UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

JOSÉ RAIMUNDO BARBOSA FREITAS

ABORDAGEM GEOMÉTRICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ESPAÇO 2D

MACAPÁ/AP
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT

JOSÉ RAIMUNDO BARBOSA FREITAS

ABORDAGEM GEOMÉTRICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ESPAÇO 2D

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof.º Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

MACAPÁ/AP

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborada por Orinete Costa Souza – CRB11/920

Freitas, José Raimundo Barbosa.
Abordagem geométrica de problemas de programação linear no espaço 2D / José Raimundo Barbosa Freitas ; Orientador, José Walter Cárdenas Sotil. – Macapá, 2019.
97 f.

Dissertação (Mestrado) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT).

1. Programação (Matemática). 2. Geogebra 2D. 3. Matemática (Ensino Médio). 4. Representação Gráfica. I. Sotil, José Walter Cárdenas, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III.Título.

519.72 F866a
CDD. 22 ed.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Amapá foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **JOSÉ RAIMUNDO BARBOSA FREITAS** intitulada: **Abordagem Geométrica de Problemas de Programação Linear no Espaço 2D**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita a homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do programa de Pós-Graduação.

MACAPÁ, 03 de junho de 2019.

Prof.º Dr. José Walter Cárdenas Sotil
Presidente da Banca Examinadora (UNIFAP)

Prof.º Me. Hilton Bruno Pereira Viana
(Avaliador Externo – IFAP)

Prof.º Dr. Erasmo Senger
(Avaliador Interno – UNIFAP)

AGRADECIMENTOS

Registro meu agradecimento primeiramente à Deus por ter me concedido a vida e forças para transcender os vários obstáculos surgidos durante minha caminhada.

Aos meus pais, Raimundo Freitas e Rosa Barbosa, pela educação, apoio e confiança a mim depositado ao longo de todos esses anos de estudos, mas sempre podendo contar com seus auxílios e dedicação.

À minha amada família, que fez com que essa caminhada se tornasse mais fácil, contribuindo direta e indiretamente nessa jornada de aprendizado.

À Universidade Federal do Amapá - UNIFAP que oportunizou a realização da continuidade de minha formação.

Ao PROFMAT pela oportunidade de melhorar como profissional de sala de aula, me proporcionando a aquisição de novos conhecimentos, assim como uma nova visão de aplicação do conhecimento matemático em práticas no cotidiano de nosso alunado, em especial, meu orientador, Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil, pelas valiosas contribuições na construção desse trabalho, tendo às vezes que abnegar de suas horas de folga para orientar esta dissertação.

Aos meus colegas de turma pelos momentos de estudos, descontração, pelas sugestões, conselhos, etc., colegas estes que passaram ou passarão por angustias e dificuldades semelhantes.

EPÍGRAFE

“A essência do pensamento, tal como a essência da vida, é o crescimento”. Wilde, O (2000).

RESUMO

Problemas de Programação Linear no espaço bidimensional são abordados neste trabalho, utilizando recursos geométricos com o Geogebra onde são realizadas analogias com situações de aplicações da programação linear na vida cotidiana do aluno, em especial, da Região Norte, proporcionando ao aluno uma visão maior e mais “palpável” da Matemática como instrumento de aplicação. O objetivo deste trabalho é proporcionar aos professores uma proposta de ensino – aprendizagem contemplando a programação linear no espaço bidimensional por intermédio de uma Sequência Didática utilizando o software Geogebra. Conclui-se que o estudo de Programação Linear juntamente com a abordagem geométrica no espaço 2D pode ser uma relevante contribuição pedagógica o que facilitará o trabalho docente ao que tange aplicações de modelos matemáticos.

Palavras – chave: Programação Linear. Geogebra 2D. Ensino Médio.

ABSTRACT

Problems of Linear Programming in the two-dimensional space are approached in this work, using geometric resources with Geogebra where analogies are applied to situations of linear programming applications in the daily life of the student, especially in the Northern Region, providing the student with a bigger and more vision "Palpable" of mathematics as an instrument of application. The objective of this work is to provide teachers with a teaching - learning proposal contemplating linear programming in two-dimensional space through a Didactic Sequence using Geogebra software. It is concluded that the study of Linear Programming along with the geometric approach in the 2D space can be a relevant pedagogical contribution which will facilitate the teaching work to the applications of mathematical models.

Key words: Linear Programming. 2D Geogebra. High school.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Programação Linear é uma ferramenta de planejamento que nos proporciona otimizar resultados, maximizar lucros ou minimizar custos, por exemplo, de problemas práticos que nos deparamos envolvendo funções lineares com restrições em torno de variáveis que abrangem problemas de Programação Linear. Quanto a aplicação desta ferramenta, as possibilidades são inúmeras desde industrias até pequenas empresas, que irão utilizá-la em sua linha de produção.

Atualmente, existe a grande necessidade da utilização de novas ferramentas de intermédio entre docentes e discentes, um exemplo hoje bastante utilizado é o da Tecnologias da Informação e Comunicação as comumente chamadas de TIC's, que se tratam de meios de comunicação que podem ser utilizados para transmitir informações em especial, conhecimento de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Ensino Médio, onde se torna cada vez mais clara a importância desse tipo de metodologia na absorção do conteúdo, principalmente em Matemática, disciplina pouco priorizada na maioria dos alunos, certamente como ela é abordada pelos docentes em sala de aula.

A apresentação da Programação Linear em 2D para o ensino Médio segue uma disposição de conteúdos de forma a favorecer docentes e discentes interessados nas operações aqui contidas. Assim, no Capítulo 3 damos ênfase a Conceitos Básicos Matemáticos associados ao tema de Programação Linear que o docente poderá trabalhar em sala de aula como forma de introduzir o conteúdo. Por meio do Capítulo 4 será possível o docente abordar informações pertinentes ao Software Geogebra. Já no Capítulo 5 o enfoque será em relação as Aplicações da Programação Linear em 2D utilizando o Geogebra direcionado a temas da Região Norte. O Capítulo 6 faz alusão a uma "Proposta de Plano de aula de Programação Linear 2D no ensino médio", e o último são as considerações finais.

Por fim, o objetivo também deste trabalho é apresentar uma proposta de que a programação Linear é uma teoria que além de ser poderosa na capacidade de resolver problemas, também é capaz de ser abordada de forma interdisciplinar sendo trabalhada de maneira contextualizada e elementar neste nível de ensino, que atualmente torna-se fundamental para que seja obtida uma formação multidisciplinar aos egressos do ensino Médio.

2 HISTÓRIA DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Prado (1999) salienta que, os estudos sobre a Programação Linear (PL) tiveram análises pioneiras em 1936 pelo economista Wassily Leontieff (1905-1999). No seu artigo intitulado "Quantitative input and output Relations in the Economics Systems of the United States, o autor mostra um modelo matricial linear de entradas e saídas que é usado em problema de PL, ou seja, Leontieff desenvolveu um modelo formado por um agrupamento de equações lineares, considerado como passo inicial para as técnicas relacionadas à PL. Ele recebeu o prêmio Nobel de Economia em 1973, por desenvolver uma teoria de insumo-produto, a "Matriz de Leontief", e a sua aplicabilidade em Economia.

Segundo Passos (2009), em 1939 o Matemático e economista russo Leonid Vitaliyevich Kantorovich (1912-1986) contribuiu com a aplicação da Matemática a problemas econômicos, relacionadas com a optimização. Em 1975 ganhou o Prêmio Nobel de Economia, pela contribuição a teoria da alocação ótima de recursos escassos.

Em 1940, Frank Lauren Hitchcock (1875-1957) apresentou abordagem ao problema de transportes. Nesta direção, considerando a ordem cronológica durante o grande conflito militar nos EUA ocorreu o "Problema da Dieta", no qual o objetivo era descobrir alimentos com baixos custos, visto que o ser humano precisa ser alimentado para se manter saudável.

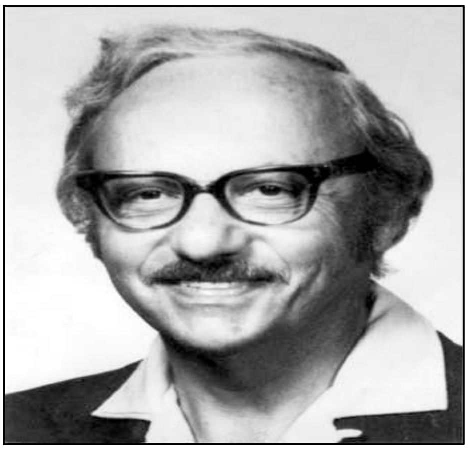
Em 1945, George Stigler, após a repercussão nacional, do desafio, apresentou resultado considerável, o qual considerou somente o aspecto econômico, chegando à seguinte solução inusitada: a privação de alimentos (dieta) teria um custo anual de US$ 59,88 tratando-se de fígado de porco, farinha de trigo e repolho. Uma dieta difícil de alguém manter.

Stigler chegou nesse resultado combinando, por tentativas, 77 alimentos e considerando 9 nutrientes entre um e outro. Mesmo sendo o resultado motivo de diversas chacotas, a técnica usada poderia ser empregada em campos parecidos, como modelo, na alimentação de animais. Mas, a técnica de tentativas utilizada por Stigler, foi passível de erros, além de nem sempre resultar na solução esperada.

É notório observar que, apenas em 1947 esta técnica de planejamento se firmou com George Bernard Dantzig (1914-2005), o Matemático e físico Norte-Americano (Figura 2.1), o qual criou e desenvolveu um método chamado Simplex a fim de encontrar respostas às questões de otimização formulados a partir de questões de logística da Força Aérea dos E.U.A, durante a Segunda Guerra Mundial. Por este feito também é considerado o "Pai da Programação Linear".

Entre 1941 e 1945 o autor a qual se tem frisado desempenhou serviços como especialista em programas e planejamentos correspondentes as tarefas militares.

Figura 2.1 - George Bernard Dantzig 1914-2005



Fonte: Prado (1999)

Inicialmente, foi na área militar que a temática focalizada neste trabalho recebeu grande enfoque, especialmente com os estudos de Dantzig, durante o grande combate militar (1939-1945). Em 1947, ele e outros estudiosos do Departamento da Força Aérea Americana difundiram o Método Simplex, o qual consiste em resolver problemas de PL. Neste cunho, o avanço da informática foi de fundamental importância para a expansão da ferramenta em foco (SALLES NETTO, 2006).

Após o conflito militar global de 1939 a 1945 (Guerra-Fria), a PL foi crescendo em diversos campos, pois era notória sua eficácia no auxílio aos processos de análise e decisão atingindo resultados mais versáteis, assertivos, rápidos e economicamente viáveis, em diversos lugares do mundo, e consequentemente no Brasil não foi diferente.

Segundo Lima (apud. MARINS, 2011) no Brasil a Pesquisa Operacional (PO) surgiu após seu desenvolvimento na Grã-Bretanha e nos Estados Unidos. Vale destacar que, o primeiro Curso de Engenharia de Produção (a nível de graduação) da Escola Politécnica da Instituição de Ensino Superior de São Paulo (EPUSP) foi criado em 1957.

Já no ano de 1958 criou-se o curso supracitado no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), bem como, foram criados cursos voltados para a temática aqui abordada; dentre outros, oportunizados aos acadêmicos de Engenharia de Produção USP e do ITA.

Esse autor ressalta ainda que, as primeiras aplicações de PO a problemas cotidianos deram-se em 1960. A exemplo tem-se a Petrobrás, na qual teve o primeiro grupo formal em 1965, no ano seguinte (1966) esta empresa organizou o primeiro seminário de PO no Brasil. Nesta época foi criada a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO) com grande almejo no uso e técnicas do assunto em voga.

No Brasil a Programação Linear iniciou-se na década de 1960 com um simpósio realizado no ITA, em São José dos Campos, em 1968. Temos uma abordagem um pouco mais detalhada e mais contribuições históricas (ARENALES, 2007).

De acordo com Hillier e Liberman (2006) o instrumento PL é crucial e de suma importância no campo científico, pois seu desenvolvimento proporcionou grande lucratividade para inúmeras empresas.

A Programação Linear pode ser aplicada para solucionar questões de várias áreas, principalmente em departamentos que envolvem projetos e controle de produção, tais como: controle de perdas e desenvolvimento de energia elétrica, planejamento de produção avícola; de cortes de bobina de papel, dentre outros. Daí a importância dessa técnica pelos diversos profissionais de engenharia, para ajudá-los a obter decisão mais eficiente.

São apresentadas exemplificações de vereditos relacionados a temática trabalhada nesta dissertação (ARENALES, 2007):

- **Problemas de mistura** são combinações de materiais depositados no meio ambiente proporcionando a fabricação de novas matérias-primas. Exemplo: composição de areias para filtro.
- **Problemas de transporte** ligado a distribuição dos materiais ou produtos até aos consumidores, almejando baixo custo do meio de locomoção.
- **Problemas de preparação da produção** que está atrelado a proporção de produção, ou seja, quando, qual e quanto produto produzir.
- **Problemas de programação** de projetos permite determinar a ordem que as atividades serão realizadas, proporcionando melhor o controle da produção.

- **Problemas de gestão financeira** (fluxo de caixa) mantém a correlação com a movimentação do dinheiro de caixa, principalmente valores provenientes de débitos e créditos projetados, buscando aumentar a lucratividade.
- **Problemas de meio ambiente** propiciam que a empresa possa ter posicionamento cauteloso em relação ao meio ambiente, por exemplo, poluindo menos.

Como observado, as exemplificações acima mostram a relevância da PL no dia a dia. Logo, a Otimização Linear se coloca como uma importante ferramenta que atua em vários campos, buscando um melhor aproveitamento de recursos sem perder os objetivos esperados. Sua aplicabilidade, dessa forma, fica sendo reconhecida em vários ramos profissionais, principalmente pela necessidade de maximizar os lucros ou minimizar as despesas.

Para Hillier e Liberman (2006), a PL faz parte da Matemática Aplicada que usa um modelo Matemático na descrição do problema. Para eles o objetivo é buscar a melhor destinação dos recursos disponíveis.

Com isso, temos que um grande desafio do mundo contemporâneo é o melhor aproveitamento de recursos, sem com isso abrir mão dos confortos com os quais estamos acostumados. Nesse intuito, o estudo sobre Programação Linear, juntamente com as facilidades tecnológicas, tem como expectativas sempre a busca por melhores soluções, isto é, torna-se auxiliadora na tomada de inferências.

Como este trabalho do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, foram e estão sendo feitos vários outros e diversas pesquisas no Brasil voltados a PL, que também está sendo abordada em cursos de graduação, principalmente na Engenharia de Produção e Economia, mas pode perfeitamente ser introduzida no Ensino Médio, já que os pré-requisitos básicos são estudados, tais quais as equações e inequações do primeiro grau, plano cartesiano, equação da reta, conjuntos convexos e outros.

A proposta de inserir Problemas de Programação Linear (PPL) no Ensino Médio é fazer com que novos problemas de otimização sejam apresentados, aproveitando conteúdos, citados acima, já trabalhados ao longo da vida escolar do aluno. A ideia é apresentar novos problemas que de fato podem surgir no cotidiano do aluno que mora na região Norte do Brasil. A inserção desta proposta no ensino médio permitiria aos alunos o contato com problemas interessantes e reais, justificando e motivando amplamente o estudo dos tópicos mencionados acima.

Abaixo verifica-se a História do Software Geogebra para que se possa compreender melhor a temática tratada. Denotando sua relevância ao que tange a aplicabilidade no cotidiano, e de forma geral ao Ensino Aprendizagem de Cálculos Matemáticos.

2.1 HISTÓRIA DO GEOGEBRA

O Geogebra é um software gratuito criado em 2001 pelo professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgna da Áustria, destinado ao ensino da Matemática nas escolas e serve para todos os níveis de ensino, que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos em 2D e 3D, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos e recebeu diversos prêmios (BASNIAK; ESTEVAM, 2014).

- EASA 2002- European Academic Software Award (Ronneby, Suécia).
- Learnie Award 2003 - Austrian Educational Software Award (Viena, Áustria)
- Digita 2004 - German Educational Software Award (Colônia, Alemanha).
- Comenius 2004 - German Educational Media Award (Berlim, Alemanha).
- Learnie Award 2005 - Austrian Educational Software Award for "Spezielle Relativitätstheorie mit GeoGebra" (Viena, Áustria).
- Trophées du libre 2005 - Prêmio Internacional de Software Livre, categoria Educação (Soissons, França) Twinning Award 2006 - 1º Prêmio no "Desafio dos Círculos" com GeoGebra (Linz, Áustria).
- Learnie Award 2006 - Prêmio Austríaco de Software Educacional (Viena, Áustria).

De acordo com Araújo e Nóbriga (2010) o software está escrito em Java, o que permite que ele seja acessado em várias plataformas operacionais tais como Windows, Linux, Mac e, atualmente, na plataforma Android, permitindo o uso para dispositivos de informática mais versáteis como tablets e smartphones. O download do software na versão mais atualizada pode ser realizado através do link: http://www.geogebra.org/.

O Geogebra também disponibiliza ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica e ainda apresenta uma vantagem didática, pois é composto por duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: a geometria e a álgebra.

A janela de geometria é o local destinado aos objetos construídos, a qual é possível modificar e colorir os objetos, alterar a espessura de linhas, medir ângulos e distâncias, exibir cálculos, etc. A janela de álgebra exibe a representação algébrica de todo objeto que foi construído.

Segundo Castro (2017), o software Geogebra permite trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da Educação Matemática, pois a abordagem está embasada nas exigências dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s), tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio.

Ainda de acordo a autora supramencionada, diversos conteúdos matemáticos que estão presentes nos PCN’s do Ensino Médio, podem ser trabalhados em sala de aula de maneira dinâmica quando utilizado o Geogebra. Observa-se alguns exemplos: noções de funções, trigonometria do triângulo retângulo, funções trigonométricas, geometria analítica com representações do plano cartesiano e resolução de sistemas de equações com duas variáveis.

A seguir trabalhar-se-á com temas da Matemática do Ensino Médio envolvidos em PPL, ressaltando principais assuntos inseridos na seara educacional que possibilitam a utilização do Geogebra.

3 CONCEITOS BÁSICOS MATEMÁTICOS ASSOCIADOS AO TEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Neste capítulo apresentaremos conceitos de diferentes assuntos que fazem parte dos conteúdos abordados no Ensino Médio, sendo estes também ferramentas essenciais para se encontrar respostas na programação linear (PPL) especificamente no espaço bidimensional.

Serão abordados assuntos como: Sistema de coordenadas cartesianas bidimensional, equação da reta em $\mathbb{R}^2$, inequações lineares, sistemas de equações lineares com duas incógnitas, polígonos convexos e outros. Para um estudo mais completo da Geometria Analítica Plana.

Como trabalharemos com o exemplo de resolução gráfica, é relevante que os educandos conheçam alguns tópicos de Matemática básica, para que possam acompanhar e entender as construções feitas no Geogebra, que será o software usado nesta dissertação como ferramenta tecnológica para auxiliar na visualização do modelo.

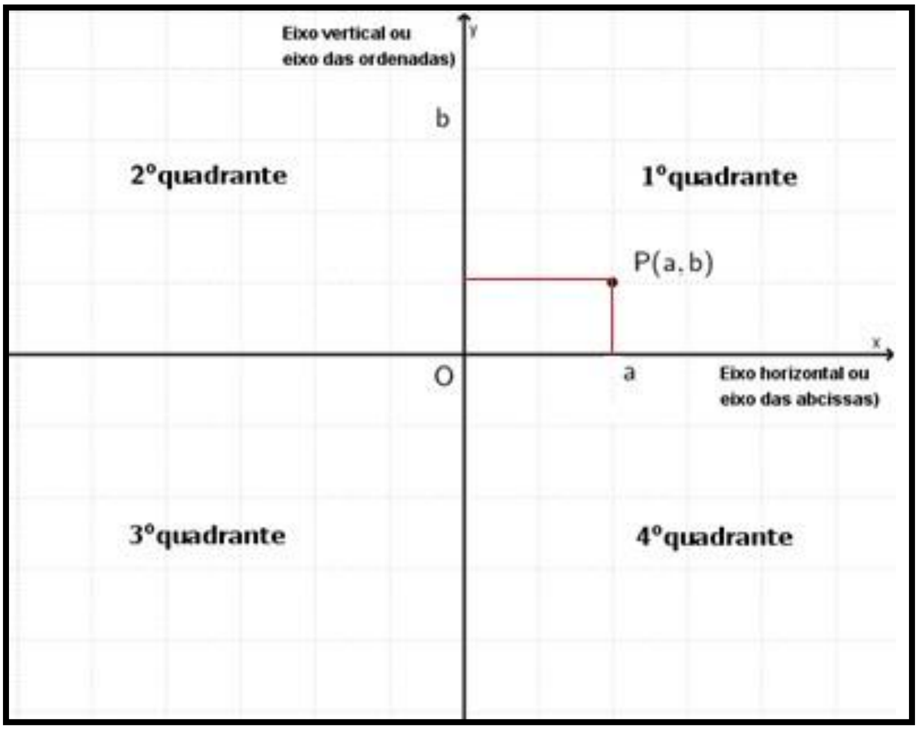
3.1 SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Segundo Dante (2005) A notação (a, b) é usada para indicar o par ordenado de números reais a e b, na qual o número a é a primeira coordenada e o número b é segunda coordenada. Observe que os pares ordenados (3,4) e (4,3) são diferentes, pois a primeira coordenada de (3,4) é 3, enquanto a primeira coordenada de (4,3) é 4.

Um sistema de eixos ortogonais é constituído por dois eixos perpendiculares, Ox e Oy, que têm a mesma origem O.

Damos o nome de plano cartesiano a um plano munido de um sistema de eixos ortogonais. Os eixos ortogonais dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas quadrantes, de acordo com a Figura 3.1

Figura 3.1 - Sistema de Eixos Ortogonais



Fonte: O autor.

Usamos esse sistema para localizar pontos no plano. Dado um ponto P desse plano, dizemos que os números a e b são as coordenadas cartesianas do ponto P, em que a é a abscissa e b é a ordenada.

Observe que a cada par ordenado de números reais corresponde um ponto do plano cartesiano e, reciprocamente, a cada ponto do plano corresponde um par ordenado de números reais. Essa correspondência biunívoca entre pares de números reais e pontos do plano permite escrever conceitos e propriedades geométricas em uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpretar geometricamente relações entre números reais.

De interesse histórico, a palavra “cartesiana” vem do filósofo francês René Descartes (1596 – 1650) que desenvolveu a análise gráfica de equações através do sistema de coordenadas retangulares. Geralmente são denominadas de eixo x e eixo y as retas, horizontal e vertical, respectivamente. Em aplicações como na Física, os eixos coordenados podem ser t e s representando tempo e espaço; na Economia, q e C representando quantidade produzida e custo de produção; entre tantos outros exemplos.

3.2 EQUAÇÃO DA RETA

Equações do tipo $ax + by + c = 0$, onde a, b e c são constantes reais e a e b não são nulos simultaneamente, são ditas lineares em x e y. Equações desse tipo têm por representação geométrica retas no plano cartesiano. São dados diferentes nomes de acordo como escrevemos os termos da equação. Temos a equação geral da reta, que é apresentada no início do parágrafo, a equação reduzida, a segmentária, a paramétrica e a cartesiana, cada uma com sua especificidade. Dentre todas essas denominações, vamos focar na equação reduzida da reta $y = ax + b$.

Esta equação é trabalhada no 1º ano do Ensino Médio como o gráfico da função, $f(x) = ax + b$, dita como função afim onde os coeficientes a e b são números reais. A grande vantagem da equação da reta escrita assim é que podemos pensar na reta como o gráfico de uma função, e apenas olhando para os coeficientes a e b, chamados respectivamente de angular e linear, já sabemos se a reta é crescente ou decrescente, e onde ela corta o eixo y, ou seja, sem fazer nenhuma conta, sabemos fazer o esboço do gráfico. Também veremos as retas verticais de equação $x = c, y \in \mathbb{R}$ onde c é uma constante.

3.3 FORMA REDUZIDA DA EQUAÇÃO DA RETA

Considerando que a equação da reta que passa por um ponto $P(x_0, y_o)$ com declividade m é dada por:

$$y - y_0 = m\ (x - x_o)$$

Se escolhermos o ponto particular (0, n), isto é, ponto em que a reta intersecta o eixo y, pela equação anterior teremos $y - n = m\ (x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow y = mx + n$. Essa equação é chamada de equação reduzida da reta r, note que a forma reduzida é uma função afim.

Segundo Lima (1991) O coeficiente m de x na equação reduzida é o coeficiente angular da reta e ao termo n, independente de x e y, que é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas, damos o nome de coeficiente linear da reta.

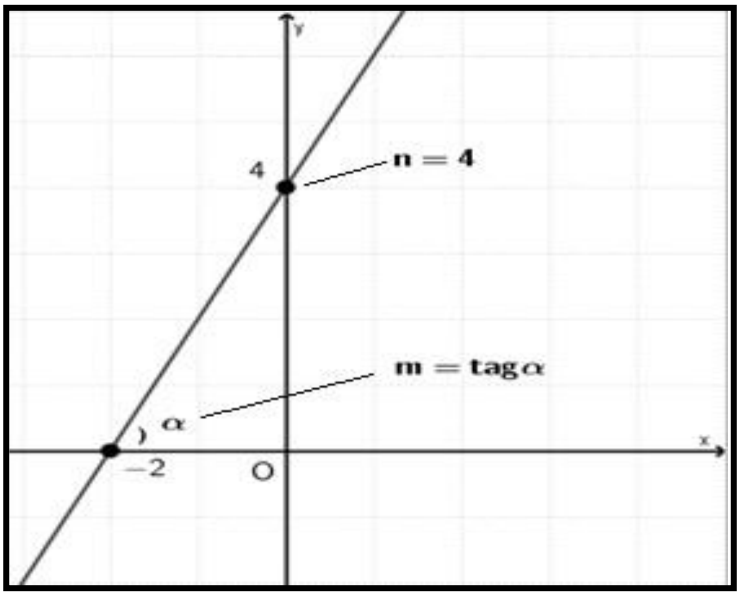
Como tratamos de uma Função Afim, para a construção do gráfico precisaria apenas dois pontos distintos para determinar a reta. Os pontos por vezes interessantes para a obtenção do gráfico correspondem aos interceptos dos eixos, ou seja, quando $x = 0$ ocorrerá o intercepto da reta com o eixo y, e quando $y = 0$ ocorrerá o intercepto da reta com o eixo x.

Na figura 3.2 a equação reduzida da reta r definida por $y = 2x + 4$, temos: $m = 2$ (coeficiente angular) e $n = 4$ (coeficiente linear).

O gráfico de r pode ser construído tomando-se dois de seus pontos distintos; por exemplo, a partir dos pontos de intersecção de r com os eixos coordenados.

Substituindo x por 0 na equação da reta, obtemos y=4, e substituindo y por 0, obtemos $x = -2$. Logo, dois pontos da reta são $(0,4)$ e $(-2,0)$.

Figura 3.2 – Equação reduzida da reta $y = 2x + 4$



Fonte: O autor.

Analisemos na figura 3.2 as interpretações geométricas do coeficiente angular e coeficiente linear da reta r. Como o tema deste trabalho geralmente exigirá a análise gráfica de mais de uma dessas equações, abordaremos então um assunto, também visto pelos alunos no Ensino Médio, que são os Sistemas de Equações Lineares, que é de fundamental importância para fazer a análise gráfica e consequentemente, encontrar as soluções dos problemas propostos nesta dissertação.

3.4 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Ao modelar certas situações, usamos conjuntos que são formados por equações lineares, esses conjuntos são chamados de sistema de equações lineares. Veremos adiante que as restrições de um problema de Programação Linear podem ser escritas como um sistema de desigualdades lineares, e que um sistema de desigualdades lineares pode ser escrito como um sistema de equações lineares a partir da adição de uma constante em cada uma de suas equações.

Estudam-se as equações do 1º grau no Ensino Fundamental e são equações em que aparece uma variável, geralmente representada pela letra x. Conforme a natureza do problema que queremos modelar, a equação pode ter mais de uma variável.

Quando temos equações em que na sua expressão aprece adições de termos que são constantes ou o produto de uma constante por uma variável de primeiro grau, damos o nome de equação linear.

Definição 3.1 - Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ e b números reais. Chama-se de **equação linear** toda equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Onde:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as variáveis ou incógnitas. Os números reais a_1, a_2, a_3, …, a_n são os coeficientes e b é o termo independente. As incógnitas x_1, x_2, x_3, … geralmente aparecem como x, y, z,...

Como o primeiro membro de uma equação linear é a soma de produtos, podemos representa-la usando o símbolo de somatório, da seguinte forma:

$$\sum_{i=1} a_i x_i = b$$

Por exemplo, as equações $-3x+2y-z=1$ e $2x-3y=0$ são equações lineares. Pois, em cada parcela do primeiro membro da equação temos um número real multiplicando uma variável de primeiro grau.

A equação linear $2x - 3y = 0$ é chamada de homogênea porque o termo independente é igual a zero. Então, toda equação linear da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0$ é chamada de equação linear homogênea.

As equações $xy = 1$ e $x2 + 3y - z = 0$ não são equações lineares porque na primeira tem-se um produto de variáveis e na segunda a variável x encontra-se elevada ao quadrado.

Considere a equação linear $2x - 3y = 5$. Observe que o par ordenado $(1, -1)$ satisfaz a equação. De fato, $2.(1) - 3.(-1) = 5$. Já o par ordenado $(-1,1)$ não satisfaz a equação porque $2.(-1) - 3.(1) = -5 \neq 5$.

Assim, o par ordenado (1, -1) é uma solução da equação linear $2x - 3y = 5$ e o par ordenado $(-1,1)$ não é uma solução da equação. Vamos, então, definir o que é uma solução de uma equação linear.

Definição 3.2 - O conjunto de números reais, também chamada de n-upla, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ é uma solução da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$, se, somente se, $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n = b$.

Observe que o par $(1, -1)$ é uma solução da equação linear $2x - 3y = 5$ como vimos acima. Mas, essa solução não é única. Note que todo par ordenado da forma $\left(x, \frac{2x-5}{3}\right)$ com $x \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação. Assim, como $\mathbb{R}$ tem infinitos 3 elementos, então teremos uma infinidade de pares ordenados que são soluções da equação.

A *n*-upla (0,0, … ,0) é sempre solução da equação linear homogênea $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0$. Essa solução é chamada de solução nula ou solução trivial. Se houverem outras soluções, diferentes de (0,0,…,0), de uma equação linear homogênea estas serão chamadas de soluções não triviais.

Para modelar alguns problemas usamos conjuntos que são formados por equações lineares. Esses conjuntos recebem o nome de sistema de equações lineares.

Definição 3.3 - Segundo Passos (2009) um sistema de equações lineares de m equações e n incógnitas, com $m \geq 1$ e $n \geq 1$, é um conjunto de equações simultâneas na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad + \vdots \quad + \vdots \quad + \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas;
- a_{ij} são os coeficientes das incógnitas, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$;
- b_i são os termos independentes das equações, com $1 \leq i \leq m$.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 3.1 - José e Maria, que moram em uma comunidade ribeirinha na Ilha de Santana, resolveram aproveitar uma promoção que estava acontecendo na feira. José gastou R$ 100,00 comprando 1 kg de camarão e 4 latas de açaí. Já Maria, comprou 2 kg de camarão e 3 latas de açaí, gastando ao todo R$ 90,00.

Para resolver esse problema, podemos montar um sistema de duas equações com duas variáveis. Sendo x o preço do kg do camarão e y o preço da lata de açaí, temos:

$$\begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$$

As equações que formam esse sistema são do 1º grau, por isso o sistema é linear. Como há duas equações e duas incógnitas, dizemos que esse é um sistema linear dois por dois $(2x2)$.

Diz-se que o sistema linear pode ter uma única solução, uma infinidade de soluções ou nenhuma solução. Por definição, afirma-se que, no primeiro caso, o sistema é determinado; no segundo, o sistema é indeterminado; e no terceiro, é impossível (LIMA, 2007). Como o intuito neste trabalho é mostrar as soluções ótimas de problemas de programação linear, trabalharemos com sistemas possíveis e determinados.

3.5 SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR 2X2

Resolver um sistema linear significa obter o conjunto S, chamado de conjunto solução do sistema, cujos elementos são todas as soluções do sistema. Entre os métodos existentes para a resolução de um sistema linear, tem-se o método da adição, substituição, comparação, escalonamento e outros. Considerando o exemplo acima, para resolver o sistema pelo método da adição, devemos adicionar as duas equações de modo a obter uma equação final com apenas uma incógnita.

Para eliminarmos a incógnita x, vamos multiplicar os dois membros da 1ª equação por -2, o que não altera a igualdade:

$$\begin{cases} -2(x+4y) = 100(-2) \\ 2x+3y = 90 \end{cases}$$

$$\oplus \begin{cases} -2x-8y = -200 \\ \underline{2x+3y = 90} \end{cases}$$ (adicionando as igualdades termo a termo)

$$-5y = -110 \Rightarrow \boxed{y = 22}$$

Substituindo y por 22 em x + 4y = 100, obtemos:

$$x + 4.\ 22 = 100$$

$x + 88 = 100 \Rightarrow \boxed{x = 12}$, portanto $S = \{(12,22)\}$

Para resolver esse sistema, usamos duas propriedades das igualdades.

Multiplicando-se os dois membros de uma igualdade por um mesmo número real, a igualdade se mantem.

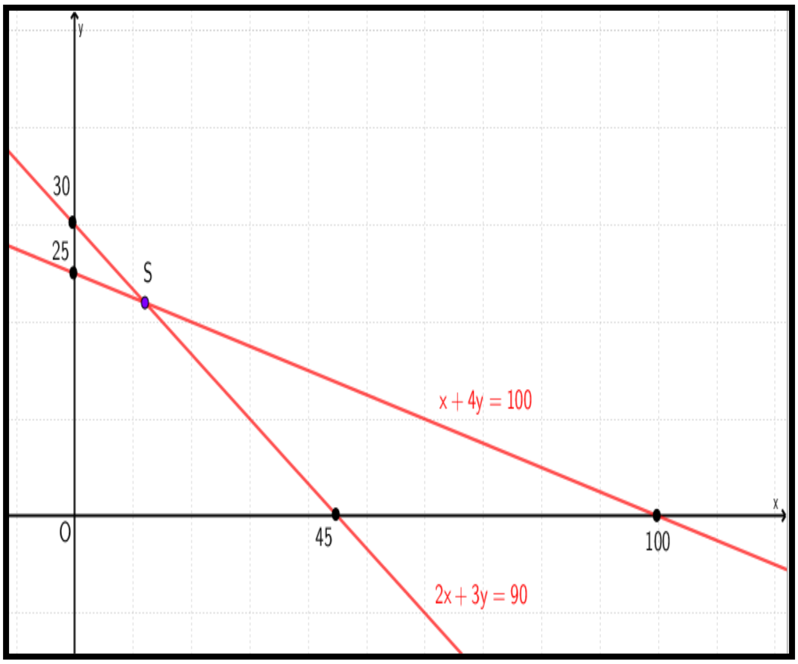
$$a = b \text{ e } c \in \mathbb{R} \Rightarrow a\ .\ c = b\ .\ c$$

Somando-se duas igualdades, termo a termo, obtém-se uma nova igualdade.

$$a = b \text{ e } c = d \Rightarrow a + c = b + d$$

Outra forma de resolvermos um sistema é por meio de uma representação gráfica conforme indicada na figura 3.3. Nesse caso, resolver o sistema significa encontrar os pontos comuns às duas retas que representam as equações do sistema.

Figura 3.3 - Resolução gráfica.



Fonte: O autor.

A partir dos gráficos, podemos achar valores aproximados de x e de y que são coordenadas do ponto S e solução do sistema. Assim, temos $x \cong 10\ e\ y \cong 20$. De fato, já vimos que a solução é $x = 12\ e\ y = 22$.

Para a construção e interpretação gráfica nos problemas de Programação Linear trabalharemos com os pontos que por vezes são fáceis de encontrar, correspondem as interseções dos eixos, ou seja, quando $x = 0$ ocorrerá a interseção da reta com o eixo y, e quando $y = 0$ ocorrerá a interseção da reta com o eixo x.

Levando em consideração o estudo de retas, isto é, das equações lineares, é possível apresentar aos alunos uma forma gráfica de dar soluções de inequações lineares, onde algumas literaturas do Ensino Médio trazem este assunto.

Lins (2006) propõe a resolução gráfica de inequações, após abordar todos os conteúdos inerentes às retas no Ensino Médio e então amplia este conceito, mostrando que toda reta divide o plano em dois semiplanos, e que cada um desses semiplanos pode ser representado por uma inequação polinomial do 1º grau, com uma ou duas incógnitas. Esse assunto é de suma importância no estudo da Programação Linear, pois é por meio dele que serão construídas as regiões poligonais viáveis e consequentemente encontrar a solução do problema.

3.6 INEQUAÇÕES LINEARES

Definição 3.4 - Uma inequação linear é toda sentença matemática da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n \leq b,$$

com $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sendo as incógnitas, e $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ e b sendo as constantes com $a_i \neq 0$ para pelo menos um $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Nesta seção abordaremos apenas as inequações lineares com uma ou duas incógnitas, de modo que as representações gráficas também serão apresentadas apenas no $\mathbb{R}^2$, ou seja, em planos bidimensionais.

As inequações do primeiro grau com incógnita x são redutíveis a uma das seguintes formas:

$$ax < b\text{: } ax \text{ menor que } b$$

$$ax \leq b\text{: } ax \text{ menor ou igual a } b$$

$$ax > b\text{: } ax \text{ maior que } b$$

$$ax \geq b\text{: } ax \text{ maior ou igual a } b$$

onde a e b são números reais quaisquer com $a \neq 0$. A resolução é feita de maneira análoga as equações do 1º grau, porém deve-se lembrar de que quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros da inequação por um número negativo, o sentido da desigualdade se inverte (MORETTIN; HAZZAN; BUSSAB, 2010).

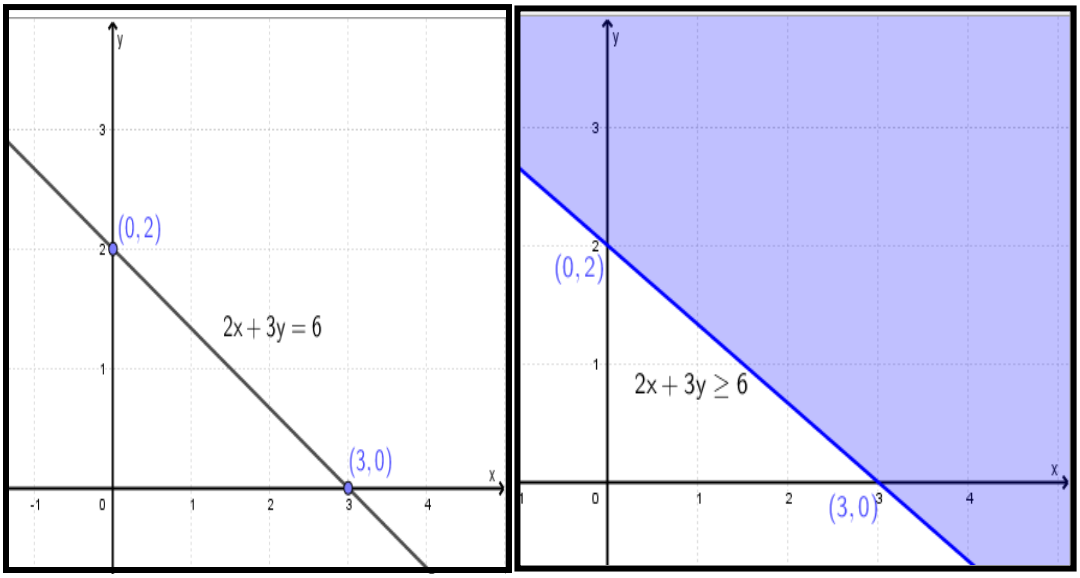
3.7 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA INEQUAÇÃO DE 1° GRAU

Uma das formas de representação das inequações se dá por meio da sua representação gráfica; para isso, assume-se a seguinte inequação: $ax + by \geq k$.

Primeiro passo é considerar apenas a igualdade ($ax + by = k$), conforme visto anteriormente, faz-se necessário apenas a obtenção de dois pontos. De maneira a facilitar, será obtido o intercepto dos eixos x e y. O próximo passo é determinar qual dos semiplanos formados pela reta satisfaz a inequações, para isso se escolheu um ponto qualquer pertencente a um dos semiplanos e verificou-se, se para este ponto, a inequação é verdadeira; caso verdadeiro, este semiplano deverá ser assinalado e, caso contrário, o outro semiplano que satisfaz a inequação.

Objetivando a melhor compressão, considere-se a seguinte inequação: $2x + 3y \geq 6$, obtendo dois pontos da equação, considerando-a como igualdade, temos: (0,2) e (3,0) como pares ordenados da equação, com os pares em mão elabora-se a reta conforme a figura 3.4.

Figura 3.4 - Representação Gráfica da Inequação $2x + 3y \geq 6$.



Fonte: O autor.

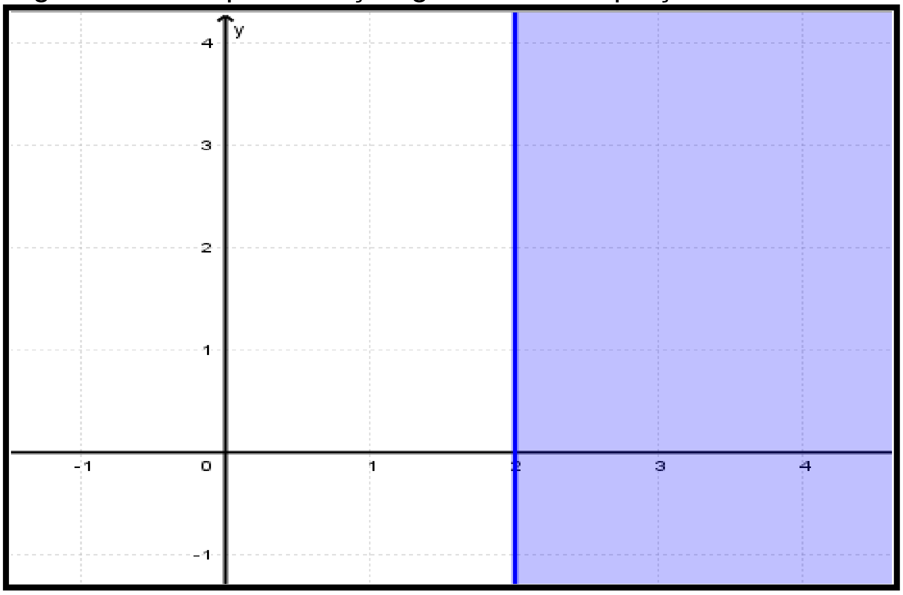
Com o auxílio do software Geogebra, vejamos como os semiplanos são determinados pelas retas. Apresentaremos outros exemplos para ilustrar.

Exemplo 3.2 - A equação $x - 2 = 0$ representa uma reta paralela ao eixo das ordenadas, que divide o plano em dois semiplanos.

Todos os pontos na parte demarcada possuem abscissa maiores ou iguais a 2 e estão em um mesmo semiplano. Logo $x \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0$ representa estes pontos.

Os pontos que não pertencem à parte demarcada pertencem ao segundo semipleno e possuem abscissa menores ou iguais a 2. Estes pontos podem ser representados pela inequação $x \leq 2 \Leftrightarrow x - 2 \leq 0$. (ver Figura 3.5)

Figura 3.5 – Representação gráfica da inequação $x - 2 \geq 0$

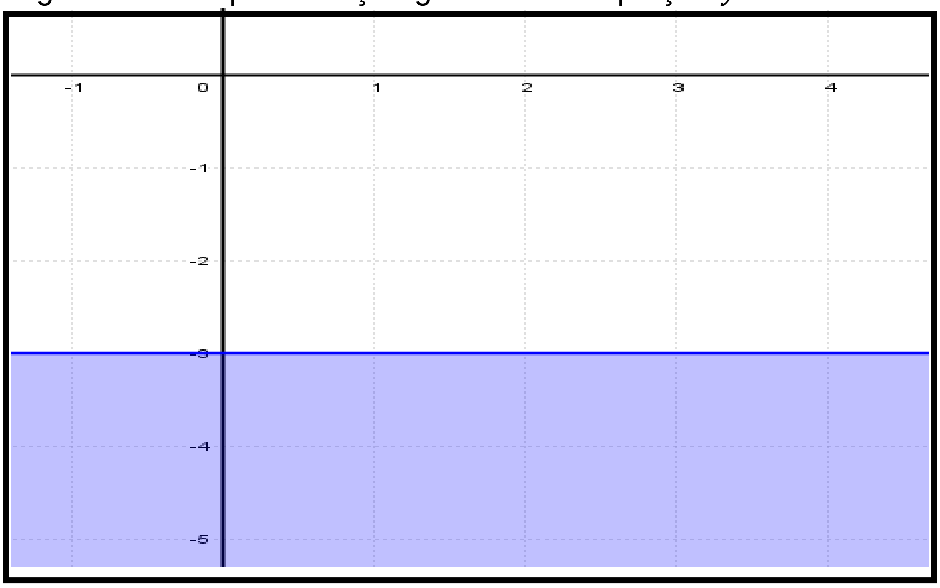


Fonte: O autor.

Todos os pontos na parte demarcada possuem ordenadas menores ou iguais a -3 e estão em um mesmo semiplano. Logo, $y \leq -3 \Leftrightarrow y + 3 \leq 0$ representa estes pontos.

Os pontos que não pertencem à parte demarcada pertencem ao segundo semiplano e possuem ordenadas maiores ou iguais a -3. Estes pontos podem ser representados pela inequação $y \geq -3 \Leftrightarrow y + 3 \geq 0$, conforme a figura 3.6.

Figura 3.6 – Representação gráfica da inequação $y + 3 \leq 0$



Fonte: O autor.

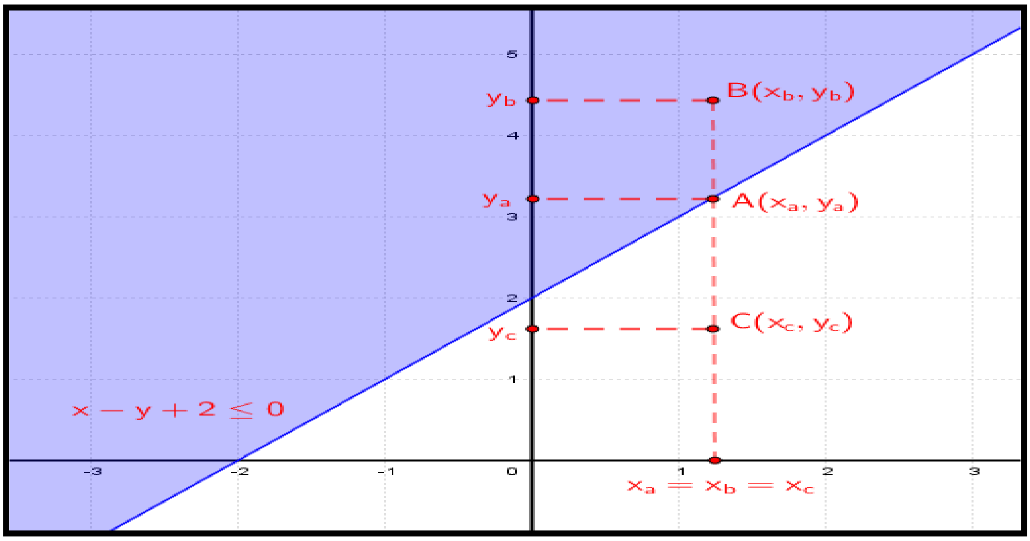
Exemplo 3.3 - A equação $y + 3 = 0$ representa uma reta paralela ao eixo das abscissas, que divide o plano em dois semiplanos.

Nos exemplos mostramos a representação gráfica de inequações com apenas uma incógnita. Como são inequações lineares, as fronteiras dos semiplanos são determinadas por retas, que podem ser escritas como $x + 0y - 2 = 0$ no caso do Exemplo 2.2 e como $0x + y + 3 = 0$ no caso do Exemplo 2.3.

Agora vamos analisar casos nos quais as retas não são paralelas a um dos eixos coordenados.

Exemplo 3.4 - Observemos que a equação r: $x - y + 2 = 0$ é uma reta que divide o plano $\mathbb{R}^2$ em dois semiplanos, conforme mostra a Figura 3.7

Figura 3.7 – Representação gráfica da reta $x - y + 2 = 0$



Fonte: O autor.

Sendo o ponto A (x_a, y_a), um ponto qualquer sobre a reta r, o ponto B (x_b, y_b), situado acima da reta r e o ponto C (x_c, y_c), com $x_a = x_b = x_c$, $y_a < y_b$ e $y_a > y_c$, temos que:

$$x_a - y_a + 2 = 0 \Rightarrow y_a = x_a + 2$$

Como $y_b > y_a$, temos:

$$y_b > x_a + 2 \Rightarrow y_b > x_b + 2 \Rightarrow yb\text{-}\, xb\text{-}2>0$$

Assim podemos afirmar que todo ponto que satisfaz a inequação $-y-x-2>0$ está situado no semiplano acima da reta r.

Como $y_c < y_a$ temos:

$$y_c < x_a + 2 \Rightarrow y_c < x_c + 2 \Rightarrow y_c - x_c - 2<0$$

Com a demonstração acima, verificamos que uma forma prática de determinar a inequação que representa um semiplano determinado por uma reta é escolher um ponto e substituir este ponto na equação. Ainda neste capitulo veremos que os problemas de programação linear geralmente formam regiões convexas, estamos levando em consideração o plano $\mathbb{R}^2$, essas regiões poligonais são formadas pelos sistemas de inequações (restrições do problema) e são de grande importância para encontrarmos o ponto ótimo, ou seja, para obtermos a solução do problema.

3.8 CONJUNTOS CONVEXOS

Nesta seção abordaremos alguns conceitos sobre conjuntos convexos, destacados por Zachi (2016), em sua dissertação. Tais conceitos são importantes, pois o conjunto dos pontos viáveis para um Problema de Programação Linear (PPL) é um conjunto convexo cujos vértices correspondem às soluções.

Definição 3.5 - Seja um conjunto de pontos $x_i \in X$. Diz-se que X é uma combinação linear convexa dos pontos $x_i, se\ X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, em que λ_i são os coeficientes escalares que terão que assumir os seguintes valores:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_i \leq 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases}$$

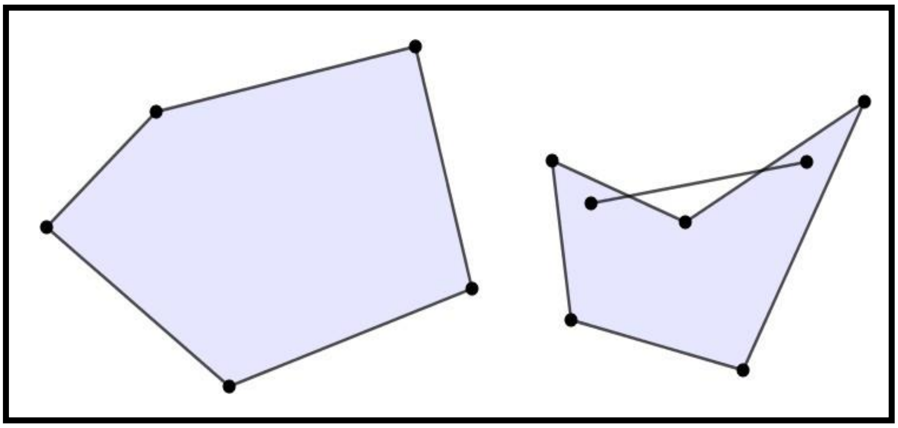
Ou seja, dois pontos definem um segmento de reta e uma combinação linear convexa, que é igual ao segmento que os une.

Região Convexa é toda região que para quaisquer dois pontos pertencentes a essa região, ao traçarmos uma reta passando pelos mesmos, esta estará totalmente contida na região, caso contrário, recebe o nome de Não Convexa ou Côncava.

Definição 3.6 - Um conjunto K é convexo quando todos os segmentos de reta que unem dois pontos quaisquer de K estão contidos em K. Um conjunto é fechado se ele compreende a sua fronteira.

Podemos compreender melhor tal definição, por meio da representação gráfica, na Figura 3.8

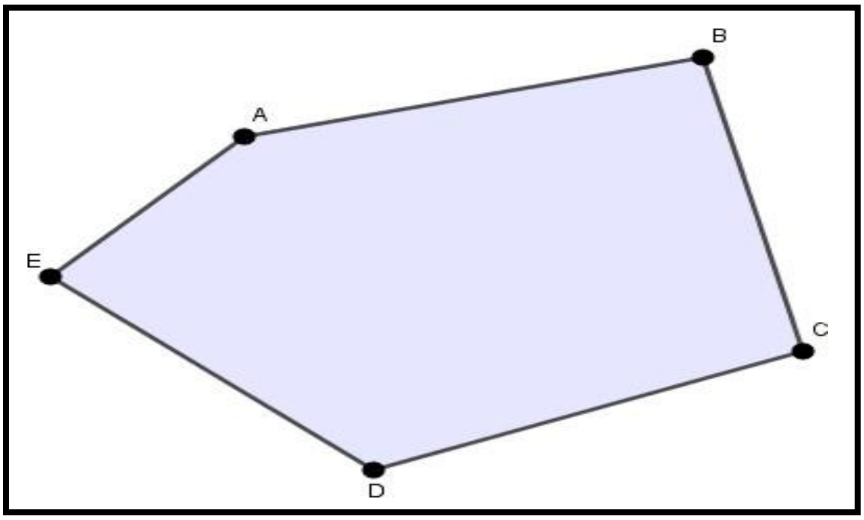
Figura 3.8 - Região de um Polígono Convexo.



Fonte: O autor.

Definição 3.7 - Um vértice é um ponto pertencente a um conjunto convexo que não pode ser obtido por meio de combinação convexa dos outros pontos do conjunto. Podemos dizer que um vértice é um ponto extremo de um conjunto convexo. Vejamos melhor na Figura 3.9

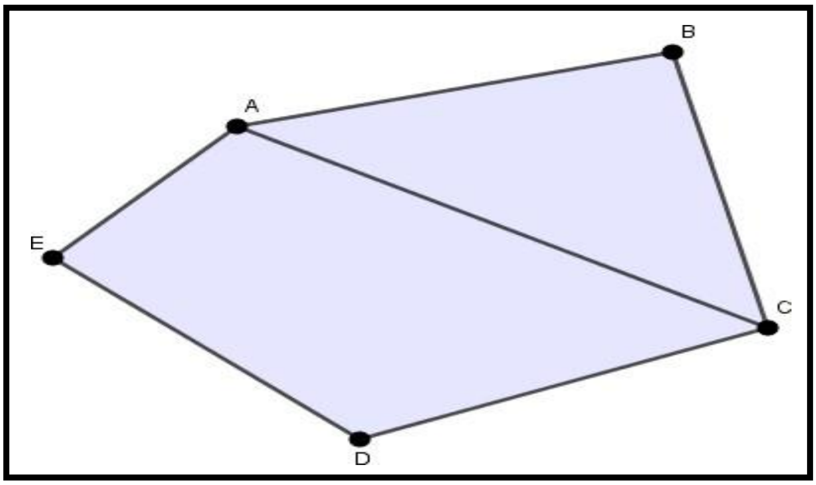
Figura 3.9 - Vértices de um Polígono.



Fonte: O autor.

Definição 3.8 - A combinação convexa de dois vértices A e B é considerada uma aresta se nenhum ponto de AB puder ser obtido pela combinação convexa de pontos não pertencentes a AB conforme indica a Figura 3.10

Figura 3.10 – Aresta de um Polígono



Fonte: O autor.

Definição 3.9 - Região Convexa é toda região que para quaisquer dois pontos pertencentes a essa região, ao traçarmos uma reta passando pelos mesmos, esta estará totalmente contida na região, caso contrário, recebe o nome de Não Convexa ou Côncava.

Levando em consideração os assuntos abordados neste capítulo, conteúdos estes, abordados com os alunos ao longo do ensino fundamental e médio, percebe-se que os Problemas de Programação Linear em 2D necessitam desses conhecimentos prévios, portanto a seguir abordaremos alguns conceitos e propriedades importantes da Programação Linear.

3.9 DEFINIÇÕES E TEOREMAS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Agora vamos dedicar atenção ao estudo das definições e teoremas fundamentais da programação linear, que serviram de embasamentos para resolução de PPL e que podem ser aplicadas tanto no plano bidimensional quanto no plano tridimensional. Como as demonstrações dos teoremas que embasam essa foge ao objetivo do trabalho, serão apresentados apenas seus enunciados.

Definição 3.10 Programação Linear - Definimos um Problema de Programação Linear (PPL) como um problema cuja função objetivo e todas as restrições correspondem a equações ou inequações lineares, sendo que o objetivo desses problemas é encontrar uma solução ótima (melhor), existentes num planejamento de atividades.

$$\mathrm{z} = \min \text{ ou } \max \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) = \mathrm{c}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{c}_\mathrm{n}\mathrm{x}_\mathrm{n}$$

Sujeito à

$$\begin{array}{c} \mathrm{a}_{11}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{12}\mathrm{x}_2 + \mathrm{a}_{13}\mathrm{x}_3 + \cdots + \mathrm{a}_{1\mathrm{n}}\mathrm{x}_\mathrm{n} \leq \text{ou} \geq \text{ou} = \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{a}_{21}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{22}\mathrm{x}_2 + \mathrm{a}_{23}\mathrm{x}_3 + \cdots + \mathrm{a}_{2\mathrm{n}}\mathrm{x}_\mathrm{n} \leq \text{ou} \geq \text{ou} = \mathrm{b}_2 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \; + \quad + \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{\mathrm{m}2}\mathrm{x}_2 + \mathrm{a}_{\mathrm{m}3}\mathrm{x}_3 + \cdots + \mathrm{a}_{\mathrm{mn}}\mathrm{x}_\mathrm{n} \leq \text{ou} \geq \text{ou} = \mathrm{b}_\mathrm{m} \\ \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n} \geq 0 \end{array}$$

$\mathrm{x}_\mathrm{j} \geq 0$ é a variável a ser designada ou produzida;

c_j é o coeficiente de lucro (ou de custo) para a variável x_j;

z é a Função Objetivo a ser maximizada;

a_{ij} é o coeficiente da variável x_j na injunção i;

b_i é o valor limite da restrição i;

$j = 1,2, \dots, n$ é o número de variáveis; e $i = 1,2, \dots, m$ é o número de injunções impostas.

Logo, podemos descrever um problema de otimização linear pelas seguintes características:

- A função objetivo deve ser minimizada (ou maximizada);
- As restrições do problema são definidas por um sistema de equações lineares;
- As variáveis possuem a restrição de serem não negativas.

Definição 3.11 Solução viável ou factível - é o conjunto de valores das variáveis $x = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ que atendem a todas as restrições do problema, inclusive as de não negatividade.

Definição 3.12 Solução Ótima - é a solução factível que apresente o melhor valor da função objetivo do problema, ou seja, uma solução viável $\bar{x} = \{\overline{\mathrm{x}_1}, \overline{\mathrm{x}_2}, \overline{\mathrm{x}_3}, \dots, \overline{\mathrm{x}_\mathrm{n}}\}$ de um problema de maximização, é chamada de solução ótima se $f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \dots, \overline{x_n}) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, para qualquer solução viável $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definição 3.13 Variáveis de decisão - são as incógnitas, ou valores desconhecidos, que serão determinados pela solução do modelo. As variáveis de decisão devem assumir valores não negativos.

Definição 3.14 Função objetivo - é uma função matemática que determina o valor-alvo que se pretende alcançar ou a qualidade da solução, em função das variáveis de decisão e dos parâmetros, podendo ser uma função de maximização ou de minimização.

Definição 3.15 Restrições - podem ser definidas como um conjunto de equações e inequações que as variáveis de decisão do modelo devem satisfazer. As restrições são adicionadas ao modelo de forma a considerar as limitações físicas do sistema, e afetam diretamente os valores das variáveis de decisão.

Definição 3.16 Região Viável - de um PPL é uma região determinada pelas interseções dos semiplanos definidos pelas restrições, ou seja, é o conjunto de soluções viáveis do PPL. Uma Região Viável é dita Limitada se puder ser englobada num círculo suficientemente grande, caso isso não ocorra, dizemos que ela é ilimitada. Podemos interpretar uma região viável como sendo interior e os lados de um poliedro convexo em $\mathbb{R}^n$, determinado pelas restrições do problema. Chamaremos de pontos extremos os vértices desse poliedro.

Definição 3.17 Pontos Extremos- são os pontos determinados pelas interseções das retas que limitam os semiplanos determinadas pelas restrições do problema.

Teorema I - Se a região viável de um Problema de Programação Linear é não vazia e limitada, então a função-objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável é ilimitada, então a função-objetivo pode ou não atingir valores máximo ou mínimo; contudo, se atingir um máximo ou um mínimo, este ocorrerá em pontos extremos. Resolver problemas de Otimização Linear é buscar dentro das soluções factíveis a melhor solução viável, que segundo o teorema acima se encontra em um dos vértices dessa região.

Teorema II - O conjunto de todas as soluções viáveis de um modelo de Programação Linear é um conjunto convexo. O uso deste recurso tecnológico, o software Geogebra, para trabalhar com a análise gráfica dos Problemas de Programação Linear surge como uma tentativa para melhorar as aulas. Portanto, a ideia de trabalhar utilizando o Geogebra envolvendo os conteúdos abordados acima, tem a finalidade de expor melhor estes conceitos.

4 O GEOGEBRA NA PROGRAMAÇÃO LINEAR

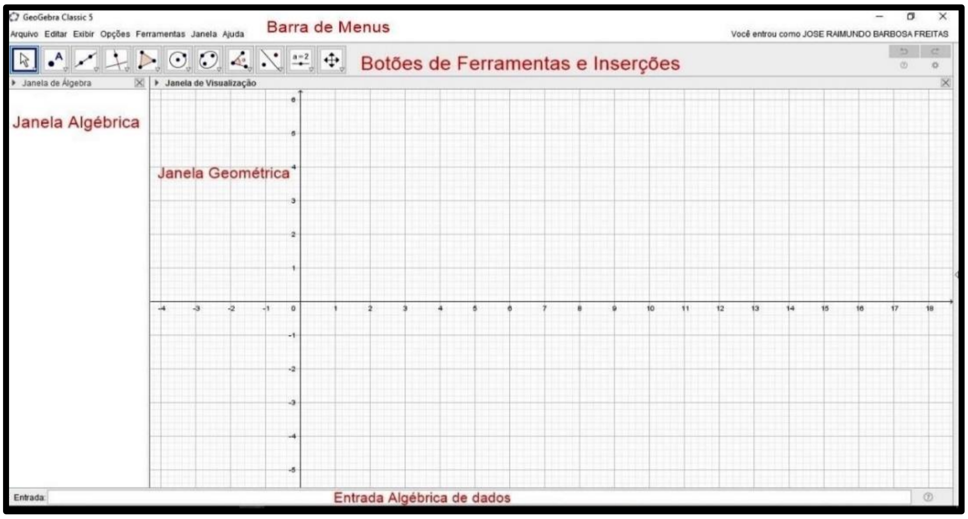
Em relação à resolução dos problemas de Programação Linear presentes neste trabalho utilizaremos o software Geogebra na versão 5.0, que alia em um só aplicativo janelas para trabalhar Geometria Plana, denominada janela (2D) pois apresenta uma interface fácil de usar, possibilitando assim a criação de materiais didáticos e uma melhor aprendizagem de conceitos e definições geométricas (HILLIER E LIBERMAN, 2006).

O uso deste recurso tecnológico, possibilita trabalhar com a análise gráfica dos Problemas de Programação Linear, surgindo como uma tentativa para melhoria as aulas voltadas a este conteúdo. Portanto, a ideia de trabalhar utilizando o Geogebra envolvendo os conteúdos abordados acima tem a finalidade de expor melhor estes conceitos.

4.1 USO DO GEOGEBRA 2D – APRESENTAÇÃO

O software apresenta conforme a figura 4.1, barra de menus, uma janela para os comandos algébricos, uma régua e papel digital denominados de janela geométrica ou zona geométrica, na parte superior existem os botões de ferramentas para inserção de pontos, retas, segmentos, parábolas entre outros e na parte inferior fica localizada a caixa para entrada algébrica de dados.

Figura 4.1 – Interface do Software Geogebra 2D



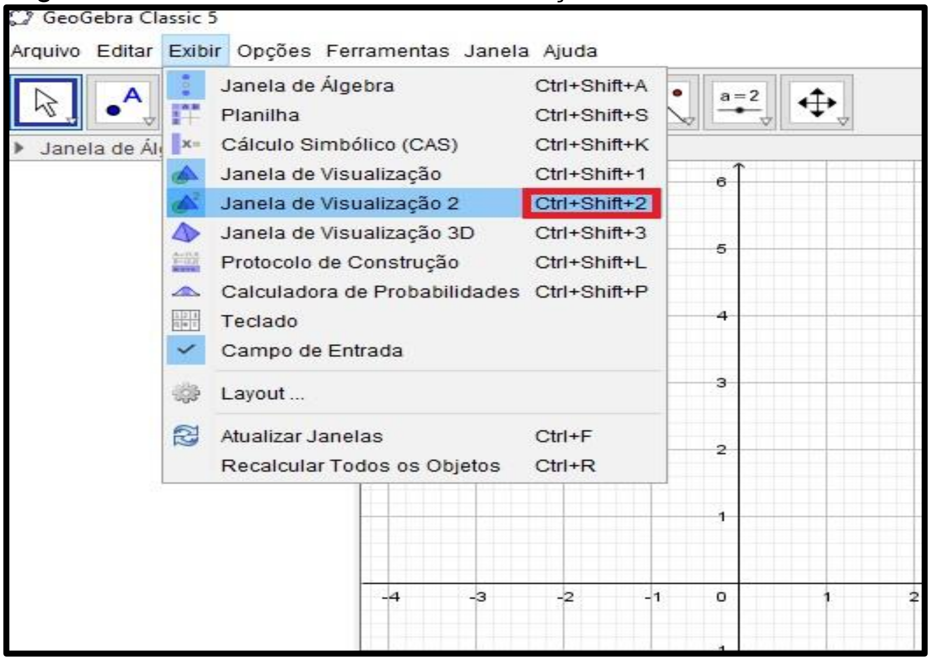
Fonte: O autor.

Pensando na real necessidade de compreendermos o funcionamento da janela de visualização 2D, para mais adiante verificar-se-á o uso do método gráfico nos PPL, vejamos o passo a passo seguir.

4.2 JANELA DE VISUALIZAÇÃO 2D

Para iniciar os estudos sobre a Janela de visualização 2D, vamos abordar como exibir esta janela, para isso clique no menu exibir, em seguida clique na janela de visualização 2D, podemos notar que tem um caminho ou atalho (CTRL+SHIFT+2) que também exibi a janela de visualização 2D, conforme analisa-se na Figura 4.2.

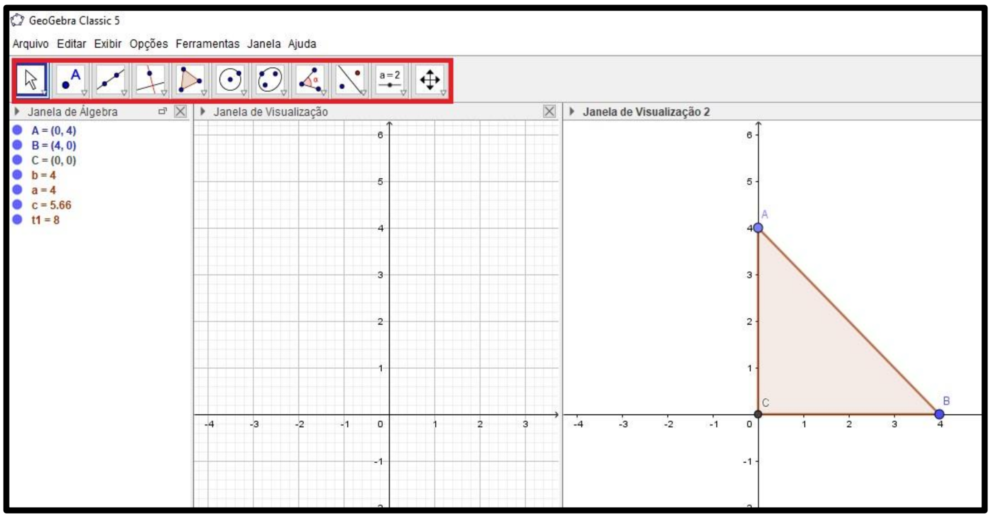
Figura 4.2 – Exibir Janela de Visualização 2D



Fonte: O autor

Em seguida, uma janela adicional no Geogebra abre-se com algumas características, cuja interface é composta por uma barra de menus, uma barra de ferramentas, a janela de álgebra, a janela de visualização, o campo de entrada de texto e um menu de comandos, também pode-se observar que a barra de menu sofreu certa alteração, ou seja, exibe ícones que não eram exibidos na janela de visualização, de acordo com a ilustração na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Janela de Visualização 2D



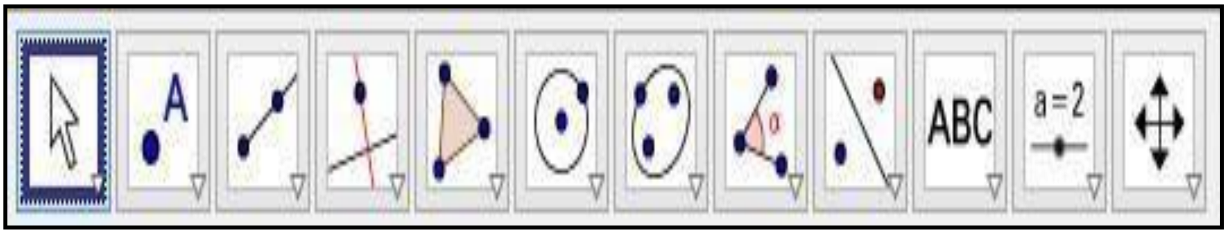
Fonte: O autor

4.3 BARRA DE FERRAMENTAS

É o local onde se encontram as ferramentas que auxiliam na construção dos objetos matemáticos, ela promove um elevado grau de autoinstrução e interação entre o usuário e o software, devido a fácil visualização das figuras e um simples manuseio de clicar e inserir na janela de gráfico.

Na figura 4.4 é possível observar que, o Geogebra possui onze conjuntos de ferramentas que podem ser utilizadas em diversas construções geométricas e manipulações algébricas.

Figura 4.4 – Barra de ferramentas



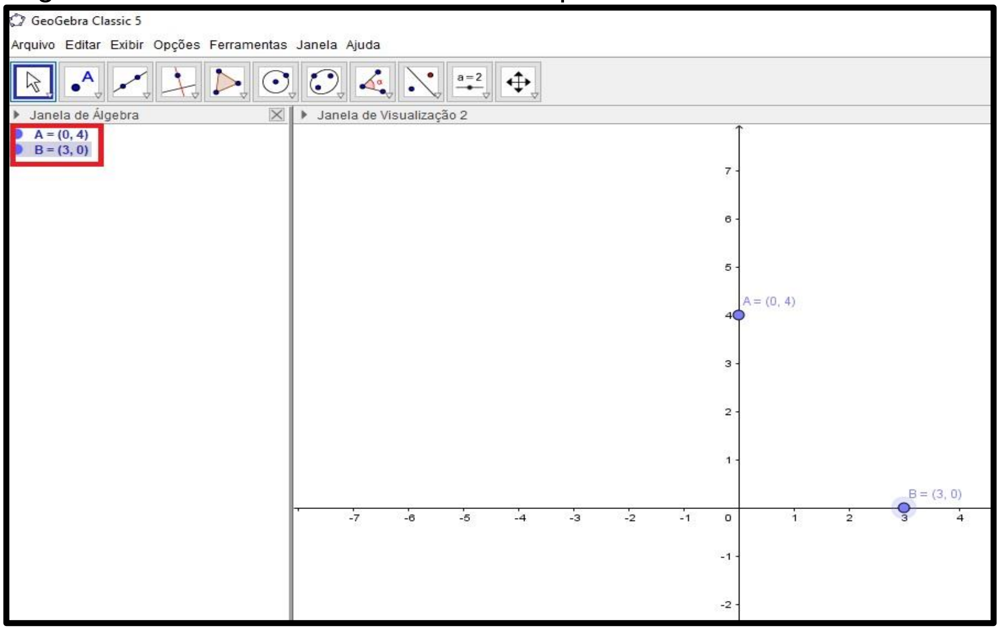
Fonte: O autor

Cada uma destas janelas possui várias ferramentas. Para visualizar estas ferramentas basta clicar sobre a seta no canto do ícone e então irão aparecer as opções referentes a estas janelas. A seguir serão exemplificados a aplicabilidade dos principais comandos e ferramentas que utilizados nesse trabalho.

4.3.1 Construção de um Ponto

Selecionando a ferramenta “Ponto”, clica-se em seguida sobre os eixos ortogonais, onde é possível construir dois pontos, A e B. Podemos observar que pelas coordenadas dos pontos na janela de álgebra, que estes encontram-se nos eixos y e x respectivamente, tendo em vista que A = (0,4), B = (3,0). Ver Figura 4.5.

Figura 4.5 – Pontos A e B em seus respectivos eixos



Fonte: O autor

4.3.2 Construção de uma reta

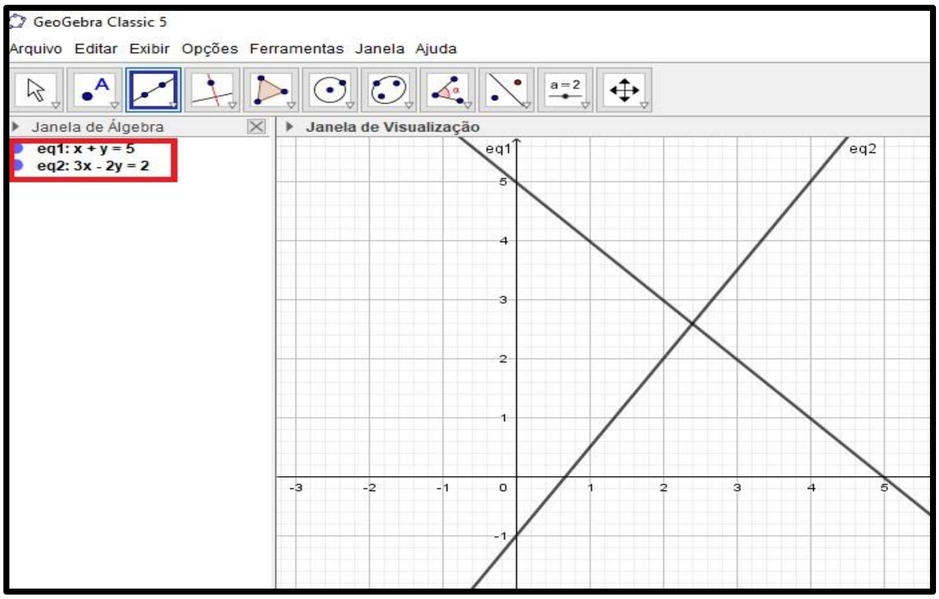
Nessa janela estão disponíveis os tipos de reta que poderão ser trabalhadas, como exemplos reta e semirreta.

Reta: depende de dois pontos, para isto, basta criar ou selecionar os dois pontos por onde a reta passará.

Semirreta: nesta opção permite criar uma semirreta a partir de dois pontos já estabelecidos ou não, ou seja, o primeiro indicará a origem da semirreta, enquanto o segundo funcionará como final do vetor direção da mesma.

Ao selecionar a ferramenta “Reta”, em seguida, deve-se inserir na Barra de entrada a equação da reta a qual será construída. Ver Figura 4.6.

Figura 4.6 – Construção da Reta.

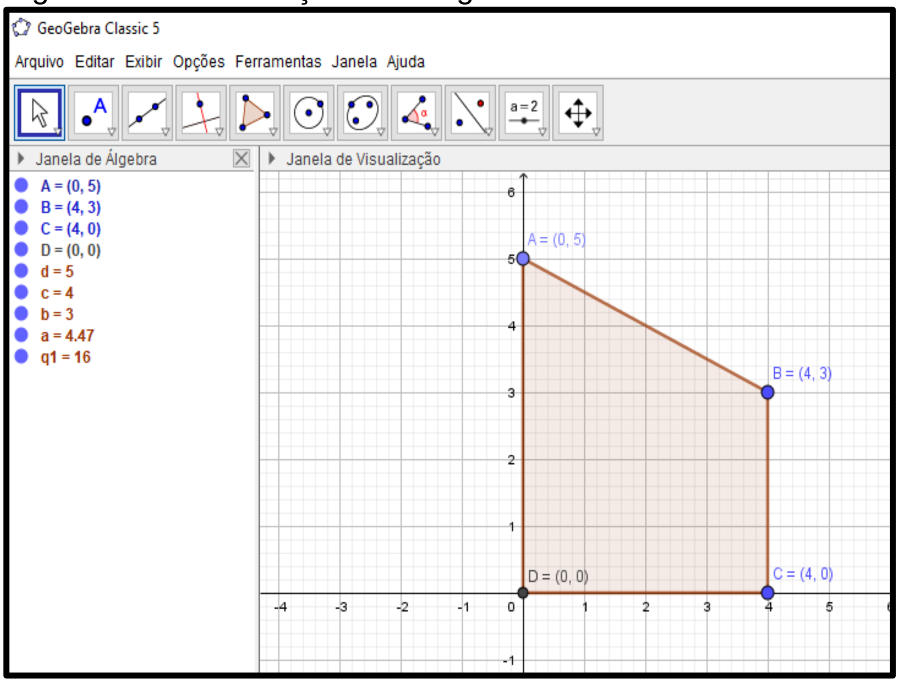


Fonte: O autor

4.3.3 Construção de um Polígono

Para construirmos um polígono passando pelos pontos (A, B, C e D), basta clicar no ícone “Polígono” e em seguida ligando esses pontos. Como pode-se observar na Figura 4.7.

Figura 4.7 – Construção do Polígono ABCD



Fonte: O autor.

5 APLICAÇÕES DA PL EM 2D UTILIZANDO O GEOGEBRA DIRECIONADO A TEMAS DA REGIÃO NORTE.

Nesta seção apresentar-se-á com o auxílio do Software Geogebra algumas aplicações da Programação Linear no Espaço Bidimensional, as quais os enunciados dos problemas são direcionados a temas da Região Norte, uma região a qual grande parte da população trabalha de forma autônoma e geralmente depara-se com situações envolvendo PPL.

Para resolução dos problemas usa-se o Método Gráfico, no qual o conceito envolvido é relativamente simples, o que torna possível a aplicação deste método junto aos alunos do Ensino Médio.

Por meio deste método será apresentado graficamente a região factível, ou seja, o conjunto de pontos que satisfazem as restrições do problema, como também, visualizar-se-á geometricamente os passos do processo de obtenção da solução ótima.

5.1 APLICAÇÃO DO MÉTODO GRÁFICO

O método gráfico por sua simplicidade torna a Programação Linear perfeitamente aplicável ao ensino de nível médio, pois o ferramental geométrico e algébrico utilizado, faz parte do rol de conteúdos concernentes a esse nível de ensino de Matemática, temos também que a solução gráfica é vista de maneira bem sistemática e didática.

> Didaticamente, dentro da Programação Linear, existe o método gráfico, que permite encontrar soluções viáveis a um certo problema utilizando duas ou três variáveis em um sistema de eixos ortogonais. A solução gráfica de um problema de PL pode ser feita em três passos: identificação da região viável, determinação das curvas de nível e identificação do ponto ótimo. (COLIN, 2013)

A aplicação desse método na Programação Linear é limitada a certos tipos de problemas elementares, como o número de variáveis envolvidas. Os enunciados retratam situações de aprendizagem concretas e reais na qual o aluno nortista do ensino médio está familiarizado, sendo também uma forma de tornar o tema abordado nesta dissertação mais atrativo e significativo.

De acordo com Polya (2006) o professor de Matemática deve instigar os alunos em operações cotidianas, estimulando-os a aprimorarem seus conhecimentos e capacidades relacionadas aos cálculos, uma vez aproximando a realidade as operações básicas, a fim de atinar as suas vontades para aprenderem mais e resolverem problemas simples aos complexos.

No contexto em que o aluno possui bastante acesso à informação, tornar a Matemática interessante e desafiadora não é uma missão fácil para o professor. Utilizar problemas estimulantes que desafiem sua curiosidade e sua capacidade de raciocínio pode ser uma forma de aumentar o interesse pela aprendizagem em Matemática.

Com base nessas afirmativas, são propostos alguns exemplos de aplicações da Programação Linear, para abordar em sala de aula, voltados a situações-problemas da Região Norte, envolvendo os conceitos e assuntos desenvolvidos no capitulo 3 desse trabalho. Será resolvido detalhadamente o primeiro problema, tendo em vista que os demais terão a mesma sequência didática, frisando que o uso do Software Geogebra é de fundamental importância no processo de resolução.

Problema 5.1- O Sr°João possui um estaleiro localizado no Rio Vila Nova/Mazagão e deseja estabelecer uma programação diária dos consertos de embarcações ribeirinhas. Consideremos os tipos como sendo: baixa e alta complexidade. Para manutenção das embarcações, será considerado que o estaleiro tem limitações em somente dois recursos: madeira e mão de obra, cujas disponibilidades diárias são mostradas na tabela 5.1.

Tabela 5.1- Disponibilidade diária de madeira e mão de obra

Recurso	***Disponibilidade***
Madeira	$20m^2$
Mão de obra	17 *horas*

Fonte: O autor

O processo de manutenção é tal que,

- para um conserto de alta complexidade, o estaleiro gasta $4m^2$ de madeira e 3 horas de mão de obra,
- para fazer um conserto de baixa complexidade o estaleiro gasta $2m^2$ de madeira e 2 horas de mão de obra.
- além disso, cada embarcação consertada de alta e baixa complexidade gera um lucro de R$50,00, e R$ 30,00, respectivamente.

O problema de João é encontrar o modelo de programação que maximiza a margem total para o lucro:

i. primeiramente, para construir um modelo de Programação Linear, temos de identificar o que se deseja conhecer no problema. A isto se dá o nome de variável de decisão, a qual no problema do estaleiro tem duas variáveis de decisão, que são:

   x: número de embarcações de alta complexidade consertadas.

   y: número de embarcações de baixa complexidade consertadas.

ii. segundo, precisamos identificar o objetivo que se deseja alcançar e formular uma função linear contendo as variáveis de decisão. Assim, neste problema, o objetivo é maximizar o lucro total obtido com os consertos dos dois tipos de embarcações.

Vejamos a seguir como encontrar tal função.

- temos que, cada embarcação consertada de alta complexidade, gera lucro de R$50,00, ao consertar x unidades, teremos lucro de 50x, e cada embarcação consertada de baixa complexidade gera um lucro de R$30,00, isto é, consertando z unidades, teremos um lucro de 30y,
- desta forma, a função de lucro total a qual queremos maximizar será uma função da forma:

$$(Max)\ Z = 50x + 30y\ (Função\ Objetivo)$$

Esta função é chamada de função objetivo sendo representada pela maioria dos autores como uma função de uma variável Z representando o sentido da otimização que, no nosso caso, é de maximização.

Evidentemente que o modelo de programação não se restringe a função objetivo, pois basta observar a quantidade dos recursos disponíveis. Com isso, também é necessário identificar todas as exigências, restrições e limitações estipuladas no problema e expressar matematicamente. Estas condições constituem as restrições do problema.

Vejamos a seguir como formular estas restrições:

- cada embarcação consertada de alta complexidade consome 4m² de madeira e cada embarcação de baixa complexidade consome 2m² de madeira. Logo,

$$4x + 2y\ (consumo\ de\ madeira)$$

Este consumo de madeira não pode ser maior do que o estaleiro tem disponível, ou seja, $20m^2$. Podemos escrever então:

$$4x + 2y \leq 20\ (1^a\ restrição)$$

- Denotando que, cada embarcação consertada de alta complexidade utiliza 3 horas de mão de obra e cada embarcação de baixa complexidade utiliza 2 horas de mão de obra. Logo,

$$3x + 2y\ (utilização\ da\ mão\ de\ obra)$$

Esta utilização de horas para mão de obra não pode ser maior do que o estaleiro tem disponível, ou seja, 17 horas. Podemos escrever então:

$$3x + 2y \leq 17\ (2^a\ restrinção)$$

- Temos então que para as restrições, a relação lógica existente é:

$$Utilização\ de\ recurso \leq disponibilidade\ do\ recurso$$

- Aparentemente formulamos todas as restrições. No entanto, existe um tipo de restrição não tão evidente. Como visto anteriormente, x, y representam as unidades de embarcações consertadas de baixa e alta complexidade, respectivamente. Ora não podemos consertar, por exemplo -10 unidades de embarcações, ou seja, x, y não podem ser negativos. Matematicamente temos:

$$x \geq 0 \; e \; y \geq 0$$

Pelas condições das variáveis de não negatividade, o conjunto de soluções factíveis (região factível) fica restrito ao primeiro quadrante. Podemos agora escrever todo o modelo de programação linear do problema:

$$Máx\ Z = 50x + 30y$$

$$\begin{cases} 4x + 2y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 17 \\ \quad\ x \geq 0 \\ \quad\ y \geq 0 \end{cases}$$

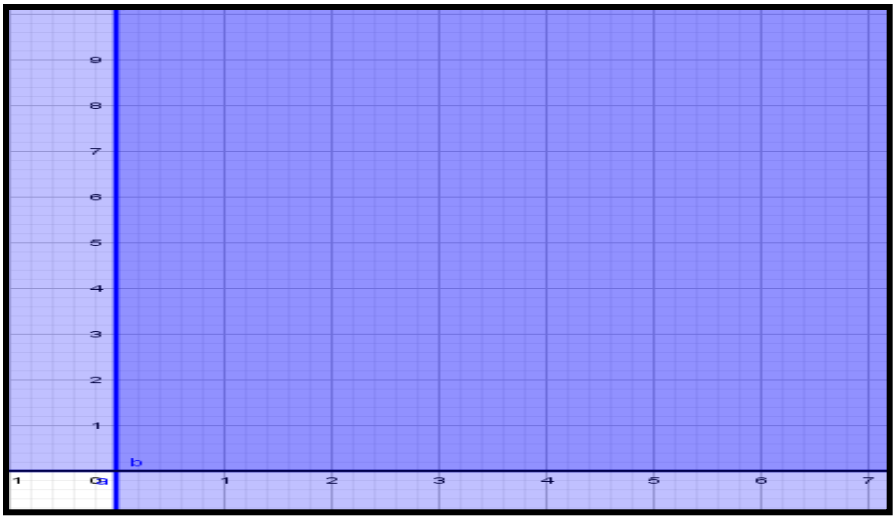
Encontrado o modelo de programação usaremos agora, com o auxílio do Geogebra, *o método gráfico* para resolução do problema. Sugerimos alguns passos a serem seguidos com os alunos em sala de aula podendo o professor acrescentar algumas explicações extras, se julgar necessário.

Passo 1: Consideremos inicialmente as restrições:

$$x \geq 0 \; e \; y \geq 0$$

Assim fica entendido que trabalharemos apenas no primeiro quadrante como visto anteriormente. conforme a Figura 5.1.

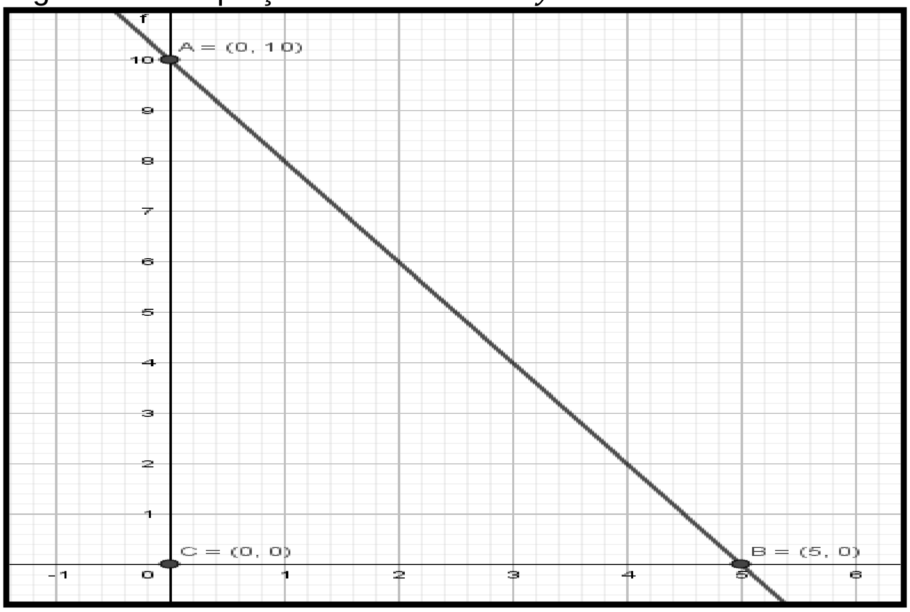
Figura 5.1 - Primeiro quadrante definido pelas inequações: $x \geq 0$ e $y \geq 0$



Fonte: Próprio autor.

Passo 2: consideremos a equação da reta $4x + 2y = 20$, na qual passa pelos pontos A $(0,10)$, B $(5,0)$. Representada graficamente na Figura 5.2.

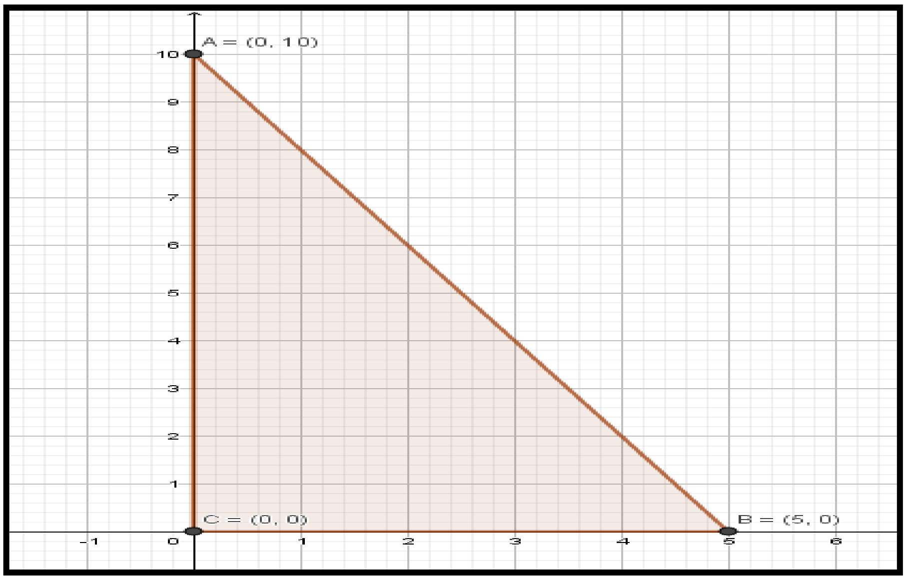
Figura 5.2 – Equação da reta $4x + 2y = 20$



Fonte: Próprio autor.

Passo 3: Após realizar a representação da 1ª restrição associada, necessitamos determinar qual das regiões (subplanos) definida pela reta que satisfaz a inequação $4x + 2y \leq 20$. Para isso, podemos escolher aleatoriamente qualquer ponto do $\mathbb{R}^2$, por exemplo, escolhemos o ponto C (0,0). Verificamos que 4. (0) + 2. (0) ≤ 20 (nos problemas propostos nesse trabalho, esse ponto sempre irá satisfazer as inequações associada). Logo, a região que satisfaz a desigualdade está localizada abaixo da reta, e é representada pelo polígono ABC, como mostra a Figura 5.3

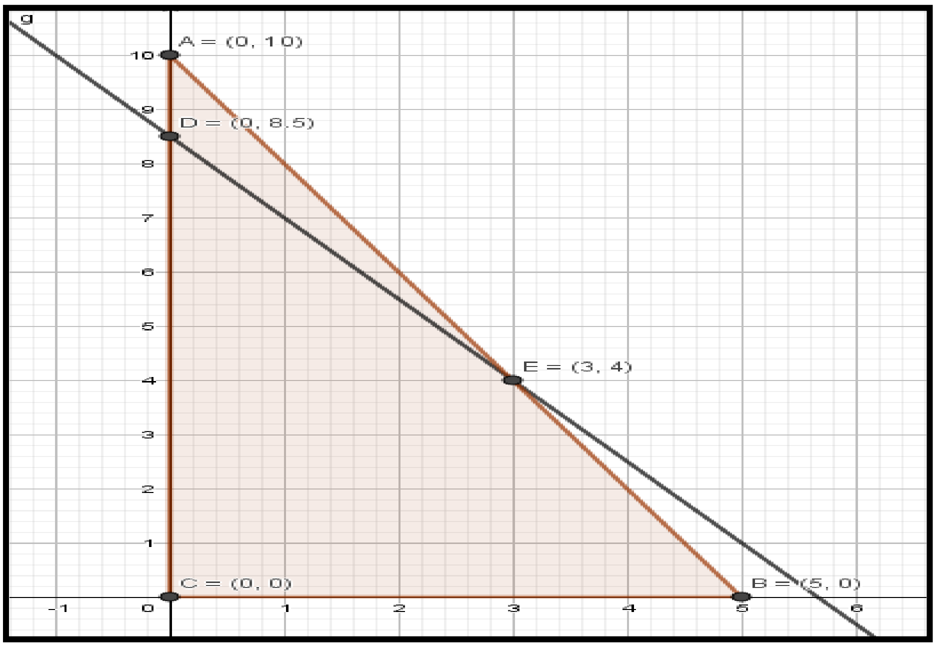
Figura 5.3 - Região que satisfaz a inequação $4x + 2y \leq 20$



Fonte: O autor.

Ao construirmos a reta representado pela equação $3x+2y=17$, percebemos que a mesma intersecta o polígono ABC nos pontos D e E, conforme Figura 5.4

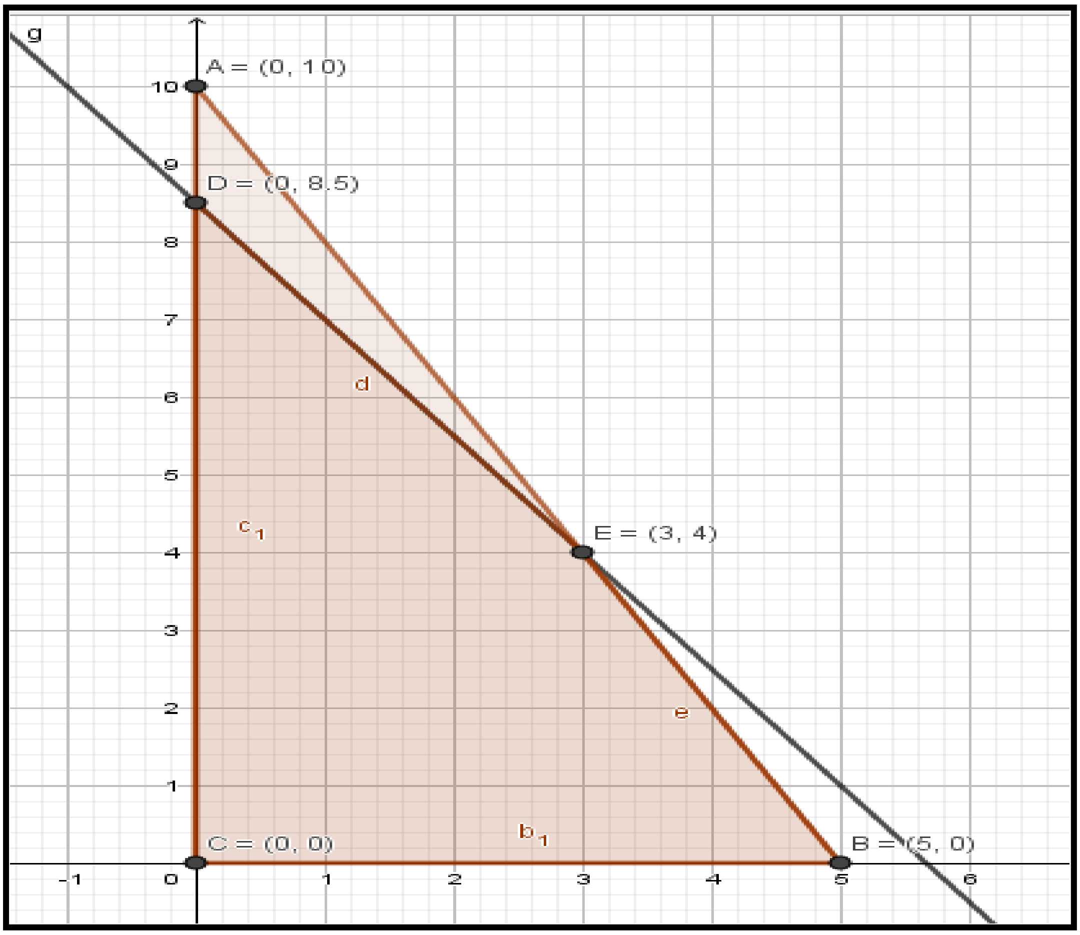
Figura 5.4 – interseção da equação da reta 3x+2y=17 com o polígono ABC



Fonte: Próprio autor.

Verificando a região que satisfaz a inequação $3x + 2y \leq 17$, está localizada abaixo da reta, para isso basta consideremos novamente o ponto C(0,0) ,vamos ter 3.0 +2.0 ≤ 17, também é necessário que essa região satisfaça $4x + 2y \leq 20$ para isso basta verificar a região que cumpre ambas as desigualdades, analisando o gráfico percebemos que essa região é representada pelo polígono DEBC , como mostra a Figura 5.5.

Figura 5.5 - Região que cumpre ambas as desigualdades.

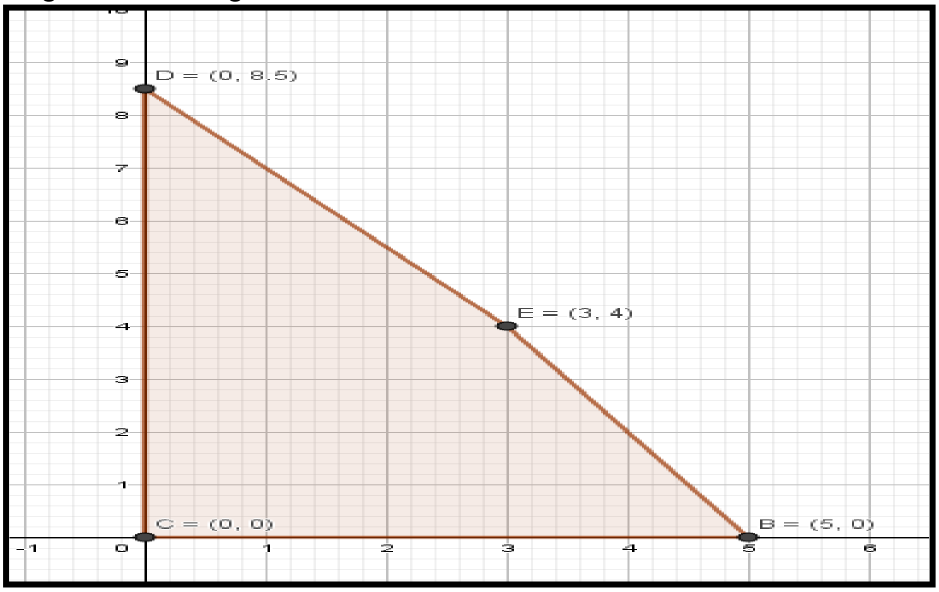


Fonte: O autor.

Como as restrições foram traçadas temos o chamado Espaço Solução que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo, ou seja, todos os pontos que obedecem a todas as restrições do modelo.

No gráfico o Espaço Solução é o polígono convexo desenhado, como podemos ver a seguir na Figura 5.6.

Figura 5.6 - Região factível F.

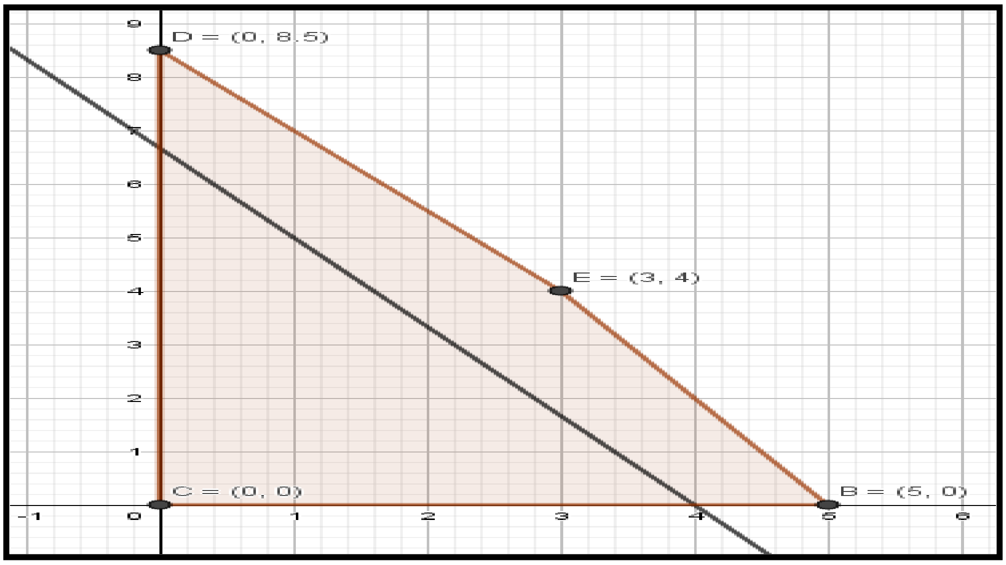


Fonte: O autor.

Passo 4: Precisamos encontrar o ponto da região factível que maximiza a função $Z = 50x + 30y$. Pelo teorema 1 para determinar esse ponto precisamos caminhar na direção dos extremos do polígono. Graficamente esta equação representa uma família de retas paralelas, ou seja, para cada valor de Z, temos uma reta que será paralela a qualquer outra, para outro valor de Z, inclusive para aquela como o valor ótimo da função objetiva.

Então, arbitrariamente escolhemos, por exemplo $Z = 200$. Temos a reta $50x + 30y = 200$ intersectando a região factível, como observamos na Figura 5.7.

Figura 5.7 - Reta $50x+30y = 200$ intersectando a região factível F



Fonte: O autor.

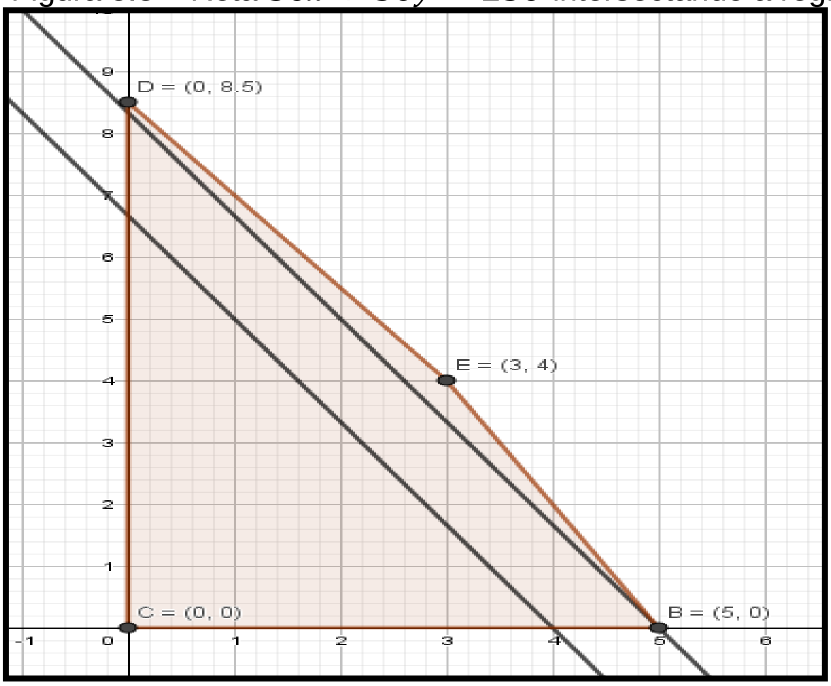
Temos então a reta 50x+30y= 200 intersectando a região factível como se observa –se na Figura anterior.

Após analisar o gráfico com a reta traçada de uma das paralelas de Z pode-se perceber quais os possíveis vértices que seriam a solução do problema, tendo em vista isso basta criarmos, por meio da ferramenta “retas paralelas” do Geogebra, outras retas paralelas passando por esses pontos.

Pois, o teorema 1 diz que o problema tem solução ótima se, e somente se, a solução encontra-se em um dos vértices. Então, para obter o ponto ótimo, basta simplesmente traçar retas paralelas, mais alta possível, que toque, pelo menos, um ponto do plano solução, respeitando a inclinação da reta determinada pela função objetivo Z.

Vejamos por exemplo o ponto D, que gera a reta 50x + 30y = 250 intersectando a região factível em outra parte. Como podemos ver graficamente na Figura 5.8.

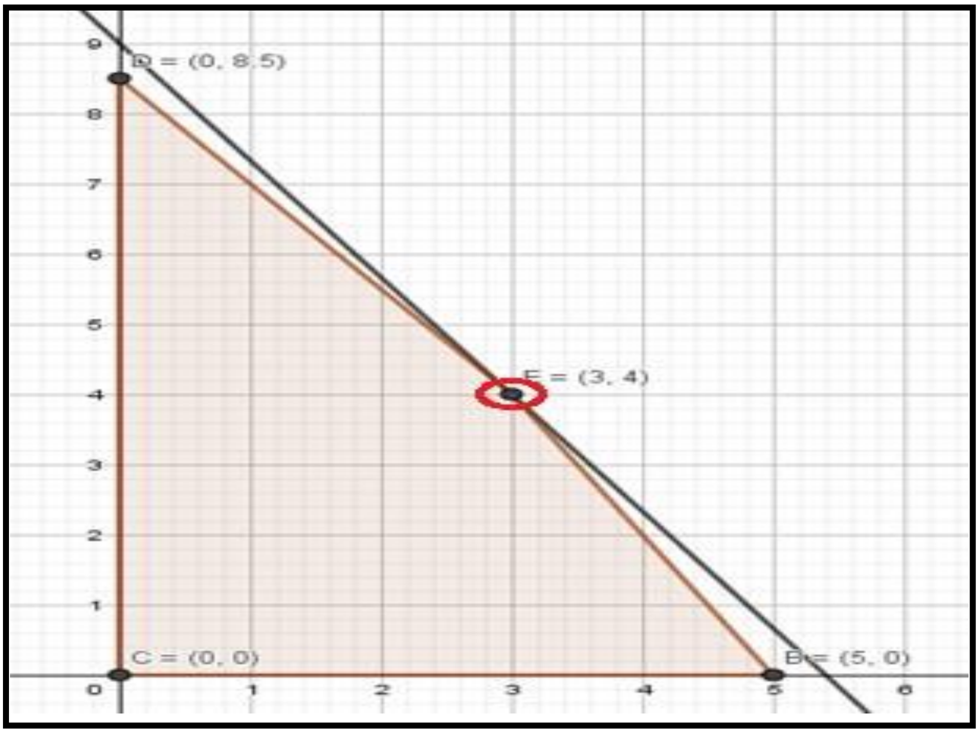
Figura 5.8 – Reta $50x + 30y = 250$ intersectando a região factível F.



Fonte: O autor.

Passo 5: Neste momento pode-se notar, na figura acima, que a coordenada D (0, 8,5) não é o melhor ponto, pois a parte do polígono que compreende o vértice E ainda não foi tocada, esse será o último ponto tocado e consequentemente a coordenada E(3,4) será solução do problema, conforme indica a Figura 5.9.

Figura 5.9 - reta $50x + 30y = 270$ intersectando a região factível F.



Fonte: O autor.

Com isso, o ponto ótimo sempre será um dos vértices do polígono determinado pelo espaço solução de acordo com os teoremas de convexidade apresentados anteriormente neste trabalho, conforme pode-se observar na figura acima.

Na tabela 5.2, apresentamos o valor da função objetivo $f\ (x,\ y)$ do Problema 5.1 em todos os vértices da região factível F.

Tabela 5.2 **–** Valores da função objetivo do Prob. 5.1 nos vértices da região factível F

Vértice	***Valor da Função***	***Análise***
$\boldsymbol{D(0;\ 8,\ 5)}$	$f\ (0,8,48) = 50.0 + 30.(8,5) = 255$	
$\boldsymbol{E(3,\ 4)}$	$f\ (3,4)\ =\ 50.3\ +\ 30.4\ =\ 270$	$Valor\ maximo\ de\ f$
$\boldsymbol{B(5,\ 0)}$	$f\ (5,0)\ =\ 50.5\ +\ 30.0\ =\ 200$	
$\boldsymbol{C(0,\ 0)}$	$f\ (0,0)\ =\ 50.0\ +\ 30.0\ =\ 0$	$Valor\ mínimo\ de\ f$

Fonte: O autor.

Portanto, o estaleiro do Sr°João terá que consertar 3 embarcações de alta complexidade e 4 embarcações de baixa complexidade para obter o maior lucro na construção de suas embarcações. Percebemos que, no método gráfico e com o auxílio do software Geogebra, facilmente encontramos a solução do Problema de Programação Linear com duas variáveis O processo da obtenção da região factível é análogo aos demais problemas.

Problema 5.2 - O Sr° Antônio morador do município de Porto Grande produz dois tipos de ração para a criação de suínos, e pretende determinar as quantidades que cada tipo de ração deve ser vendida diariamente para que seu lucro seja máximo. O processo de produção é tal que:

- O tipo de ração em granulado tem 20g de hidratos de carbono, 50g de vitaminas, 30g de proteínas e custa 10 reais o pacote.
- O tipo de ração em farinha tem 50g de hidratos de carbono, 30g de vitaminas, 10g de proteínas e custa 5 reais o pacote.
- As quantidades máximas diárias que o Sr° Antônio possui para o processo de produção são de 400g de hidratos de carbono, 390g de vitaminas e 210g de proteínas.

Após várias tentativas frustradas de optimização, mas ciente da importância da questão para o seu negócio, o Sr° Antônio contratou uma empresa de consultoria para maximizar o seu lucro.

i. Primeiramente, para construir um modelo de Programação Linear, temos de identificar o que deseja conhecer no problema. A isto dá-se o nome de variável de decisão, a qual no problema 5.2 temos duas variáveis de decisão, que são:
   x: quantidade de ração em granulado por pacote.
   y: quantidade de ração em farinha por pacote.

ii. segundo, precisamos identificar o objetivo que se deseja alcançar e formular uma função linear contendo as variáveis de decisão. Assim, neste problema, o objetivo é encontrar a quantidade máxima que cada tipo de ração deverá ser vendida diariamente.

Vejamos a seguir como encontrar tal função.

- temos que, a quantidade x de ração em granulado custa R$10,00 o pacote, assim teremos 10x de lucro e a quantidade y de ração em farinha custa R$5,00 o pacote, assim teremos 5y de lucro.
- desta forma, a função que representa a quantidade máxima de ração que deverá ser vendida será uma função da forma:

$$(Max)\ Z = 10x + 5y\ (Função\ Objetivo).$$

Esta função é chamada de função objetivo sendo representada pela maioria dos autores como uma função de uma variável Z representando o sentido da otimização que, no nosso caso, é de maximização.

Evidentemente que o modelo de programação não se restringe a função objetivo, pois basta observar a quantidade dos recursos disponível. Com isso, também é necessário identificar todas as exigências, restrições e limitações estipuladas no problema e expressar matematicamente. Estas condições constituem as restrições do problema.

Vejamos a seguir como formular estas restrições:

- A ração em granulado possui 20g de hidratos de carbono e a ração em farinha dispõe de 50 g de hidratos de carbono, assim escrevemos,

$$20x + 50y\ \ (hidratos\ de\ carbono)$$

A porção de hidratos de carbono não pode ser maior que a quantidade máxima diária disponível, ou seja, 400g. Podemos escrever então:

$$20x + 50y \leq 400\ \ (1^{a}\ restrição)$$

- A ração em granulado possui 50g de vitaminas o e a ração em farinha dispõe de 30 g de vitaminas, assim escrevemos,

$$50x + 30y\ \ (vitaminas)$$

A porção de vitaminas não pode ser maior que a quantidade máxima diária disponível, ou seja, 390g. Podemos escrever então:

$$50x + 30y \leq 390 \ \ (2^{a}\ restri\text{ção})$$

- A ração em granulado possui 30g de proteínas e a ração em farinha dispõe de 10 g de proteínas, assim escrevemos,

$$30x + 10y\ (prote\text{í}nas)$$

A porção não pode ser maior que a quantidade máxima diária disponível, ou seja, 390g. Podemos escrever então:

$$30x + 10y \leq 210\ (3^{a}\ restri\text{ção})$$

- Temos então que para as restrições, a relação lógica existente é:

$$Utiliza\text{ção}\ de\ recurso \leq disponibilidade\ do\ recurso$$

- Aparentemente formulamos todas as restrições. No entanto, existe um tipo de restrição não tão evidente. Como visto anteriormente, x, y representam as quantidades de ração em granulados e ração em farinha, respectivamente. Ora não podem ser produzido uma quantidade por exemplo de – 3 pacotes de ração, ou seja, x, y não podem ser negativos. Matematicamente temos:

$$x \geq 0\ e\ y \geq 0$$

Pelas condições das variáveis de não negatividade, o conjunto de soluções factíveis (região factível) fica restrito ao primeiro quadrante. Podemos agora escrever todo o modelo de programação linear do problema:

$$\begin{gathered} M\acute{a}x\ Z = 10x + 5y \\ 20x + 50y \leq 400 \\ 50x + 30y \leq 390 \\ 30x + 10y \leq 210 \\ x \geq 0\ \ e\ \ y\ \geq 0 \end{gathered}$$

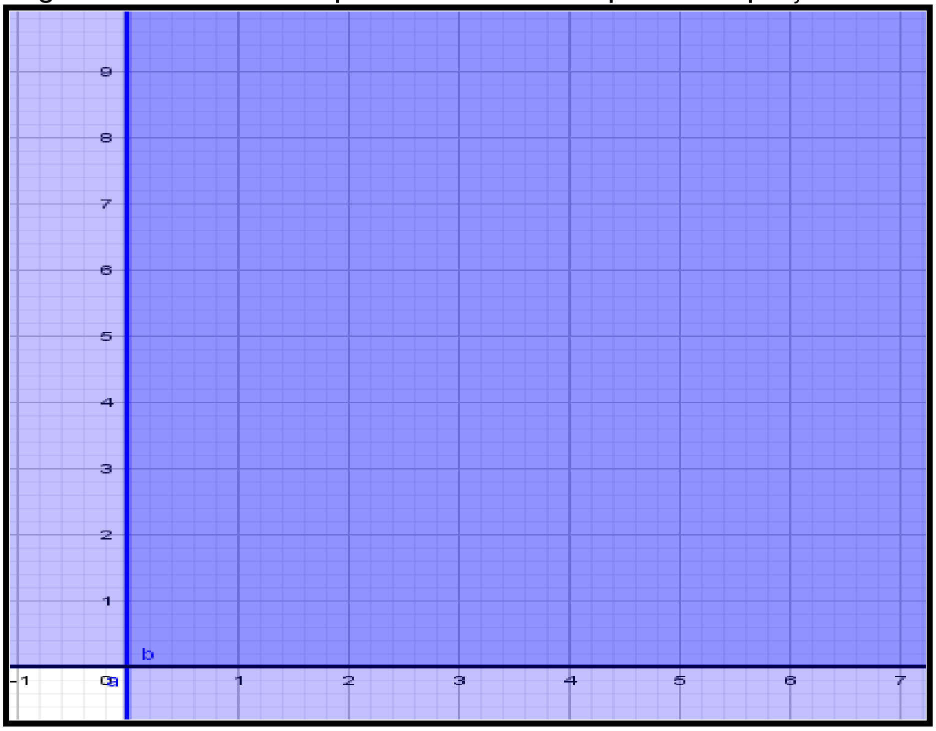
Após encontrar o modelo de programação linear para o problema 5.2, usaremos com o auxílio do Geogebra, *o método gráfico* para resolução do problema. Sugerimos alguns passos a serem seguidos com os alunos em sala de aula podendo o professor acrescentar algumas explicações extras, se julgar necessário.

Passo 1: Consideremos inicialmente as restrições:

$$x \geq 0 \; e \; y \geq 0$$

Assim fica entendido que trabalharemos apenas no primeiro quadrante, como visto no problema anterior, conforme a Figura 5.10.

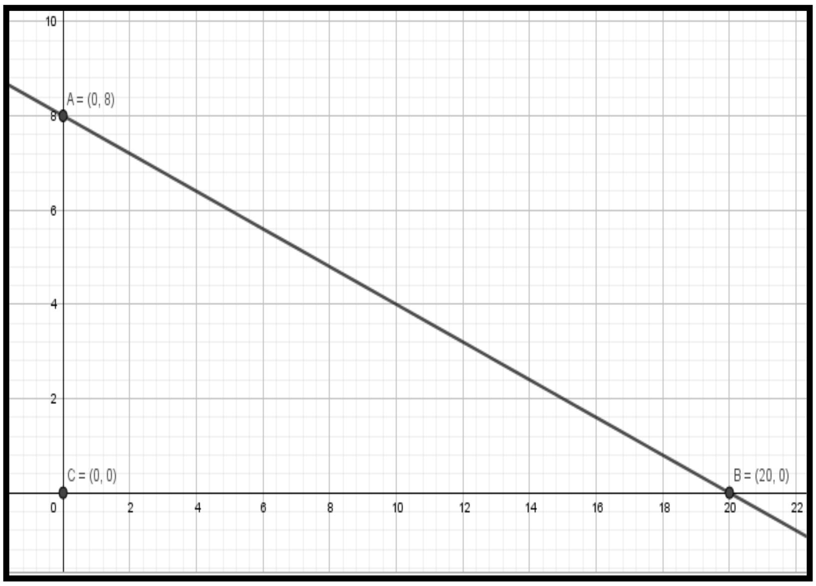
Figura 5.10- Primeiro quadrante definido pelas inequações: $x \geq 0 \; e \; y \geq 0$



Fonte: O autor.

Passo 2: consideremos a equação da reta $20x + 50y = 400$, na qual passa pelos pontos A (0,8), B (20,0). Representada graficamente na Figura 5.11.

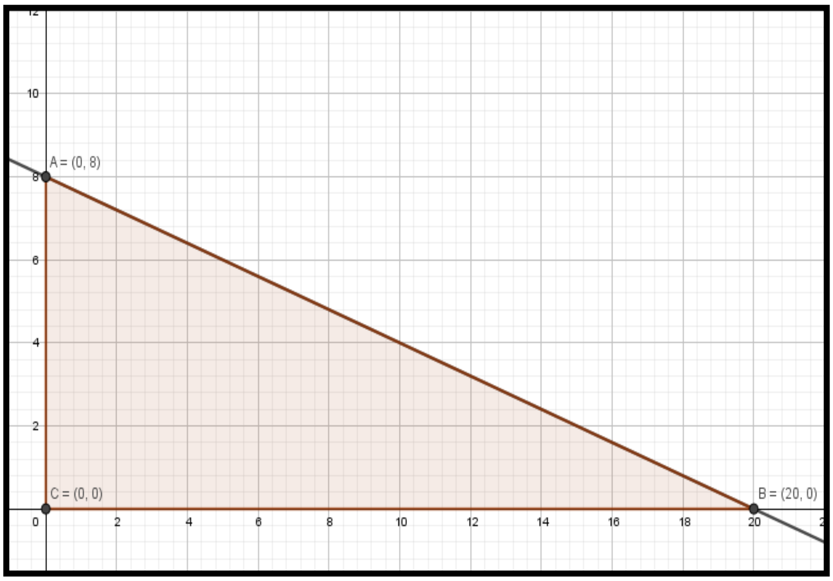
Figura 5.11 – Equação da reta $20x + 50y = 400$



Fonte: O autor.

Passo 3: Após realizar a representação da 1ª restrição associada, necessitamos determinar qual das regiões (subplanos) definida pela reta que satisfaz a inequação $20x + 50y \leq 400$. Para isso, podemos escolher aleatoriamente qualquer ponto do $\mathbb{R}^2$, por exemplo, escolhemos o ponto C (0,0). Verificamos que 20. (0) + 50. (0) ≤ 400 (nos problemas propostos nesse trabalho, esse ponto sempre irá satisfazer as inequações associada). Logo, a região que satisfaz a desigualdade está localizada abaixo da reta, e é representada pelo polígono ABC, como mostra a Figura 5.12.

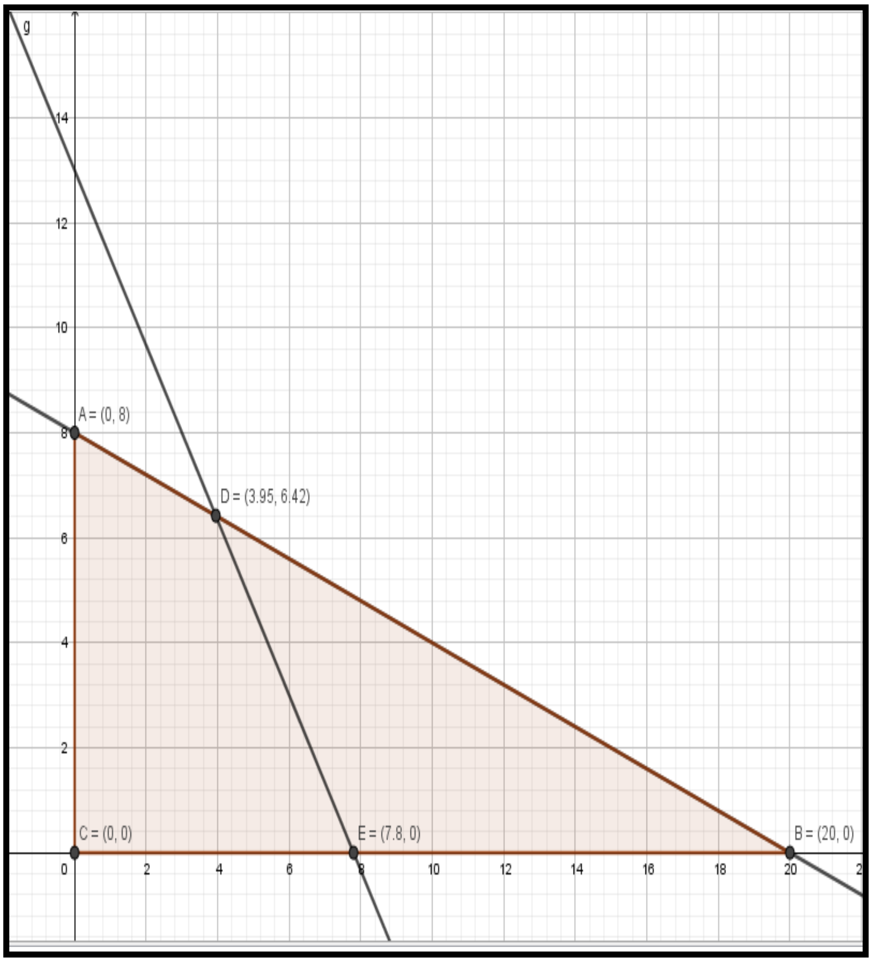
Figura 5.12- Região que satisfaz a inequação $20x + 50y \leq 400$



Fonte: O autor.

Ao construirmos a reta representado pela equação $50x+30y= 390$, percebemos que a mesma intersecta o polígono ABC nos pontos D e E, conforme Figura 5.13.

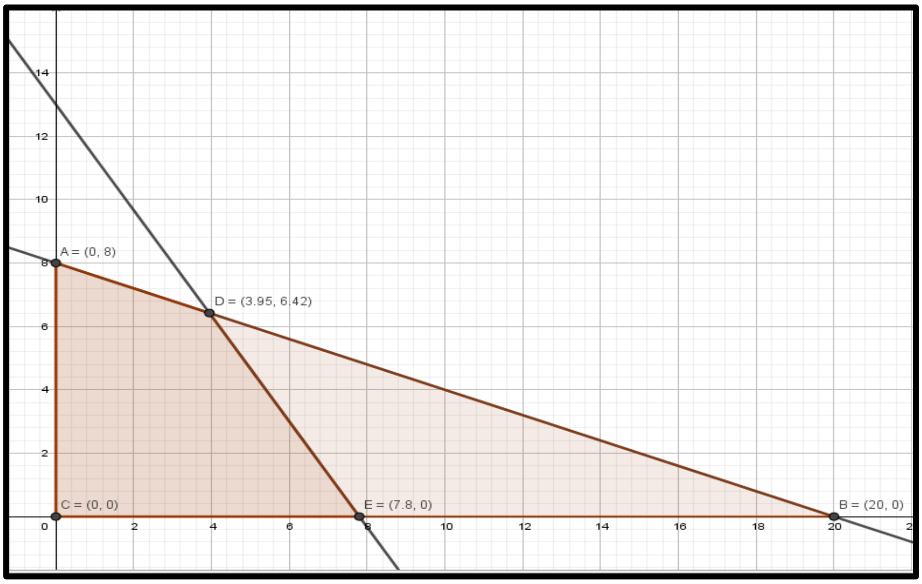
Figura 5.13 - Interseção da reta 50x+30y=390 com o polígono ABC



Fonte: O autor.

Verificando a região que satisfaz a inequação $50x + 30y \leq 390$, está localizada abaixo da reta, para isso basta consideremos novamente o ponto C(0,0), vamos ter $50.0 + 30.0 \leq 390$, também é necessário que essa região satisfaça $20x + 50y \leq 400$, para isso basta verificar a região que cumpre ambas as desigualdades, analisando o gráfico percebemos que essa região é representada pelo polígono ADEC, como mostra a Figura 5.14.

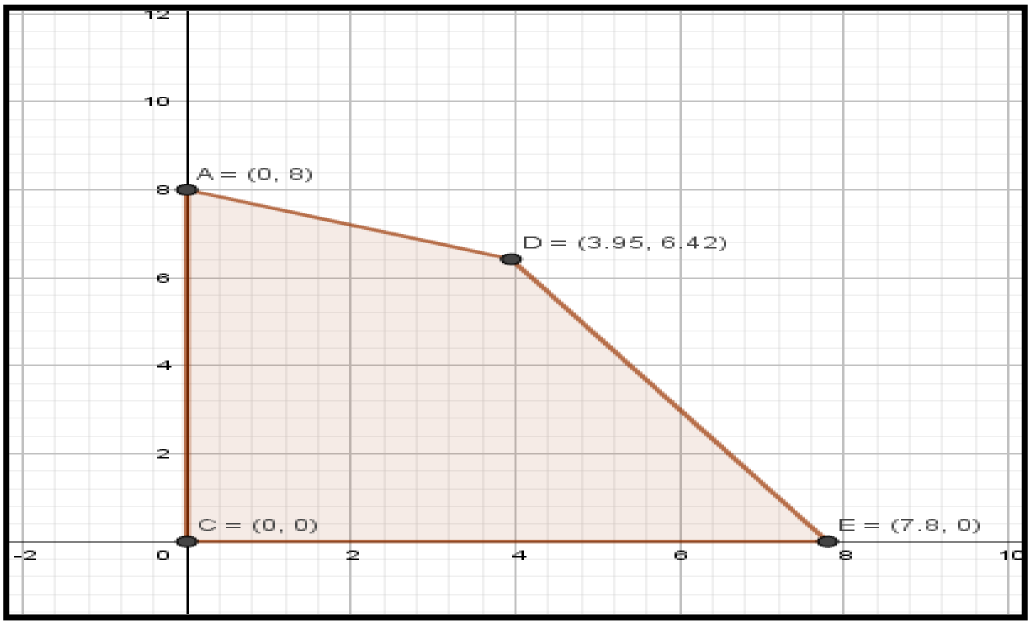
Figura 5.14 - Região que cumpre ambas as desigualdades.



Fonte: O autor.

Como as duas primeiras restrições traçadas temos o chamado Espaço Solução que vai ser o polígono ADEC. como podemos ver na Figura 5.15.

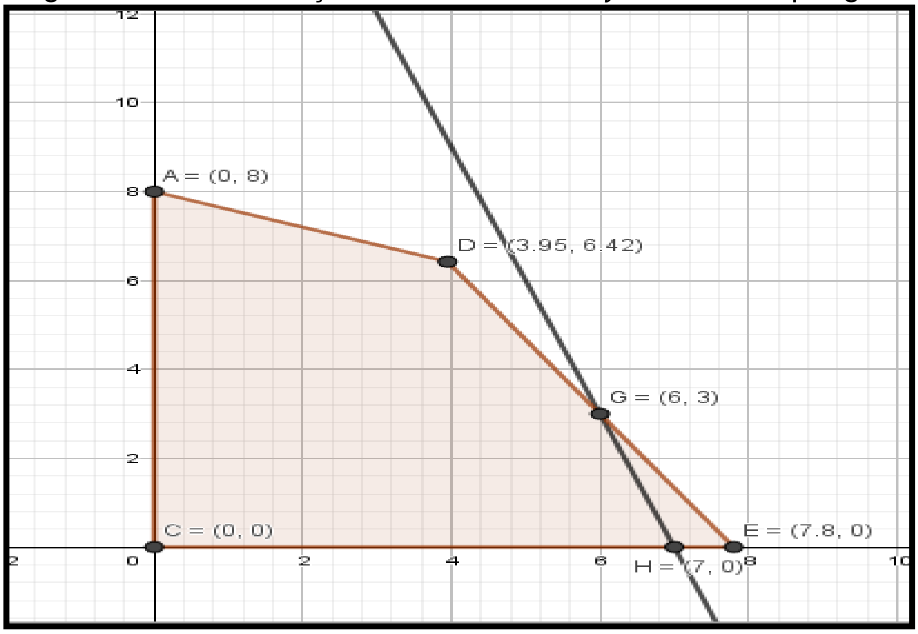
Figura 5.15 - polígono ADEC



Fonte: O autor.

Ao construirmos a reta representado pela equação $30x + 10y = 210$, percebemos que a mesma intersecta o polígono ADEC nos pontos G e H, conforme a Figura 5.16.

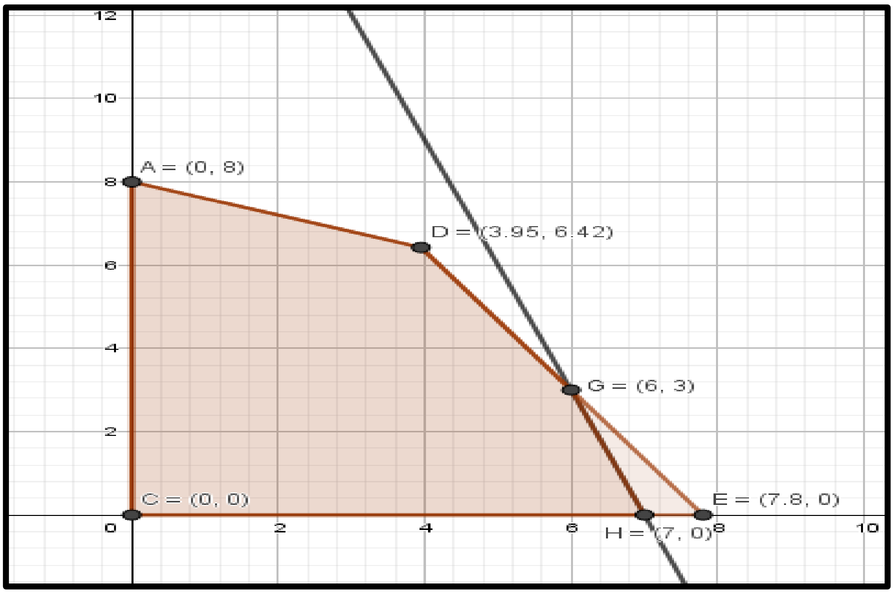
Figura 5.16 – Interseção da reta $30x + 10y = 210$ com polígono ADEC



Fonte: O autor.

Verificando a região que satisfaz a inequação $30x + 10y \leq 210$, está localizada abaixo da reta, para isso basta consideremos novamente o ponto C(0,0) ,vamos ter 30.0 + 10.0 ≤ 210, também é necessário que essa região satisfaça as inequações $20x + 50y \leq 400$ e $50x + 30y \leq 390$ para isso basta verificar a região que cumpre ambas as desigualdades, analisando o gráfico percebemos que essa região é representada pelo polígono ADGHC , como mostra a Figura 5.17.

Figura 5.17 - Região que cumpre ambas as desigualdades.

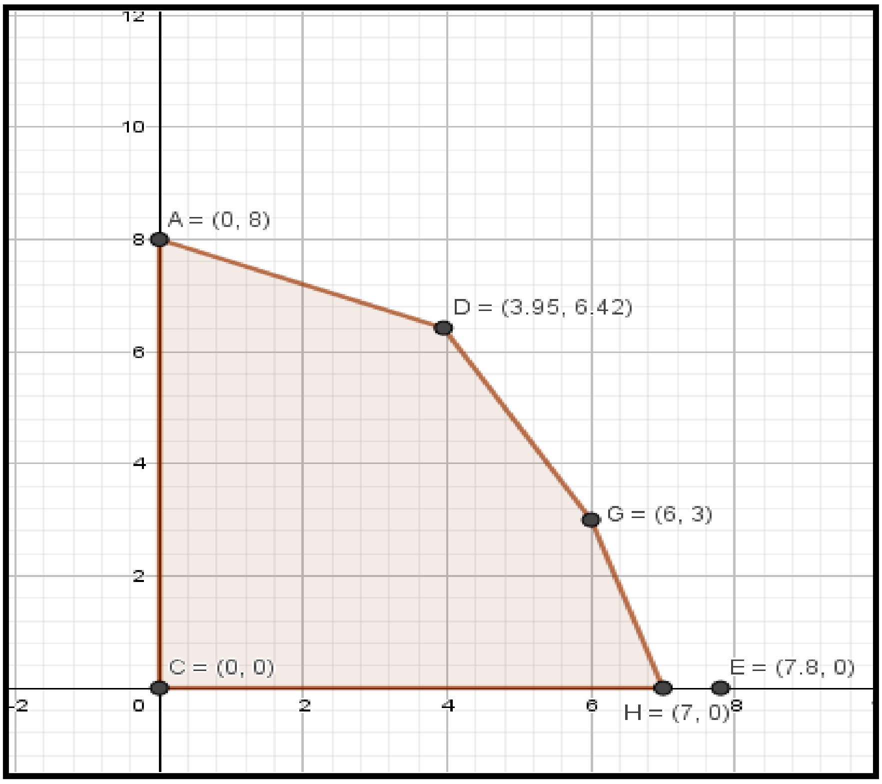


Fonte: O autor.

Como todas as restrições foram traçadas temos o chamado Espaço Solução que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo, ou seja, todos os pontos que obedecem a todas as restrições do modelo.

No gráfico o Espaço Solução é o polígono convexo desenhado, como mostra a Figura 5.18.

Figura 5.18 - Região factível F.

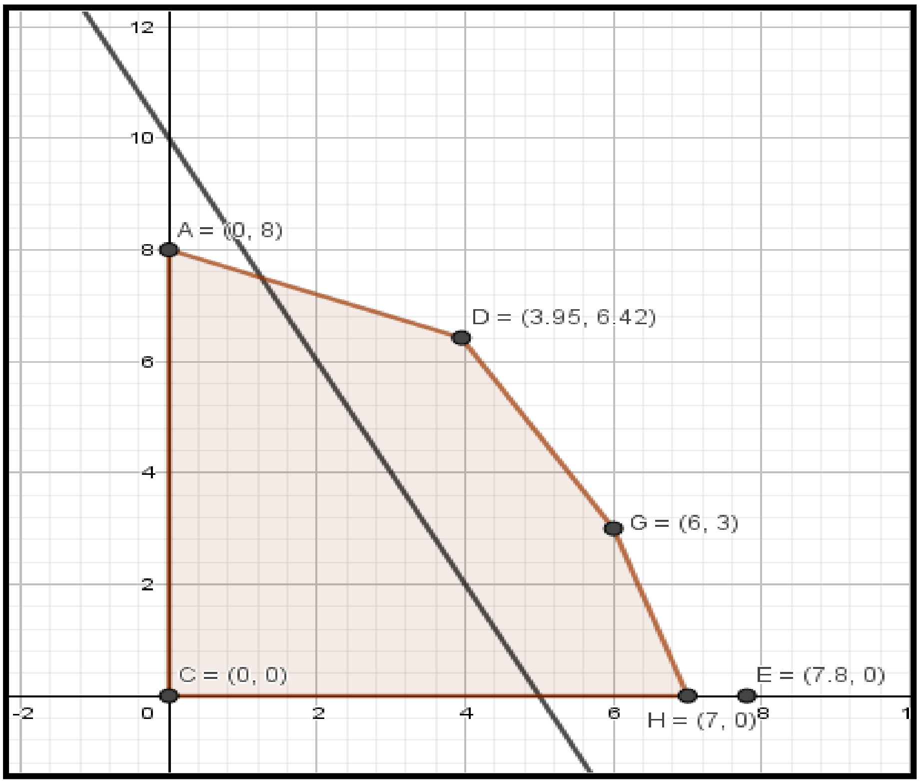


Fonte: O autor.

Passo 4: Precisamos encontrar o ponto da região factível que maximiza a função Z = $10x + 5y$.Pelo teorema 1 para determinar esse ponto precisamos caminhar na direção dos extremos do polígono. Graficamente esta equação representa uma família de retas paralelas, ou seja, para cada valor de Z, temos uma reta que será paralela a qualquer outra, para outro valor de Z, inclusive para aquela como o valor ótimo da função objetiva.

Então, arbitrariamente escolhemos, por exemplo Z = 50. Temos a reta 10x + 5y = 50, intersectando a região factível, como observamos na Figura 5.19.

Figura 5.19 - Reta 10x+5y = 50 intersectando a região factível F.



Fonte: O autor.

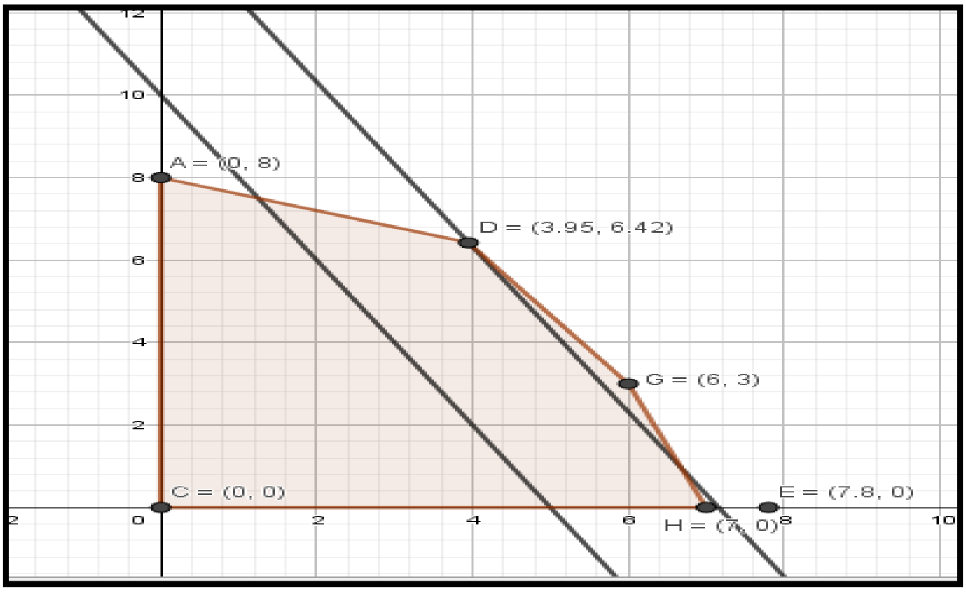
Temos então a reta 10x + 5y = 50 intersectando a região factível como se se observa na figura anterior.

Após analisar o gráfico com a reta traçada de uma das paralelas de Z pode-se perceber quais os possíveis vértices que seriam a solução do problema, tendo em vista isso basta criarmos, por meio da ferramenta “retas paralelas” do Geogebra, outras retas paralelas passando por esses pontos.

Pois, o teorema 1 diz que o problema tem solução ótima se, e somente se, a solução encontra-se em um dos vértices. Então, para obter o ponto ótimo, basta simplesmente traçar retas paralelas, mais alta possível, que toque, pelo menos, um ponto do plano solução, respeitando a inclinação da reta determinada pela função objetivo Z.

Vejamos por exemplo o ponto D, que gera a reta 10x + 5y = 71,6 intersectando a região factível em outra parte. Como podemos ver graficamente na Figura 5.20.

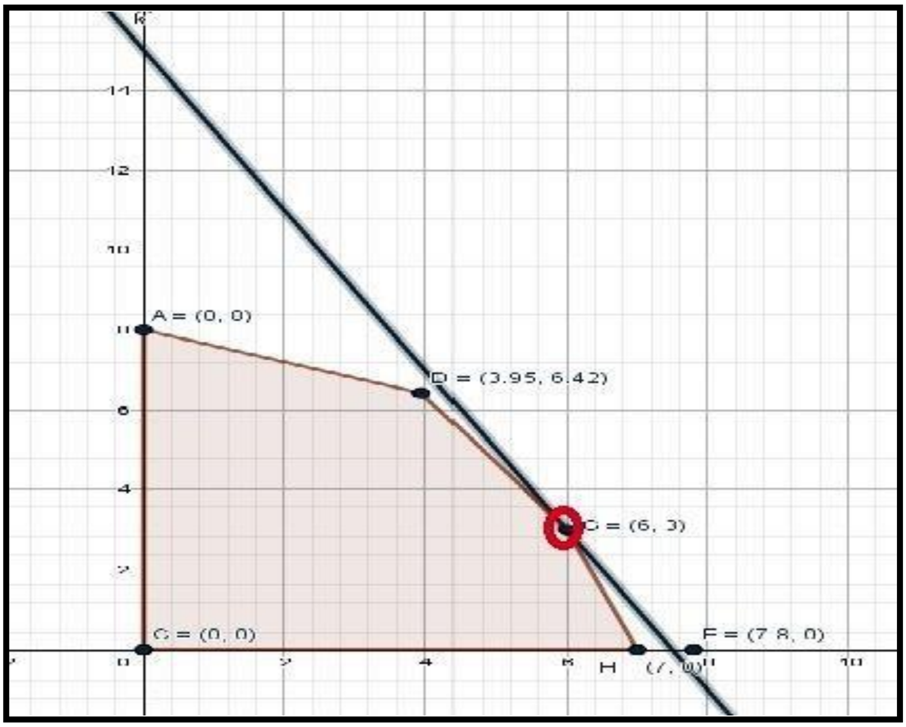
Figura 5.20 - Reta $10x + 5y = 71{,}6$ intersectando a região factível F



Fonte: O autor.

Passo 5: Neste momento pode-se notar, na figura acima, que a coordenada D (3.95, 6,42) não é o melhor ponto, pois a parte do polígono que compreende o vértice G ainda não foi tocada, esse será o último ponto tocado e consequentemente a coordenada G (6,3) será solução do problema. Vejamos na Figura 5.21.

Figura 5.21 - Reta $10x + 5y = 75$ intersectando a região factível F



Fonte: O autor.

Com isso, o ponto ótimo sempre será um dos vértices do polígono determinado pelo espaço solução de acordo com os teoremas de convexidade apresentados anteriormente neste trabalho, conforme pode-se observar na figura acima.

Na tabela 5.3, apresentamos o valor da função objetivo $f\ (x,\ y)$ do Problema em todos os vértices da região factível F.

Tabela 5.3- Valores da função objetivo do Prob. 5.2 nos vértices da região factível F.

Vértice	*Valor da Função*	*Análise*
$\boldsymbol{A(0;\ 8)}$	$f\ (0,8) = 10.0 + 5.8 = 40$	
$\boldsymbol{B(3{,}95;\ 6{,}42)}$	$f\ (3{,}95;\ 6{,}42) = 10.\ (3{,}95) + 5.\ (6{,}42) = 71{,}6$	
$\boldsymbol{C\ (6,\ 3)}$	$f\ (6,3) = 10.6 + 5.3 = 75$	*Valor máximo de f*
$\boldsymbol{H(7,0)}$	$f\ (7,0) = 10.7 + 5.0 = 70$	
$\boldsymbol{C(0,\ 0)}$	$f\ (0,0) = 10.0 + 5.0 = 0$	*Valor mínimo de f*

Fonte: O autor.

Portanto, para que o Sr. Antônio obtenha um lucro máximo na produção de ração para suínos ele terá que vender diariamente 6 pacotes de ração granulado e 3 pacotes de ração em farinha. Percebemos mais uma vez que com o método gráfico e com o auxílio do software Geogebra encontramos facilmente a solução do Problema.

Problema 5.3 - Sr° Raimundo deseja plantar dois tipos de produtos em seu terreno localizado as margens do Rio Matapi no Município de Santana. Deseja fazer o plantio de mandioca e cana de açúcar. O processo de plantação desses alimentos é tal que:

- Sr° Raimundo dispõe de no máximo 9 hectares para seu plantio e devido os problemas de chuvas ele não pode plantar mais de 4 hectares de mandioca.
- Sr° Raimundo gera um lucro de R$400,00 e R$ 360,00 por cada hectare de mandioca e cana de açúcar plantada respectivamente.
- Quantos hectares de cada fruto o agricultor deve plantar de modo a obter o maior lucro possível de sua plantação?

O problema do Sr° Raimundo é encontrar o modelo de Programação Linear que obtenha o maior lucro possível dos produtos:

i. Primeiramente, para construir um modelo de Programação Linear, temos de identificar o que deseja conhecer no problema. A isto dá-se o nome de variável de decisão, a qual no problema 5.3 temos duas variáveis de decisão, as quais são:
   x: quantidade de hectares de mandioca;
   y: quantidade de hectares de cana de açúcar.
ii. segundo, precisamos identificar o objetivo que se deseja alcançar e formular uma função linear contendo as variáveis de decisão. Assim, neste problema, o objetivo é encontrar o maior lucro possível de sua plantação.

Vejamos a seguir como encontrar tal função.

- cada hectare de mandioca gera um lucro de R$400,00, isto é, teremos lucro de 400x, e para cada hectare de cana de açúcar, gera um lucro de R$360,00, ou seja, teremos lucro de 360y.
- desta forma, a função de lucro total, a qual queremos maximizar será uma função da forma:

$$(Max)\ Z = 400x + 360y\ (Função\ Objetivo).$$

Evidentemente que o modelo de programação não se restringe a função objetivo, pois basta observar a quantidade dos recursos disponível. Com isso, também é necessário identificar todas as exigências, restrições e limitações estipuladas no problema e expressar matematicamente.

Vejamos a seguir com o formular estas restrições:

- Considerando os dados do problema 5.3, a máxima quantidade de mandioca e cana de açúcar a serem plantados será de 9 hectares. Podemos então escrever:

$$x + y \leq 9\ \ (1^{a}\ restrição)$$

- Não poderá ser plantado mais que 4 hectares de mandioca. Então:

$$x \leq 4 \ \ (2^{a}\ restrinção)$$

- Aparentemente formulamos todas as restrições. No entanto, existe um tipo de restrição não tão evidente. Como visto anteriormente, x, y representam a quantidade de hectares de mandioca e cana de açúcar respectivamente. Ora não podemos plantar -5 hectares, ou seja, x, y não podem ser negativos. Matematicamente temos:

$$x \geq 0 \ e \ y \geq 0$$

- Pelas condições das variáveis de não negatividade, o conjunto de soluções factíveis (região factível) fica restrito ao primeiro quadrante. Podemos agora escrever todo o modelo de programação linear do problema:

$$Máx\ Z = 400x + 360y$$
$$\begin{cases} x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

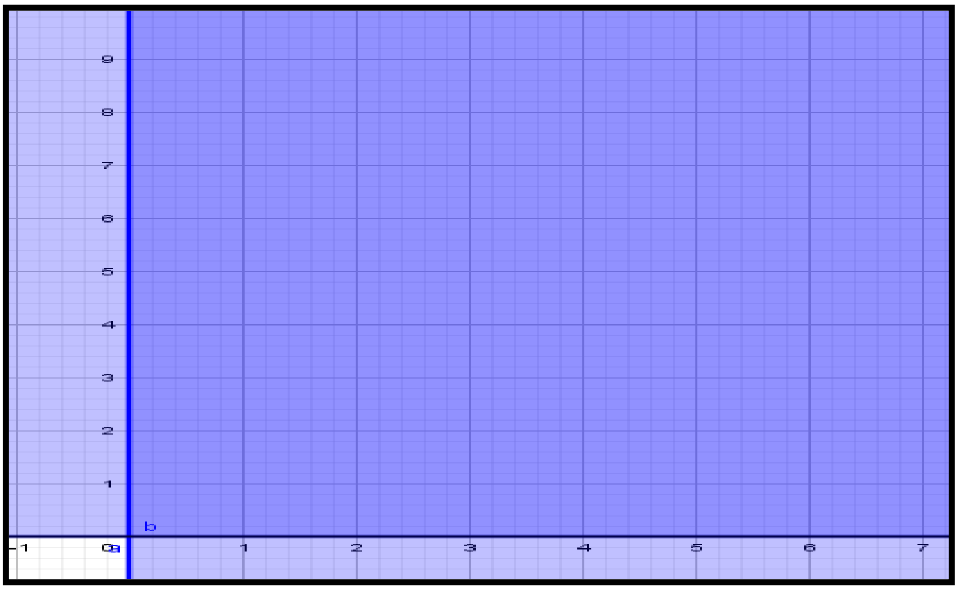
- Com o auxílio do Geogebra, *o método gráfico* para resolução do problema, sugerimos alguns passos a serem seguidos com os alunos em sala de aula podendo o professor acrescentar algumas explicações extras, se julgar necessário.

Passo 1: Consideremos inicialmente as restrições:

$$x \geq 0 \ e \ y \geq 0$$

Assim fica entendido que trabalharemos apenas no primeiro quadrante como visto nos problemas anteriores, conforme indica a Figura 5.22.

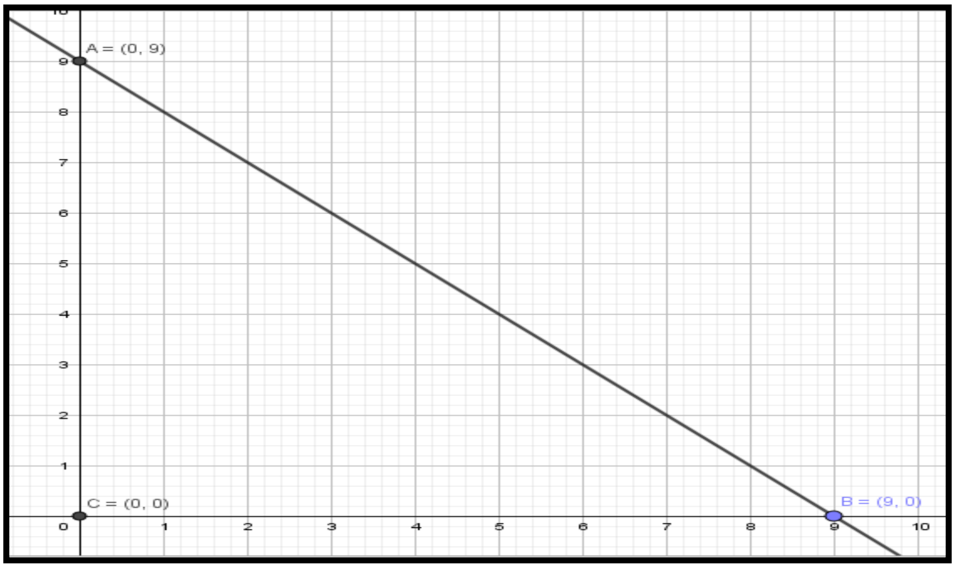
Figura 5.22 - Primeiro quadrante definido pelas inequações: $x \geq 0 \ e \ y \geq 0$



Fonte: O autor.

Passo 2: consideremos a equação da reta $x + y = 9$, na qual passa pelos pontos A (0,9), B (9,0). Representada graficamente na Figura 5.23.

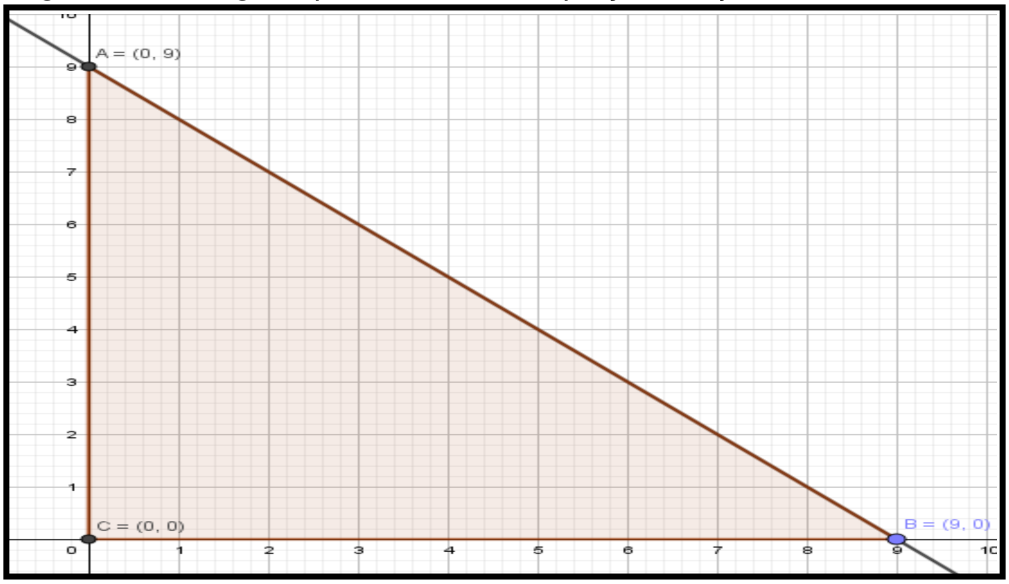
Figura 5.23 - Equação da reta $x + y = 9$



Fonte: O autor.

Passo 3: Após realizar a representação da 1ª restrição associada, necessitamos determinar qual das regiões (subplanos) definida pela reta que satisfaz a inequação $x + y \leq 9$ Para isso, podemos escolher aleatoriamente qualquer ponto do $\mathbb{R}^2$, por exemplo, escolhemos o ponto C (0,0). Verificamos que 1. (0) + 1. (0) ≤ 9 (nos problemas propostos nesse trabalho, esse ponto sempre irá satisfazer as inequações associada). Logo, a região que satisfaz a desigualdade está localizada abaixo da reta, e é representada pelo polígono ABC, como mostra a Figura 5.24.

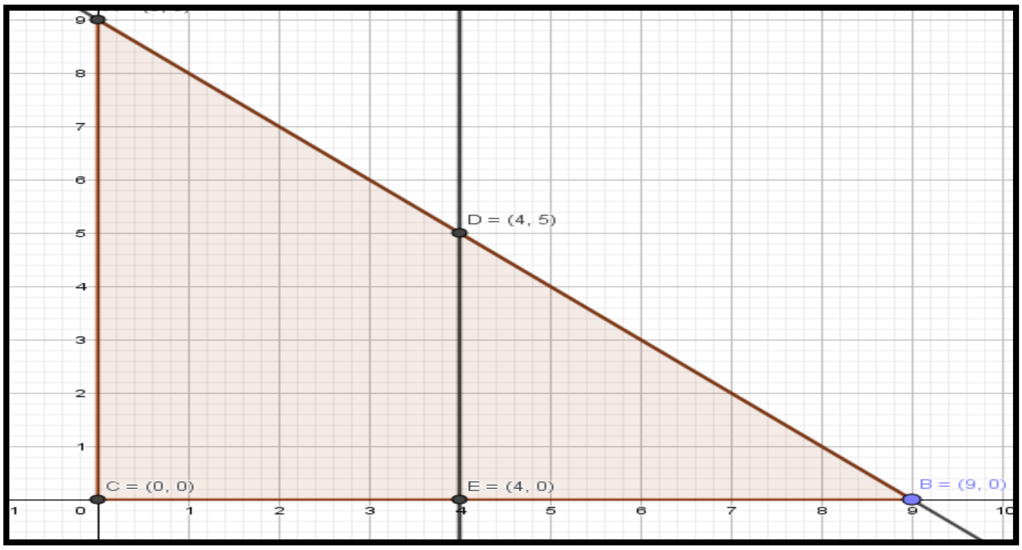
Figura 5.24- Região que satisfaz a inequação $x + y \leq 9$.



Fonte: O autor.

Ao construirmos a reta representado pela equação $x = 4$, percebemos que a mesma intersecta o polígono ABC nos pontos D e E, conforme a figura 5.25.

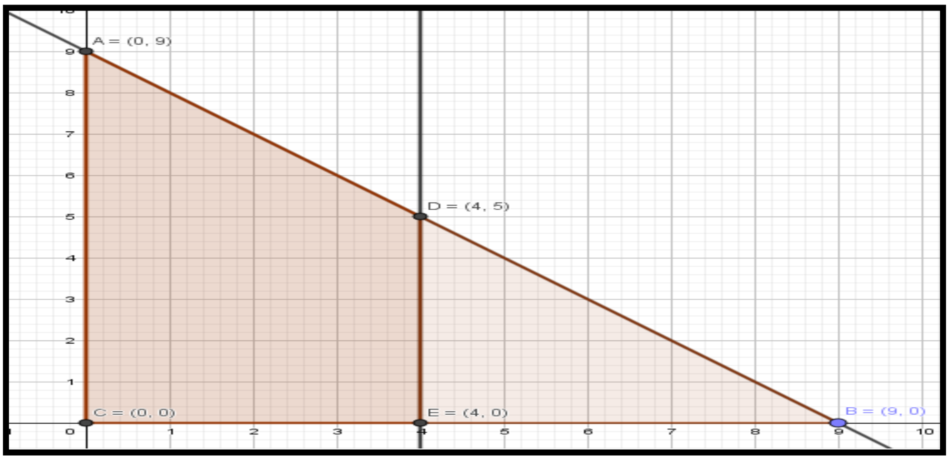
Figura 5.25 - Interseção da equação da reta com o polígono ABC



Fonte: O autor.

Verificando a região que satisfaz a inequação $x \leq 4$, está localizada abaixo da reta, para isso basta consideremos novamente o ponto C(0,0) ,vamos ter 1.0 ≤ 4, também é necessário que essa região satisfaça $x + y \leq 9$para isso basta verificar a região que cumpre ambas as desigualdades, analisando o gráfico percebemos que essa região é representada pelo polígono ADEC , como mostra a Figura 5.26.

Figura 5.26 - Região que cumpre ambas as desigualdades.

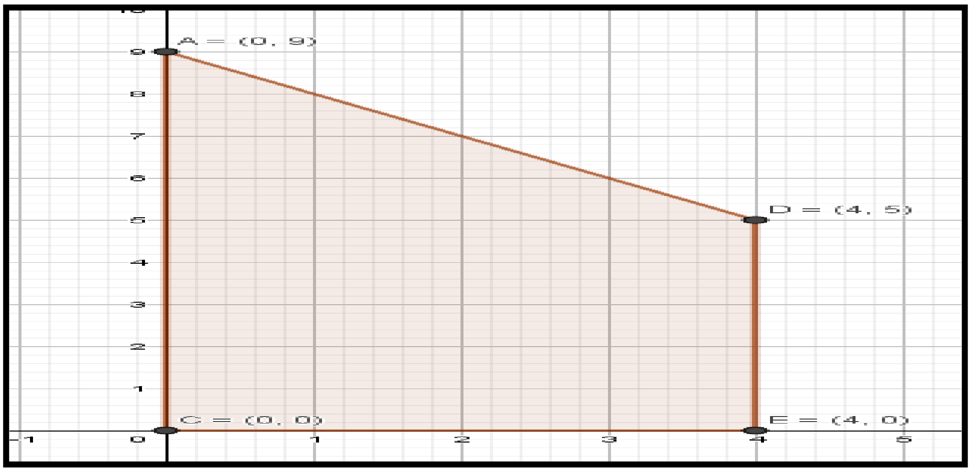


Fonte: O autor.

Como todas as restrições foram traçadas temos o chamado Espaço Solução que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo, ou seja, todos os pontos que obedecem a todas as restrições do modelo.

No gráfico o Espaço Solução é o polígono convexo desenhado, como podemos ver a seguir na Figura 5.27.

Figura 5.27 - Região factível F.

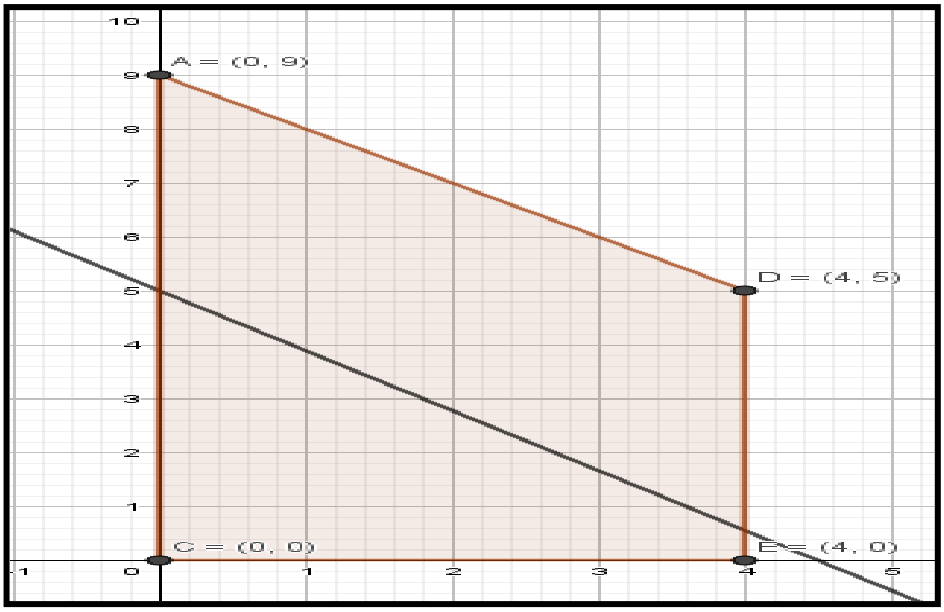


Fonte: O autor.

Passo 4: Precisamos encontrar o ponto da região factível que maximiza a função $Z = 400x + 360y$. Pelo teorema 1 para determinar esse ponto precisamos caminhar na direção dos extremos do polígono. Graficamente esta equação representa uma família de retas paralelas, ou seja, para cada valor de Z, temos uma reta que será paralela a qualquer outra, para outro valor de Z, inclusive para aquela como o valor ótimo da função objetiva.

Então, arbitrariamente escolhemos, por exemplo $Z = 1800$. Temos a reta $400x + 360y = 1800$ intersectando a região factível, como observamos na Figura 5.28.

Figura 5.28- Reta 400x+360y = 1800 intersectando a região factível F.



Fonte: O autor.

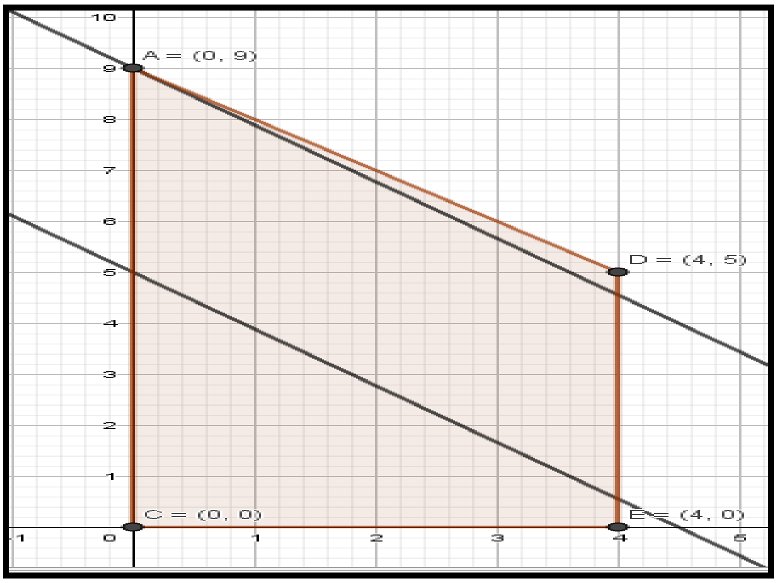
Temos então a reta 400x+360y =1800 intersectando a região factível como se observa –se na figura anterior.

Após analisar o gráfico com a reta traçada de uma das paralelas de Z pode-se perceber quais os possíveis vértices que seriam a solução do problema, tendo em vista isso basta criarmos, por meio da ferramenta “retas paralelas” do Geogebra, outras retas paralelas passando por esses pontos.

Pois, o teorema 1 diz que o problema tem solução ótima se, e somente se, a solução encontra-se em um dos vértices. Então, para obter o ponto ótimo, basta simplesmente traçar retas paralelas, mais alta possível, que toque, pelo menos, um ponto do plano solução, respeitando a inclinação da reta determinada pela função objetivo Z.

Vejamos por exemplo o ponto A, que gera a reta $400x + 360y = 3240$ intersectando a região factível em outra parte. Como podemos ver graficamente na Figura 5.29.

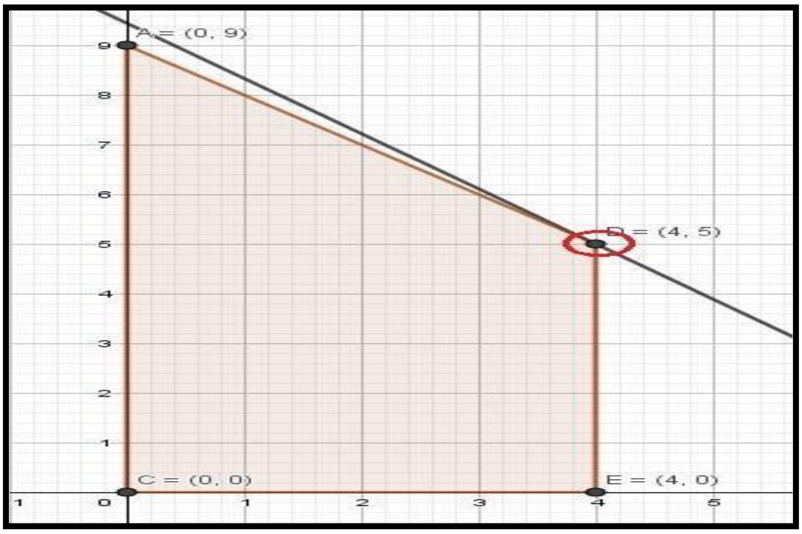
Figura 5.29 - Reta $400x + 360y = 1800$ intersectando a região factível F



Fonte: O autor.

Passo 5: Neste momento pode-se notar, na figura acima, que a coordenada A $(0, 9)$ não é o melhor ponto, pois a parte do polígono que compreende o vértice D ainda não foi tocada, esse será o último ponto tocado e consequentemente a coordenada D $(4,5)$ será solução do problema. Vejamos na Figura 5.30.

Figura 5.30 - Reta $400x + 360y = 3400$ intersectando a região factível F



Fonte: O autor.

Na Tabela 5.4, apresentamos o valor da função objetivo $f\ (x,\ y)$ do Problema em todos os vértices da região factível F.

Tabela 5.4 - Valores da função objetivo do Prob. 5.3 nos vértices da região factível. F

Vértice	*Valor da Função*	*Análise*
$A(0;\ 9)$	$f\ (0,9) = 400.0 + 360.9 = 3240$	
$D(4,\ 5)$	$f\ (4,5) = 400.4 + 360.5 = 3400$	*Valor máximo de f*
$E(0,\ 4)$	$f\ (0,4) = 400.0 + 360.4 = 1400$	
$C(0,\ 0)$	$f\ (0,0) = 400.0 + 360.0 = 0$	*Valo minimo de f*

Fonte: O autor.

Portanto para que o Sr° Raimundo obtenha lucro máximo na sua plantação ele terá que plantar 4 hectares de mandioca e 5 hectares de cana de açúcar, o que lhe renderá um lucro máximo.

Problema 5.4. No Distrito do Anauerapucu localizado a 15 km do Município de Santana, o Sr°. José Félix possui um sitio onde ele produz polpas de cupuaçú e taperebá. O processo de produção é tal que:

- Estas polpas são colocadas em cubas que suportam no máximo 20 kg.
- Ele demora em média 6 minutos para embalar uma polpa de cupuaçú, 3 minutos para embalar uma de taperebá, sabendo que ele dispõe de 90 minutos para fazer a embalagem dessas polpas.
- O lucro dele é de R$ 4,00 e R$3,00 por cada polpa vendida de cupuaçú e taperebá respectivamente.

O problema do Sr°. José Félix é encontrar um modelo de Programação Linear que lhe garanta um maior lucro na comercialização desse produto.

- Primeiramente, para construir um modelo de Programação Linear, temos de identificar o que deseja conhecer no problema. A isto dá-se o nome de variável de decisão, a qual no problema do estaleiro temos duas variáveis de decisão, que são:

  x: quantidade de polpas de cupuaçú;

  y: quantidade de polpas de taperebá.

- segundo, precisamos identificar o objetivo que se deseja alcançar e formular uma função linear contendo as variáveis de decisão. Assim, neste problema, o objetivo é encontrar o maior lucro possível na venda de polpas.

  Vejamos a seguir como encontrar tal função.
- cada polpa de cupuaçú gera um lucro de R$4,00, isto é, ao vender x unidades, teremos lucro de 4x, e para cada polpa de taperebá gera um lucro de R$3,00, ou seja, teremos lucro de 3y.
- desta forma, a função de lucro total, a qual queremos maximizar será uma função da forma:

$$(Max)\ Z = 4x + 3y\ (\textit{Função Objetivo}).$$

Evidentemente que o modelo de programação não se restringe a função objetivo, pois basta observar a quantidade dos recursos disponíveis. Com isso, também é necessário identificar todas as exigências, restrições e limitações estipuladas no problema e expressar matematicamente.

Estas condições constituem as restrições do problema:
- a quantidade máxima de x polpas de cupuaçú e y polpas de taperebá que deverá ser colocada na cuba será de 20kg. Então, podemos descrever:

$$x + y \leq 20\ (1^{a}\ \textit{restrição})$$

- Ele demora em média 6 minutos para embalar x polpas de cupuaçú e 3 minutos para y polpas de taperebá e dispõe-se de 90 minutos para fazer a embalagem. Logo, temos:

$$6x + 3y \leq 90\ (2^{a}\ \textit{restrinção})$$

- Aparentemente formulamos todas as restrições. No entanto, existe um tipo de restrição não tão evidente. Como visto anteriormente, x, y representam a quantidade de polpas de cupuaçú e taperebá respectivamente. Ora não podemos embalar -5 polpas, ou seja, x e y não podem ser negativos.

$$x \geq 0\ e\ y \geq 0$$

Pelas condições das variáveis de não negatividade, o conjunto de soluções factíveis (região factível) fica restrito ao primeiro quadrante. Podemos agora escrever todo o modelo de programação linear do problema:

$$Máx\ Z = 4x + 3y$$

$$\begin{cases} x + y \leq 20 \\ 6x + 3y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

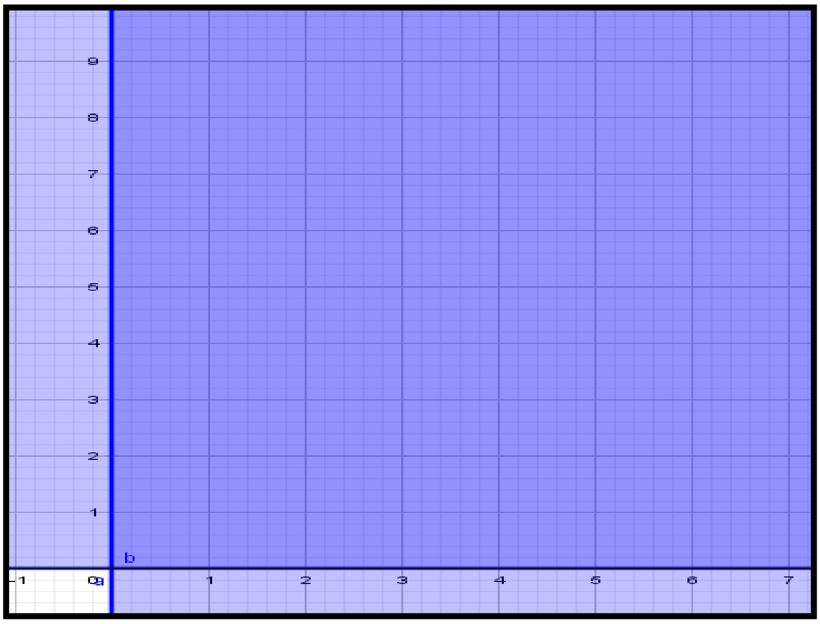
Com o auxílio do Geogebra, o método gráfico para resolução do problema, sugerimos alguns passos a serem seguidos com os alunos em sala de aula podendo o professor acrescentar algumas explicações extras, se julgar necessário.

Passo 1: Consideremos inicialmente as restrições:

$$x \geq 0\ e\ y \geq 0$$

Assim fica entendido que trabalharemos apenas no primeiro quadrante como visto nos problemas anteriores, conforme indica a Figura 5.31.

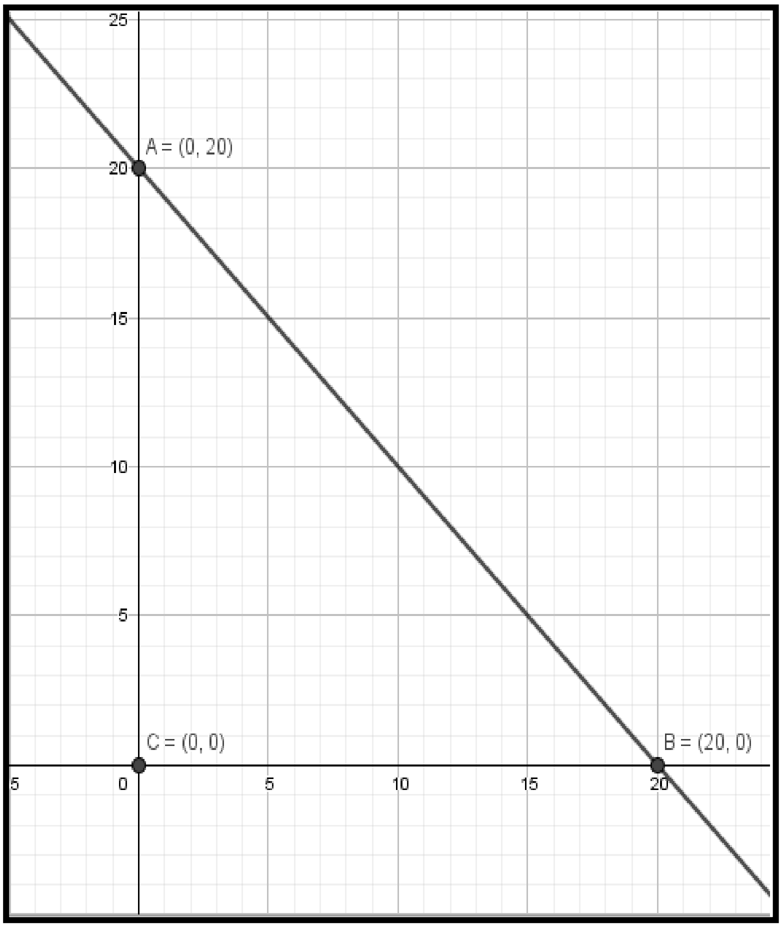
Figura 5.31- Primeiro quadrante definido pelas inequações: $x \geq 0\ e\ y \geq 0$



Fonte: O autor.

Passo 2: consideremos a equação da reta $x + y = 20$, na qual passa pelos pontos A (0,20), B (20,0). Representada graficamente na Figura 5.32.

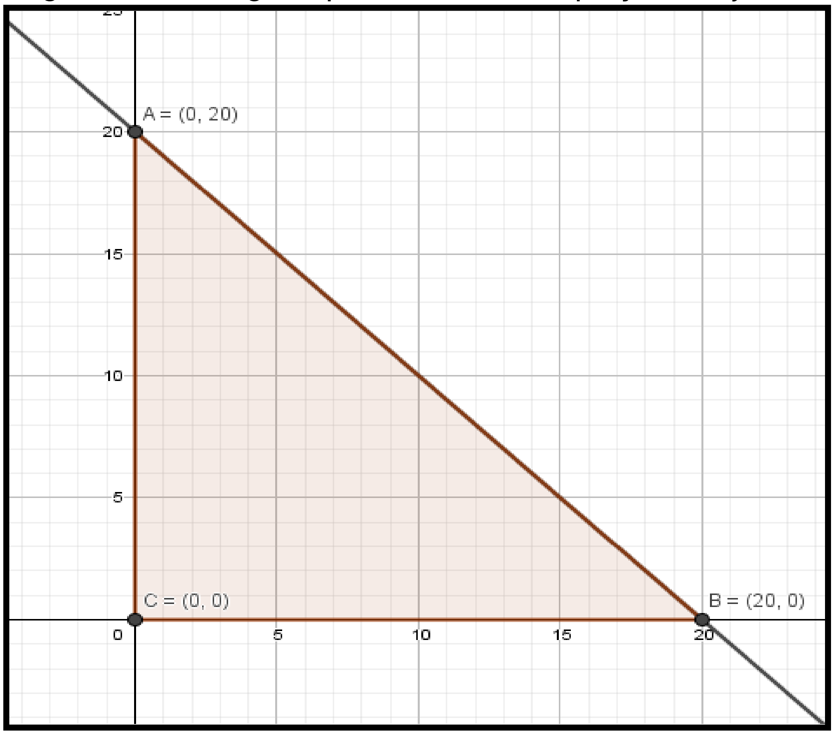
Figura 5.32 – Equação da reta $x + y = 20$



Fonte: O autor.

Passo 3: Após realizar a representação da 1ª restrição associada, necessitamos determinar qual das regiões (subplanos) definida pela reta que satisfaz a inequação $x + y \leq 20$ Para isso, podemos escolher aleatoriamente qualquer ponto do $\mathbb{R}^2$, por exemplo, escolhemos o ponto $C\ (0,0)$. Verificamos que $1.(0) + 1.(0) \leq 20$ (nos problemas propostos nesse trabalho, esse ponto sempre irá satisfazer as inequações associada). Logo, a região que satisfaz a desigualdade está localizada abaixo da reta, e é representada pelo polígono ABC, como mostra a Figura 5.33.

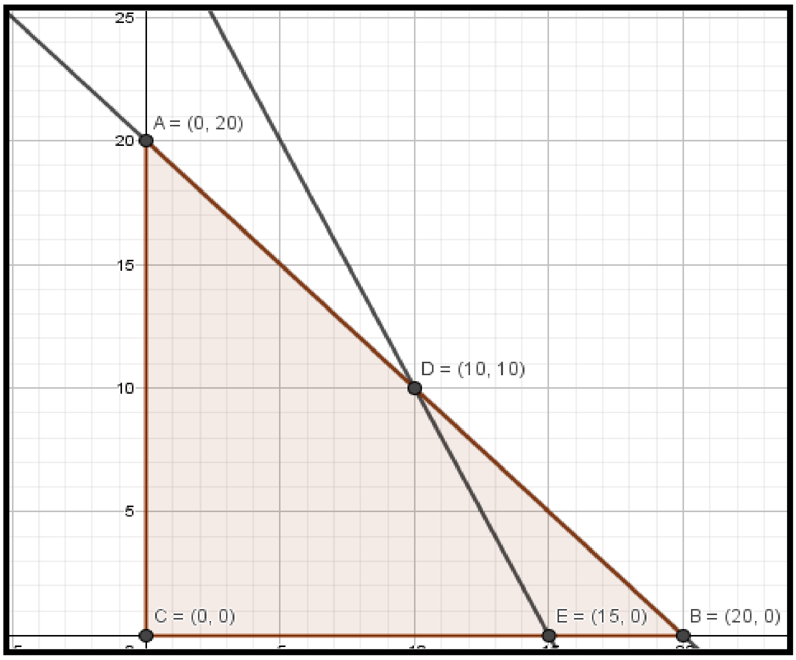
Figura 5.33 - Região que satisfaz a inequação $x + y \leq 20$.



Fonte: O autor.

Ao construirmos a reta representado pela equação $6x + 3y = 90$, percebemos que a mesma intersecta o polígono ABC nos pontos D e E, conforme a Figura 5.34.

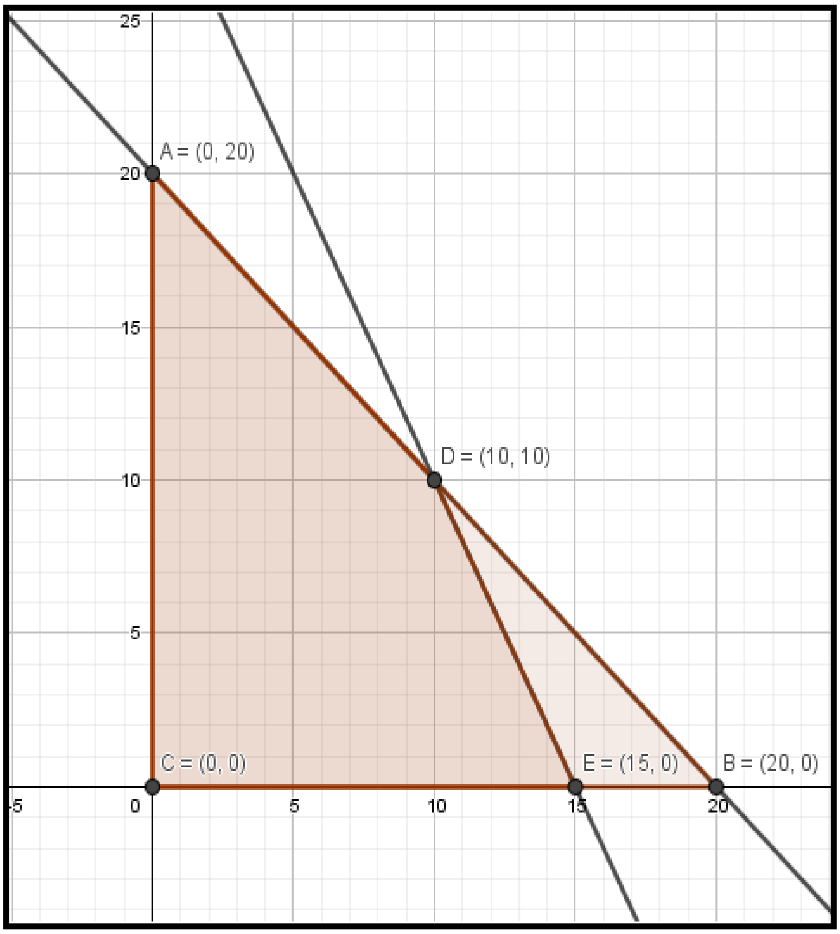
Figura 5.34 – Interseção da equação 6x+3y=90 com o polígono ABC.



Fonte: O autor.

Verificando a região que satisfaz a inequação $6x + 3y \leq 90$, está localizada abaixo da reta, para isso basta considerarmos novamente o ponto C (0,0), vamos ter 6.0 + 3.0 $\leq 90,$ também é necessário que essa região satisfaça $x + y \leq 20$ para isso basta verificar a região que cumpre ambas as desigualdades, analisando o gráfico percebemos que essa região é representada pelo polígono ADEC, como mostra a Figura 5.35.

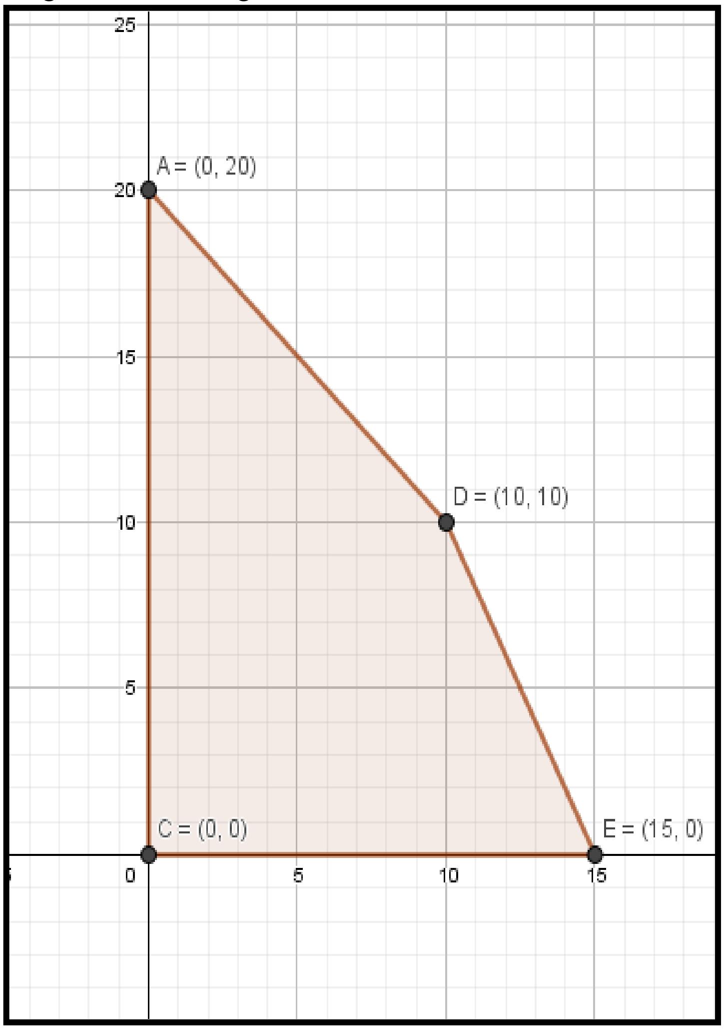
Figura 5.35 **-** Região que cumpre ambas as desigualdades.



Fonte: O autor.

Como todas as restrições foram traçadas temos o chamado Espaço Solução que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo, ou seja, todos os pontos que obedecem a todas as restrições do modelo. No gráfico o Espaço Solução é o polígono convexo desenhado, como podemos ver a seguir na Figura 5.36.

Figura 5.36- Região factível F.

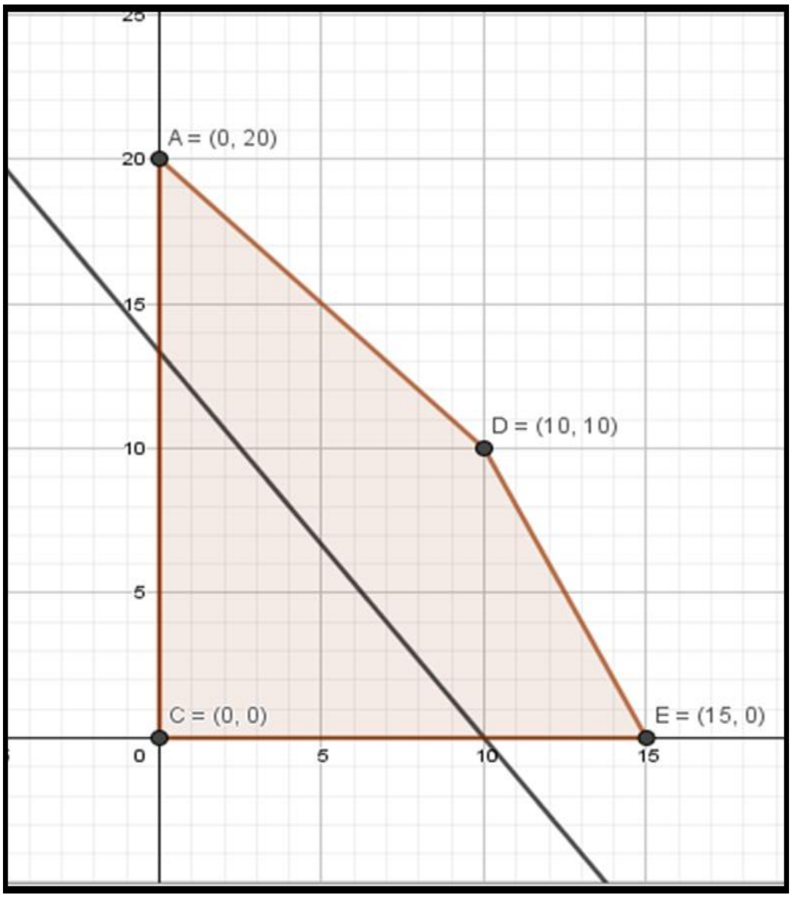


Fonte: O autor.

Passo 4: Precisamos encontrar o ponto da região factível que maximiza a função $Z = 4x + 3y$. Pelo teorema 1 para determinar esse ponto precisamos caminhar na direção dos extremos do polígono. Graficamente esta equação representa uma família de retas paralelas, ou seja, para cada valor de Z, temos uma reta que será paralela a qualquer outra, para outro valor de Z, inclusive para aquela como o valor ótimo da função objetiva.

Então, arbitrariamente escolhemos, por exemplo $Z = 40$. Temos a reta $4x + 3y = 40$ intersectando a região factível, como observamos na Figura 5.37.

Figura 5.37- Reta 4x+3y = 40 intersectando a região factível F



Fonte: O autor.

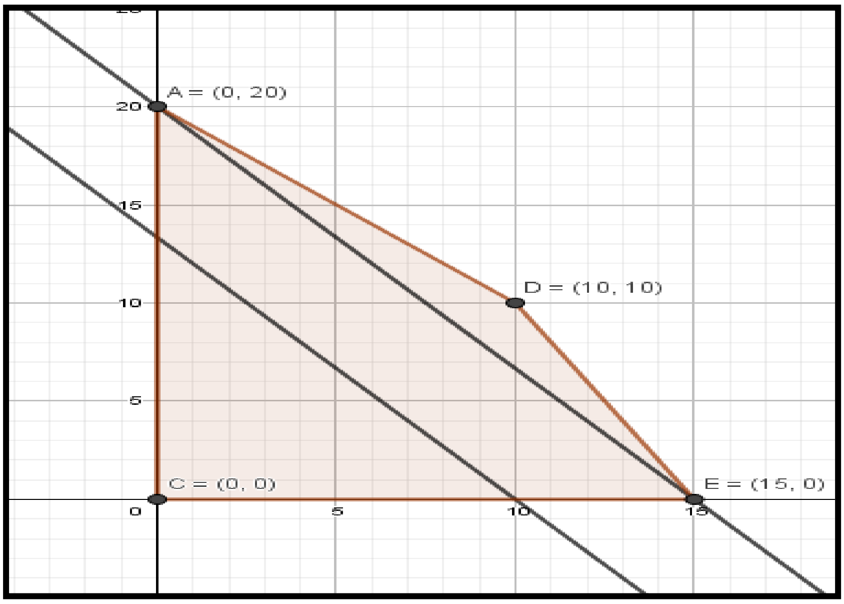
Temos então a reta 4x+3y =40 intersectando a região factível como se observa-se na figura anterior.

Após analisar o gráfico com a reta traçada de uma das paralelas de Z pode-se perceber quais os possíveis vértices que seriam a solução do problema, tendo em vista isso basta criarmos, por meio da ferramenta “retas paralelas” do Geogebra, outras retas paralelas passando por esses pontos.

Pois, o teorema 1 diz que o problema tem solução ótima se, e somente se, a solução encontra-se em um dos vértices. Então, para obter o ponto ótimo, basta simplesmente traçar retas paralelas, mais alta possível, que toque, pelo menos, um ponto do plano solução, respeitando a inclinação da reta determinada pela função objetivo Z.

Vejamos por exemplo o ponto A, que gera a reta $4x + 3y = 60$ intersectando a região factível em outra parte. Como podemos ver graficamente na Figura 5.38.

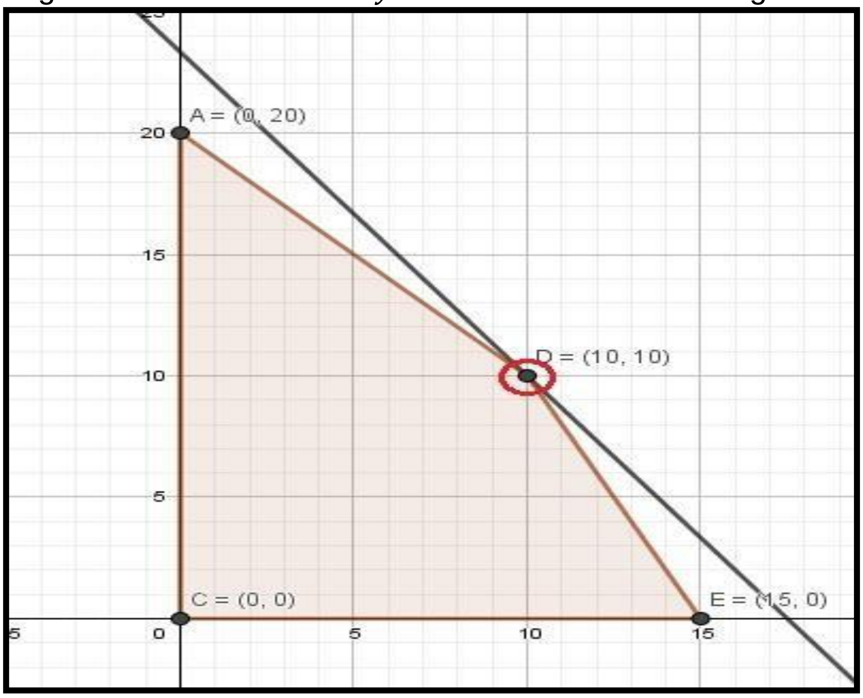
Figura 5.38- Reta $4x + 3y = 60$ intersectando a região factível F.



Fonte: O autor.

Passo 5: Neste momento pode-se notar, na figura acima, que a coordenada A (0, 20) não é o melhor ponto, pois a parte do polígono que compreende o vértice D ainda não foi tocada, esse será o último ponto tocado e consequentemente a coordenada D (10,10) será solução do problema. Vejamos na Figura 5.39.

Figura 5.39- Reta $4x + 3y = 70$ intersectando a região factível F.



Fonte: O autor.

Na Tabela 5.5, apresentamos o valor da função objetivo $f\ (x,\ y)$ do Problema em todos os vértices da região factível F.

Tabela 5.5 - Valores da função objetivo do Prob 5.4 nos vértices da região factível F.

$\boldsymbol{Vértice}$	$\boldsymbol{Valor\ da Função}$	$\boldsymbol{Análise}$
$\boldsymbol{A}(\mathbf{0};\ \mathbf{20})$	$f\ (0{,}20) = 4.0 + 3.20 = 60$	
$\boldsymbol{D}(\mathbf{10},\ \mathbf{10})$	$f\ (10{,}10) = 4.10 + 3.10 = 70$	$Valor\ máximo\ de\ f$
$\boldsymbol{E}(\mathbf{15},\ \mathbf{0})$	$f\ (15{,}0) = 4.\ (15) + 3.0 = 60$	
$\boldsymbol{C}(\mathbf{0},\ \mathbf{0})$	$f\ (0{,}0) = 4{,}0 + 3.0 = 0$	$Valo\ minimo\ de\ f$

Fonte: O autor.

Portanto o Sr. José Félix que deseja aumentar a sua produção de polpas terá que vender 10 polpas de cupuaçú e 10 polpas de taperebá para obter seu lucro máximo.

Após a análise serão realizadas as considerações sobre as aplicações acima, sugerimos que os problemas propostos neste capítulo sejam trabalhados com os alunos seguindo as orientações e etapas apresentadas, acreditando que a utilização do Software Geogebra possa trazer muitas vantagens para aprendizagem, dentre elas temos, como movimentar as figuras em diversas direções e a partir do que o aluno observa o professor pode indagá-los a apresentarem conclusões acerca de padrões observados.

Um dos grandes desafios dos professores de Matemática que estão atuando em sala de aula é fazer com que o aluno relacione o conteúdo que está sendo apresentado com sua aplicação no seu cotidiano. Ou ainda, fazer com que o aluno se interesse pelo conteúdo ministrado e, sobretudo, reconheça que o mesmo é e será importante para sua formação acadêmica e também para sua formação como cidadão participante da sociedade (BRASIL, 1997).

Considerando o estigma da educação Matemática, frisamos que os estudantes estão imergidos no âmbito da tecnologia e esta por sua vez, tem se expandido, logo há real necessidade de eles acompanharem as mudanças que pairam também na própria forma de aprender conteúdo por intermédio de uma faceta mais articulada, mais envolvida com os avanços tecnológicos.

Portanto, o ensino-aprendizagem de Matemática deve ser alicerçado com ferramentas tecnológicas que auxiliem o professor na condução; aprimoramento e desenvolvimento do saber. Promovendo ao discente, reais situações de ensino – aprendizagem, uma vez relacionando a Matemática com problemas do cotidiano para uma melhor associação da prática escolar com o âmbito extraescolar.

6 PROPOSTA DE PLANO DE AULA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR 2D NO ENSINO MÉDIO

6.1 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

Considerando a importância dos livros didáticos adotados pela rede de ensino pública e privada do Amapá para o processo de ensino- aprendizagem, bem como, o suporte de conhecimento cultural, científico e literário, faz-se necessário analisar como o conteúdo de Programação Linear é abordado nos referidos livros voltados para o Ensino Médio. É necessário ainda, verificar se os mesmos fazem referência a alguma ferramenta educacional (software) no conteúdo acima.

Para tanto, consultando-se o guia digital do Programa Nacional do Livro Didático-PNLD (2018), ganha destaque a coleção "Matemática: contextos e aplicações", do renomado autor Dante (2016), por ser amplamente conhecido e utilizado em escolas públicas e privadas.

O livro apresenta duas referências sobre a Programação Linear, sendo a primeira na introdução do capítulo 5, que trata dos Sistemas Lineares, num pequeno texto sobre as regras do jogo Sudoku, e a segunda na seção "Outros Contextos", que apresenta "temas interessantes e curiosos que tratam de situações práticas, articulando a Matemática com outras disciplinas", destacando a importância dos sistemas de equações e inequações simultâneas na resolução de problemas nas mais diversas áreas, como na economia, transportes, alimentação (dietas), etc. O autor motiva o discente relatando a necessidade de encontrar valores máximo ou mínimo de uma função sujeita a restrições.

O roteiro apresentado por Dante (2016) não possibilita que o aluno elabore suas próprias conjecturas e construa suas conclusões, à medida que desenvolve a atividade proposta.

A apresentação de uma resolução do problema, com o auxílio de um software, poderia despertar o interesse dos discentes para o tema, visto que a informática possibilita dinamismo, agilidade e a capacidade de entrelaçar diferentes formas de linguagem, despertando mudanças no processo de ensino-aprendizagem.

6.1.1 Análise do Mapeamento da PL nos Livros Didáticos.

Considerando a importância dos livros didáticos de Matemática contemplados pela Rede pública e privada de ensino do Estado do Amapá para o processo de ensino- aprendizagem, bem como, faz-se necessário analisar como o conteúdo de Programação Linear é abordado nos referidos livros voltados para o Ensino Médio.

Para tanto, analisando o guia digital do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD, podemos fazer o seguinte mapeamento sobre quais autores abordam a PL em seus respectivos livros, como veremos na Figura 6.1.

Tabela 6.1 – Coleções do PNLD

Coleção - Editora	Autor (es)	Aborda PL?
Matemática: Contexto & Aplicações - Ática	Luiz Roberto Dante	Sim
Matemática: Ensino Médio - Saraiva	Kátia Stocco Smole Maria Ignes Diniz	Sim
Matemática: Paiva - Moderna	Manoel Paiva	Não
Matemática: Volume Único - Ática	Luiz Roberto Dante	Sim
Matemática: Ciência e aplicações – Saraiva	Gelson Iezzi Osvaldo Dolce	Sim
Conexões com a Matemática - Moderna	Juliane Matsubara Barroso	Não

Fonte: O autor

Conforme observado na Figura 6.1, os autores que trabalham com a PL em seus livros abordam a Programação Linear como um assunto optativo, fazendo uma breve introdução sobre a história da PL e também mostram a importância do uso de sistemas lineares e inequações em problemas de Economia, transporte, dietas, entre outros.

Dante (2014) em seu Livro intitulado “Matemática: Contexto & Aplicações – Ática”, após definir o que é Programação Linear ele introduz um problema que é resolvido e faz somente um passo a passo de como resolver um Problema de Programação Linear pelo método geométrico, descrito abaixo:

> Diante de um Problema de Programação Linear, consideramos a seguinte orientação para resolvê-lo: Estabelecemos a função objetivo, isto é, a função que queremos maximizar ou minimizar. Transformamos as restrições impostas no problema num sistema de inequações lineares. Traçamos o gráfico do polígono convexo correspondente a essas restrições determinando as coordenadas dos seus vértices. Calculamos os valores da função objetivo em cada um dos vértices. O maior desses valores é o máximo e o menor é o mínimo da função objetivo. Voltamos ao problema e damos a sua solução. (DANTE; p.125, 2016).

Nesta direção, analisando também o livro “Matemática: Ensino Médio – Saraiva” de Smole & Diniz (2013) que apresenta referências sobre a Programação Linear, sendo uma referência na introdução do capítulo que trata dos Sistemas Lineares, e a outra referência na seção “Outros Contextos”, que apresenta temáticas relevantes e curiosas que tratam de situações práticas, correlacionando a Matemática a outras disciplinas, destacando a importância dos sistemas de equações e inequações simultâneas na resolução de problemas nas mais diversas áreas, como transportes, economia, entre outras.

De acordo com o mapeamento realizado, observou-se que alguns autores motivam o discente relatando a necessidade de encontrar valores máximo ou mínimo de uma função sujeita a restrições. No entanto, o roteiro apresentado pelos autores não possibilita que o aluno elabore suas próprias conjecturas e construa suas conclusões, à medida que desenvolve a atividade proposta.

Diante da análise realizada, constatou-se que alguns autores, como Dante (2016), Smole & Diniz (2013), abordam a temática em questão de forma tradicional, sem adaptação aos recursos metodológicos disponíveis na atualidade. Pois, o uso de um software matemático ajudaria a ilustrar e motivar a resolução destes problemas. A apresentação de uma resolução do problema, com o auxílio de um software, poderia despertar o interesse dos discentes para o tema, visto que, a informática possibilita dinamismo, agilidade e a capacidade de entrelaçar diferentes formas de linguagem, despertando mudanças positivas no processo de ensino-aprendizagem.

Com isso, repensa-se a real necessidade de se trazer a proposta de atividade ancorada na Sequência Didática (SD), a qual é sem dúvida uma ferramenta de alto teor, uma vez que norteia o educador a construir e a modificar o trajeto do ensino-aprendizagem de Matemática.

6.2 CONTEÚDOS EM SALA DE AULA

Importante destacar que no capítulo anterior apresentamos detalhadamente, como sugestão, a sequência de etapas dos PPL usando o Geogebra na resolução de alguns problemas, que podem ser adotadas pelo docente durante a execução das atividades na sala de aula. Com isso, a seguir colocaremos como proposta alguns pontos importantes que precisam constar e ter devida atenção por parte dos professores durante a elaboração do seu plano de aula.

Para desenvolvimento de uma proposta de ensino de Programação Linear 2D, voltada para o Ensino Médio, faz-se necessário o domínio de conteúdos prévios, que podem ser revisados pelo docente, em aulas anteriores, ou mesmo no decorrer da atividade.

A proposta tem como conhecimentos prévios:

- Mostrar autonomia para utilização do *software* Geogebra.
- Identificar os elementos e os tipos de polígonos - ângulos, lados, vértices, regulares e irregulares, côncavo e convexo;
- Representar graficamente pontos e retas no plano;
- Representar graficamente equações e inequações lineares com duas incógnitas;
- Identificar planos e semiplanos.
- Resolver graficamente sistemas de equações e inequações lineares com duas incógnitas;
- Identificar as inequações que determinam regiões no plano.

Os objetivos da proposta de aprendizagem são:

- Interpretar e equacionar problemas;
- Representar retas em referenciais cartesianos do plano;
- Identificar regiões do plano limitadas por retas;

- Identificar a posição relativa de retas e determinar pontos de intersecção de retas;
- Identificar geometricamente pontos do plano como solução ótima de um problema.

- Verificar analiticamente que determinados pontos são solução ótima de um problema;
- Escolher, analisar e validar a solução de um problema.

6.3 MODELAGEM DO PROBLEMA

Certos cuidados são necessários na modelagem dos problemas de programação linear, com isso é conveniente que o professor junto com os alunos defina etapas, para melhor orientá-los. De acordo com Polya (2006) "A melhor coisa que pode um professor fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa. As indagações e sugestões que passamos a discutir tendem a provocar tal ideia”.

É interessante o professor levantar alguns questionamentos com os alunos sobre o problema, tais indagações poderão ajudá-los a compreender melhor e escrever matematicamente a situação do problema. Temos abaixo algumas perguntas como sugestão:

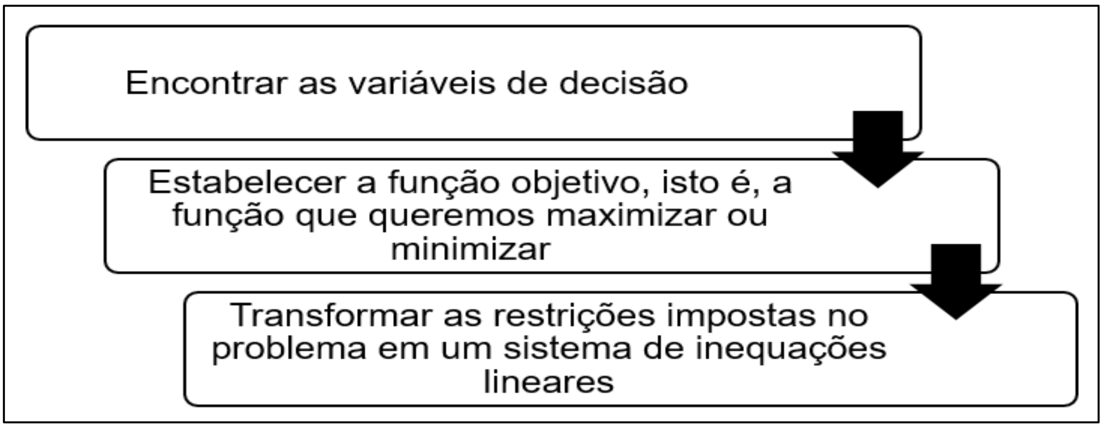
- Quais são as grandezas envolvidas?
- Quais dados foram apresentados?
- O que deseja descobrir (variáveis)?
- Será que é possível escrever sentenças matemáticas que representam a situação do problema?

E agora, como encontrar uma resposta?

Com isso, o aluno na tentativa de modelar um PPL trará consigo um momento de reflexão sobre seus conhecimentos prévios em Matemática. É necessário que o docente tenha uma atenção com esta etapa inicial, pois, não é tão simples aos alunos essa transcrição das informações do problema para um formato ou modelo matemático. Para encontrar o modelo matemático de um Problema de Programação

Linear sugerimos aos professores os problemas do capítulo 5, o qual consta, na Figura 6.1, detalhadamente as seguintes orientações:

Figura 6.1 - Orientações para modelagem de um PPL



Fonte: O autor.

Neste momento, analisar a situação modelada e estudar as restrições do problema aproximará o aluno do objetivo do problema. Buscar soluções por testes aleatórios é uma atividade interessante para criar estratégias de cálculo envolvendo a função objetivo e as restrições ao mesmo tempo. Mas, após o discente fazer uso dessas tentativas para encontrar a solução, é importante que nesse momento o professor apresente o método geométrico ao aluno, para que o mesmo possa visualizar graficamente as possíveis soluções e compreenda melhor o significado do modelo matemático encontrado anteriormente.

6. 4 O USO DO GEOGEBRA EM SALA DE AULA

A aplicação dos conceitos da Programação Linear, sobretudo o estudo do Método Gráfico, contribui para o aprofundamento de conteúdos importantes do ensino de nível médio, pois se utiliza das equações e inequações polinomiais de primeiro grau, dos polígonos e seus elementos, da geometria espacial de posição, com noções de par ordenado, sistema de coordenadas cartesianas, ponto, reta, plano, semiplano e paralelismo, das matrizes, sistemas de equações lineares e suas propriedades, expandindo a abrangência de conteúdos explorados no Ensino Médio.

A proposta de abordagem da Programação Linear visa desenvolver uma atividade que auxilie os docentes a despertar em seus discentes o interesse pelo tema.

Tal proposta, que pode ser aplicada em grupo ou individualmente, conta com o auxílio do Geogebra (2017), facilitando o estudo e a compreensão da parte gráfica, a interpretação dos sistemas de equações e inequações, bem como a visualização das regiões planas. A utilização do software Geogebra (2017) justifica- se por ser gratuito e disponível em diversos equipamentos, como: PC, notebook, tablet e smartphone, viabilizando o acesso de todos os alunos.

Antes de iniciar-se a resolução de problemas é aconselhável que o Geogebra (2017) seja apresentado aos discentes, para que possam manuseá-lo, permitindo que estejam aptos e seguros quanto à utilização do software. O docente pode solicitar que eles insiram no software algumas equações e inequações lineares com duas incógnitas ou mesmo que construam polígonos, livremente, explorando, principalmente, os conceitos de lado, vértice, côncavo e convexo.

6.4.1 Sequência didática para aplicação

Esta sequência didática é importante que seja desenvolvida em um laboratório de informática, dotado de equipamento Datashow, pois permite maior dinamismo e melhor interação na exploração e principalmente, na investigação das soluções dos problemas, e poderá ser aplicada individualmente ou em grupos, de acordo com a estrutura física da escola ou planejamento do professor.

Vimos no capitulo 3 alguns dos vários assuntos desenvolvidos na matemática e que podem ganhar um atrativo extra com a introdução da Programação Linear. Com isso, o trato com PPL se daria a partir do momento que os alunos já terem como pré-requisito estudado estes assuntos, e também um conhecimento básico sobre os principais comandos e ferramentas do software Geogebra 2D, visto no capitulo 4, onde se faz necessário para que durante a resolução dos problemas propostos haja melhor entendimento.

No capítulo 5, trazemos como proposta trabalhar problemas com enunciados direcionados a temas da região norte, onde o professor pode adaptar, pesquisar ou criar com os alunos outros modelos de programação por meio dos conhecimentos e experiências trazidas por eles, podendo levar em consideração a região geográfica ou aspectos culturais dos alunos. Pois acreditamos que, quando o aluno visualiza algumas aplicações do cotidiano nas teorias expostas no Ensino Médio, isso torna o ensino mais atrativo e prazeroso.

6.5 RESULTADOS E REFLEXÕES ESPERADOS COM A PROPOSTA

Acreditamos que as propostas desse plano de aula favorecem alguns pontos importantes que devem estar presentes no alunado de matemática do Ensino Médio, são eles:

- Fazer os alunos vivenciarem uma aplicação da Matemática de maneira simples, com métodos criativos e lógicos, reconhecendo cada vez mais a importância da Matemática no seu cotidiano;
- Aproximação da relação entre professor-aluno, tornando-os parceiros na interpretação e resolução dos problemas;
- As aplicações voltadas a temas da Região Norte servem para conectar os alunos nortistas ao estudo da Matemática, uma vez que o pensamento matemático vem sendo deixado de lado por grande parte dos alunos;
- Despertar nos alunos o desejo de aplicar os conhecimentos adquiridos em novas situações.

Entretanto, faz-se necessário que os professores estejam atentos, pois de nada adianta um assunto interessante, aliado a uma boa metodologia, com bons recursos didáticos, se uma atividade de ensino e aprendizagem não for conduzida sob olhares efetivamente comprometidos, bem preparados, planejados e com objetivos bem definidos.

Os professores devem verificar a todo o momento o andamento das atividades propostas. Devem conversar com pequenos grupos de alunos, questionar individualmente, acompanhar soluções propostas, orientar rumos, enfim, estar em condições de auxiliar e conduzir os alunos na busca dos objetivos da atividade.

Portanto, a expectativa é que este trabalho possa ajudar e inspirar professores e admiradores da Matemática, a aplicar a teoria de resolução de problemas de otimização linear com alunos do Ensino Médio, problemas esses que podem ser baseados ou elaborados em situações e especificidades de cada região do Brasil.

Procuramos passar o conteúdo de uma forma bem objetiva e didática e esperamos ter contribuído de alguma forma com ensino da programação linear no $\mathbb{R}^2$, principalmente com a sequência didática apresentada no capítulo 5, pois é uma forma do aluno compreender geometricamente e algebricamente o conteúdo de PL no espaço bidimensional e, ao mesmo tempo, enxergar a utilidade desse tema no dia a dia.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da Programação Linear em 2D é uma ferramenta poderosa na obtenção de resultados ótimos, pois apresenta-se como uma proposta para expor uma pequena parte dessa teoria que é tão grandiosa no Ensino Médio. Permite ainda, mostrar aos discentes que é possível moldar um problema de sistemas de equações lineares e relacioná-lo com problemas do dia a dia e, a partir de casos simples é possível mostrar aos discentes em especifico aos da Região Norte do país, principalmente para os que vivem em área rural, que esse tema faz parte da sua realidade econômico-financeira.

Então, a ideia é que os docentes possam acessar a proposta apresentada, utilizando o software Geogebra, como ferramenta de apoio, que irá contribuir de forma pedagógica facilitando o trabalho de colegas que não têm disponibilidade e tempo para pesquisarem modelos diferentes de aplicações da Matemática.

Este programa permite introduzir essa teoria com exemplificação prática na sala de aula, mesmo porque, os alunos já detém conhecimentos prévios, obtidos tanto no Ensino Fundamental como no próprio Ensino Médio, cabendo citar a parte computacional, que serve como mais uma fator de motivação, tornando essa abordagem perfeitamente aplicável, onde está se propondo.

Com o objetivo de aumentar a concentração do aluno através da utilização da ferramenta computacional, e aumentar seu leque de conhecimento com uma aplicação visível e "palpável" da matemática, mostrando que a teoria da Programação Linear pode ser tratada na educação básica associada com assuntos já praticados nas salas de aulas, abordando-a como uma ferramenta de vasta aplicação e resolução de problemas práticos que podem estar ao seu alcance de entendimento.

Entende-se então, que a Programação Linear em 2D aplicada nesse nível de ensino, representa um ganho valioso para o discente, pois ao ponto que se desenvolve, da forma proposta para sua abordagem, os alunos reafirmam conhecimentos algébricos, aumentam conhecimentos em informática e relacionam sua aplicação com a tecnologia que se encontra a seu alcance, nos laboratórios disponíveis na escola.

Um questionamento cabível aqui, é o seguinte: seria possível aplicar tal teoria, da maneira proposta nesse nível de ensino? Acredita-se que sim, pois as escolas que dispõem de laboratórios de informática que permitem implementar a teoria da Programação Linear por meio do Software Geogebra, facilitando assim a exposição e mostrando que se trata de uma abordagem aplicável no Ensino Médio, de modo a oferecer mais uma forma de aprendizagem do discentes, tomando como ênfase a apreensão de sua atenção no conteúdo.

Portanto, conclui-se, que é sim, uma abordagem aplicável no Ensino Médio, pode ser uma saída do marasmo de práticas rotineiras, nos possibilita trabalhar de uma forma mais técnica, científica, dentro dos seus limites, lógico, sabendo que se trata de apenas “um fio da meada” em relação a teoria abordada, mais que nota-se que venha causar um resultado proveitoso e que pode vir a ser explorado em projetos posteriores através de outros softwares ou com outras abordagens dentro desse grau de ensino, podendo então, ser objeto de estudo em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, L.C.L.de; NÓBRIGA, J.C.C. **Aprendendo matemática com o Geogebra.** São Paulo: Exato, 2010.

ARENALES, M; ARMENTANO, V; MORABITO, R; YANASSE, H. **Pesquisa Operacional.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2007 – 6ª impressão.

BASNIAK, M.I; ESTEVAM, E.J.G. **O Geogebra e a Matemática da Educação Básica: frações, estatística, círculo e circunferência.** Curitiba: Ithala, 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

CASTRO; A.P.G. **Uma proposta pedagógica para o Ensino do Número de Ouro através do software Geogebra na Educação Básica**. Dissertação (Mestrado). Macapá, 2017. Visitado em 20 de janeiro de 2019.

COLIN, E. C. Pesquisa Operacional. **170 Aplicações em Estratégia, Finanças, Logística, Produção, Marketing e Vendas**. Rio de Janeiro: LTC, 2013. p. 21.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, v. 2, 2016.

DANTE, L.R. **Matemática, volume único.** São Paulo: Ática, 2005.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Geogebra- Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria** – Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: SBM (Sociedade Brasileira de Matem, 1991.

LIMA, E.L. **A matemática do ensino médio.** Rio de janeiro: SBM 2006.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino.** 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LINS, M. P.E. **Programação Linear com aplicações em teoria de jogos e avaliação de desempenho**, São Paulo: Editora Interciência,2006.

MARINS, F. A. S. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica, Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2011.

MORETTIN, P.A; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. **Cálculo: função de uma e várias variáveis.** 2 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

PASSOS, A. N. **Estudos em Programação Linear**. Dissertação de Mestrado. Unicamp – Campinas, 2009.

PASSOS, A.N. **Estudos em Programação Linear**. 2009. 169 f. Dissertação (Mestre) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. Disponível em: <http://cutter.unicamp.br/document/?code=000470278>. Acesso em: 29 fev. 2019.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

PRADO, D.S. **Programação linear**. Belo Horizonte: Editora Desenvolvimento Gerencial, (1999).

SALLES NETO, L. L. **Tópicos de Pesquisa Operacional para o Ensino Médio**. Curso de curta duração ministrado/Extensão. Rio de Janeiro. Volta Redonda: UFF, 2006.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I. Matemática Ensino Médio. 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

ZACHI, J. M. **Problemas de Programação Linear:** uma proposta de resolução geométrica para o Ensino Médio com o uso do Geogebra, UNESP, Araraquara, SP, 2016.