COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jonathan Cardoso Reis

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO A PARTIR DO CONCEITO DE JOGOS COMBINATÓRIOS
Uma proposta para aulas de matemática

Rio de Janeiro
2019

Jonathan Cardoso Reis

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO A PARTIR DO CONCEITO DE JOGOS COMBINATÓRIOS
Uma proposta para aulas de matemática

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr.Sc. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro
2019

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

R375 Reis, Jonathan Cardoso

O desenvolvimento do raciocínio combinatório a partir do conceito de jogos combinatórios: uma proposta para aulas de matemática / Jonathan Cardoso Reis. – Rio de Janeiro, 2019.

96 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Análise combinatória. 3. Teoria dos jogos. 4. Jogos combinatórios. 5. Resolução de problemas. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Título.

CDD 510

Jonathan Cardoso Reis

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO A PARTIR DO CONCEITO DE JOGOS COMBINATÓRIOS
Uma proposta para aulas de matemática

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 08/05/2019

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II - Orientador

____
Profa. Dra. Aline de Lima Guedes
IME - UERJ

____
Profª. Dra. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa
Colégio Pedro II

____
Profa. Dra. Maria de Lourdes Rocha de Assis Jeanrenaud
Colégio Pedro II

Rio de Janeiro
2019

Eu, Jonathan Cardoso Reis, dedico este trabalho aos meus pais, Jouber da Silva Reis e Jaqueline Cardoso Reis, à minha irmã Juliana Cardoso Reis e ao meu grande amigo Daniel Martins.

AGRADECIMENTOS

Eu, Jonathan Reis, agradeço em primeiro lugar a Deus por me dar força, saúde e capacidade a cada dia para poder lutar pelos meus sonhos. Com Sua ajuda, consegui concluir mais uma etapa da minha vida acadêmica.

Ao meu professor, orientador e, acima de qualquer coisa, amigo Daniel Martins, dotado de uma inteligência ímpar e que me inspirou a ser um professor melhor na minha prática docente. Obrigado pela ajuda, pela orientação, pela paciência, pela compreensão e pelo carinho. Absolutamente, esse trabalho não seria o mesmo sem você.

À minha família por sempre ter me apoiado nos momentos mais difíceis, desde que escolhi seguir essa profissão.

Aos meus professores do mestrado que me ensinaram Matemática durante estes dois anos, em especial às professoras Liliana e Patrícia.

Ao eterno professor e amigo José Roberto Julianelli, de onde emergiu minha inspiração em ser professor de Matemática.

À minha turma do PROFMAT (ano de 2016) que faziam as minhas sextas-feiras mais alegres, engraçadas e descontraídas. Considero-os como uma segunda família.

Aos meus amigos que riram e também choraram comigo. Em especial a Pedro Lopes e Marcus Braga, amigos desde a época do colégio e que nunca me abandonaram.

À inesquecível Helena Quarti, minha companheira de faculdade que me ensinou tantas coisas na vida e que, devo admitir, foi meu maior amor até hoje e por quem sou perdidamente apaixonado.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela iniciativa de criar o PROFMAT e pelas parcerias com outras instituições de ensino em todo o país, atingindo um público cada vez maior a fim de que consigamos, como egressos desse mestrado, modificar em nossa sociedade as maneiras de enxergar e lecionar Matemática.

Ao Colégio Pedro II onde me formei bacharel em ciências e letras em 2010, fechando o ciclo da Educação Básica, e hoje me formo como mestre em Matemática.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo”

Galileu Galilei

RESUMO

REIS, Jonathan Cardoso. **O desenvolvimento do raciocínio combinatório a partir do conceito de jogos combinatórios: uma proposta para aulas de matemática.** 2018. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

Este trabalho é inspirado nas diferentes olimpíadas realizadas nas diversas escolas públicas e privadas do país que tanto motivam professores a modificar suas práticas docentes. Apresenta um recorte centrado nos Jogos Combinatórios, com o objetivo de estimular e desenvolver o raciocínio combinatório de alunos do Ensino Médio. A proposta é apresentar o conteúdo através da resolução de problemas e que o professor leitor se aproprie do texto para criar e incentivar suas aulas. A partir dos conceitos mais simples, como o principio fundamental da contagem, oriundos da combinatória, apresenta-se uma seção adaptada e comentada do livro Amusements in Mathematics, de Henry Ernest Dudeney, de domínio público, seguido de sugestões de atividades adaptadas para a realidade das escolas públicas brasileiras. Espera-se que o presente texto sirva de inspiração a outros professores que trabalham com olimpíadas nas escolas ou que simplesmente partilham da ideia de que é possível ‘fazer matemática’ através da resolução de problemas.

Palavras-chave: Jogos combinatórios; Raciocínio combinatório; Análise combinatória; Resolução de problemas.

ABSTRACT

REIS, Jonathan Cardoso. **O desenvolvimento do raciocínio combinatório a partir do conceito de jogos combinatórios:** uma proposta para aulas de matemática. 2018. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

This dissertation is inspired on differents Mathematical Olympiads thoughout the country in public or private schools that motivates teachers to change for better their classroom praxis. It is focused on Combinatorics Games for stimulating and developing the combinatorics reasoning among high school students. The main purpose is to present the subjet using the problem solving theory. Problems were chosen from the book Amusements in Mathematics, by Henry Ernest Dudeney, a no cost and with almost no restrictions whatsoever free e-book. The activities were adapted for the Brazilian high schools realities. It is expected that this text will serve as an inspiration to the teachers who likes math Olympiads or for those that believe it is possible 'to make mathemathics' from problem solving in the school's levels.

Keywords: Combinatoric Games; Combinatorics Reasoning; Combinatorics; Problems Solving.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Talvez esta não seja a apresentação ideal para um trabalho acadêmico, mas a ousadia não é uma rebeldia somente, é a forma encontrada para mostrar como muitas vezes os pensamentos de um professor de Matemática vêm, em forma de um turbilhão de informações, e que aos poucos precisam ser acomodados e organizados segundo uma formalidade própria da academia, para que seja bem avaliado.

Inicialmente este trabalho seria uma análise das questões da OBMEP, nível 3, envolvendo análise combinatória, porém um grande número de textos interessantes já havia sido escritos sobre o assunto. Como a motivação para esta dissertação sempre foi análise combinatória, um novo rumo precisava ser dado à pesquisa. Foi então que o Projeto Gutemberg (www.gutenberg.net) com seus mais de 57000 *free e-books* para serem lidos on line, chegou ao nosso conhecimento e através dele, o livro Amusements in Mathematics, de Henry Ernest Dudeney.

Dudeney (1857-1930) foi um escritor e matemático inglês especializado em quebra-cabeças lógicos e em jogos matemáticos, alguns deles de caráter combinatório. Ficou também conhecido por ser um dos maiores criadores de enigmas matemáticos da Inglaterra à sua época. Há uma grande quantidade de enigmas, conhecidos por Enigmas de Dudeney facilmente encontrados em sítios da internet, sendo tais desafios uma poderosa ferramenta para o professor de matemática desenvolver o pensamento lógico de seus alunos, assim como tornar os encontros em sala de aula muito mais interessantes e prazerosos.

Dinamizar tais problemas em sala de aula, apresentando-os de maneira alegre, discutindo o entendimento da questão proposta e buscando possíveis soluções, como podemos encontrar em https://youtu.be/3Rimp-YUnm4 (problema conhecido por The Folder Sheet), foi o que procuramos transmitir com este trabalho, porque dessa forma foi pensado desde sua origem. Os problemas selecionados emergiram da seção *Combinations and Group Problems* de Dudeney (2005). Acreditamos que os problemas nele contidos satisfazem nossos anseios em ajudar a desenvolver em nossos alunos o que definiremos ao longo do texto por raciocínio combinatório. O livro escolhido para a composição deste trabalho, de caráter puramente bibliográfico, é justificado pelo fato de ser um material de domínio público.

Assim sendo, o principal objetivo deste trabalho é contribuir para que os professores de matemática modifiquem suas práticas docentes, introduzindo em suas aulas mais momentos dedicados à resolução de problemas, um fazer matemático na escola que vem se perdendo em detrimento do uso maçante de algoritmos e de procedimentos que auxiliam na resolução mecânica de exercícios prontos, como a resolução de equações em geral, de expressões numéricas, de manipulações algébricas intermináveis ou mesmo da ausência ou baixa aplicação do raciocínio geométrico na própria geometria, dando lugar a mais algebrismos, principalmente no Ensino Fundamental.

No capítulo 2, abordamos o conceito de Jogos Matemáticos dentro do contexto da matemática recreativa. Além de uma breve contextualização histórica, apresentamos os problemas contidos na seção *Combinatorics and Group Problems* do livro de Dudeney (2005), mostrando que eles se enquadram ou são facilmente adaptáveis ao conceito de Jogos Combinatórios. Além disso, podem ser usados em sala de aula como problemas que levarão os alunos a um nível mais alto do ato de pensar abstratamente, quando comparados com outros alunos não expostos a esta prática, ajudando a prepará-los, em termos de raciocínio matemático-estruturado, para olimpíadas de Matemática.

Ainda neste capítulo fazemos uma classificação quanto ao nível de dificuldade dos problemas e justificamos o porquê de tal classificação e apresentamos um problema cuja solução é dizer que 'o problema não possui solução', como é o caso do *Scaping from an infinity prison* ou na versão em português, *Prisão no Tabuleiro*, também facilmente encontrado na internet. Esse tipo de abordagem e discussão raramente são realizadas ou praticadas no Ensino Médio.

No capítulo 3 repousam os nossos pressupostos teóricos acerca dos estudos envolvendo a análise combinatória, destacando a importância do seu bom desenvolvimento nas salas de aula e suas relações com o processo de ensino-aprendizagem e as personagens envolvidas, que de certa forma justificam e dão mais corpo à proposta dessa pesquisa. Este é um momento claro para demonstrar o que foi dito no primeiro parágrafo dessa introdução.

Por fim, ao longo do Capítulo 4, destacamos propostas para serem aplicadas em sala de aula. O leitor poderá se perguntar qual a conexão com os problemas apresentados por Dudeney (2005) e os apresentados nas atividades propostas, uma vez que elas podem parecer dissonantes dos primeiros problemas. É que para compor esta seção da pesquisa, alunos de diferentes níveis de escolaridade e estágios cognitivos foram submetidos aos enigmas e às brincadeiras propostas, o que levou-nos à reflexão sobre a que tipo de classe aplicaríamos os problemas, sempre com o objetivo de jamais desestimular o aluno.

Optamos então, por apresentar atividades que possam ser aplicadas em sala de aula e somos extremamente otimistas em acreditar que o exercício constante de tais atividades permite que os alunos avancem cognitivamente a ponto de resolverem os problemas de

Dudeney (2005), apresentados como motivadores, nesse texto. Por isso, dividimos as atividades para turmas que chamamos de ‘regulares’ e para turmas de ‘aprofundamento’. Note que a ideia inicial que formaria este texto foi resgatada, uma vez que alguns problemas da OBMEP serviram de exemplos muito importantes para o que gostaríamos de apresentar ao leitor como atividades para serem aplicadas em sala de aula. Aqui, o que mais vale não são os problemas em si, mas o que eles guardam em essência e a forma que o professor conduzirá uma aula de resolução de problemas que se propõe a trabalhar com raciocínio combinatório.

Nas Considerações Finais, conversamos com o leitor sobre a prática do autor em suas turmas e esperamos incentivar grandemente cada um que se predispuser ler estas notas.

2 HISTÓRIA, MATEMÁTICA RECREATIVA, ANÁLISE COMBINATÓRIA E JOGOS COMBINATÓRIOS

2.1 Um pouco de História

Em escavações feitas em 1922 na cidade de Ur, ao sul do Iraque atual, a qual corresponde, na Bíblia, à terra de Abraão e ao local do Éden, Leonard Woolley e sua equipe encontraram diversos túmulos reais com objetos valiosos datados de 2.600 A.C e dentre estes um tabuleiro de jogo, ao qual denominou *Jogo Real de Ur*. A figura 2 a seguir mostra um dos tabuleiros encontrados por Woolley, atualmente exposto no Museu Britânico, em Londres, que é formado por dois grupos de casas, um de doze e outro de seis, unidos por uma ponte de duas casas, 14 peças e 3 dados tetraédricos. É uma disputa entre dois oponentes na qual o objetivo é completar o percurso primeiro. Este é o jogo mais antigo no qual se tem conhecimento das suas regras originais (TEIXEIRA; SILVA, 2016).

Figura 1 - Jogo Real de Ur

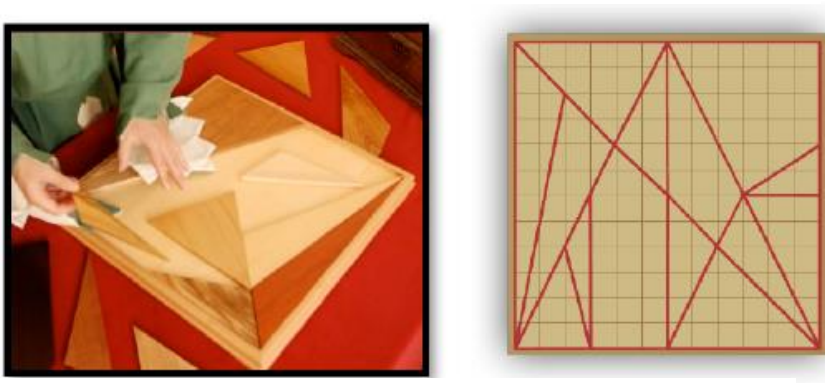
Fonte: Teixeira e Silva (2016).

Afonso X, rei de Afonso e de Castela entre 1252 e 1284, conhecido na História por sua grande cultura, ordenou à época que fosse feito um escrito reunindo os conhecimentos mais relevantes do século XIII. Neste manuscrito, intitulado *O Libro de los Juegos del Rey Alfonso X El Sabio*, encontra-se o *Jogo Algueres de Doze* jogado em um tabuleiro marcado com linhas que intersectam-se e cujas peças são colocadas nestas intersecções. Este jogo não tem um conjunto de regras bem definidas sendo necessário introduzir novas regras para que se possa jogar (TEIXEIRA; SILVA, 2016):

> Cremos que uma opção possível seria os movimentos serem livres para as casas vizinhas desocupadas, de acordo com as linhas do tabuleiro. As capturas, por pequeno salto, devem ter prioridade sobre os outros lances, mas as capturas múltiplas facultativas. O objetivo é a imobilização do adversário (inclui captura de todas as suas peças). No caso em que se sucedem muitos lances sem capturas o empate deve ser decretado. (SILVA, 2013, p. 218).

Os gregos também sabiam da importância que os jogos tinham na Matemática. Euclides, na sua obra denominada *Psedaria* (Livro de Farsas), destaca a relevância didática ao se trabalhar com falácias. Outrossim, Arquimedes de Siracusa (287 A.C - 212 A.C) , outro célebre matemático da época, no século XIII, deixou um manuscrito intitulado *Códex C*, o qual continha um quebra-cabeça chamado *Stomachion*, que é formado por 11 triângulos, 2 quadriláteros e 1 pentágono que formam um quadrado (Figura 3). Assim como no Tangram, podem-se montar diversas figuras geométricas, casas, figuras humanas, animais, entre outros. Todavia, o que Arquimedes tentava descobrir neste quebra-cabeça, segundo historiadores que interpretaram o livro, era a quantidade de quadrados possíveis que poderiam ser formados utilizando estas peças. Portanto, Arquimedes estava fazendo um estudo combinatório já naquela época, sendo este manuscrito o vestígio mais antigo referente a esta parte da Matemática (TEIXEIRA; SILVA, 2016).

Figura 2 - Réplica e ilustração do *Stomachion*

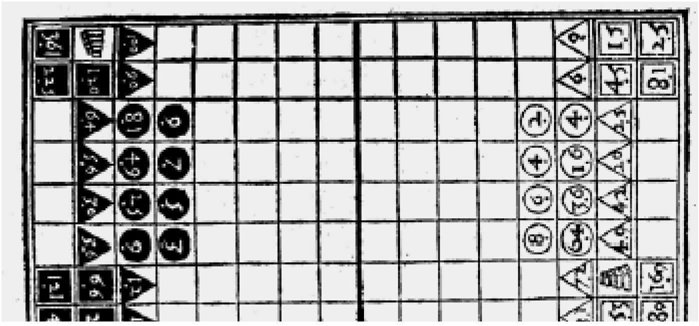


Fonte: Teixeira e Silva (2016).

Ainda na Idade Média, um jogo erudito, que circulava apenas no meio universitário, em igrejas e outros lugares de pessoas cultas devido à complexidade das regras, era o *Rithmomachia*, também conhecido como *O jogo Filosofal,* que foi usado, durante quinhentos anos para ensinar Aritmética. *Rithmomachia* foi um jogo pedagógico designado para compreender algumas relações numéricas como as progressões e teve importante papel no aprendizado durante alguns séculos (PEDRO NETO; SILVA, 2013). Observa-se claramente neste exemplo a associação entre jogos e ensino da matemática.

Os movimentos dependiam do formato do tabuleiro e das peças, capturas dependiam também do número exibido em cada peça. A vitória seria conquistada ocupando alguns quadrados da metade adversária do tabuleiro, com os números correspondentes em progressões especiais (PEDRO NETO; SILVA, 2013).

Figura 3 - Rithmomachia



Fonte: PEDRO NETO; SILVA, (2013)

Além disso, temos o exemplo de Girolumo Cardano (1501 - 1576), matemático e físico italiano, que escreveu o livro *Ludo Aleae* o qual trata dos jogos de azar, adiantando, assim, a Teoria das Probabilidades desenvolvida por Pierre de Fermat (1601 - 1665) e Blaise Pascal (1623 - 1662) em aproximadamente um século. A ele, é creditada a criação de um famoso quebra-cabeça, conhecido atualmente como *anéis chineses* (PEDRO NETO; SILVA, 2013).

Anos mais tarde, ainda no século XVII, Antoine Gombaud um francês apaixonado por jogos de dados e fiel apostador, denominado “Chevalier de Mère”, teve uma dúvida referente à situação de um jogo e decidiu consultar o matemático Pascal para solucioná-la. O problema consistia em como dividir corretamente os ganhos de uma aposta quando os jogadores interrompem o jogo no meio da partida. Através das correspondências de Pascal e Fermat, sobre esta situação e da solução encontrada, formou-se a base da moderna Teoria das Probabilidades (MOTA, 2009).

De acordo com Teixeira e Silva (2016), Leonhard Euler (1707 - 1783), além do problema citado no início do capítulo, também dedicou sua grande curiosidade, inteligência e tempo para solucionar a atividade lúdica *Percurso do Cavalo no Tabuleiro de Xadrez*, onde mostrou que era possível sair de uma casa qualquer do tabuleiro com o cavalo e, respeitando seus movimentos possíveis, passar por todas as outras 63 casas do tabuleiro uma única vez e retornar ao ponto inicial. É um interessantíssimo problema de contagem, mas que também foi de grande contribuição para os primeiros passos da moderna Teoria dos Grafos.

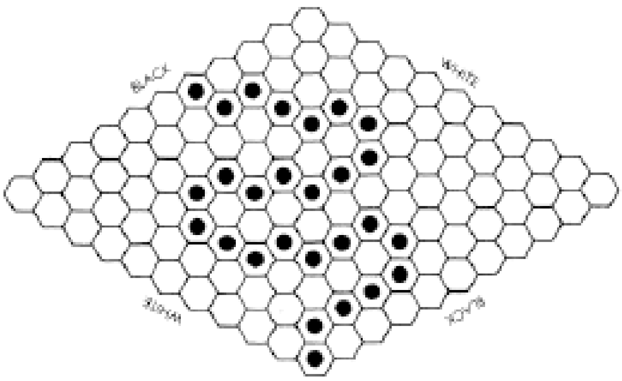
Thomas Kirkman (1806 - 1895), em 1850, publicou o *Problema das Raparigas*, que consistia em descobrir como quinze moças podiam caminhar organizadas em cinco filas com três em cada, durante sete dias consecutivos, de sorte que cada moça ficasse junta de outra apenas uma vez. Kirkman ainda resolveu, em 1846, o problema de *triplos Steiner.* Ambos, problemas que envolviam conceitos oriundos da Análise Combinatória (MOTA, 2009).

Em 1883, Edouard Lucas (1842 - 1891) criou o jogo *Torre de Hanoi*, até hoje muito conhecido e ensinado em sala aula, que consiste em passar todos os discos de uma torre à outra sem que discos menores sobreponham discos maiores (TEIXEIRA; SILVA, 2016).

Mais tarde, no século XX, o matemático húngaro John Von Neumann (1903 - 1957) escreveu o livro *Teoria de jogos e conduta econômica*, onde analisou os jogos de estratégia e desenvolveu importantes teorias matemáticas sobre o comportamento econômico. Contemporâneo de Neumann, John Nash (1928 - 2015), outro notório matemático, ganhador do prêmio Nobel na categoria Ciências Econômicas em 1994, foi um ávido estudioso dos jogos matemáticos e seus desdobramentos em outros ramos, como na Economia.

Em 1948, criou o jogo *Hex*[1] cujo objetivo é criar um grupo de peças que una dois lados opostos do tabuleiro (Figura 4). Sua criação originou uma nova família de jogos, os de conexão. Nenhum jogo de *Hex* pode terminar empatado e a prova mais conhecida disto, o Teorema de *Hex*, é combinatória. (TEIXEIRA; SILVA, 2016).

Figura 4 - Ilustração do *Hex*



Fonte: Teixeira e Silva (2016).

[1] *Hex* é um jogo de tabuleiro jogado em uma grade hexagonal, teoricamente de qualquer tamanho e de diversas formas possíveis, mas tradicionalmente como um losango 11x11. Outras dimensões populares são 13x13 e 19x19 como resultado da relação do jogo com o antigo jogo asiático *Go*. De acordo com o livro *A Beautiful Mind*, John Nash (um dos inventores do jogo) defendeu 14x14 como o tamanho ideal.

Segundo Teixeira e Silva (2016), em 1902, Charles Leonard Bouton (1869 - 1922) passou a estudar alguns jogos sob um olhar matemático apurado, determinando estratégias que estavam escondidas durante o jogo. Esta reflexão sobre os jogos foi o ponto de partida para o que mais tarde seria denominada por *Teoria dos Jogos Combinatórios*, a teoria que estuda exatamente os jogos combinatórios sob o viés da Matemática, importando a ela definir estratégias vencedoras, classificar os jogos e demonstrar propriedades.

A teoria dos jogos ─ em especial a procura por estratégias vencedoras e a análise das situações do jogo ─ tornou-se um ramo de grande relevância na matemática e objeto de interesse de outras áreas acadêmicas, como por exemplo, em economia, onde é usada para avaliar a concorrência e a cooperação dentro de pequenos grupos de empresas; em biologia, a fim de compreender e prever a evolução de algumas espécies, e na ciência da computação, aprimorando a inteligência artificial e cibernética. (TEIXEIRA; SILVA, 2016).

No corpo deste trabalho, procuramos apresentar a teoria dos jogos de maneira conceitual, a fim de proporcionar ao leitor, em especial ao professor de matemática interessado no tema, estratégias que auxiliem os alunos a saírem de situações complicadas que um problema matemático possa oferecer ou que permitam uma análise correta de um passo dado durante a resolução do problema que venha a trazer dificuldades posteriores para encontrar uma solução.

2.2 Da Matemática Recreativa

Ainda recorrendo à História, pode-se constatar em várias situações o uso de charadas, enigmas, jogos e passatempos elaborados por matemáticos (ou não) de suas respectivas épocas com distintas finalidades, ora para resolver uma situação problema da vida real, ora para satisfazer uma curiosidade, ora por mera distração. O importante nisto tudo é que, em muitos casos, esses jogos e suas respectivas soluções deram origem a conceitos matemáticos relevantes posteriormente e são boas ferramentas didáticas na sala de aula, quando usados corretamente.

No texto “The roots of combinatorics”, Biggs (1970) conta que até à época, a análise combinatória recebeu pouca atenção por parte dos historiadores da matemática mesmo havendo boas razões para estudar as suas origens, o que levou o autor a pesquisar a gênese do tema, produzindo um documento com muitas informações que remontam a um período anterior a 1650 a.C. O que também chama atenção em seu texto é a afirmativa de que a formalização matemática do princípio aditivo e do princípio multiplicativo como conhecemos hoje é bem recente em termos de História da Matemática, que envolve definições da topologia geral de conjuntos e outras oriundas da análise real, como a definição de produto cartesiano.

Além disso, aponta que o fato do uso intuitivo de tais conceitos sempre terem estado presentes em experiências da vida cotidiana, pode ter contribuído fracamente para com a intenção em determinar a gênese dessa área de conhecimento.

Porém, a percepção de que há conexões do tema com diversos pensadores e registros em diversos momentos da História aguça a curiosidade dos interessados em desvendar o assunto e verificar se há ou não gênese comum. É de Biggs (1970) a conclusão de que é interessante buscar evidências sobre os primórdios da combinatória, observar suas aplicações e, ao compará-las, analisar se definições básicas que sustentam a teoria sofreram pequenas ou grandes mudanças ao longo do tempo.

Com uma pesquisa mais atual, Bierman e Fernandez (2011) mostram que ao longo da História, pode-se encontrar em várias situações o uso de charadas, enigmas, jogos e passatempos elaborados por matemáticos ou matemáticos entusiastas de épocas distintas, produzindo materiais com diferentes finalidades, ora para resolver uma situação problema com fins educativos escolares, ora para satisfazer uma curiosidade, ora para distrair. Tais jogos e suas respectivas soluções guardam ainda conceitos específicos dos problemas de contagem, muito estudados na atualidade. Problemas aparentemente simples abrem as portas de um vasto universo de conhecimento à medida que novas perguntas vão sendo colocadas e novas configurações vão sendo exigidas para comporem as soluções dos mais variados problemas.

Pesquisadores da área de Ensino da Matemática, como Silva (2017), mostram que a mecanização da assimilação e conteúdos via uso de fórmulas contribui bastante para a manutenção da dificuldade de ensinar e de aprender análise combinatória e que lançar mão da teoria de resolução de problemas sob o complemento de diferentes referenciais teóricos ou de tecnologia são boas ferramentas didáticas para serem aplicadas na sala de aula a fim de minimizar tais dificuldades. Esta vertente de pesquisa, o uso da resolução de problemas em sala de aula, tem norteado diversos professores que se dedicam ao estudo do ensino e da aprendizagem em problemas de contagem, e esta visão foi de grande valia para nosso trabalho. A leitura deste autor foi um bom pontapé inicial para o inicio das pesquisas: seja fazendo matemática brincando em sala de aula, seja fazendo matemática jogando. Sobre jogos, brincadeiras e Matemática:

> O que estes jogos têm em comum com o tipo de jogos de rua ou de quintal que as crianças jogam é que todos são situações nas quais o tomador de decisões tem de levar em conta a ação de outros. O enxadrista que movimente uma peça sem levar em conta os movimentos passados e futuros de seu oponente seria um tolo. De modo semelhante, uma estação de TV afiliada em Minnealopolis seria imprudente se não considerasse as taxas de propaganda que as outras estações de TV da cidade provavelmente cobrariam, ao estabelecer suas próprias taxas. Essa interdependência entre tomadores de decisões é a essência de um jogo. (BIERMAN; FERNANDEZ, 2011, p. 4)

A título de enriquecimento da pesquisa através de exemplos, encontra-se ainda em Biggs (1970) a informação de que o Papiro de Rhind, documento egípcio que tem mais de 3.500 anos e que veio a conhecimento público em 1858, guarda consigo muitos problemas que são modernamente classificados como problemas combinatórios. O problema 79 é bastante conhecido, possui diversas variações na modernidade, porém todas guardam a mesma concepção: é um problema de contagem e, sob a óptica da resolução de problemas, o professor pode criar diversas atividades, sobretudo aquelas ligadas à exploração da linguagem que leva o leitor à compreensão do enunciado do problema. Consta ainda o estímulo para que seus alunos a produzam as mais diversas soluções para uma questão proposta, sempre levando em consideração as consequências que uma tomada de decisão na tentativa de resolver um problema pode vir a gerar àquele que resolve "encarar" o problema.

Ainda na tentativa de mapear a gênese do conhecimento combinatório, Biggs (1970) descreve que antes do conhecimento do Papiro de Rhind, este problema 79 foi referenciado como um problema original de 1730 pela Oxford Dictionary of Quotations, porém no compêndio Liber Abaci de Leonardo de Piza (Fibonacci), publicado em 1202, já havia referência ao mesmo problema, segundo Boncampagni (1837).

Rodet (1881), em seu artigo "Les prétendus problème d'algèbre", publicado no Journal Asiatique de 1881, fez sua interpretação particular a respeito desta relação com o texto de Fibonacci, porém a comunidade de historiadores da matemática não tomou a interpretação de Rodet como verdade absoluta. Porém, isto serviu para mostrar que tais enunciados perpassaram pela história da humanidade seja para divertir ou para elucidar que o uso dos princípios que regem os problemas de contagem sempre é uma atividade presente de maneira intuitiva na vida corrente, além de exemplificar que ideias comuns brotam em momentos e espaços físicos diferentes, enriquecendo o estudo e o entendimento da matemática. O que nos chama atenção é o fato do papiro datar de mais de 3000 anos antes de Fibonacci desenvolver seus trabalhos acerca do tema. Eis o enunciado do problema 79:

Um homem tinha sete casas,

Cada casa tinha sete gatos,

Para cada gato havia um rato,

Para cada rato havia sete espigas de trigo,

E cada espiga tinha sete medidas de grão.

Quantas coisas possuía ele,

Casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão?

Claramente que este problema não representa uma situação real e possui apenas um caráter recreativo. Mas sua resolução aborda conceitos matemáticos vindos da análise combinatória, como o princípio multiplicativo e o uso da potenciação, como habilidade de cálculo que conduz à solução do problema. Vejamos uma solução: O homem possuía $7^1 = 7$ casas, $7^2 = 49$ gatos, $7^3 = 343$ ratos, $7^4 = 2401$ espigas de milho e $7^5 = 16807$ medidas de grãos. Um total de 19607 coisas.

Problemas desse tipo quando bem explorados em termos de linguagem são facilmente aplicáveis em turmas regulares desde os anos finais do Ensino Fundamental I por meio de recursos como o uso de árvore de possibilidades, por exemplo.

Reis (2018) mostra na pesquisa intitulada “A matemática egípcia: solução de alguns problemas algébricos do papiro de Rhind”, que os papiros matemáticos mais conhecidos nos dias de hoje sofreram degradação ao passar dos tempos, como o Papiro de Golenishev, e que o Papiro de Rhind é uma fonte primária riquíssima para historiadores, historiadores da matemática e educadores matemáticos. Neste segundo papiro são encontrados 64 trechos identificados como *os problemas do papiro* de um total de 87 trechos de assuntos diversos. O problema 79 é um desses trechos. São documentos riquíssimos cujos conteúdos, na posse de professores criativos e com conhecimento da disciplina que ensinam, geram atividades extremamente interessantes e de grande valia para os alunos.

Outro problema notório foi proposto e resolvido por Leonardh Euler (1707 - 1783) em 1736, conhecido como *as pontes de Konigsberg*: descobrir se seria possível atravessar cada uma das sete pontes da cidade em trajeto contínuo e voltar ao ponto de partida, sem repetir nenhuma delas. Sua solução baseou-se em representar cada região da cidade por um ponto (modernamente chamado de vértice) e cada uma das sete pontes por um segmento de reta (modernamente chamadas de arestas), desta forma ele deu origem aos primeiros ensaios sobre o estudo da Topologia e mais a frente, da Teoria dos Grafos.

Assim como estes problemas citados são excelentes elementos que auxiliam o professor a apresentar aulas melhores, por permitirem o uso de amplas técnicas e didáticas de motivação, há muitos outros exemplos de como problemas singelos podem ser transpostos de tais documentos para a sala de aula a fim de aguçar a criatividade e o raciocínio lógico e originar pensamentos diferenciados quando se analisam estratégias para encontrar as suas soluções.

É importante ressaltar que utilizar uma pedagogia considerada ativa em sala de aula no processo de resolução de problemas, de uma maneira menos tensa e cansativa, é uma boa forma de contribuir para o sucesso das aulas de matemática. Dentro dessa perspectiva de trabalho com alunos, encaixa-se a matemática recreativa, um dos exemplos clássicos de desenvolvimento da matemática escolar em que o aluno é o protagonista do conhecimento.

A *matemática recreativa* é uma maneira de analisar problemas, charadas e enigmas usando um viés matemático, sempre buscando soluções que demonstrem o quanto a pessoa se empenhou para encontrar, de uma maneira não esperada, a solução do problema proposto de maneira lúdica e que proponha o vencimento de desafios, jogos, troca e interação.

É um conjunto de métodos e ideias pouco comuns para resolver situações diversas que são propostas. Engana-se quem pensa em se tratar de uma matemática fácil, sem interesse e superficial apenas para divertimento e brincadeira, muitos problemas tem soluções complicadas e inesperadas. (PICADO; MARTINS, 2014)

O grande nome da matemática recreativa e que lhe deu destaque internacional foi Martin Gardner (1914 - 2010), um norte americano nascido em Oklahoma, que era apaixonado por quebra - cabeças e problemas e que, além disso, tinha raciocínio e criatividade extraordinários, encantando seus leitores com as soluções que apresentava. Gardner escreveu por anos (1956 - 1981) a coluna *Recreational Mathematics* para a revista *Scientific American* popularizando a matemática recreativa. Ainda, segundo Gardner (1961 apud MOTA, 2009, p. 19) “A ideia de ‘jogo’ combina muitos significados, interligados como se de membros de uma família se tratasse [...]”

Assim, questões intrigantes surgem a partir de diferentes leituras realizadas. Uma delas é como combinar a matemática recreativa a um referencial teórico pedagógico consistente para que as aulas de análise combinatória possam seduzir mais alunos e professores. Por que não combinar a teoria de resolução de problemas à análise combinatória através de situações e de jogos combinatórios? A partir dessas reflexões, nasceu então o desafio a ser vencido: compreender porque exercitar a resolução de problemas via combinatória, conhecer melhor o conceito de jogos combinatórios e compreender a proposta de um autor que defenda a resolução de problemas, a fim de que todo esse aporte pudesse indicar um caminho para que o primeiro objetivo dessa pesquisa fosse alcançado.

2.3 Da Análise Combinatória

Nesta seção procurou-se estabelecer um diálogo entre a História, a História da Matemática, o ensino de matemática combinatória e a prática em sala de aula, com o objetivo de incentivar a ação de práticas ativas e a mudança do comportamento do aluno face à própria Matemática. Além disso, procurou-se justificativas nas diretrizes, parâmetros que regulam os currículos e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) à necessidade de criação e divulgação de outras práticas matemáticas nas salas de aula, a fim de estimular ao aluno e também impulsionar o professor a aceitar tal desafio de mudar sua prática profissional.

Muito do que se apresenta nestas próximas linhas está embasado nos estudos de Silva (2013), os quais afirmam que a ideia de trazer novas práticas para as aulas de matemática, como o trabalho em equipe, facilita o ensino-aprendizagem com ganhos positivos em relação à aquisição do conhecimento, gerando inclusive melhoria no rendimento por parte dos alunos. Fernandes (2011) completa esta visão quando traz os conhecimentos relativos à aprendizagem significativa, ao dizer que os novos conhecimentos que se adquirem relacionam-se com o conhecimento prévio que o aluno possui. Em atividades a serem realizadas em grupo, lançar mão do conhecimento prévio do aluno torna-se fundamental.

2.3.1 Sua importância e como vem sendo desenvolvida em sala de aula atualmente

Por definição, a Análise Combinatória é o ramo da Matemática Discreta que atua na resolução de problemas de contagem. Seu objetivo principal é quantificar os subconjuntos que satisfazem certas condições de um conjunto finito dado, ora pela enumeração de cada possibilidade, ora lançando mão de conhecimentos específicos para realizar esta contagem sem a necessidade de explicitar cada um desses subconjuntos[2].

---

[2]Ao longo deste trabalho, chamamos tais subconjuntos de uma configuração.

Assegura-se que este conteúdo é de grande relevância na construção do pensamento matemático do discente, uma vez que exige dele muita atenção para boa compreensão leitora e interpretação para o correto entendimento das configurações a serem testadas como possíveis soluções do problema, além do exercício da criação de estratégias e uso contínuo da criatividade para buscar a solução ou a generalização matemática de um conceito que emergiu do problema ou mesmo de um jogo.

Problemas combinatórios, quando bem trabalhados pelo professor, desenvolvem uma forma de pensar que abrange classificação, testagem, seleção e, sobretudo, a compreensão da linguagem do exercício do pensamento lógico dedutivo. Contar nem sempre é uma tarefa fácil, por vezes, problemas simples à primeira leitura revelam-se grandes desafios de se solucionarem, principalmente quando apresentam muitas restrições.

O matemático húngaro George Pólya (1887-1985), na tentativa de representar a melhor organização mental para a resolução de um problema pontua que quatro etapas devem ser bem definidas por quem aplica e explorada ao máximo por quem é o resolvedor dos problemas, são elas: (1) entender o problema, (2) construir uma estratégia de resolução para o problema, (3) executar a estratégia e (4) revisar criticamente o caminho percorrido. A teoria de resolução de problemas, como a proposta por Pólya (1995), por exemplo, aliadas a pesquisas da área de psicologia cognitiva, combinando elaboração, identificação, classificação, resolução de problemas, institucionalização e argumentação, conduzem à aprendizagem significativa[3], segundo Dornellas (2007).

No entanto, há pesquisadores na área como Pinheiro (2018) e Silva (2007) que nos alertam ao dizer que o desenvolvimento da análise combinatória nas escolas não é conduzido oficialmente sob o viés da psicologia da aprendizagem, por exemplo.

Muito das práticas escolares (obviamente não há generalização nesta fala) reduzem as aulas de análise combinatória a resoluções dos exercícios contidos no livro texto e nem mesmo espaço para ouvir os alunos sobre a construção do raciocínio matemático de suas soluções é ofertado pelo professor.

Numa aula de resolução de problemas, Pólya (1995), instrui ser de extrema importância a escuta discente, pois a partir dela, o professor pode detectar como o aluno lida com a língua materna ao efetuar a leitura do desafio e também verificar se o mesmo compreendeu ou não o problema que tentará resolver.

---

[3] É um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo.

Foi esta prática de escutar os alunos, aliada à observação dos mesmos durante a realização das atividades em sala de aula, que permitiram o autor desta pesquisa, classificar os exercícios selecionados do livro de Dudeney (2005) em níveis de dificuldade, assim como criar um quadro com as características principais que definem um nível. Muitas dessas atividades tiveram que ser readaptadas, sobretudo em relação à reescrita do vocabulário contido nos enunciados a fim de que os alunos compreendessem o que pedia o problema.

Lima (2016), em suas pesquisas sobre o tema, contribui afirmando que o ensino da análise combinatória não deve focar-se apenas na busca da aplicação de fórmulas ou na possibilidade do aluno responder se um problema X caracteriza-se por ser um arranjo ou uma combinação ou permutação. Pelo contrário, devem ser consequências naturais de quem compreendeu o enunciado do problema de contagem e conseguiu explicitar uma solução (configuração) que o satisfaz, além de ser capaz de explicar por que uma determinada configuração encontrada não satisfaz às condições do problema.

Tal leitura fez aumentar mais ainda a sensação de que a atividade proposta neste trabalho tomava o rumo certo, já que o ensino único e exclusivo das fórmulas para resolução de problemas tende a esterilizar a criatividade do aluno, restringir o conteúdo a uma simples memorização e tirar do aluno a possibilidade de exercitar criativamente suas habilidades.

Na prática escolar não fazemos oposição ao uso das fórmulas, pois de fato, muitas vezes elas aceleram a obtenção do resultado que precisamos encontrar, todavia defende-se com esta pesquisa, a ideia de que o professor introduza o tema via jogos combinatórios ou problemas combinatórios para serem resolvidos em grupo a fim de que o desenvolvimento do raciocínio combinatório seja realmente visto como prazeroso. Assim, este texto convida o docente leitor a criar condições para o aluno encontrar as soluções dos problemas propostos, independente de conhecerem ou não uma fórmula resolutiva, desenvolvendo de maneira satisfatória o raciocínio combinatório.

Criar estratégias, assim como trazer o jogo de classificação combinatória para as aulas de matemática que antecederão o estudo da análise combinatória é uma das mais frutíferas aplicações à prática do raciocínio combinatório em sala de aula e vai ao encontro da proposta de Pólya (2006). Ou seja, os alunos devem ser estimulados a pensar e a dominar a linguagem, para que criticamente consigam, por si só, em um estágio mais avançado, autoavaliar suas próprias soluções.

Essa é uma mudança de atitude que esperamos dos alunos em sala de aula e também frente à Matemática após participarem de atividades de jogos combinatórios ou resolução de problemas combinatórios que visam o desenvolvimento do raciocínio combinatório. É a tão falada e esperada aquisição de autonomia, conquistada pelo aluno.

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 2000, p. 40)

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio, a análise combinatória, com seus problemas de contagem, a Probabilidade e a Estatística formam um tripé essencial formador de um cidadão crítico, destacando novamente a importância do seu ensino devido às aplicações diversas destes conteúdos nas diversas áreas sociais e de humanidades do conhecimento humano. A prática que propomos nessa dissertação também vai ao encontro do que propõe os PCNs.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 2000, p. 44)

Esta tarefa de trazer a matemática combinatória para o Ensino Fundamental I é um desafio para os professores que ensinam matemática. Durante muitos anos a análise combinatória foi considerada um dos temas mais difíceis de serem ensinados por professores e aprendido pelos alunos na educação básica, corroborado pelo trabalho de Malermo (2012).

Durante anos o ensino desta área do conhecimento matemático nos cursos de formação de professores não atendia aos reais anseios dos discentes, além de muitos professores sentirem-se inseguros ao lecionar tal tema, contribuindo para que a análise combinatória fosse, muitas vezes, deixada em segundo plano ou não trabalhada de maneira satisfatória nas salas de aula (SILVA; RODRIGUES; RODRIGUES; 2018).

A partir de cursos de formação continuada organizados pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), iniciados na primeira metade da década de 1990, e posteriormente através do Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), a análise combinatória adquiriu maior visibilidade e a relevância esperada no currículo das escolas, tendo como um dos grandes defensores do ensino da combinatória, o professor Augusto César Morgado (1944 - 2006).

A contracapa da 1ª Edição do livro “Análise Combinatória e Probabilidade”, de 1991, de Augusto César Morgado e outros três autores traz o seguinte trecho como justificativa para aceitação do novo livro no mercado a ser usado em cursos de formação continuada de professores:

> A análise combinatória costuma causar perplexidade a alunos e professores. De um lado tem-se a variedade de problemas interessantes, de simples enunciados, que se enquadram no seu âmbito. Do outro lado o grande desafio à imaginação que a solução desses problemas representa, sendo aparentemente cada um deles um caso em si, não enquadrável numa teoria geral. Essa ideia aparente, contudo não é correta. Há princípios gerais que permitem submeter muitos desses problemas a técnicas organizadas de resolução. Expor alguns desses princípios e ensinar, mediantes diversos exemplos, como aplicá-los, é uma das finalidades desse livro (MORGADO,1991).

No currículo escolar brasileiro, baseado nos PCNs para o Ensino Fundamental, a análise combinatória está presente, em teoria, no terceiro ciclo (6° e 7° anos) com o objetivo de introduzir e familiarizar o aluno com problemas simples de contagem e no quarto ciclo (8° e 9° anos), com um pequeno aprofundamento, mas sem apresentar qualquer tipo de fórmula.

Segundo Aquino (2013) o aluno deve começar a ter contato com esse tema, de fato, já no Ensino Fundamental II para ir se adaptando ao raciocínio combinatório e desenvolvê-lo com mais confiança e naturalidade ao longo dos anos subsequentes. Segundo a autora, a falta de contato com a Análise Combinatória desde as séries iniciais é apontada por alguns pesquisadores da área de Educação Matemática como sendo um dos motivos das dificuldades enfrentadas por muitos alunos nesse conteúdo. Com isso, no Ensino Médio o discente terá a formalização mais ampliada daquilo que já conhece. Documentos oficiais vigentes no Brasil já apontam para esta prática docente:

> Integrarão este bloco estudos relativos a noções de Estatística e de probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado

> na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos. Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades (BRASIL, 1998, p. 32).

No Ensino Médio, este conteúdo é lecionado em um dos três anos, sendo facultativa a escolha pelo corpo docente da escola. No Estado do Rio de Janeiro, por exemplo, segundo o currículo mínimo elaborado em 2012, a análise combinatória deve ser abordada no 3° ano, já na maioria das escolas privadas o conteúdo está no 2º ano de escolaridade do Ensino Médio.

Espera-se que o professor domine o assunto que irá lecionar, de maneira a ter uma visão mais ampliada do tema para transmitir segurança ao aluno e incentivar a sua criatividade. Ouvir as explicações dos alunos acerca de suas resoluções, sobretudo para identificar aqueles que conduzem a falsos resultados é muito importante para o aluno adquirir, a partir das intervenções do professor, maturidade. Este tipo de prática possibilita uma mudança de paradigma na prática docente de professores de matemática ao trabalhar com análise combinatória, seja introduzindo o assunto via problemas combinatórios mais interessantes, seja via jogos combinatórios.

> Aos poucos, os próprios alunos, cada um a seu tempo, começam a substituir a construção de tabelas, completamente ou parcialmente, por uma resolução aritmética. Entretanto, é importante ressaltar que esta substituição deve partir do próprio discente. A construção de uma representação visual da situação descrita, como por exemplo, uma tabela ou um diagrama de possibilidades, permite que o aluno compreenda o princípio multiplicativo atribuindo significado ao produto que fornece o total de opções. Ele não repete modelos. Ele os cria com a orientação do seu professor. (ALMEIDA; FERREIRA, 2011, p. 7)

2.4 Dos Jogos Combinatórios

Segundo Teixeira (2013), um jogo combinatório é um jogo sequencial no qual todas as regras e lances são conhecidos por todos os jogadores em questão, ou seja, os jogadores jogam alternadamente e sempre sabem a sua posição e a do adversário a cada rodada. Alguns elementos sempre devem estar presentes nos jogos combinatórios:

i. Um conjunto de posições, dentre as quais se destaca a posição inicial, de onde o jogo deve iniciar;

ii. Um conjunto de jogadores que farão os lances a cada rodada alternadamente;

iii. Um conjunto de regras que estabelecerão, dentre outras coisas, os lances permitidos ao jogador a cada rodada e as situações onde o jogo termina independente do próximo lance (se houver), isto é, quando um jogador vence ou ocorre empate.

Por isso, os jogos combinatórios independem de sorte ou azar, pois absolutamente tudo já é conhecido por todos os jogadores, vencendo, pois, aquele que conseguir estabelecer a melhor estratégia durante a partida.

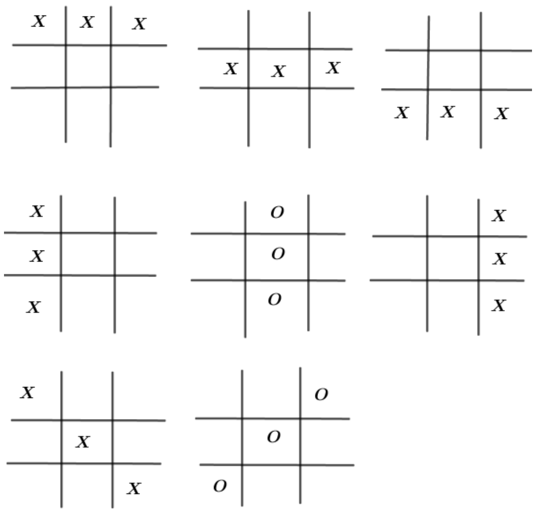
Xadrez, *Jogo da Velha*, *Damas* são exemplos bem conhecidos de jogos combinatórios, outros não tão conhecidos são Go e Nim, mas todos encaixam-se na definição supracitada. Por outro lado, jogos como *Pôquer*, *Paciência*, *Buraco, War*, *Par ou Ímpar*, *Joken - Po,* entre outros, não podem ser classificados como jogos combinatórios devido à aleatoriedade apresentada, já que nos jogos como *Pôquer, Paciência* e *Buraco* não se conhece a mão do adversário nem as próximas cartas do baralho e em jogos como *Joken - Po* e *Par ou Ímpar* as jogadas são simultâneas; no caso do *War* o jogador fica dependente dos números que conseguir obter nos dados, contando com o fator sorte/azar. (TEIXEIRA, 2013).

Para fins explicativos, considere o jogo da velha tradicional, jogado no estilo um contra um, no qual o Jogador 1[4] deve fazer a jogada inicial, preenchendo um dos nove espaços vazios escolhendo um dos símbolos X e O, e o Jogador 2 preencherá um dos oito espaços vazios restantes com o símbolo que lhe sobrar. A partir daí, cada jogador, alternadamente, vai preencher os espaços vazios com seu respectivo símbolo. Ganha o jogador que conseguir colocar primeiro três símbolos iguais em uma linha, em uma coluna ou em uma diagonal. Caso ninguém consiga, é decretado empate e diz-se que “deu velha”.

---

[4] Serão denominados Jogador 1 aquele que iniciar a partida e Jogador 2 o próximo a jogar.

Figura 5 - Posições que configuram vitória para um jogador



Fonte: o autor (2019)

Note que, pela descrição feita do jogo da velha, ele pode ser classificado como um jogo combinatório, pois obedece à definição estabelecida no início da secção 2.3, visto que os jogadores fazem seus lances alternadamente, há um conjunto de regras que define o jogo por completo e a cada rodada todos os lances são conhecidos, isto é, independe da sorte.

Repare também que um jogador que busca a vitória deve escolher uma das oito posições finais (ver Figura 1) para tentar, a cada lance, obtê-la ao mesmo tempo em que deve prever, através das jogadas do adversário, qual a posição final que ele escolheu para, somente assim, impedi-lo de completar espaços que o impedem de vencer o jogo ou adquirir vantagem sobre o adversário. Dessa maneira o jogo pode mudar a cada rodada e outras escolhas deverão ser feitas pelos jogadores.

Resolver um jogo combinatório significa determinar quem o vence[5], supondo que todos os jogadores, na sua vez, sempre fazem a melhor jogada possível, além de indicar a estratégia vencedora.

> A teoria dos jogos preocupa-se com o modo como indivíduos tomam decisões quando estão cientes de que suas ações afetam uns aos outros e quando cada indivíduo leva isso em conta. É a interação entre tomadores de decisões individuais, todos eles com um propósito em vista, cujas decisões têm implicações para outras pessoas, o que torna as decisões estratégicas diferentes de outras decisões. (BIERMAN, 2011, p. 4)

[5] Entendemos por vencer o jogo, determinar todas as configurações possíveis que atingem o objetivo final, obedecendo as regras pré-estabelecidas, escolher uma destas configurações para alcançar o objetivo e descobrir qual configuração o adversário escolheu para bloqueá-lo em sua estratégia.
Configuração é um conjunto de jogadas ou lances ordenados que levam à posição final do jogo.

Em se tratando do ensino da Matemática, a busca de uma estratégia pelo aluno num primeiro momento, as descobertas e constatações feitas ao longo de uma partida e a percepção de jogadas boas ou ruins estimulam-no a desenvolver um pensamento lógico-dedutivo mais apurado, uma condição essencial na Matemática para resolver problemas curiosos e mais complexos. Por esta razão, os jogos combinatórios, quando bem trabalhados, auxiliam no processo de ensino-aprendizagem, já que aproxima aluno e disciplina de uma forma mais desafiadora, podendo ser pautada na ludicidade, além de trabalhar com aspectos indispensáveis ao sucesso em Matemática como atenção, concentração e organização formal do pensamento.

Na Matemática, a utilização de jogos como motivadores e promotores do desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, está presente desde a Antiguidade, como já foi exposto por Silva (2013). É importante notar que a ludicidade evocada muitas vezes abre portas à exploração mais abrangente de muitos conceitos matemáticos contidos em jogos criados a priori:

> Onde acaba o jogo e começa a matemática séria? Uma pergunta difícil que admite muitas respostas. Para muitos que a veem de fora, a matemática, é extremamente aborrecida, não tem nada a ver com o jogo. Ao contrário, para a maioria dos matemáticos, a matemática nunca deixa completamente de ser um jogo, embora, para além disso, possa ser muitas outras coisas. (GUZMÁN, 1990, p.39)

A passagem da brincadeira para ações formais em sala de aula, traduzida pela formalização dos conceitos matemáticos, é tarefa pura e exclusiva do professor, além de desfazer a ideia errônea de que se apropriar de jogos em sala de aula significa que o professor não está a exercer o seu ofício de ensinar Matemática. É possível brincar e fazer/aprender matemática? A resposta é positiva, porém há que se desenvolver um método para que ganhos de aprendizagem sejam conquistados. Veremos a seguir, brevemente, qual a relação do homem com os jogos matemáticos ao longo dos tempos, a fim de ilustrar como a ludicidade aproxima o homem da matemática e, futuramente, justificar com mais um argumento, a proposta de trazer para a sala de aula atividades que facilitem sua aprendizagem.

2.5 Da Teoria dos Jogos

Segundo Nogueira (2016), a teoria dos jogos ganhou notoriedade e passou a ser, de fato, discutida e estudada como sendo um campo unificado da matemática no século XX, através das publicações de Von Neumann em 1928, embora antes dele os matemáticos como James Waldegrave (1684 - 1741) e Antoine Augustin Cournot (1801 - 1877) já haviam dado os primeiros passos nesta discussão. Neumann pode ser considerado o pai da teoria dos jogos, seguido por Nash.

É interessante destacar que tais personagens e suas contribuições podem servir de base para trabalhos em sala de aula que combinem História da Matemática e Matemática. Atividades dessa natureza ajudam a aproximar alunos ditos "não muito dados aos números" à própria Matemática, como por exemplo, a atividade de construção de uma linha do tempo em que seja possível identificar os contribuintes para o nascimento e desenvolvimento de uma teoria, assim como os principais resultados que impactaram positivamente a sociedade e projeções futuras.

A materialização da linha do tempo em sala de aula ajuda os alunos a compreenderem que o desenvolvimento da matemática não foi linear como pensa a maioria das pessoas. Isso é muito interessante de se desconstruir, já que os livros didáticos ajudam a ter uma percepção contrária a esta, principalmente os jovens estudantes que acreditam que a Matemática se organizou da mesma maneira que é apresentada em seus livros didáticos.

Apresentar um jogo, sua natureza, sua concepção e seus objetivos estimulam os alunos nos momentos que antecedem a atividade, como por exemplo, apresentar grupos de jogos que possuem estratégias semelhantes. Muitas vezes, o que se cria são associações com jogos já conhecidos e novas estratégias são criadas.

É comum classificar os jogos por famílias, de acordo com o objetivo a ser alcançado[6]. Há jogos de *captura*, de *ganho de território*, de *bloqueio*, de *posição*, de *obtenção de padrões* e de *conexão*. De acordo com Pedro Neto e Silva (2013, p. 20, tradução nossa), tem - se as seguintes definições:

i. <u>Jogo de captura</u> - o objetivo é ser o primeiro jogador a capturar determinado conjunto de peças;
ii. <u>Jogo de ganho de território</u> - o objetivo do jogador é conquistar o máximo de área possível (a maior área possível depende das regras do jogo);
iii. <u>Jogo de bloqueio</u> - o objetivo é bloquear o adversário de maneira que na sua vez ele não possa executar mais nenhum movimento legal;

[6] Se o jogo tiver mais de um modo que resulte em vitória então ele pertencerá a mais de uma família.

iv. Jogo de posição - aquele cuja vitória depende da disposição de uma ou mais peças em certa parte do tabuleiro;

v. Jogo de obtenção de padrões - o objetivo é formar um padrão (este padrão é estabelecido nas regras do jogo, mas geralmente é uma linha) com as peças disponíveis no jogo;

vi. Jogo de conexão - o objetivo é ser o primeiro jogador a formar um grupo de peças satisfazendo alguma condição (por exemplo, unir dois lados opostos de um tabuleiro, objetivo do *Hex*).

Em geral, quando trabalhamos análise combinatória na matemática escolar, nosso objetivo está muito mais ligado à determinação da quantidade de configurações possíveis que resolvem um problema do que exibir meramente tais configurações. Exibir algumas configurações que são soluções do problema permite saber se o leitor compreendeu plenamente a questão proposta ao passo que exibir todas as configurações possíveis sem técnica não deixa de ser uma forma de enumerar a quantidade total de soluções.

Na maioria dos problemas a quantidade de configurações é muito grande, mesmo em situações simples como na obtenção do total de anagramas de uma palavra com cinco letras, tornando enfadonha a listagem de cada um, porém a compreensão do que venha ser uma solução, através da obtenção de configurações, é de bastante ganho para os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, ou seja, alunos e professores. Partiremos agora, para a seleção dos problemas do livro de Dudeney que permitiram nos ajudar desenvolver nossa proposta com este trabalho.

3 DOS PROBLEMAS SELECIONADOS

Listaremos alguns problemas extraídos de Dudeney (2005) (com exceção de ANAGRAMAS, que é sugestão nossa) que podem ser trabalhados com alunos de diferentes anos de escolaridade. Mais adiante, faremos uma discussão sobre seus níveis de dificuldade, que têm ligação direta com o tipo de estratégia usada para estabelecer as configurações que resolvem os problemas. Apresentaremos também as suas soluções, também extraídas de Dudeney (2005) (com exceção do problema AS BOLAS DE VIDRO, cuja solução é própria)

O objetivo de apresentar estes problemas nesta dissertação é criar um banco inicial simples de questões que possa deixar o professor livre para adaptá-los em suas salas de aula e transformá-los, segundo sua capacidade criativa em organizar atividades lúdicas, em jogos aliados à teoria de resolução de problemas ou em jogos combinatórios. Não é nosso objetivo apresentar diferentes soluções ou esgotá-las, mesmo sabendo ser uma contribuição interessante, somente pelo fato de buscar coerência com a proposta inicial do trabalho: a valorização da criatividade e a possibilidade de fazer matemática em sala de aula, segundo a realidade de cada grupo.

Isso não quer dizer que todos os problemas contidos nesse texto não foram resolvidos em sala de aula antes de estarem presentes neste texto, muito pelo contrário, a seleção de tais problemas emergiu justamente da atividade com os alunos. Muitos alunos apresentaram mais de uma solução diferente para os problemas e em alguns momentos a estratégia de resolução em grupo permitiu discussões ricas em sala de aula. Porém esta pesquisa procura deixar também como contribuição, a semente chamada motivação.

Inicialmente esta pesquisa foi pensada para ser aplicada com uma turma de pouco mais de 20 alunos do segundo ano do Ensino Médio, em um colégio público do Estado do Rio de Janeiro, durante dois tempos semanais dedicados a uma disciplina denominada Resolução de Problemas de Matemática (RPM). Esta disciplina não fazia parte da grade curricular de Matemática, isto é, não acompanhava o currículo da segunda série do ensino médio, que seguia o curso natural da série em relação à distribuição curricular. O professor utilizava estes tempos para resolver problemas ou mesmo para revisar tópicos importantes da Matemática do Ensino Fundamental II ou do das duas primeiras séries do Ensino Médio que fossem essenciais para um bom rendimento dos alunos nos exames oficiais do governo, como o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e o SAERJ (Sistema de Avaliação da Educação do Estado do Rio de Janeiro) .

O objetivo principal da disciplina RPM, contido nos documentos oficiais da Secretaria Estadual de Educação do Estado do Rio de Janeiro, é desenvolver no aluno a capacidade de resolver problemas além de auxiliar o professor da matemática na abordagem do conteúdo, assim sendo, este espaço era o mais propício para aplicação da pesquisa. Porém, com o término inesperado de tal disciplina pela Secretaria Estadual de Educação no meio do processo de aplicação das atividades que futuramente seriam avaliadas, a escolha dos problemas para serem trabalhados em sala foi mantida, assim como a metodologia de aplicação e desenvolvimento das aulas, porém pequenas adaptações do projeto inicial foram colocadas em prática porque o trabalho foi reiniciado em uma turma também de segunda série do ensino médio, porém, numa escola privada na mesma cidade. O trabalho foi reiniciado e muitos dados perdidos tendo em vista que o professor mudou-se de lotação e o contato com seus antigos alunos tornou-se quase nulo.

Reiniciado o processo numa escola privada, em um bairro de classe média na Cidade do Rio de Janeiro, estavam programados seis (6) encontros semanais de 100 minutos cada, no contraturno escolar nos quais os alunos, individualmente ou em grupo, transformariam o espaço escolar anteriormente apático em um ambiente muito mais vivo, interessante e com ações realmente positivas dos alunos participantes frente à matemática.

Como nosso intento foi trabalhar com o desenvolvimento do raciocínio combinatório, buscamos na obra de DUDENEY (2005), o capítulo em que o autor classifica as atividades como, de “origem combinatória”, imaginando possibilidades de realizações destes problemas em sala de aula de uma maneira diferente da tradicional como a prática da leitura silenciosa seguida da sua resolução mesmo que houvesse a necessidade de adaptação do texto ou mesmo de facilitadores visuais para uma melhor compreensão do problema.

Adaptações de materiais e adequações ao estágio cognitivo do aluno, assim como sua idade e série escolar que frequenta são vistas como atividades cotidianas do professor e para esta proposta de trabalho torna-se de suma importância. Por exemplo, para turmas que demonstram grande desinteresse pela Matemática, recomenda-se iniciar as aulas por jogos de obtenção de padrões ou por jogos de conexão, pois estes facilitam o trabalho em grupo. Além disso, a busca de estratégias e soluções depende de ação conjunta dos membros do grupo. Tais atividades são espécies de “warm up”[7] de integração e ambientação do aluno ao

---

[7] Esquentar, animar. No sentido de que tais atividades ajudam a despertar no aluno uma vontade de aprender mais sobre o tema.

desenvolvimento do tema em relação a futuras atividades, além de requerer participação ativa dos alunos e do professor.

Uma grande vantagem em trabalhar com estes problemas em turmas do Ensino Médio consiste na linguagem associada à forma figurativa dos enunciados, trazendo a teoria da contagem através de questões contextualizadas ou que podem ser perfeitamente adaptadas pelo professor. A possibilidade de transformar cada problema em um momento de aula com ganhos pedagógicos em que o aluno é figura ativa durante toda a atividade aplicada pelo professor é o que impulsionou tal escolha.

3.1 Da escolha dos problemas

Os problemas que compõem este trabalho são *sugestões* para serem desenvolvidas em sala de aula, deixando o professor livre para adaptações e pesquisas de outros problemas que sejam mais condizentes com os estágios cognitivos de suas diversas turmas. Dornelas (2007), completa esta colocação ao dizer que a apreensão significativa do conteúdo através da resolução de problemas depende de uma mudança de atitude e de orientações didáticas que propiciem aos alunos uma atividade quantitativa e qualitativa mais sustentável, mais natural, objetiva e produtiva.

Não é objetivo apresentar ou discutir várias soluções para enriquecimento deste texto em termos matemáticos. O enriquecimento esperado é a inspiração e incentivo para a transformação da atitude profissional do professor refletindo na mudança comportamental do aluno frente à matemática. Isso justifica o gabarito apresentado para os problemas, o mais previsível possível, o mais simples possível, deixando o protagonismo para o aluno que participa da atividade criada e proposta pelo professor.

Note que grande parte desses problemas pede para que o jogador exiba a(s) configuração(ões) que é(são) a(s) solução(ões) para cada um deles, como por exemplo os jogos: “Uma noite de jogo” e “Os cavaleiros do Rei Arthur”. São problemas que permitem aos alunos a exposição de seus conhecimentos matemáticos mais instintivos, como organização, classificação e aplicações intuitivas dos princípios aditivo e multiplicativo.

Os problemas apresentados nessa pesquisa permitem que exploremos não só resoluções analíticas como também soluções computacionais, já que a máquina bem programada nos exibe as soluções num tempo otimizado permitindo ganho de tempo para a realização de outras atividades ou mesmo para discutir mais calmamente as soluções apresentadas pelos alunos, principalmente quando aplicados em classes do ensino técnico.

Observe que a maioria dos problemas que apresentamos a seguir, para se enquadrarem fielmente à definição de jogo combinatório, precisam ser adaptados. Este é mais um desafio importante para o êxito da tarefa.

ANAGRAMAS - Marcos fala um dialeto muito raro. Ele tem em sua mão quatro cartões que ordenados formam a palavra DAJO. Nesse dialeto, todas as organizações possíveis destas letras representam uma palavra que consta em seu dicionário. De quantas maneiras ele pode reorganizar tais letras formando outras palavras com 4 letras?

AS 15 OVELHAS - Como é possível organizar 15 ovelhas em 4 currais (baias), de maneira que cada curral (baia) tenha o mesmo número de ovelhas?

OS CAVALEIROS DO REI ARTHUR - O rei Arthur sentou-se à mesa redonda do castelo durante três noites consecutivas com seus cavaleiros, Beleobus, Caradoc, Driam, Eric, Floll, e Galahad, de maneira que os vizinhos de cada cavaleiro não se repetiam em nenhuma noite. No primeiro dia, sentaram-se em ordem alfabética. A partir do segundo dia, Arthur queria arrumar seus cavaleiros de tal modo que conseguisse ficar o mais perto possível de Beleobus e o mais longe possível de Galahad. Como é possível fazer esta arrumação?

OS ALMOÇOS - Doze homens sempre ligados a uma grande empresa na cidade de Londres sentam para almoçar juntos todos os dias no mesmo lugar. As mesas são pequenas e só conseguem acomodar duas pessoas por vez. Como esses dozes homens poderiam almoçar em pares durante onze dias, sendo que o mesmo par não pode se repetir em nenhum dia?

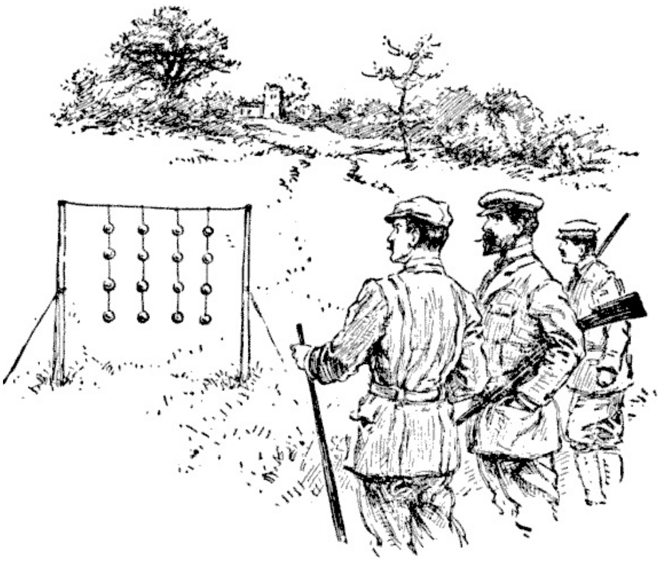
UMA NOITE DE JOGO - Doze membros de um clube reuniram-se para jogar juntos por onze noites, mas nenhum jogador tem o mesmo parceiro mais de uma vez, ou o mesmo oponente mais de duas vezes. Você poderia elaborar um esquema mostrando como eles se sentam em três mesas todas as noites?

UM TORNEIO DE TÊNIS - Quatro casais fizeram um torneio de tênis “misto duplo” no qual um homem e uma mulher sempre enfrentam uma dupla também de um homem e uma mulher. Ninguém nunca jogou com ou contra qualquer pessoa mais de uma vez. Você poderia mostrar como eles poderiam ter jogado juntos nas duas quadras em três dias consecutivos?

OS CHAPÉUS ERRADOS - Oito homens estavam jantando em um belo restaurante londrino, sendo os últimos a saírem, porém nenhum deles estava sóbrio o suficiente para identificar seu próprio chapéu, pegando assim qualquer um. Qual a chance de que todo homem pegue um chapéu que não lhe pertença?

AS BOLAS DE VIDRO - Um grupo de atiradores diverte-se acertando as bolas de vidro que estão suspensas sobre as cordas, conforme figura abaixo. Ao todo são dezesseis bolas e deseja-se saber quantas maneiras distintas há de quebrar todas as bolas, se deve-se sempre quebrar a bola que está mais baixa em cada corda.

Figura 6 - Bolas de vidro suspensas por cordas

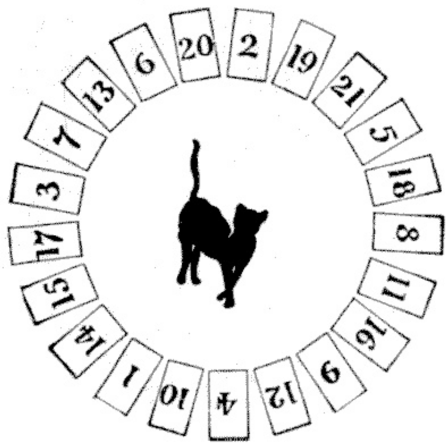


Fonte: DUDENEY (2005)

A ARMADILHA PARA RATO - Numere cartões com números de 1 a 21 e coloque-os em círculos, como na figura abaixo. Atrás de cada cartão está escondido um rato e o objetivo é capturar todos. Para capturar um rato, deve-se escolher uma carta qualquer e chamá-la de “um”, então a partir dela, começar a contagem “um, dois, três”, no sentido horário, até o momento em que sua contagem coincida com o número do cartão. Quando isso ocorrer, você capturou o rato e retira esta carta no círculo e recomeça a contagem pela próxima carta. Por exemplo, caso escolha-se a carta 18, chamando-a de “um”, a captura seria na carta 19, que seria removida, a próxima seria na carta 10 e depois, na carta 1. Daqui em diante não tem mais como fazer capturas.

Com a arrumação desse jeito (figura 7) é impossível capturar todos os ratos, mas podem-se fazer quaisquer duas cartas trocarem de lugar, por exemplo, trocar o 1 com o 17, ou o 10 com o 12. Pergunta-se, qual troca deveria ser feita para conseguir, começando do lugar certo, capturar todos os ratos?

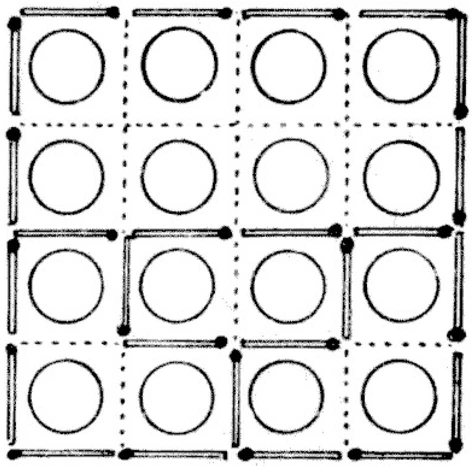
Figura 7 - A armadilha para rato



Fonte: DUDENEY (2005)

AS DEZESSEIS OVELHAS - Na figura 8, os fósforos representam obstáculos e os círculos, ovelhas. Os obstáculos do lado de fora e as ovelhas são imóveis, isto é, este jogo baseia-se apenas nos movimentos dos nove fósforos internos. Na configuração atual, as ovelhas estão separadas em quatro grupos, um grupo com 8, dois grupos com 3 e um grupo com 2. Como conseguir dividir as ovelhas em dois grupos de 6 e um grupo de 4 substituindo apenas 2 fósforos?

Figura 8 - Jogo das dezesseis ovelhas



Fonte: DUDENEY (2005)

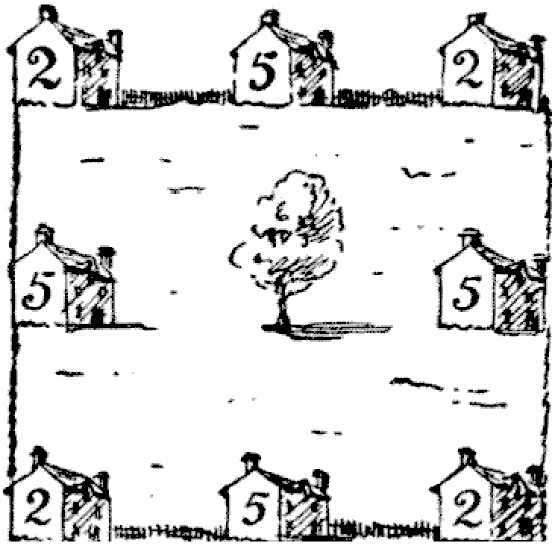
OS NOVE ESTUDANTES - Nove estudantes sairão em três trios durante seis dias da semana de maneira que nenhum deles andará lado a lado com outro mais de uma vez. Como se deve organizá-los durante esses seis dias obedecendo a essas condições?

AS QUINZES PEÇAS - Considere um dominó no qual todas as peças que representam os números 5 e 6 são retiradas. Com isso, sobram 15 peças sendo o *duplo-quatro* a maior delas. De quantas maneiras essas peças podem ser organizadas em linha reta seguindo as regras tradicionais do jogo de dominó, isto é, peças de mesmo valor unidas pelos lados que contém este valor? Da esquerda para a direita e da direta para esquerda com o mesmo arranjo são contados como duas maneiras diferentes.

O PROBLEMA DOS DADOS - De quantas maneiras distintas os números podem ser marcados em um único dado, de sorte que faces opostas sempre somem 7?

AS OITO CASAS - Um senhor, dono de um terreno quadrado, decidiu construir oito moradias em torno do terreno e um espaço de lazer no meio, como na figura abaixo. Após as casas serem ocupadas (não necessariamente na sua totalidade), o senhor notou que a soma dos moradores das casas que formam os lados do quadrado (terreno) era sempre igual a nove. A figura 9 apresenta uma das possibilidades de preenchimento das casas. Qual o total de maneiras que estas casas podem ser ocupadas?

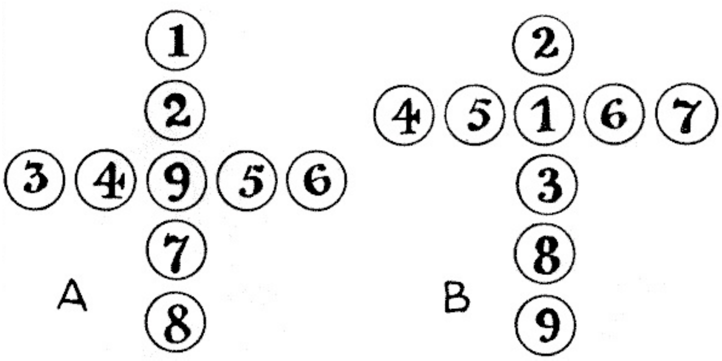
Figura 9 - As oito casas



Fonte: DUDENEY (2005)

AS CRUZES - Sejam os números naturais de 1 a 9, dispostos como na figura abaixo. Na disposição A está formada uma cruz grega, enquanto na disposição B, uma cruz latina. Porém ambas têm um especificidade: o valor da soma dos números dispostos na vertical é o mesmo valor da soma dos números dispostas na horizontal. Quantas maneiras diferentes existem para cada caso? Lembre-se que as reflexões e rotações são contadas como iguais.

Figura 10 - As cruzes



Fonte: DUDENEY (2005)

OS BARRIS DE BÁLSAMO - Um mercador de Bagdá colocou seus 10 preciosos barris de bálsamo à venda. Eles foram numerados e dispostos em duas filas, como mostra a figura a seguir. Quanto menor o número marcado no barril, maior é seu valor, sendo assim o bálsamo de melhor qualidade está representando pelo barril de número 1 e o de pior qualidade, pelo barril de número 10. Por questões pessoais, o mercador arruma as filas de forma a nunca colocar um barril abaixo nem à direita de outro com menor valor. A figura 11 mostra o arranjo mais simples que obedece a essa condição. Sendo assim, de quantas maneiras diferentes o mercador pode montar suas duas fileiras de barris?

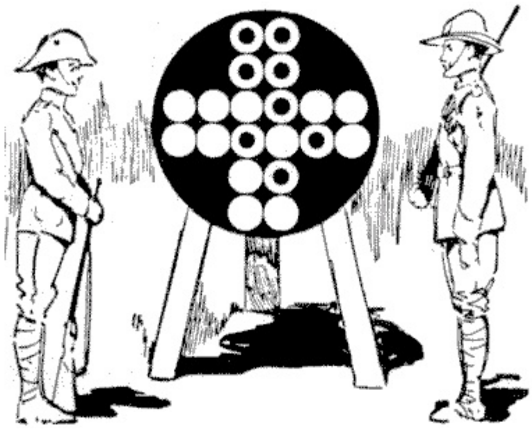
Figura 11 - Os barris de bálsamo

Fonte: DUDENEY (2005)

PINTANDO UMA PIRÂMIDE - Dispõe-se de sete cores - marrom, azul, vermelho, preto, amarelo, verde e lilás - e deseja-se pintar as faces de uma pirâmide triangular (ou tetraedro). De quantas maneiras distintas consegue-se realizar esta pintura utilizando, em cada caso, uma, duas, três e quatro cores das supracitadas?

O ALVO TRANSVERSAL - A figura abaixo mostra um alvo formado por círculos. O atirador deseja acertar o alvo com quatro tiros de maneira a formar um quadrado. Percebe-se, na figura, duas possibilidades corretas que acertar o alvo de acordo com essa condição. De quantas maneiras distintas, o atirador pode formar um quadrado alvejando quatro círculos deste alvo.

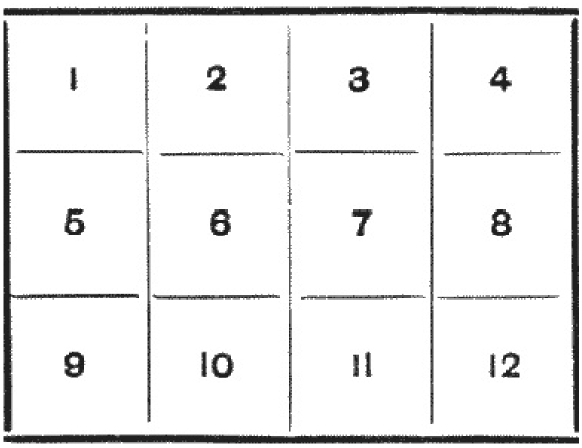
Figura 12 - O alvo transversal



Fonte: DUDENEY (2005)

OS SELOS - Suponha que você tem uma pequena cartela com doze selos postais, numerados de 1 a 12 conforme a figura abaixo, e que seu amigo lhe peça 4 destes selos. Porém, ele lhe faz uma exigência: que os selos estejam todos juntos, isto é, que cada selo possua pelo menos um lado em comum com outro. Uma possibilidade seria destacar os 1,2,3 e 4 e dar a seu amigo; outra possibilidade seria 2,3,6 e 7. Qual o total de maneiras que podem-se destacar os quatro selos?

Figura 13 - Cartela de selos numerados



Fonte: DUDENEY (2005)

3.2 Classificação dos problemas quanto ao nível de dificuldade

A intenção em criar a classificação a seguir para os problemas descritos anteriormente, segundo três níveis de dificuldade, surgiu com a finalidade de auxiliar o professor a programar a atividade que apresentará à turma, adaptá-la caso seja necessário e tornar a aprendizagem a mais significativa possível.

Estimular o aluno à participação constante, aproveitar seus conhecimentos prévios, desenvolver potencialidades matemáticas, estar atento a como novas informações são tratadas pelo discente é tarefa do professor compromissado com sua turma. Além disso, é de suma importância desconstruir, através do lúdico, sentimentos negativos pré-existentes em alguns alunos, como a sensação de incapacidade ou fracasso frente à Matemática. Isso também é um dos objetivos da proposta desta pesquisa.

A prática do desenvolvimento da atividade pelo professor em sala de aula está fortemente embasada nas teorias oriundas da psicologia cognitiva, como a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel (1918 - 2008).

Segundo Fernandes (2011), a teoria de Ausubel, apresentada pelo próprio em 1963, diz que quanto mais um indivíduo sabe, mais ele aprende, ou seja, a aprendizagem não é, exclusivamente, um produto do meio no qual vive, mas de todas suas experiências e conhecimentos anteriores. Fazendo um contraponto com o behaviorismo[8] da época, Ausubel acredita que aprender significativamente é ampliar, retificar e reconfigurar conceitos pré-existentes na mente do aluno e ele, a partir daí, fazer conexões e acessar novos conteúdos.

Para Ausubel, os docentes desempenham um papel fundamental na aprendizagem significativa, pois devem elaborar situações a serem propostas ao aluno levando-se em conta a história do sujeito e seus conhecimentos prévios. Há duas situações para que a aprendizagem significativa ocorra: o conteúdo a ser ensinado deve ter um caráter de novidade e que desperte atenção do aluno e ele deve estar disposto a fazer as relações necessárias com o conteúdo já aprendido de maneira consistente e não arbitrária (FERNANDES, 2011).

É neste sentido que caminha a proposta desse trabalho: apresentar problemas, situações e jogos combinatórios em sala de aula, a fim de conseguir despertar no aluno curiosidade sobre o assunto e fazê-lo aprender significativamente o que se pretende ensinar.

[8] Teoria baseada na crença de que apenas o meio em que vive o indivíduo influencia na sua aprendizagem. Isto é, tudo que um estudante já tinha como conhecimento era dispensável e irrelevante. Apenas o ato de ser ensinado por alguém é capaz de fazê-lo aprender algo. (FERNANDES, 2011)

Nossa ideia é trazer à sala de aula alternativa para introduzir a análise combinatória em detrimento do método tradicional de começar por definições e fórmulas.

Como dito em seção anterior, os problemas descritos em (3.1) selecionados do livro de Dudney, foram aplicados a um grupo de cerca de 15 alunos do Ensino Médio de uma escola privada de classe média da cidade do Rio de Janeiro, no bairro do Cachambi. O calendário inicial previa seis encontros de 100min cada, porém por questões de logística interna da instituição e pelo fato da escola trabalhar com a aplicação dos conteúdos programáticos por modulação, não foi possível, deixá-los tão extensos, e em quatro aulas de 100min, no próprio turno e não no contraturno como o previsto, esta atividade foi aplicada.

Foram observadas a postura para resolver as questões, a compreensão dos enunciados e as perguntas feitas ao professor para que, junto da Teoria de Aprendizagem Significativa de David Ausubel, pudéssemos classificar tais problemas em níveis.

É importante deixar claro que esta classificação é resultado de uma experiência com um grupo específico e que ela pode ser modificada quando aplicada a um grupo com características cognitivas distintas do grupo para o qual a atividade foi apresentada. Nosso critério avaliativo foi: domínio da leitura oral, compreensão do texto pelo grupo, capacidade de expressar configurações corretas que fossem soluções possíveis do problema, as tomadas de decisões nos jogos e os impactos que as tomadas de decisões equivocadas geravam no tempo para encontrar as respostas. Eis a definição proposta para cada nível:

- **<u>Nível 1</u>** - Os problemas são de fácil interpretação, ou seja, a leitura é simples e de fácil entendimento. Determina-se rapidamente uma configuração inicial[9], que é uma solução correta para aquele momento do jogo. Este acerto facilita a obtenção de novas configurações que são soluções do problema. Além disso, este nível se caracteriza por apresentar poucas configurações vencedoras, sendo possível uma análise mental simples ou mesmo ter uma visão global das soluções rascunhando algumas configurações.

[9] Primeiro passo; primeira jogada; primeiro lance; primeira solução.

- **<u>Nível 2</u>** - Os problemas são de fácil interpretação, porém determinar a configuração inicial correta não é tão fácil como nos problemas de nível 1 devido ao grande número de passos entre as configurações inicial e final e a restrições impostas pelo enunciado. Neste nível é difícil definir logo de começo uma jogada que leve à vitória e, na maioria das vezes, o jogador inicia o jogo por tentativa e erro até observar um padrão que venha auxilie a desenvolver a solução do problema.

- **<u>Nível 3</u>** - Os problemas possuem uma interpretação mais complexa, de maneira que entender o enunciado e pensar na configuração inicial é difícil. Em geral, as configurações que representam soluções apresentam muitas restrições. Este nível também se caracteriza por apresentar, muitas vezes, soluções que perpassam por outros tipos de pensamentos matemáticos como, por exemplo, a mescla entre pensamento algébrico e geométrico, exigindo do jogador raciocínio rápido e criatividade para conseguir reimaginar a solução. Os padrões que talvez apareçam por tentativa e erro são difíceis de perceber, diferenciando-o do nível anterior, principalmente em qualidade e criatividade das soluções. Muitas dessas soluções podem aparecer com auxilio de recursos computacionais.

Convidamos o leitor deste trabalho a refazer a leitura dos problemas descritos anteriormente e segundo a nossa classificação proposta, que segue na tabela abaixo, discutir conosco os níveis de dificuldades associados.

Tabela 1 - Classificação dos jogos em níveis

Nome do jogo combinatório	Nível
Anagramas	**1**
Jogo da velha	**1**
Sudoku	**2**
Dominó	**2**
As quinze ovelhas	**2**
Os cavaleiros do Rei Arthur	**3**
Os almoços	**3**
Uma noite de jogo	**3**
O torneio de tênis	**2**

Os chapéus errados	**3**
As bolas de vidro	**3**
A armadilha para o rato	**3**
As dezesseis ovelhas	**2**
Os nove estudantes	**3**
O problema dos dados	**1**
As oito casas	**2**
As cruzes	**3**
Os barris de bálsamo	**3**
Pintando uma pirâmide	**1**
O alvo transversal	**2**
Os selos	**2**

Fonte: o autor (2019)

3.3 Das soluções dos problemas selecionados

Seguem abaixo as soluções de cada problema proposto anteriormente, segundo DUDENEY (2005), com exceção dos problemas ANAGRAMAS e AS BOLAS DE VIDRO cuja solução é pessoal. Estas soluções auxiliaram também a confecção da classificação exposta na tabela 1. É bem verdade que muitos professores poderão discordar da classificação, tendo em vista o seu universo de trabalho. Assim, deixamos mais uma vez o espaço aberto para que o docente crie a sua classificação, segundo o contexto de sua sala de aula.

ANAGRAMAS - Resolver este problema consiste em determinar todas as ordenações possíveis das letras D, A, J, O. A melhor estratégia é aquela em que se contam as possibilidades de escolhas de cada letra para obter, ao final, o número total de configurações. Para a primeira letra da palavra há 4 possibilidades de escolha, (D, A, J ou O); escolhida a primeira letra, para selecionar a segunda há 3 possibilidades; para escolher a terceira letra sobram 2 possibilidades e para a quarta letra da palavra resta apenas 1 possibilidade. Sendo assim, pelo princípio multiplicativo, o total de maneiras de montar uma palavra neste dialeto é obtido pelo produto $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Desta maneira, Marcos pode formar mais 23 palavras diferentes (entendendo palavra como uma configuração que resolve o problema), além de DAJO. Segue abaixo o esquema das 24 configurações possíveis de serem formadas.

$$D\begin{cases} A\begin{cases} J \to O \\ O \to J \end{cases} \\ J\begin{cases} A \to O \\ O \to A \end{cases} \\ O\begin{cases} J \to A \\ A \to J \end{cases} \end{cases} \qquad J\begin{cases} A\begin{cases} D \to O \\ O \to D \end{cases} \\ D\begin{cases} A \to O \\ O \to A \end{cases} \\ O\begin{cases} D \to A \\ A \to D \end{cases} \end{cases} \qquad O\begin{cases} A\begin{cases} J \to D \\ D \to J \end{cases} \\ J\begin{cases} A \to D \\ D \to A \end{cases} \\ D\begin{cases} J \to A \\ A \to J \end{cases} \end{cases} \qquad A\begin{cases} D\begin{cases} J \to O \\ O \to J \end{cases} \\ J\begin{cases} D \to O \\ O \to D \end{cases} \\ O\begin{cases} J \to D \\ D \to J \end{cases} \end{cases}$$

AS 15 OVELHAS - Uma leitura atenta mostra que o enunciado não é impreciso e deixa escapar detalhes importantes que beneficiam o fazendeiro. De fato, em nenhum momento é dito que todas as baias estavam necessariamente vazias. Usando este artifício, o fazendeiro começa a acomodar as quinze ovelhas que estão fora das baias até completar quatro ovelhas por cada baia. Repare que forçosamente o fazendeiro conseguiu cumprir o que dissera sem cometer nenhum erro lógico. Isso mostra que enunciados ambíguos ou imprecisos podem mudar uma situação inteira.

OS CAVALEIROS DO REI ARTHUR - Os personagens serão representados pelas iniciais de seus respectivos nomes. A primeira noite já está definida na ordem alfabética dos nomes, a saber, A,B,C,D,E,F,G. De acordo com o enunciado, nenhum cavaleiro pode ter os mesmos vizinhos nas noites seguintes, ou seja, no caso de Arthur (A) nas noites restantes seus vizinhos só poderão ser C, D,E e F. Note que isso ocorrerá com todos os membros da mesa, deixando claro que se houvesse mais noites não seria possível realizar a questão pois escolhendo-se um personagem há três grupos de duas pessoas que podem sentar-se ao seu lado, totalizando três noites.

Na segunda noite, a ordem da mesa fica A,F,B,D,G,E e C; na terceira noite, a ordem é A,E,B,G,C,F e D. Não há outra maneira de arrumar os personagens obedecendo as restrições do enunciado.

OS ALMOÇOS - Cada homem será representado por uma letra em ordem alfabética, isto é, o primeiro homem será designado por A e o último, por L. As duplas estão representadas matriz abaixo sendo cada linha um dia de almoço.

$$\begin{bmatrix} \text{AB} & \text{CD} & \text{EF} & \text{GH} & \text{IJ} & KL \\ \text{AE} & \text{DL} & \text{GK} & \text{FI} & \text{CB} & HJ \\ \text{AG} & \text{LJ} & \text{FH} & \text{KC} & \text{DE} & IB \\ \text{AF} & \text{JB} & \text{KI} & \text{HD} & \text{LG} & CE \\ \text{AK} & \text{BE} & \text{HC} & \text{IL} & \text{JF} & DG \\ \text{AH} & \text{EG} & \text{ID} & \text{CJ} & \text{BK} & LF \\ \text{AI} & \text{JF} & \text{CL} & \text{DB} & \text{EH} & JK \\ \text{AC} & \text{FK} & \text{DJ} & \text{LE} & \text{GI} & BH \\ \text{AD} & \text{KH} & \text{LB} & \text{JG} & \text{FC} & EI \\ \text{AL} & \text{HI} & \text{JE} & \text{BF} & \text{KD} & GC \\ \text{AJ} & \text{IC} & \text{BG} & \text{EK} & \text{HL} & FD \end{bmatrix}$$

UMA NOITE DE JOGO - No esquema abaixo cada linha corresponde a um dia de jogo e cada par de letras a um par de parceiros de jogo.

AB x IL	EJ x GK	FH x CD
AC x JB	FK x HL	GI x DE
AD x KC	GL x IB	HJ x EF
AE x LD	HB x JC	IK x FG
AF x BE	IC x KD	JL x GH
AG x CF	JD x LE	KB x HI
AH x DG	KE x BF	LC x IJ
AI x EH	LF x CG	BD x JK
AJ x FI	BG x DH	CE x KL
AK x GJ	CH x EI	DF x LB
AL x HK	DI x FJ	EG x BC

UM TORNEIO DE TÊNIS - Denominaremos os homens pelas iniciais maiúsculas A, B, C, D e suas esposas pelas respectivas iniciais minúsculas a, b, c, d. Na tabela abaixo estão apresentados os jogos nos três dias de competição.

Tabela 2 - Organização das duplas

	Quadra 1	*Quadra 2*
Primeiro dia	A d contra B e	D a contra E b
Segundo dia	A e contra D b	E a contra B d
Terceiro dia	A b contra E d	B a contra D e

Fonte: adaptado de Dudeney (2005, tradução nossa)

Pode-se observar que nenhum marido jogou com ou contra a sua própria esposa. Convido o leitor a se aventurar em um caso um pouco mais difícil tentando organizar oito casais (em quatro quadras durante sete dias) sob as mesmas condições do problema em questão.

OS CHAPÉUS ERRADOS - para encontrar tal número de maneiras em que oito pessoas colocam oito chapéus errados, vamos reduzir o problema a casos menores:

- Se houvesse 1 pessoa e 1 chapéu, não haveria como ela colocar o chapéu errado;
- Se houvesse 2 pessoas e 2 chapéus, só haveria **1 maneira** delas duas colocarem os chapéus errados, que seria uma colocando o da outra;
- Se houvesse 3 pessoas e 3 chapéus só haveria **2 maneiras distintas** de todos colocarem os chapéus errados. Com efeito, considere três pessoas, A, B e C e seus chapéus representados pelas respectivas letras minúsculas. Portanto, a primeira possibilidade seria Ab Bc Ca e a segunda, Ac Ba Cb.
- Se houvesse 4 pessoas e 4 chapéus, haveria **9 maneiras distintas** de todos colocarem chapéus errados.

Observe que há um padrão de formação das quantidades: para n = 2, sendo n a quantidade de pessoas, o número de maneiras é determinado fazendo-se $2 \times 0 + 1 = 1$; para n = 3, faz-se $3 \times 1 - 1 = 2$; para n = 4, $4 \times 2 + 1 = 9$, isto é, se n for par multiplica-o n pelo número de maneiras do caso anterior e soma-se 1; se n for ímpar multiplica-o pelo números de maneiras do caso anterior e subtrai-se 1. Logo, fica fácil agora encontrar o restante até chegar onde se pretende.

- $n = 5 \rightarrow 5 \times 9 - 1 = \mathbf{44}$ **maneiras distintas.**
- $n = 6 \rightarrow 6 \times 44 + 1 = \mathbf{265}$ **maneiras distintas.**
- $n = 7 \rightarrow 7 \times 265 - 1 = \mathbf{1854}$ **maneiras distintas.**
- $n = 8 \rightarrow 8 \times 1854 + 1 = \mathbf{14833}$ **maneiras distintas.**

Portanto, a solução deste problema é 14833 possibilidades.

Observação: problemas deste tipo, em análise combinatória, são denominados problemas de permutação caótica.

AS BOLAS DE VIDRO - Repare que a intenção do atirador é sempre acertar as bolas em cada fileira de baixo para cima, porém, sem especificar a ordem dos acertos. Uma boa estratégia de resolução é imaginar alguns tipos de soluções. Para isso, chamaremos as bolas da primeira fileira à esquerda, de baixo para cima, de A_1, B_1, C_1, D_1 respectivamente. Analogamente, na segunda fileira teremos A_2, B_2, C_2, D_2; na terceira, A_3, B_3, C_3, D_3; e na quarta, A_4, B_4, C_4, D_4. Feito isso podemos imaginar duas possibilidades que esse atirador poderia realizar seu feito, a saber:

1) $A_1 - B_1 - C_1 - D_1 - A_2 - B_2 - C_2 - D_2 - A_3 - B_3 - C_3 - D_3 - A_4 - B_4 - C_4 - D_4$

2) $A_1 - A_4 - B_1 - A_3 - A_2 - B_2 - C_2 - B_4 - B_3 - C_1 - C_3 - D_1 - D_3 - C_4 - D_2 - D_4$

Apesar das configurações exibidas, que são soluções do problema, apresentarem formas tão diferentes uma da outra, um detalhe de extrema relevância indica o caminho a seguir: independente da posição onde estejam as letras (que representam a ordem em que os tiros acertaram as bolas), sempre ocorrerá que A_n aparecerá antes de B_n, que aparecerá antes de C_n, que aparecerá antes de D_n, com $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 4$.

Portanto, determinar o número total de configurações distintas que o atirador tem para cumprir seu objetivo consiste em descobrir quantas maneiras distintas há de arrumar esses 16 símbolos da forma supracitada, uma vez que cada sequência destes símbolos representa uma ordem de acerto das bolas e vice e versa (relação biunívoca).

Para isso, bastar escolher 4 das 16 posições disponíveis para colocar primeiramente A_1, B_1, C_1, D_1 obrigatoriamente nesta ordem, o que pode ser feito de

$$\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1.820 \text{ maneiras distintas.}$$

Acomodados os primeiros símbolos, deve-se agora escolher 4 dos 12 lugares restantes para alocar os símbolos A_2, B_2, C_2, D_2, obrigatoriamente nesta ordem, o que pode ser feito de

$$\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} = 495 \text{ maneiras distintas.}$$

Analogamente, já organizados os 8 símbolos acima, deve-se agora escolher 4 dos 8 lugares restantes para posicionar A_3, B_3, C_3, D_3, obrigatoriamente nesta ordem, o que pode ser feito de

$$\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70 \text{ maneiras distintas.}$$

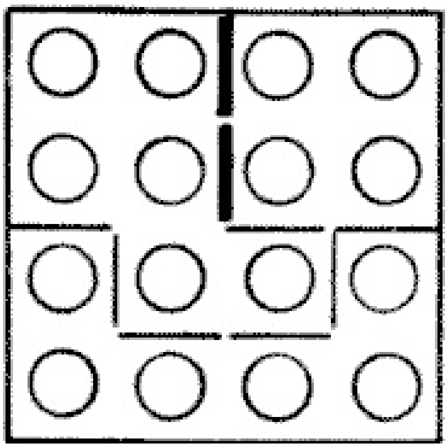
Automaticamente, os símbolos A_4, B_4, C_4, D_4 ficam com os 4 lugares restantes, isto é, apenas 1 maneira para arrumá-los, que é obrigatoriamente nesta ordem. Pelo princípio multiplicativo, o total de configurações distintas destes 16 símbolos cumprindo as exigências do problema, e consequentemente a sua solução, é dado pelo produto $1820 \times 495 \times 70 = 63.063.000$.

A ARMALDILHA PARA O RATO - Este é um problema que não possui apenas uma solução. Pode-se trocar de lugar as cartas 6 e 13 e iniciar a contagem pela carta 14; outra possibilidade seria trocar de lugar as cartas 10 e 14 e começar a contagem pela carta 16; outra seria trocar de lugar as cartas 6 e 8 e iniciar a contagem pela carta 19.

No anexo deste trabalho está a solução desenvolvida por um aluno do 2º ano do Ensino Médio ao se deparar com este problema.

AS DEZESSEIS OVELHAS - Este também é um problema que apresenta mais de uma solução. A figura a seguir ilustra uma possibilidade de trocar os obstáculos de posição gerando a configuração desejada (os obstáculos mais escuros são aqueles que foram trocados da sua posição original)

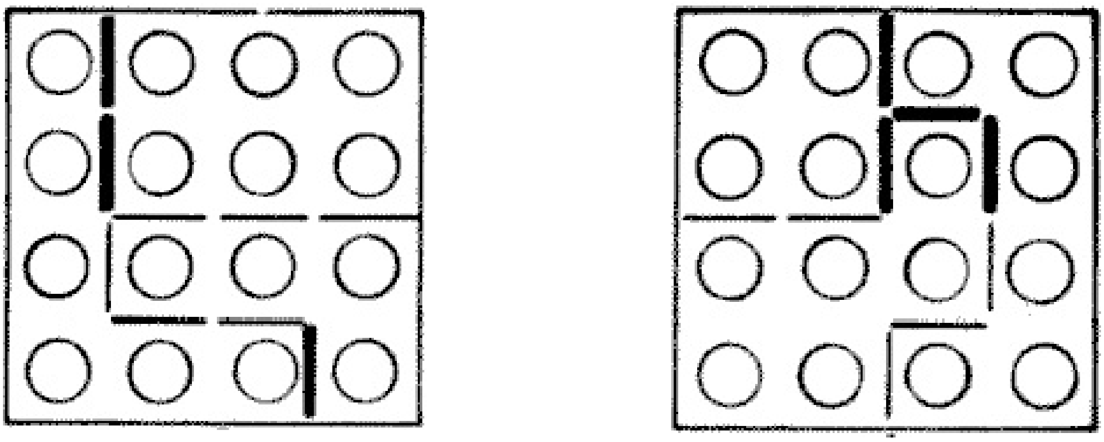
Figura 14 - solução para o caso de depois palitos



Fonte: DUDENEY (2005)

Algumas variantes deste mesmo problema seria a troca de mais palitos. A seguir, temos duas configurações, uma para o caso de trocar 3 palitos de posição e outra para o caso de 4 palitos. Deixamos a cargo do leitor, pensar em configurações possíveis movimentando 5 e 6 palitos.

Figura 15 - soluções quando se devem movimentar 3 e 4 palitos, respectivamente



Fonte: DUDENEY (2005)

OS NOVE ESTUDANTES - A tabela abaixo mostra como pode se feita esta organização de maneira que nenhum estudante ande lado a lado com outro mais de uma vez. Cada estudante será representado pela inicial maiúscula de uma letra em ordem alfabética a partir de A.

Tabela 3 - Organização dos estudantes

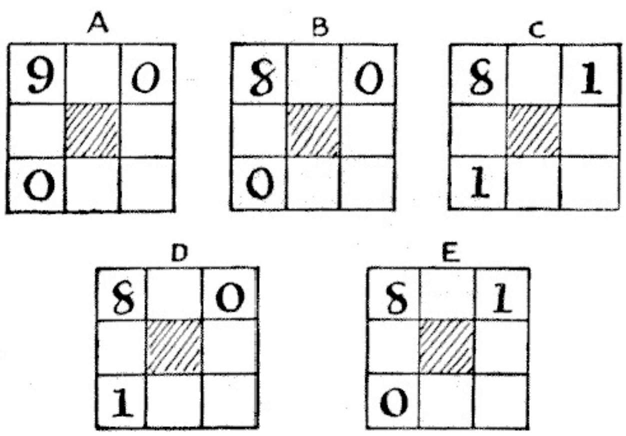
1º dia	2º dia	3º dia	4º dia	5º dia	6º dia
A B C	B F H	F A G	A D H	G B I	D C A
D E F	E I A	I D B	B E G	C F D	E H B
G H I	C G D	H C E	F I C	H A E	I G F

Fonte: adaptado de Dudeney (2005)

NUMERANDO DADOS - A única maneira de se obter soma sete em faces opostas é preenchendo-as com 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4. Assim sendo, para começar a numerar o dado, há 6 faces possíveis para colocar o algarismo 1; depois de colocado, restam 4 faces possíveis para por o algarismo 2; e por fim, 2 faces possíveis para colocar o algarismo 3 (repare que os outros algarismos, 4, 5 e 6, já ficam determinados pelas posições dos algarismos 1, 2 e 3). Portanto, pelo princípio multiplicativo, há $6 \times 4 \times 2 = 48$ maneiras de numerar um dado.

AS OITO CASAS - Existem várias maneiras de resolver o quebra-cabeça, mas há pouca diferença entre elas. O jogador deve, no entanto, em primeiro lugar ter em mente que, ao fazer seus cálculos, ele só precisa considerar as quatro moradias que ficam nos cantos, pois as moradias intermediárias nunca podem variar quando os cantos são conhecidos. Uma maneira é colocar os números de 0 a 9 um de cada vez no canto superior esquerdo, e depois considerar cada caso por sua vez.

Figura 16 - configuração inicial quando colocam-se os números 9 e 8 no canto superior esquerdo



Fonte: DUDENEY (2005)

Se colocarmos 9 no canto, como mostrado no Diagrama A, dois dos cantos não podem ser ocupados, enquanto o canto que é diagonalmente oposto pode ser preenchido por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 pessoas. Assim, vemos que há 10 soluções com um 9 no canto. Se, no entanto, substituirmos 8, os dois cantos na mesma linha e coluna podem conter 0 e 0, ou 1 e 1, ou 0 e 1 ou 1 e 0. No caso de B, dez seleções diferentes podem ser feitas para o quarto canto; mas em cada um dos casos C, D e E, apenas nove seleções são possíveis, porque não podemos usar o 9. Portanto, com 8 no canto superior esquerdo, há 10 + (3 × 9) = 37 soluções diferentes.

Se nós tentarmos 7 no canto, o resultado será 10 + 27 + 40 ou 77 soluções. Com 6 nós obtemos 10 + 27 + 40 + 49 = 126; com 5, 10 + 27 + 40 + 49 + 54 = 180; com 4, o mesmo que com 5 acrescentado de 55, resultando em 235; com 3, o mesmo que com 4, adicionando 52, resultando em 287; com 2, o mesmo que com 3 adicionando 45, resultando em 332; com 1, o mesmo que com 2 acrescentando 34, resultando em 366 e sem nada no canto superior esquerdo o número de soluções será encontrado pela soma 10 + 27 + 40 + 49 + 54 + 55 + 52 + 45 + 34 + 19 = 385.

Como não há outro número a ser colocado no canto superior esquerdo, temos agora apenas que somar os resultados já obtidos: 10 + 37 + 77 + 126 + 180 + 235 + 287 + 332 + 366 + 385 = 2.035. Portanto, achamos que o número total de maneiras pelas quais os locatários podem ocupar algumas ou todas as oito moradias, de modo que sempre haverá nove pessoas vivendo ao longo de cada lado da praça é de 2.035. Naturalmente, este método deve obviamente cobrir todas as reversões e reflexões, uma vez que cada canto por sua vez é ocupado por todos os números em todas as combinações possíveis com os outros dois cantos que estão alinhados.

AS CRUZES - Vamos primeiro lidar com a cruz grega. Existem apenas dezoito formas em que os números podem ser emparelhados nos dois braços da cruz. Abaixo seguem os pares.

$$\begin{cases}12978\\34956\end{cases}\quad\begin{cases}13968\\24957\end{cases}\quad\begin{cases}14958\\23967\end{cases}$$
$$\begin{cases}23958\\14967\end{cases}\quad\begin{cases}13769\\24758\end{cases}\quad\begin{cases}14759\\23768\end{cases}$$
$$\begin{cases}12589\\34567\end{cases}\quad\begin{cases}23759\\14768\end{cases}\quad\begin{cases}13579\\24568\end{cases}$$
$$\begin{cases}14569\\23578\end{cases}\quad\begin{cases}23569\\14578\end{cases}\quad\begin{cases}14379\\25368\end{cases}$$
$$\begin{cases}15369\\24378\end{cases}\quad\begin{cases}24369\\15378\end{cases}\quad\begin{cases}23189\\45167\end{cases}$$
$$\begin{cases}24179\\35168\end{cases}\quad\begin{cases}25169\\34178\end{cases}\quad\begin{cases}34169\\25178\end{cases}$$

É claro que o número no meio deve ser comum aos dois braços da cruz. O primeiro par é o que foi dado como exemplo. Suponha que um dos pares acima foi escrito na cruz, colocando a primeira linha par no braço vertical e a segunda linha, no horizontal. Agora, deixando o número central fixo, existem 24 maneiras em que os outros números do braço vertical podem ser variados, pois os quatro algarismos restantes podem alterar a ordem de $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ maneiras. Da mesma forma, os quatro números do braço horizontal também podem ser alterados de 24 maneiras para cada configuração no outro braço, resultando, ao todo, em $24 \times 24 = 576$ variações para este par escolhido; como há ao todo 18 pares, obtemos $18 \times 576 = 10.368$ maneiras.

Mas isso incluirá metade das quatro reversões e metade das quatro reflexões, que são consideradas a mesma configuração, então deve-se dividir o resultado acima por 4 para obter a resposta correta para a cruz grega, que é assim **2.592 possibilidades**.

No caso da Cruz Latina, é óbvio que precisa-se trabalhar com a mesmas 18 formas de emparelhamento. Analogamente ao que foi descrito no pensamento supracitado, há um total de maneiras diferentes de $18 \times 576 = 10.368$. Devido ao fato de que o braço superior e o braço inferior são desiguais (pois na vertical o número comum aos braços está no 2º algarismo, enquanto na horizontal, está no 3º algarismo), as permutações se repetirão pela reflexão, mas não pela reversão. Portanto, este fato implica apenas divisão por 2.

Mas em cada par pode-se trocar as figuras na posição vertical com aquelas na horizontal (o que não poderíamos fazer no caso da Cruz Grega, pois os braços lá são todos iguais) devendo, assim, multiplicar o total de configurações por 2 . A divisão por 2 seguida da multiplicação por 2 anulam-se, resultando finalmente em **10.368 maneiras** de montar a cruz latina.

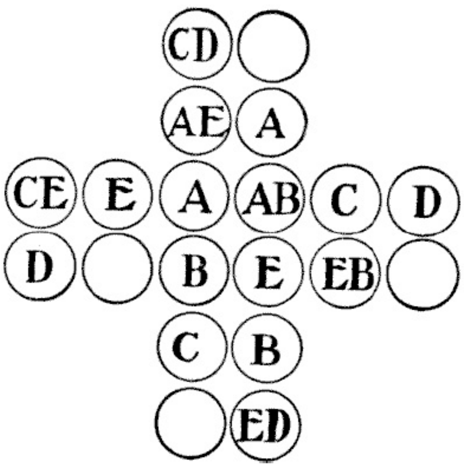
OS BARRIS DE BÁLSAMO - A solução deste problema consiste em

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 242$$

Tomando - se o resultado acima e dividindo-o por 6, sobram 42 possibilidades

O ALVO TRANSVERSAL - Vinte e um quadrados diferentes podem ser formados. Destes, nove serão do tamanho mostrado pelas quatro letras A, que aparecem na figura abaixo, quatro do tamanho mostrado pelas letras B, quatro do tamanho mostrado pelas letras C, dois do tamanho mostrado pelas letras D, e dois do tamanho indicado pelo único A na parte superior, o único E na parte central, o único C na parte inferior e o EB. É um fato interessante que você não pode formar qualquer um desses vinte e um quadrados sem usar pelo menos um dos seis círculos marcados com E.

Figura 17 - Configurações de resolvem o problema indicadas por letras.



Fonte: DUDENEY (2005)

OS SELOS - Referindo-se ao diagrama original, os quatro selos podem ser destacados na forma 1, 2, 3, 4, de três maneiras; na forma 1, 2, 5, 6, de seis maneiras; na forma 1, 2, 3, 5 ou 1, 2, 3, 7 ou 1, 5, 6, 7 ou 3, 5, 6, 7, em vinte e oito maneiras; na forma 1, 2, 3, 6 ou 2, 5, 6, 7, de quatorze maneiras; na forma 1, 2, 6, 7 ou 2, 3, 5, 6 ou 1, 5, 6, 10 ou 2, 5, 6, 9, em quatorze maneiras. Assim, existem sessenta e cinco maneiras ao todo.

3.4 Qualquer problema combinatório (ou jogo combinatório) tem solução?

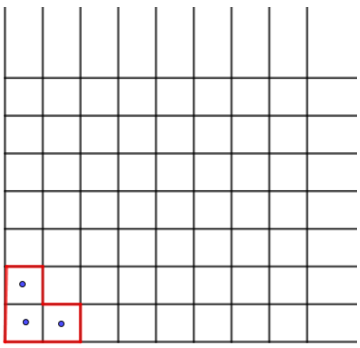
Como foi dito no início deste trabalho, resolver um jogo combinatório (ou um problema combinatório) é criar uma estratégia para se chegar à configuração final que cumpre o objetivo do jogo, obedecendo às suas regras. Na seção anterior mostramos alguns tipos de problemas combinatórios não costumeiros em livros didáticos do Ensino Médio nem em atividades de sala de aula e, posteriormente, apresentamos suas soluções. Isso pode reforçar a falsa ideia de que um problema é uma situação ou assunto do qual sempre deve ser encontrada uma resposta. Muitos alunos e não estudiosos da matemática partem da premissa de que todo problema tem uma solução e, consequentemente, que há de se encontrar tal solução. Encontrar a solução de um problema pode ser uma tarefa bem complicada.

Há quem divulgue que se uma situação ou assunto não possui solução, então, por definição, não estamos diante de um problema, mas sim, diante de um fato e que requer somente aceitação. Porém a matemática nos mostra que se conseguimos provar logicamente que o problema é impossível de ser resolvido, então a solução do problema é afirmar que o problema é insolúvel. Matemáticos como Henri Poincaré (1854-1912), Bernhard Riemann (1826-1866), David Hilbert (1862 - 1943), Grigori Perelman (1966) e muitos outros, em seus ofícios, puderam demonstrar matematicamente, mais de uma vez, que uma solução de um problema é dizer que 'o problema não tem solução'.

Apresentaremos agora o problema *Prisão no tabuleiro*, um exemplo de problema sem solução, e, em seguida, uma demonstração de que é impossível resolvê-lo.

O jogo acontece em um tabuleiro infinito à direita e acima, sendo as três casas do canto inferior esquerdo, grifadas de vermelho, a prisão, onde se encontram três peças como mostra a figura a seguir. O objetivo do jogo é libertar as três peças em um número finito de jogadas.

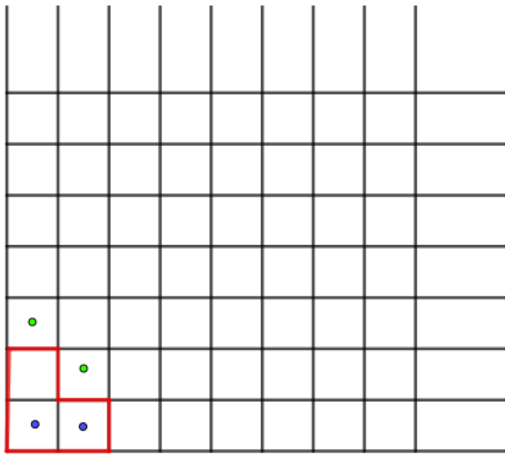
Figura 18 - Prisão no tabuleiro



Fonte: o autor (2019)

Cada jogada consiste em escolher uma peça para movimentá-la e tal movimento representa duplicar a peça, isto é, a peça escolhida deixará de existir naquela casa e se dividirá em duas, que ocuparão as casas imediatamente à direita e acima. Em cada casa só pode haver uma peça. A figura abaixo traz uma possível jogada, ao escolher a peça que está na primeira casa da segunda linha para movimentar. Note que as peças que ocuparam novas casas estão em verde, para melhor compreensão.

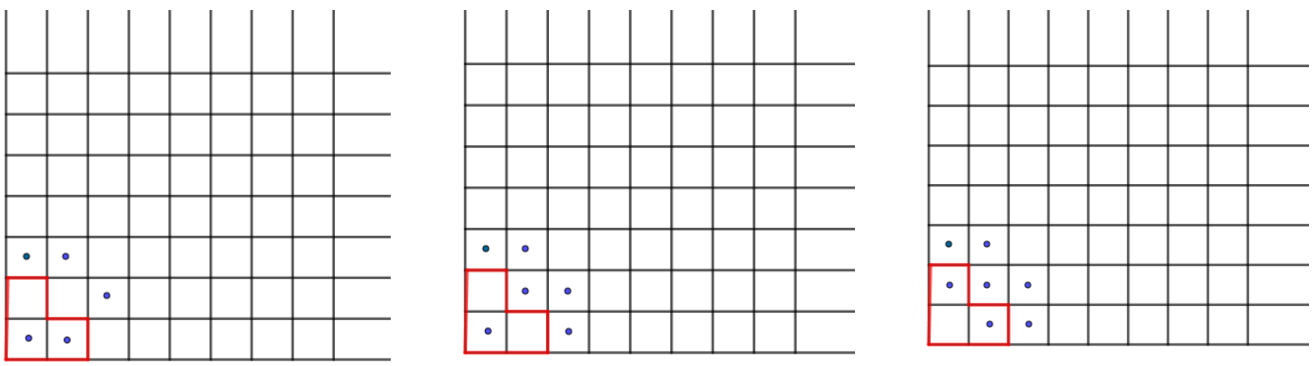
Figura 19 - Movimento do jogo prisão no tabuleiro



Fonte: o autor (2019)

Convidamos o leitor a tentar resolver este problema, ou seja, tentar tirar as três peças da região em vermelho. A figura a seguir traz, como um exemplo, uma sequência de jogadas a partir da primeira mostrada na figura anterior.

Figura 20 - Sequência de três jogadas



Fonte: o autor (2019)

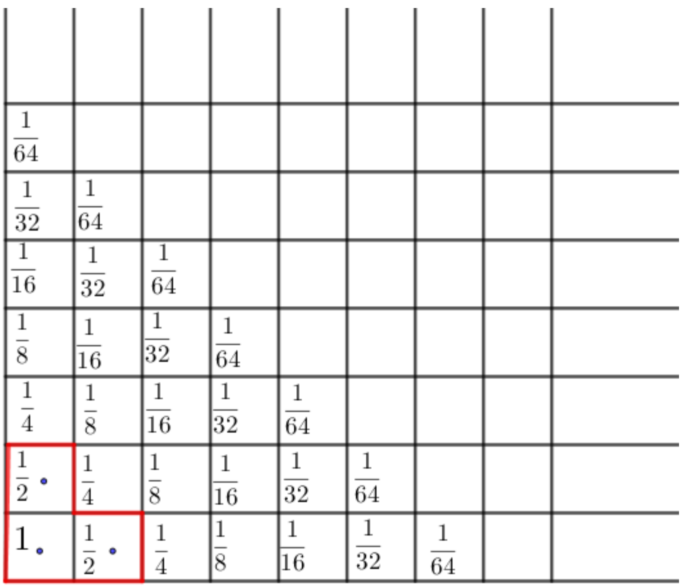
Caso o leitor tenha tentado, deve ter percebido que não conseguiu deixar a região vermelha sem peças. Mas por que isso ocorreu? Será que começou pelo lugar errado? Será que uma jogada mal feita resultou na derrota? Qual a estratégia vencedora deste jogo?

Estes são questionamentos naturais que se esperam dos alunos em sala de aula quando apresentados a situações-problema como esta. Cabe ao professor mediar o diálogo ou mesmo promover espaço para que conjecturas sejam feitas. Voltemos.

A reposta para a pergunta feita, isto é, porque o jogador não consegue deixar a região não é simples: *este problema é impossível de ser resolvido, por isso qualquer estratégia a ser tentada não resultará em êxito para o jogador*. E esta verdade será agora demonstrada a fim de que não restem mais dúvidas sobre tal questão. Tanto o problema quanto a demonstração elegante que seguem foram retirados do site da PUC-Rio na parte de vídeos do Departamento de Matemática, apresentados por Filipe Bellio da Nóbrega, mestrando em Matemática da instituição.

Segundo ele, para demonstrar a impossibilidade de resolução do problema, será adicionado um invariante no tabuleiro, isto é, uma informação numérica que não altera uma característica do jogo ao longo dos movimentos que são realizados. Para tal, iremos dar para cada casa do tabuleiro um peso, a começar por 1 na primeira casa da primeira linha, de maneira que as casas à direita e acima de certa casa tenham metade do seu peso. Fazendo isso, o tabuleiro ficaria dessa forma.

Figura 21 - Tabuleiro com a distribuição dos pesos



Fonte: o autor (2019)

Note que movimentando, por exemplo, uma das peças que está na casa de peso $\frac{1}{2}$ ela se dividirá em duas peças que assumirão duas casas cujos pesos valem $\frac{1}{4}$, dessa forma o peso daquela peça se mantém o mesmo, a saber, $\frac{1}{2}$ antes do movimento e $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ após o movimento.

Podemos assim calcular o peso total do tabuleiro, mesmo este sendo infinito. Iremos, primeiramente, obter o valor da soma de cada linha. Repare que cada uma será a soma de uma série geométrica de razão $q=\frac{1}{2}$, mudando apenas o primeiro termo (a_1) em cada linha, que converge para $\frac{a_1}{1-q}$. Dessa forma tem-se:

1ª linha: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

2ª linha: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

3ª linha: $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

4ª linha: $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$

E assim, sucessivamente. Note que não é preciso encontrar o valor da soma de cada linha, porque também pode-se perceber que os valores das somas das linhas formam uma progressão geométrica infinita cujo primeiro termo vale 2 e cuja razão vale $\frac{1}{2}$. Dessa forma para encontrar o peso total do tabuleiro basta encontrar o valor da soma de todas as linhas, isto é,

$$2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$

Portanto, o peso do tabuleiro é 4. Sabemos que o peso das pedras na configuração inicial (Figura 21) é $2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$ e que para tirar todas as peças da região vermelha devemos alocá-las de tal maneira a não mudar o peso inicial. Como o tabuleiro todo tem peso 4 e a região vermelha (que corresponde ao peso total das peças) tem peso 2 , o restante do tabuleiro (excluindo-se a região vermelha) tem peso 2. Ocorre que o restante do tabuleiro é infinito e para atingir os 2 pontos necessários seria preciso jogar infinitas vezes, o que é impossível uma vez que o jogo é finito. Logo, o problema é impossível de ser resolvido.

Esta solução abre margem para infinitas discussões em sala de aula e a riqueza do tema pode ser registrada para uma futura confecção de um mapa de conexões de ideias que levaram Filipe a concluir o seu raciocínio. Mas e nas salas de aula? Como as coisas andam? Temos espaços para a realização de tais atividades ou o professor necessita criar espaços, abrir brechas para que este tipo de trabalho possa ser desenvolvido? Há que se estabelecer diálogos mais frequentes entre a teoria a ser apresentada durante uma atividade em sala de aula e sua aplicação.

4 UMA PROPOSTA PARA APLICAR EM SALA DE AULA

Este capítulo traz uma proposta para introduzir a análise combinatória e ajudar a desenvolver o pensamento combinatório dos alunos através de problemas instigantes ou através de jogos combinatórios que não se resolvem aplicando somente uma ou duas fórmulas. Ao invés disso, utiliza-se da comunicação, da linguagem, do trabalho em grupo e de uma forma de pensamento matemático peculiar a fim de que a aprendizagem torne-se significativa no sentido de Ausubel.

Estas atividades são introdutórias, porém acredita-se ser muito importante que o professor utilize-se desta proposta para realizá-la diversas vezes ao longo do ano letivo para que fixe esta forma de pensamento próprio que vem da análise combinatória.

O que é trazido para a composição das aulas são problemas que não costumam aparecer com frequência nos livros didáticos. Exigem criatividade, boa estratégia e raciocínio mais apurado. Não pretende-se também restringir esta prática a uma determinada série X, mas incentivar o professor, sempre que possível, a separar momentos destinados à resolução de problemas em suas aulas e fazer de seus espaços de atuação verdadeiros laboratórios.

Sugere-se o Ensino Médio, pela própria natureza do conteúdo, embora pesquisas na área de ensino da matemática, como (AQUINO, 2013), atestam que problemas de contagem simples podem ser introduzidos nas séries de Ensino Fundamental.

Sugerimos que os problemas a seguir sejam apresentados nas aulas que antecedam àquelas que trarão formalmente os conteúdos de análise combinatória e que sejam aplicados em um dos dois anos iniciais do Ensino Médio[10] ou até mesmo durante os dois anos finais do Ensino Fundamental, sem que se fale nos tradicionais conceitos de permutações e combinações. Aconselha-se ao professor, resolver problemas combinatórios, nesta faixa etária, usando abusivamente o principio fundamental da contagem.

Espera-se que o professor use os princípios aditivo e multiplicativo e deixe a mente do aluno livre para criar uma estratégia de resolução, sobretudo para compreenderem o que significa uma configuração e se a configuração encontrada serve como uma possível solução do problema.

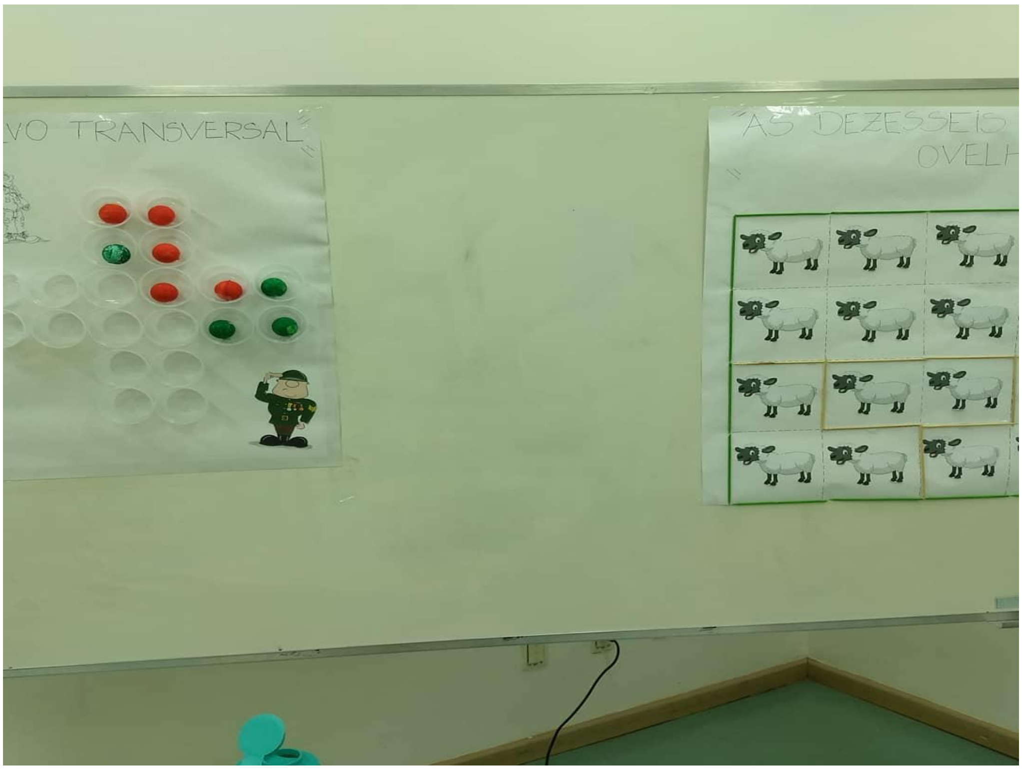
[10] Essas cinco atividades também podem ser realizadas com alunos de 9º ano que já tenham visto ou vão aprender os princípios aditivo e multiplicativo. Sugerimos também que o professor crie um quadro avaliativo segundo a sua experiência de sala de aula com suas turmas a fim de selecionar problemas a serem trabalhados por seus alunos que sejam compatíveis com seus estágios cognitivos a fim de não gerar ansiedade, desestímulo e desistência por parte dos discentes.

Haverá momentos em que a dificuldade de criar uma estratégia de resolução pelo aluno vai requerer a transformação do problema em um jogo combinatório, como foi o caso do problema “O Alvo Transversal” do livro de Dudeney na turma em que foi aplicado. Num segundo momento, o problema foi reapresentado em forma de jogo e o alvo e as balas foram apresentados de modo que cada equipe pudesse literalmente se sentir como um personagem.

Assim, analisar a jogada e pensar qual a melhor decisão a ser tomada tomou o mundo concreto e clareou a mente de muitos alunos que sequer havia compreendido o enunciado da questão. Neste momento, a experimentação foi o melhor ganho com a atividade. Os alunos conseguiram discutir entre eles, inclusive, qual deveria ser a melhor configuração de jogada. Esta estratégia deu a aula um dinamismo espetacular e os alunos conseguiram compreender melhor o problema, criar estratégias de solução e até mesmo sugerir mudança no enunciado.

O mesmo aconteceu com o problema “As dezesseis ovelhas”, em que os alunos puderam em equipe experimentar configurações e testá-las como estratégia de jogo. A presença “material” de palitos também foi importantíssima para testarem estratégias de jogadas pelos alunos.

Figura 22 - Representação das atividades “o alvo transversal” e “as dezesseis ovelhas”



Fonte: o autor (2019)

E para aqueles que não leem inglês? É possível usar desta estratégia para introduzir o raciocínio combinatório através da resolução de problemas? Claro que sim! Primeiramente deixamos com esta pesquisa esta contribuição, levando ao conhecimento dos colegas professores, os problemas traduzidos em seguida, apontamos o banco de questões que todo professor engajado deve acessar para estudos.

A maioria dos problemas que sugeriremos a seguir foi selecionada das provas e dos bancos de questões da OBMEP, ambos disponíveis no site *www.obmep.org.br*. O problema 9 é mais corriqueiro e serviu de pretexto para introduzir problemas de probabilidade oriundos da combinatória, uma vez que questionamentos do tipo “qual a probabilidade de acertarem 17 números?” ou “Justifique o fato de que a probabilidade de não se acertar qualquer número é igual à probabilidade de se acertarem os 20 números” ou “ O grupo deve explicar porque a probabilidade de acertar todos os números ou errar todos é aproximadamente 0,00000088%” podem ser inseridos em atividades de probabilidade.

Fazer uma seleção de exercícios de maneira a conseguir mesclar níveis de dificuldade diferentes, assim como fazer o aluno raciocinar mais ao longo das atividades para conseguir resolvê-las através de questionamentos constantes é uma tarefa importante que o professor precisa desenvolver.

Deve-se sempre lembrar que estas atividades são de caráter introdutório, logo, o foco na escolha de problemas que sejam resolvidos com os conhecimentos prévios dos alunos sobre os princípios aditivo e multiplicativo, bases da análise combinatória, necessita sempre estar presente na mente do professor. Este tipo de escolha em atividades iniciais reforça positivamente a aprendizagem da Matemática.

As soluções dessas atividades estão no anexo B deste trabalho. Contudo, os problemas de Dudeney (2005) apresentados no início desta pesquisa são incentivadores para que os professores possam criar estratégias que o permitam discutir tais problemas de maneira recreativa em suas salas. Além disso, tais problemas são fortemente encorajados a serem utilizados em sala de aula, mesmo que em um primeiro momento, pareçam muito difíceis para os alunos.

Sugere-se também que ambiências específicas sejam criadas para as aulas de resoluções de problemas e de desenvolvimento do raciocínio combinatório e que as situações apresentadas nos problemas sejam reproduzidas pelo professor a fim de que o aluno se familiarize com o texto e o compreenda de forma mais completa. Isto é, recursos visuais são extremamente bem vindos e materiais extras como papel em abundância para que os alunos rascunhem configurações são imprescindíveis. Criar relações entre imagens e configurações auxilia na resolução correta de problemas ou jogos combinatórios.

4.1 Sobre as experiências ao aplicar os problemas contidos no livro de Dudeney

ATIVIDADE 1

Em problemas como **Os Barris de Bálsamo**, apresentado por Dudeney (2005), a figura impressa para cada aluno (mesmo que a atividade seja feita em grupo), a imagem projetada no *data show* (ou em papel A3) para a discussão com a turma, canetas de várias cores e papel quadriculado facilitam o raciocínio e ajudam a organizar as configurações válidas.

Figura 23 - Os barris de bálsamo

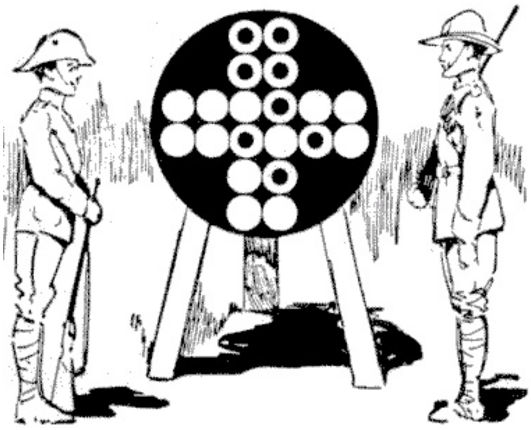
Fonte: DUDENEY (2005)

1. A figura impressa ajuda a compreender o texto e dialoga com o grupo;
2. Canetas de várias cores ajudam os alunos descobrir as configurações válidas a partir das restrições que o problema possui;
3. É possível identificar padrões algébricos através das composições gráficas obtidas através do uso da malha quadriculada que auxiliarão encontrar a solução final.

ATIVIDADE 2

A reprodução da figura da atividade intitulada o **Alvo Transversal**, permitirá que o grupo desenhe passo a passo as possíveis soluções e que o professor dialogue com a turma sobre possíveis tomadas de decisão equivocadas.

Figura 24 - O alvo transversal



Fonte: DUDENEY (2005)

Este é um problema que sugerimos ser adaptado pelo professor de modo que venha se tornar um Jogo Combinatório. A atividade pode ser feita de modo que um trio jogue contra outro. Note que vencer significa impedir que o outro monte e localize corretamente a sua configuração.

Nesta atividade pode-se inserir tempo da jogada para ficar ainda mais interessante. Optamos por reproduzir o alvo com copos descartáveis com suas bases coladas e os tiros representados por bolas de isopor de cores diferentes para diferenciar os tiros das equipes. As bolas fixavam-se nos copos porque havia fita gomada no interior do copo. Aconselha-se a intervenção do professor sempre que a configuração seja acertiva, discutindo com o grupo qual a estratégia pensada. Jogadas equivocadas devem ser incentivadas à correção pelos próprios alunos. Uma intervenção do professor neste caso, será bem vinda quando o grupo realmente não compreender que passo dar na jogada.

ATIVIDADE 3

Usar a estratégia da dramatização, com a confecção de um pequeno cenário em sala de aula engrandece enormemente a compreensão do problema **Os chapéus errados.**

Sugere-se a entrada dos alunos no recinto com os chapéus, colocá-los sobre a mesa e notar as configurações encontradas, estando elas corretas ou não no momento da “saída do bar”. A dramatização neste caso fixa e amplia o raciocínio matemático, oferece naturalmente maior criticidade à analise do problema e, havendo a possibilidade de filmar a atividade, o professor poderá discutir com seus alunos as tomadas de decisões equivocadas realizadas pelos grupos.

ATIVIDADE 4

Levar os alunos para discutirem o problema **Os cavaleiros do Rei Arthur** em ambientes virtuais de aprendizagem, com auxílio de softwares de geometria dinâmica como o Geogebra, abre um leque vastíssimo à releitura do texto e a soluções criativas do problema. A possibilidade de estabelecer a conexão deste problema com outras áreas da matemática como a geometria engrandece e sofistica a solução. Com este software há possibilidade de fixar pontos e medir distâncias, atividades muito positivas do ponto de vista da investigação matemática e da interdisciplinaridade de conteúdos dentro da própria Matemática.

Por exemplo, dispor pontos sobre uma circunferência representando os cavaleiros e o Rei e a partir deles trabalhar com as restrições que o problema oferece, encaminha o aluno à solução ao associar as distâncias entre os membros da mesa com distâncias entre vértices de um polígono inscrito numa circunferência. O uso de cores na determinação das cordas também auxilia bastante no encontro da solução do problema.

ATIVIDADE 5

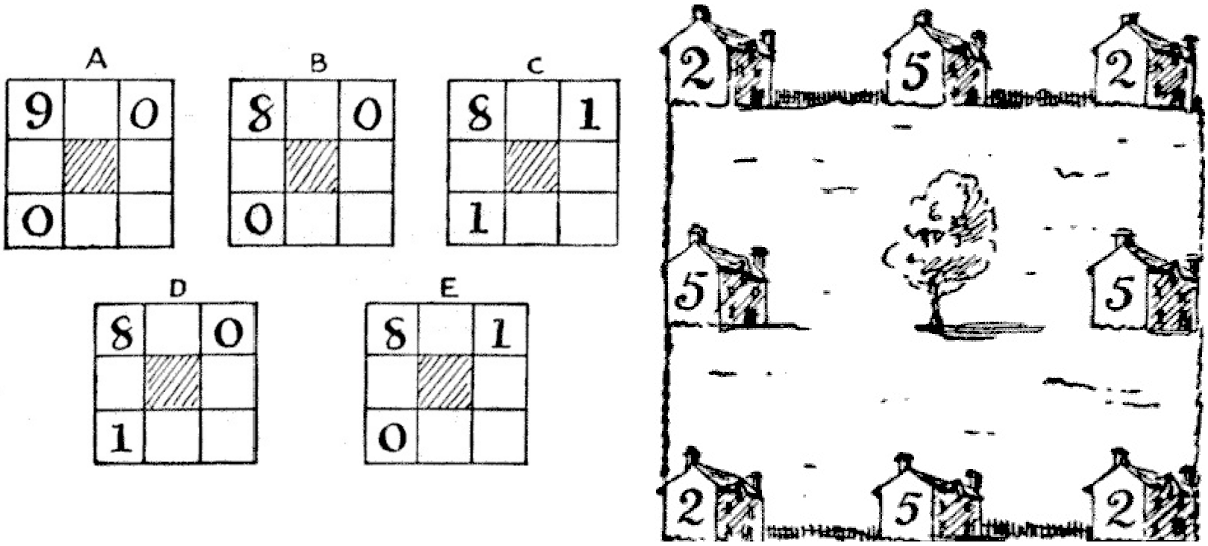
As oito casas é um problema que requer abstração, mas que o aparato visual auxilia muito na sua resolução. Os alunos nessa atividade precisam manipular as peças a fim de testar se as configurações obtidas satisfazem o problema.

A ideia é que a figura original que acompanha o problema seja mostrada e em seguida, após exploração textual feita pelo professor, venha a sugestão de dispor os dados em matrizes 3x3 como mostra a figura a seguir.

As peças a seguir podem ser reproduzidas com fita adesiva colorida sobre a mesa e os números escritos em quadrados de papel sulfite. É interessante que o professor entregue um pequeno molde para cada trio contendo as informações iniciais do problema para que o grupo tente montar o seu quebra-cabeças.

. O uso do celular para registrar sequências de configurações encontradas, pode auxiliar bastante o grupo que busca a solução do problema.

Figura 25 - Problema as oito casas e algumas soluções



Fonte: DUDENEY (2005)

Por compreender que o *raciocínio combinatório* é todo tipo de raciocínio que envolve contagem e que extrapola a simples possibilidade de enumeração das configurações presentes num dado conjunto, fica claro que o uso lógico-matemático dos princípios aditivo e multiplicativo associados à linguagem correta, além da prática de conjecturar segundo grupos de possibilidades que caracterizam uma solução para o problema, tudo isso de maneira sistemática e baseado em estratégia, possibilita a exibição correta de configurações que satisfazem um problema segundo um determinado critério.

A seguir, a lista de problemas sugeridos para aplicação em sala de aula, de maneira introdutória, inspirados nos problemas propostos por Dudeney (2005) e nas potencialidades que eles têm para despertar no aluno o interesse por combinatória.

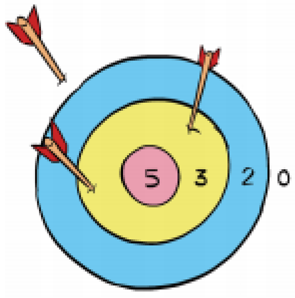
4.2 Sobre a possibilidade de aplicar a mesma estratégia em turmas regulares iniciantes ou desinteressadas

Neste caso, deixamos como sugestão, a adaptação de problemas contidos no banco de dados da OBMEP. O professor pode fazer uma seleção dos exercícios por níveis ou mesmo readapta-los para a realidade de sua turma. Vejamos o que é possível ser feito.

<u>ATIVIDADE 1</u> - Jogando dardos.

Michel pratica arco e flecha em um alvo como o da figura ao lado. Em cada rodada ele atira três flechas e sua pontuação, na rodada, é a soma dos pontos obtidos com cada flecha. Acertar as regiões interna, intermediária e externa vale, respectivamente, 5 pontos, 3 pontos e 2 pontos; errar o alvo vale zero ponto. Caso a flecha acerte uma linha que divide duas regiões, vale a maior pontuação dentre elas.

Figura 26 - Jogando dardos



Fonte: OBMEP, 2014

a) Michel somou 11 pontos em uma rodada. Quais foram os pontos obtidos com cada uma das três flechas?

b) Michel notou que poderia obter quase todas as pontuações de 0 a 15 em uma rodada. Quais são as pontuações impossíveis de se obter em uma rodada?

c) Michel somou 134 pontos em um treino. Explique por que houve pelo menos dez rodadas nesse treino.

<u>ATIVIDADE 2</u> - Colorindo algarismos.

Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura abaixo, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Figura 27 - Colorindo algarismos

Fonte: OBMEP (2012)

a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de $3 \times 2 \times 2$ maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?

b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3?

c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0?

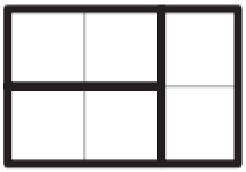
d) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

<u>ATIVIDADE 3</u> - Preenchendo o tabuleiro

Marcela quer brincar de preencher todas as casas de tabuleiros quadriculados com peças retangulares que ocupam exatamente duas casas dos tabuleiros.

a) A figura abaixo indica uma maneira de cobrir as casas de um tabuleiro 2x3 utilizando três peças. Quais seriam as outras maneiras para cobrir este mesmo tabuleiro?

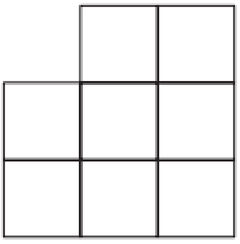
Figura 28 - exemplo de preenchimento de um tabuleiro 2x3



Fonte: OBMEP (2017)

b) De quantas maneiras Marcela pode preencher o tabuleiro abaixo utilizando quatro peças?

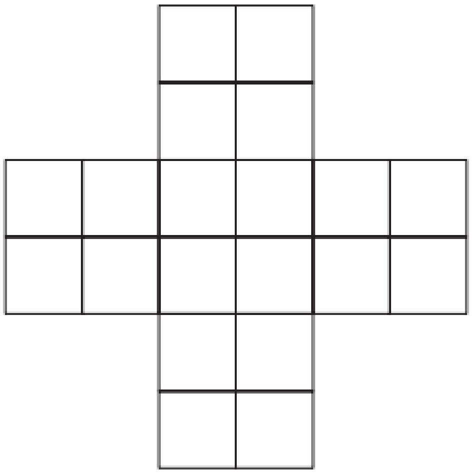
Figura 29 - tabuleiro de 8 casas



Fonte: OBMEP (2017)

c) De quantas maneiras Marcela pode cobrir o tabuleiro abaixo utilizando 10 peças?

Figura 30 - tabuleiro com 20 casas



Fonte: OBMEP (2017)

<u>ATIVIDADE 4</u> - A competição matemática (Banco de Questões OBMEP 2017)

Um grupo de 10 estudantes participa de uma competição de matemática formada por equipes de 4 estudantes. Sabemos que quaisquer duas das equipes possuem exatamente um estudante em comum.

a) Qual o número máximo de equipes de que um estudante pode participar? Forneça um exemplo de distribuição de 10 alunos onde este número máximo possa ser verificado.

b) A competição pode possuir 8 equipe?

<u>ATIVIDADE 5</u> - Pintura de naturais (Banco de questões OBMEP 2017)

Os números inteiros do conjunto {1,2,...,20} serão pintados com duas cores, branco e preto, de modo que ambas as cores sejam usadas. Além disso, o produto dos números de uma cor não deve possuir fatores primos em comum com o produto dos números da outra cor. De quantos modos isso pode ser feito?

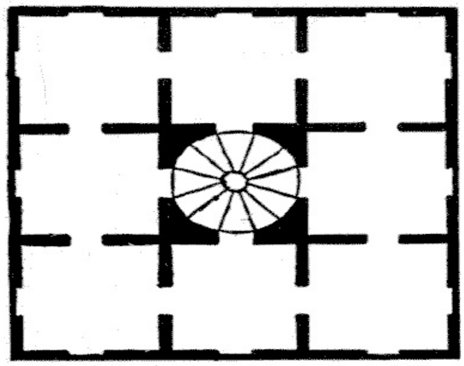
4.3 Adaptações dos problemas para turmas de aprofundamento

Há problemas que necessitam de conhecimentos mais abrangentes e de raciocínio abstrato mais apurado. Estes problemas podem ser aplicados em grupos de iniciação científica juniores em matemática, em clubes de matemática, turmas especiais, turmas olímpicas ou turmas de aprofundamento existentes nos colégios. Os problemas colocados aqui são direcionados aqueles alunos que demonstram interesse mais intenso pela Matemática, pela resolução de problemas e que trabalham bem em grupo

<u>ATIVIDADE 1</u> - O dormitório das freiras.

Num certo convento, havia oito grandes dormitórios em um andar, acessados por uma escadaria em espiral no centro, como mostra nosso plano. Em uma inspeção realizada na segunda-feira pela abadessa, descobriu-se que o lado sul do dormitório era tão preferido que seis vezes mais freiras dormiam no lado sul que em cada um dos outras três. Ela se opôs a essa superlotação e ordenou que ela fosse reduzida. Na terça-feira, ela descobriu que cinco vezes mais dormiam no lado sul do que em cada um dos outros lados. Mais uma vez ela reclamou. Na quarta-feira, ela encontrou quatro vezes mais no lado sul, na quinta-feira três vezes mais, e na sexta-feira, o dobro. Incitando as freiras a mais esforços, ela teve o prazer de sabe que, no sábado, um número igual de freiras dormiu em cada um dos quatro lados do dormitório. Qual é o menor número de freiras que poderia ter existido, e como eles poderiam ter se organizado em cada uma das seis noites? Nenhuma sala pode estar desocupada.

Figura 31 - O dormitório das freiras



Fonte: DUDENEY (2005)

<u>ATIVIDADE 2</u> – No Rio

Era um dia quente de verão, mas o inspetor Varnicke estava trabalhando. Infelizmente, ele não estava sentado em um escritório cheio de coisas. O detetive, junto ao seu assistente, estava perseguindo um criminoso perigoso. Seguindo seus passos, eles se encontraram a beira de um rio pequeno, porém extremamente profundo e com uma forte correnteza. O inspetor e seu assistente viram quatro banhistas, se aproximaram deles e perguntaram se haviam visto um homem que possui aproximadamente a sua idade e que deveria estar por perto. Os banhistas falaram que ele passou recentemente por eles, correndo. E apontando para o outro lado do rio, mostraram ao inspetor, o fugitivo bem defronte ao grupo. O homem ofereceu o seu bote a Varnicke, que recusou. O inspetor deixou o suspeito escapar e disse: “- Eu quero conhecer, você!”

a) Por que o inspetor decidiu abandonar o fugitivo e concentrar atenção nos garotos banhistas?

b) De quantas maneiras distintas o inspetor pode apontar o fugitivo?

ATIVIDADE 3 – Diagonais de um polígono

Uma diagonal é um segmento de reta que une os vértices não consecutivos de um polígono. O teu grupo receberá um pentágono convexo, um octógono convexo, um decágono convexo e um pentágono côncavo. Com o auxilio de um barbante e percevejos, indique as diagonais que estes polígonos possui.

Tabela 4 - relação entre o polígono e o seu número de diagonais

POLÍGONO	NÚMERO DE DIAGONAIS
Pentágono convexo	
Octógono Convexo	
Decágono Convexo	
Pentágono Côncavo	
Pentacontágono Convexo	

Fonte: o autor (2019)

Use argumentos combinatórios para justificar que o número de diagonais de um polígono qualquer de n lados é dado por $\frac{n.(n-3)}{2}$

ATIVIDADE 4 - Sorte ou azar?

Numa loteria de um país X, um apostador escolhe 50 números entre os 100 números naturais existentes de 1 a 100. A aposta de 50 números é única e custa R$ 1,50. O resultado do sorteio é um conjunto formado por 20 números. Há prêmios para quem acerta 16, 17, 18, 19, 20 ou nenhum número.

a) De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio desta loteria?

b) De quantos modos distintos um apostador pode escolher as 50 dezenas que serão assinaladas?

c) Determine o número distinto de possibilidades de acertar 17 números.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho emerge do gosto pessoal pela análise combinatória e por ser uma disciplina que repousa sobre as estruturas lógicas e aritméticas, além de possibilitar analisar o desenvolvimento cognitivo do aluno do Ensino Médio ao longo da aplicação das atividades.

Alguns professores ficam presos às fórmulas já prontas como se este tema fosse restrito a desenvolver e simplificar fatoriais ou taxar problemas em tipos, como se muitas vezes não houvesse mistura de ideias ou simplesmente o não cabimento de uma fórmula que resolva tudo, como esperam aqueles mais imediatistas frente à Matemática. Há também as mesmices na introdução ao estudo da combinatória como os já batidos problemas cujas configurações são subconjuntos de um produto cartesiano, como o famoso “de quantas maneiras posso andar vestido usando uma camisa e uma calça de tenho três camisas e duas calças?”

Pretende-se, com o que foi exposto, mostrar que a análise combinatória é mais interessante do que muitos alunos e professores possam pensar e tentar justificar, pois permite transformar as salas de aula em espaços de discussões matemáticas, de produção matemática e de produção de conhecimento matemático através de diferentes estratégias didáticas.

Embasados teoricamente por referenciais bibliográficos diversos, calcados na psicologia da aprendizagem e na didática, a proposta desta pesquisa tenta contribuir para libertar muitos professores do peso de desenvolver o conteúdo de análise combinatória de maneira tensa e vista como desagradável por uma grande quantidade de alunos.

Claro que esta pesquisa não se coloca do lado oposto daqueles que defendem o uso de fórmulas, pelo contrário, elas são muito úteis nas resoluções de problemas de contagem, pois agilizam os cálculos. Todavia, seu uso indiscriminado, sem saber o motivo pelo qual está sendo usada ou a sua origem, apenas reforça a ideia errônea de como pode-se desenvolver este conteúdo em sala de aula.

Busca-se com esse trabalho, além de tudo o que já foi exposto anteriormente, eliminar a famosa decoreba ou tentar enquadrar problemas num tipo específico que se resolve com uma determinada estratégia X, isto é, por ter enquadrado o problema em uma determinada classe de problemas, busca-se sempre uma fórmula ou uma maneira conhecida de resolução a este “tipo” de problema em detrimento do raciocínio, do entendimento e do encadeamento lógico que leva à solução.

Apontam-se, também de maneira crítica, falhas no ensino e sugerem-se contribuições de mudanças das práticas do professor para que não esterilize a criatividade do discente nem prenda-o em uma gaveta repleta de fórmulas mágicas a serem utilizadas. O uso das fórmulas ou tentativa de padronizar problemas não deve ser o início, mas sim o fim de um pensamento lógico que foi despertado pelo professor, construído e consolidado em sala de aula.

Acreditamos que este trabalho, tenha alcançado o seu intuito: incentivar e auxiliar docentes numa nova prática em sala de aula, baseada na resolução de problemas, de uma maneira mais leve para o aluno, tendo como pano de fundo a análise combinatória.

Evitando as definições usuais de fatoriais, arranjos, permutações e combinações e prezando pelas atividades e problemas motivadores que façam o aluno entender, antes de tudo, a maneira de se pensar análise combinatória, permitindo até que futuramente ele mesmo consiga deduzir as fórmulas ou então compreendê-las de maneira melhor, em estágios mais avançados. Agrega-se também a estes objetivos o despertar do aluno para um momento onde ele possa pensar e fazer matemática ainda na escola básica.

A teoria da aprendizagem significativa se fez presente no texto como um forte embasamento teórico para sugestões de desenvolvimento de atividades, assim como foi sugerido que o aluno protagonize todos os momentos em que se vê desafiado a resolver problemas em sala de aula.

Esperamos que essa discussão não se encerre neste trabalho e que mais professores venham contribuir de alguma forma, dando opiniões e sugestões, aplicando as atividades propostas aqui em sala de aula, aprimorando tais atividades, aproveitando da melhor maneira possível o que aqui está lançado, para um bem comum a todos nós professores e alunos, assim como para o bem do ensino e da aprendizagem da Matemática de maneira plena e segura.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Adriane L.; FERREIRA, Ana C. **Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória com Ênfase na Comunicação Matemática**. Ouro Preto. 2010. Disponível em https://www.ppgedmat.ufop.br/index.php/producao/produtos. Acessado em 15 de junho de 2017.

ALVES, R. de Carvalho. **O ensino de Análise Combinatória na educação básica e a formação de professores**. 2012. 176 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

AQUINO, C. de Alencar. **Introduzindo o Pensamento Combinatório nos Anos Finais do Ensino Fundamental**: uma proposta de ensino. 2013. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Vale de São Francisco, Juazeiro, Bahia, 2013.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: what makes it special? **Journal of teacher educacion,** SAGE publications, v.59, n.5, p. 389-407, 2008.

BIERMAN, H. S.; FERNANDEZ, L. **Teoria dos Jogos**. 2ª Ed. Wisconsin: Pearson, 2011.

BIGGS, N.L. **The Rootsof Combinatorics**. Royal Holloway College. University of London, Egham. England. Summaries

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação**.** Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, SEF, 1998.

DORNELLAS, Augusto C. B. **Resolução de problemas em análise combinatória: um enfoque voltado para alunos e professors do ensino médio**. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃLO MATEMÁTICA, 2004. Recife/PE. Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

DUDENEY, Henry Ernest. **Amusements in Mathematics**. Ebook. Setembro. 2005. Disponível em https://www.gutenberg.org/files/16713/16713-h/16713-h.htm. Acessado em 12 de julho de 2017.

FERNANDES, Elisângela. **David Ausubel e a aprendizagem significativa**. Pensadores da Educação, Nova Escola, Brasil, edição 248, 01 de dezembro de 2011.

GUZMÁN, Miguel de. **Aventuras Matemáticas**. Lisboa: Ed. Gradiva, 1990.

JULIANELLI, J. Roberto; DASSIE, B. Alves; LIMA, M. L. Alves de. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade**: aprendendo com a resolução de problemas. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2009.

LIMA, Itatiane B. **Aulas de Combinatória no Ensino Médio: como estão ocorrendo**. 2016. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

MORGADO, A. César et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MALERMO, Carlos H. S. **Motivando alunos para Análise Combinatória**. 2012. 40 f. Trabalho de Conclusão do curso superior de Licenciatura em Matemática. Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, São Paulo, 2012.

MOTA, P. C. C. L. de Moura. **Jogos no ensino da Matemática**. 2009. 142 f. Dissertação (Mestrado em Matemática/Educação) - Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia, Universidade Portucalense Infante D. Henrique, Portugal, 2009.

PEDRO NETO, J.; SILVA, J. N. **Mathematical Games, Abstract Games**. United States: Dover Publications, 2013.

PICADO, Jorge; MARTINS, P. Mendes. Matemática Recreativa - Cinco tributos a Martin Gardner. **Boletim da SPM**, Lisboa, n. 71, p. 97 - 111, dezembro, 2014.

PINHEIRO, C. A. de Miranda; SÁ, P. F. de. **O ensino de análise combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes**. Sociedade Brasileira de Ensino da Matemática. Abril, 2007. Disponível em http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC37047990259T.doc. Acesso em 17 de julho de 2018.

PÓLYA, G. **O ensino por meio de problemas**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 7, 1995.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

REIS, A. M. dos. **A Matemática Egípcia - Solução de alguns problemas algébricos do papiro de Rhind**. 2018. 58 f. Trabalho de Conclusão do curso superior de Licenciatura em Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2018.

ROCHA, Cristiane de A.; SILVA, José J. da. **Análise das orientações do ensino de combinatória aos professores através do livro didático**. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 3., 2016, Natal/RN. **Anais** [...]. Natal/RN: Universidade Estadual da Paraíba, 2016.

RODET, M. **Les prétendus problème d’algébre**. Journal Asiatique, Paris, série 7, 1881.

SHULMAN, L. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. **Profesorado. Revista de currículum y formación del professorado, Universidade de Granada**, v. 9, n. 2, p. 1-30, 2005.

SILVA, J. Nuno. **O Livro de Jogos de Afonso X, o Sábio**. Lisboa: Apenas Livros. 2013.

SILVA, J. M. Nunes; RODRUIGUES, R. S. da Silva; RODRIGUES, M. Urel. **Análise Combinatória na formação inicial de professores de Matemática**. Eixo 01: Políticas e práticas de formação inicial de professores de Matemática. Universidade Estadual do Mato Grosso, Mato Grosso, 2018.

SILVA, Andresso; SILVA, Thalytta C.; Silva, Aureli M. **Resolução de problemas de combinatória utilizando material didático e um simulador interativo.** In: 13º SIAT e 5º SERPRO, 2017, Goiânia/GO. Universidade Federal de Goiás, 2017.

SANTANA, E.; ALVES, A. A.; NUNES, C. B. A teoria dos campos conceituais num processo de formação continuada de professores. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1162-1180, dez. 2015.

TEIXEIRA, R. Costa. Jogos Combinatórios e Números Surreais. In: COLÓQUIO DA REGIÃO SUDESTE, 2., 2013, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: **Sociedade Brasileira de Matemática,** 2013.

TEIXEIRA, Anabela; SILVA, Jorge Nuno. Histórias de Jogos Matemáticos: o caso da *Metromachia*, para o ensino da Geometria. **HISTEMAT** - Revista de História da Educação Matemática, São Paulo, n. 2, p. 239 - 263, 2016.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques – RDM**, Grenoble, v. 10, n. 2-3, p. 133 – 170, 1990.

OBMEP. 2012. Disponível em: www.obmep.org.br. Acesso em: 05 nov. 2018.

OBMEP. 2014. Disponível em: www.obmep.org.br. Acesso em: 05 nov. 2018.

OBMEP. 2017. Disponível em: www.obmep.org.br. Acesso em: 05 nov. 2018.

APÊNDICE A - UMA SOLUÇÃO CRIATIVA DE UM ALUNO

Durante esta pesquisa sobre problemas e situações envolvendo pensamentos combinatórios para expor neste trabalho, foi imperioso aplicar alguns deles com alunos do Ensino Médio a fim de adquirir materiais para analise, confronto com a teoria e exemplificar ou justificar colocações. Um destes problemas em especial chamou à atenção de todos aqueles que tentavam resolvê-lo, pela simplicidade do enunciado e pela complexidade em encontrar a solução, a saber, o problema intitulado ***A armadilha para o rato***.

Em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola privada na zona norte do Rio de Janeiro, um aluno se destacou perante os outros pelos tipos de indagações feitas durante este ano letivo, pela sua curiosidade sobre os porquês de muitos resultados matemáticos e pela sua disposição em pesquisar e aprender sobre qualquer assunto que lhe desperte interesse. Por este motivo decidimos lhe apresentar o problema, deixando-o à vontade para resolvê-lo da forma que preferisse.

A fim de recordar, segue abaixo novamente o problema.

A ARMADILHA PARA RATO

Numere cartões com números de 1 a 21 e coloque-os em círculos, como na figura abaixo. Atrás de cada cartão está escondido um rato e o objetivo é capturar todos. Para capturar um rato, deve-se escolher uma carta qualquer e chamá-la de "um", então a partir dela, começar a contagem "um, dois, três", no sentido horário, até o momento em que sua contagem coincida com o número do cartão. Quando isso ocorrer, você capturou o rato e retira esta carta no círculo e recomeça a contagem pela próxima carta. Por exemplo, caso escolha-se a carta 18, chamando-a de "um", a captura seria na carta 19, que seria removida, a próxima seria na carta 10 e depois, na carta 1. Daqui em diante não tem mais como fazer capturas.

Com a arrumação desse jeito (figura 6) é impossível capturar todos os ratos, mas podem-se fazer quaisquer duas cartas trocarem de lugar, por exemplo, trocar o 1 com o 17, ou o 10 com o 12. Pergunta-se, qual troca deveria ser feita para conseguir, começando do lugar certo, capturar todos os ratos?

Com esta experiência pudemos perceber como, muitas vezes, um problema ou uma situação não usual pode despertar o interesse do aluno em resolvê-lo(a) e proporcionar soluções criativas, inesperadas e surpreendentes. Neste caso, especificamente, Henrique começou a resolver o problema por tentativas até que, segundo ele, observou algum padrão, que não conseguiu explicitar claramente, mas que seria muito difícil de determiná-lo matematicamente recorrendo a algum tipo de fórmula.

Por isso, resolveu criar um programa no computador[11], utilizando a linguagem *Phyton*, a fim de montar todas as configurações possíveis e encontrar aquelas que são as soluções. Claro que o aluno já tinha um conhecimento anterior de linguagem computacional que aprendeu sozinho, simplesmente por curiosidade e por razões particulares não reveladas, o que não tira o seu mérito de ter conseguido construir o programa, resolver o problema e, principalmente, usar a sua inata perspicácia para perceber que o método computacional era o caminho mais rápido e seguro para explicitar todas as soluções desta situação-problema.

Isso se dá devido à agilidade que a máquina tem para rodar o programa e montar as configurações. Uma pessoa conseguiria fazer o mesmo trabalho que a máquina, entretanto levaria muito mais tempo, além da possibilidade de perder alguma configuração. O computador fez todas as trocas de duas cartas possíveis e para cada troca escolheu uma carta e começou a contagem como pede o enunciado. Com isso, a máquina conseguiu varrer todas as configurações possíveis encontrando as soluções do problema em minutos, e obviamente, encontrar a solução esperada.

[11] Os comandos do programa computacional montado pelo aluno estão, em sua íntegra, no anexo A deste trabalho.

ANEXO A - A SOLUÇÃO COMPUTACIONAL DO ALUNO HENRIQUE

```
import os

arquivo = open(f'{os.path.abspath(__file__)}armadilha.txt', 'w')
lista = [20, 2, 19, 21, 5, 18, 8, 11, 16, 9, 12, 4, 10, 1, 14, 15, 17, 3, 7, 13, 6]

def ativador(inicio, lista_):
    tamanho_da_lista = tamanho = len(lista_)
    lista_[inicio:], lista_[:inicio] = lista_[:inicio], lista_[inicio:]

    if not tamanho:
        return 0

    maximo = max(lista_)

    if tamanho == 21:
        arquivo.write('\n')
        print('\n')

    contador = c = 0
    finalizado = False
    while not finalizado: # while not done
        if c > maximo:
            finalizado = True

        i, c = lista_[c % tamanho], c + 1
        if i == c:
            print(lista_, f't={tamanho}: {lista_[0]}->{i}')
            arquivo.write(f'{lista_}, t={tamanho}: {lista_[0]}->{i}\n')

            endereco = lista_.index(i)
            lista_.remove(i)
```

```
            return ativador(endereco, lista_)

    return 0

def trocador(endereco, lista_, lista_principal=lista):
    for i in range(len(lista_)):
        lista_ = lista_principal.copy()
        lista_[endereco], lista_[i] = lista_[i], lista_[endereco]
        arquivo.write(f'{lista_[endereco]} -> {lista_[i]}\n')
        print(f'{lista_[endereco]} -> {lista_[i]}')
        yield lista_

def main():
    for i in range(len(lista)):
        for j in trocador(i, lista.copy()):
            for k in range(len(j)):
                ativador(k, j.copy())
                print('-'*len(j))
    return 0

if __name__ == '__main__':
    main()
    os.system('pause')

arquivo.close()
```

ANEXO B - SOLUÇÕES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

ATIVIDADE 1 - Jogando dardos

a) Só há um modo de atingir a pontuação máxima, atingindo o avo 3 duas vezes e o alvo 5 uma vez.

b) É impossível obter as pontuações 1 e 14 em uma rodada. Basta fazer todas as maneiras de escolher três números dos quatro possíveis, podendo haver repetições. São elas:

$0+0+0=0$	$3+2+0=5$	$5+3+0=8$	$5+5+0=10$
$0+0+2=2$	$3+3+0=6$	$3+3+2=8$	$3+3+5=11$
$0+0+3=3$	$2+2+2=6$	$2+2+5=9$	$5+5+2=12$
$2+2+0=4$	$2+2+3=7$	$3+3+3=9$	$5+5+3=13$
$0+0+5=5$	$5+2+0=7$	$5+3+2=10$	$5+5+5=15$

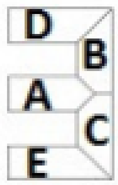
c) Bom, se ele fosse muito bom de pontaria conseguiria acertar sempre no alvo de valor 5, obtendo 150 pontos em 10 rodadas $(15 \times 10 = 150)$. Como obteve 134, sabemos que não conseguiu obter 15 em todas as rodadas, entretanto ele também não deixou de obter 15 pontos em alguma(s) rodada(s), pois caso isso ocorresse ele somaria no máximo $13 \times 10 = 130$. Então na melhor das hipóteses, suponha que ele tenha conseguido obter soma 15 no maior número de rodadas possíveis. Fazendo a divisão de 134 por 15, tem-se que $134 = 15 \times 8 + 14$, isto é, ele conseguiu somar 15 em 8 rodadas e somou 14, no mínimo, em mais 2 rodadas (pois não tem como obter soma 14 de uma só vez). Logo, houve pelo menos 10 rodadas.

ATIVIDADE 2 - Colorindo algarismos.

a) Há 3 maneira de escolher a cor de uma região e, feito isso, há duas maneiras de escolher a cor da outra região. Pelo princípio multiplicativo há $3 \times 2 = 6$ possibilidades.

b) Há 3 maneiras de escolher a cor da região D; feito isso, a há duas maneiras de escolher a cor da região B; feito isso, há 2 maneiras de escolher a cor da região A; feito isso, há 1 maneira de escolher a cor da região C (pois esta é vizinha de A e de B); feito isso, há 2 maneiras de escolher a cor da região E. Pelo princípio multiplicativo, tem-se no total $3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 = 24$ possibilidades.

Figura 32 - Solução da atividade 2 (letra c)



Fonte: OBMEP (2012)

c) Neste problema precisa-se dividir a pintura em dois casos.

- Um par de regiões opostas com a mesma cor: há 3 maneiras de pintar as regiões opostas; feito isso, há 2 maneiras de escolher a cor de cada uma das duas regiões que sobraram. Pelo princípio multiplicativo, tem-se neste caso $3 \times 2 \times 2 = 12$ possibilidades.
- Um par de regiões opostas com cores distintas: há 3 maneiras de escolher a cor de uma região e 2 maneiras de escolher a cor da região oposta; feito isso, resta apenas 1 cor possível para colorir as regiões que sobraram. Pelo princípio multiplicativo, tem-se neste caso $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ possibilidades.

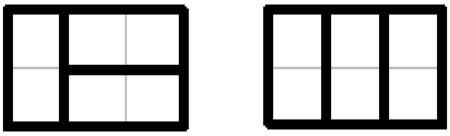
Portanto, pelo princípio aditivo, o total de maneiras para colorir o algarismo zero é $12 + 6 = 18$ possibilidades.

d) Para pintar o algarismo 2 há $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras distintas e as possibilidades para colorir os outros algarismos já foram calculadas anteriormente. Então, pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades para colorir o número 2013 é dado por $12 \times 6 \times 24 \times 18 = 31.104$.

ATIVIDADE 3 - Preenchendo tabuleiros

a) As duas possibilidades restantes são

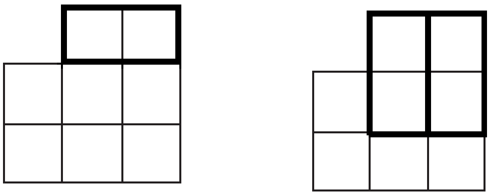
Figura 33 - Solução da atividade 3 (letra a)



Fonte: OBMEP (2017)

b) Começando por preencher os dois quadrados superiores, têm-se 2 possibilidades, como na figura a seguir. Para a primeira possibilidade (imagem à esquerda) há apenas 1 maneira de preencher o restante dos quadrados. Para a segunda possibilidade (imagem à direita) os quadrados recaem no item anterior, ou seja, 3 maneira. Portanto, ao todo há 4 possibilidades de preencher a figura.

Figura 34 - Solução da atividade 3 (letra b)

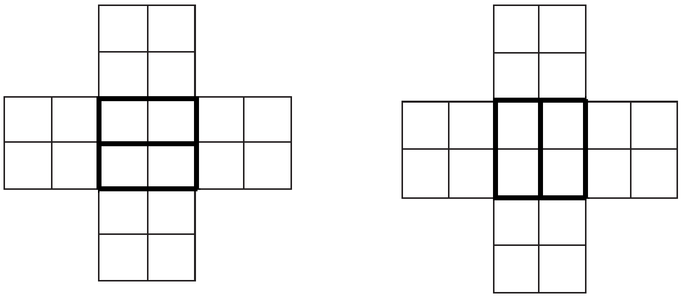


Fonte: OBMEP (2017)

c) Começando por preencher os quatro quadrados do meio, têm-se 3 possibilidades Para a primeira possibilidade só há 2 maneiras de preencher os quadrados centrais. Após preenchidos, sobram 4 quadrados 2x2 iguais ao central, ou seja, cada um deles pode ser preenchido também de 2 maneiras.

Dessa forma, o número total de possibilidades é dado por $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

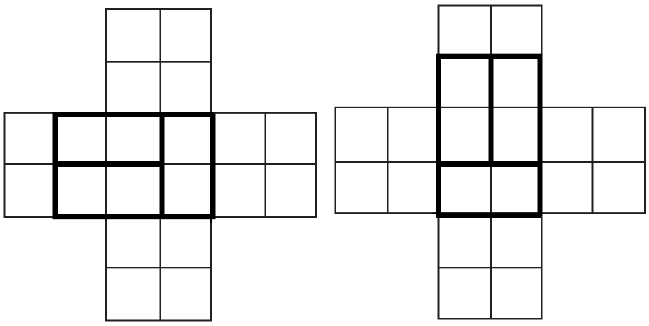
Figura 35 - Solução da atividade 3 (letra c, 1º caso)



Fonte: OBMEP (2017)

Para a segunda possibilidade, há 4 maneiras de preencher os quadrados centrais (na figura abaixo aparecem 2 das 4 maneiras). Feito isso, em um dos extremos há 1 maneira de preencher os quadrados restantes e nos outros 3 extremos, 2 maneiras para cada um deles. Portanto , nesse caso o total de possibilidades é dado por $4 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

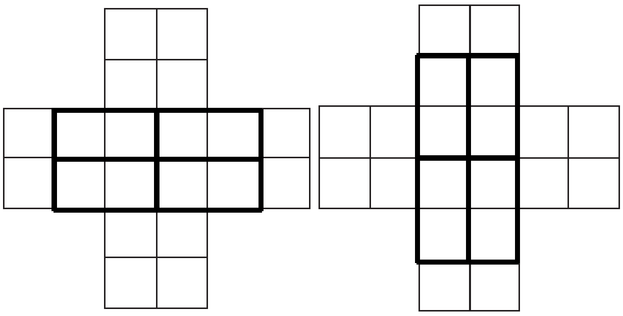
Figura 36 - Solução da atividade 3 (letra c, 2º caso)



Fonte: OBMEP (2017)

Para a terceira possibilidade, há 2 maneiras de preencher os quadrados centrais, como mostra a figura abaixo. Preenchidos esses quadrados, sobram 2 extremos que podem ser preenchidos apenas de 1 maneira e outros dois extremos que podem ser preenchidos de 2 maneiras cada um. Logo, nesse caso o total de possibilidade é dado por $2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 8$.

Figura 37 - Solução da atividade 3 (letra c, 3º caso)



Fonte: OBMEP (2017)

Portanto, o número total de possibilidades para preencher a figura é $32 + 32 + 8 = 72$ possibilidades.

ATIVIDADE 4 - Competição matemática

a) Considere um estudante A que participa do maior número de equipes e digamos que ele esteja em uma equipe com os três estudantes B, C e D. Qualquer outra equipe que também tenha A como um de seus membros, deverá conter outros três estudantes que não estão no conjunto $\{B,C,D\}$. Como existem apenas $10 - 1 = 9$ estudantes diferentes de A, o número máximo de equipes que podem conter A é $\frac{9}{3} = 3$. Um exemplo de distribuição de 10 estudantes, representados pelas letras do conjunto $\{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J\}$, é

A B C D

A E F G

A H I J

Cada linha indica uma equipe e todas elas possuem apenas o estudante A em comum.

b) Suponhamos, por absurdo, que possam existir 8 equipes. Como cada uma delas possui 4 estudantes, teremos ao todo pelo menos $8 \times 4 = 32$ participações de alunos, contadas com repetições. Dado que existem apenas 10 estudantes e $\frac{32}{10} > 3$, pelo menos um estudante deverá participar de 4 equipes. Isso contradiz o item anterior e esse absurdo mostra que não podemos ter 8 equipes.

ATIVIDADE 5 - Pintura de naturais

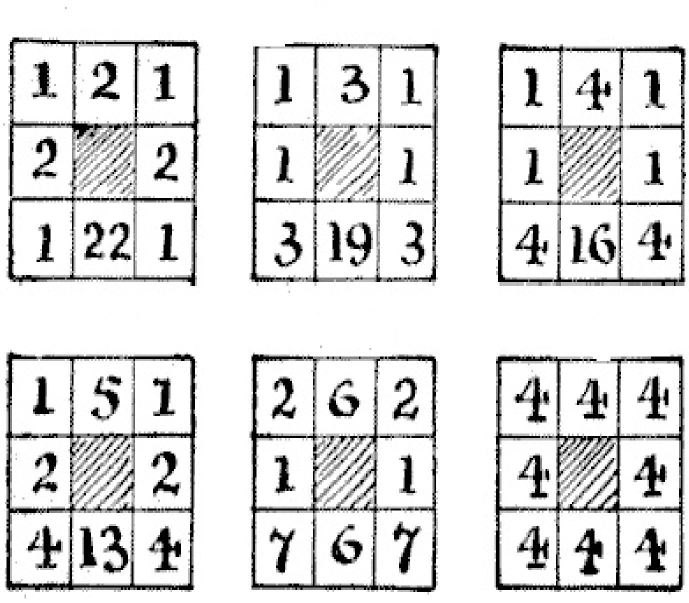
Independente das cores escolhidas para os outros números, temos duas opções de escolha para a cor do número 1. Temos também duas opções para a cor do número 2 e, uma vez que ela tenha sido escolhida, todos os números do conjunto {4,6,8,10,12,14,16,18,20} devem possuir a mesma cor do número 2. Como existem números desse conjunto que compartilham fatores primos em comum com os números do conjunto {3,7,9,15}, estes 4 números ímpares também devem possuir a cor do número 2. Resta escolhermos a cor dos números do conjunto {11,13,17,19} e cada uma delas pode ser feita de modo independente, pois não existe outro número no conjunto inicial com esses mesmos fatores primos. Assim, o total de pinturas é $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$.

ANEXO C - ADAPATAÇÕES DOS POBLEMAS PARA TURMAS DE APROFUNDAMENTO

ATIVIDADE 1 - O dormitório das freiras

A figura a seguir mostra a disposição de cada noite. Na primeira fileira, da esquerda para a direita, mostram as arrumações de segunda-feira, terça-feira e quarta-feira, respectivamente, enquanto na segunda fileira, também da esquerda para a direita, as arrumações de quinta-feira, sexta-feira e sábado. O número mínimo de freiras é 32.

Figura 38 - Solução da atividade 6



Fonte: DUDENEY (2005)

ATIVIDADE 2 - No Rio

Como o rio era muito caudaloso e extremamente fundo, qualquer pessoa que tentasse atravessá-lo morreria certamente. Logo, o fugitivo estava exatamente na frente do inspetor. Assim, usando o principio aditivo, o inspetor poderia acusar o fugitivo de 4 maneiras.

ATIVIDADE 3 – Diagonais de um polígono

Este problema testa o conhecimento da natureza da configuração. Note que ao traçarmos uma diagonal de um polígono a partir de um vértice fixo A, por exemplo, AC é o mesmo que aquele determinado a partir do vértice C em direção a A. Ou seja, a ordem de escolha para determinar a configuração não faz a diferença, a configuração AC ou a configuração CA são as mesmas. O problema então se reduz a descobrir quantas combinações simples dos n vértices tomados dois a dois podemos encontrar, excluindo obviamente os segmentos que não são diagonais, mas sim lados do polígono. Isto é $\frac{n!}{(n-2)!.2!} - n = \frac{n(n-3)}{2}$. Um polígono de 50 lados possui 1175 diagonais.

ATIVIDADE 4

a) O aluno deve escolher entre 100 números, 20, assim a quantidade de resultados distintos da loteria é dado por $\frac{100!}{80!20!}$
b) Trata-se de escolher 50 entre os 100 números disponíveis, sem importar a ordem, isto é, devemos formar um subconjunto de 50 números escolhidos entre os 100 disponíveis que é obtido por $\frac{100!}{50!50!}$
c) Para acertar os 17 números é necessário que aposta contenha 17 entre os 20 números que serão sorteados **e** os demais 33 número entre os 80 que não serão sorteados. O número de maneiras disso ocorrer é $\frac{20!}{17!3!}\ x\ \frac{80!}{33!47!}$