COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Iran Marcelino de Sousa

A PEDAGOGIA UERÊ-MELLO, A NEUROCIÊNCIA E A MATEMÁTICA

Rio de Janeiro
2019

Iran Marcelino de Sousa

A PEDAGOGIA UERÊ-MELLO, A NEUROCIÊNCIA E A MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof(a). Dra Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa.

Rio de Janeiro
2019

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S725 Sousa, Iran Marcelino de

A pedagogia Uerê-Mello, a neurociência e a matemática/ Iran Marcelino de Sousa. – Rio de Janeiro, 2019.

81 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Pedagogia UERÊ-MELLO. 3. Neurosciência. 4. Números racionais. 5. Razão e proporção. I. Costa, Liliana Manuela Gaspar Cerveira da. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves da Silva – CRB7 5692.

Iran Marcelino de Sousa

A PEDAGOGIA UERÊ-MELLO, A NEUROCIÊNCIA E A MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Profª Drª Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa (Orientadora)
PROFMAT – Colégio Pedro II

____
Doutora Yvonne Bezerra de Mello
Projeto- Uerê

____
Profª Drª Maria de Lourdes Rocha de Assis Jeanrenaud
PROFMAT- Colégio Pedro II

____
Prof. Dr. Sc. Daniel Felipe Neves Martins
PROFMAT - Colégio Pedro II

Rio de Janeiro
2019

Dedico este trabalho à minha mãe, Marinete, meu maior exemplo de vida, minha guerreira. Meus valores devo-os a ti. Te amo!

Iran

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo ao Meu Criador por ter condições de chegar até aqui; à minha família maravilhosa, Josi, Pedrão e Paulão, meus amores, meus incentivadores; aos meus professores pelos ensinamentos dados; à minha orientadora pela paciência, carinho e dedicação; aos colegas da turma do PROFMAT de 2016 do Colégio Pedro II por manter um ambiente descontraído e propício à aprendizagem; à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (*CAPES*) pela concessão da *bolsa* de estudos nos primeiros anos do curso de mestrado.

“Estamos convencidos de que nós, educadores, temos uma tarefa urgente: precisamos nos deseducar do cânone limitador para que tenhamos condições de ampliar os horizontes do mundo, nossos e das nossas alunas e alunos. Educação deve gerar gente feliz, escrevendo, batendo tambor, dando pirueta, imitando bicho, fazendo ciência e gingando com gana de viver.” (Luiz Antônio Simas e Luiz Rufino – Livro: Fogo no Mato: A ciência encantada das macumbas).

RESUMO

SOUSA, Iran Marcelino de. **A Pedagogia UERÊ-MELLO, a Neurociência e a Matemática**. 2019. 81 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

Este trabalho tem como objetivo apresentar a pedagogia UERÊ-MELLO e os resultados parcialmente obtidos na aplicação de seus preceitos numa aula de matemática. Também foi efetuada breve pesquisa sobre os princípios básicos da neurociência e sua importância no binômio ensino/aprendizagem. Foi apresentado como os conceitos de razão e proporção são desenvolvidos no livro V dos Elementos de Euclides e uma sugestão de como devem ser abordados atualmente. É efetuado um embasamento teórico a respeito dos números racionais e como os tema, razão e proporção, é exposto na Base Nacional Comum Curricular. Por fim são relatadas as atividades realizadas em sala de aula no projeto CAIS do Colégio Pedro II, campus Engenho Novo II e que trataram do tema mencionado.

Palavras-chave: Pedagogia UERÊ-MELLO; Neurociência; CAIS/CP2; Elementos de Euclides, Números Racionais; Razão; Proporção; BNCC.

ABSTRACT

SOUSA, Iran Marcelino de. **A Pedagogia UERÊ-MELLO, a Neurociência e a Matemática**. 2019. 81 f. . Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

This paper aims to present the UERÊ-MELLO pedagogy and the results partially obtained in the application of its precepts in a mathematics class. It also was performed a brief research about basic neuroscience's principles and its importance in binomial teaching/learning. It was stated how the ratio and proportion concepts were developed on Euclid's Elements, book V and a proposal of how they should be addressed nowadays. It was performed a theoretical background concerning rational numbers and how the theme, ratio and proportion, is exposed in the Base Nacional Comum Curricular. At last, it is described the performed classroom activities from Colégio Pedro II's (Campus Engenho Novo's II) CAIS project which deals with the aforementioned subject.

Keywords: UERÊ-MELLO pedagogy; neuroscience; CAIS/CPII; Euclid's Elements; rational numbers; ratio; proportion; BNCC.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A busca de novas propostas de ensino deve ser uma ocupação obrigatória para quem se propõe a tarefa de ensinar. Entre as diferentes propostas pedagógicas destacam-se as pedagogias ativas, como a sala de aula invertida e o ensino híbrido, que colocam o aluno como protagonista de sua aprendizagem. Neste contexto surge a pedagogia UERÊ-MELLO que apresenta o diferencial de resgatar alunos com bloqueios cognitivos resultantes de estresse emocional, de traumas físicos, e de perturbação crônica devido a morar em áreas onde a violência é cotidiana, aliada a outros motivos. Esta proposta pedagógica permite a obtenção de sucesso onde outros veem fracasso, demonstrando que esses alunos não são "casos perdidos", e que têm em si um grande potencial de aprendizagem.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar de que forma a pedagogia UERÊ-MELLO pode contribuir para promover o sucesso do processo ensino/aprendizagem em alunos que convivem com situações de estresse e violência e que, por isso, se encontram altamente desmotivados para a escola formal com sua pedagogia tradicional. O capítulo dois apresenta um breve histórico da pedagogia UERÊ-MELLO, e descreve algumas de suas práticas, onde se enunciam as suas características, e se realçam as suas particularidades. O conhecimento da pedagogia UERÊ-MELLO foi obtido tanto pela pesquisa bibliográfica como pelas visitas efetuadas ao Projeto UERÊ, onde foi possível conversar com Yvonne Bezerra de Mello e assistir às práticas desenvolvidas de acordo com esta proposta pedagógica.

Como a pedagogia UERÊ-MELLO foi desenvolvida empiricamente com a aplicação das descobertas em neurociência, no capítulo 3, são elencados conceitos ligados a este campo científico, obtidos por uma pesquisa bibliográfica sobre o tema. A importância da emoção, da curiosidade, da atenção, do modo como a memória é formada e quais são os tipos de memória são alguns dos conteúdos aqui abordados e de grande relevância no planejamento e na aplicação em sala de aula.

No capítulo 4, visando promover um auxiliar teórico que permita aos professores obter um fundamento matemático sobre a temática razão e proporção, é apresentada a maneira como Eudoxo a introduz no livro V dos Elementos de Euclides, seguida das sugestões metodológicas propostas pelo professor Geraldo

Ávila e a forma como a BNCC dilui o tema ao longo dos anos do ensino fundamental II. Também se efetua uma construção do conjunto dos números racionais.

No derradeiro capítulo é descrita uma atividade executada segundo a proposta da pedagogia UERÊ-MELLO que foi aplicada em uma turma do ciclo I das Classes de Adequação Idade Série (CAIS), no Colégio Pedro II – Campus Engenho Novo II, e segue-se uma análise dos resultados apresentados pelos alunos.

2 O PROJETO UERÊ E A PEDAGOGIA UERÊ-MELLO

Yvonne Bezerra de Mello é a idealizadora do PROJETO UERÊ, que teve início, em 1993, debaixo de um viaduto no cento da cidade do Rio de Janeiro com os sobreviventes da chamada “Chacina da Candelária” e com outras crianças das comunidades próximas, principalmente da favela do Coqueirinho. Permaneceu ali de maneira precária durante quatro anos fornecendo alimentação e escolaridade para cerca de 80 crianças por dia. Três anos mais tarde, os moradores desta favela foram deslocados para o Complexo da Maré, levando Yvonne a acompanhá-los, fundando em 1998 a escola-modelo do PROJETO UERÊ.

> A minha ideia não foi a de me contrapor à escola formal, mas sim montar uma estrutura de pensamento e de armazenamento de informações para aqueles que a escola formal tem dificuldades de absorver e treinar professores da escola formal no entendimento desses alunos. Quando traumas e bloqueios forem coisas do passado, eles poderão seguir os currículos sem problemas. (MELLO, 2016, p. 18).

O Projeto UERÊ-MELLO está localizado na localidade da Baixa do Sapateiro, no Complexo da Maré, uma da muitas regiões violentas da cidade do Rio de Janeiro. Atualmente atende 420 crianças. Tem como alvo principal jovens de seis a dezoito anos que apresentam bloqueios cognitivos causados por uma gama de diferentes motivos dentre os quais os contextos social e familiar desestruturados, a violência seja ela verbal ou física, a dependência digital e outros.

As atividades desenvolvidas pelo projeto compreendem, além de aulas de alfabetização e de complemento do ensino das disciplinas formais como História, Geografia, Matemática, Língua Portuguesa, e outras do próprio Programa UERÊ-MELLO como: Leitura e biblioteca, Saúde, Ecologia, Estatuto da Criança e do Adolescente e Ensino Étnico-Racial. Também são oferecidas aulas extracurriculares (oficinas) de: Dança, Música, Arte, Capoeira e Informática. Além disso, o projeto oferece três refeições diárias (café da manhã, almoço e lanche). Há casos de crianças que quando começaram a frenquentar a escola UERÊ estavam numa situação em que não existiam para a sociedade, já que ninguém conhecia suas origens e não tinham documentos. A sua sobrevivência devia-se à rede solidária da comunidade. O projeto procura encaminhar essas situações para quem de direito, já que os alunos do UERÊ devem, preferencialmente, frequentar também colégios públicos da comunidade.

Mais de 130.000 crianças já tiveram contato com a Pedagogia UERÊ-MELLO em diversas cidades do Brasil. Sendo, desde 2009, uma das políticas públicas de educação na cidade do Rio de Janeiro. É também implementada em outras redes públicas no Brasil (Minas Gerais, Pará, Pernambuco, São Paulo) e no exterior, principalmente em campos de refugiados na Alemanha, Grécia e Suécia, por exemplo.

Para a capacitação de professores e técnicos que implementem as práticas pedagógicas preconizadas por esta proposta pedagógica, além do ensino à distância são oferecidos cursos presenciais no centro de treinamento UERÊ-MELLO.

O índice de sucesso do projeto é medido pelo número de crianças que tiveram o seu futuro modificado de alguma forma, devido à sua ação.

Em entrevista a revista Marie Claire de fevereiro de 2009, Yvonne relata um dos casos de sucesso do UERÊ-MELLO.

> **MC:** Conte uma história de sucesso.
> **YBM:** Tem a Viviane, que chegou ao Uerê com 10 anos. Foi uma aluna brilhante e, com 15, foi aceita num estágio de hotelaria. Aos 18, foi contratada como assistente júnior do diretor de um hotel. Hoje, continua na empresa e é secretária do departamento jurídico. Cursa o terceiro período de administração, mora num bairro de classe média com a mãe. (MELLO, 2009)

2.1 A pedagogia UERÊ-MELLO

A pedagogia UERÊ-MELLO se baseia na experiência de anos de trabalho de Yvonne com crianças em zonas de conflitos, campos de refugiados, e menores em situação de rua, aliada ao conhecimento que pesquisas da neurociência trouxeram para o campo do ensino/aprendizagem:

> Estudar as funções do cérebro me permitiu entender as emoções e o processo psicológico dos traumas no aprendizado. De todos os estudos que realizei, o que me pareceu mais próximo da solução dos problemas que estava enfrentando na prática da pedagogia foi o de Yorks e Kasl (Modes of psyche and Ways of Knowing, 2002), que revelou muito útil na formatação da pedagogia. De acordo com esses autores, a aquisição do conhecimento tem que ser feita de várias maneiras combinadas: afetiva, imaginativa, conceitual e prática. (MELLO, 2016, p. 31).

A autora também refere como norteadores de sua pedagogia os pesquisadores António Damásio, médico neurologista, neurocientista, professor de neurociência da Universidade do Sul da Califórnia e Joseph E. LeDoux, professor do Centro de Ciência Neurológica da Universidade de Nova York:

> O professor António Damásio, no seu segundo livro, *Body and Emotion in the Making of Consciousness*, assinala que as emoções estão relacionadas ao corpo, e que os sentimentos, estão relacionados à mente. A neurobiologia tem contribuído muito para a elucidação dos problemas mente/corpo. Damásio afirma que esse é o ponto central para entendermos quem nós somos. (MELLO, 2016, p. 46).

> Especialistas, como J. E. LeDoux, no seu livro The Emotional Brain, de 1996, me ensinaram a entender a emoção e como os sentimentos surgem das emoções. E como manter o binômio corpo/mente sempre alerta durante as aulas, trabalhando a inteligência emocional da criança. (...)
> A memória está intimamente ligada à emoção. E a emoção causa a mobilização e a sincronização das atividades do cérebro, além de ter uma enorme importância no funcionamento diário de nossas vidas e no aprendizado. (MELLO, 2016, p. 46).

O método adotado para a alfabetização é o fônico que, segundo a pedagoga, é o mais indicado e eficaz para a alfabetização das crianças com traumas:

> O método fônico faz com que as regiões do cérebro associadas à escrita, à leitura, ao cálculo e à coordenação motora sejam ativadas corretamente. Os alunos com problemas cognitivos alfabetizados pelo método fônico são leitores mais eficientes e ultrapassam seus problemas de aprendizado mais rápido.
> (...)
> O modelo fônico é amplamente utilizado nos Estados Unidos e na Europa. O Brasil tem utilizado o construtivismo, que no meu entender, não é o mais adequado para crianças que vivem em zonas de risco e em áreas conflagradas. (MELLO, 2016, p. 42).

À seguir serão apresentados alguns pressupostos em que se assenta a pedagogia UERÊ-MELLO, destacando que um dos aspectos preponderantes de todo o processo é a velocidade de execução.

2.1.1 O conhecimento é construído em comunhão

Quando se pretende iniciar um processo de aprendizado, se deve ter em mente que a memória de trabalho precisa de algo já conhecido na chamada memória longa, para assim se começar um momento de reflexão. Desta forma é necessário o investimento na escuta, na oralidade, na leitura e na compreensão do aluno. Os alunos não são estimulados a decorar as informações, nem a efetuar o registro escrito das mesmas, mas sim em expressar suas ideias a partir do que é apresentado.

2.1.2 As atividades são criativas e produtivas

Assim é preciso trabalhar com novos estímulos, imagens, vídeos, material concreto, brincadeiras. Como foi citado anteriormente: “a aquisição do conhecimento tem que ser feita de várias maneiras combinadas: afetiva, imaginativa, conceitual e prática” (MELLO, 2016, p. 31).

Ao incentivar a expressão oral dos alunos e a leitura, temos como consequência um aumento do vocabulário. É muito importante que o aluno aprenda pelo menos uma nova palavra diariamente. Os chamados treinos de velocidade e treinos orais estimulam, segundo a pedagoga, a memória curta que quase desaparece nas crianças com problemas cognitivos por conta de traumas oriundos de ameaças, perdas, castigos, abusos, abandono, maus tratos e outras tantas causas:

> A memória de curto prazo é a que mais usamos em nosso dia a dia. Ela tem que adquirir flexibilidade para lidar com a informação.
> É nesse aspecto que está a função dos exercícios orais. Esse é o momento da automatização da informação, quando a memória é trabalhada na repetição explicativa até adquirir consciência do que foi e está sendo ensinado. Sem isso não há retenção. (MELLO, 2016, p. 51).

> Quando a criança perde o medo em sala de aula, consegue aprender mais rápido. Depois de um tempo, a classe fica mais homogênea. É nesse momento da avaliação dos grupos que o estudo das emoções do aluno é muito importante. (MELLO, 2016, p. 47).

2.1.3 O interesse em sala de aula é mantido

Este é um dos passos mais difíceis segundo Yvonne. Devemos capturar a atenção do aluno aproveitando sempre que possível o lúdico. Por isso temos que variar assuntos e abordagens de forma a manter vivo o interesse que advém da curiosidade, gatilho da emoção, seguido da atenção contínua. Ele só é obtido através da emoção, que é a condição necessária para a memória e, por extensão, para o aprendizado.

2.1.4 Aumentar a plasticidade cerebral

Considerando que a criança com bloqueio cognitivo sofre de uma desordem na capacidade de memorizar, se torna necessário aumentar sua plasticidade cerebral, isto é, a capacidade do seu cérebro se reorganizar em estrutura e em funcionamento. Esta auxilia a potencialidade do cérebro posta em ação num aprendizado mais rápido e eficiente.

Com o objetivo de ativar tais potencialidades, os exercícios de memória que priorizam o aumento da velocidade cerebral são de grande valor:

> O cérebro é bem irrigado quando fazemos exercícios de cálculos e todas as suas combinações nas quatro operações matemáticas. Ele é ainda mais irrigado com combinações de exercícios de cálculos com palavras.
> O cérebro é muito irrigado e ativado quando lemos em voz alta e mais ainda quando praticamos exercícios de plasticidade cerebral contemplando velocidade. (MELLO, 2016, p. 40).

Além disso, em todo o processo de ensino, é de extrema importância distinguir alunos com problemas neurológicos de alunos com bloqueios cognitivos.

> Para mim, crianças doentes são aquelas que têm um problema neurológico comprovado. Crianças com traumas e bloqueios não são doentes. Sua inteligência permanece intacta e as consequências do trauma, estas sim, podem ser tratadas com amor, carinho e pedagogia específica. (MELLO, 2016, p. 16).
> Temos que entender o funcionamento do cérebro para compreender as variações do aprendizado e não etiquetar crianças sãs como doentes só porque elas não conseguem seguir um ritmo que lhes foi imposto. (MELLO, 2016, p. 39).

2.2 Plano de aula

A pedagogia UERÊ-MELLO propõe que a aula, a partir do 6º ano, seja dividida em momentos, cada um dos quais com duração entre 15 a 20 minutos. Neles, trabalhando a oralidade, se destaca a experiência trazida pelo aluno e os conhecimentos já conquistados. Esses momentos servem para nele estimular a confiança, a motivação, o esforço e a responsabilidade.

Por exemplo, em uma aula sobre razões entre duas grandezas, tradicionalmente apresentada no 7º ano do ensino fundamental, podemos iniciar (1º momento) com questionamentos sobre o que é uma grandeza, seguindo sobre o significado de se medir algo, quais são as formas de se comparar duas grandezas e, finalmente, chegar ao significado da palavra razão e sua origem. No segundo momento, pode ser apresentado um vídeo curto sobre o assunto seguido dos comentários dos alunos sobre o mesmo. Concluindo, num terceiro momento, devem ser apresentadas algumas questões, projetadas ou impressas, sobre o tema presente.

> Constatei em uma pesquisa que fiz em 2010, em vários países, que crianças do ensino fundamental, copiam até duas horas e meia de texto por dia. Durante a cópia existe pouca atividade cerebral. No UERÊ-MELLO, o professor passa, no máximo, três exercícios no quadro-negro. No caderno, só as respostas. Temos aí quatro momentos de atividade cerebral: ler, absorver a informação, processá-la e responder por escrito. (MELLO, 2016, p. 53).

Em seus estudos, Yvonne, lista um grupo de dez inteligências que devem ser estimuladas em sala de aula. A saber:

> AS DEZ INTELIGÊNCIAS
> 1. Raciocínio lógico;
> 2. Estímulo visual
> 3. Retórica;
> 4. Oralidade;
> 5. Exercícios orais com cálculos e associações;
> 6. Reconhecimento, descrição e análise;
> 7. Expressão corporal;
> 8. Velocidade cerebral;
> 9. Inteligência espacial;
> 10. Inteligência interpessoal e emocional. (MELLO, 2016, p. 165).

O raciocínio lógico é trabalhado em exercícios que abordem diversos assuntos tendo começo, meio e fim de forma associativa.

O estímulo visual pode ser contemplado pela apresentação de um vídeo, a contemplação de uma gravura ou de uma escultura, que se relacionem e ajudem na memorização do conteúdo.

A retórica está presente nos momentos das conversações. Para iniciar o dia é realizado, pelos alunos, o relato dos fatos do dia anterior. A pergunta inicial da aula é "Como foi o seu dia de ontem?" ou "Como foi o seu fim de semana?" O tipo de resposta e a maneira como o aluno responde, oralmente e fisicamente, tornam possível fazer um diagnóstico da existência de problemas no seio familiar ou na comunidade e evidencia sua extensão. Esta ação fomenta, também, a capacidade de descrever situações e de dialogar sobre as mesmas.

Outra atividade, dentro deste campo, consiste em pedir aos alunos que, em casa, procurem ver e ouvir notícias, no rádio, na televisão ou em jornais. O professor escolhe, em conjunto com os alunos, um tema que seja de interesse comum (pode ser uma brincadeira, um desenho, uma música) e se estabelece uma conversa entre o grupo. É um momento de descontração em que podem ser introduzidos assuntos novos. Por exemplo, se o assunto escolhido foi a transferência de um jogador de futebol para um clube europeu, nesse momento podem ser abordados conteúdos de geografia física, falar nos países vizinhos, perguntar se alguém sabe como é o clima, comparar o mesmo com o do Rio de Janeiro e do Brasil, qual é a língua mais falada no país em questão, dizer algumas expressões do dia a dia, conversar sobre a moeda que circula e ver preços de alguns bens... e por aí além.

Há também um momento em que o professor conta aos alunos como foi seu dia anterior, lhes mostrando que ele está ali para ensinar e compartilhar. Essa troca consolida as relações e a confiança entre aluno e professor.

Uma dinâmica importante na pedagogia são os exercícios de plasticidade cerebral e velocidade da memória que são individuais e podem se iniciar com a repetição de uma lista que vai sendo acrescentada até seis palavras. Se, por exemplo, o tema é o corpo humano, temos pé; pé, mão; pé, mão, pescoço; pé, mão, pescoço, perna; pé, mão, pescoço, perna, fígado; passando para listas que intercalam números e palavras como a seguinte: caneta 1, 5, 6, lápis 5, 12, estojo. Também podem ser exploradas sequências numéricas, em que surgem conceitos matemáticos como quando os alunos vão dizendo sucessivamente os números de 3 em 3 começando pelo 4, chegando a expressões numéricas do tipo: multiplicamos 3 por 4, subtraímos 2, o resultado é dividido por 5, ou ainda, com a repetição de senhas: a cada aluno é dita uma senha que ele terá que repetir de imediato, por exemplo: KZK4510. Podem ainda ser realizadas atividades que propiciem a repetição de frases e a simulação de memória de tarefas.

> Exemplo: Hoje você é o mensageiro da turma. Quero que você:
> 1. Avise ao coordenador que eu necessito falar com ele,
> 2. Veja se o almoço já está servido,
> 3. Verifique se o computador está desligado.
> (MELLO, 2016, p. 201).

> Resultados:
> Incrível melhora no armazenamento de informações;
> Aumento da velocidade da compreensão e da percepção;
> Melhora na oralidade;
> Controle da velocidade, do tom de voz e da clareza da explicação;
> Melhora na escrita e, visivelmente, no ditado e na redação, assim como na colocação exata dos tempos verbais na frase;
>
> Grande melhora na linguagem: colocação correta dos verbos, pronomes e pontuação;
>
> Mais fluência na retórica. (MELLO, 2016, p. 201).

É claro que o professor tem autonomia para criar exercícios e explorar as possibilidades das diversas dinâmicas aproveitando as contribuições dos alunos e dando especial atenção aos aspectos que necessitam ser mais trabalhados.

2.3 O aluno-professor

Trata-se de uma estratégia de interação entre aluno e professor. Consiste em, toda semana, um dos alunos apresentar à classe, um assunto escolhido por ele mesmo. O professor o auxilia na preparação desta aula, que dura em torno de 10 minutos.

Esse exercício estimula o desenvolvimento da oralidade, a autoestima e o protagonismo do aluno.

> No campo da educação o termo protagonismo designa a atuação dos jovens como personagem principal de uma iniciativa, atividade ou projeto. É a participação ativa e construtiva do jovem na vida da escola, da comunidade e na sociedade. (MELLO, 2016, p. 294).

A pedagogia UERÊ-MELLO resulta assim da interação da prática pedagógica com um campo de pesquisa fundamental e que se encontra em pleno desenvolvimento: que é a neurociência.

No próximo capítulo serão trabalhados alguns aspectos elementares desta área do conhecimento.

3 A NEUROCIÊNCIA E O ENSINO

Aqui será abordada a contribuição que a neurociência/neuroeducação pode dar ao processo ensino/aprendizagem no que tange a formação da memória. Serão apresentados alguma terminologia e alguns conceitos elementares que são fundamentais para o entendimento da proposta pedagógica apresentada no capítulo anterior.

3.1 Neurociência

A neurociência é a ciência que estuda o sistema nervoso, constituído pelo cérebro e sistema nervoso central e periférico (SOUZA, 2014).

Algumas ideias relacionadas à aprendizagem como a existência de pessoas que não conseguem aprender ou de pessoas que já nascem inteligentes, e que há tempos foram fortemente defendidas, vêm sendo desmistificadas por pesquisas neste campo.

De acordo com nossa experiência em sala de aula vemos que as habilidades matemáticas não são inatas, elas são despertadas, algumas ensinadas e desenvolvidas.

> Uma pergunta frequente é: Os conceitos matemáticos são inatos ou se aprendem? Se forem aprendidos, quando se aprendem? Que locais do cérebro estão encarregadas da tarefa matemática? Estas são perguntas que diversos investigadores da área da neurociência tentam responder hoje em dia e atualmente alguns pesquisadores tem levantado algumas possibilidades de respostas (VARGAS, 2013, p.38).

O uso de ferramentas tecnológicas, material concreto e estratégias rebuscadas de ensino são fundamentais, porém é necessário, ou mesmo imprescindível, entender como o aprendizado matemático se dá.

Neste ponto a neurociência abre caminhos que permitem uma possível explicação e nos fornece vasto campo para explorar, experimentar e tentar desenvolver novas estratégias que busquem otimizar essa aprendizagem com abordagens que trabalhem com as hipótese levantadas por ela. Debruçar-se, portanto, sobre os conceitos ofertados pelos estudos da neurociência é de grande valia na busca de estratégias a serem usadas em sala de aula.

A Neuroeducação, que combina neurociência, psicologia e pedagogia, busca meios de aplicar, no ensino, os conhecimentos adquiridos sobre o funcionamento cerebral.

Um dos conceitos importantes da neurociência é o da plasticidade cerebral, a capacidade que o tecido nervoso tem de alterar de modo mais ou menos prolongado a sua função e forma (BORNÉO, 2018).

> O processamento matemático depende de um desenvolvimento harmônico de todas as áreas corticais que por sua vez depende de um desenvolvimento psicomotor adequado. Família, ambiente, educação, lazer, são chaves para garantir o desenvolvimento e a plasticidade cerebral necessários para a apropriação dos conceitos matemáticos (VARGAS, 2013, p.42).

Embora o cérebro não seja uma tábula rasa, ele está sujeito a receber influências do meio, da família e do professor. Daí um aspecto relevante e uma responsabilidade de nossa profissão.

O desafio é conseguir criar estratégias, métodos e maneiras de ensinar que agucem a curiosidade. Acreditamos ser o que precisamos fazer para que o aluno aprenda o que desejamos lecionar.

A matemática, contudo, se encontra limitada por nossa arquitetura cerebral que impõe um limite sobre a aprendizagem e memória (NOMURA, 2012). Isto nos leva a tentar entender os processos de formação de memórias, o papel da emoção neste processo, da oralidade, dos estímulos visuais, ou táteis, do protagonismo do aluno em seu próprio aprendizado ao participar ativamente das atividades e não, como usualmente, passivo copista e reprodutor de exercícios de fixação, importantes quando os conceitos já foram apreendidos pelo discente.

3.2 Um pouco de biologia

> Sabemos que o cérebro é uma máquina complexa resultante da reunião de elementos fundamentais: o neurônio ou unidade básica, as sinapses ou conexões entre os neurônios e as ligações químicas que ali ocorrem, através de neurotransmissores e receptores. Essas combinações o tomam uma máquina extremamente poderosa, na medida em que são capazes de gerar configurações e arranjos variados num número astronômico.

> Contudo, o grande desafio que a neurociência ainda enfrenta é a dificuldade (ou será uma impossibilidade?) de relacionar o que ocorre no cérebro com aquilo que ocorre na mente, ou seja, de encontrar algum tipo de *tradução* entre sinais elétricos das células cerebrais e aquilo que percebo ou sinto como sendo meus pensamentos. (TEIXEIRA, 2011, p.18)

Os neurônios são células nervosas, que desempenham o papel de conduzir os impulsos nervosos. Estas células especializadas são, portanto, as unidades básicas do sistema que processa as informações e estímulos no corpo humano.

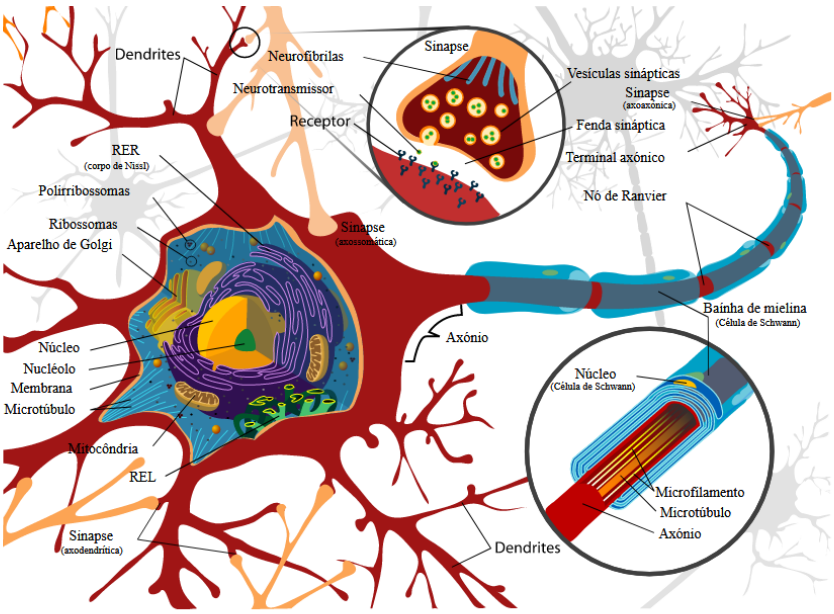
3.2.1 Características e funções dos neurônios

Os neurônios possuem três partes principais: dendritos (onde ocorre a recepção das informações, é parte receptora do neurônio); corpo celular (responsável pela integração das informações) e axônios (transporta o impulso nervoso de um neurônio para outro ou de um neurônio para uma glândula ou fibra muscular).

Os neurônios possuem as extremidades ramificadas (parte dos dendritos).

A transmissão dos impulsos nervosos entre neurônios, ou de um neurônio para outro tipo de célula, ocorre através de uma reação físico-química.

Figura 1 – Esquema de um neurônio



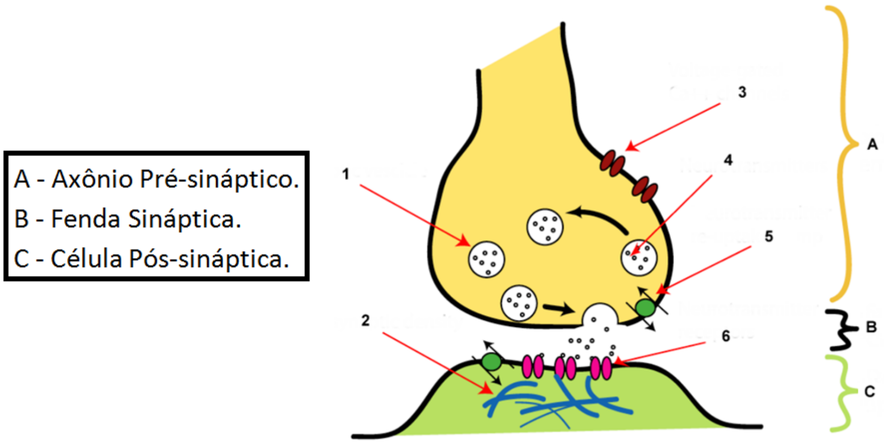
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Complete_neuron_cell_diagram_pt.svg

Acessado em 01 set. 2018

3.2.2 Sinapse

A sinapse é o local de contato (comunicação) onde ocorre a transmissão de impulsos nervosos de uma unidade celular (neurônio) para outra. Essas transmissões de impulsos nervosos nas sinapses ocorrem graças aos neurotransmissores. Estes são biomoléculas (substâncias químicas), produzidas pelos neurônios e armazenados nas vesículas sinápticas (bolsas presentes nas extremidades dos axônios), por exemplo: a adrenalina, a dopamina, a serotonina e as endorfinas. As sinapses promovem a reorganização dos neurônios, elas promovem a plasticidade cerebral.

Figura 2 – diagrama de uma sinapse



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Synapse_v_int.png
Acessado em 01 set. 2018

Existem dois tipos de sinapses, a química e a elétrica. A química é a mais comum nos mamíferos.

> O tipo mais comum de sinapse é aquela na qual o axônio de um neurônio, através de seus terminais, estabelece contato com os dendritos de outro neurônio. Suponhamos agora que temos um impulso elétrico chegando à extremidade do axônio, que se excita e toma-se temporariamente positivo. Para onde deve prosseguir esse sinal? E como? A resposta mais simples seria dizer: ele prossegue através das sinapses. Mas não é isto o que ocorre. Há uma interrupção entre um neurônio e outro e sua comunicação é feita por via química, através da ação dos neurotransmissores. Quando um potencial de ação, ou seja, um sinal elétrico, chega ao terminal de um axônio, uma substância é liberada: a acetilcolina. A acetilcolina fica em pequenas bolsas no axônio e quando chega um potencial de ação, esse sinaliza que essas bolsas devem ser abertas e essa substância ser liberada. O sinal elétrico é transformado num sinal químico: quanto maior a intensidade do potencial de ação, mais bolsas de acetilcolina são abertas. A acetilcolina atravessa a sinapse rapidamente, mas, para que a comunicação

> entre os neurônios se estabeleça, é preciso que o sinal químico seja transformado novamente em sinal elétrico. Para que isto ocorra é preciso, por sua vez, que o neurotransmissor encontre, no neurônio seguinte do circuito, proteínas especiais chamadas de receptores. A presença de receptores em outros neurônios indica o caminho que os transmissores (ou neurotransmissores) devem seguir e quais os neurônios seguintes com os quais a comunicação deve ser estabelecida. (TEIXEIRA, 2011, p.64)

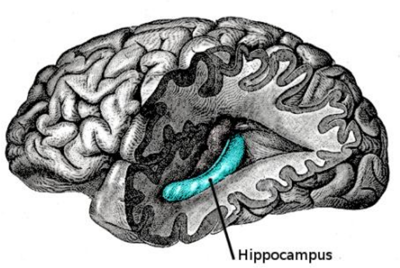
Segundo Mello (2016, p.39), tomando como referência os estudos do Dr. *Ryuta Kawashima,* o trabalho com exercícios orais é imprescindível para o aprendizado uma vez que, em sua execução, há uma irrigação de 70% do cérebro, e com isso as sinapses são facilitadas, ao passo que em exercícios escritos há apenas 40% de irrigação, uma vez que a escrita necessita do conhecimento armazenado. Por esse motivo a oralidade é extremamente valorizada. Em sua proposta pedagógica, só se escreve depois que se sabe. Quando se copia não se pensa, apenas registra.

3.3 Algumas estruturas e suas importâncias na aprendizagem

3.3.1 Hipocampo

O hipocampo é uma região do cérebro que faz parte do sistema límbico e é responsável pela manutenção da homeostasia (equilíbrio das diversas funções e composições químicas do corpo: temperatura, pulso, pressão arterial, taxa de açúcar no sangue), propriocepção, emoções e formação da memória de longa duração.

Figura 3 – Hipocampo



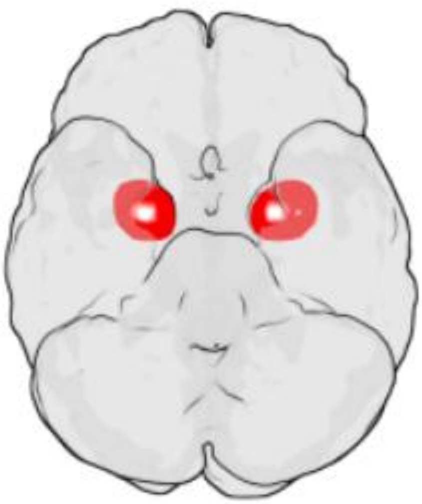
Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gray739-emphasizing-hippocampus.png

Acessado em 01 set. 2018

3.3.2 Amígdalas Cerebolosas

São responsáveis pelo instinto que temos de ficar e lutar ou fugir para sobreviver. Em conexão com o hipocampo media e controla atividades emocionais, como amizade, amor e afeição. Humor, medo e ira são emoções relacionadas a esta estrutura cerebral. Quando vemos uma pessoa, o hipocampo nos indica se a conhecemos e as amígdalas cerebolosas sinalizam que sentimentos nutrimos em relação a ela. Elas respondem pelo binômio razão-emoção e, por isso mesmo, são importantes no processo ensino-aprendizagem.

Figura 4 – Localização das amigdalas no cerebelo



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Amyg.png

3.4 Como formamos nossas memórias?

Memória é o processo pelo qual retemos o que foi aprendido, veículo pelo qual se transmitem os conhecimentos e a fonte onde mergulhamos quando precisamos usar o que já sabemos, seja numa conversa ou realizando uma ação.

É de fundamental importância para um educador buscar subsídios para entender como se dá o processo de construção de memórias, onde elas são guardadas e como podemos acessá-las (evocação).

A Neurociência nos indica algumas pistas.

> A formação das memórias é bastante complexa e exige cada vez mais estudos. No entanto, o que se sabe até o momento é que existem mecanismos básicos para sua formação, chamados de "estágio espontâneo". Esse estágio compreende desde a seleção inicial, a consolidação até a recordação e algumas vezes a mudança ou a perda de memória, o esquecimento (CARTER et al, 2009 apud ADÃO, 2013 -29413).

Existe mais de um tipo de memória, por isso a escolha do termo "memórias". É evidente que a memória utilizada para decorarmos um número de telefone até termos condições de anotar em um papel ou digitarmos em nosso celular é diferente da que nós utilizamos em uma avaliação, esta, por sua vez, é diferente da que guardamos do dia em que passamos no vestibular (ou defendemos nossa dissertação) ou a que utilizamos em procedimentos como dirigir ou tocar atabaque.

Em geral as memórias são classificadas de duas maneiras:

Tabela 1 – Tipos de Memórias

PELA MANEIRA COMO SÃO ADQUIRIDAS	PELO TEMPO QUE SÃO ARMAZENADAS
Memória explícita ou declarativa: Eventos, fatos, conhecimentos.	Memória de trabalho: Não deixa rastro nem produz armazenamento. Gerencia o que está guardado e determina se algum conhecimento é novo, se é importante armazená-lo tornando-o memória curta ou de longa duração.
Memória de procedimento ou de hábitos: Andar de bicicleta, usar um computador.	Memória de curta duração: de 30 minutos a 6 horas. Mantém a cognição funcionando até que a memória de trabalho determine se ela se tornará uma memória longa ou se será descartada.
	Memória de longa duração: perdura por várias horas, dias ou anos.

Fonte: O autor, 2019

Podemos "dar uma ajuda" para a formação de nossas memórias fazendo associações, utilizando de processos mnemônicos e com reforços positivos.

> A capacidade de gerar aprendizado ou não da informação dependerá das conexões da memória de trabalho com os demais sistemas mnemônicos. Esses sistemas são técnicas utilizadas no processo de memorização e podem ser mecanismos criados pelo próprio cérebro, que auxiliarão no

> armazenamento e posteriormente no resgate da informação. Podem ser criadas pelo indivíduo, para facilitar o seu processo de memorização como, por exemplo, em química, a técnica utilizada para lembrar a ordem decrescente dos elementos mais eletronegativos "**F**ui **O**ntem **N**o **C**lube, **B**riguei **I** **S**aí **C**orrendo **P**ara (o) **H**ospital" **-** flúor, oxigênio, nitrogênio, cloro, bromo, iodo, enxofre, carbono, fósforo, hidrogênio. O ato de memorizar um número de telefone, até que esse seja discado ou anotado, é um exemplo de memória de trabalho. Podemos guardá-lo por alguns segundos e depois descartar a informação. Ao longo desse processo, podem-se lembrar fatos relativos ao dono do número de telefone e, também, lembranças, imagens, cheiros e sensações podem ser recordados. A memória de trabalho é de fundamental importância no processo de tomada de decisão, urna vez que usa de informações pré-existentes e faz a sua interlocução com o presente. (SOUSA, 2015, p.143)

> O melhor exercício para manter a memória é a leitura. Ao ler, o cérebro faz um rápido e enorme scanning de tudo o que tem guardado nele e começa com a letra do abecedário com que se inicia a leitura (a: abelha, alma, avô, etc.; b: barbaridade, burro, beijo, etc.; c: casa, corpo, cabelo, etc., e assim por diante), e depois com cada letra sucessiva. Ao fazê-lo, põe em funcionamento a memória visual, verbal e até de imagens: lembra fugazmente do aspecto das abelhas, avós, burros, casas, etc. Nenhuma outra atividade cerebral tem essa capacidade nesse grau. Por isso é o exercício de escolha para a memória, que é o maior exemplo de que “a função faz o órgão”. 2) Permitir ao cérebro que descanse um tempo adequado cada dia, dormindo de preferência nas horas apropriadas. 3) Manter “viva” a memória de trabalho e a memória de curta duração, através da conversa, da leitura, de filmes, etc. Sem elas, será difícil ter uma boa base para formar memórias de longa duração, e não há base para o diálogo e a compreensão de eventos rápidos. (IZQUIERDO, 2013, P.16)

Diversificar os estímulos ao se trabalhar cada conteúdo é de grande importância: dar a oportunidade do aluno se expressar oralmente, apresentar imagens e vídeos ou softwares, ter material concreto para o aluno manusear.

A repetição também é uma grande aliada na formação da memória, mas nos alerta IZQUIERDO (2013, P.16): “A repetição de uma memória sem o “reforço” (estímulo incondicionado, recompensa, castigo, consequências) leva a sua extinção”.

3.4.1 A emoção

As emoções servem de gancho para acessarmos de maneira mais eficiente a nossa memória e, por extensão, de compô-la. Segundo Ivan Izquierdo no documentário “Mesa de Sonhos: uma vida de memória” (PUC-RS), as memórias emocionais são as mais guardadas. A emoção é como uma cola para as informações. As informações “coladas“ são as memórias. Não devemos confundir emoção com sentimentos. As emoções são mecânicas, inconscientes e dão origem aos sentimentos que são subjetivos, reações conscientes às emoções. Os sentimentos são uma espécie de juízo sobre as emoções:

> As emoções acendem e mantem a curiosidade e a atenção e, com isso, o interesse pelo descobrimento de tudo o que é novo, desde um alimento ou qualquer aprendizado na aula. As emoções, em definitivo, são a base mais importante sobre o que se sustentam todos os processos de aprendizagem e memória. (MORA, 2013, p.66)

3.4.2 A Curiosidade

Trata-se do ingrediente básico da emoção. Acende a emoção e, com ela, forma-se a atenção, condição necessária para a criação do conhecimento. É o desejo de conhecer coisas novas.

Um instrumento importante para o processo de aprendizagem é o jogo, pois combina prazer (recompensa), curiosidade, atenção e memória.

Sem o estímulo da curiosidade não há aprendizado ou ele será destituído de significado.

Francisco Mora nos indica algumas estratégias para provocarmos e aguçarmos a curiosidade dos alunos:

> 1) Começar a aula com algo provocador, seja uma frase, um desenho, um pensamento com algo que seja chocante.
> 2) Apresentar um problema cotidiano.
> 3) Criar uma atmosfera para o diálogo por parte dos alunos com perguntas instigantes, do interesse deles.
> 4) Dar tempo suficiente para que algum aluno desenvolva um argumento e se veja com isso motivado a encontrar uma solução, antes dos demais, do problema exposto.
> 5) Em um seminário sobre um tema concreto não perguntar sobre um problema, mas incentivar ao estudante que seja ele quem explique o problema de forma espontânea. Isso estimula sua autoestima e motivação pessoal.
> 6) Introduzir durante o desenvolvimento da aula elementos que impliquem incongruência, contradição, novidade, surpresa, complexidade, confusão e incerteza.
> 7) Que os graus do item anterior não provoquem ansiedade nos alunos.
> 8) Em seminários, ou aulas práticas, procurar a participação ativa do estudante e sua exploração pessoal.
> 9) Reforçar o mérito e o elogio ante a uma boa pergunta ou resolução de determinado problema.
> 10) Mediar mas não dirigir a busca de uma resposta por parte do aluno para a resolução de um problema. (MORA, 2013, p.66)

3.4.3 A Atenção

A atenção ativa os mecanismos da consciência. E estar atento é estar consciente do que está acontecendo. Aprender e memorizar requer atenção. Como podemos instigar e otimizar a atenção do aluno? Como se dá a atenção? A busca por respostas a estas perguntas podem nos auxiliar no aprendizado de nossos alunos.

O primeiro passo para termos a atenção é despertar a curiosidade, mas deve-se ter em mente que ela é apenas o gatilho, é preciso garantir a continuidade dela, com atividades que tenham significado, para que de fato se tenha a atenção.

Atualmente afirma-se que o tempo de atenção é diferente de acordo com a idade. Desta forma um aluno de 6º ano, em geral, tem um "tempo atencional" menor do que um de 9º ano que, por sua vez, é menor do que um de ensino médio que, por sua vez, é menor do que um adulto. Este é um aspecto que também se deve levar em conta.

> O que se entende por "tempo atencional" (tempo total de uma turma durante o que se requer a atenção completa e quase contínua do aluno) não é o mesmo para as diferentes etapas e idades do ser humano. Conhecer os "tempos cerebrais" que se requerem para manter a atenção a cada idade ou período da vida pode ajudar a ajustar os "tempos de atenção reais" durante a aprendizagem em sala de aula de uma maneira mais eficiente. Assim poderiam desenvolver treinamentos seletivos que implicariam numa maior eficácia no estudo. (MORA, 2013, p.66)

As palestras no formato TEDx (Technology, Entertainment, Design), por exemplo, utilizam um tempo de 10 a 18 minutos para, segundo a instituição, compartilhar ideias e inspirar pessoas, seguindo assim as teorias da neurociência.

A pedagogia UERÊ-MELLO utiliza esse conceito ao particionar suas aulas em momentos que não ultrapassam o tempo de 10 minutos, para alunos do fundamental I, e 20 minutos, para alunos de séries mais adiantadas.

3.5 Neuromitos

Na sociedade da "pós-verdade" devemos tomar cuidado com a ansiedade de levarmos para a sala de aula conceitos que ainda não foram amplamente pesquisados e bem fundamentados pela ciência ou levá-los fracionados, utilizando a neurociência como um self-service.

Alguns neuromitos ou neurobobagens que de vez em quando retornam aos holofotes:

- Usamos apenas 10% da capacidade cerebral. Podemos dizer que o cérebro utiliza todos os seus recursos.

- Hemisfério Direito x Hemisfério Esquerdo. O cérebro humano, segundo este mito, cada hemisfério trabalharia de modo independente do outro. Hoje sabe-se que os hemisférios trabalham conjuntamente o tempo todo.

- Existem pessoas visuais, pessoas auditivas e pessoas sinestésicas. Na realidade quanto mais variados os estímulos, visuais, auditivos, sinestésicos, mais sinapses e, portanto maior condição para o aprendizado.

- Os cérebros feminino e masculino diferem na forma que aprendem. Até o momento não há nenhuma pesquisa que comprove tal fato.

- O videogame ajuda na concentração e na rapidez de resposta <u>em sala de aula</u>. Nenhuma pesquisa, até o momento, chegou a esta conclusão.

- Ingerir queijo ou chocolate ajudam a tomar decisões difíceis de maneira mais racional.

> Não é benéfico que o professor acredite que aquela estratégia do artigo científico resolverá o problema de aprendizagem dos seus alunos. Ele pode perder tempo e deixar de usar estratégias.
> Desmitificar a neurociência e promover a uma maior difusão dos conhecimentos científicos pode ser a melhor maneira de combater as neurobobagens. Iniciativas como as Olimpíadas de Neurociências podem ajudar a reduzir a desinformação. Quando a população é exposta a isso, você combate as bobagens e também combate as neurobobagens oportunistas. (OLIVEIRA, 2015)

4 RAZÕES E PROPORÇÕES

Um dos temas de Matemática Elementar que se tem revelado de grande importância pelo seu viés prático é “Razão e Proporção”. Assunto presente em avaliações como Saeb, Pisa e ENEM, foi escolhido para desenvolver uma atividade de acordo com a pedagogia UERÊ-MELLO. Note-se que nos X e XI Encontros Nacional de Educação Matemática (2014 e 2015), contou com 11 trabalhos abordando-o.

> A compreensão de razão e proporção é a base para o trabalho com grandezas diretamente e inversamente proporcionais, além de outros assuntos da matemática, e também de outras disciplinas como ciências, química e física. Entretanto, dados obtidos em 2013, por meio do sistema Nacional de avaliação da Educação Básica (SAEB) indicam que os alunos apresentam grande dificuldade na compreensão desses conceitos. (BATISTA, 2016, p.2)

Neste capítulo, será feita uma apresentação desta temática, começando pelo significado etimológico da palavra, passando pela abordagem que Eudoxo realiza nos Elementos de Euclides e terminando com alguns problemas retirados ou adaptados de algumas avaliações. É nosso entendimento que o professor precisa conhecer os fundamentos matemáticos dos assuntos cuja aprendizagem irá promover, nesse sentido pareceu oportuno apresentar no desenvolvimento do capítulo uma construção dos números racionais.

4.1 Etimologia e significados

> Ratio é derivado do verbo *reor*, contar, calcular, Por extensão, reor no latim comum passou também a ser sinônimo de puto, aestimo (considerar, reputar): daí que vocábulos como "reputação" e "estimar" estejam próximas de palavras da linguagem do cálculo como "computar" e "estimativa". Daí também ratus, contado, de que se originou não só "rateio", mas também "ratificar". Ratio originalmente é conta; rationem reddere é prestar contas.
> (LAUAND, 2006)

Do dicionário Michaelis temos:

> Razão; ra-zão
> Substantivo feminino
> 1. Faculdade do ser humano que lhe permite conhecer, julgar e agir de acordo com determinados princípios; raciocínio.
> 2. Capacidade que cada ser humano tem de ponderar.

> 3. Motivo que representa a explicação de certa atitude.
> 4. Conformidade dos fatos com a justiça.
> 5. Meio empregado para convencer alguém; argumento.
> 6. Notícia ou informação a respeito de algo.
> 7. (Filos) Conjunto de faculdades anímicas que distinguem o homem de outros animais.
> 8. (Filos) Entendimento cognitivo da realidade.
> 9. (Filos) Indução ou dedução definida pela capacidade de raciocinar.
> 10. (Filos) Capacidade de estabelecer relações constantes entre as coisas, partindo de conceitos a priori, independentemente da experiência.
> 11. (Filos) No cartesianismo, faculdade que permite a distinção entre o certo e o errado, entre o falso e o verdadeiro ou entre o bem e o mal; bom senso.
> 12. (Filos) No heraclitismo, no estoicismo e no hegelianismo, pensamento que se manifesta ao mesmo tempo na objetividade da natureza física e na subjetividade do espírito humano.
> 13. (Filos) Conhecimento discursivo por meio da combinação dos termos das proposições.
> 14. (Mat) Quociente entre grandezas da mesma espécie.
> 15. (Mat) Quociente de dois números.
> 16. (Mat) Quociente entre dois termos consecutivos de uma progressão geométrica.
> 17. (Mat) Diferença entre termos consecutivos de uma progressão aritmética. (MICHAELIS, 2019)

4.2 Razão e proporção nos Elementos de Euclides

Considerando a importância histórica e a influência, nas ciências, das ideias contidas nos Elementos de Euclides, achamos pertinente apresentar os conceitos de razão e proporção contidos nesta obra, destacando a abordagem que se encontra no livro V.

Das definições ali contidas, destacamos as cinco primeiras presentes em KATZ:

> Definição 1: Uma magnitude é uma parte de uma magnitude, a menor da maior, quando mede (divide) a maior.
> Definição 2: A maior é um múltiplo da menor quando é medida pela menor. (KATZ, 2010, p.102)

Estas definições indicam as ideias de múltiplo ou divisor. Dizemos que 5 é parte de 15, pois 5 divide 15, em contrapartida 5 não é parte de 12, pois não há nenhum inteiro n tal que $5 \cdot n = 12$. Ainda neste exemplo temos que 15 é múltiplo de 5.

> Definição 3: Uma razão é um tipo de relação relativa à quantidade entre duas magnitudes do mesmo tipo.
> Definição 4: Diz-se das magnitudes que têm uma razão uma em relação à outra as que são capazes, quando multiplicadas, de se exceder uma à outra. (KATZ, 2010, p.102)

Da definição 3 resulta que não podemos ter razão entre grandezas de naturezas diferentes. Teremos apenas razões entre, por exemplo, dois comprimentos, ou duas massas, ou duas áreas.

> Definição 5: Diz-se das magnitudes que têm a mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, se quaisquer equimúltiplos forem considerados da primeira e terceira, e quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros múltiplos excederem da mesma maneira, forem da mesma maneira iguais a, ou da mesma maneira forem menores, que os últimos múltiplos respectivamente tirados em ordem correspondente. (KATZ, 2010, p.102)

Aqui temos uma definição para proporção. Segundo ela, considerando quatro grandezas (magnitudes) a, b, c e d; a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é verificada se, para quaisquer dois números inteiros m e n, uma das relações abaixo é verificada.

$$ma > nb \ \text{ e } \ mc > nd$$

$$ma = nb \ \text{ e } \ mc = nd$$

$$ma < nb \ \text{ e } \ mc < nd$$

Esta definição não exclui grandezas incomensuráveis. Podemos provar, por exemplo, que as grandezas $\sqrt{5}$, 1, $\sqrt{10}$ e $\sqrt{2}$ estão na mesma razão. Basta mostrar que, para quaisquer m e n inteiros, é satisfeita uma das condições:

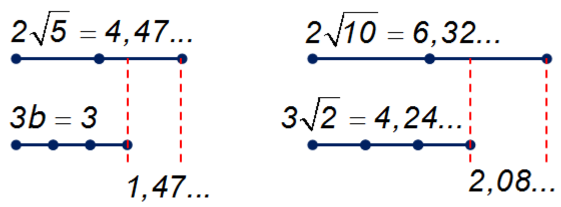
$$m \cdot \sqrt{5} > n \cdot 1 \ \text{ e } \ m \cdot \sqrt{10} > n \cdot \sqrt{2}$$

$$m \cdot \sqrt{5} = n \cdot 1 \ \text{ e } \ m \cdot \sqrt{10} = n \cdot \sqrt{2}$$

$$m \cdot \sqrt{5} < n \cdot 1 \ \text{ e } \ m \cdot \sqrt{10} < n \cdot \sqrt{2}$$

Utilizando segmentos de reta, teremos:

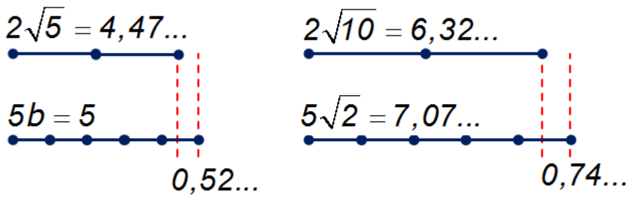
Considerando m = 2 e n = 3, obteremos:



$$2\sqrt{5} > 3 \ \text{ e } \ 2\sqrt{10} > 3\sqrt{2}$$

Observe que: $\frac{2,08}{1,47} \cong 1,41$

Considerando m = 2 e n = 5, obteremos:



$2\sqrt{5} < 5$ e $2\sqrt{10} < 5\sqrt{2}$

Observe que: $\frac{0,74}{0,52} \cong 1,42$

Note-se que os dois valores obtidos apenas coincidem até à primeira casa decimal, pois inferem de erro, uma vez que os cálculos foram efetuados com valores aproximados. Mesmo variando os valores de m e n, o que ocorre nos segmentos a e b, ocorrerá também nos segmentos c e d, na mesma proporção, seja a ampliação ou a redução destes segmentos.

> A ideia por trás da afirmação de que os quatro segmentos a, b, c e d são proporcionais é a de que expandindo (ou contraindo) os dois primeiros de certa quantidade, os dois outros também serão expandidos (ou contraídos) da mesma quantidade. Ou seja, tudo que acontecer com os dois primeiros deve acontecer com os outros dois. Se multiplico o primeiro, a, por m, e o segundo, b, por n, tudo pode acontecer (os segmentos obtidos podem ser iguais, ma pode ser maior ou menor que nb). O que importa é que o mesmo aconteça para mc e nd. E isso para quaisquer números inteiros m e n. (ROQUE, 2012, p.160)

4.3 Os números racionais

Considere o conjunto $\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \neq 0\}$ e a relação ~ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m,n) \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ definida por:

Para quaisquer $(m,n), (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,

$(m,n) \sim (p,q)$ se, e somente se, $mq = np$.

Proposição 1 A relação definida acima é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$.

Demonstração: Verificando que a relação ~ satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

i) *Reflexiva:* Para todo $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ temos que $(m,n)\sim(m,n)$.

Para todo $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, temos que $m\cdot n=n\cdot m$, pela comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$. Logo $(m,n)\sim(m,n)$.

ii) *Simétrica:* Se $(m,n)\sim(p,q)$ então $(p,q)\sim(m,n)$.

Sejam $(m,n),(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. Suponhamos que $(m,n)\sim(p,q)$. Então $mq=np$, pela comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$, temos que $qm=pn$, ou ainda, $pn=qm$. Portanto $(p,q)\sim(m,n)$.

iii) *Transitiva:* Se $(m,n)\sim(p,q)$ e $(p,q)\sim(r,s)$, então $(m,n)\sim(r,s)$.

Sejam $(m,n),(p,q),(r,s)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ tais que $(m,n)\sim(p,q)$ e $(p,q)\sim(r,s)$. Então $mq=np$ e $ps=qr$. Assim, $(mq)\cdot s=(np)\cdot s$ e $n\cdot(ps)=n\cdot(qr)$. Daí, $mqs=nqr$, o que implica que $msq=nrq$. Como $q\in\mathbb{Z}^*$, podemos utilizar a lei do cancelamento da multiplicação, logo $ms=nr$ e, portanto, $(m,n)\sim(r,s)$.

Provamos, desta forma, que a relação ~ determina sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ uma classe de equivalência. Para cada $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, a classe de equivalência determinada por este elemento será denotada por $\frac{m}{n}$. Assim,

$$\frac{m}{n}=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid (x,y)\sim(m,n)\}=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid nx=my\}$$

Exemplos:

a) $\frac{1}{2} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 2x = y\} = \{(1, 2); (3, 6); (-2, -4); ...\}$

b) $\frac{6}{8} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 8x = 6y\} = \{(6, 8); (3, 4); (-12, -16); ...\}$

Assim, temos que:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow (m, n) \sim (r, s)$$

Ou ainda, atendendo à definição da relação de equivalência:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow ms = nr$$

Indicaremos por $\mathbb{Q}$ o conjunto de todas as classes de equivalência determinada pela relação ~ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, ou seja, $\mathbb{Q}$ é o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação ~ e, portanto,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Cada elemento de $\mathbb{Q}$ admite infinitas representações $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$. Em cada uma dessas representações m e n são denominados respectivamente, de numerador e denominador.

Proposição 2 Dois elementos quaisquer de $\mathbb{Q}$ sempre admitem representações cujos denominadores são iguais.

Demonstração:

Sejam $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Das propriedades comutativa e associativa da multiplicação em $\mathbb{Z}$, temos que $pqs = p(qs) = q(ps)$ e $rqs = r(qs) = s(qr)$. Logo, $\frac{p}{q} = \frac{ps}{qs}$ e $\frac{r}{s} = \frac{qr}{qs}$.

Portanto $a = \frac{p}{q} = \frac{ps}{qs}$ e $b = \frac{r}{s} = \frac{qr}{qs}$

4.3.1 Adição em $\mathbb{Q}$

Proposição 3 Sejam $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. A correspondência $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) \mapsto \frac{ps+qr}{qs}$ é uma operação sobre $\mathbb{Q}$.

Demonstração: Suponha que $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ e $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$. Então $pq' = qp'$ e $rs' = sr'$. Desta forma $(pq')ss' = (qp')ss'$ e $(rs')qq' = (sr')qq'$. Usando as propriedades comutativa e associativa da multiplicação de inteiros, teremos que $psq's' = qsp's'$ e $rqs'q' = qsr'q'$. Somando membro a membro as relações obtidas, obteremos:

$$psq's' + rqs'q' = qsp's' + qsr'q' \text{, ou ainda}$$

$$(ps + rq)q's' = (p's' + r'q')qs$$

Como qs e $q's'$ são não nulos, podemos concluir que:

$$\frac{ps+rq}{qs} = \frac{p's'+r'q'}{q's'}$$

Ou seja, o resultado obtido não depende do representante escolhido.

Definição 1 Sejam $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. A operação definida por $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right) \mapsto \frac{ps+qr}{qs}$ é chamada de adição em $\mathbb{Q}$ e $a+b$ é um elemento de $\mathbb{Q}$ que denominamos de soma de a com b e é definido como:

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs} + \frac{qr}{qs} = \frac{ps+qr}{qs}$$

Proposição 4 Propriedades da adição em $\mathbb{Q}$. A adição em $\mathbb{Q}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(I) *Associativa:* $\forall a, b, c \in \mathbb{Q};\ (a+b)+c = a+(b+c)$

(II) *Comutativa:* $\forall a, b \in \mathbb{Q};\ a+b = b+a$

(III) *Existência de elemento neutro:* $\exists 0 \in \mathbb{Q};\ a+0 = 0+a = a,\ \forall a \in \mathbb{Q}$

(IV) *Existência de elemento oposto:* para cada $a \in \mathbb{Q}$, existe $b \in \mathbb{Q}$, tal que $a+b = b+a = 0$. O elemento b será representado por $-a$.

Demonstração de (I):

Sejam $a=\dfrac{p}{q}$, $b=\dfrac{r}{s}$ e $c=\dfrac{t}{u}$ elementos de $\mathbb{Q}$.

Temos que:

$$(a+b)+c=\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)+\frac{t}{u}=\left(\frac{ps+qr}{qs}\right)+\frac{t}{u}=\frac{(ps+qr)u+(qs)t}{(qs)u}$$

e

$$a+(b+c)=\frac{p}{q}+\left(\frac{r}{s}+\frac{t}{u}\right)=\frac{p}{q}+\left(\frac{ru+st}{su}\right)=\frac{p(su)+(ru+st)q}{q(su)}$$

Aplicando a propriedade associativa da multiplicação em $\mathbb{Z}$ e da propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação em $\mathbb{Z}$, segue que:

$$(qs)u=q(su)$$

e

$$(ps+qr)u+(qs)t=p(su)+(ru+st)q=p(su)+(qr)u+(qs)t=$$

$$=p(su)+q(ru)+q(st)=p(su)+q(ru+st)$$

Assim,

$$\frac{(ps+qr)u+(qs)t}{(qs)u}=\frac{p(su)+(ru+st)q}{q(su)}$$

Portanto, $(a+b)+c=a+(b+c)$

Demonstração de (II):

Sejam $a=\dfrac{p}{q}$ e $b=\dfrac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Da definição da adição em $\mathbb{Q}$, segue-se que $a+b=\dfrac{ps+qr}{qs}$ e $b+a=\dfrac{rq+sp}{sq}$. Pelas propriedades comutativas da adição e da multiplicação em $\mathbb{Z}$, temos que $ps+qr=rq+sp$ e $qs=sq$. Logo $a+b=b+a$.

Demonstração de (III):

Seja $a=\dfrac{p}{q}$ elemento de $\mathbb{Q}$. Temos $0+a=\dfrac{0}{1}+\dfrac{p}{q}=\dfrac{0q+1p}{1q}$.

Das propriedades da adição e da multiplicação dos números inteiros, $1p = p$, $1q = q$ e $0q = 0$. Logo $1p + 0q = p + 0 = p$. Portanto, $a + 0 = a$. Da propriedade comutativa, demonstrada anteriormente, segue que $0 + a = a$. Assim, $a + 0 = 0 + a = a$.

Demonstração de (IV):

Seja $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, segue que $b = \frac{-p}{q} \in \mathbb{Q}$. Então

$$a + b = \frac{p}{q} + \left(\frac{-p}{q}\right) = \frac{pq + q(-p)}{q \cdot q} = \frac{pq - pq}{q \cdot q} = \frac{0}{q \cdot q} = 0$$

Da propriedade comutativa (II), segue que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Como consequência da proposição 3 e do item (IV) da proposição 4, temos o seguinte corolário:

Corolário 1 Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$. Então a correspondência $(a, b) \to a + (-b)$ é uma operação sobre $\mathbb{Q}$.

Definição 2 Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$. A operação definida no corolário anterior é chamada subtração em $\mathbb{Q}$ e denomina-se diferença entre a e b, e indica-se por $a - b$, o seguinte elemento de $\mathbb{Q}$:

$$a - b = a + (-b).$$

Proposição 5 Lei do cancelamento da adição.

Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$, se $a + b = a + c$, então $b = c$.

Demonstração:

$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$, temos que

Se $a + b = a + c$, então $(-a)(a + b) = (-a)(a + c)$

Logo $((-a) + a) + b = ((-a) + a) + c$

Portanto $0 + b = 0 + c$

Pelo que $b = c$

4.3.2 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

Proposição 6 Sejam $a=\frac{p}{q}$ e $b=\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}$. A correspondência $\left(\frac{p}{q},\frac{r}{s}\right)\mapsto\frac{pr}{qs}$ é uma operação sobre $\mathbb{Q}$.

Demonstração:

Suponha que $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$ e $\frac{r}{s}=\frac{r'}{s'}$. Então $pq'=qp'$ e $rs'=sr'$. Desta forma $(pq')rs'=(qp')rs'$ e $(rs')qp'=(sr')qp'$. Usando as propriedades comutativa e associativa da multiplicação em $\mathbb{Z}$ nessas igualdades, teremos:

$$(pr)(q's')=(rs')(qp') \text{ e } (rs')(qp')=(qs)(p'r')$$

Logo,

$$(pr)(q's')=(qs)(p'r')$$

Portanto,

$$\frac{pr}{qs}=\frac{p'r'}{q's'}$$

Definição 3 Sejam $a=\frac{p}{q}$ e $b=\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}$. A operação definida na proposição anterior é chamada multiplicação em $\mathbb{Q}$ e chama-se produto de a com b e indica-se por ab o elemento de $\mathbb{Q}$ definido como:

$$ab=a\cdot b=\frac{pr}{qs}$$

Proposição 7 Propriedades da multiplicação em $\mathbb{Q}$. A multiplicação em $\mathbb{Q}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(I) *Associativa:* $\forall a, b, c\in\mathbb{Q};\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

(II) *Comutativa:* $\forall a, b\in\mathbb{Q};\ a\cdot b=b\cdot a$

(III) *Existência de elemento neutro:* $\forall a\in\mathbb{Q}$, $\exists 1\in\mathbb{Q}$ tal que $a\cdot 1=a$ e $1\cdot a=a$.

(IV) *Existência de elemento inverso:* para cada $a\in\mathbb{Q}$ e $a\neq 0$, existe $b\in\mathbb{Q}$, tal que $ab=1$ e $ba=1$. O elemento b será denotado por a^{-1}.

(V) *Distributiva em relação à adição:* $\forall a, b, c \in \mathbb{Q};\ a(b+c) = ab + ac$

Demonstração de (I):

Sejam $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$ e $c = \frac{t}{u}$ elementos de $\mathbb{Q}$.

Por definição, temos que $ab = \frac{pr}{qs}$ e $bc = \frac{rt}{su}$. Logo, $(a \cdot b) \cdot c = \frac{(pr)t}{(qs)u}$ e $a \cdot (b \cdot c) = \frac{p(rt)}{q(su)}$.

Por conta da propriedade associativa da multiplicação em $\mathbb{Z}$, temos que $(pr)t = p(rt)$ e $(qs)u = q(su)$.

Portanto, $\frac{(pr)t}{(qs)u} = \frac{p(rt)}{q(su)}$, ou seja, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Demonstração (II):

Sejam $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$.

Por definição, temos que $ab = \frac{pr}{qs}$ e $ba = \frac{rp}{sq}$.

Por conta da propriedade comutativa da multiplicação em $\mathbb{Z}$, temos que $pr = rp$ e $qs = sq$.

Portanto, $\frac{pr}{qs} = \frac{rp}{sq}$, ou seja, $ab = ba$.

Demonstração de (III):

Seja $a = \frac{p}{q}$ elemento de $\mathbb{Q}$.

Temos que: $1 \cdot a = \frac{1}{1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot q} = \frac{p}{q} = a$

Da propriedade anterior, concluímos que: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

Demonstração de (IV):

Seja $a=\dfrac{p}{q}$ elemento de $\mathbb{Q}$ com $a\neq 0$. Então $p\neq 0$ e, daí, $b=\dfrac{q}{p}\in\mathbb{Q}$.

Temos $ab=\dfrac{pq}{qp}=\dfrac{pq}{pq}=1$. De (II), segue que $ab=ba=1$.

Demonstração de (V):

Sejam $a=\dfrac{p}{q}$, $b=\dfrac{r}{s}$ e $c=\dfrac{t}{u}$ elementos de $\mathbb{Q}$.

Temos

$$a(b+c)=\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{r}{s}+\frac{t}{u}\right)=\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{ru+ts}{su}\right)=\frac{p(ru+ts)}{q(su)}=\frac{p(ru)+p(ts)}{q(su)}=$$

$$=\frac{(pr)u+s(pt)}{(qs)u}=\left(\frac{(pr)u+s(pt)}{(qs)u}\right)\cdot\frac{q}{q}=\frac{((pr)u+s(pt))q}{((qs)u)q}=$$

$$=\frac{(pr)(qu)+(qs)(pt)}{(qs)(qu)}=\frac{pr}{qs}+\frac{pt}{qu}=ab+ac$$

Proposição 8 Se $a, b\in\mathbb{Q}$ com $a\neq 0 \text{ e } b\neq 0$, então:

(I) $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$

(II) $(ab)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$

Sejam $a=\dfrac{p}{q}$ e $b=\dfrac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Temos:

Demonstração de (I):

$$\left(a^{-1}\right)^{-1}=\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{q}{p}\right)^{-1}=\frac{p}{q}=a$$

Demonstração de (II):

Como $(ab)\cdot\left(a^{-1}\cdot b^{-1}\right)=\left(\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{r}{s}\right)\cdot\left(\dfrac{q}{p}\cdot\dfrac{s}{r}\right)=\left(\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{q}{p}\right)\cdot\left(\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{s}{r}\right)=\dfrac{pq}{pq}\cdot\dfrac{rs}{rs}=1$, então:

$$(ab)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$$

Proposição 9 Se $a, b, c\in\mathbb{Q}$, são válidas as propriedades:

(I) Se $a(b-c)=ab-ac$ e $(b-c)a=ba-ca$

(II) $a\cdot 0=0$

(III) $a(-b)=(-a)b=-(ab)$

(IV) $(-a)(-b)=ab$

(V) Lei do anulamento do produto: $ab=0\Rightarrow a=0$ ou $b=0$

(VI) Lei do cancelamento da multiplicação: $ab=ac$ e $a\neq 0\Rightarrow b=c$

Demonstração de (I):

Como $a(b-c)+ac=a((b-c)+c)=a(b+(-c+c))=ab$, temos que $a(b-c)=ab-ac$.

Analogamente, temos que $(b-c)a=ba-ca$

Demonstração de (II):

$$a\cdot 0=a\cdot(0-0)=a\cdot 0-a\cdot 0=0$$

Demonstração de (III):

$$a(-b)=a(0+(-b))=a(0-b)=a\cdot 0-(ab)=0-(ab)=-(ab)$$

e

$$(-a)b=(0+(-a))b=(0-a)b=0\cdot b-(ab)=-(ab)$$

Demonstração (IV):

De **(III)** temos que, $(-a)(-b)=-(a(-b))$. Ainda por (III), $a(-b)=-(ab)$. Assim, $(-a)(-b)=-(-(ab))=ab$

Demonstração de (V):

Se $a=0$ está provado.

Supondo que $a\neq 0$, existe a^{-1} e então de $ab=0$ resulta $a^{-1}(ab)=a^{-1}\cdot 0=0$.

Como $a^{-1}(ab)=(a^{-1}\cdot a)b=1\cdot b=b$, concluímos que $b=0$.

Demonstração de (VI):

Se $ab = ac$, então $ab + (-(ac)) = ac + (-(ac))$, logo $ab - ac = 0$, portanto

$$a(b-c) = 0$$

Supondo $a \neq 0$, teremos:

$$a(b-c) = 0 \text{ então } b - c = 0\text{, logo } b = c$$

Definição 4 A divisão em $\mathbb{Q}$ é entendida como a operação de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ em $\mathbb{Q}$ definida por $(ab) \to ab^{-1}$. O elemento ab^{-1} é chamado quociente de a por b e pode ser indicado por $a : b$.

4.3.3 Relação de Ordem em $\mathbb{Q}$.

Seja $a = \frac{p}{q}$ elemento de $\mathbb{Q}$. Da multiplicação em $\mathbb{Z}$, segue que $p(-q) = q(-p)$. Assim, $a = \frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}$. Portanto, sempre podemos considerar, para todo $a \in \mathbb{Q}$, uma representação em que o denominador seja um inteiro positivo.

Proposição 10. Sejam $a = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ e $b = \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ elementos de $\mathbb{Q}$ com p, q, p', q' inteiros positivos. Então: $ps < qr$ se, e somente se, $p's' < q'r'$

Demonstração:

Se $ps < qr$ então $p's' < q'r'$

Por hipótese, e por que em $\mathbb{Z}$ se define uma relação de ordem, temos que

Se $a = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ então $pq' = qp'$,

Se $b = \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ então $rs' = sr'$,

e

$q's' > 0$.

Considerando que $ps < qr$, teremos:

Se $ps < qr$, então $(ps)(q's') < (qr)(q's')$, logo $(pq')(ss') < (rs')(qq')$, donde $(qp')(ss') < (sr')(qq')$, portanto $(p's')(qs) < (q'r')(qs)$

Como $qs > 0$, temos que: $p's' < q'r'$

Analogamente é realizada a demonstração da volta:

Se $p's' < q'r'$, então $ps < qr$

Definição 6 Sejam $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$ tais que $q > 0$ e $s > 0$. Diz-se que a é menor ou igual a b, e escreve-se $a \leq b$, se $ps \leq qr$. Neste caso, também se pode escrever $b \geq a$ e dizer que b é maior ou igual a a.

Se $ps < qr$, diz-se que a é menor que b e escreve-se $a < b$. Pode-se dizer que b é maior que a e escrever $b > a$.

Observação 1 Seja $a = \frac{p}{q}$ elemento de $\mathbb{Q}$ tal que $q > 0$. Temos $a = \frac{p}{q} \geq 0$ se, e somente se, $p \cdot 1 \geq q \cdot 0$. Como $p \cdot 1 = p$ e $q \cdot 0 = 0$, podemos concluir que:

$$a = \frac{p}{q} \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 0$$

Analogamente, teremos:

i) $a = \frac{p}{q} > 0 \Leftrightarrow p > 0$;

ii) $a = \frac{p}{q} \leq 0 \Leftrightarrow p \leq 0$

iii) $a = \frac{p}{q} < 0 \Leftrightarrow p < 0$

Definição 7 Seja $a = \frac{p}{q}$ elemento de $\mathbb{Q}$ tal que $q > 0$. Diz-se que a é positivo quando $a \geq 0$. Se $a > 0$, diz-se que a é estritamente positivo. Quando $a \leq 0$ diz-se que a é negativo e a é chamado de estritamente negativo quando $a < 0$.

Proposição 11 Sejam a e b elementos de $\mathbb{Q}$. Se $a > b$, então existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $c > 0$ e $a = b + c$.

Demonstração:

Como foi visto que é sempre possível escrever dois racionais com o mesmo denominador, podemos supor $a = \frac{p}{k}$, $b = \frac{r}{k}$ e $k > 0$. Por hipótese, $a > b$, ou seja, $pk > kr$. Considerando o fato de que $k > 0$ e uma das propriedades de ordem no conjunto dos números inteiros, teremos que $p > r$. Portanto, existe $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, de modo que $p = r + n$. Assim, $c = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$ e é tal que $c > 0$ e

$$a = \frac{p}{k} = \frac{r+n}{k} = \frac{r}{k} + \frac{n}{k} = b + c$$

A proposição a seguir nos garante que a relação $\leq$, dada na definição 6, é uma relação de ordem sobre $\mathbb{Q}$.

Proposição 12 Sejam $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$ e $c = \frac{t}{u}$ elementos de $\mathbb{Q}$ com denominadores estritamente positivos. As propriedades abaixo são satisfeitas:

(I) Reflexiva: $\frac{p}{q} \leq \frac{p}{q}$

(II) Antissimétrica: Se $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leq \frac{p}{q}$ então $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$.

(III) Transitiva: Se $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leq \frac{t}{u}$ então $\frac{p}{q} \leq \frac{t}{u}$

(IV) $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$ ou $\frac{r}{s} \leq \frac{p}{q}$

Demonstração de (I):

Em $\mathbb{Z}$ temos que $pq \leq qp$. Logo, $\frac{p}{q} \leq \frac{p}{q}$.

Demonstração de (II):

Por hipótese temos que $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leq \frac{p}{q}$. Então, $ps \leq qr$ e $rq \leq sp$ (em $\mathbb{Z}$). Logo, $ps = qr$ e, portanto, $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$.

Demonstração de (III):

Como, por hipótese, $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leq \frac{t}{u}$, segue-se que $ps \leq qr$ e $ru \leq st$ (em $\mathbb{Z}$). Multiplicando a primeira desigualdade por $u > 0$ e a segunda por $q > 0$, obteremos:

$$psu \leq qru \quad \text{e} \quad ruq \leq stq \quad (\text{em } \mathbb{Z}).$$

Logo, $psu \leq stq$, como $s > 0$ podemos concluir que $pu \leq tq$. Portanto, $\frac{p}{q} \leq \frac{t}{u}$.

Demonstração de (IV):

Pela lei da tricotomia dos números inteiros, temos que $ps \leq qr$ ou $qr \leq ps$ (em $\mathbb{Z}$). Logo, $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$ ou $\frac{r}{s} \leq \frac{p}{q}$.

Proposição 13 Sejam $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$ com denominadores estritamente positivos. Então:

(I) Se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$, qualquer que seja $c \in \mathbb{Q}$.

(II) Se $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$ e $\frac{t}{u} \geq 0$ (com u estritamente positivo), então $\frac{p}{q} \cdot \frac{t}{u} \leq \frac{r}{s} \cdot \frac{t}{u}$.

Demonstração de (I):

Como, por hipótese, $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$, temos que $ps \leq qr$, segue-se que:

Se $ps \cdot u^2 \leq qr \cdot u^2$, então $ps \cdot u^2 + tqsu \leq qr \cdot u^2 + tqsu$, logo

$(pu + tq)su \leq qu(ru + ts)$, portanto $\frac{pu + tq}{qu} \leq \frac{ru + ts}{su}$, donde $\frac{p}{q} + \frac{t}{u} \leq \frac{r}{s} + \frac{t}{u}$

Demonstração de (II):

Como, por hipótese, $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$, temos que $ps \leq qr$. Temos também que $t \geq 0$, $t \cdot u \geq 0$. Assim, $(ps)(tu) \leq (qr)(tu)$ e daí $(pt)(su) \leq (qu)(rt)$. Sabemos que $q > 0;\ s > 0$ e $u > 0$, assim, $su > 0$ e $qu > 0$. Logo:

$$(pt)(su) \leq (qu)(rt), \text{ então } \frac{pt}{qu} \leq \frac{rt}{su}, \text{ logo } \frac{p}{q} \cdot \frac{t}{u} \leq \frac{r}{s} \cdot \frac{t}{u}$$

Esta proposição indica que a relação $\leq$, expressa na definição 6, é compatível com as operações adição e multiplicação definidas anteriormente.

Proposição 14 Se $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$, $c = \frac{t}{u}$ e $d = \frac{v}{w}$ elementos de $\mathbb{Q}$, então:

(I) $a \leq b \Leftrightarrow -b \geq -a$

(II) $a \leq b$ e $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$

Se $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$, $c = \frac{t}{u}$ e $d = \frac{v}{w}$ elementos de $\mathbb{Q}$, com denominadores estritamente positivos. Então $q, s, u, w > 0$.

Demonstração de (I):

$$a \leq b \Leftrightarrow \frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps \leq qr \Leftrightarrow -qr \leq -ps \Leftrightarrow (-r)q \leq s(-p) \Leftrightarrow \frac{-r}{s} \leq \frac{-p}{q} \Leftrightarrow -b \leq -a$$

Demonstração de (II):

$$\text{Se } a \leq b \text{ e } c \leq d \Rightarrow \frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \text{ e } \frac{t}{u} \leq \frac{v}{w} \Rightarrow ps \leq qr \text{ e } tw \leq uv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ps)(uw) \leq (qr)(uw) \text{ e } (tw)(qs) \leq (uv)(qs) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ps)(uw) + (tw)(qs) \leq (qr)(uw) + (uv)(qs) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (pu + qt)(sw) \leq (qu)(rw + sv) \Rightarrow \frac{pu + qt}{qu} \leq \frac{rw + sv}{sw} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} + \frac{t}{u} \leq \frac{r}{s} + \frac{v}{w} \Rightarrow a + c \leq b + d$$

Observação 2 Todas as desigualdades obtidas nas proposições 13 e 14 são válidas se trocarmos o $"\leq"$ pelo $"<"$.

Proposição 15 Sejam $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Se $ac \leq bc$ e $c > 0$, então $a \leq b$.

Demonstração:

Vamos supor que $a > b$. Como, por hipótese, $c > 0$ teríamos que $ac > bc$, porém isso contradiz a hipótese.

Proposição 16 (Regra dos sinais) Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$, então:

(I) $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow ab > 0$

(II) $a < 0$ e $b < 0 \Rightarrow ab > 0$

(III) $a < 0$ e $b > 0 \Rightarrow ab < 0$

Demonstração:

Se $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$, com denominadores estritamente positivos. Então:

$$a \cdot b = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}, \text{ com } qs > 0$$

(I) Se $a > 0$ e $b > 0$, então $p > 0$ e $r > 0$, portanto $pr > 0$, logo $ab > 0$

(II) Se $a < 0$ e $b < 0$, então $p < 0$ e $r < 0$ logo $pr > 0$, portanto $ab > 0$

(III) Se $a < 0$ e $b > 0$, então $p < 0$ e $r > 0$, logo $pr < 0$, portanto $ab < 0$

Proposição 17 Se $a \in \mathbb{Q}$, então $a^2 \geq 0$ e $a^2 > 0$ sempre que $a \neq 0$.

Demonstração:

Se $a > 0$ ou $a < 0$, temos que, pela regra dos sinais, $a^2 = a \cdot a > 0$.

Se $a = 0$, então $a^2 = 0 \cdot 0 = 0$.

Proposição 18 Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$, teremos:

(I) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

(II) $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$

(III) $0 < a < 1 \Rightarrow a^{-1} > 1$

(IV) $a > 1 \Rightarrow 0 < a^{-1} < 1$

(V) $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$

(VI) $a < b < 0 \Rightarrow b^{-1} < a^{-1} < 0$

Demonstração de (I):

Temos que $a^{-1} \neq 0$, dessa forma $a^{-1} \cdot a = 1$. Pela propriedade anterior, teremos $\left(a^{-1}\right)^2 > 0$. Desta relação e da hipótese, $a > 0$, decorre da regra dos sinais que:

Se $a \cdot \left(a^{-1}\right)^2 > 0$, então $a \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} > 0$, logo $1 \cdot a^{-1} > 0$, portanto $a^{-1} > 0$.

Demonstração de (II) :

Do fato $\left(a^{-1}\right)^2 > 0$ e da hipótese, $a < 0$, segue que:

Se $a \cdot \left(a^{-1}\right)^2 < 0$, então $a \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} < 0$, logo $1 \cdot a^{-1} < 0$, donde $a^{-1} < 0$

Demonstração de (III):

Como $a^{-1} > 0$, por conta de (I), multiplicando os termos da hipótese, $0 < a < 1$, por a^{-1}, teremos:

$$0 \cdot a^{-1} < a \cdot a^{-1} < 1 \cdot a^{-1}$$

Logo, $0 < 1 < a^{-1}$, ou melhor, $a^{-1} > 1$.

Demonstração de (IV):

Como $a > 1$, então $a > 0$ e, daí, $a^{-1} > 0$. Logo, $1 \cdot a^{-1} < a \cdot a^{-1}$, ou seja, $a^{-1} < 1$. Portanto, $0 < a^{-1} < 1$.

Demonstração de (V):

Por hipótese temos que $0 < a < b$. Então $a^{-1} > 0$ e $b^{-1} > 0$ e, portanto, $a^{-1} \cdot b^{-1} > 0$.

Multiplicando os termos de $0 < a < b$ por $a^{-1} \cdot b^{-1}$, teremos:

$$0 \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} < a \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} < b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$$

Demonstração de (VI):

Como, por hipótese, $a < b < 0$, segue que $a^{-1} < 0$ e $b^{-1} < 0$. Logo:

Se $a \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} < b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} < 0 \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$, então $b^{-1} < a^{-1} < 0$

O conjunto $\mathbb{Q}$, construído da maneira como o fizemos, com a adição, a multiplicação e a relação de ordem é o corpo ordenado dos números racionais e seus elementos, os números racionais.

4.4 Razão e proporção na atualidade

Diferente das ideias contidas nos Elementos de Euclides, onde a comparação entre grandezas tinha um caráter geométrico, pode associar-se um caráter numérico à razão $\frac{a}{b}$ que em geral é conhecida por fração.

Geraldo Ávila (ÁVILA, 1986) lamenta a falta de modernização na apresentação do conceito de razão e da linguagem utilizada ao exprimir a igualdade entre duas razões, o que pode provocar confusão ao aluno em fase de aprendizagem:

> Tanto assim que ainda se usam as palavras “antecedente” e “consequente” em lugar de “numerador” e “denominador” respectivamente; e às vezes ainda se escreve A:B = C:D ou A:B :: C:D e se fala “A está para B assim como C está para D”. Quando aprendi essas coisas pela primeira vez fiquei bastante confuso, pois não entendia o porquê da nova terminologia e da nova maneira de se exprimir o que me parecia ser uma simples igualdade de frações. Só muito mais tarde é que pude compreender que a estranha apresentação tinha origem no rigor grego de não admitir os números irracionais e na engenhosa teoria que Eudoxo inventara para contornar a crise dos incomensuráveis. (ÁVILA, 1986, p.1)

Segundo o professor Ávila ,(ÁVILA, 1986), a "matemática dos números" começa a ser estudada na Europa, no século XIII, principalmente por conta da publicação, em 1202, do livro *Líber Abaci*. Seguiram-se séculos de desenvolvimento nos estudos de frações, radicais, equações, e outros conteúdos, até que no século XIX as construções do conjunto dos números reais, embasadas na lógica, na teoria dos conjuntos e no conceito de limite, legitimam a existência dos números irracionais. Essa fundamentação sólida do conjunto dos números reais como corpo ordenado e completo fez com que se pudesse tratar a razão $\frac{a}{b}$ com um caráter numérico, uma fração.

> Mas com a fundamentação dos números reais, no século passado, em bases sólidas e mais confiáveis do que as da antiga Geometria, a teoria das proporções de Eudoxo passa a ter apenas valor histórico.
>
> Dispomos assim dos números reais (racionais e irracionais), logo podemos medir todas as grandezas e, em consequência podemos sempre definir a razão de duas delas como o quociente de suas medidas. E não precisamos mais usar a superada teoria geométrica das proporções, muitos menos os resquícios que dela ficaram na terminologia, na notação e, sobretudo, na maneira de apresentar fatos, como os problemas de "regra de três". Estes podem ser ensinados no contexto algébrico de resolução de equações, com a dupla vantagem da simplificação e da unificação do ensino da Matemática. Seria até mais próprio que falássemos em variáveis proporcionais ao invés de grandezas proporcionais. (ÁVILA, 1986, p.2-3)

Continuando, ÁVILA (1986) alerta ainda a respeito da chamada propriedade fundamental das proporções pois ao ensiná-la deve tomar-se o cuidado para que não dê a impressão de que ela é exclusiva das "razões e proporções" quando na realidade é relativa às igualdades devendo ser tratada no âmbito do estudo das equações. Defende que tal propriedade deveria ser abordada quando são ensinadas frações ordinárias, mais especificamente a igualdade de frações.

No caso em que a, b, c e d são inteiros (com b e d não nulos) da construção do conjunto $\mathbb{Q}$, tem-se que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se e somente se $ad = cb$. A equivalência anterior permanece válida quando se está perante frações cujos termos sejam números reais. Vejamos:

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com b e d reais não nulos, teremos:

$$\frac{a}{b}(bd)=\frac{c}{d}(bd)\text{, então }\frac{a}{b}bd=\frac{c}{d}db\text{, logo }\left(\frac{a}{b}b\right)d=\left(\frac{c}{d}d\right)b\text{, portanto}$$

$$ad=cb$$

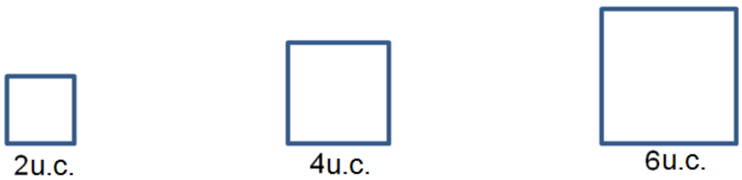
Utilizamos as propriedades comutativa, associativa da multiplicação e a definição de quociente.

Ávila também sugere que no ensino das demais propriedades se deveria adotar uma abordagem e uma linguagem mais adequadas às propostas atuais. A seguir são apresentadas três definições que serão utilizadas para a resolução de questões que versam sobre a "regra de três simples" e a "regra de três composta". São elas:

> Definição 1: Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais – mais especificamente, diretamente proporcionais – se estiverem assim relacionadas: y = kx ou $\frac{y}{x}=k$, onde k é uma constante positiva, chamada constante de proporcionalidade. (ÁVILA, 1986, p.3)

Exemplo 1: Por exemplo, temos que a medida do perímetro de um quadrado é diretamente proporcional à medida de seu lado, consideradas na mesma unidade de comprimento (u.c.).

Figura 5 – Sequencia de quadrados



Fonte: O autor, 2019

Quadro 1 – Lado, perímetro e razão

	Medida do Lado	**Perímetro**	**Razão (Perímetro/Lado)**
Quadrado 1	2	8	4
Quadrado 2	4	16	4
Quadrado 3	6	24	4
Quadrado Genérico	L	L+L+L+L	4

Fonte: O autor, 2019

Utilizando a definição, teremos: $P = 4 \cdot L$ ou $\frac{P}{L} = 4$, considerando P = perímetro e L = lado.

Da mesma forma temos que o comprimento e o diâmetro de uma circunferência são grandezas diretamente proporcionais e a razão entre elas é definida como π.

Para variáveis inversamente proporcionais tem-se a seguinte definição:

> Definição 2. Diz-se que as variáveis x e y são inversamente proporcionais se $y = \frac{k}{x}$ ou xy = k, onde k é uma constante positiva (constante de proporcionalidade). (ÁVILA, 1986, p.3)

Exemplo 2: A título de exemplo vamos considerar que um prêmio de loteria, R$ 300.000.000,00, será dividido igualmente entre as apostas que coincidem nos seis números sorteados, de 1 a 60.

O valor da premiação para cada aposta depende de quantas coincidiram com os números sorteados..

Quadro 2 – Relação entre número de vencedores e prêmio

Nº de apostas vencedoras	Valor de cada prêmio
8	$\frac{300.000.000}{8} = 37.500.000$
30	$\frac{300.000.000}{30} = 10.000.000$
50	$\frac{300.000.000}{50} = 6.000.000$

Fonte: O autor, 2019

Considerando como n = número de apostas vencedoras e V = valor de cada prêmio, teremos: $V = \frac{300.000.000}{n}$, ou ainda, $V \cdot n = 300.000.000$. Trata-se uma situação de proporcionalidade inversa.

> Definição 3. Se várias variáveis, digamos, x, y, z, w, r, s estão relacionadas por uma equação do tipo $z = k \cdot \frac{x \cdot y \cdot w}{r \cdot s}$, onde k é constante, então dizemos que z é diretamente proporcional a x, a y e a w; e inversamente proporcional a r e a s. (ÁVILA, 1986, p.4)

A seguir apresentam-se três problemas e suas respectivas resoluções que utilizaram as definições anteriores. A escolha recaiu, por motivos óbvios, sobre dois exercícios presentes em provas do ENEM e um exercício tradicional do tema que é de domínio público.

Exemplo 03: (ENEM – 2012)

Figura 6 – Problema 01

QUESTÃO 160

Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de

A) 12 kg.
B) 16 kg.
C) 24 kg.
D) 36 kg.
E) 75 kg.

Fonte: Exame Nacional do Ensino Médio, 2012, 2º dia, questão 160, caderno amarelo, p. 25.

Resolução:

A formulação presente na bula de dosagem: 5 gotas para cada 2kg de massa. Traduz a existência de proporcionalidade entre as variáveis envolvidas, a massa em quilogramas (M) e o número de gotas correspondente (G). Esquematicamente:

Quadro 3 – Relação entre as grandezas

	M	**G**
Indicação	2	5
Criança	x	30

Fonte: O autor, 2019

Se considerarmos k como o número de gotas correspondente a cada quilograma teremos: $k = \dfrac{G}{M}$ ou $G = k \cdot M$, indicando que as variáveis são diretamente proporcionais.

Como $k = \dfrac{2}{5}$ e $k = \dfrac{x}{30}$, temos que $\dfrac{2}{5} = \dfrac{x}{30} \Rightarrow x = 12$.

A criança, portanto, tem 12 quilogramas.

Exemplo 04: (ENEM-2013)

FIGURA 7 – Problema 02

QUESTÃO 143

Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m³. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m³, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

A 2.
B 4.
C 5.
D 8.
E 9.

Fonte: Exame Nacional do Ensino Médio, 2013, 2º dia, questão 143, caderno amarelo, p. 22.

Resolução:

Temos dois reservatórios e três variáveis: capacidade (C), quantidade de ralos (R) e tempo de escoamento (T).

Quadro 4 – Relação entre as grandezas

	C	**R**	**T**
Reservatório 1	900	6	6
Reservatório 2	500	x	4

Fonte: O autor, 2019

O primeiro questionamento é referente à constante de proporcionalidade, como os ralos dos dois reservatórios são iguais, a constante de proporcionalidade será a quantidade de água escoada por um ralo em uma hora (unidade de tempo). Assim, considerando como k a quantidade de água escoada por cada ralo em uma hora, para escoar toda a capacidade do reservatório, teremos que: $C = R \cdot k \cdot T$ ou seja $\frac{C}{R \cdot T} = k$

A relação anterior indica que C é diretamente proporcional a R e T (pela definição 3).

Substituindo nesta igualdade as duas sequências de valores dados no problema, obtemos:

$\frac{900}{6 \cdot 6} = k$ e $\frac{500}{x \cdot 4} = k$, assim tem-se $\frac{900}{36} = \frac{500}{4x}$ pelo que $x = 5$

Serão necessários 5 ralos.

Exemplo 05: (Domínio Público)

Doze tecelões em 90 dias de trabalho com jornada de 8 horas diárias produzem 36 m de carpete. Quantos dias levarão 15 tecelões para fazer 12 m de carpete com o dobro da largura, trabalhando 6 horas por dia?

Resolução:

Repare-se que a largura do carpete não é a mesma. No entanto, esta não será considerada como mais uma variável do problema, já que um carpete de 12m com o dobro da largura do anterior é equivalente a um carpete de 24m e com a mesma largura.

Assim as variáveis presentes no problema são: número de tecelões (T), dias de trabalho (D), jornada de trabalho (J) e comprimento do carpete (C). Esquematicamente:

Quadro 5 – Relação entre as grandezas

	T	**D**	**J**	**C**
Grupo 1	12	90	8	36
Grupo 2	15	x	6	24

Fonte: O autor, 2019

Seja k o quanto cada tecelão produz por hora, então cada um produzirá por dia $k \cdot J$. A produção do grupo será: $C = k \cdot J \cdot T \cdot D$ ou seja $k = \frac{C}{J \cdot T \cdot D}$

Esta igualdade nos diz que a variável C é diretamente proporcional a J, T e D. Substituindo nesta equação as duas sequências de valores dados no problema, obtemos:

$$\frac{36}{8 \cdot 12 \cdot 90} = k \text{ e } \frac{24}{6 \cdot 15 \cdot x} = k \text{, logo } \frac{36}{8 \cdot 12 \cdot 90} = \frac{24}{6 \cdot 15 \cdot x} \text{, portanto } x = 64$$

Serão necessários 64 dias.

A maneira apresentada para resolver as questões que envolvem proporcionalidade, a que muitos chamam de regra de três, parece ser a melhor alternativa a outras práticas que envolvem artifícios que tanto confundem nossos alunos. Apesar de se tratar de um conteúdo dos primeiros anos do Ensino Fundamental II, a dificuldade manifestada por alunos na 3ª série do Ensino Médio, na resolução de questões desta natureza é sentida por muitos professores das redes pública e particular de ensino. Daí ser importante repensar a forma como este assunto deve abordado nas turmas de 6º ano.

> Na teoria de Eudoxo uma razão não é o quociente de dois números e uma proporção não é uma igualdade de duas razões. Foi por isso que surgiram as palavras “antecedentes” e “consequente”, a notação A : B :: C : D e a maneira de dizer “A está para B assim como C está para D”.
> Tudo isso está superando há pelo menos um século. Numa autêntica modernização do ensino não há por que ensinar essas coisas, enfatizar “razões e proporções” como teoria autônoma, ou falar em “terceira proporcional” e “quarta proporcional”. (ÁVILA, 1986, p.8)

4.5 Razão e proporção na BNCC – ensino fundamental

> Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas

mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRAZIL, 2018, p.266)

No que tange o ensino de razão e proporção, é sugerida que a abordagem, do 6º ao 9º ano, seja realizada de forma escalonada.

Nas tabelas a seguir estão discriminadas as unidades temáticas, os objetos do conhecimento e as habilidades que abordam o tema razão e proporção do 6º ao 9º anos do ensino fundamental segundo a BNCC. (BRASIL, 2018, p.300-319)

6º Ano		
UNIDADE TEMÁTICA	**OBJETO DO CONHECIMENTO**	**HABILIDADE**
Álgebra	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
Probabilidade e Estatística	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

7º Ano		
UNIDADE TEMÁTICA	**OBJETO DO CONHECIMENTO**	**HABILIDADE**
Números	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.	(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza. (EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

8º Ano		
UNIDADE TEMÁTICA	**OBJETO DO CONHECIMENTO**	**HABILIDADE**
Álgebra	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

9º Ano		
UNIDADE TEMÁTICA	**OBJETO DO CONHECIMENTO**	**HABILIDADE**
Álgebra	Razão entre grandezas de espécies diferentes Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica. (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

9º Ano		
UNIDADE TEMÁTICA	**OBJETO DO CONHECIMENTO**	**HABILIDADE**
Geometria	Semelhança de triângulos Relações métricas no triângulo retângulo Relações métricas no triângulo retângulo Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Como se pode constatar o tema é de grande importância e fundamental no entendimento dos conteúdos não apenas da Matemática, como também das ciências da natureza.

Por conta disso, este tema foi escolhido para a elaboração de uma atividade experimental aplicada em uma Classe de Adequação Idade Série, utilizando a proposta da pedagogia UERÊ-MELLO. Esta atividade será descrita no capítulo seguinte.

5 UMA AULA EXPERIMENTAL

Para responder ao questionamento, realizado na introdução, que motivou este trabalho de adequar a pedagogia UERÊ-MELLO a classes de alunos em situação de estresse pós-traumático e bastante desmotivados tornou-se necessário encontrar tal grupo de alunos.

Oportunamente, em maio de 2018, é criado o projeto CAIS (Classe de Adequação Idade Série), destinado a alunos com dificuldades de aprendizagem no âmbito do Colégio Pedro II.

Este projeto se destina a alunos que frequentam o Ensino Fundamental e que foram retidos uma ou mais vezes em alguma série e, portanto, estão fora da faixa etária da série em que se encontram. Como a possibilidade que estes alunos se evadam da escola antes de chegar ao ensino médio é grande, a intenção é criar condições para que estes alunos sejam, em um tempo relativamente curto, reintroduzidos nas séries correspondentes as suas faixas etárias.

> Os objetivos específicos associados ao trabalho a ser desenvolvido em tais classes se concentram em desenvolver um programa de correção de fluxo escolar compatível com as necessidades e perfil de aprendizagem dos estudantes e propiciar um espaço de troca mais inclusivo, de modo que possam reconhecer suas qualidades, desenvolver seu potencial e fortalecer sua autoestima (COLÉGIO PEDRO II, 2018, p.2)

O Projeto é organizado em duas classes: CAIS-1 atendendo a alunos de 6º/7º anos e CAIS-2 atendendo a alunos de 8º/9º anos, ambos com turmas de 15 a 20 alunos.

Há duas certificações semestrais sendo, cada uma, composta por dois tipos de avaliações: uma prova formal individual e uma avaliação diversificada (composta de instrumentos diversos, propostos por cada equipe pedagógica).

A aprovação será obtida caso o aluno obtenha frequência de, ao menos, 75% do total de horas letivas e média aritmética das certificações de 5,0 pontos.

A não promoção do estudante acarreta a repetência no ciclo em que se encontrava. “As Classes de Adequação Idade Série serão oferecidas no período 2018 à 2021, com avaliação anual e possibilidade de reedição.” (COLÉGIO PEDRO II, 2018, p.2)

A inclusão de um aluno no CAIS se dá de acordo com os critérios estabelecidos na Portaria 1472 de 03/05/2018, que consideram idade, situação de repetência e aprovação em COC e uma avaliação psicopedagógica. A aprovação dos responsáveis, firmada com um termo de adesão oficial, é necessária para a inclusão do aluno no programa.

Os alunos do projeto são avaliados em dois aspectos:

1º) A diagnose, acompanhamento contínuo do processo ensino/aprendizagem pelo professor que, de acordo com o desenvolvimento apresentado pelo discente, redireciona, modela ou mantém a ação didático-pedagógica.

2º) A Certificação, expressão numérica indicativa do desempenho escolar no período letivo. Considera tanto os aspectos quantitativos quanto os qualitativos do processo.

Cada ano letivo apresentará duas certificações semestrais. Cada certificação formada pelo resultado de dois instrumentos: uma avaliação formal e outra diversificada.

A aprovação é obtida com a obtenção de um valor maior ou igual a 5 no cálculo da média aritmética simples dos dois instrumentos e da frequência mínima de 75% do total de horas letivas.

De acordo com o Artigo 2º, parágrafo 1º da portaria citada:

> O objetivo geral a ser atingido em tais classes é o de habilitar os estudantes em situação de distorção idade/série, a construir competências cognitivas, sociais e intelectuais, buscando alternativas pedagógicas inovadoras. (COLÉGIO PEDRO II, 2018, p.2)

Desta forma a pedagogia UERÊ-MELLO nos pareceu ser uma excelente alternativa pedagógica inovadora para auxiliar na correção dessas distorções.

5.1 Uma atividade no CAIS

No dia 26 de setembro de 2018 realizei uma atividade com a turma do CAIS-1 do Colégio Pedro II – Unidade Engenho Novo II. O grupo em questão era formado por 15 alunos com idades variando de 15 a 17 anos, sendo 4 meninas e 11 meninos. A turma participou da atividade numa disposição de três fileiras com duplas de mesas. A aula foi uma introdução aos conceitos de razão e proporção.

5.1.1 Primeiro Momento: aquecimento

Esta dinâmica durou 15 minutos.

Apresentei-me rapidamente à turma e iniciei a aula com perguntas:

- Quem sabe me dizer o é uma grandeza?

E as respostas, como esperado, foram: “o que é grande”, “tem a ver com tamanho”, “é a medida”.

De acordo com as respostas, mais perguntas foram sendo colocadas aos alunos:

- O que podemos medir? O que é medir?

E as contribuições foram: “altura”, “peso”, “quantos litros”, “velocidade”.

A princípio, nem todos quiseram participar, mas com o decorrer do tempo poucos não contribuíram com a atividade, o que estava dentro do esperado.

Conforme as intervenções iam ocorrendo, algumas palavras foram escritas na lousa.

Chegamos juntos às ideias de que “grandeza é tudo que pode ser medido” e que “medir é comparar”.

Em seguida observamos que podemos utilizar, segundo a participação deles, dois métodos de comparação: a subtração e a divisão. Vimos que a razão entre duas grandezas é uma comparação realizada por meio de uma divisão entre suas medidas.

Nesta dinâmica partimos do conhecimento de cada aluno e aluna para chegarmos a uma noção do conceito de razão. A oralidade, a expressão dos alunos e alunas, foi valorizada.

5.1.2 Segundo Momento: Estímulo audiovisual.

Esta atividade durou aproximadamente 20 minutos.

Em seguida foi projetado um vídeo da série Matemática na Vida, produzido pela Fundação Universidade de Brasília em parceria com o Ministério da Educação, cujo tema é Razão e Proporção.

Figura 8 – Abertura do vídeo apresentado

Fonte: O autor, 2019

O vídeo trata do assunto de maneira bem descontraída e com temáticas acessíveis a todos. Inicia com uma baiana fazendo a massa de acarajé e dizendo que o segredo está na correta proporção entre os ingredientes. Na sequencia o narrador se lembra da massa de cimento que o pedreiro utiliza nas construções, daí a ligação da maquete do prédio e, das maquetes, ao cinema com seus efeitos especiais... O vídeo apresenta os conceitos de razão e proporção na alimentação, na construção, na arte e na biologia.

O áudio não estava muito bom, foi necessário parar algumas vezes a reprodução para esclarecer algumas falas que não ficaram bem compreensíveis.

5.1.3 Terceiro Momento: Discussão e síntese.

Esta atividade teve a duração de, aproximadamente, 10 minutos.

Após a apresentação do vídeo, teve lugar, novamente, um momento de oralidade, onde a discursão envolveu o que foi apresentado, quais ideias foram expostas e quais novos conceitos foram trabalhados.

Conversamos sobre o que é proporção. Inicialmente os alunos foram dando as suas interpretações sobre o que eles entenderam como proporção, seguindo depois a definição usual de igualdade entre duas, ou mais, razões.

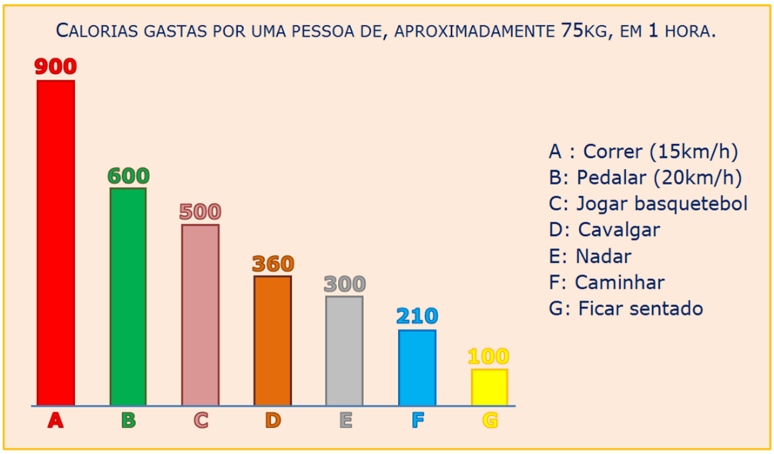
A participação continuou satisfatória.

5.1.4 Quarto Momento: fixação do conteúdo.

Esta atividade teve a duração de, aproximadamente, 15 minutos.

Foi distribuída uma lista com o gráfico e as perguntas que se seguem.

Figura 9 – Gráfico 01



Fonte: O autor, 2019

Analisando os dados apresentados no gráfico, pergunta-se:

a) Qual é a razão entre as quantidades de calorias gastas ao ficar sentado e ao jogar basquetebol?

b) Qual é a razão entre as quantidades de calorias gastas ao cavalgar e ao correr?

c) As razões obtidas nos itens a) e b) formam uma proporção?

d) Qual é a razão entre as quantidades de calorias gastas ao ficar sentado e ao nadar?

e) Qual é a razão entre as quantidades de calorias gastas ao nadar e ao correr?

f) As razões obtidas nos itens d) e e) formam uma proporção?

O gráfico foi projetado e as perguntas, uma a uma, foram também apresentadas. À medida que cada pergunta era disparada, os alunos respondiam espontaneamente. Cada resposta era analisada pelo grupo e, quanto havia um consenso, era dito se estava correta ou não e o motivo.

5.1.5 Atividades para realizar em casa

Visando aferir se os alunos tinham apreendido os conceitos expostos, foram entregues ao professor regente da turma, duas atividades para serem realizadas individualmente em suas casas.

Após a análise das respostas obtidas, as respostas foram classificadas como completa, incompleta ou insuficiente.

A primeira atividade apresentou duas perguntas conceituais, que seguem abaixo:

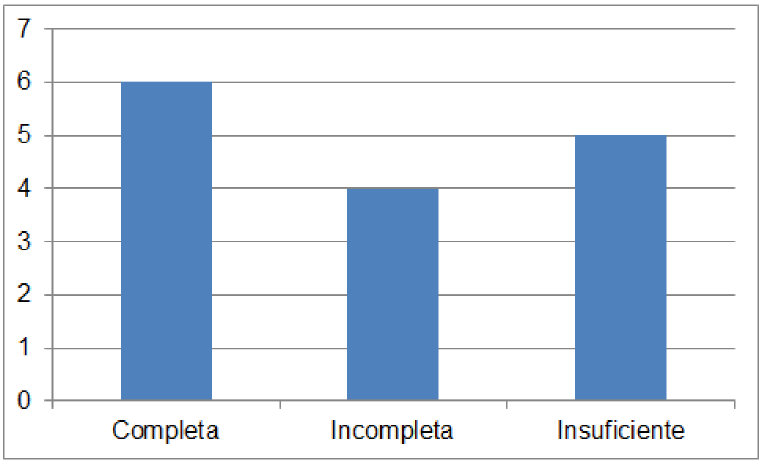
01. Explique, com suas palavras, o que é a razão entre duas grandezas.

02. Explique, com suas palavras, o que é uma proporção.

Análise das respostas dadas para a primeira atividade:

Abaixo temos um gráfico indicando os resultados apurados em relação à primeira questão. O gráfico indica a quantidade de alunos que obtiveram, com suas respostas, as classificações mencionadas anteriormente.

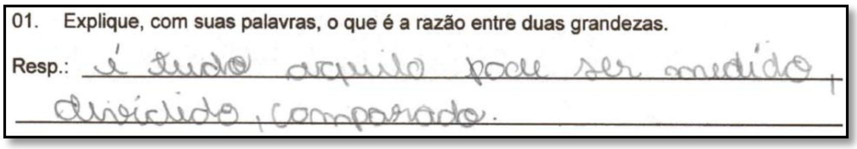
Figura 10 – Gráfico 02



Fonte: O autor, 2019

Foi observado que alguns alunos confundiram o conceito de razão com o conceito de grandeza.

FIGURA 11 – Resposta de um aluno

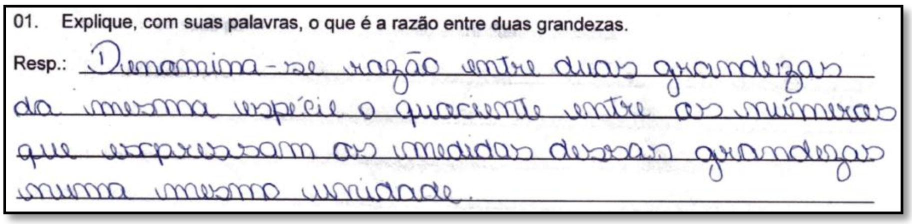

01. Explique, com suas palavras, o que é a razão entre duas grandezas.

Resp.: é tudo aquilo pode ser medido, dividido, comparado.

Fonte: O autor, 2019

Outra constatação é em relação à dificuldade, ou insegurança, do aluno em refletir e redigir um pequeno texto explicativo sobre o conteúdo apresentado e discutido em sala, buscando na internet uma resposta para a questão.

Figura 12 – Resposta de um aluno


01. Explique, com suas palavras, o que é a razão entre duas grandezas.

Resp.: 1) Denomina-se razão entre duas grandezas da mesma espécie o quociente entre os números que expressam as medidas dessas grandezas numa mesma unidade.

Fonte: O autor, 2019

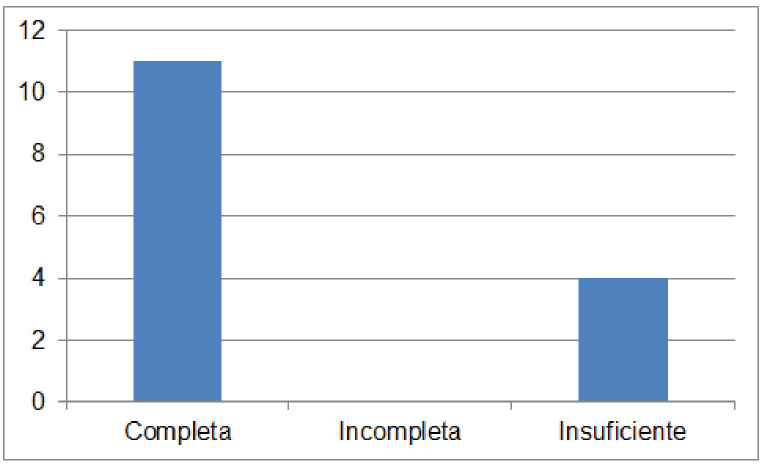
Esta definição é cópia do que se encontra no site:

< https://www.somatematica.com.br/fundam/razoes4.php>

Infelizmente, alguns alunos copiaram de colegas as respostas.

Abaixo temos um gráfico indicando os resultados apurados em relação à segunda questão.

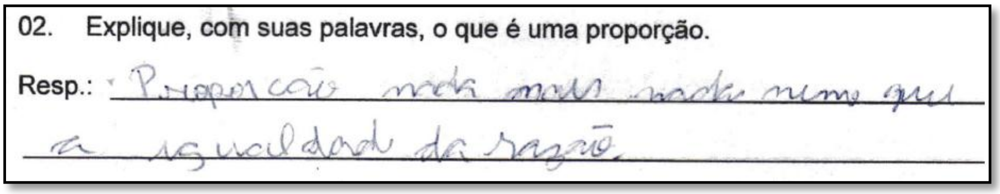
Figura 13 – Gráfico 03



Fonte: O autor, 2019

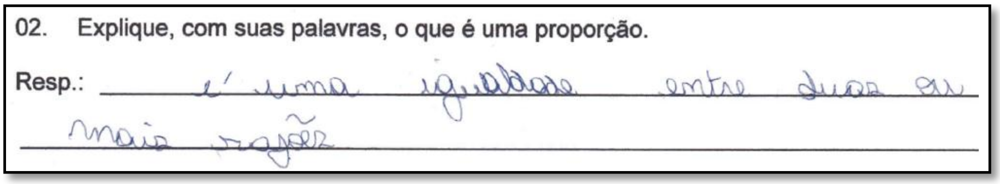
Para esta pergunta não obtivemos respostas classificadas como incompletas tendo, a maioria dos alunos apresentado respostas satisfatórias.

Figura 14 – Respostas de alguns alunos



02. Explique, com suas palavras, o que é uma proporção.

Resp.: Proporcão nada mais nada menos que a igualdad da razão.



02. Explique, com suas palavras, o que é uma proporção.

Resp.: é uma igualdade entre duas ou mais razões

Fonte: O autor, 2019

A segunda atividade envolvia a resolução de duas questões que apresentavam valores numéricos e cálculos em sua resolução:

01. Numa turma a razão entre rapazes e moças é $\frac{3}{4}$.

a) Esta informação é suficiente para sabermos o número de alunos dessa turma?

b) Se o número de rapazes for igual a 9, qual será o número de moças? E o total de alunos?

02. Um brinquedo de meu filho é um carrinho que, segundo a informação do fabricante, está na escala de $\frac{1}{64}$.

Figura 15 – Enunciado da 2ª questão da atividade 2

Fonte: O autor, 2019

a) o que esta informação nos indica?

b) se o brinquedo tem 7 cm de comprimento, quanto terá o carro real?

Análise das respostas obtidas na primeira questão da segunda atividade:

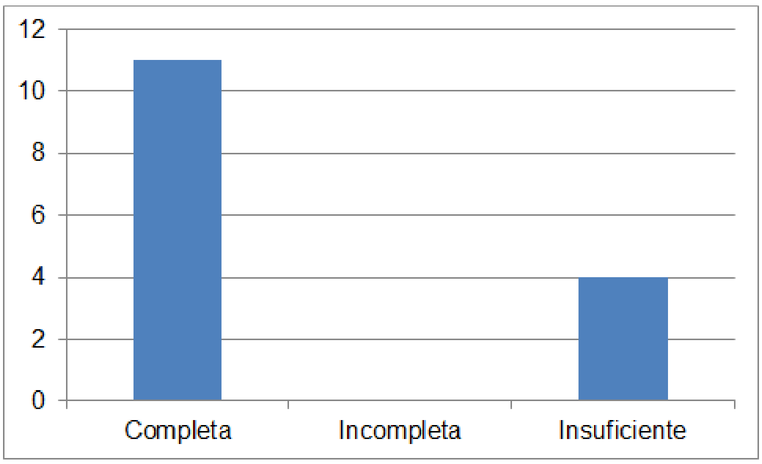
Questão 01, item a.

Todos os alunos responderam corretamente esta questão.

Questão 01, item b.

A seguir temos um gráfico indicando os resultados apurados em relação às respostas referentes ao item b da primeira questão.

Figura 16 – Gráfico 04

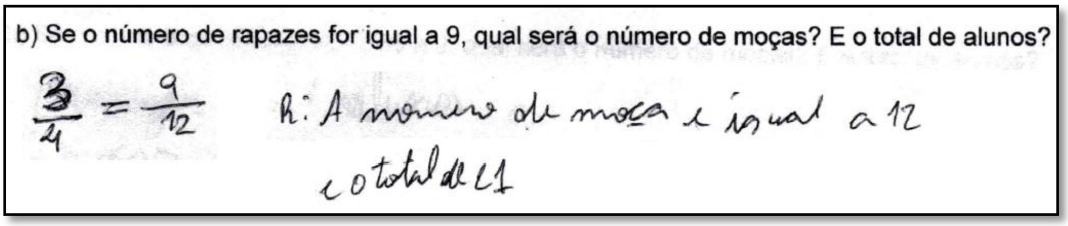


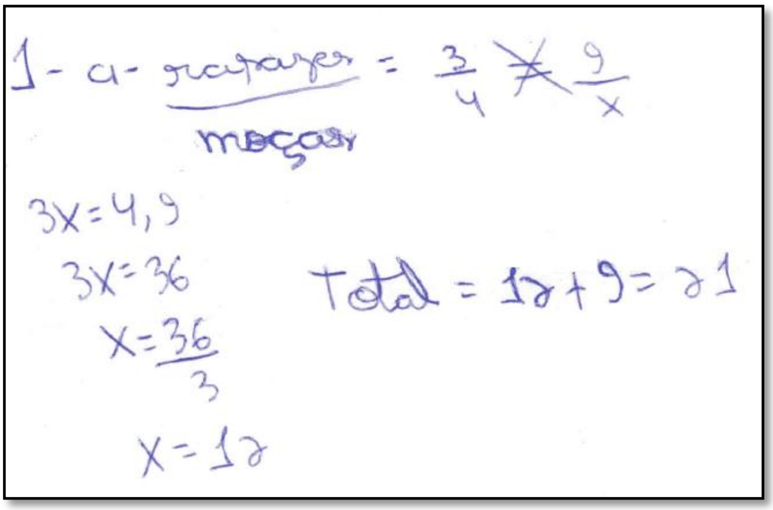
Fonte: O autor, 2019

É interessante notar que o resultado foi igual ao da questão 2 da 1ª atividade. Não existe meio termo neste item, ou o aluno acerta ou ele erra. Não há casos de iniciar corretamente a resolução e não a concluir.

Destaco o fato de que tivemos alunos trabalhando com a equivalência de frações e outros com a “relação fundamental”, que não foi vista na aula, usando um conhecimento que já possuía.

Figura 17 – Respostas de alguns alunos





Fonte: O autor, 2019

Análise das respostas obtidas na segunda questão da segunda atividade:

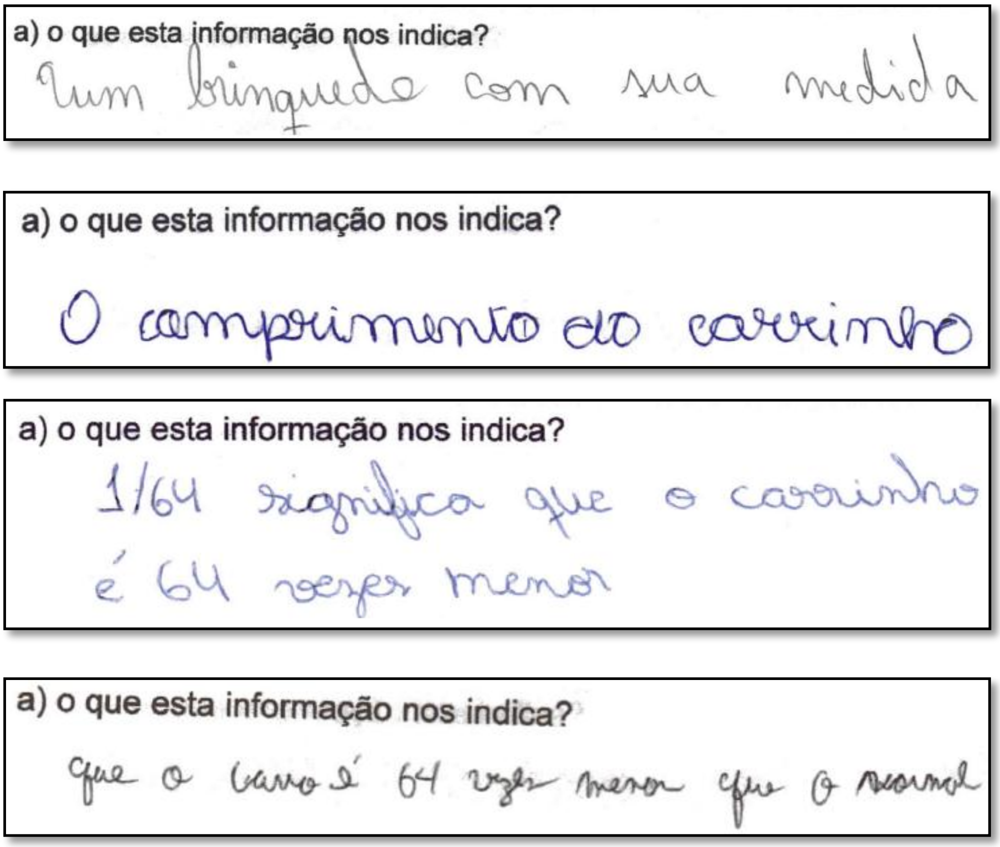
Em relação ao item a da segunda questão cabe uma reflexão em relação ao que desejamos aferir e o que a questão indaga. Quando envolvidos na atividade, por vezes não nos damos conta de que a pergunta por nós elaborada é mais abrangente do que supúnhamos e que ela dá margem a interpretações diferentes da por nós esperada.

Convém notar que no corpo da mensagem, ao lado da imagem, há uma descrição que indica não apenas a escala, 1/64, mas também o comprimento do brinquedo, 7 cm.

Embora a intenção do item em causa fosse que o aluno percebesse a escala da miniatura, muitos responderam acertadamente que o indicado era o tamanho do brinquedo.

Seguem algumas respostas dadas para esta questão.

Figura 18 – Respostas de alguns alunos


a) o que esta informação nos indica?
Um brinquedo com sua medida

a) o que esta informação nos indica?
O comprimento do carrinho

a) o que esta informação nos indica?
1/64 significa que o carrinho é 64 vezes menor

a) o que esta informação nos indica?
Que o carro é 64 vezes menor que o normal

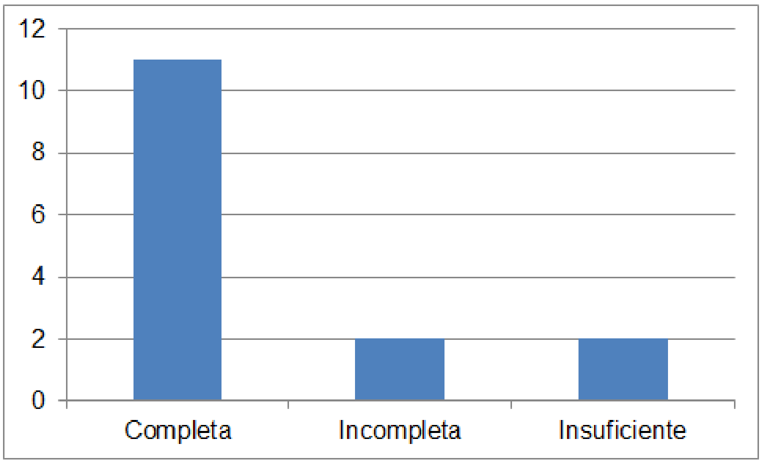
Fonte: O autor, 2019

Exemplos desta natureza revelam-se uma excelente oportunidade para discutirmos com os alunos sobre as informações contidas nas embalagens dos produtos, indicações sobre faixas etárias para os quais se destinam, data de validade, informações nutricionais e sobre a sociedade de consumo.

As respostas a este item não foram classificadas e nem foi construído gráfico.

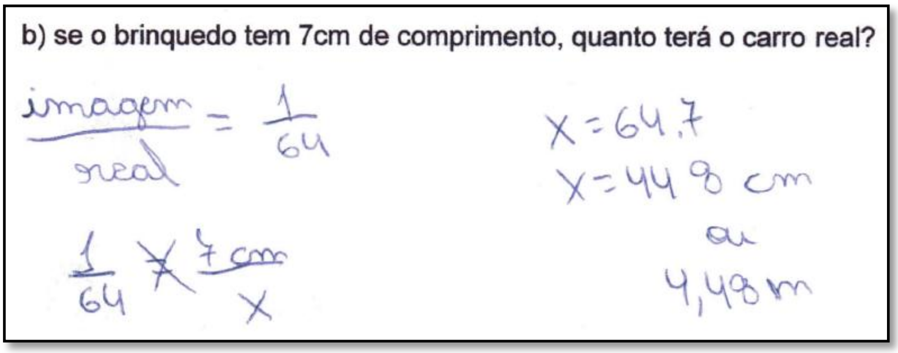
Abaixo temos um gráfico indicando os resultados apurados em relação às respostas referentes ao item b da segunda questão.

Figura 19 – Gráfico 5



Fonte: O autor, 2019

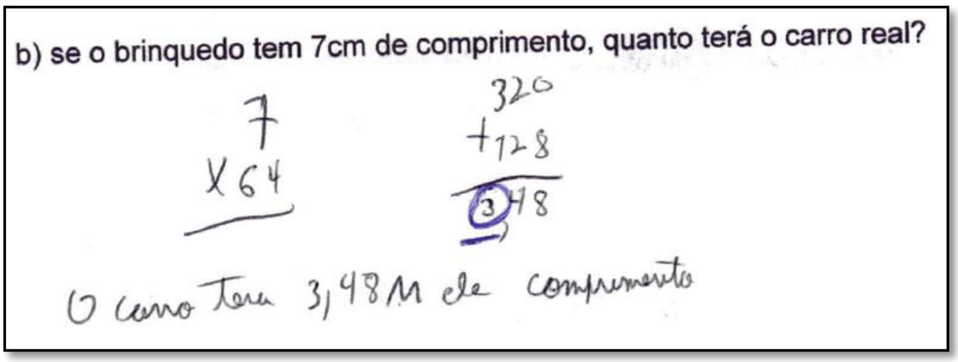
Figura 20 – Resposta de um aluno



Fonte: O autor, 2019

Nota-se que alguns alunos tiveram dificuldade em calcular o produto de 7 por 64. Alguns efetuaram incialmente o produto de 5 por 64 e, depois, 2 por 64, no entanto erraram ao adicionar os dois resultados como se pode observar no exemplo a seguir.

Figura 21 – Resposta de um aluno



Fonte: O autor

Esse encontro com os alunos do CAIS serviu para testarmos uma pequena experiência da dinâmica da pedagogia UERÊ. Dividir o tempo de aula em momentos, trabalhar a oralidade, ter a oportunidade de ouvir os alunos e criar a aula a partir da contribuição deles. Esta é uma prática que, infelizmente, muitos não fazem. Os motivos para que tal não aconteça vão desde a pressão para que o planejamento seja cumprido até ao que será cobrado em alguma avaliação externa.

A receptividade dos alunos foi muito positiva. Talvez por ser um professor diferente com uma proposta que eles não estavam acostumados, com outra dinâmica e serviu para colocar em prática alguns preceitos da pedagogia UERÊ-MELLO.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ensinar com técnica é uma tarefa que, como outras, precisa de pré-requisitos básicos. Para realizar esta tarefa sem condições favoráveis é necessário fôlego duplo e saber ler outro ser humano é uma necessidade para quem se propõe a realizá-la.

Para tanto, há de se reconhecer as limitações temporárias e que cada um tem seu ritmo de aprendizado, seu tempo.

Cada vez mais se torna imprescindível ao professor se debruçar nas descobertas recentes de como aprendemos e, das experiências bem sucedidas, incorporá-las em sua práxis.

Novas gerações, novas demandas. Algumas demandas dificilmente mudam. O fato de que aprendemos melhor com o que nos emociona é um exemplo disso.

Da mesma forma que aprendemos melhor aquilo que amamos, ensinamos melhor aquilo que amamos.

Coisas básicas são importantes. Elaborar bem a aula que será dada é um exemplo. Os tempos de “gatilhos”, quando instigar a fala do aluno, quais recursos serão utilizados. Depois de alguns anos lecionando, a tendência é cair na mesmice e pensar que já se sabe o que fazer e repetir a mesma aula durante anos antes para públicos bem diferentes. Há 20 anos as tecnologias eram outras e algumas demandas também. Alguns acham que a aula preparada para um colégio militar, um colégio particular de classe A e um colégio municipal pode ser exatamente a mesma. Num mundo utópico seria, mas trata-se de realidades e experiências de vida bem distintas. Os assuntos que devem ser abordados são os mesmos, mas a maneira de fazer essa abordagem será de acordo com o grupo humano envolvido, com suas dificuldades, suas realidades, suas histórias de vida, suas aspirações.

Poder refletir sobre as relações aluno/professor foi uma das benesses desse trabalho em relação à minha maneira de ser professor. Criticar o modo de lecionar, de apresentar os conteúdos e verificar se foram apreendidos pelos alunos. Alguns acertos foram percebidos neste trabalho, algumas estratégias da pedagogia UERÊ foram adaptadas por conta do grupo de alunos que trabalhamos, isto é natural visto que uma pedagogia não é “receita de bolo” mas um direcionador que depende da algumas variáveis: público, ambiente, idades, histórias de vida, por exemplo.

Apesar de ter sido efetuado apenas uma atividade com os alunos da turma CAIS o que é manifestamente insuficiente para validar um estudo é nossa convicção que a pergunta que foi elaborada inicialmente: se a pedagogia UERÊ-MELLO pode contribuir para promover o sucesso da aprendizagem em alunos que se encontram altamente desmotivados para a escola formal por conta de diversos motivos dos quais destacamos o estresse decorrente da violência cotidiana nas comunidades em que habitam e outros tantos tipos de violência física e/ou psicológica; poderá ter como resposta sim. Observando a coerência de seus princípios, de sua ampla aplicação e de seus resultados concretos.

Um dos objetivos do programa PROFMAT deve ser este: levar o profissional de educação a refletir e buscar alternativas para a sua práxis. E esse objetivo foi alcançado.

REFERÊNCIAS

ADÃO, Anabel do Nascimento: A ligação entre memória, emoção e aprendizagem. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 11., 2013, Curitiba - Paraná. **Anais [...]** Curitiba – Paraná: PUC-PR, 2013. p. 29411-29441.

ÁVILA, Geraldo. Razões, proporções e regra de três. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v.8, p.1-8, 1986.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

BATISTA, Jakelline de Aquino; LIMA, Thainá de Nazaré Silva. Comunicação científica: Trabalhos sobre razão e proporção nos X e XI encontros nacionais de educação matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA−Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]** São Paulo: SBEM, jul. 2016. p. xx-xx.

BORNÉO, Daniele, et al. **Neuroplasticidade Cerebral e Aprendizagem.** Rio de Janeiro: Universidade Cândido Mendes/AVM, Pós Graduação Lato Sensu, Seminário, 2018.

COLÉGIO PEDRO II. **PORTARIA N^{O} 1472**, DE 3 DE MAIO DE 2018. Rio de Janeiro, 2018.

IZQUIERDO, Iván Antonio *et al*. Memória: tipos e mecanismos – achados recentes; Dossiê Memória. **REVISTA USP**, São Paulo, n.98, p.9-16, junho/julho/agosto 2013.

KATZ, Victor J. **Historia da Matematica.** Portugal: Editora Fundaçao Calouste Gulbenkian, 2010.

LAUAND, Jean. **Ratio, Natura, Ordo... Sentenças de Tomás de Aquino**. 2006. Disponível em: <http://www.hottopos.com/notand13/jean.htm>.Acesso em: 15/10/2018

MELLO, Yvonne Bezerra de. **Pedagogia UERÊ-MELLO –** Aprender para Viver, Ensino Diferenciado para Bloqueios Cognitivos. Rio de Janeiro: A autora, 2016.

MELLO, Yvonne Bezerra de. Entrevista do mês. **Revista Marie Claire**, V.215, fev. de 2009. Disponível em: <http://revistamarieclaire.globo.com/Marieclaire/0,6993,EML1695209-1739,00.html>. Acesso em 01 set. de 2018

MICHAELIS, **Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa**, 2019. Disponível em <http://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/>; Acesso em 08/01/2019

MORA, Fancisco. **Neuroeducación:** solo se puede aprender aquello que se ama. Madri, Espanha: Alianza Editorial - 2013

NOMURA, Joelma Iamac; BIANCHINI, B. L. Contribuições da Neurociência Cognitiva no Pensamento Matemático Avançado e na Educação Matemática. *In:* SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis. **Anais [...]** Petrópolis: SBEM, 2012. p.1-18.

OLIVEIRA, Tory. Cuidado com a neurobobagem**. Revista eletrônica: Carta Educação**, n.871, p. 11-23**,** out/2015. Disponível em: <http://www.cartaeducacao.com.br/reportagens/cuidado-com-a-neurobobagem/> Acesso em: 01 Setembro de 2018

ROQUE, Tatiana: **História da matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2012.

SOUSA, A. B.; SALGADO, T. D. M. Memória, aprendizagem, emoções e inteligência. **Revista Liberato**, Novo Hamburgo, v.16, p. 101-220, 2015.

SOUZA, F.D. **O que é neurociência**, 2014. Disponível em: <http://www.psicologiamsn.com./2014/01/o-que-e-neurociencia.html>, Acessado em: 20 Maio 2018

TEIXEIRA, João de Fernandes. **Mente, cérebro e cognição.** 4ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

VARGAS, R. A. Matemáticas y neurociencias: una aproximación al desarrollo del pensamiento matemático desde una perspectiva biológica. **Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Montevideo, Uruguai, n. 36, p. 38-46, Diciembre 2013.