensional E e AO uma reta perpendicular ao plano  $\Pi$ , onde O é a origem de coordenadas e A é o ponto com coordenadas  $(a,b,c)$ . Nestas condições, há um número real d tal que a equação do plano  $\Pi$  é

$$ax + by + cz = d,$$

Ou seja, o ponto  $P = (x, y, z)$  pertence ao plano  $\Pi$  se, e somente se, suas coordenadas correspondem a relação acima (ver Figura 3.6).

### Demonstração

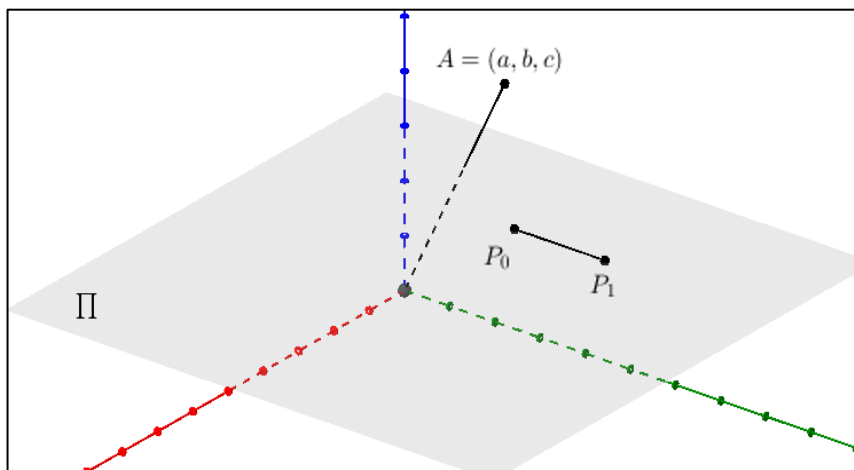
- a) Tomando-se dois pontos arbitrários  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  no plano  $\Pi$ , o segmento  $P_0P_1$  é ortogonal a  $AO$ , isto é, tem-se

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0$$

Logo:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

Figura 3.6 – Pontos  $P_0$  e  $P_1$  no plano  $\Pi = ax + by + cz = d$



Fonte: O autor

Com isso, a expressão  $ax + by + cz$  possui um valor constante para todo ponto  $P = (x, y, z)$  em  $\Pi$ . Este valor é o que chamamos de  $d$ . Assim,

$$P = (x, y, z) \in \Pi \rightarrow ax + by + cz = d.$$

b) Reciprocamente, as coordenadas do ponto  $P = (x, y, z)$  fazem a relação  $ax + by + cz = d$  então, tomando  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Pi$  tem-se, como observamos,  $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$  e por subtração surge

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou seja, o segmento  $PP_0$  é ortogonal a  $AO$ . Portanto  $P \in \Pi$ .

De a) e b) conclui-se que o ponto  $P = (x, y, z)$  pertence ao plano  $\Pi$  se, e somente se,  $ax + by + cz = d$ .

Se o plano  $\Pi$  contém a origem  $O$ , sua equação é satisfeita quando  $x = y = z = 0$ , logo  $d = 0$  e a equação de  $\Pi$  tem a forma  $ax + by + cz = 0$ .

Ainda neste capítulo verificar-se-á que os problemas de programação linear formam regiões convexas, as quais são formadas pelas inequações lineares (restrições do problema) e que são de grande importância para encontrarmos o ponto ótimo, ou seja, para obtermos a solução do problema.

### 3.4 INEQUAÇÕES LINEARES

**Definição:** Uma inequação linear é toda sentença Matemática da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n \leq b,$$

com  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  sendo as incógnitas, e  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  e  $b$  sendo as constantes com  $a_i \neq 0$  para pelo menos um  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Nesta seção aborda-se apenas as inequações lineares com três incógnitas, de modo que as representações gráficas serão apresentadas apenas no  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, em planos tridimensionais.

### 3.5 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA INEQUAÇÃO COM TRÊS VARIÁVEIS NO PLANO $\mathbb{R}^3$

Uma das formas de representação das inequações se dá por meio da sua representação gráfica; para isso, assume-se a seguinte inequação:  $ax + by + cz \geq k$ .

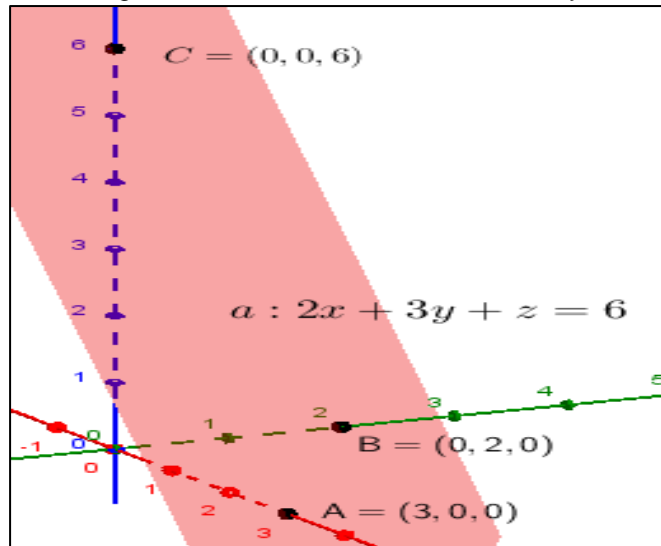
Primeiro passo é considerar apenas a igualdade ( $ax + by + cz = k$ ), conforme visto anteriormente, para isso se faz necessário apenas a obtenção de três pontos. De maneira a facilitar, será obtido o intercepto dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , basta fazer  $(x, 0, 0)$ ,  $(0, y, 0)$  e  $(0, 0, z)$ .

O próximo passo é determinar qual dos semiespaços formados pelo plano satisfaz a inequação, para isso, se escolhe um ponto qualquer pertencente a um dos semiespaços e verifica-se, se para este ponto, a inequação é verdadeira; caso verdadeiro, este semiespaço deverá ser assinalado e, caso contrário, o outro semiespaço que satisfaz a inequação.

Objetivando a melhor compressão, considere-se a seguinte inequação:

$2x + 3y + z \geq 6$ , considerando-a como igualdade, tem-se:  $(3,0,0)$ ,  $(0,2,0)$  e  $(0,0,6)$  como pares ordenados da equação  $2x + 3y + z = 6$ , percebe-se na Figura 3.7 que o plano intersecta os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  neles, respectivamente.

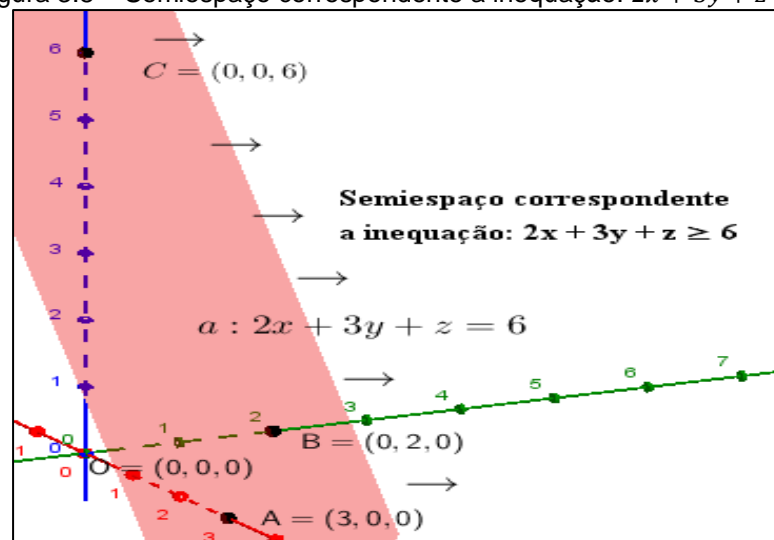
Figura 3.7– Plano intersecta os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$



Fonte: O autor

De maneira arbitrária, escolhe-se um ponto pertencente a um dos semiespaços delimitados pelo plano, no caso, a origem  $(0,0,0)$ , verificando se a inequação mostra-se verdadeira para este ponto, tem-se:  $2x + 3y + z \geq 6 \Rightarrow 2(0) + 3(0) + 0 = 0 \geq 6$ , não se mostra verdadeira; sendo assim, o semiespaço que deverá ser assinalado, respeitando a inequação, corresponderá ao outro semiespaço, conforme a Figura 3.8.

Figura 3.8 – Semiespaço correspondente a inequação:  $2x + 3y + z \geq 6$



Fonte: O autor



Para a construção e interpretação gráfica nos Problemas de Programação Linear (PPL) trabalhar-se-á com os pontos que por vezes são fáceis de encontrar, correspondem as interseções dos eixos, ou seja, quando  $y = 0$  e  $z = 0$  ocorrerá a interseção do plano com o eixo  $x$ , quando  $x = 0$  e  $z = 0$  ocorrerá a interseção do plano com o eixo  $y$  e quando  $x = 0$  e  $y = 0$  ocorrerá a interseção do plano com o eixo  $z$ .

As equações do plano e conseqüentemente a análise gráfica destas, estão relacionadas diretamente com o sistema de equações lineares com três incógnitas, em seguida assinala-se alguns conceitos e exemplos que nos auxiliarão na resolução de problemas de programação linear no espaço tridimensional.

### 3.6 TRÊS EQUAÇÕES LINEARES COM TRÊS INCÓGNITAS

Segundo Dante (2005), consideremos o sistema

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

de três equações com três incógnitas. Geometricamente, cada uma das equações, nesta ordem, define os planos  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$ . O terno ordenado  $(x, y, z)$  é solução desse sistema quando o ponto  $P(x, y, z)$  pertence à interseção  $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ , ou seja, quando  $P$  está simultaneamente em cada um dos três planos.

Associadas a esse sistema há duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (I) \quad e \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} \quad (II)$$

Os vetores-linha da matriz (I) são  $l_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $l_2 = (a_2, b_2, c_2)$  e  $l_3 = (a_3, b_3, c_3)$ , e os vetores-linha da matriz (II) são  $L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ ,  $L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$  e  $L_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$ , todos não-nulos (Dante 2005).

Do ponto de vista da existência ou não de soluções do mesmo, há oito situações possíveis dos planos  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$ , definidos pelas três equações. Examinaremos essas situações e mostraremos como identificá-las a partir das linhas  $l_1, l_2$  e  $l_3$  da matriz do sistema e  $L_1, L_2, L_3$  da matriz aumentada.

Mediante ao exposto, fomentar-se-á as possibilidades para as posições relativas dos três planos no espaço, pois consideramos a necessidade de estabelecer-se conexões com o tema desse trabalho.

### 3.7 POSSIBILIDADES PARA AS POSIÇÕES RELATIVAS DOS TRÊS PLANOS NO ESPAÇO

Há oito possibilidades para as posições relativas dos três planos  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$ , no espaço, mas para essa dissertação abordaremos apenas quatro casos:

- **1º caso:** Os planos  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$  são paralelos dois a dois

Neste caso, o sistema não admite solução: é impossível. Em termos dos vetores-linha, a presente situação se dá quando cada um dos vetores  $l_1, l_2$  e  $l_3$  é múltiplo de outro mas os vetores  $L_1, L_2, L_3$  são dois a dois não-colineares (ver Figura 3.9).

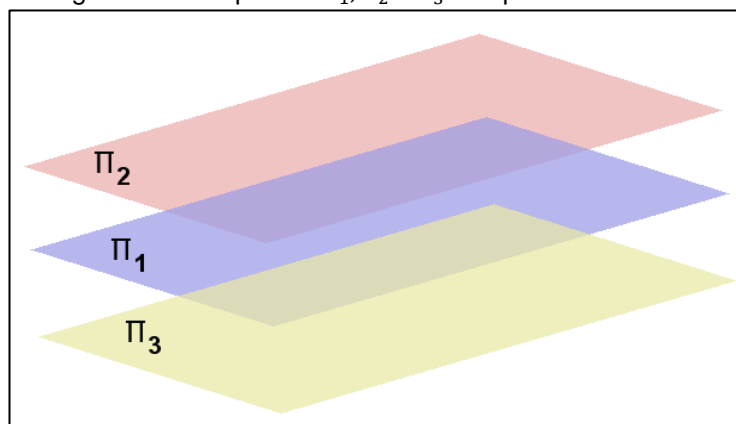
**Exemplo.** Este é o caso do sistema

$$x + 2y - z = 3$$

$$2x + 4y - 2z = 4$$

$$3x + 6y - 3z = 5$$

Figura 3.9 - Os planos  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$  são paralelos dois a dois



Fonte: O autor

Para o qual se tem  $l_1 = (1, 2, -1), l_2 = (2, 4, -2)$  e  $l_3 = (3, 6, -3)$ , logo  $l_2 = 2l_1$  e  $l_3 = 3l_1$ . Mas as linhas da matriz aumentada,  $L_1 = (1, 2, -1, 3), L_2 = (2, 4, -2, 4)$  e  $L_3 = (3, 6, -3, 5)$  são duas a duas não-colineares.

- **2º caso:**  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$  são três planos distintos que têm uma reta  $r$  em comum

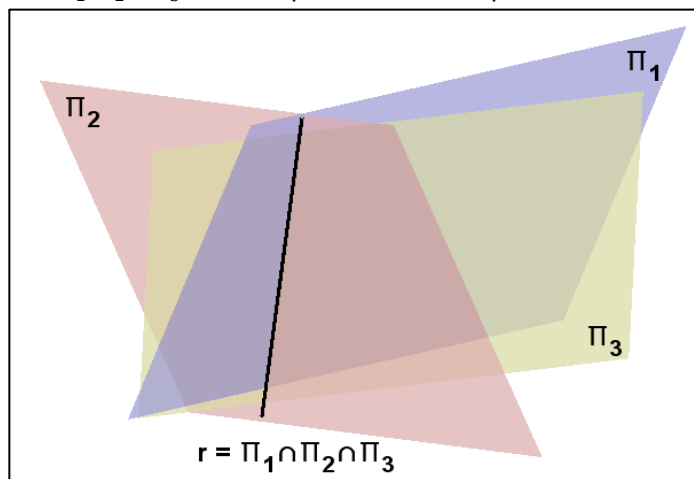
Neste caso o sistema é indeterminado. Suas soluções  $(x, y, z)$  são as coordenadas dos pontos da reta  $r = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ .

Em suma: o 2º caso ocorre se, e somente se,  $L_3$  é combinação linear de  $L_1$  e  $L_2$  e nenhum dos vetores  $l_1, l_2, l_3$  é múltiplo de outro (ver Figura 3.10).

**Exemplo.** Os planos definidos pelas equações do sistema

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\2x - y + z &= 3 \\5x + 2y + 4z &= 6\end{aligned}$$

Figura 3.10 -  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$  são três planos distintos que têm uma reta  $r$  em comum



Fonte: O autor

São dois a dois distintos e têm uma reta em comum. O sistema é indeterminado. Suas soluções são os pontos da forma

$$\left(x, \frac{1}{2}x - 1, 2 - \frac{3}{2}x\right),$$

Onde  $x$  assume livremente qualquer valor real. Isto se dá porque os vetores  $l_1 = (1,1,1), l_2 = (2, -1,1)$  e  $l_3 = (5,2,4)$  são dois a dois não-colineares, e como se verifica facilmente, tem-se  $L_3 = 3L_1 + L_2$ .

- **3º caso:** Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas  $r = \Pi_1 \cap \Pi_2, s = \Pi_1 \cap \Pi_3$  e  $t = \Pi_2 \cap \Pi_3$ , paralelas umas às outras.

Neste caso o sistema é impossível. O 2º caso ocorre se, e somente se,  $l_1, l_2, l_3$  são dois a dois não-colineares,  $l_3 = \alpha l_1 + \beta l_2$  e  $L_3 \neq \alpha L_1 + \beta L_2$ . Isto equivale a dizer que  $L_3$  não é combinação linear de  $L_1$  e  $L_2$  ou, mais simplesmente ainda, que  $L_1, L_2$  e  $L_3$  são linearmente independentes (ver Figura 3.11).

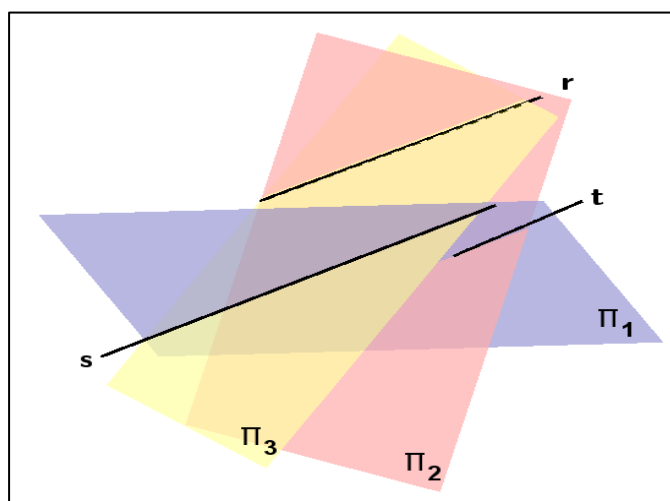
**Exemplo.** No sistema

$$x + 2y - 3z = 1$$

$$3x + y + z = 2$$

$$8x + y + 6z = 6,$$

Figura 3.11 - Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas  $r, s$  e  $t$ , paralelas umas às outras.



Fonte: O autor

Os vetores-linha  $l_1 = (1, 2, -3), l_2 = (3, 1, 1)$  e  $l_3 = (8, 1, 6)$  são dois a dois não-colineares. Tem-se  $l_3 = 3l_2 - l_1$ , de modo que  $l_1, l_2$  e  $l_3$  são coplanares. Mas  $6 \neq 3 \cdot 2 - 1$  logo  $L_3 \neq 3L_2 - L_1$ , Portanto, os planos definidos pelas equações acima se intersectam dois a dois segundo três retas paralelas.

- **4º caso:** Os três planos  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$  têm um único ponto em comum

Neste caso o sistema é determinado. Do ponto de vista algébrico, isto ocorre se, e somente se, os vetores-linha  $l_1, l_2, l_3$  da matriz do sistema são linearmente independentes (ver Figura 3.12).

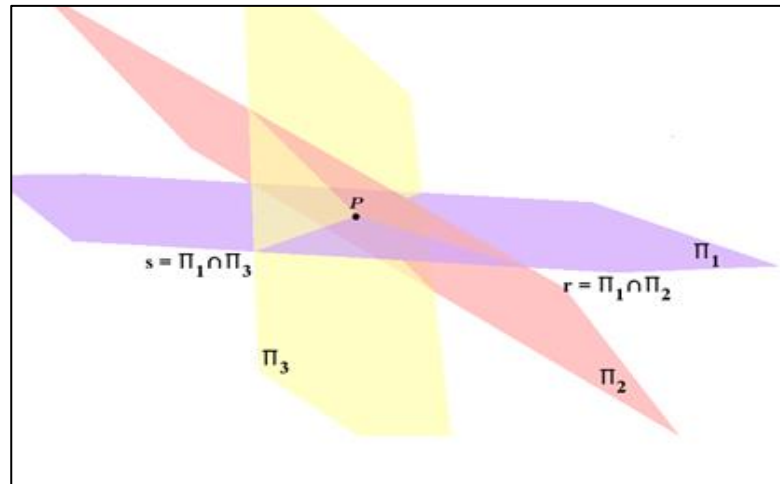
**Exemplo:** Dado o sistema

$$x + 2y + 3z = 1$$

$$2x + y + z = 2$$

$$3x - y + 2z = 1,$$

Figura 3.12 - Os três planos  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$  têm um único ponto em comum



Fonte: O autor

Pode-se ver que os vetores-linha  $l_1 = (1,2,3)$ ,  $l_2 = (2,1,1)$  e  $l_3 = (3,-1,2)$  são linearmente independentes. Com efeito, olhando para as duas primeiras coordenadas, vemos que  $(3,-1) = \alpha(1,2) + \beta(2,1)$ , com  $\alpha = -\frac{5}{3}$  e  $\beta = \frac{7}{3}$ . Logo, só poder-se-ia ter  $l_3 = \alpha l_1 + \beta l_2$  se  $\alpha$  e  $\beta$  tivessem esses valores. Mas, examinando as terceiras coordenadas, vemos que  $2 \neq -\frac{5}{3} \cdot 3 + \frac{7}{3} \cdot 1$ .

Portanto,  $l_3$  não é combinação linear de  $l_1$  e  $l_2$ . Como  $l_1$  e  $l_2$  não são múltiplos um do outro, conclui-se que, de fato,  $l_1, l_2$  e  $l_3$  são linearmente independentes. Logo, o sistema possui uma única solução.

A seguir abordar-se-á brevemente sobre os Poliedros falado anteriormente em inequações lineares, ao passo que observar-se-á o desencadeamento deste conteúdo nas abordagens das questões de PPL.

### 3.8 POLIEDROS

Esse tema permite a continuidade do desenvolvimento da interpretação e do uso de modelos e representações matemáticas para analisar relações entre figuras no espaço. Segundo Lima (2006),

Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:

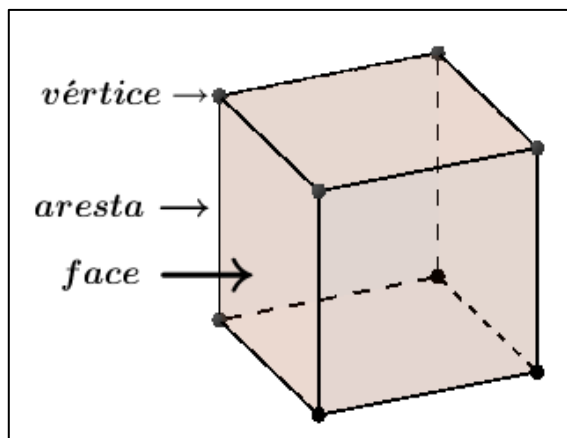
- a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

- c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas). Lima 2006, p 233.

O instante inicial consiste na problemática em identificar os principais objetos de um poliedro, conforme a Figura 3.13, e a contagem relacionada a quantidade desses objetos, uma vez que, como aumenta-se o número de semiplanos (faces), tem-se que encontrar uma maneira de descobrir tais resultados.

Figura 3.13 – Principais objetos de um Poliedro



Fonte: O autor

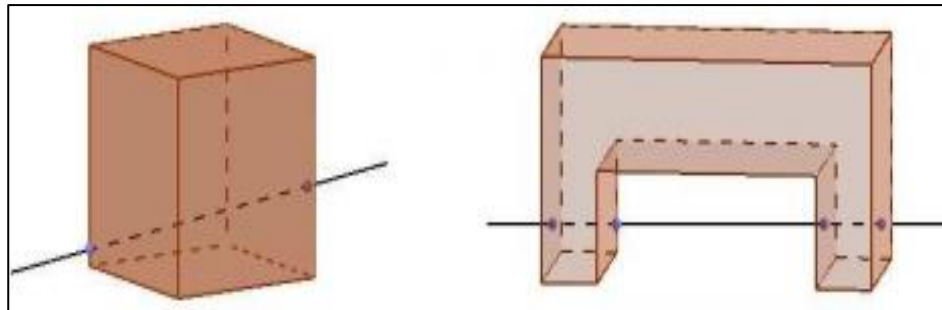
Na nomeação dos poliedros temos os convexos e não convexos:

“Todo poliedro limita uma região do espaço chamada de interior deste poliedro. Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior  $C$  é convexo, isto é, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de  $C$  está inteiramente contido em  $C$ . Em um poliedro convexo toda

reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos” (LIMA, 1991, p. 58).

Então, um poliedro é convexo quando quaisquer dois pontos pertencentes ao sólido formam um segmento de reta contido nele. Caso contrário, diz-se que o poliedro é não-convexo (ver Figura 3.14).

Figura 3.14 – Poliedro convexo e poliedro não-convexo



Fonte: O autor

Tendo em vista os objetivos desse trabalho, focalizar-se-á apenas os poliedros convexos, é importante ressaltar que o conteúdo de poliedros é bem mais extenso, mas para essa dissertação as definições acima são suficientes.

Levando em consideração os assuntos abordados neste capítulo, conteúdos estes abordados com os alunos ao longo do ensino fundamental e médio, percebe-se que os Problemas de Programação Linear em 3D necessitam desses conhecimentos prévios, portanto a seguir abordar-se-á alguns conceitos e propriedades importantes da Programação Linear.

### 3.9 DEFINIÇÕES E TEOREMAS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Agora, dedicar-se-á atenção ao estudo das definições e teoremas fundamentais da programação linear, que servirão de embasamentos para resolução de PPL e que podem ser aplicadas tanto no plano bidimensional quanto no plano tridimensional. Como as demonstrações dos teoremas que embasam essa teoria foge ao objetivo do trabalho, serão apresentados apenas os seus enunciados.

**Definição 2.1** (Programação Linear) Definimos um Problema de Programação Linear (PPL) como um problema cuja função objetivo e todas as restrições correspondem a

equações ou inequações lineares, sendo que o objetivo desses problemas é encontrar uma solução ótima (melhor), existentes num planejamento de atividades.

$$z = \min \text{ ou } \max f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeito a

$$\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

$x_j \geq 0$  é a variável a ser designada ou produzida;

$c_j$  é o coeficiente de lucro (ou de custo) para a variável  $x_j$ ;

$z$  é a Função Objetivo a ser maximizada;

$a_{ij}$  é o coeficiente da variável  $x_j$  na injunção  $i$ ;

$b_i$  é o valor limite da restrição  $i$ ;

$j = 1, 2, \dots, n$  é o número de variáveis; e  $i = 1, 2, \dots, m$  é o número de injunções impostas.

Logo, pode-se descrever um problema de otimização linear pelas seguintes características:

- A função objetivo deve ser minimizada (ou maximizada);
- As restrições do problema são definidas por um sistema de equações lineares;
- As variáveis possuem a restrição de serem não-negativas.

As soluções do problema de Otimização Linear são classificadas em:

**Definição 2.2 Solução viável ou factível:** é o conjunto de valores das variáveis  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  que atendem a todas as restrições do problema, inclusive as de não negatividade.

**Definição 2.3 Solução Ótima:** é a solução factível que apresente o melhor valor da função objetivo do problema, ou seja, uma solução viável  $\bar{x} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n\}$  de um problema de maximização, é chamada de solução ótima se  $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , para qualquer solução viável  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .



**Definição 2.4 As variáveis de decisão** são as incógnitas, ou valores desconhecidos, que serão determinados pela solução do modelo. As variáveis de decisão devem assumir valores não negativos.

**Definição 2.5 A função objetivo** é uma função matemática que determina o valor-alvo que se pretende alcançar ou a qualidade da solução, em função das variáveis de decisão e dos parâmetros, podendo ser uma função de maximização ou de minimização.

**Definição 2.6 As restrições** podem ser definidas como um conjunto de equações e inequações que as variáveis de decisão do modelo devem satisfazer. As restrições são adicionadas ao modelo de forma a considerar as limitações físicas do sistema, e afetam diretamente os valores das variáveis de decisão.

**Definição 2.7 Região Viável** de um PPL é uma região determinada pelas interseções dos semiplanos definidos pelas restrições, ou seja, é o conjunto de soluções viáveis do PPL.

**Definição 2.8 Uma Região Viável** é dita Limitada se puder ser englobada numa esfera suficientemente grande, caso isso não ocorra, dizemos que ela é ilimitada. Podemos interpretar uma região viável como sendo interior e os lados de um poliedro convexo em  $\mathbb{R}^n$ , determinado pelas restrições do problema. Chamar-se-á de pontos extremos os vértices desse poliedro.

**Definição 2.9 Pontos Extremos** são os pontos determinados pelas interseções das retas que limitam os semiplanos determinadas pelas restrições do problema. A importância dos pontos extremos de uma região viável é mostrada pelo seguinte teorema.

**Teorema I** - Se a região viável de um Problema de Programação Linear é não-vazia e limitada, então a função-objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável é ilimitada, então a função-objetivo pode ou não atingir valores máximo ou mínimo;

contudo, se atingir um máximo ou um mínimo, este ocorrerá em pontos extremos. Resolver problemas de Otimização Linear é buscar dentro das soluções factíveis a melhor solução viável, que segundo o teorema acima se encontra em um dos vértices dessa região.

**Teorema II** - O conjunto de todas as soluções viáveis de um modelo de Programação Linear é um conjunto convexo.

Mais concretamente, abordar-se-á a representação e determinação gráfica de soluções de um caso particular do problema, isto é, com três variáveis, com recurso ao software dinâmico GeoGebra.

$$z = \min \text{ ou } \max f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

Sujeito a

$$\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = b_2 \\ \vdots + \quad \vdots + \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \leq \text{ ou } \geq \text{ ou } = b_m \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Com base nos assuntos, definições e teoremas abordados, mapear-se-á alguns conceitos e principais comandos básicos associados ao Geogebra 3D, os quais os alunos devem possuir para que possam resolver os PPL, o que consequentemente facilitará a compreensão do tema.

## 4 O GEOGEBRA NA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Para que o plano tridimensional abordado neste trabalho, seja facilmente compreendido, é necessário ter uma melhor visualização no plano  $\mathbb{R}^3$ , pois quanto melhor for a visualização desse objeto de estudo em diferentes ângulos, melhor será a compreensão.

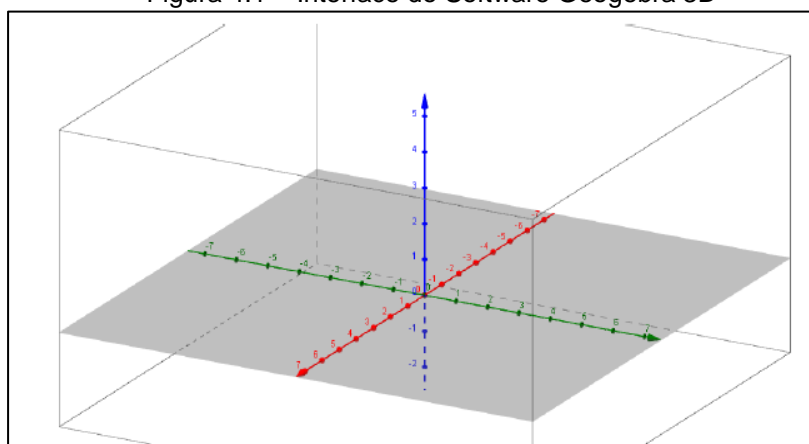
Geralmente quando o professor faz as representações desses objetos tridimensionais no quadro, a imagem do sólido não fica boa, porque o mesmo está representando um sólido 3D em uma região 2D. Sendo assim, a utilização de um software que permite trabalhar com essa perspectiva é de fundamental importância nas aulas tornando-se um recurso pedagógico de muito valor.

O uso deste recurso tecnológico, o software Geogebra, para trabalhar com a análise gráfica dos Problemas de Programação Linear surge como uma tentativa para melhorar as aulas. Portanto, a ideia de trabalhar utilizando o Geogebra envolvendo os conteúdos abordados acima tem a finalidade de expor melhor estes conceitos.

### 4.1 GEOGEBRA 3D – APRESENTAÇÃO

Desde 2014, que temos disponível uma versão oficial da janela de visualização do Geogebra 3D, acoplado nas versões do aplicativo. Esta janela de visualização permite uma exibição tridimensional com ferramentas adicionais para esta função, porém, mantendo os mesmos recursos de manipulação que as versões anteriores do software já possuíam. Neste sentido, a interface do software está apresentada na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Interface do Software Geogebra 3D



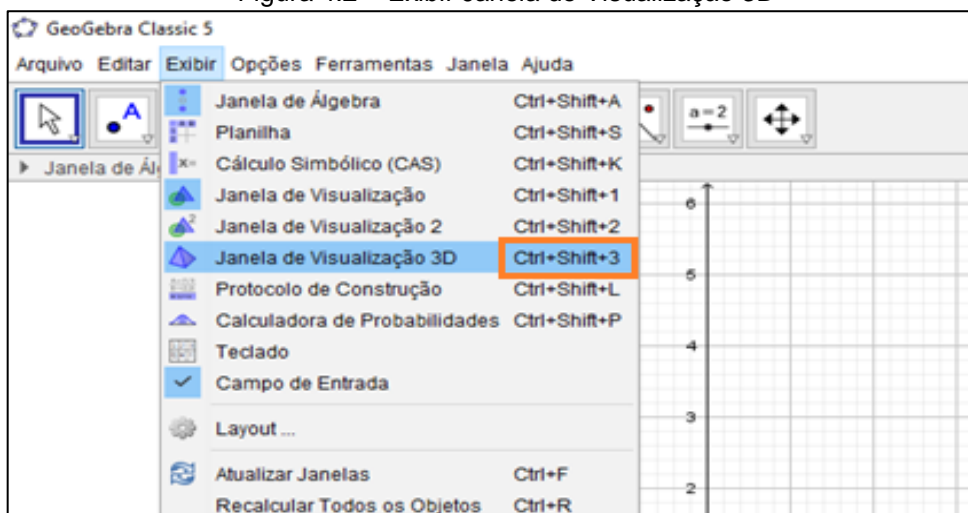
Fonte: O autor

Pensando na real necessidade de compreendermos o funcionamento da janela de visualização 3D, para mais adiante verificar-se-á o uso do método gráfico nos PPL, vejamos o passo a passo seguir.

## 4.2 JANELA DE VISUALIZAÇÃO 3D

Para iniciar os estudos sobre a Janela de visualização 3D, vamos abordar como exibir esta janela, para isso clique no menu exibir, em seguida clique na janela de visualização 3D, podemos notar que tem um caminho ou atalho (CTRL+SHIFT+3) que também exibi a janela de visualização 3D, conforme analisa-se na Figura 4.2.

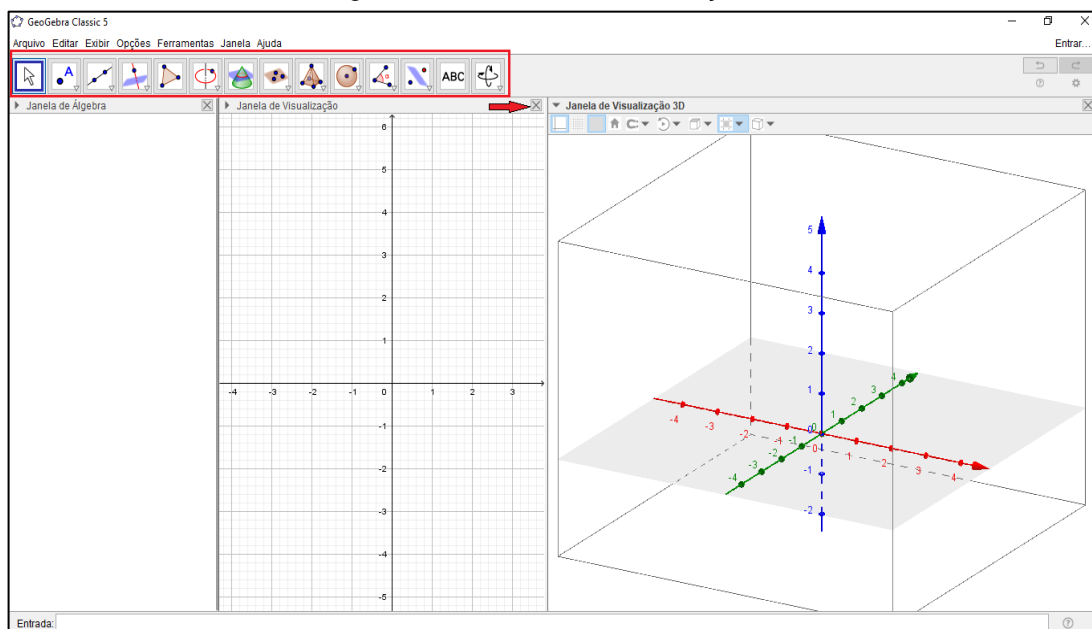
Figura 4.2 – Exibir Janela de Visualização 3D



Fonte: O autor

Em seguida, uma janela adicional no Geogebra abre-se com algumas características, cuja interface é composta por uma barra de menus, uma barra de ferramentas, a janela de álgebra, a janela de visualização, o campo de entrada de texto e um menu de comandos, também pode-se observar que a barra de menu sofreu certa alteração, ou seja, exibe ícones que não eram exibidos na janela de visualização, de acordo com a ilustração na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Janela de Visualização 3D



Fonte: O autor

Ocultar-se-á a Janela de visualização (duas dimensões), conforme identificado pela seta vermelha na figura 4.3, para abordarmos melhor a janela 3D, tendo em vista que, os problemas trabalhados mais adiante são em um espaço tridimensional.

Após a apresentação da janela de visualização 3D, evidenciar-se-á a barra de ferramentas como sondagem das construções que serão articuladas numa dimensão tridimensional.

### 4.3 BARRA DE FERRAMENTAS

A Barra de Ferramentas do Geogebra 3D está dividida em 14 janelas, sendo destas 7 específicas para o Geogebra 3D como vemos na Figura 4.4

Figura 4.4 – Barra de ferramentas



Fonte: O autor

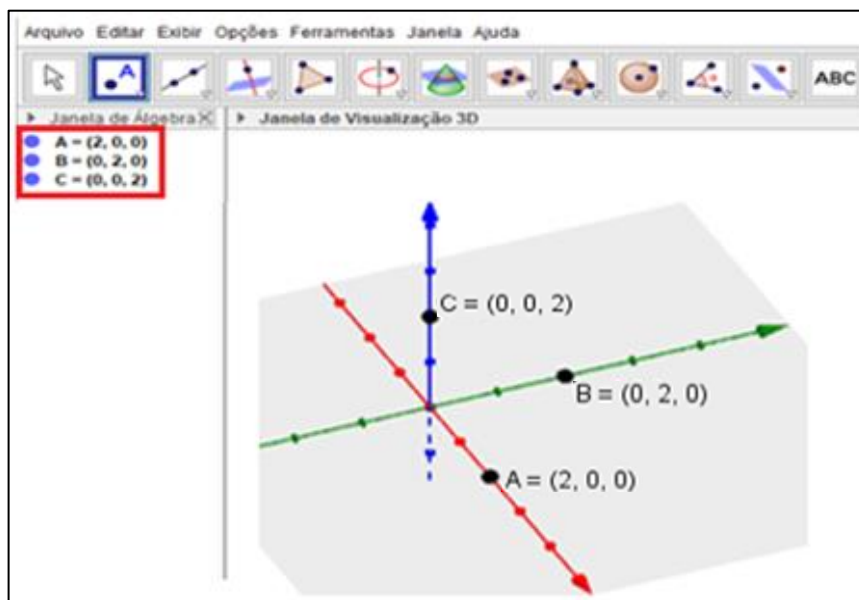
Cada uma destas janelas possui várias ferramentas. Para visualizar estas ferramentas basta clicar sobre a seta no canto do ícone e então irão aparecer as

opções referentes a estas janelas. Analisar-se-á alguns exemplos da aplicabilidade dos principais comandos e ferramentas que serão usados neste trabalho. Aquém, partir-se-á para a construção de um ponto, haja vista ser imprescindível para o avanço da construção de um plano.

#### 4.3.1 Construção de um Ponto

Selecionando a ferramenta “Ponto” em seguida clicamos sobre os eixos vermelho, verde e azul, constrói-se três pontos, A, B e C, podemos observar que pelas coordenadas dos pontos na janela de álgebra, que estes encontram-se nos eixos x, y e z, respectivamente, tendo em vista que  $A = (2,0,0)$ ,  $B = (0,2,0)$  e  $C = (0,0,2)$ . Ver Figura 4.5.

Figura 4.5 – Pontos A, B e C em seus respectivos eixos

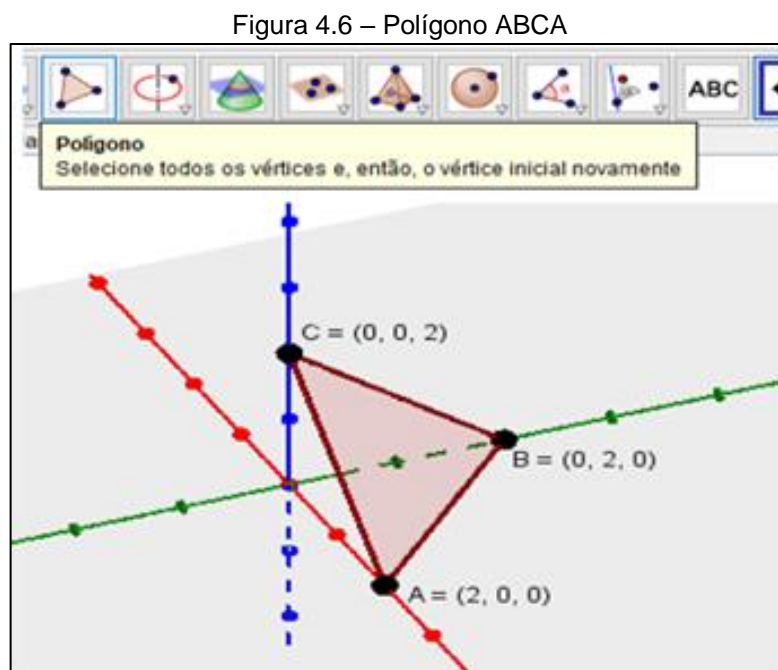


Fonte: O autor

A construção de um polígono, tendo como vértices pontos já determinados, é bastante relevante. Neste sentido, as orientações para o seu desenvolvimento ocorrem de forma paulatina para a maior fixação das etapas a serem realizadas.

### 4.3.2 Construção de um Polígono

Para construirmos um polígono passando pelos três pontos (A, B e C), basta clicar no ícone “Polígono” e em seguida sobre os pontos A, B, C e A. Como pode-se observar na Figura 4.6.



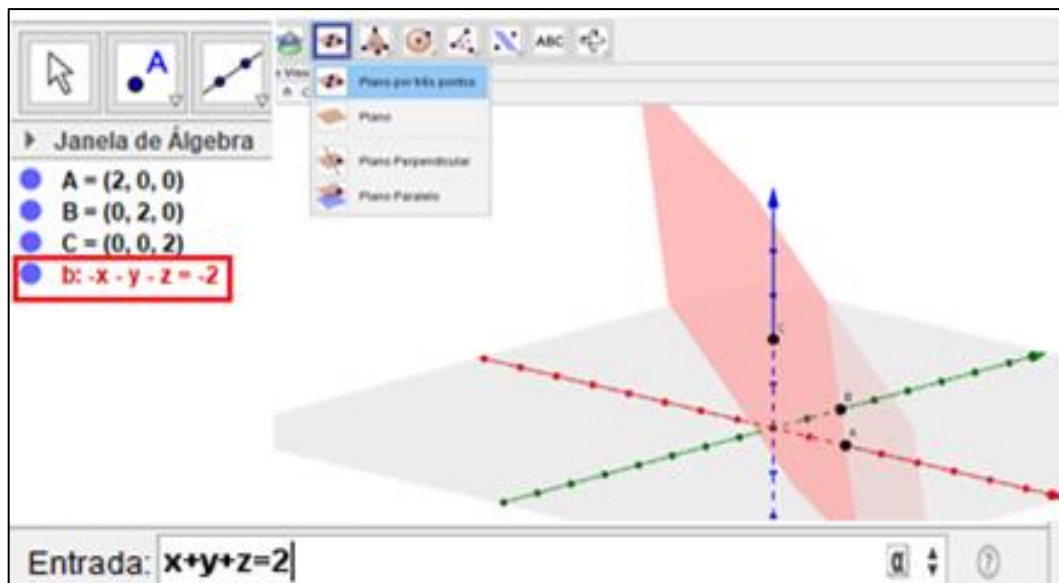
Fonte: O autor

Sabendo da importância da construção de um polígono, tendo em vista que os poliedros são construídos a partir destes, verificar-se-á como se dar a construção do plano, este que é crucial para resolução dos PPL pelo método geométrico.

### 4.3.3 Construção de plano

Clicando-se sobre o ícone “plano por três pontos” constata-se que eles concentram um conjunto de outros ícones destinados a construir objetos na janela de visualização 3D. Traçar-se-á um plano passando por esses três pontos (A, B e C). Veja que, clicando-se sobre os três pontos surge o plano e na janela de álgebra surge a equação deste plano. Ver Figura 4.7.

Figura 4.7– Plano  $b: x + y + z = 2$  passando pelos pontos A, B e C.



Fonte: O autor

Outro modo de construir um plano, que será bastante utilizado neste trabalho, será usando a “barra de entrada”, na parte inferior da janela de visualização 3D, para isso, basta escrever a equação a qual queremos, conforme observamos na Figura 4.7. É necessário restringir o espaço tridimensional apenas ao primeiro octante, pois os PPL abordados neste trabalho serão analisados apenas para os valores positivos de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

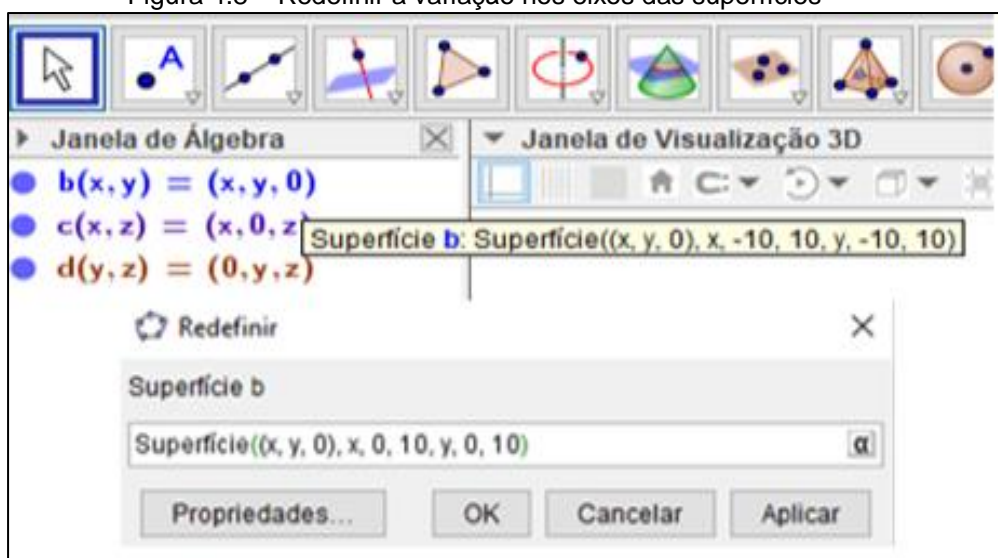
#### 4.3.4 Redefinição do espaço $\mathbb{R}^3$ ao primeiro octante

É importante ressaltar que, nos problemas de programação linear trabalhar-se-á com  $x, y$  e  $z \geq 0$ , ou seja, a análise gráfica será feita apenas no primeiro octante. Com isso, três superfícies são interessantes construirmos, são elas: superfície  $xy$ , superfície  $xz$  e superfície  $yz$ , para isso basta escrever na “barra de entrada”:  $(x, y, 0)$ ,  $(x, 0, z)$  e  $(0, y, z)$ , respectivamente, e na janela de visualização 3D aparecerá os planos construídos sobre os eixos (Ver figura 4.9).

Analisando a superfície  $xy$  na janela de álgebra, percebe-se a variação de -10 a 10 nos eixos, como queremos apenas os valores positivos de  $x$  e  $y$ , basta clicarmos duas vezes sobre a superfície (na janela de álgebra) e redefinir a variação para 0 a 10. Conforme se observa na Figura 4.8.



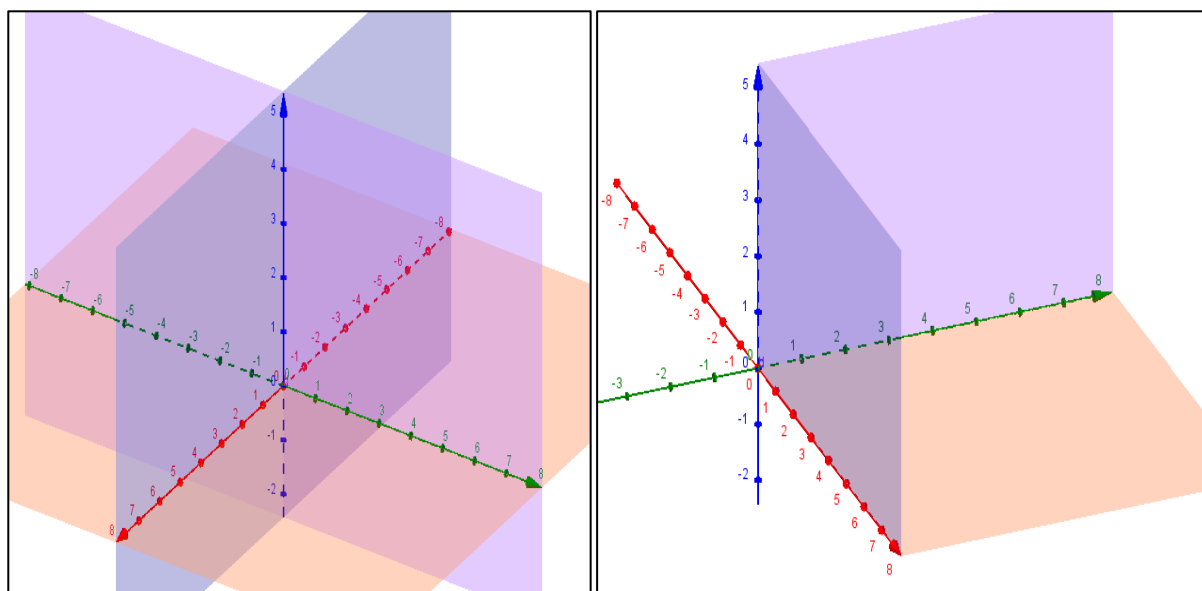
Figura 4.8 – Redefinir a variação nos eixos das superfícies



Fonte: O autor

Repetindo o processo nas demais superfícies teremos os planos apenas no primeiro octante, assim, pode-se analisar melhor mediante a representação da Figura 4.9.

Figura 4.9 – Antes e depois da redefinição das superfícies



Fonte: O autor

É importante salientar que, o comando de uma inequação com três variáveis não funciona no Geogebra 3D, então, para se realizar a análise gráfica dos PPL deve-

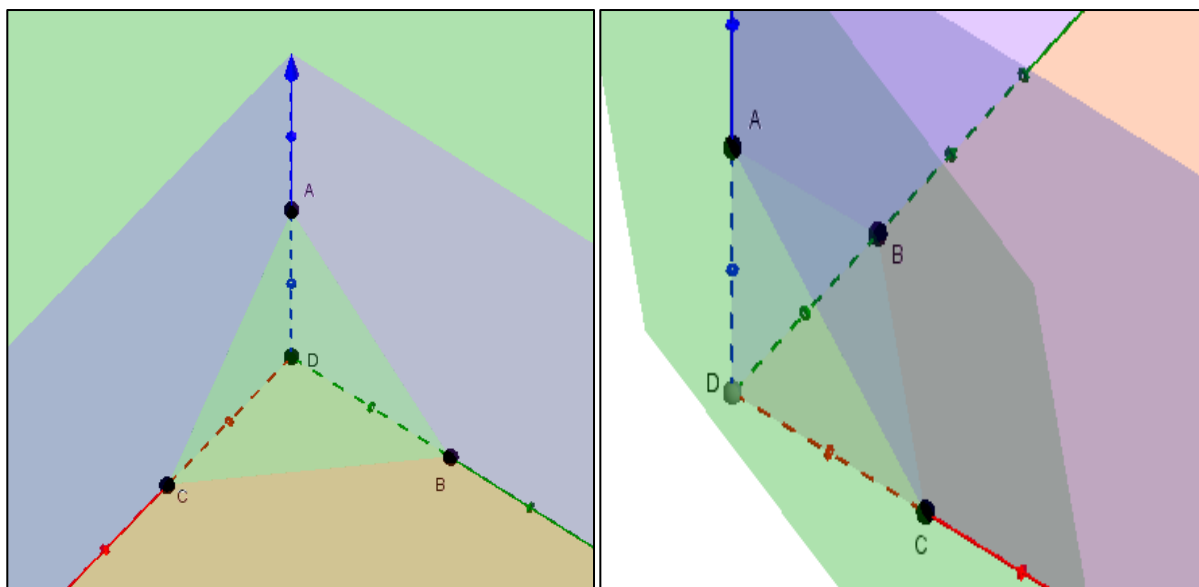
se escrever a inequação como uma equação do plano, como vimos no *item 4.3.3 – construção de um plano*, em seguida estudar a desigualdade da restrição.

#### 4.3.5 Análise gráfica da inequação no primeiro octante

Isto é, querendo-se construir o gráfico que representa  $x + y + z \leq 2$ , basta fazer  $x + y + z = 2$  e em seguida analisar a desigualdade, esta análise pode ser feita pegando um ponto qualquer no espaço, uma vez verificando se o mesmo satisfaz a inequação, exemplo  $O(0,0,0)$  é válido para inequação, pois  $0 + 0 + 0 = 0 \leq 2$ , portanto, todos os pontos que fazem parte desse semiespaço são soluções.

Por dois ângulos diferentes podemos verificar na Figura 4.10 a qual corresponde a região que compreende esses pontos, em outras palavras evidencia-se o poliedro ABCD - para melhor compreensão dessa análise da desigualdade, veja o capítulo 3 – seção 3.5 - *Representação gráfica de uma inequação com três variáveis no plano  $\mathbb{R}^3$* .

Figura 4.10 – Região que compreende os pontos A,B e C.



Fonte: O autor

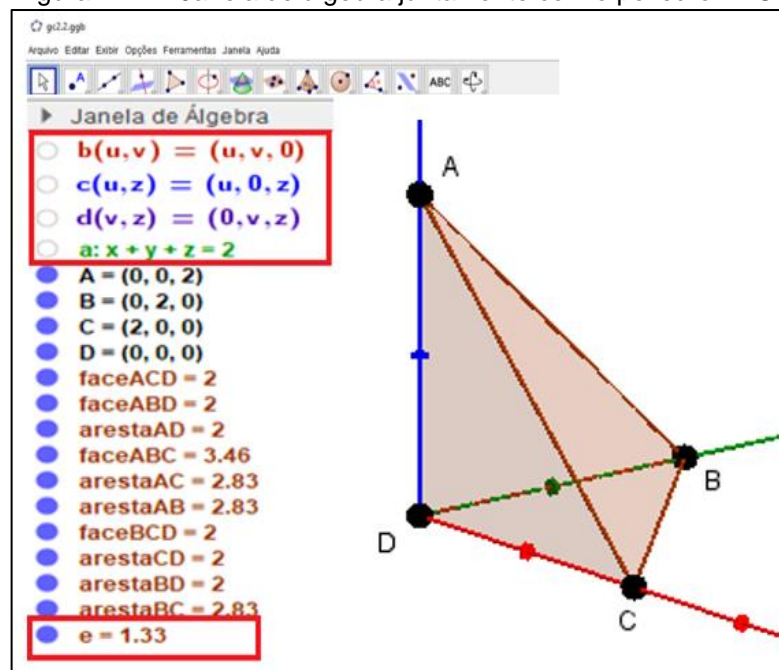
Diante da visualização do poliedro, é satisfatório dominar a construção de uma região Convexa e suas nuances. Assim, depreenderemos a seguir essa construção para melhor visualizá-la em 3D.

### 4.3.6 Construção de uma Região Convexa

Para construir o poliedro correspondente a Figura 4.11 deve-se acessar o ícone “Pirâmide”, que é um conjunto de ícones para produzir pirâmides, prismas, cones, cilindros, poliedros e planificações, em seguida selecionar um polígono para base do poliedro, consideremos o polígono BCDB, e depois clicar sobre o vértice oposto a base, neste caso vértice A, assim teremos construído o poliedro ABCD. É importante destacar que a quantidade e medidas das faces e arestas aparecem na janela de álgebra.

Para melhor visualização deve-se ocultar os planos, construídos no item 4.3.4, que compreendem este poliedro, para isso basta clicar sobre a “bolinha” azul na janela de álgebra, que por intermédio desta janela podemos também perceber que este poliedro está sendo representado por  $e$ , como salienta a Figura 4.11

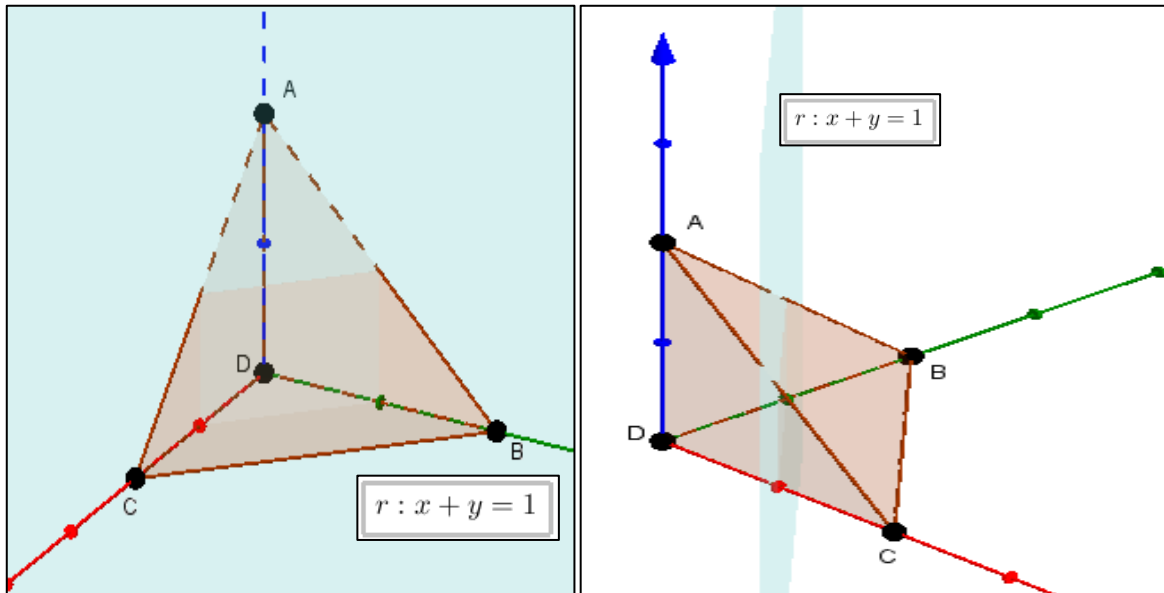
Figura 4.11 – Janela de álgebra juntamente com o poliedro ABCD



Fonte: O autor

Usando ainda o poliedro anterior, construiremos o plano  $r : x + y = 1$ , pode-se notar que as quatro faces de  $e$  intersectam o plano  $r$ . Verifiquemos na Figura 4.12:

Figura 4.12 – Interseção do plano  $r : x + y = 1$  com o poliedro ABCD

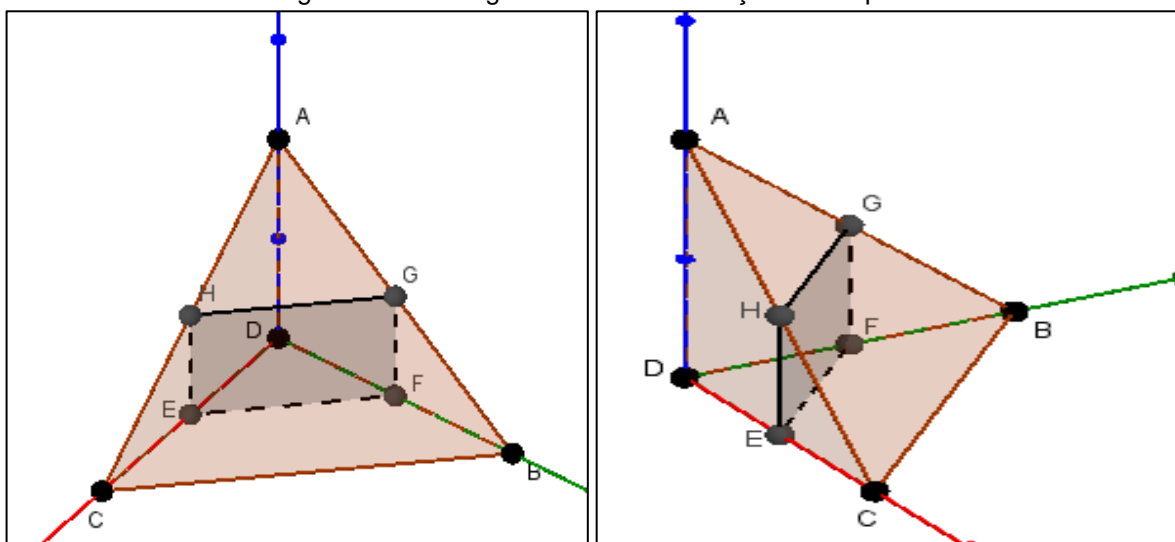


Fonte: O autor

#### 4.3.7 Interseção de duas superfícies

Caso seja necessário encontrar a interseção de duas superfícies basta usar a ferramenta “interseção de duas superfícies” e na janela de álgebra clicar sobre os objetos desejados, sendo eles: o plano  $r$  e o poliedro  $e$ , em seguida aparece a solução, que neste caso é o polígono EFGH. Para melhor visualizar basta ocultar o plano  $r$  (Ver Figura 4.13).

Figura 4.13 – Polígono EFGH – interseção das superfícies



Fonte: O autor

Outra forma de se encontrar a interseção, basta acessar a “barra de entrada” e escrever o seguinte comando: Interseção Geométrica (<Plano>, <Polígono>), onde o plano seria  $r$  e polígono  $e$ , ou seja, ficaria da seguinte forma Interseção Geométrica(< $r$ >, < $e$ >). Vejamos a Figura 4.14:

Figura 4.14 – Comando de Interseção na Barra de Entrada

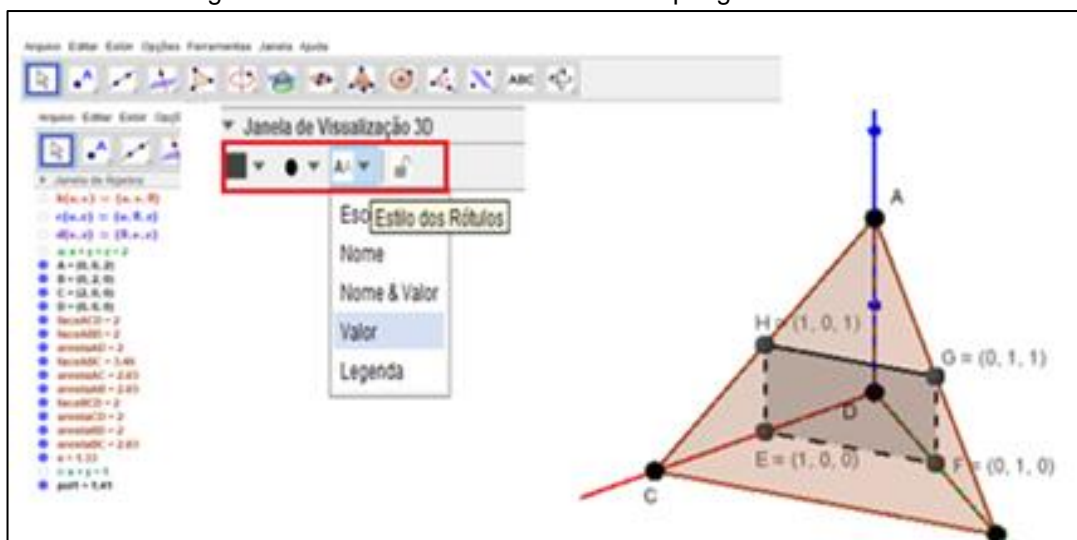


Fonte: O autor

#### 4.3.8 Obtenção das coordenadas de um ponto

Caso deseja-se saber as coordenadas dos pontos E, F, G e H do polígono que surgiu da interseção e conseqüentemente de qualquer outro ponto sobre a malha 3D, basta clicar com o botão esquerdo sobre o ponto e uma janela na parte superior aparecerá, nesta janela pode-se configurar a cor, estilo e rótulo do ponto. Neste caso, clica-se em “Estilo dos Rótulos” em seguida “Valor” e conseqüentemente as coordenadas desses pontos aparecem. Como mostra a Figura 4.15

Figura 4.15 – Obter das coordenadas do polígono EFGH.



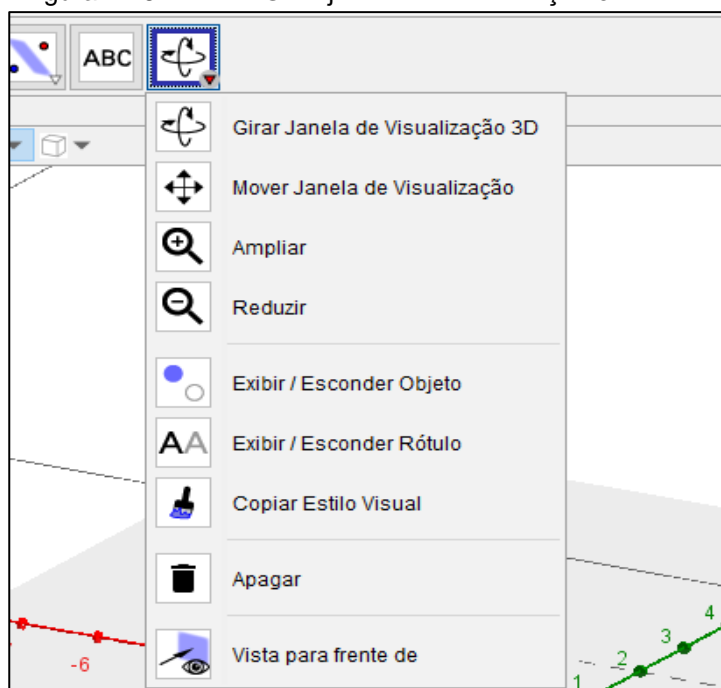
Fonte: O autor

É importante ressaltar que, esses procedimentos vistos anteriormente, estendem-se para segmentos de retas, arestas, retas, faces, planos e entre outros. Uma forma rápida de achar as coordenadas do ponto ou fazer qualquer outra configuração abordada anteriormente, basta fazer CTRL + ALT + (objetos desejados), no exemplo anterior teríamos: CTRL + ALT + E, F, G e H, e as configurações seriam feitas simultaneamente nos pontos.

#### 4.3.9 Movimentação e rotação da malha 3D

Este último ícone “Girar janela de visualização 3D” é de suma importância no espaço tridimensional, pois nesta ferramenta pode-se realizar diversos movimentos e rotacionar todo o sistema, e assim posicionar os eixos da maneira que for mais conveniente, também serve para dar zoom nesta janela (Ver Figura 4.16).

Figura 4.16 - ícone “Girar janela de visualização 3D”

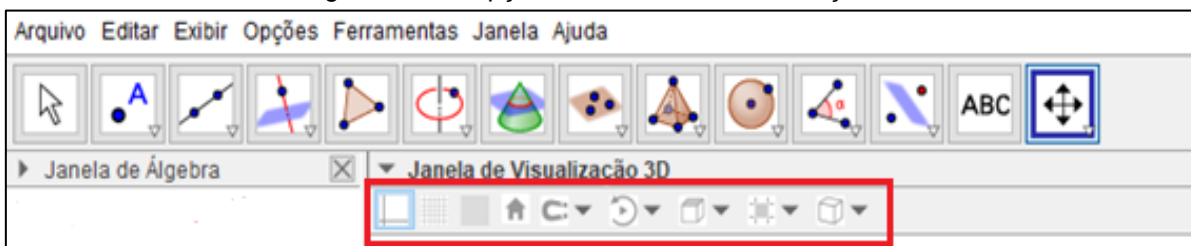


Fonte: O autor

Nestas opções de janela de visualização 3D pode-se esconder ou exibir: os eixos, a malha e o plano  $xy$ , também se pode: restaurar visualização padrão, iniciar ou parar rotação da cena, escolher a direção da visualização: visualizar na direção do

plano  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  e selecionar algumas projeções, como: projeção paralela, em perspectiva, para óculos 3D e a projeção oblíqua. Como mostra a Figura 4.17.

Figura 4.17 – Opções da Janela de visualização 3D



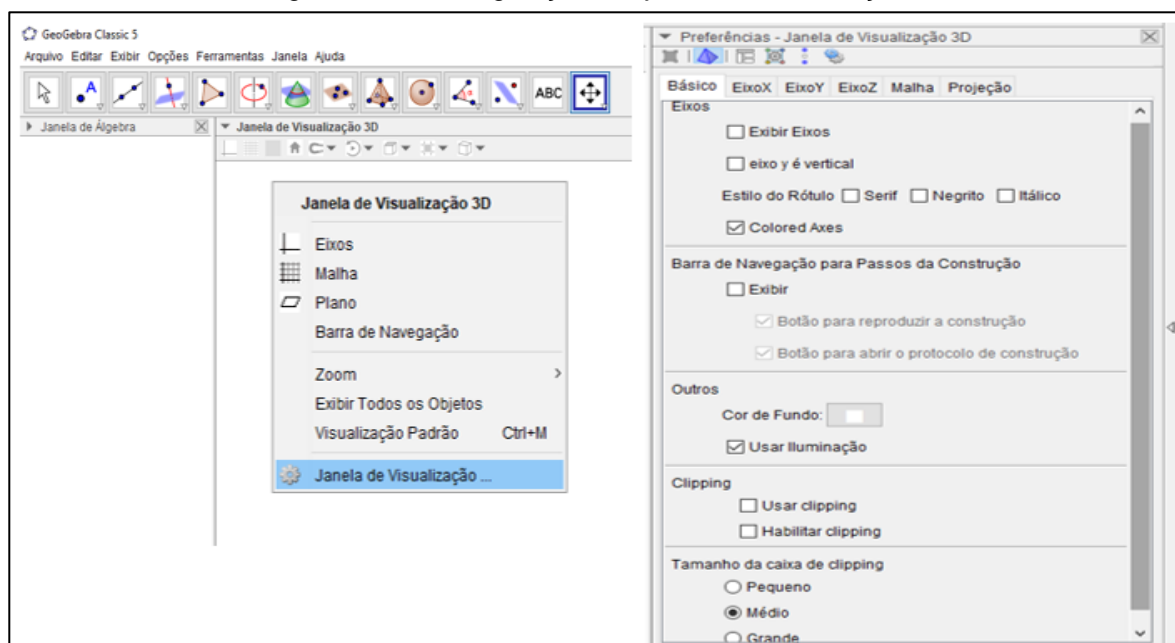
Fonte: O autor

Algumas ferramentas não serão trabalhadas, pois o objetivo desta unidade é a abordagem, apenas, das principais ferramentas e comandos usados nesta dissertação.

#### 4.3.10 Configuração do Plano 3D

Para finalizar essa breve análise sobre a malha do Geogebra 3D, vamos verificar algumas configurações interessantes, para isso, basta clicar com o botão direito e em seguida “janela de visualização”. Como ilustra a Figura 4.18.

Figura 4.18 – Configurações na janela de visualização



Fonte: O autor

Após esses procedimentos, uma janela ao lado direito aparece e algumas configurações importantes podem ser feitas, como: Exibir ou não o plano 3D, deixar os eixos todos preto ou colorido, cor de fundo, usar e habilitar clipping, ou seja, usar o plano xy e habilitar a “caixa retangular” que compreende o plano 3D. Pode-se fazer algumas configurações nos eixos X, Y, e Z, como: exibir ou não: o eixo, os números, direção positiva apenas e a distância.

Considerando-se o objetivo central deste trabalho que são as aplicações da PL em 3D direcionado a temas da região Norte utilizando o Geogebra, no próximo capítulo verificar-se-á sua relevância que esmiúça a aplicação do método gráfico em propostas de questões embasadas no cotidiano do aluno.



## 5 APLICAÇÕES DA PL EM 3D UTILIZANDO O GEOGEBRA DIRECIONADO A TEMAS DA REGIÃO NORTE.

Nesta seção apresentar-se-á com o auxílio do Software Geogebra algumas aplicações da Programação Linear no Espaço Tridimensional, as quais os enunciados dos problemas são direcionados a temas da Região Norte, uma região a qual grande parte da população trabalha de forma autônoma e geralmente depara-se com situações envolvendo PPL.

Para resolução dos problemas usa-se o Método Gráfico, no qual o conceito envolvido é relativamente simples, o que torna possível a aplicação deste método junto aos alunos do Ensino Médio.

Por meio deste método será apresentado graficamente a região factível, ou seja, o conjunto de pontos que satisfazem as restrições do problema, como também, visualizar-se-á geometricamente os passos do processo de obtenção da solução ótima.

### 5.1 APLICAÇÃO DO MÉTODO GRÁFICO

O método gráfico por sua simplicidade torna a Programação Linear perfeitamente aplicável ao ensino de nível médio, pois o ferramental geométrico e algébrico utilizado, faz parte do rol de conteúdos concernentes a esse nível de ensino de Matemática, temos também que a solução gráfica é vista de maneira bem sistemática e didática.

Didaticamente, dentro da Programação Linear, existe o método gráfico, que permite encontrar soluções viáveis a um certo problema utilizando duas ou três variáveis em um sistema de eixos ortogonais. A solução gráfica de um problema de PL pode ser feita em três passos: identificação da região viável, determinação das curvas de nível e identificação do ponto ótimo. (COLIN, 2013)

A aplicação desse método na Programação Linear é limitada a certos tipos de problemas elementares, como o número de variáveis envolvidas. Os enunciados retratam situações de aprendizagem concretas e reais na qual o aluno nortista do ensino médio está familiarizado, sendo também uma forma de tornar o tema abordado nesta dissertação mais atrativo e significativo.

De acordo com Polya (2006) o professor de Matemática deve instigar os alunos em operações cotidianas, estimulando-os a aprimorarem seus conhecimentos e capacidades relacionadas aos cálculos, uma vez aproximando a realidade as operações básicas, a fim de atinar as suas vontades para aprenderem mais e resolverem problemas simples aos complexos.

No contexto em que o aluno possui bastante acesso à informação, tornar a Matemática interessante e desafiadora não é uma missão fácil para o professor. Utilizar problemas estimulantes que desafiem sua curiosidade e sua capacidade de raciocínio pode ser uma forma de aumentar o interesse pela aprendizagem em Matemática.

Com base nessas afirmativas, são propostos alguns exemplos de aplicações da Programação Linear, para abordar em sala de aula, voltados a situações-problemas da Região Norte, envolvendo os conceitos e assuntos desenvolvidos no capítulo 2 desse trabalho. Será resolvido detalhadamente o primeiro problema, tendo em vista que os demais terão a mesma sequência didática, frisando que o uso do Software Geogebra é de fundamental importância no processo de resolução.

**Problema 1.** *Manoel possui um estaleiro localizado no Rio Matapi e deseja estabelecer uma programação diária dos consertos de embarcações ribeirinha, consideremos os tipos como sendo: baixa, média e alta complexidade. Para manutenção das embarcações, será considerado que o estaleiro tem limitações em somente dois recursos: madeira e mão de obra, cujas disponibilidades diárias são mostradas na tabela a seguir.*

Tabela 5.1: Disponibilidade diária de madeira e mão de obra

<i>Recurso</i>	<i>Disponibilidade</i>
<i>Madeira</i>	$12m^2$
<i>Mão de obra</i>	<i>8 horas</i>

Fonte: O autor

*O processo de manutenção é tal que, para um conserto de alta complexidade, o estaleiro gasta  $2m^2$  de madeira e 2 horas de mão de obra. Para fazer um conserto de média complexidade o estaleiro gasta  $3m^2$  de madeira e 1 hora de mão de obra, por fim*

para fazer um conserto de baixa complexidade o estaleiro gasta  $1\text{m}^2$  de madeira e 1 hora de mão de obra.

Além disso, cada embarcação consertada de alta, média e baixa gera um lucro de R\$100,00, R\$ 60,00 e R\$ 30,00, respectivamente. O problema de Manoel é encontrar o modelo de programação que maximiza a margem total para o lucro.

Primeiramente, para construir um *modelo de Programação Linear*, temos de identificar o que desejasse conhecer no problema. A isto dá-se o nome de **variável de decisão**, a qual no problema do estaleiro temos três variáveis de decisão, que são:

- x**: número de embarcações de alta complexidade consertadas.
- y**: número de embarcações de média complexidade consertadas.
- z**: número de embarcações de baixa complexidade consertadas.

Segundo, precisa-se identificar o objetivo que se deseja alcançar e traduzi-lo por uma função Matemática linear contendo as variáveis de decisão. Assim, no problema 1, o objetivo é maximizar o lucro total obtido com os consertos dos três tipos de embarcações. Vejamos a seguir como encontrar tal função.

Temos que, cada embarcação consertada de alta complexidade, gera lucro de R\$100,00, ao consertar  $x$  unidades, teremos lucro de  $100x$ . Já o conserto da embarcação de média complexidade gera lucro de R\$ 60,00, ou seja, consertando  $y$  unidades teremos um lucro de  $60y$ . Por fim, cada embarcação consertada de baixa complexidade gera um lucro de R\$30,00, isto é, consertando  $z$  unidades, teremos um lucro de  $30z$ .

Desta forma, a função de lucro total a qual queremos maximizar será uma função da forma:

$$(Max) Z = 100x + 60y + 30z \quad (\text{Função Objetivo})$$

Esta função é chamada de **função objetivo** sendo representada pela maioria dos autores como uma função de uma variável  $Z$  representando o sentido da otimização que, no nosso caso, é de maximização.

Evidentemente que o modelo de programação não se restringe a função objetivo, pois basta observar a quantidade dos recursos disponível. Com isso, também é necessário identificar todas as exigências, restrições e limitações estipuladas no problema e expressar matematicamente. Estas condições constituem as **restrições do problema**. Veja-se a seguir como encontrar.

Assim, cada embarcação consertada de alta complexidade consome  $2m^2$  de madeira. Já a embarcação de média complexidade consome  $3m^2$  de madeira. Por fim, cada embarcação de baixa complexidade consome  $1m^2$  de madeira. Logo,

$$2x + 3y + z \text{ (consumo de madeira)}$$

Este consumo de madeira não pode ser maior do que o estaleiro tem disponível, ou seja,  $12m^2$ . Podemos escrever então:

$$2x + 3y + z \leq 12 \text{ (1ª restrição)}$$

Denotando que, cada embarcação consertada de alta complexidade utiliza 2 horas de mão de obra. Já a embarcação de média complexidade utiliza 1 hora de mão de obra. Por fim, cada embarcação de baixa complexidade também utiliza 1 hora de mão de obra. Logo,

$$2x + y + z \text{ (utilização da mão de obra)}$$

Esta utilização de horas para mão de obra não pode ser maior do que o estaleiro tem disponível, ou seja, 8 horas. Podemos escrever então:

$$2x + y + z \leq 8 \text{ (2ª restrição)}$$

Temos então que para as restrições, a relação lógica existente é:

$$\textit{Utilização de recurso} \leq \textit{disponibilidade do recurso}$$

Aparentemente formulamos todas as restrições. No entanto, existe um tipo de restrição não tão evidente. Como visto anteriormente,  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam as unidades de embarcações consertadas de alta, média e baixa complexidade, respectivamente. Ora não podemos consertar, por exemplo, - 5 unidades de embarcações, ou seja,  $x$ ,  $y$  e  $z$  não podem ser negativos. Matematicamente temos:

$$x, y \text{ e } z \geq 0$$

Pelas condições das **variáveis de não negatividade**, o conjunto de soluções factíveis (região factível) fica restrito ao primeiro octante. Podemos agora escrever todo o modelo de programação linear do problema 1:

$$\text{Máx } Z = 100x + 60y + 30z$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z \leq 12 \\ 2x + y + z \leq 8 \end{cases}$$

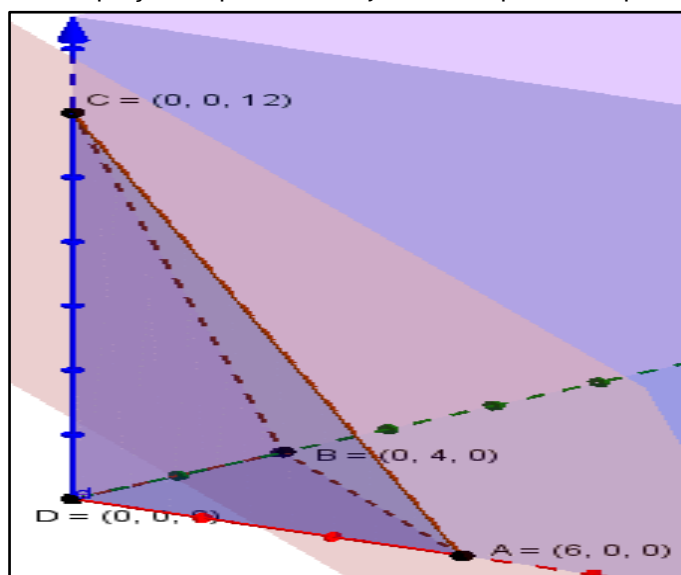
$$x, y \text{ e } z \geq 0$$

Encontrado o modelo de programação usaremos agora, com o auxílio do Geogebra, o *método gráfico* para resolução do problema. Sugerimos alguns passos a serem seguidos com os alunos em sala de aula podendo o professor acrescentar algumas explicações extras, se julgar necessário.

**Passo 1:** Para cada inequação do modelo utilizamos a equação associada, cuja representação é um plano no primeiro octante que dividi o espaço em duas regiões (subespaços). No caso do Problema 1, as equações do plano associadas às inequações são  $2x + 3y + z = 12$  e  $2x + y + z = 8$ .

Primeiramente, consideremos a 1ª restrição na igualdade, ou seja,  $2x + 3y + z = 12$ . Ela é uma equação do plano, passando pelos pontos  $A(6,0,0)$ ,  $B(0,4,0)$  e  $C(0,0,12)$ . Representada graficamente na Figura 5.1:

Figura 5.1: Equação do plano  $2x + 3y + z = 12$  passando por A, B e C

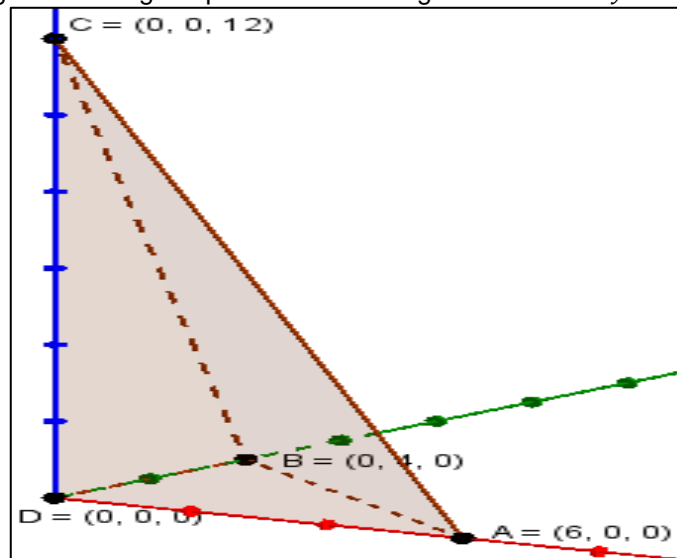


Fonte: O autor

**Passo 2:** Após realizar a representação da 1ª restrição associada, necessitamos determinar qual das regiões (subespaços) definida pelo plano satisfaz a inequação  $2x + 3y + z \leq 12$ . Para isso, podemos escolher aleatoriamente qualquer ponto do  $\mathbb{R}^3$ ,

por exemplo, escolhemos o ponto  $D(0,0,0)$ . Verificamos que  $2 \cdot (0) + 3 \cdot (0) + (0) \leq 12$  (nos problemas propostos nesse trabalho, esse ponto sempre irá satisfazer as inequações associada). Logo, a região que satisfaz a desigualdade está localizada abaixo do plano, e é representada pelo poliedro ABCD, como mostra a Figura 5.2.

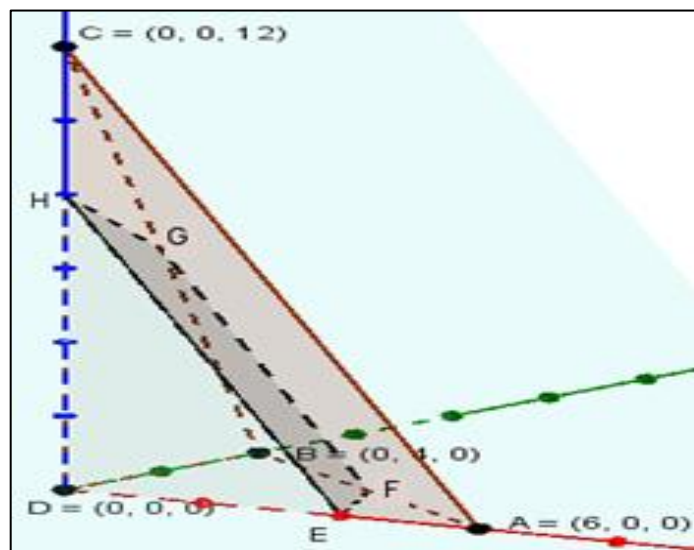
Figura 5.2: Região que satisfaz a desigualdade  $2x + 3y + z \leq 12$



Fonte: O autor

Ao construir o plano representado pela equação  $2x + y + z = 8$ , facilmente, com auxílio da ferramenta “interseção de superfícies” do Geogebra, verifica-se que o mesmo intersecta o poliedro ABCD no polígono EFGH. (Ver Figura 5.3).

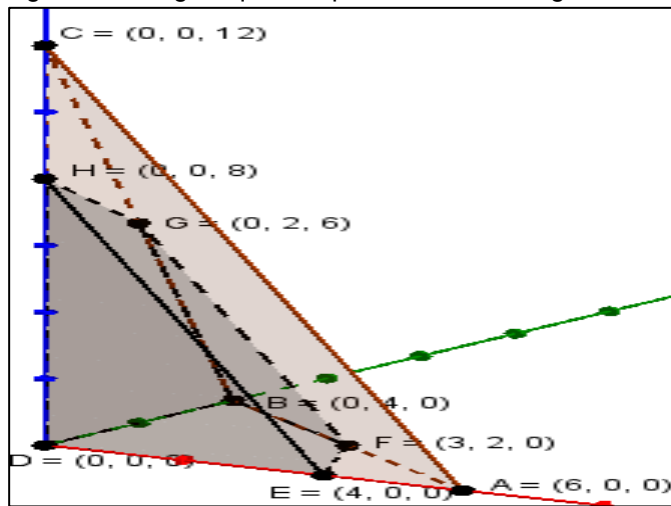
Figura 5.3: Polígono EFGH – interseção do plano com o poliedro



Fonte: O autor

Verificando a região que satisfaz a inequação  $2x + y + z \leq 8$  está localizada abaixo do plano, também é necessário que satisfaça  $2x + 3y + z \leq 12$ , para isso basta verificar a região que cumpre ambas as desigualdades, analisando o gráfico percebemos que essa região é representada pelo poliedro BDEFGH, como mostra a Figura 5.4.

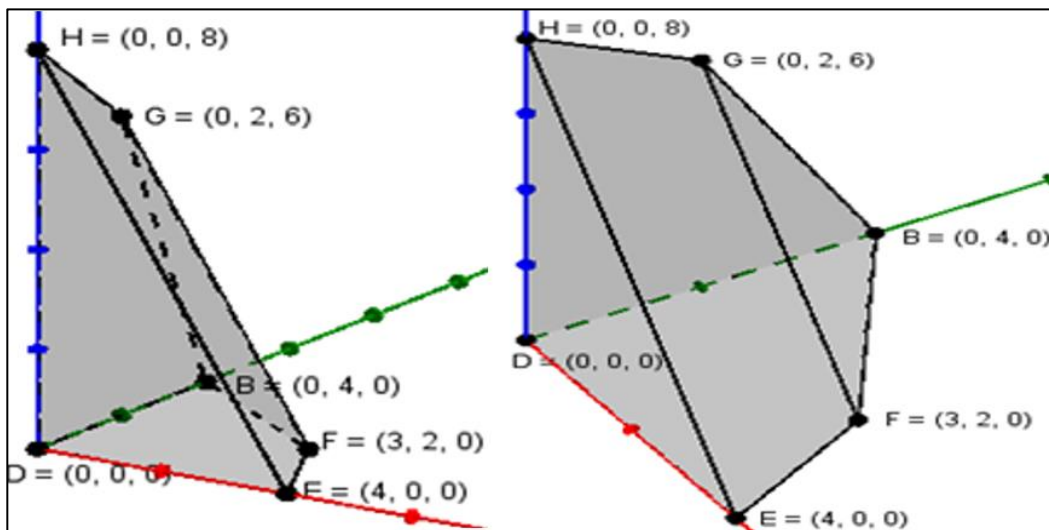
Figura 5.4: Região que cumpre ambas as desigualdades



Fonte: O autor

Como todas as restrições foram traçadas temos o chamado Espaço Solução que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo, ou seja, todos os pontos que obedecem a todas as restrições do modelo. No gráfico o Espaço Solução é o poliedro convexo desenhado, como podemos ver na Figura 5.5:

Figura 5.5: Região Factível

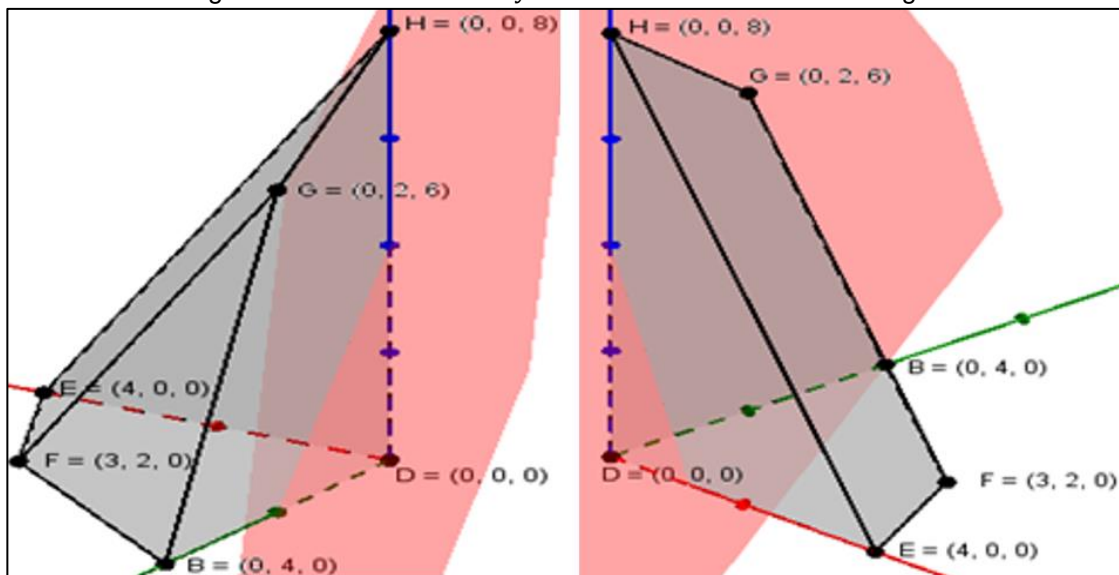


Fonte: O autor

**Passo 3:** No Problema 1, devemos encontrar o ponto da região factível que maximiza a função  $Z = 100x + 60y + 30z$ . Pelo Teorema I, para determinar este ponto devemos caminhar na direção dos extremos do poliedro.

Graficamente esta equação representa uma família de planos paralelos, ou seja, para cada valor de  $Z$  temos um plano que será paralelo a qualquer outro, para outro valor de  $Z$ , inclusive para aquela com o valor ótimo da função objetivo. Deve-se, arbitrariamente, escolher um valor para  $Z$ , por exemplo  $Z = 120$  (Ver Figura 5.6).

Figura 5.6: Plano  $100x + 60y + 30z = 120$  intersectando a região factível



Fonte: O autor

Temos então o plano  $100x + 60y + 30z = 120$  intersectando a região factível, como observa-se na figura anterior.

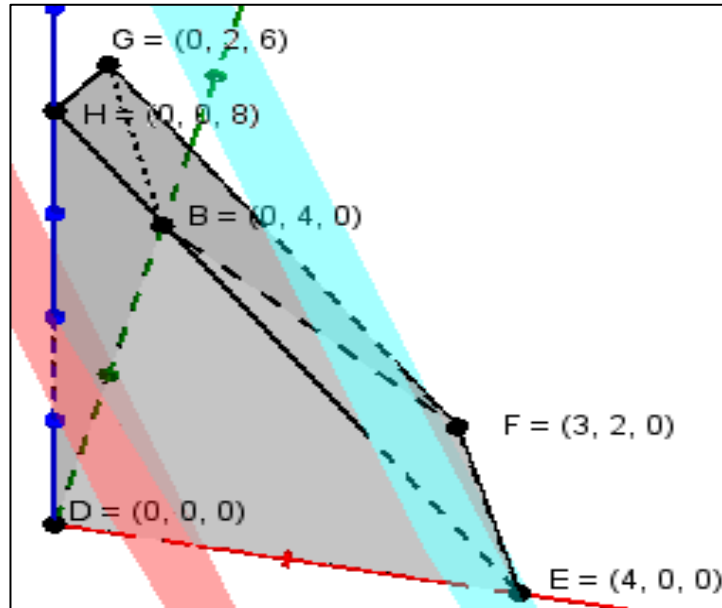
Após analisar o gráfico, com o plano traçado de uma das paralelas de  $Z$ , pode-se perceber quais os possíveis vértices que seriam solução do problema, tendo em vista isso basta criar, por meio da ferramenta “planos paralelos” do Geogebra, outros planos paralelos passando por esses pontos.

Pois, o teorema I diz que o problema tem solução ótima se, e somente se, a solução encontra-se em um dos vértices. Então, para obter o ponto ótimo, basta simplesmente traçar planos paralelos, mais alto possível, que toque, pelo menos, um ponto do espaço solução, respeitando a inclinação do plano determinada pela função objetivo  $Z$ . Vejamos por exemplo o ponto  $E$ , que gera um plano  $100x + 60y + 30z = 400$



intersectando a região factível em outra parte. Como podemos ver graficamente na Figura 5.7.

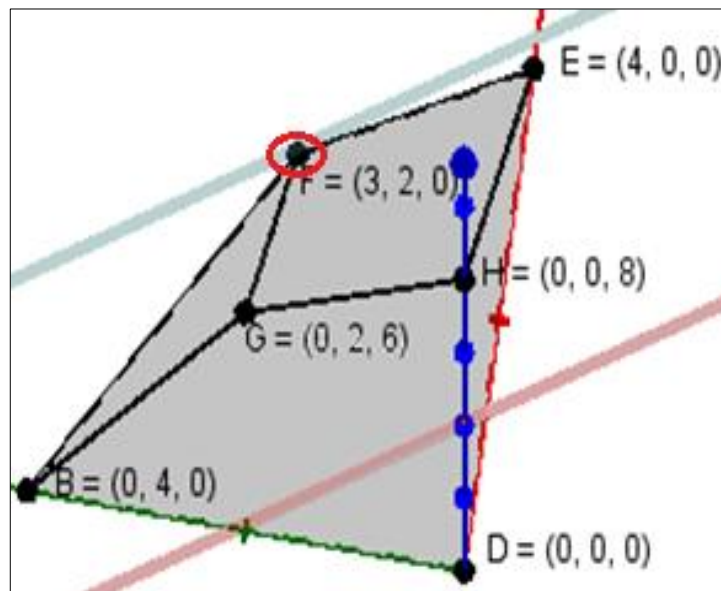
5.7: Plano  $100x + 60y + 30z = 400$  intersectando a região factível



Fonte: O autor

**Passo 4:** Neste momento pode-se notar, na figura acima, que a coordenada  $E(4,0,0)$  não é o melhor ponto, pois a parte do poliedro que compreende o vértice  $F$  ainda não foi tocada, com isso será o último ponto tocado e conseqüentemente a coordenada  $F(3,2,0)$  será solução do problema. Vejamos a Figura 5.8.

Figura 5.8: A coordenada  $F(3,2,0)$  como solução do problema



Fonte: o autor

Com isso, o ponto ótimo sempre será um dos vértices do poliedro determinado pelo espaço solução de acordo com os teoremas de convexidade apresentados anteriormente neste trabalho, conforme pode-se observar na Figura 5.8.

Na Tabela 5.2, apresenta-se o valor da função objetivo  $f(x, y, z)$  do Problema 1 em todos os vértices da região factível F.

Tabela 5.2: Valores da função objetivo do Problema 1 nos vértices da região factível

<i>Vértice</i>	<i>Valor da Função</i>	<i>Análise</i>
$D(0,0,0)$	$f(0,0,0) = 100.0 + 60.0 + 30.0 = 0$	<i>Valor mínimo de f</i>
$B(0,4,0)$	$f(0,4,0) = 100.0 + 60.4 + 30.0 = 240$	
$E(4,0,0)$	$f(4,0,0) = 100.4 + 60.0 + 30.0 = 400$	
$F(3,2,0)$	$f(3,2,0) = 100.3 + 60.2 + 30.0 = 420$	<i>Valor máximo de f</i>
$G(0,2,6)$	$f(0,2,6) = 100.0 + 60.2 + 30.6 = 300$	
$H(0,0,8)$	$f(0,0,8) = 100.0 + 60.0 + 30.8 = 240$	

Fonte: O autor

Portanto, o estaleiro terá que consertar 3 embarcações de alta complexidade e 2 embarcações de média complexidade para obter o maior lucro de R\$ 420,00. Percebemos que, com o método gráfico e com o auxílio do software Geogebra, facilmente encontramos a solução do Problema de Programação Linear com três variáveis. Veja a seguir o problema 2.

**Problema 2.** *Em uma comunidade no interior de Pará, seu Zé, um ribeirinho, vende implementos para pesca como: Cacuri, Pari e Matapi - ambos feitos de talas, pois apresenta melhor resistência e durabilidade, esses implementos são utilizados por pescadores na tapagem de igarapé para captura de peixes e camarão.*

*O ribeirinho obtém um lucro de R\$ 13,00, R\$ 7,50 e R\$ 4,00 por cada Cacuri, Pari e Matapi vendido, respectivamente. Cada Cacuri gasta 4 kg de talas e demora 2 horas para ser montado, não se usa cipó para amarração. Já o Pari gasta 3 kg de talas, demora 1 hora para ser montado e 2m de cipó para amarração. Por fim, um Matapi gasta 1 kg de tala, demora 1 hora para ser montado e 1m de cipó para amarração.*

Sabendo que seu Zé tem disponível 24 kg de talas, 12 horas de mão-de-obra para montagem e 10 metros de cipó. Qual deve ser a quantidade de Cacuri, Pari e Matapi que precisam ser feitos de modo que o ribeirinho obtenha o máximo lucro?

De maneira mais objetiva vamos encontrar o modelo de programação que representa o problema acima. Vejamos abaixo:

- Variáveis de decisão

**x:** quantidade de Cacuri construídos.

**y:** quantidade de Pari construídos.

**z:** quantidade de Matapí construídos.

- Função objetivo

Como o ribeirinho obtém um lucro na venda de R\$ 13,00, R\$ 7,50 e R\$ 4,00 por cada Cacuri, Pari e Matapi, respectivamente.

Desta forma a função de lucro total, a qual se quer maximizar, será uma função da forma:

$$(Max) Z = 13x + 7,5y + 4z \quad (\text{Função Objetivo})$$

- Restrição do problema

Percebe-se que existem três recursos disponíveis e limitados no problema, são eles: Consumo de talas (kg), tempo gasto na montagem (h) e utilização de cipó para amarração (m). Tem-se o seguinte, para as restrições a relação lógica existente é utilização de recurso  $\leq$  disponibilidade do recurso. Então:

$$\begin{cases} 4x + 3y + z \leq 24 \\ 2x + y + z \leq 12 \\ 2y + z \leq 10 \end{cases} \quad (\text{Restrições do problema})$$

- Variáveis de não negatividade

Como visto anteriormente, x, y e z representam as unidades construídas de Cacuri, Pari e Matapi, respectivamente. Ora, não se pode construir uma quantidade negativa desses implementos de pesca. Matematicamente temos:

$$x, y \text{ e } z \geq 0$$

Pode-se agora escrever todo o modelo de programação linear do problema 2:

$$\text{Máx } Z = 13x + 7,5y + 4z$$

$$\begin{cases} 4x + 3y + z \leq 24 \\ 2x + y + z \leq 12 \\ 2y + z \leq 10 \end{cases}$$

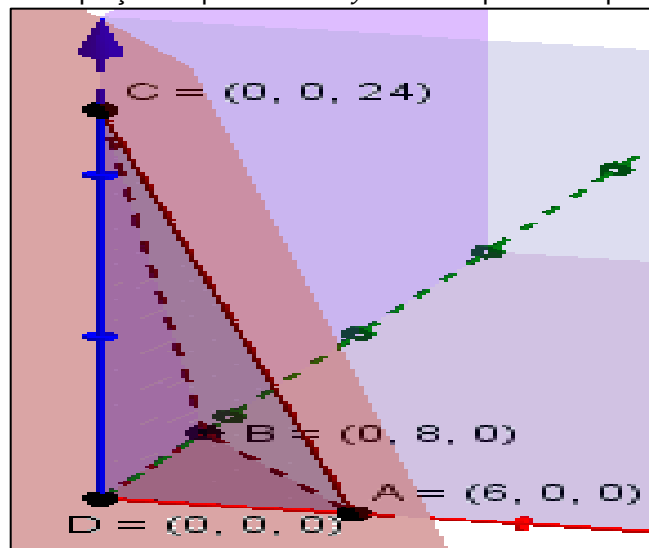
$$x, y \text{ e } z \geq 0$$

Encontrado o modelo de programação, usa-se agora, com o auxílio do Geogebra, o *método gráfico* para resolução do problema. O processo da obtenção da região factível é análogo ao problema anterior.

**Passo 1:** Para cada inequação do modelo, utiliza-se a equação associada, cuja representação é um plano no primeiro octante que divide o espaço em duas regiões (subespaços). No caso do Problema 2, as equações do plano associadas às inequações são  $4x + 3y + z = 24$ ,  $2x + y + z = 12$  e  $2y + z = 10$ .

Considere a equação do plano  $4x + 3y + z = 24$ , na qual passa pelos pontos  $A(6,0,0)$ ,  $B(0,8,0)$  e  $C(0,0,24)$ . Representada graficamente na Figura 5.9:

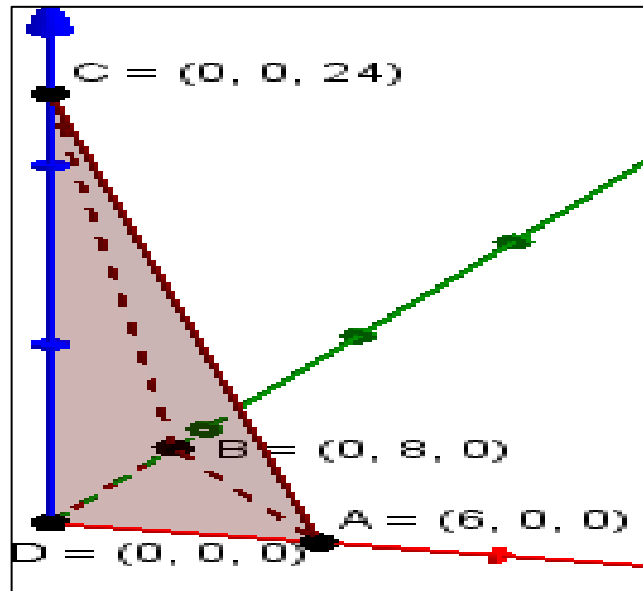
Figura 5.9: Equação do plano  $4x + 3y + z = 24$  passando por A, B e C



Fonte: O autor

**Passo 2:** Precisa-se determinar qual das regiões (subespaços) definida pelo plano satisfaz a inequação  $4x + 3y + z \leq 12$ . Como dito anteriormente o ponto  $D(0,0,0)$  cumpre a inequação. Logo, a região que satisfaz a desigualdade está localizada abaixo do plano, e é representada pelo poliedro ABCD como mostra a Figura 5.10.

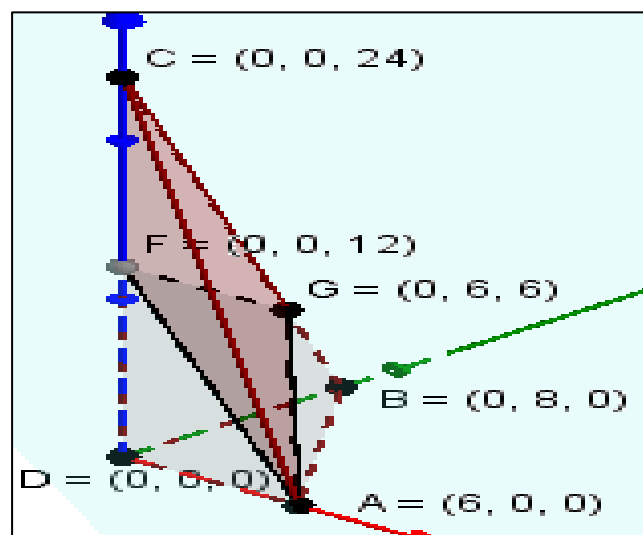
Figura 5.10: Região que satisfaz a inequação  $4x + 3y + z \leq 12$ .



Fonte: O autor

Ao construir o plano representado pela equação  $2x + y + z = 12$ , facilmente verifica-se que o mesmo intersecta o poliedro ABCD no polígono AFGA (ver Figura 5.11).

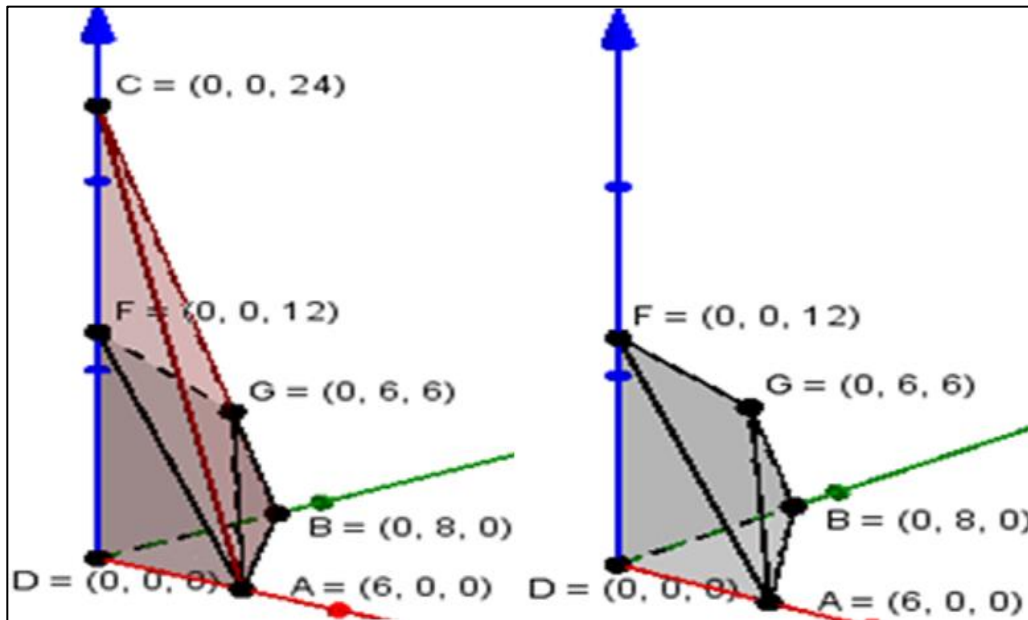
Figura 5.11: Polígono AFGA – interseção do plano com o poliedro



Fonte: O autor

Verificando a região que satisfaz a inequação  $2x + y + z \leq 12$  está localizada abaixo do plano, também é necessário que satisfaça  $4x + 3y + z \leq 24$ , para isso basta verificar a região que cumpre ambas as desigualdades, analisando o gráfico percebe-se que essa região é representada pelo poliedro ABDFG, como mostra a Figura 5.12.

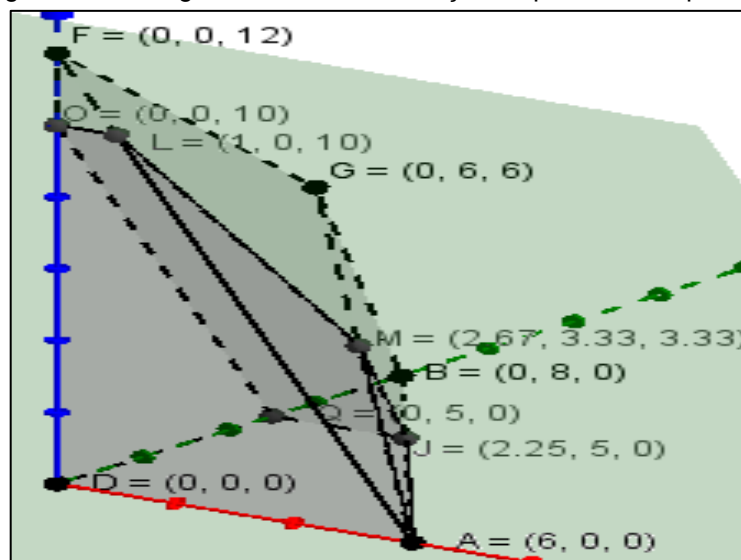
Figura 5.12: Região que cumpre ambas as desigualdades



Fonte: O autor

Ao construir o plano representado pela equação  $2y + z = 10$ , verifica-se que ele intersecta o poliedro ABDFG no polígono JMLOQ. (Ver Figura 5.13).

Figura 5.13: Polígono JMLOQ – interseção do plano com o poliedro

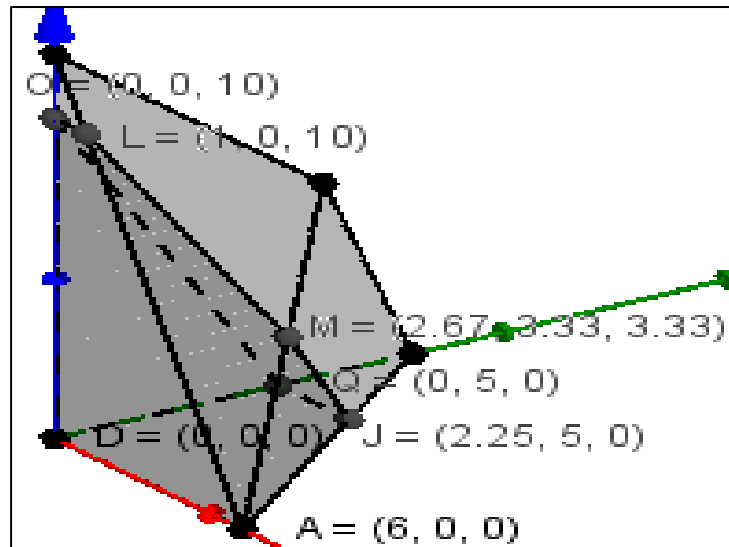


Fonte: O autor

A região ao qual satisfaz a inequação  $2y + z \leq 10$  está localizada abaixo do plano, e para acharmos a região factível, também é necessário que satisfaça  $4x + 3y + z \leq 24$  e  $2x + y + z \leq 12$ , para isso basta verificar no gráfico a região que cumpre

as três desigualdades. Analisando percebe-se que essa região é representada pelo poliedro ADQJMLO, como mostra a Figura 5.14.

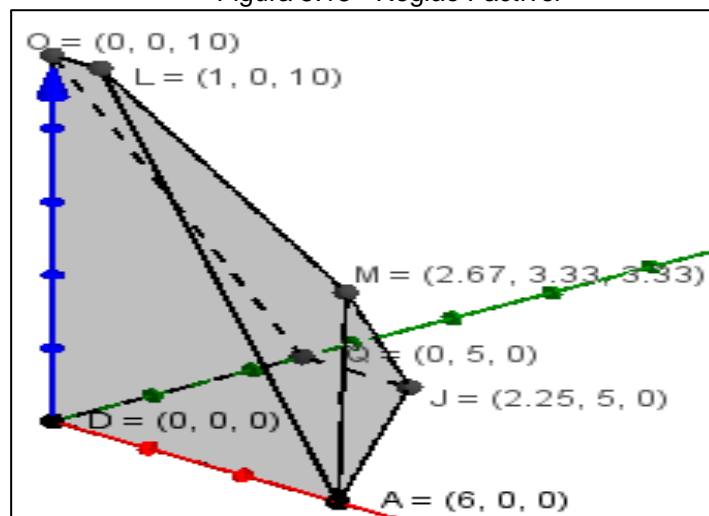
Figura 5.14: Região que satisfaz as três inequações



Fonte: O autor

Como todas as restrições foram traçadas temos o chamado Espaço Solução que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo. No gráfico o Espaço Solução é o poliedro desenhado, como pode-se ver na Figura 5.15:

Figura 5.15 - Região Factível

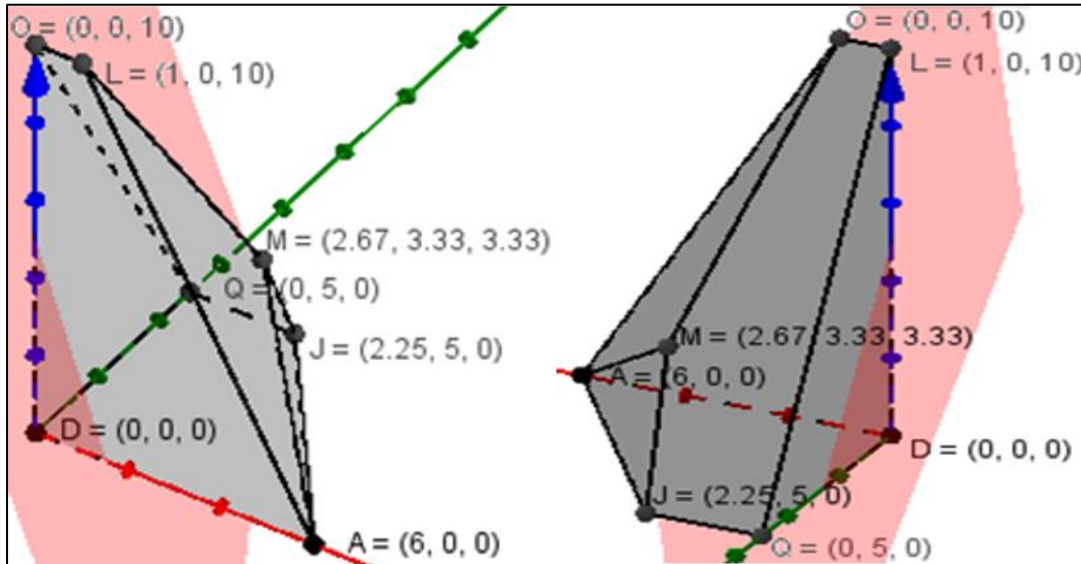


Fonte: O autor

**Passo 3:** Precisa-se encontrar o ponto da região factível que maximiza a função  $Z = 13x + 7.5y + 4z$ . Como já visto anteriormente esta equação representa uma família de

planos paralelos. Então, arbitrariamente escolhe-se um valor para  $Z$ , por exemplo  $Z = 20$ . Temos o plano  $13x + 7.5y + 4z = 20$  intersectando a região factível, como observado na Figura 5.16:

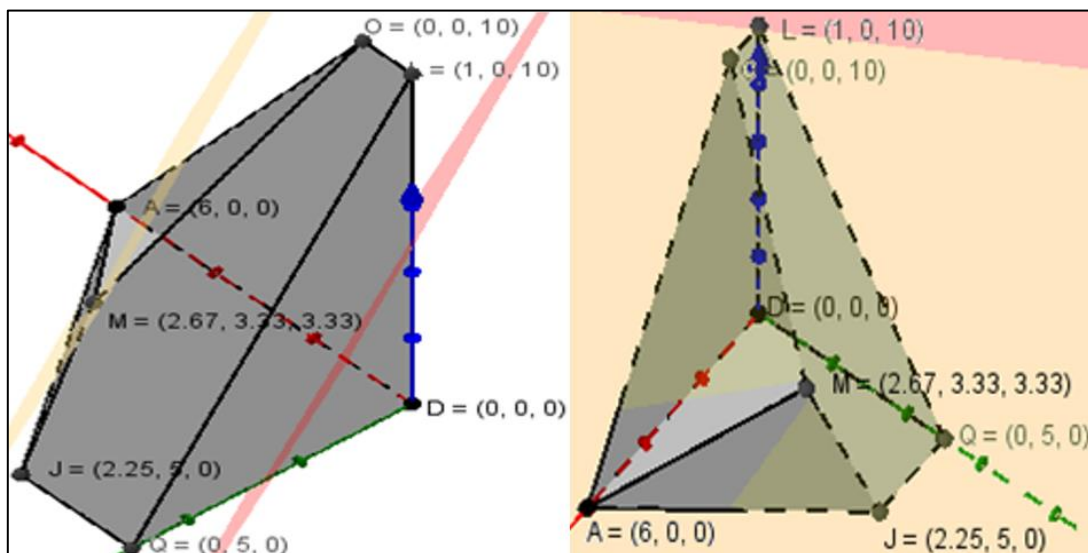
Figura 5.16: Plano  $13x + 7.5y + 4z = 20$  intersectando a região factível



Fonte: O autor

Após analisar o gráfico, com o plano traçado de uma das paralelas de  $Z$ , pode-se perceber quais os possíveis vértices que seriam solução do problema, tendo em vista isso basta criar, outros planos paralelos passando por esses pontos, como por exemplo o ponto  $M$ , que gera um plano  $13x + 7.5y + 4z = 73$  intersectando a região factível em outra parte. Como se analisa graficamente na Figura 5.17:

Figura 5.17: Plano  $13x + 7.5y + 4z = 73$  intersectando a região factível

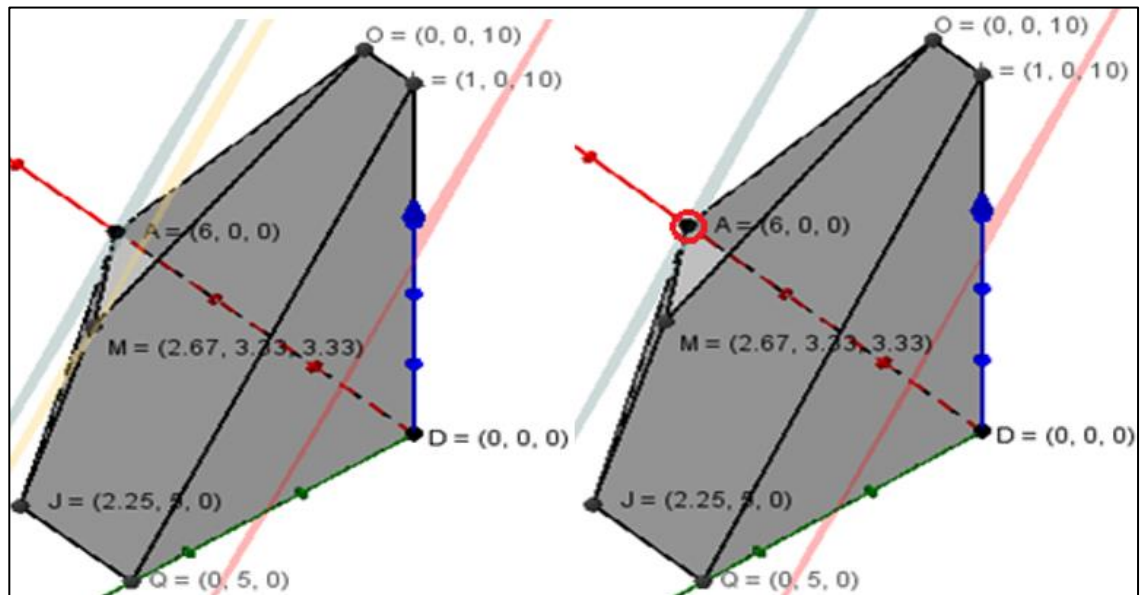


Fonte: O autor



**Passo 4:** Neste momento pode-se notar, na figura acima, que a coordenada  $M(2.67, 3.33, 3.33)$  não é o melhor ponto, pois a parte do poliedro que compreende o vértice  $A$  ainda não foi tocada, com isso será o último vértice tocado e conseqüentemente a coordenada  $A(6,0,0)$  será solução do problema. Veja a Figura 5.18:

Figura 5.18: A coordenada  $A(6,0,0)$  será solução do problema



Fonte: O autor

Na Tabela 5.3, apresenta-se o valor da função objetivo  $f(x, y, z)$  do Problema 2 em todos os vértices da região factível  $F$ .

Tabela 5.3: Valores da função objetivo do Problema 2 nos vértices da região factível

Vértice	Valor da Função	Análise
$D(0,0,0)$	$f(0,0,0) = 13.0 + 7,5.0 + 4.0 = 0$	Valor mínimo de $f$
$Q(0,5,0)$	$f(0,5,0) = 13.0 + 7,5.(5) + 4.0 = 37,50$	
$J(2.25,5,0)$	$f(2.25,5,0) = 13.(2,25) + 7,5.(5) + 4.0 = 66,75$	
$M(2,6,3,3, 3.3)$	$f(2,6,3,3, 3.3) = 13.(2,6) + 7,5.(3,3) + 4.(3,3) = 72$	
$A(6,0,0)$	$f(6,0,0) = 13.6 + 7,5.0 + 4.0 = 78$	Valor máximo de $f$
$O(0,0,10)$	$f(0,0,10) = 13.0 + 7,5.0 + 4.10 = 40$	
$L(1,0,10)$	$f(1,0,10) = 13.1 + 7,5.0 + 4.10 = 53$	

Fonte: O autor

Portanto, seu Zé terá que fazer uma quantidade de seis Cacuri para obter o maior lucro que é de R\$ 78,00. Novamente notamos que com o método gráfico e com o auxílio do software Geogebra encontramos a solução do Problema de Programação Linear em  $\mathbb{R}^3$ . Vejamos a seguir o problema 3.

**Problema 3.** *No mercado Ver-o-peso em Belém, Francisco deseja vender três tipos de pescados, são eles: Pirapitinga, Apaiari e Pescada amarela. Os peixes devem ficar em uma cuba que suporta no máximo 30 kg de peixe. Ele demora em média 5 minutos para cuidar de 1 kg de pirapitinga, 2 minutos para cuidar de 1 kg de Apaiari e em média 2 minutos para cuidar de 1 kg de pescada amarela, sabendo que ele dispõe de 90 minutos para fazer o cuidado dos pescados, sem que atrapalhe sua venda. Francisco sempre pega no máximo 15 kg de Pescada Amarela para vender por dia.*

*O lucro dele é de R\$ 8,00, R\$ 6,00 e R\$ 10,00 por cada kg vendido de Pirapitinga, Apaiari e Pescada amarela, respectivamente. Qual o maior lucro que Francisco pode obter com a venda dos peixes*

Vamos encontrar o modelo de programação que representa o problema acima. Vejamos abaixo:

- Variáveis de decisão

**x:** quantidade (kg) vendida de Pirapitinga.

**y:** quantidade (kg) vendida de Apaiari.

**z:** quantidade (kg) vendida de Pescada Amarela.

- Função objetivo

Francisco obtém um lucro de R\$ 8,00, R\$ 6,00 e R\$10,00 por cada kg vendido de Pirapitinga, Apaiari e Pescada Amarela, respectivamente.

Desta forma a função de lucro total, que queremos maximizar, será uma função da forma:

$$(Max) Z = 8x + 6y + 10z \quad (Função Objetivo)$$

- Restrição do problema

Percebe-se que existem três recursos disponíveis e limitados no problema, são eles: Peso que a cuba suporta (kg), tempo gasto no cuidado do peixe (min) e quantidade diária de Pescada Amarela (kg). Como vimos, para as restrições, a relação lógica existente é utilização de recurso  $\leq$  disponibilidade do recurso. Então:

$$\begin{cases} x + y + z \leq 30 \\ 5x + 2y + 2z \leq 90 \\ z \leq 15 \end{cases} \quad (\text{Restrições do problema})$$

- Variáveis de não negatividade

Como visto anteriormente,  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam as quantidades (kg) vendida dos pescados. Não podemos vender uma quantidade negativa desses peixes. Com isso, temos:

$$x, y \text{ e } z \geq 0$$

Portanto, como se escreve todo o modelo de programação linear do problema 3:

$$\text{Máx } Z = 8x + 6y + 10z$$

$$\begin{cases} x + y + z \leq 30 \\ 5x + 2y + 2z \leq 90 \\ z \leq 15 \end{cases}$$

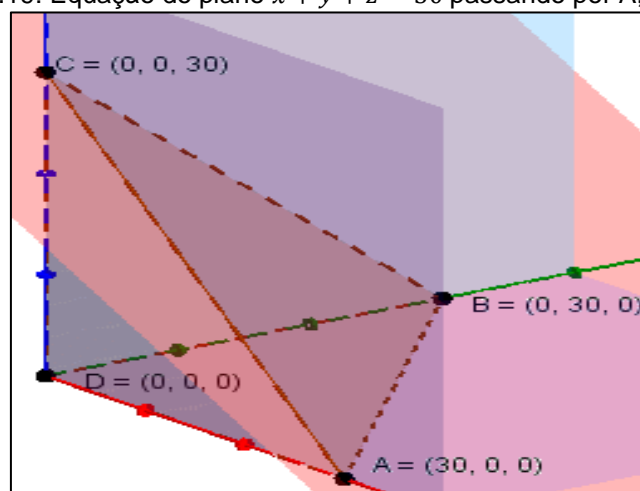
$$x, y \text{ e } z \geq 0$$

Encontrado o modelo de programação, usa-se agora, com o auxílio do Geogebra, o *método gráfico* para resolução do problema. O processo da obtenção da região factível é análogo ao dos problemas anteriores.

**Passo 1:** Para cada inequação do modelo utiliza-se a equação associada. No caso do Problema 3, as equações do plano associadas às inequações são  $x + y + z = 30$ ,  $5x + 2y + 2z = 90$  e  $z = 15$ .

Considere a equação do plano  $x + y + z = 30$ , na qual passa pelos pontos  $A(30,0,0)$ ,  $B(0,30,0)$  e  $C(0,0,30)$ . Representada graficamente na Figura 5.19:

Figura 5.19: Equação do plano  $x + y + z = 30$  passando por A, B e C

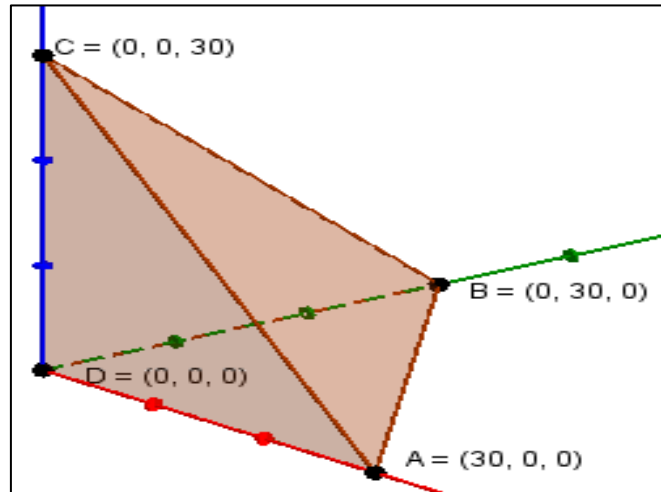


Fonte: O autor

**Passo 2:** Precisa-se determinar qual das regiões (subespaços) definida pelo plano satisfaz a inequação  $x + y + z \leq 30$ . Como dito anteriormente o ponto  $D(0,0,0)$  cumpre a inequação.

Logo, a região que satisfaz a desigualdade está localizada abaixo do plano, e é representada pelo poliedro ABCD, como mostra a Figura 5.20.

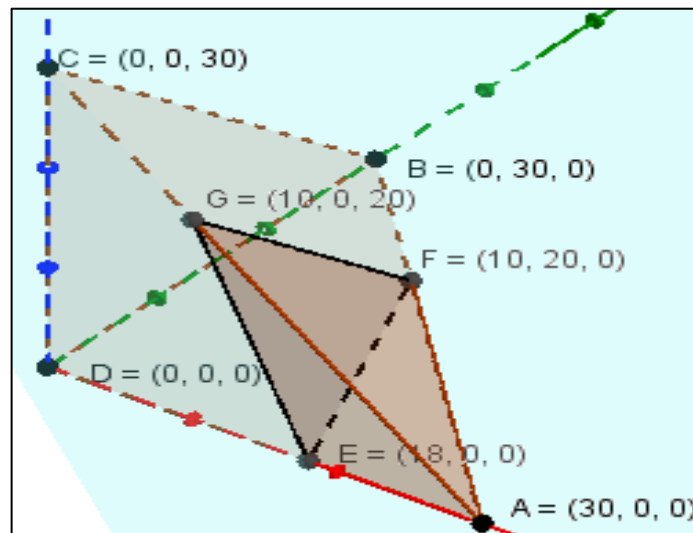
Figura 5.20 - Região que satisfaz a inequação  $x + y + z \leq 30$



Fonte: O autor

Ao construir o plano representado pela equação  $5x + 2y + 2z = 90$ , percebe-se que o mesmo intersecta o poliedro ABCD no polígono EFGE. (Ver Figura 5.21).

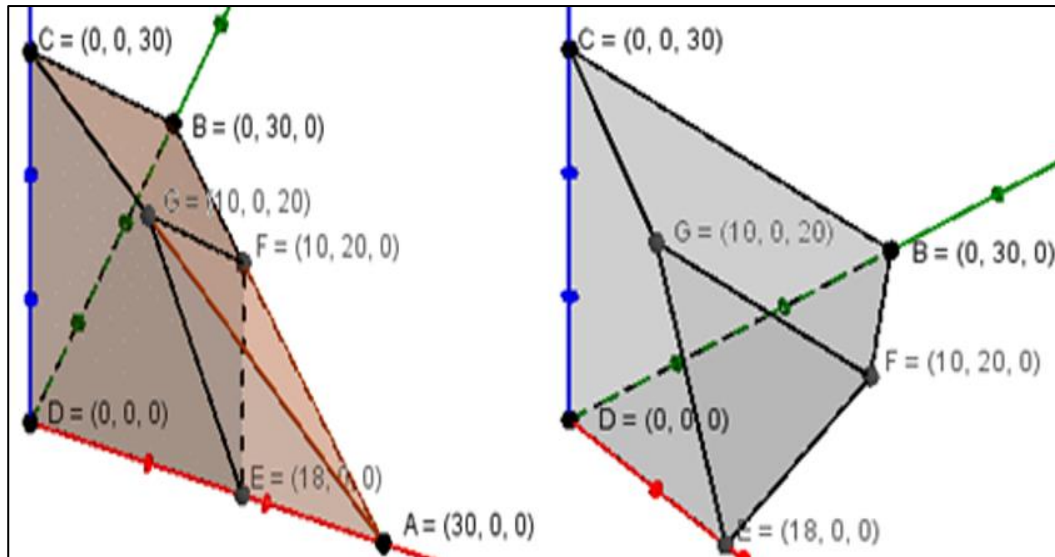
Figura 5.21: Polígono EFGE – interseção do plano com o poliedro



Fonte: O autor

A região que satisfaz a inequação  $5x + 2y + 2z \leq 90$  está localizada abaixo do plano, também é necessário que essa região satisfaça  $x + y + z \leq 30$ , para isso basta verificar a região que cumpre ambas as desigualdades, analisando o gráfico percebe-se que essa região é representada pelo poliedro BDEFGC, como mostra a Figura 5.22.

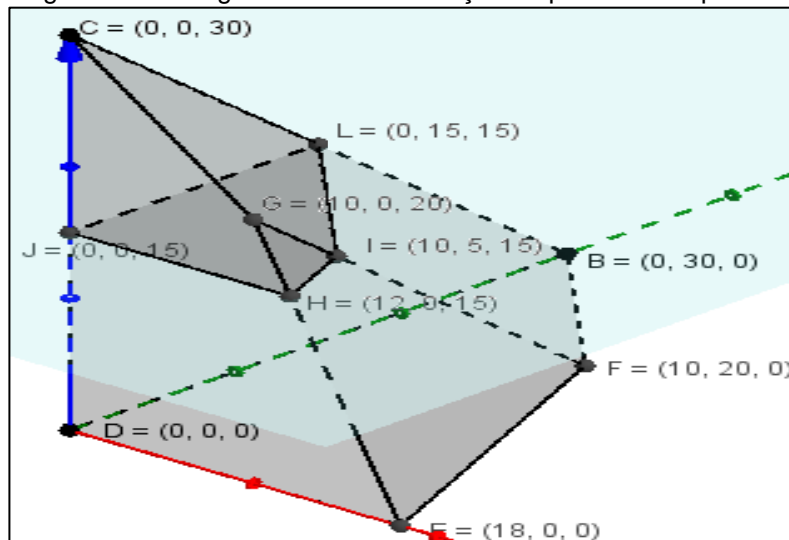
Figura 5.22: Região que cumpre ambas as desigualdades



Fonte: O autor

Ao construir o plano representado pela equação  $z = 15$ , com auxílio da ferramenta “interseção de superfícies” do Geogebra, facilmente analisa-se que ele intersecta o poliedro BDEFGC no polígono JHILJ. (Ver Figura 5.23).

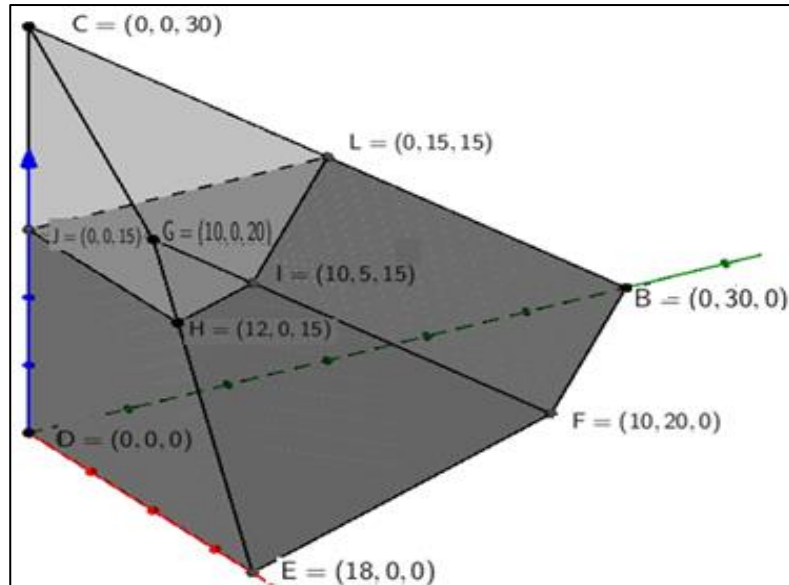
Figura 5.23: Polígono JHILJ – interseção do plano com o poliedro



Fonte: O autor

Verificando que região ao qual satisfaz a inequação  $z \leq 15$  está localizada abaixo do plano, e para se encontrar a região factível, também é necessário que satisfaça  $x + y + z \leq 30$  e  $5x + 2y + 2z \leq 90$ , para isso basta verificar no gráfico a região que cumpre as três desigualdades, analisando percebe-se que essa região é representada pelo poliedro BDEFIHJN, como mostra a Figura 5.24.

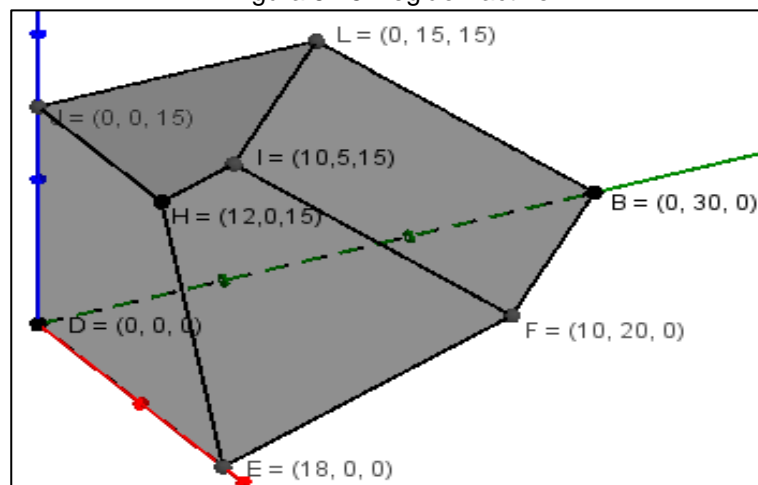
Figura 5.24 Região que satisfaz as três inequações



Fonte: O autor

Como todas as restrições foram traçadas temos o chamado Espaço Solução que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo. No gráfico o Espaço Solução é o poliedro, como verifica-se na Figura 5.25:

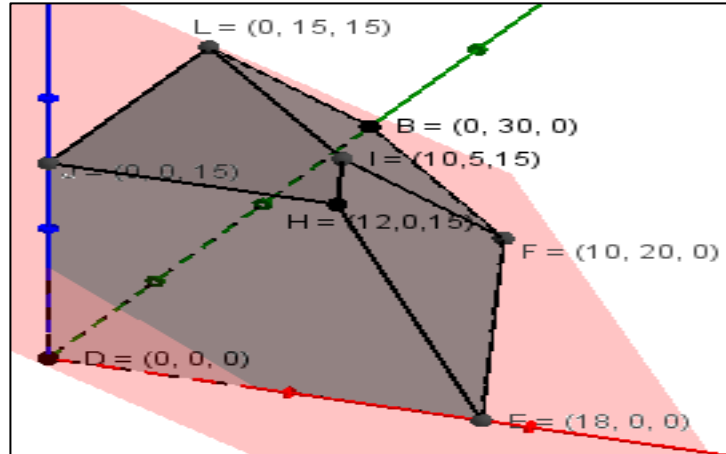
Figura 5.25 Região Factível



Fonte: O autor

**Passo 3:** Precisa-se encontrar o ponto da região factível que maximiza a função  $Z = 8x + 6y + 10z$ . Já se sabe que esta equação representa uma família de planos paralelos. Então, arbitrariamente escolhe-se um valor para  $Z$ , por exemplo  $Z = 70$ . Tem-se o plano  $8x + 6y + 10z = 70$  intersectando a região factível, como se observa na Figura 5.26:

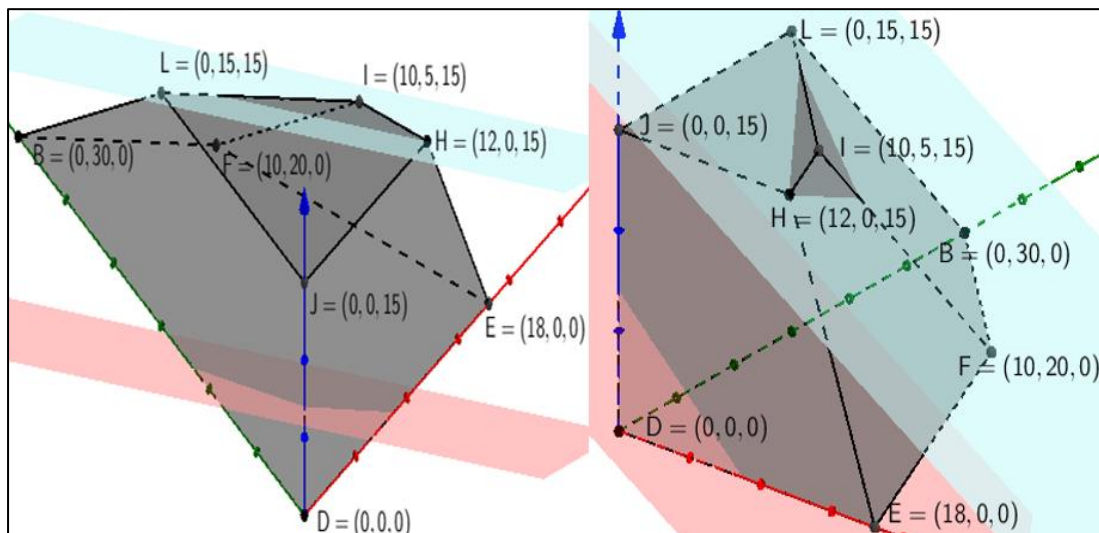
Figura 5.26 Plano  $8x + 6y + 10z = 70$  intersectando a região factível



Fonte: O autor

Analisando o gráfico, com o plano traçado de uma das paralelas de  $Z$ , podemos perceber quais os possíveis vértices que seriam solução do problema, tendo em vista isso basta criarmos, outros planos paralelos passando por esses vértices, como por exemplo o ponto  $H$ , que gera um plano  $8x + 6y + 10z = 246$  intersectando a região factível em outra parte. (Ver Figura 5.27):

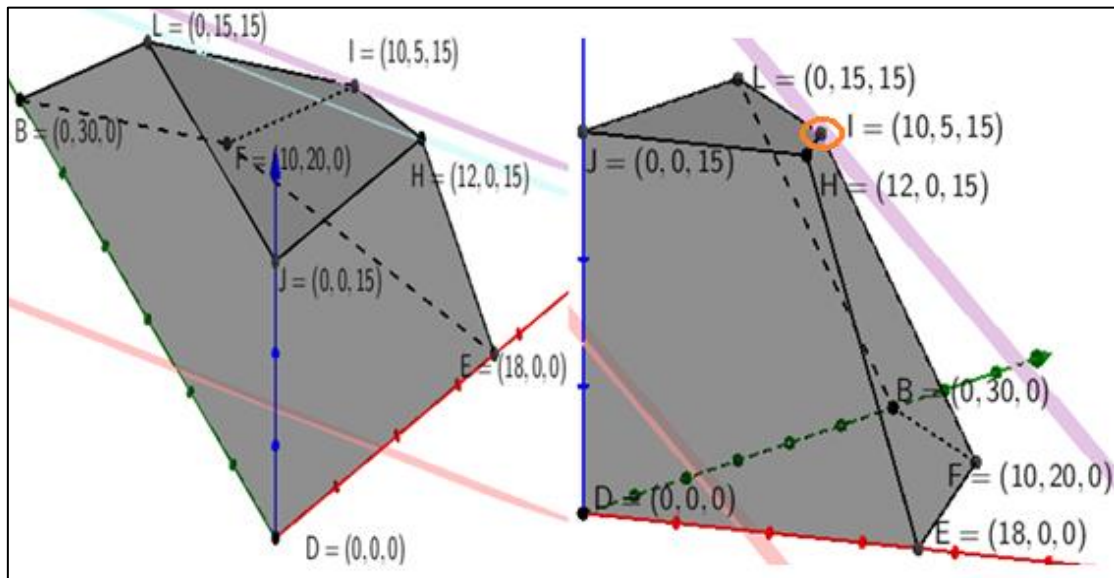
Figura 5.27: Plano  $8x + 6y + 10z = 246$  intersectando a região factível



Fonte: O autor

**Passo 4:** Neste momento pode-se notar, na figura acima, que a coordenada  $H(12,0,15)$  não é o melhor ponto, pois a parte do poliedro que compreende o vértice  $I$ , o único que ainda não foi tocado, logo a coordenada  $I(10,5,15)$  será solução do problema. Como se pode analisar na Figura 5.28:

Figura 5.28 A coordenada  $I(10,5,15)$  como solução do problema



Fonte: O autor

Na Tabela 5.4, apresenta-se o valor da função objetivo  $f(x,y,z)$  do Problema 3 em todos os vértices da região factível  $F$ .

Tabela 5.4: Valores da função objetivo do Problema 3 nos vértices da região factível

Vértice	Valor da Função	Análise
$D(0,0,0)$	$f(0,0,0) = 8.0 + 6.0 + 10.0 = 0$	Valor mínimo de $f$
$E(18,0,0)$	$f(18,0,0) = 8.18 + 6.0 + 10.0 = 144$	
$F(10,20,0)$	$f(10,20,0) = 8.10 + 6.20 + 10.0 = 200$	
$B(0,30,0)$	$f(0,0,30) = 8.0 + 6.30 + 10.0 = 180$	
$L(0,15,15)$	$f(0,15,15) = 8.0 + 6.15 + 10.15 = 240$	
$I(10,5,15)$	$f(10,5,15) = 8.10 + 6.5 + 10.15 = 260$	Valor máximo de $f$
$H(12,0,15)$	$f(12,0,15) = 8.12 + 6.0 + 10.15 = 246$	
$J(0,0,15)$	$f(0,0,15) = 8.0 + 6.0 + 10.15 = 150$	

Fonte: O autor



Portanto, Francisco terá que vender 10kg de Pirapitinga, 5 kg de Apaiari e 15kg de Pescada Amarela para obter o maior lucro que é de R\$ 260,00. Percebemos que com o método gráfica e com o auxílio do software Geogebra, encontramos facilmente a solução do Problema de Programação Linear no espaço tridimensional. Vejamos a seguir o problema 4.

**Problema 4.** *Seu Joaquim, um agricultor, tem como subsistência o plantio e colheita de três frutos, são eles: açaí, bacaba e cupuaçu, sabendo que o plantio deve-se ter no máximo 7 hectares. E também, devido a problemas de regadio, ele não pode plantar mais do que 5 hectares de bacaba e cupuaçu.*

*Seu Joaquim gera um lucro de R\$ 600,00, R\$ 650,00 e R\$ 700,00 por cada hectare de açaí, bacaba e cupuaçu plantado, respectivamente. Quantos hectares de cada fruto deve o agricultor plantar, de modo a obter maior lucro possível?*

Vamos encontrar o modelo de programação que representa o problema acima. Vejamos abaixo:

- Variáveis de decisão

**x:** tamanho em hectare plantado do fruto Açaí.

**y:** tamanho em hectare plantado do fruto Bacaba.

**z:** tamanho em hectare plantado do fruto Cupuaçu.

- Função objetivo

Seu Joaquim obtém um lucro de R\$ 600,00, R\$ 650,00 e R\$700,00 por cada hectare plantado de açaí, bacaba e cupuaçu, respectivamente.

Desta forma a função de lucro total, que queremos maximizar, será uma função da forma:

$$(Max) Z = 600x + 650y + 700z \quad (Função\ Objetivo)$$

- Restrição do problema

Percebe-se que existem dois recursos disponíveis e limitados no problema, são eles: tamanho máximo para o plantio dos frutos (ha) e o tamanho máximo para o plantio de bacaba e cupuaçu (ha). Novamente, para as restrições, a relação lógica existente é utilização de recurso  $\leq$  disponibilidade do recurso. Logo:

$$\begin{cases} x + y + z \leq 7 \\ y + z \leq 5 \end{cases} \quad (\text{Restrições do problema})$$

- Variáveis de não negatividade

Como visto,  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam os tamanhos em hectare plantados dos frutos. Não se pode plantar uma área com valor negativo. Com isso, temos:

$$x, y \text{ e } z \geq 0$$

Portanto, pode-se agora escrever todo o modelo de programação linear do problema 4:

$$\text{Máx } Z = 600x + 650y + 700z$$

$$\begin{cases} x + y + z \leq 7 \\ y + z \leq 5 \end{cases}$$

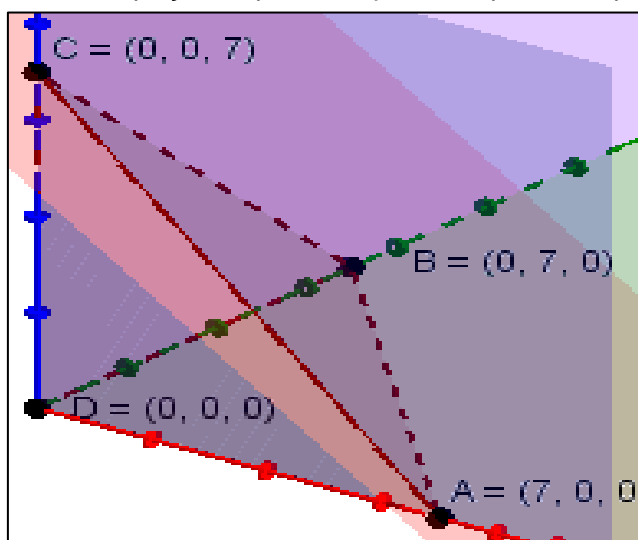
$$x, y \text{ e } z \geq 0$$

Usa-se agora, com o auxílio do Geogebra, o *método gráfico* para resolução do problema. O processo da obtenção da região factível é análogo ao dos problemas anteriores.

**Passo 1:** Para cada inequação do modelo utilizamos a equação associada. No caso do Problema 4, as equações do plano associadas às inequações são  $x + y + z = 7$  e  $y + z = 5$ .

Consideremos a equação do plano  $x + y + z = 7$ , ela passa pelos pontos  $A(7,0,0)$ ,  $B(0,7,0)$  e  $C(0,0,7)$ . Representada graficamente na Figura 5.29:

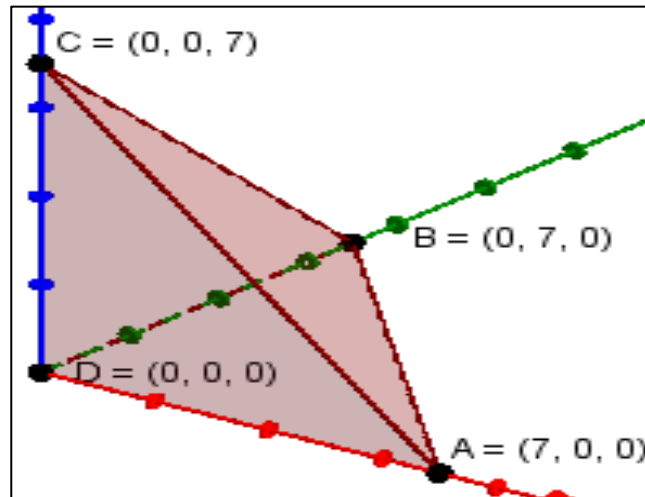
Figura 5.29: Equação do plano  $x + y + z = 7$  passando por A, B e C



Fonte: O autor

**Passo 2:** Precisa-se determinar qual das regiões (subespaços) definida pelo plano satisfaz a inequação  $x + y + z \leq 7$ . Como dito anteriormente, o ponto  $D(0,0,0)$  cumpre a inequação. Logo, a região que satisfaz a desigualdade está localizada abaixo do plano, e é representada pelo poliedro ABCD, como mostra a Figura 5.30.

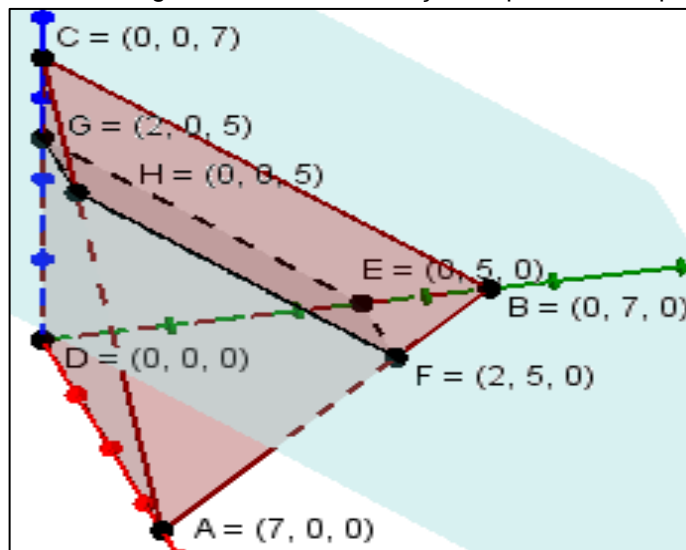
Figura 5.30: Região que satisfaz a inequação  $x + y + z \leq 7$



Fonte: O autor

Ao construir o plano representado pela equação  $y + z = 5$ , verifica-se que ele intersecta o poliedro ABCD no polígono EFHGE. (Ver Figura 5.31).

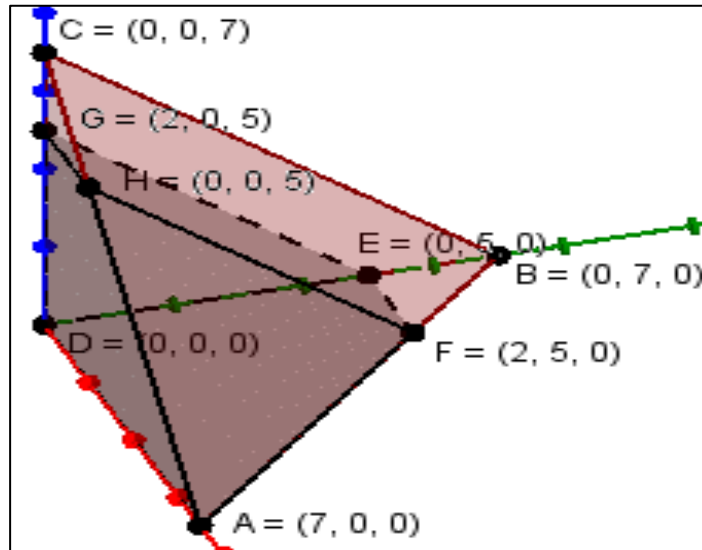
Figura 5.31: Polígono EFHGE – interseção do plano com o poliedro



Fonte: O autor

A região que satisfaz a inequação  $y + z \leq 5$  está localizada abaixo do plano, também é necessário que essa região satisfaça  $x + y + z \leq 7$ , para isso basta verificar a região que cumpre ambas as desigualdades, analisando o gráfico percebe-se que essa região é representada pelo poliedro AFEDGH, como mostra a Figura 5.32.

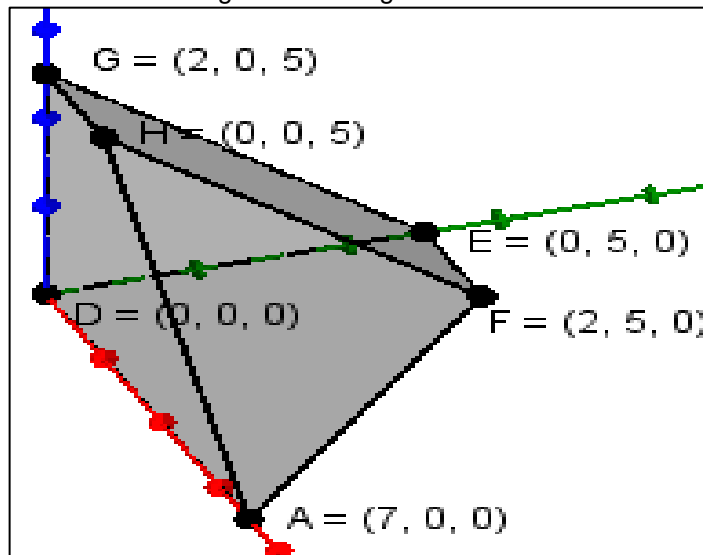
Figura 5.32: Região que cumpre ambas as desigualdades



Fonte: O autor

Como todas as restrições foram traçadas temos o chamado Espaço Solução que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo. No gráfico o Espaço Solução é o poliedro desenhado, como se pode ver na Figura 5.33:

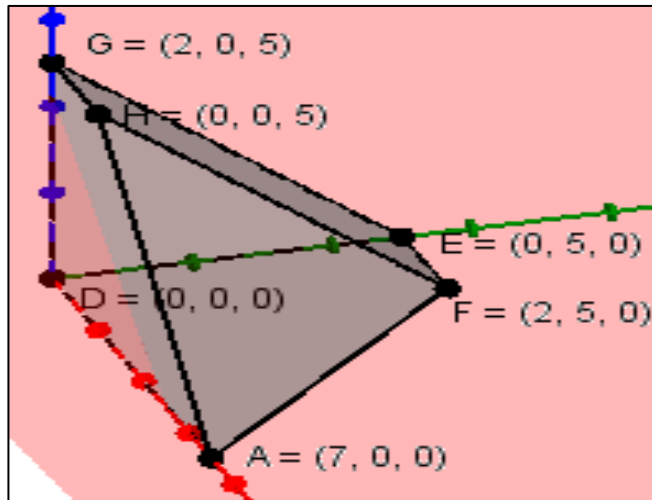
Figura 5.33: Região Factível



Fonte: O autor

**Passo 3:** Precisa-se encontrar o ponto da região factível que maximiza a função  $Z = 600x + 650y + 700z$ . Sabe-se que, esta equação representa uma família de planos paralelos. Então, arbitrariamente escolhe-se um valor para  $Z$ , por exemplo  $Z = 3000$ . Tem-se o plano  $600x + 650y + 700z = 3000$  intersectando a região factível, como se observa na Figura 5.34:

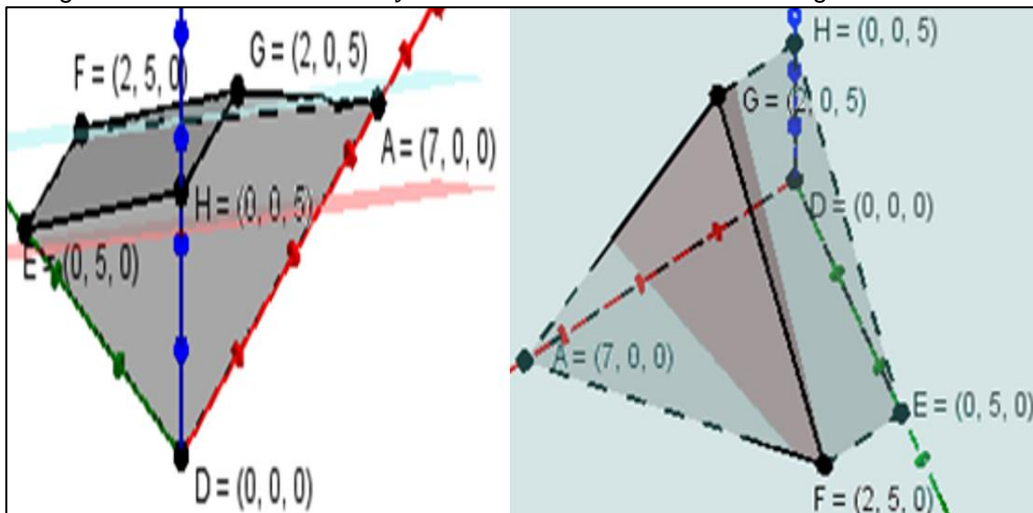
Figura 5.34 Plano  $600x + 650y + 700z = 3000$  intersectando a região factível



Fonte: O autor

Analisando o gráfico, com o plano traçado de uma das paralelas de  $Z$ , pode-se perceber quais os vértices que podem ser solução do problema, tendo em vista isso, basta criar outros planos paralelos passando por esses vértices, como por exemplo o ponto  $F$ , que gera um plano  $600x + 650y + 700z = 4450$  intersectando a região factível em outra parte. Como se pode ver graficamente Figura 5.35.

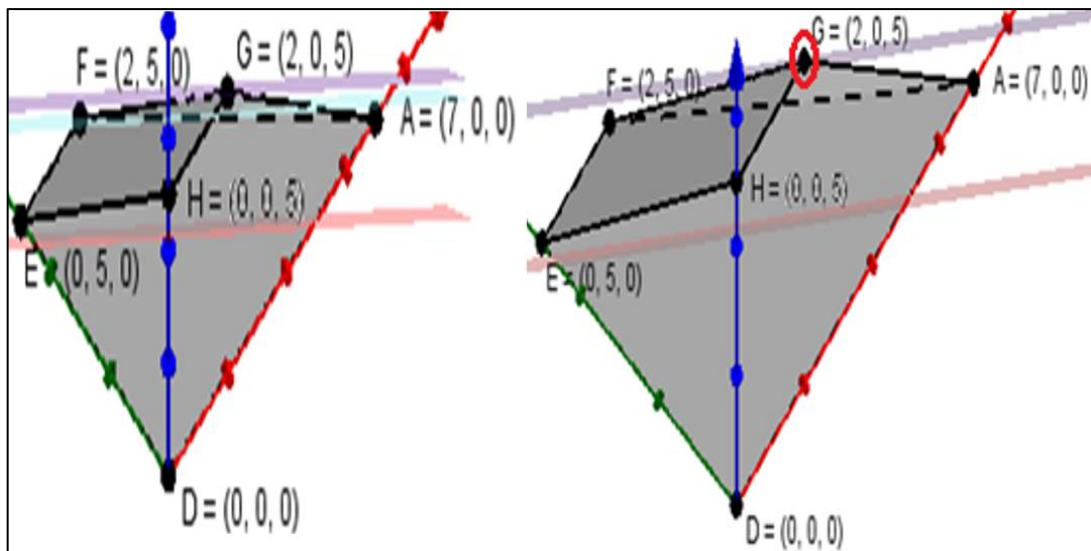
Figura 5.35: Plano  $600x + 650y + 700z = 4450$  intersectando a região factível



Fonte: O autor

**Passo 4:** Neste momento pode-se notar, na figura acima, que a coordenada  $F(2,5,0)$  não é o melhor ponto, pois a parte do poliedro que compreende o vértice  $G$  não foi tocada, e como o ponto  $G(2,0,5)$  será o último vértice a ser intersectado pelo plano, temos que ele será solução do problema. Veja a Figura 5.36.

Figura 5.36: A coordenada  $G(2,0,5)$  como solução do problema



Fonte: O autor

Na Tabela 5.5, apresenta-se o valor da função objetivo  $f(x, y, z)$  do Problema 4 em todos os vértices da região factível  $F$ .

Tabela 5.5: Valores da função objetivo do Problema 4 nos vértices da região factível

Vértice	Valor da Função	Análise
$D(0,0,0)$	$f(0,0,0) = 600.0 + 650.0 + 700.0 = 0$	Valor mínimo de $f$
$A(7,0,0)$	$f(7,0,0) = 600.7 + 650.0 + 700.0 = 4200$	
$F(2,5,0)$	$f(2,5,0) = 600.2 + 650.5 + 700.0 = 4450$	
$E(0,5,0)$	$f(0,5,0) = 600.0 + 650.5 + 700.0 = 3250$	
$H(0,0,5)$	$f(0,0,5) = 600.0 + 650.0 + 700.5 = 3500$	
$G(2,0,5)$	$f(2,0,5) = 600.2 + 650.0 + 700.5 = 4700$	Valor máximo de $f$

Fonte: O autor

Portanto, Seu Joaquim terá que plantar 2 hectares do fruto Açai e plantar 5 hectares do fruto Cupuaçu para que obtenha lucro máximo de R\$ 4.700,00.

Após a análise e feitas as considerações sobre as aplicações acima, sugerimos que os problemas propostos neste capítulo sejam trabalhados com os alunos seguindo as orientações e etapas apresentadas, acreditamos que a utilização do Software Geogebra possa trazer muitas vantagens para aprendizagem, dentre elas temos, como movimentar as figuras em diversas direções, e a partir do que o aluno observa, o professor pode indagá-los a apresentarem conclusões acerca de padrões observados.

Um dos grandes desafios dos professores de Matemática que estão atuando em sala de aula é fazer com que o aluno relacione o conteúdo que está sendo apresentado com sua aplicação no seu cotidiano. Ou ainda, fazer com que o aluno se interesse pelo conteúdo ministrado e, sobretudo, reconheça que o mesmo é e será importante para sua formação acadêmica e também para sua formação como cidadão participante da sociedade (BRASIL, 1997).

Considerando o estigma da educação Matemática, frisa-se que os estudantes estão imersos no âmbito da tecnologia e esta por sua vez, tem se expandido, logo há real necessidade de eles acompanharem as mudanças que pairam também na própria forma de aprender conteúdo por intermédio de uma faceta mais articulada, mais envolvida com os avanços tecnológicos.

Portanto, o ensino – aprendizagem de Matemática deve também ser alicerçado com ferramentas tecnológicas que auxiliem o professor na condução; aprimoramento e desenvolvimento do saber. Promovendo ao discente reais, situações de ensino – aprendizagem, uma vez relacionando a Matemática com problemas do cotidiano para uma melhor associação da prática escolar com o âmbito extraescolar.

A seguir, apresentar-se-á uma Proposta de Plano de aula de Programação Linear 3D bastante possível de ser aplicada no Ensino Médio. A proposta tem como intuito também de acrescentar o uso do software GeoGebra como facilitador na construção gráfica e interpretação dos sistemas de equações e inequações com três variáveis. É importante destacar que, neste capítulo apresenta-se detalhadamente como sugestão, a sequência de etapas dos PPL usando o Geogebra 3D, que pode ser adotada pelo docente durante a execução das atividades em sala de aula. Com isso, a seguir coloca-se como proposta alguns pontos importantes que precisam ser observados e ter devida atenção pelos professores durante a elaboração do seu plano de aula.

## 6 PROPOSTA DE PLANO DE AULA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR 3D NO ENSINO MÉDIO

A proposta de atividade é passível de aprimoramentos pela ótica de outros interessados na temática, uma vez traduzindo e evidenciando as peculiaridades e diferenças de cada escola. É notório analisar a escassez de tempo para se trabalhar uma gama de conteúdos no Ensino Básico.

Pensando nisso, entende-se que o assunto de Programação Linear pode ser apresentado no Ensino Médio, tendo em vista que alguns livros didáticos já vêm abordando esse tema de maneira discreta e recorrente, como pode-se constatar na Figura 6.1.

Figura 6.1: Análise do assunto de Programação Linear nos livros didáticos

**Um pouco mais...**

**Programação linear e a otimização de funções**

As equações e inequações lineares, bem como os sistemas de equações e inequações simultâneas, são bastante úteis na resolução de problemas de economia, transporte, alimentação (dietas), problemas como esses é comum precisarmos os valores máximo ou mínimo de uma função, variáveis estão sujeitas a certas desigualdades. Muitos deles a função que se quer otimizar da qual se quer encontrar o máximo ou o mínimo é uma função linear, e as desigualdades a que estão sujeitas suas variáveis também são lineares. Quando isso ocorre, dizemos então que estamos de um problema de **programação linear**.

**O método gráfico**

Consideremos a seguinte situação-problema: Dois produtos, P e Q, contêm as vitaminas B e C nas quantidades indicadas no quadro. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto a dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o mínimo custo?

	P	Q	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

Diante de um problema de programação linear, consideramos a seguinte orientação para resolvê-lo:

1. Estabelecemos a **função objetivo**, isto é, a função que queremos maximizar ou minimizar.
2. Transformamos as restrições impostas no problema em um sistema de inequações lineares.
3. Traçamos o gráfico da região poligonal correspondente a essas restrições determinando as coordenadas dos seus vértices.


**Exemplo:**

15) Vamos determinar o valor máximo de  $z = 2x + y$ , sujeito às restrições:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 28 \\ y = 0 \end{cases}$$

**Otimização**

Um dos problemas fundamentais na Teoria da Administração diz respeito à distribuição de recursos limitados entre atividades competitivas, com o objetivo de otimizar o resultado. A maximização e a minimização de custos são exemplos de otimização. Equações envolvidas nesses processos são lineares, a solução desse tipo de problema é a resolução de um sistema linear. Para exemplificar, vamos resolver um problema de custos.



Em uma indústria, fabricam-se dois tipos de peça,  $P_1$  e  $P_2$ . As máquinas  $M_1$  e  $M_2$  devem produzir 40 e 60 peças diárias, respectivamente. Cada uma dessas máquinas pode fabricar, em um dia, os dois tipos de peça ou apenas um dos tipos. A tabela abaixo mostra o custo unitário de produção dos dois tipos de peça em cada uma das máquinas.

	Custo unitário de produção de peça $j$ na máquina $M_i$ (em unidade monetária)	
	$M_1$	$M_2$
$P_1$	5	6
$P_2$	2	3

Dados fctivos:

Sabendo que as duas máquinas funcionam simultaneamente e que devem ser fabricadas 40 e 60 peças diárias, respectivamente. Quantas peças de cada tipo deve fabricar cada uma das máquinas para determinar o custo mínimo, vamos indicar por  $x_1$  e  $x_2$  as quantidades de peças de cada máquina fabricadas diariamente pelas máquinas, conforme a tabela:

**Introdução à programação linear**

As equações e inequações lineares, bem como os sistemas de equações e inequações simultâneas, são bastante úteis em muitos problemas de economia, transporte, dietas, etc. Muitos problemas de otimização se apresentam sob a forma de encontrar os valores máximo ou mínimo de uma função sujeita a certas desigualdades. Muitos desses problemas são de programação linear. Quando isso ocorre, dizemos então que estamos diante de um problema de programação linear.

**Programação linear — o método gráfico**

Consideremos a seguinte situação-problema: Dois produtos, P e Q, contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas no quadro ao lado. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto a dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o mínimo custo?

Diante de um problema de programação linear, consideramos a seguinte orientação:

1. Estabelecemos a função que queremos maximizar ou minimizar.
2. Transformamos as restrições impostas no problema em um sistema de inequações lineares.
3. Traçamos o gráfico da região poligonal correspondente a essas restrições determinando os vértices.
4. Calculamos os valores da função objetivo nos vértices.
5. O maior desses valores é o valor máximo da função objetivo.
6. Voltamos ao problema original e verificamos se o valor encontrado é o valor máximo ou mínimo.

**Exemplo:**

14) Vamos determinar o valor máximo de  $z = 3x + 2y$ , sujeito às restrições:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 28 \\ y = 0 \end{cases}$$

**4. Valores que a função objetivo assume nos vértices:**

Vértice	Valor da função $C = 3x + 2y$
(0, 42)	$C = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 42 = 84$
(2, 6)	$C = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18 \leftarrow$ mínimo
$(\frac{98}{13}, \frac{24}{13})$	$C = 3 \cdot \frac{98}{13} + 2 \cdot \frac{24}{13} = 26,3$
(14, 0)	$C = 3 \cdot 14 + 2 \cdot 0 = 42 \leftarrow$ máximo

**5. Conclusão:**

A dieta ótima, que é sadia e tem custo mínimo, consiste em consumir 2 unidades do produto P e 6 unidades do produto Q.

Agora, responda às questões a seguir:

- a) Qual é o custo de consumir 4 unidades do produto P e 5 unidades do produto Q?
- b) Quanto de vitamina A seria consumido com 4 unidades do produto P e 5 unidades do produto Q?
- c) Quanto de vitamina B e C seria consumido nas mesmas condições da pergunta anterior?
- d) Essa dieta (4 unidades do produto P e 5 unidades do produto Q) está de acordo com o texto?
- e) Pesquise qual profissional deve ser consultado antes de se iniciar uma dieta. Você conhece algum? Discuta com seus colegas os perigos de fazer dietas sem acompanhamento médico.

Fonte: O autor



Realizou-se um mapeamento do assunto tratado em seis livros didáticos (de autores distintos), a fim de encontrar e analisar como era abordada a temática em estudo. Logo, dos seis livros pesquisados, quatro deles fizeram uma breve referência ao tema, como se pode ver na Figura 6.1, daí percebe-se que este é um fator que mostra a importância deste tema dentro da Matemática no Ensino Básico.

## 6.1 ANÁLISE DO MAPEAMENTO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NOS LIVROS DIDÁTICOS

Considerando a importância dos livros didáticos de Matemática contemplados pela Rede pública e privada de ensino do Estado do Amapá para o processo de ensino- aprendizagem, bem como, faz-se necessário analisar como o conteúdo de Programação Linear é abordado nos referidos livros voltados para o Ensino Médio.

Para tanto, analisando o guia digital do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD, podemos fazer o seguinte mapeamento sobre quais autores abordam a PL em seus respectivos livros, como veremos na Figura 6.2;

Figura 6.2 – Coleções do PNLD

<b>Coleção - Editora</b>	<b>Autor (es)</b>	<b>Aborda PL?</b>
<b>Matemática: Contexto &amp; Aplicações - Ática</b>	Luiz Roberto Dante	Sim
<b>Matemática: Ensino Médio - Saraiva</b>	Kátia Stocco Smole Maria Igenes Diniz	Sim
<b>Matemática: Paiva - Moderna</b>	Manoel Paiva	Não
<b>Matemática: Volume Único - Ática</b>	Luiz Roberto Dante	Sim
<b>Matemática: Ciência e aplicações - Saraiva</b>	Gelson Iezzi Osvaldo Dolce	Sim
<b>Conexões com a Matemática - Moderna</b>	Juliane Matsubara Barroso	Não

Fonte: O autor

Conforme observado na Figura 6.2, os autores que trabalham com a PL em seus livros abordam a Programação Linear como um assunto optativo, fazendo uma breve introdução sobre a história da PL e também mostram a importância do uso de sistemas lineares e inequações em problemas de Economia, transporte, dietas, entre outros.

Dante (2014) em seu Livro intitulado “Matemática: Contexto & Aplicações – Ática”, após definir o que é Programação Linear ele introduz um problema que é resolvido e faz somente um passo a passo de como resolver um Problema de Programação Linear pelo método geométrico, descrito abaixo:

Diante de um Problema de Programação Linear, consideramos a seguinte orientação para resolvê-lo: Estabelecemos a função objetivo, isto é, a função que queremos maximizar ou minimizar. Transformamos as restrições impostas no problema num sistema de inequações lineares. Traçamos o gráfico do polígono convexo correspondente a essas restrições determinando as coordenadas dos seus vértices. Calculamos os valores da função objetivo em cada um dos vértices. O maior desses valores é o máximo e o menor é o mínimo da função objetivo. Voltamos ao problema e damos a sua solução. (DANTE; p.125, 2014).

Nesta direção, analisando também o livro “Matemática: Ensino Médio – Saraiva” de Smole & Diniz (2013) que apresenta referências sobre a Programação Linear, sendo uma referência na introdução do capítulo que trata dos Sistemas Lineares, e a outra referência na seção “Outros Contextos”, que apresenta temáticas relevantes e curiosas que tratam de situações práticas, correlacionando a Matemática a outras disciplinas, destacando a importância dos sistemas de equações e inequações simultâneas na resolução de problemas nas mais diversas áreas, como transportes, economia, entre outras.

De acordo com o mapeamento realizado, observou-se que alguns autores motivam o discente relatando a necessidade de encontrar valores máximo ou mínimo de uma função sujeita a restrições. No entanto, o roteiro apresentado pelos autores não possibilita que o aluno elabore suas próprias conjecturas e construa suas conclusões, à medida que desenvolve a atividade proposta.

Diante da análise realizada, constatou-se que alguns autores, como Dante (2014), Smole & Diniz (2013), abordam a temática em questão de forma tradicional, sem adaptação aos recursos metodológicos disponíveis na atualidade. Pois, o uso de um software matemático ajudaria a ilustrar e motivar a resolução destes problemas. A apresentação de uma resolução do problema, com o auxílio de um software, poderia despertar o interesse dos discentes para o tema, visto que, a informática possibilita dinamismo, agilidade e a capacidade de entrelaçar diferentes formas de linguagem, despertando mudanças positivas no processo de ensino-aprendizagem.

Com isso, repensa-se a real necessidade de se trazer a proposta de atividade ancorada na Sequência Didática (SD), a qual é sem dúvida uma ferramenta de alto teor, uma vez que norteia o educador a construir e a modificar o trajeto do ensino-aprendizagem de Matemática.

## 6.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA APLICAÇÃO

É relevante que esta *Sequência Didática (SD)* seja desenvolvida em um laboratório de informática, e também se faz necessário a utilização de equipamento Datashow, pois permite maior dinamismo e melhor interação na exploração e principalmente, na investigação das soluções dos problemas, e poderá ser aplicada individualmente ou em grupos, considerando a estrutura física da escola ou planejamento do professor.

Verificou-se no capítulo 3 alguns dos vários assuntos desenvolvidos na Matemática e que podem ganhar um atrativo extra com a introdução da Programação Linear. Mediante a isso, o trato com PPL se daria no momento em que os alunos já tiverem como pré-requisito estudado estes assuntos, e também um conhecimento básico sobre os principais comandos e ferramentas do software Geogebra 3D, visto no capítulo 4, o qual se faz necessário para que durante a resolução dos problemas propostos haja melhor entendimento.

No capítulo 5, evidencia-se como proposta trabalhar problemas com enunciados direcionados a temas da região norte, a qual o professor pode adaptar, pesquisar ou criar com os alunos outros modelos de programação por meio dos conhecimentos e experiências trazidas por eles, podendo levar em consideração a região geográfica ou aspectos culturais deles. Pois, se acredita que eles ao

visualizarem algumas aplicações do cotidiano, nas teorias expostas no Ensino Médio, conceberiam o ensino matemático mais atrativo e prazeroso.

### 6.2.1 Modelagem do problema

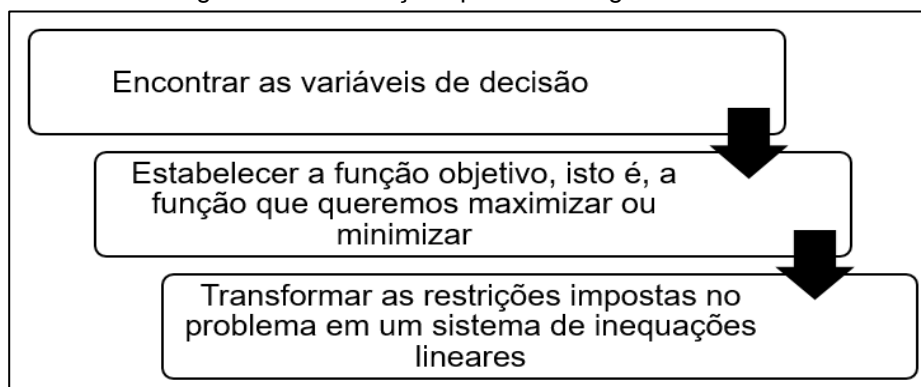
Certos cuidados são necessários na modelagem dos problemas de programação linear, com isso é conveniente que o professor junto com os educandos defina etapas, para melhor orientá-los. Assim, segundo Polya (2006) o professor é responsável por criar mecanismos de indagações e sugestões na mente do aluno, ou seja, responsável por encucar ideia.

É interessante o professor levantar alguns questionamentos com os educandos sobre o problema, tais indagações poderão ajudá-los a compreender melhor e escrever matematicamente a situação do problema. Têm-se abaixo algumas perguntas como sugestão:

- Quais são as grandezas envolvidas?
- Quais dados foram apresentados?
- O que deseja descobrir (variáveis)?
- Será que é possível escrever sentenças matemáticas que representam a situação do problema?
- E agora, como encontrar uma resposta?

Diante disso, o aluno na tentativa de modelar um PPL trará consigo um momento de reflexão sobre seus conhecimentos prévios em Matemática. É necessário que o docente tenha atenção com esta etapa inicial, pois, não é tão simples aos alunos essa transcrição das informações do problema para um formato ou modelo matemático. Para encontrar o modelo matemático de um Problema de Programação Linear sugerimos aos professores o problema 1 do capítulo 5, o qual consta, na Figura 6.3, detalhadamente as seguintes orientações:

Figura 6.3: Orientações para modelagem de um PPL



Fonte: O autor

Neste momento, analisar a situação modelada e estudar as restrições do problema aproximará o aluno do objetivo do problema. Buscar soluções por testes aleatórios é uma atividade interessante para criar estratégias de cálculo envolvendo a função objetivo e as restrições ao mesmo tempo.

Mas, após o discente fazer uso dessas tentativas para encontrar a solução, é importante que nesse momento o profissional da educação apresente o método geométrico ao discente, para que ele possa visualizar graficamente as possíveis soluções e compreender melhor o significado do modelo matemático encontrado anteriormente.

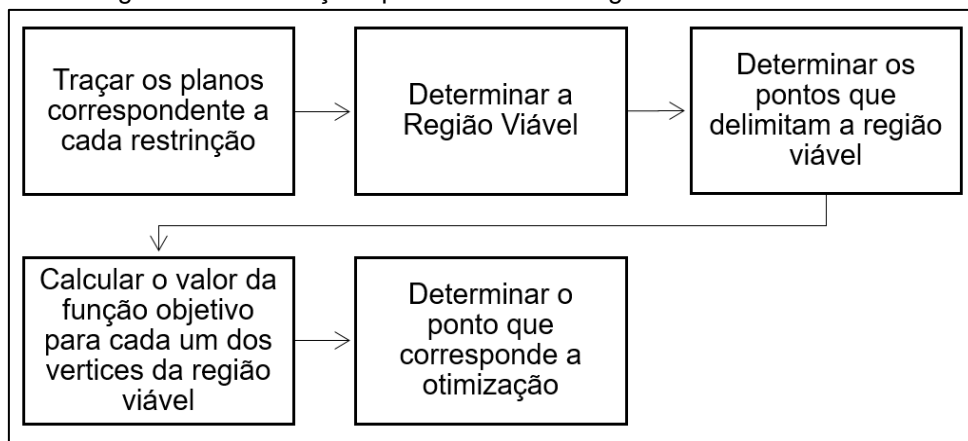
### 6.2.2 Método Gráfico

Encontrado o modelo de programação do PPL o docente deverá realizar uma abordagem geométrica com os educandos, isto é, fazer uso do método gráfico para determinar a região no plano 3D por intermédio do Geogebra, será possível fazer uma nova análise do problema e melhorar os valores dos testes, neste momento uma discussão sobre as estratégias que deverão ser adotadas poderá ser levantada pelo professor. Abaixo sugere-se as seguintes discussões:

- *Qual seria o significado da região convexa do espaço?*
- *Qual (is) seria(m) o(s) ponto(s) dessa região em que teríamos a melhor solução?*
- *O que a função objetiva teria a ver com essa região?*
- *Como as coordenadas dos vértices se relacionam com as restrições?*

Esses questionamentos podem ser uma estratégia importante para consolidar o entendimento do problema e aproximar o discente ao modelo de problema de otimização linear que foi proposto. Para encontrar a região viável de um Problema de Programação Linear através do método gráfico sugerimos aos professores o problema 1 do capítulo 5, os quais constam, na Figura 6.4, detalhadamente os seguintes passos:

Figura 6.4: Orientações para encontrar a região viável de um PPL



Fonte: O autor

Assim, com a segurança de que os alunos entenderam as etapas e as escolhas dos vértices, o professor pode agora apresentar alguns conceitos teóricos, como a forma padrão de modelagem desses problemas de programação Linear, definições e os Teoremas apresentados na seção 3.9 do capítulo 3, tendo em vista que os estudos dos conceitos teóricos são necessários para compreender a ferramenta utilizada na resolução dos problemas.

Após um primeiro contato com problema de otimização linear, no caso o problema 1, é esperado que os educandos tenham mais confiança em executar esta etapa sozinhos. Com isso, uma outra aplicação proporcionará uma experiência agradável aos alunos, que poderão entender outras formas de relacionar os dados do problema com as variáveis, criando uma sensação confortável para o desenvolvimento das ideias. Tem-se como sugestões de aplicações os outros problemas propostos no capítulo 5.

### 6.3 RESULTADOS E REFLEXÕES ESPERADOS COM A PROPOSTA

Acredita-se que as propostas desse plano de aula favorecem alguns pontos importantes que devem estar encucados no professor de Matemática do Ensino Médio, são eles:

- Fazer os alunos vivenciarem uma aplicação da Matemática de maneira simples, com métodos criativos e lógicos, reconhecendo cada vez mais a importância da Matemática no seu cotidiano;
- Aproximação da relação entre professor-aluno, tornando-os parceiros na interpretação e resolução dos problemas;
- As aplicações voltadas a temas da Região Norte servem para conectar os alunos nortista ao estudo da Matemática, uma vez que o pensamento matemático vem sendo deixado de lado por grande parte dos alunos;
- Despertar nos alunos o desejo de aplicar os conhecimentos adquiridos em novas situações.

Em outras palavras, é necessário que os professores mantenham atenção redobrada, pois recursos metodológicos se fazem necessários juntamente com bons recursos didáticos, ou seja, o papel do educador consiste também em aliar o saber com compromisso de construir conhecimento focando nas reais necessidades e dificuldades de cada educando.

Assim, é crucial que o bom professor realize sondagem, e mais além, feedback na tentativa de acompanhar a construção e aprimoramento do ensino aprendizagem. Sendo elementar realizar conversas com pequenos grupos de alunos, responder indagações, analisar as dificuldades individuais e não apenas grupais, orientar o ensino, o qual exige a colaboração dos sujeitos envolvidos e não apenas daquele que ensina, constrói e propaga o saber.

Portanto, a expectativa é que este trabalho possa ajudar e inspirar professores e admiradores da Matemática, a aplicar a teoria de resolução de problemas de otimização linear com discentes do Ensino Médio, problemas esses que podem ser baseados ou elaborados em situações e especificidades de cada região do Brasil.

Procura-se propagar o conteúdo de uma forma bem objetiva e didática e esperamos ter contribuído em alguma forma no ensino da programação linear no espaço  $\mathbb{R}^3$ , principalmente com a proposta apresentada no capítulo 5, pois é uma

estratégia que possibilita ao aluno compreender geometricamente e algebricamente o conteúdo de PL no espaço tridimensional e, concomitantemente possa enxergar a utilidade desse tema no cotidiano.



## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O enfoque da abordagem geométrica de problemas de programação linear no espaço 3D é direcionado aos colegas professores do ensino médio, pois evidencia-se situações-problemas de Programação Linear que instigarão os alunos a pensarem no seu cotidiano e de como alcançar uma melhor solução para determinados problemas do dia a dia e, a partir de casos simples, é possível mostrar aos discentes nortista, principalmente para os que vivem em área rural, que esse tema faz parte da sua realidade econômico-financeira.

O objetivo geral desta dissertação foi servir de base aos docentes de Matemática, a fim de que estes tivessem subsídios para desenvolverem com os discentes aplicações de determinados assuntos do ensino médio em problemas práticos, reais e interessantes de PL. O objetivo específico foi proporcionar aos professores uma proposta de ensino – aprendizagem contemplando a PL no espaço tridimensional por intermédio da Sequência Didática.

Atingido os objetivos mencionados, inevitavelmente surgirão outros, porque não só o tema deste trabalho pode ainda ser aprofundado, como outros temas poderão ser abordados com semelhantes ou outros enfoques escolhidos, até mesmo sugere-se a outros pesquisadores a aplicação da proposta de SD. Além disso, ao utilizar o material já obtido para abordar atividades com os alunos eles provocarão alterações, que sem dúvida enriquecerão o material, provocando mais pesquisas e assim por diante.

A ideia é de que professores, de qualquer lugar do país, em especial da Região Norte possam acessar a proposta apresentada neste trabalho para implementar suas aulas, tendo em vista que, é uma forma de contribuição pedagógica que facilitará o trabalho docente de colegas que não têm disponibilidade e tempo para pesquisarem modelos diferentes de aplicações da Matemática.

Tendo em vista que, ao analisar o arquivo presente no site do Programa do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT referente as Normas Acadêmicas, no item *“Disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso”*, em um dos trechos de um parágrafo continha: *“Os Trabalhos de Conclusão de Curso devem versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula”*. Ou seja, o programa mencionado

direciona o Mestrando a trabalhar com temática significativa e que possa alavancar modificações positivas ao processo de ensino – aprendizagem de Matemática.

Visto que, a motivação para o foco da temática abordada partiu da concepção de que se deve e pode-se buscar novas estratégias e metodologias para melhorar e facilitar o ensino – aprendizagem de Matemática, como a utilização do Software Geogebra como recurso computacional, que ao fazer uma abordagem e análise geométrica nos PPL torna a aula mais atrativa e conseqüentemente incentiva a criatividade e participação do aluno, propondo que ele crie problemas que possam ser modelados matematicamente.

Esta dissertação é uma proposta de ensino bastante viável ao professor, por sua vez optou-se por apresentar uma abordagem geométrica dos PPL utilizando soluções básicas viáveis, pois a utilização dessas soluções está mais presente no cotidiano escolar de um aluno do Ensino Médio.

Enfim, esta é uma pesquisa que certamente auxiliará outros docentes a desenvolverem aulas mais estratégicas, conseguindo até a expandir a proposta de SD exemplificada. Uma vez, considerando que esta proposta de plano de aula contribuirá aos colegas, professores de Matemática, de forma prática e viável, com uma proposta de atividade em sala de aula sobre programação linear, sempre tentando fazer a Matemática mais tangível e amigável aos nossos alunos.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, L.C.L.de; NÓBRIGA, J.C.C. **Aprendendo matemática com o Geogebra**. São Paulo: Exato, 2010.

ARENALES, Marcos. ARMENTANO, Vinícius; MORABITO, Reinaldo; YANASSE Horácio. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007 – 6ª impressão.

BASNIAK, M.I; ESTEVAM, E.J.G. **O Geogebra e a Matemática da Educação Básica: frações, estatística, círculo e circunferência**. Curitiba: Ithala, 2014.

BASSANEZI, R. C., **Ensino-aprendizagem com modelagem Matemática: uma nova estratégia**, Contexto, 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

CASTRO; A.P.G. **Uma proposta pedagógica para o Ensino do Número de Ouro através do software Geogebra na Educação Básica**. Dissertação (Mestrado). Macapá, 2017. Visitado em 20 de janeiro de 2019.

COLIN, Emerson C. **Pesquisa Operacional**. 170 Aplicações em Estratégia, Finanças, Logística, Produção, Marketing e Vendas. Rio de Janeiro: LTC, 2013. p. 21.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, volume único/ Luiz Roberto Dante**. 1. Ed -- São Paulo: Ática, 2005.

G. Lachtermacher. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**, Elsevier,2004.

GEOGEBRA. Disponível em: <http://ogeogebra.com.br/site/>. Acessado em 23/01/2019  
HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

LINS, M.P.E, Calôba, G.M. **Programação Linear com aplicações em teoria de jogos e avaliação de desempenho**. Editora Interciência,2006.

LIMA, Elon Lages, **A matemática do ensino médio** – volume 3/Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. – 6. Ed. – Rio de Janeiro: SBM 2006.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria** – Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: SBM (Sociedade Brasileira de Matem, 1991.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

MARINS, F. A. S. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica, Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2011.

MORETTIN, Pedro Alberto. HAZZAN, Samuel. BUSSAB, Wilton O. **Cálculo: função de uma e várias variáveis**. 2 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

PASSOS, A. N. **Estudos em Programação Linear**. Dissertação de Mestrado. Unicamp – Campinas, 2009.

PASSOS, Adão Nascimento Dos. **Estudos em Programação Linear**. 2009. 169 f. Dissertação (Mestre) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. Disponível em: <<http://cutter.unicamp.br/document/?code=000470278>>. Acesso em: 29 fev. 2019.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

PRADO, Darci Santos do. **Programação linear** (Série Pesquisa Operacional, vol. 1). Belo Horizonte: Editora Desenvolvimento Gerencial, (1999).

PRADO, Darci Santos do. **Programação Linear**. Série Pesquisa Operacional– Volume 1. 3ª ed. Belo Horizonte, MG: Editora de Desenvolvimento Gerencial, 2003.

SALLES NETO, L. L. **Tópicos de Pesquisa Operacional para o Ensino Médio**. Curso de curta duração ministrado/Extensão. Rio de Janeiro. Volta Redonda: UFF, 2006.

ZACHI, J. M. **Problemas de Programação Linear**: uma proposta de resolução geométrica para o Ensino Médio com o uso do Geogebra, UNESP, Araraquara, SP, 2016