Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Conjecturas em Teoria dos Números e suas Histórias †

por

Jucélio de Barros Souza

sob a orientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maio/2019
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Conjecturas em Teoria dos Números e suas Histórias

por

Jucélio de Barros Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro -UFPB (Orientador)

Prof.Dr. José Carlos de Albuquerque Melo Júnior - UFPE

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB

Maio/2019

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer ao bom Deus, por ter permitido mais essa conquista tão sonhada, em minha vida acadêmica e pessoal.

Aos meus pais, Lourinaldo Carvalho de Souza e Maria Teólia de Barros Souza, por em sua simplicidade terem me ensinado valores fundamentais para acreditar e realizar mais esse sonho, que certamente é deles também.

Aos meus irmãos, Joselma, Joseilson, Joseane, Josenilson, Josicleia, Jacó e Jeremeias, que sempre torceram e acreditaram em mim.

A minha noiva, Ana Flávia, pela paciência, compreensão e apoio durante esse curso.

Aos meus sobrinhos e sobrinhas, que buscam em minha trajetória acadêmica e profissional, um incentivo para suas realizações.

As minhas tias, Josefa de Souza e Maria José, por terem me dado apoio, me acolhendo em suas residências, permitindo assim chegar até aqui.

Aos professores do PROFMAT - UFPB, responsáveis pela transmissão de conhecimentos, tornando esse momento possível.

Ao meu orientador, Professor Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro, pela paciência e disponibilidade, para a concretização desse trabalho.

Aos meus amigos de curso, das turmas de 2014 e 2017, em especial, José Ivelton e Mailson Alves, respectivamente, pela parceria e incentivo, nos momentos mais difíceis.

A todos que de uma forma direta ou indiretamente, contribuíram para a conquista desse objetivo.

Dedicatória

A todos que torceram e acreditaram na realização desse sonho.

Resumo

Numa abordagem histórica, algumas conjecturas interessantes e intrigantes em Teoria dos Números serão estudas nesse trabalho. A conjectura de Goldbach, uma das mais famosas na matemática, por nunca ter sido provada, embora muitos matemáticos antigos e contemporâneos já fizeram muito esforço na busca de uma solução para esse problema. Outras conjecturas mencionadas como a de Collatz, dos Primos Gêmeos, Primos em Progressão Aritmética, assim como os Números Perfeitos e os Primos de Mersenne, além da conjectura 196, enfatizando os palíndromos e a busca da existência de um número Lychrel, também são inquietações que movimentam o campo da matemática, desde épocas anteriores até a modernidade atual dos super computadores. Porém são enigmas da Matemática que nunca foram provados, mas despertam curiosidades nos matemáticos e entusiastas de áreas afins.

Palavras-Chave: Teoria dos Números. Conjecturas. História da Matemática.

Abstract

In a historical approach, some interesting and intriguing conjectures in Number Theory will be studied in this work. The Goldbach's conjecture, one of the most famous in mathematics, for never having been proved, although many ancient and contemporary mathematicians have already made a great deal of effort to find a solution to this problem. Other conjectures mentioned as Collatz, of the Twin Primes, Primes in Arithmetic Progression, as well as the Perfect Numbers and the Mersenne Primes, besides the 196 conjecture, emphasizing the palindromes and the search for the existence of a Lychrel number, are also anxieties that move the field of mathematics, from previous times to the current modern super computers. But they are mathematical puzzles that have never been proved, but awaken curiosities in mathematicians and enthusiasts of related areas.

Keywords: Theory of Numbers. Conjectures. History of Mathematics. .

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

No desenvolvimento desse trabalho, observamos ao longo da história, algumas curiosidades matemáticas, que intrigaram e movimentaram esse campo tão importante do saber. Devido a essas inquietações que perpassam por pesquisadores matemáticos de todo o mundo, durante décadas e até séculos, este trabalho visa uma abordagem histórica de algumas conjecturas curiosas em Teoria dos Números, por serem tópicos interessantes e de conceito relevante para os estudiosos, tanto os mais antigos quanto os contemporâneos.

No entanto, diante tamanhas dificuldades enfrentadas por estudiosos e pesquisadores matemáticos e de áreas afins na busca de uma prova para essas conjecturas, apesar de serem de fácil compreensão em seu enunciado, porém com uma complexidade enorme em suas demonstrações. Nosso objetivo nessa pesquisa é enunciar algumas conjecturas interessantes no tocante a Teoria dos Números, fazendo uma abordagem histórica das mesmas, observando os avanços alcançados nas buscas de tais resultados.

A conjectura de Goldbach é um dos problemas mais famosos na Teoria dos Números. Há mais de 250 anos, matemáticos tentam provar essa conjectura e não conseguem. Sabemos que depois da era dos computadores e supercomputadores, aconteceram relevantes avanços na busca de uma solução para esse problema, mas nunca chegaram ao produto final, que seria mostrar que todo número par maior que 2 é a soma de dois primos. Isto caracteriza a conjectura par de Goldbach. Já a ímpar, diz que todo número ímpar maior que 5 é a soma de três primos.

A conjectura de Goldbach encontrou muita resistência, pois quando se trata de números primos, fatoração, temos logo uma ideia de multiplicação, e essa conjectura trabalha com adição, tornando sua prova ainda mais audaciosa. Prêmios foram oferecidos para quem conseguisse provar esse argumento matemático, mas até o momento nenhum pesquisador conseguiu algo concreto.

Ainda para tornar mais distante essa demonstração, mostraremos que a prova da conjectura de Goldbach depende da prova da hipótese generalizada de Riemann, que é outro aspecto matemático estudado e considerado de um grau de dificuldade elevado por seus entusiastas e estudiosos da Matemática pura, contribuindo dessa forma, para dificultar a prova da conjectura de Goldbach, que já acumula mais de dois séculos sem solução.

Em seu discurso na Sociedade Matemática de Copenhagem em 1921, Hardy diz:

...A Conjectura de Goldbach é provavelmente tão difícil quanto qualquer um dos problemas não resolvidos em matemática, e por tanto, o problema de Goldbach não é apenas um dos problemas mais famosos e difíceis em Teoria dos Números, mas também em toda matemática. [18]

Os números perfeitos e os primos de Mersenne, também serão objeto desse estudo. A busca por primos de Mersenne e por consequência números perfeitos é antiga, tão antiga que não existem registros dos descobridores, nem da época de descoberta dos quatro primeiros números perfeitos, que são o 6, 28, 496 e 8128. Gerados a partir dos primos 2, 3, 5 e 7, respectivamente, onde se $2^n - 1$ é primo, então o número da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}$ é um número perfeito.

Durante um grande período da história, desde os egípcios, gregos, com destaque para Euclides e seus elementos, muitos matemáticos buscam a descoberta de números perfeitos. Já sabemos a infinitude dos números primos, porém se os primos de Mersenne são infinitos, ainda é um questionamento inquietador para os estudiosos da área. Mesmo com ajuda das tecnologias avançadas, até o momento foram descobertos 51 primos de Mersenne e por consequência 51 números perfeitos, sendo o último descoberto em 07 dezembro de 2018, por Patrick Laroche de Ocala. [7]

O primeiros resultado registrado relacionado aos números perfeitos que se tem conhecimento aparece na proposição 36 do Livro IX dos Elementos de Euclides, que diz:

...Se tantos números quantos quisermos, começando com uma unidade, e sendo postos, continuamente, na proporção duplicada, até que a soma de todos se torne primo, multiplicando esse resultado pelo último número, o produto será perfeito. [4]

A procura por esses números movimentaram o campo da Matemática desde as suas primeiras descobertas. Como os quatro primeiros números perfeitos foram gerados pelos os primos 2, 3, 5 e 7, e tinham um algarismo, dois algarismos, três algarismos e quatros algarismos, respectivamente, alguns matemáticos pensavam e deduziam que o próximo número perfeito seria gerado do primo 11 e teria cinco algarismos, o que frustou os estudiosos, porque o quinto número perfeito nem foi gerado a partir do primo 11, muito menos tinha cinco algarismos, tornando assim, mais desafiadora a procura por tais números.

A cada descoberta é surpreendente o tamanho do número, que só é possível calcular com ajuda de supercomputadores interligados num sistema GIMPS, um grande projeto dedicado a descobrir primos de Mersenne. Porém, mesmo com esse sistema, desde dezembro de 2018, não foi encontrado mais nenhum número perfeito e por consequência, nenhum primo de Mersenne.

O matemático Descartes também tinha muito interesse pelos números perfeitos, no ano de 1638 escreveu em uma carta para Mersenne:

...Os números perfeitos são poucos... tão poucos quanto pessoas perfeitas. [4]

A conjectura dos primos gêmeos também será enfatizada nessa pesquisa. Durante muito tempo os matemáticos estudam os primos gêmeos, que são aqueles cuja diferença entre eles é 2, os menores primos gêmeos são 3 e 5, mas ainda não se provou a existência ou não de infinitos primos gêmeos, e esse é o grande desafio dessa conjectura.

Todo primo gêmeo pode ser escrito da forma $(6k-1, 6k+1)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Alguns exemplos:
$(11, 13), 11 = 6 \times 2 - 1$ e $13 = 6 \times 2 + 1$;
$(17, 19), 17 = 6 \times 3 - 1$ e $19 = 6 \times 3 + 1$;
$(41, 43), 41 = 6 \times 7 - 1$ e $43 = 6 \times 7 + 1$.

Se fosse o caso, listaríamos muitos primos gêmeos, mas o objetivo desse estudo é mostrar que são ou não infinitos, apesar de já terem descoberto números muito grandes que são primos gêmeos, porém sua infinitude continua em aberto, para aguçar os estudos dos matemáticos da atualidade.

Grandes nomes discutiram sobre o problema da existência de infinitos primos gêmeos. Hilbert, por exemplo mencionou o problema juntamente com a conjectura de Goldbach, no Congresso Internacional enquanto defendia a necessidade de provar a hipótese de Riemann. [17]

Outra conjectura interessante é a dos números primos em progressão aritmética. Nesse sentido, observaremos as maiores sequências de primos em progressão aritmética. No caso das P.As. de tamanho 2, já vimos anteriormente que são os primos gêmeos. Aqui vamos focar em progressões maiores, por exemplo a P.A. de 10 termos: 199,409,619,829,1039,1249,1459,1669,1879,2089, onde sua razão é 210, com todos os elementos sendo números primos.

Em 1770, Lagrange e Waring investigaram quão grande deve ser a diferença comum de uma progressão aritmética de n primos. [8]

A inquietação dessa conjectura é sobre a existência de infinitas progressões aritméticas de primos de tamanho arbitrariamente grande. No momento a maior P.A. de primos descoberta tem 26 termos e foi encontrada em 2010 por Perichon, gerando números muito grandes, sendo possível tais descobertas com auxílio de computadores, porém a infinitude dessas sequências de tamanhos grandes continuará como aperitivo para os pesquisadores matemáticos.

A conjectura 196 e a busca por um número de Lychrel, também despertaram curiosidades e vêm sendo objeto de estudo por matemáticos há algum tempo. Os números palíndromos são aqueles que são lidos da mesma forma independente da posição, por exemplo 191, 3003. Já outros números precisam de um processo de reversão e adição para gerar um palíndromo. Por exemplo, 45 não é palíndromo, mas $45 + 54 = 99$. Nesse caso foi necessário apenas uma etapa para gerar um palíndromo. Já se analisarmos o número 84, precisaremos de duas etapas para gerar o palíndromo 363, basta fazer, $84 + 48 = 132$, agora $132 + 231 = 363$ que é palíndromo.

Outros números pequenos, como 89 levam 24 interações para gerar um palíndromo, mas em alguns casos levam até 261 interações com números maiores:

> *Em 23 de janeiro de 2017, um estudante russo, Andrey S. Shchebetov, anunciou em seu site que havia encontrado uma sequência dos primeiros 126 números (125 deles nunca relatados antes) que tomam exatamente 261 passos para alcançar um palíndromo de 119 dígitos. . Esta sequência foi publicada no OEIS como A281506.* [10]

Já outros números como 196 nunca foram encontrados palíndromos, mesmo com interações que geram números com bilhões de algarismos, não se sabe se 196 não gera palíndromo e, consequentemente, seria o primeiro número de Lychrel. Isso é o que norteia os pesquisadores nesse campo de estudos, a busca com ajuda de tecnologias modernas pela descoberta de um número Lychrel, ou seja, um número que não gera palíndromo, sendo o 196 o menor deles, e o primeiro candidato a ser um número Lychrel.

Além do 196, existem outros números candidatos a número de Lychrel, como o 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986, porém todas as interações realizadas seguiram a linha do 196, despertando curiosidade e deixando os pesquisadores inquietos na busca da existência ou não de um palíndromo gerado a partir desses números.

A Conjectura de Collatz, também conhecida como a Conjectura $3n + 1$, é mais um problema que vem despertando curiosidades nos estudiosos e pesquisadores matemáticos. Trata-se de uma conjectura curiosa, fácil de enunciar, porém de intensa dificuldade para demonstrar. Diz que, ao abordarmos um número inteiro positivo diferente de 1, se esse número é par, basta dividir por 2, até gerar um número ímpar. Caso seja um número ímpar, multiplica-se por 3 e soma-se 1, o que batizou a conjectura de $3n + 1$, repete-se esse processo, alternando de acordo com o surgimento do número, se é par ou ímpar, até chegar em 1, que é o objetivo da conjectura. Se chegar a um número da forma 2^k, com $k = 0, 1, 2, 3, ...$, também está válido o resultado, pois a potência de 2 com divisões sucessivas por 2, se chega ao mesmo resultado, o 1.

Muitos estudos foram realizados com ajuda de tecnologias avançadas, mas até o momento não conseguiu-se provar esse resultado assim, como também, não conseguiram mostrar que não é válido, devido a todos os números testados terem chegado em 1. No entanto, isso não é suficiente e válido para garantir a veracidade matemática desse argumento tentador, o que torna a Conjectura de Collatz um desafio intrigante e instigante para os curiosos desse campo do saber.

> *O investigador português Tomás Oliveira e Silva explorou um grande número de hipóteses, começando no número 1 e ultrapassando o número 27 mil milhões de milhões. Não encontrou nenhum caso em que a sequência não atingisse 1.* [2]

É um resultado importante, mas não basta aos matemáticos. Pode haver um número ainda não explorado que falhe a conjectura. Sem uma demonstração rigorosa ou sem encontrar tal hipotético número, continuamos sem o saber.

Este trabalho será abordado em cinco capítulos, o primeiro capítulo versará sobre a Conjectura de Goldbach, onde será introduzida por um breve histórico dos números primos. No segundo capítulo abordaremos os Números Perfeitos e os Primos de Mersenne em duas seções, na primeira trataremos dos famosos e antigos números perfeitos, na segunda seção serão abordados os Primos de Mersenne. No terceiro capítulo estudaremos os Primos em Sequência, também em duas seções, a primeira seção com A Conjectura dos Primos Gêmeos, e a segunda seção com A Conjectura dos Números Primos em Progressão Aritmética. Já no quarto capítulo faremos uma abordagem do Número de Lychrel, a famosa conjectura 196, devido ao 196 ser o menor número natural que não gerou palíndromo até o momento. E no quinto e último capítulo, concluiremos este estudo mencionando a Conjectura de Collatz, também conhecida como a conjectura $3n + 1$.

Capítulo 1

A Conjectura de Goldbach

Neste capítulo estudaremos a Conjectura de Goldbach. A principal referência utilizada foi a [14].

A **Conjectura de Goldbach** é um dos problemas mais famosos não resolvidos no tocante a Teoria dos Números, com mais de 250 anos sem uma prova para tal conjectura. Devido a conceitos matemáticos mais modernos a **Conjectura de Goldbach** passou a ser enunciada em duas conjecturas, a **Conjectura Par de Goldbach, que diz: "Todo número inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos."** E a **Conjectura Ímpar de Goldbach, que afirma: "Todo número inteiro ímpar maior que 5 pode ser escrito como a soma de três números primos."**

No processo do desenvolvimento matemático, aprendemos logo no início conceitos básicos, como as operações com os números, e assim vão surgindo curiosidades. Quando entramos no estudo da fatoração de um número e fazemos uma análise dele, verificamos se aquele número pode ser decomposto em produto de dois números menores, como é o caso do $10 = 2 \times 5$. Nesse caso, dizemos que o número que pode ser escrito como produto de dois números menores, é denominado de composto. Já os números que não atendem a essa regra, ou seja, que não podem ser escritos como produto de dois números menores como o $3 = 3 \times 1$ só pode ser escrito pelo produto dele mesmo com o 1, a esse tipo de número chamamos de números primos. Assim, após aprendermos o conceito da multiplicação, compreendemos o que é um número primo, "aquele número que é divisível por 1 e por ele mesmo". Porém os primos tem uma relevância fundamental no estudo da matemática, especialmente na Teoria do Números, e através deles surgem problemas matemáticos em nossas vidas, que nem percebemos, devido a simplicidade, mas de uma complexidade relevante. Os primos são números inteiros, com peculiaridades particulares e específicas, capazes de tornar eles tão interessantes e instigantes no estudo dos pesquisadores matemáticos.

Os primos atendem a algumas características específicas e triviais. O único número primo par é o 2, todos os outros primos são ímpares. A soma de seus algarismos não pode ser múltipla de 3, exceto o 3. Não pode ter seu último algarismo 5, com exceção do 5 mesmo. Sendo assim, com exceção dessas regras e poucas outras não é tão simples de se identificar um número primo, pois eles possuem suas especificidades e não se adaptam tão facilmente às regras, apesar de existirem algumas fórmulas para os números primos elas não são de total confiabilidade, na realidade são adaptações para uma determinada situação o que torna cada vez mais os números primos únicos.

Com o passar dos tempos, os estudiosos da matemática foram se adaptando e compreendendo as peculiaridades dos números primos, sendo capazes de resolverem problemas relevantes nessa área, mesmo não sendo algo imediatista, mas com a dedicação e esforço dos pesquisadores algumas curiosidades desses números estão sendo descobertas. Apesar de existirem ainda várias indagações, umas simples e outras mais complexas que permanecem sem uma resposta.

Depois de fazermos uma conceituação básica dos números primos, vamos estudar agora o problema mais famoso não resolvido nesse campo do saber, a famosa Conjectura de Goldbach que já existe há mais de 250 anos. Muito já foi descoberto a respeito da Conjectura de Goldbach, mas ainda nada que consiga ser preciso para tamanha complexidade.

Na escola estudamos e conhecemos os números primos e o conceito de fatoração, mas dificilmente se estabelece algum interesse maior nas peculiaridades desses números, muito menos, na busca de provar algum resultado a respeito dos mesmos. Isso acontece, devido à complexidade de demonstrar algo relacionado aos números primos, apesar das sentenças parecerem simples. Sendo assim, os estudantes aprendem apenas métodos específicos e triviais para tratarem com os primos. Na verdade, nosso primeiro contato com os números primos não mostra a realidade desse universo.

Já na antiguidade, os gregos conheciam algumas propriedades básicas dos números primos, e tinham a habilidade de provarem seus resultados. Primos e fatores são os tópicos principais do Livro VII dos Elementos de Euclides, o grande clássico da geometria. Esse livro específico contém uma apresentação geométrica da divisão e multiplicação em aritmética. Os gregos optavam em trabalhar com o comprimento de linha, em detrimento ao número na forma usual, porém não existia nenhuma dificuldade em mostrar seus resultados na linguagem dos números. Euclides tem a preocupação de provar a veracidade de sentenças, que parecem simples, à exemplo da proposição 16 do livro VII, onde prova que, quando multiplicamos dois números entre si, o resultado é independente da ordem que tomamos. Logo, $xy = yx$ (a ordem dos fatores não altera o produto), uma das leis básicas da álgebra.

Nesse momento, vamos tratar de um número que parece simples, mas do ponto de vista matemático, tem trazido algumas dificuldades em sua abordagem, que é o número 1. Por muito tempo, abordaram o número 1 como sendo primo, com $1 = 1 \times 1$, mas isso trouxe problemas para os matemáticos, nesses dois últimos séculos perceberam que essa definição do número 1 estava sem embasamento suficiente na representação de um número primo, pois não envolve números menores, mas se não é primo muito menos será composto. Isso fez com que os matemáticos classificassem o número 1 como uma terceira categoria, um número especial que nem é primo nem é composto. De fato, o 1 não atende na integralidade tais definições e portanto para a matemática contemporânea o 1 é um número especial.

Bem posteriormente, na proposição 20 do Livro IX, Euclides prova outro fato-chave: "Os números primos são mais do que qualquer imensidão de números primos". Com essa proposição, Euclides nos mostra a infinitude dos primos. Com este teorema, Euclides conseguiu provar algo importantíssimo, mas causou muitas indagações no campo da matemática, pois se os primos são infinitos, como podemos descrever um padrão para eles? Isto é um dos grandes mistérios desse conjunto de números, que são tão importantes e necessários para a este campo do saber. Sem dúvidas, fazer tais descobertas é o grande desafio na teoria dos números. "Em 1801, Gauss o mais influente pesquisador no ramo da teoria dos números naquele momento, e sem sombra de dúvidas um dos mais notórios matemáticos e não seria exagero dizer o de maior notoriedade de todos os tempos, escreveu um livro-texto avançado sobre a teoria dos números o Disquisitiones Arithmeticae (Investigação em Aritmética)." Mediante a relevância do que ele mostrou, destacou dois pontos básico e importantes que devemos seguir, que será a distinção entre um número composto e um número primo e a fatoração de um número composto em fatores primos algo de grande utilidade no estudo da aritmética.

Na atualidade, temos muito mais facilidade que Gauss, para verificar seu primeiro problema, que era o teste dos números primos, porém ainda deixamos muito a desejar quando se trata de seu segundo problema, a fatoração. Esta linguagem para os não matemáticos, pode ser um pouco estranha, pois na prática da sala de aula, aprenderam a testar se um número é primo, pelo método da fatoração, que é encontrar todos os divisores primos possíveis de um número composto. No entanto, há meios de fazer estes testes, provando que um número é primo sem precisar de tais mecanismos, assim como pode ser provado que um número é composto, mostrando apenas que ele não passa numa prova de primalidade.

Apesar de Euclides ter provado que os números primos são infinitos, ainda existem muitos mistérios por trás desses números. Mesmo quando partimos de questionamentos mais simples da matemática, eles nos levam a conceitos mais elaborados, tornando mais complexo o estudo dos primos. A falta de regularidade ao se avançar numa sequência de números primos, limita a buscar meios apelativos, não tão precisos quanto se deseja, e muitas vezes são as mesmas técnicas já ultrapassadas, nada de novo surge nesse campo do saber, para permitir novas visões que garantam um padrão mais preciso dos números primos. Não existem fórmulas para os primos, como por exemplo podemos dizer que todo quadrado perfeito pode ser escrito como x^2, restando aos estudiosos e pesquisadores da área, fazer experimentos que mostrem a existência de uma regularidade entre esses números, mesmo que sejam primos muito grandes. Também é notório que quanto maior for uma lista de números naturais, em determinados intervalos de igual período, a quantidade números primos tendem a reduzir, de acordo com crescimento da lista. A tabela 1.1 mostra quantos deles existem nas variáveis faixas de mil números consecutivos.

FAIXA	QUANTIDADE DE PRIMOS
1 - 1.000	160
1.001 - 2.000	135
2.001 - 3.000	127
3.001 - 4.000	119
4.001 - 5.000	118
5.001 - 6.000	114
6.001 - 7.000	117
7.001 - 8.000	106
8.001 - 9.000	110
9.001 - 10.000	111.

Tabela 1.1: A quantidade de primos em intervalos sucessivos de mil números.

A quantidade de números primos que estão apresentados na segunda coluna da tabela 1.1 em intervalo de 1 000 números naturais, é visível que a medida que os números crescem, a quantidade de primos se reduzem, com exceção de alguns intervalos por exemplo no intervalo que vai de 106 para 110, tornando ainda mais irregulares esses números. Porém, a tendência é que quanto maior for os números, menos primos existirão. Isso ocorre porque a quantidade de fatores potenciais de um número, cresce de acordo com o seu tamanho. É como pescar os números não primos com uma rede, quanto mais fina, menos números primos conseguem passar. A "rede" tem até nome: a peneira de Eratóstenes. Eratóstenes de Cirene era um matemático da Grécia antiga que viveu por volta de 250 a.C. Era também atleta com interesse em poesia, geografia, astronomia e música. A peneira de Eratóstenes é um instrumento matemático para encontrar todos os primos, eliminando os números que são múltiplos com os primos. A figura 1.1 mostra esse algoritmo para os primeiros 102 números naturais, apresentados de uma forma simples de ser entendida. O processo de eliminação dos números que possuem múltiplos com primos. Inicie desprezando o 1 porque é a unidade. O próximo número é o 2, então é primo. Risque todos os múltiplos de 2: os que estão nas linhas horizontais iniciando por 4, 6 e 8. O próximo número que não foi riscado é o 3, então é primo. Portanto, devemos riscar todos os múltiplos de 3: os que estão na linha horizontal começando por 6, já riscado, e 9. O próximo número que aparece não riscado é o 5, então é primo. Novamente risque todos os múltiplos de 5: os que estão nas linhas diagonais subindo para a direita, começando por 10. Logo o próximo número não riscado, também é primo, no caso o 7. Aplicando o mesmo processo de riscar todos os múltiplos de 7: os que estão nas linhas diagonais descendo para a direita, começando por 14. O próximo número encontrado é o 11, portanto é primo. Como o primeiro múltiplo de 11 que ainda não foi riscado, por ter um divisor menor é o 121, e está fora da figura, então pare. Logo os números restantes, sombreados, são primos.

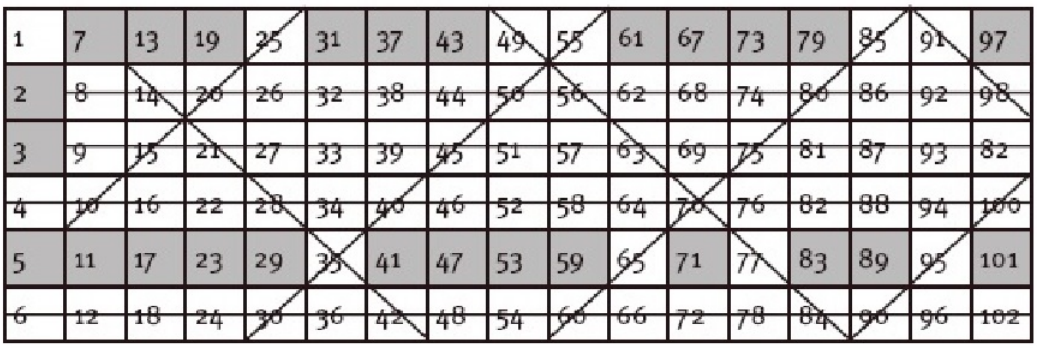

Figura 1.1: A Peneira de Eratóstenes.

Mesmo sendo uma curiosidade histórica, a peneira de Eratóstenes é um dos algoritmos mais precisos na contagem de listas longas de números primos. E metodologias como esta têm sido fundamentais para o progresso no estudo do problema mais famoso não solucionado no tocante aos primos, a Conjectura de Goldbach.

Christian Goldbach era um matemático amador que se relacionava com personagens de grande relevância em sua época. Em 1742, enviou uma carta a Leonhard Euler, afirmando várias conjecturas interessantes sobre os números primos. Também foi notado por alguns historiadores que René Descartes, teria falado algo nessa linha, em anos anteriores. A primeira sentença afirmada por Goldbach foi: **"Todo inteiro que possa ser escrito como a soma de dois primos, pode ser também escrito como a soma de quantos primos se queira, até todos os termos serem unidades."** Na próxima afirmação, acrescentada em sua carta, trazia o seguinte argumento: **"Todo inteiro maior que 2 pode ser escrito como a soma de três primos."** No entanto, com a conceituação atual de primo, as afirmativas de Goldbach terão exceções triviais. Por exemplo, 4 não é a soma de três primos, já que o menor primo é 2, mas na época das afirmações de Goldbach, o 1 era considerado primo, sendo assim o menor número inteiro que pode ser escrito como a soma de três primo é o 6, logo $6 = 2 + 2 + 2$. Porém, pode-se escrever as conjecturas de Goldbach, usando as convenções atuais.

Euler, ao responder a carta, lembra de uma curiosidade indagada por Goldbach, que sua primeira conjectura surgiu de outra conjectura mais simples, o que seria sua terceira conjectura. **"Todo inteiro par é a soma de dois primos."** Como na época de Goldbach se consideravam o 1 como primo, logo essa terceira conjectura, também resulta na segunda conjectura de Goldbach. Pois qualquer número pode ser escrito com $n+1$ ou $n+2$ com n par. Portanto se n é a soma de dois primos, logo o número original é a soma de três primos.

Como o conceito de primalidade para os matemáticos contemporâneos não englobam o número 1, isso divide as conjecturas de Goldbach em duas: **a conjectura par de Goldabach:** "Todo inteiro par maior que 2 é a soma de dois primos." E a **conjectura ímpar de Goldbach:** "Todo inteiro ímpar maior que 5 é a soma de três primos." Logo a conjectura par de Goldbach implica na ímpar, porém a ímpar não implica na par. Contudo é de suma importância considerar as duas conjecturas separadas, pois ainda não sabemos se alguma delas tem veracidade. Devido a ter tido mais avanços, a conjectura ímpar parece ser menos complexa. A seguir, serão mostrados alguns cálculos simples com números pequenos que verificam a conjectura par de Goldbach:

- 4 = 2+2
- 6= 3+3
- 8= 3+5
- 10= 5+5 = 7+3
- 12= 7+5
- 14 = 7+7 = 3+11
- 16= 3+13 = 5+11
- 18= 5+13 = 7+11
- 20= 3+17 = 7+13

Os números acima testados são pequenos, se fôssemos fazer isso a mão, até uma quantidade de números grandes, teríamos um certo trabalho. Por exemplo, $1\ 000 = 3 + 997$ e $1\ 000\ 000 = 7 + 999\ 993$. Mas para se chegar a um milhão manualmente, com certeza não seria algo trivial, porém em 1938, Nils Pipping averiguou a conjectura de Goldbach para todos os números pares até 100 000. É notório que quanto maior o número vai ficando, mais maneiras diferentes temos para escrevê-lo como soma de parcelas que são primos. Imagine pegar um número par muito grande e ir subtraindo primos, um de cada vez, repetindo-se esse processo até o surgimento de um número primo como resultado desse processo de subtrações sucessivas, certamente a conjectura estará provada para esse número. Os analistas Godfrey Harold Hardy e John Littlewood, fizeram esse cálculo em 1923, com a utilização de recursos estatísticos dos primos, avaliando a probabilidade desse resultado e derivaram um argumento interessante, porém necessitava ser mais completo para representar a quantidade de maneiras diferentes de mostrar um número $\boldsymbol{n}$ como a soma de dois primos.

A maior dificuldade de se estabelecer algo plausível na conjectura de Goldbach, é que ela trata de duas propriedades distintas, pois quando abordamos os números primos, pensamos logo na fatoração que explora conceitos da multiplicação, e a conjectura de Goldbach, trabalha conceitos inerentes a adição, isso sem dúvidas é o maior entrave na busca de resultados dessa conjectura. Mediante a tamanha dificuldade de se chegar a avanços significativos em relação a essa conjectura, a editora Faber & Faber em 2000, promoveu um evento para premiar com um milhão de dólares quem conseguisse tamanha façanha, que seria uma prova para a conjectura de Goldbach, porém o prazo para apresentar esse resultado foi pequeno. Logo, uma solução para o problema deveria ser mostrada antes de abril de 2002. No entanto, o prêmio ficou sem ganhador, pois não conseguiram chegar a um resultado desejado, o que não é nenhuma novidade, já que esse problema tem mais 250 anos sem solução.

A conjectura de Goldbach é com frequência reorganizada, abordando conceitos referentes a adição de conjuntos dos inteiros. Essa especificidade é notória na conjectura par, devido a facilidade de se trabalhar com a soma de dois conjuntos de inteiros. Para isso basta considerar dois conjuntos de inteiros e somar qualquer um de seus elementos, resultando em um novo conjunto, como mostra o exemplo a seguir: $\{1, 2, 3\}$ e $\{4, 5\}$, logo, $1 + 4$, $2 + 4$, $3 + 4$, $1 + 5$, $2 + 5$, $3 + 5$, todas as somas possíveis foram feitas e resultaram nesse novo conjunto, $\{5, 6, 7, 8\}$. É observável que os números 6 e 7, apareceram mais de uma vez, pois $6 = 2 + 4 = 1 + 5$ e $7 = 3 + 4 = 2 + 5$, sendo chamada de sobreposição esse tipo de repetição.

Agora a conjectura par de Goldbach pode ser reorganizada somando o conjunto de números primos com ele próprio teremos como resultado todos os números pares maiores ou iguais a 4. Essa reorganização parece ser simples, porém leva o problema para uma área que existem alguns teoremas gerais importantes. No entanto é plausível observar que o número 2 é o único primo que é par e somando ele a qualquer outro primo o resultado será ímpar, o que contradiz o argumento acima. Logo, ao se tratar da conjectura par de Goldbach devemos não considerar o 2, mas isso nos leva a outro problema, pois se não considerarmos o 2 o primeiro número par que aprece com a soma de primos é o $6 = 3 + 3$ já que o $4 = 2 + 2$. Dessa forma o argumento deve ser estabelecido para números pares maiores ou iguais 6.

Fazendo uma verificação trivial, observe os números pares menores ou iguais a 30. Nesse intervalo, existem nove números primos ímpares: $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Ao somarmos esses números obtemos a figura 1.2: estão marcados em negrito as somas que são inferiores ou iguais a 30 (um intervalo de números pares que inclui todos os primos até 29). Surgem dois padrões simples. A figura toda é simétrica em relação à sua diagonal principal porque $a+b = b+a$. Os números em negrito ocupam aproximadamente a metade superior esquerda da figura, acima da linha (diagonal) grossa. No máximo, eles tendem a avançar além dessa linha no meio. Geralmente acontece esse tipo ocorrência devido aos números primos grandes aparecerem em menor quantidade que os pequenos. A região adicional mais do que compensa os dois 32, nos cantos superior direito e inferior esquerdo.

	3	5	7	11	13	17	19	23	29
3	**6**	**8**	**10**	**14**	**16**	**20**	**22**	**26**	32
5	**8**	**10**	**12**	**16**	**18**	**22**	**24**	**28**	34
7	**10**	**12**	**14**	**18**	**20**	**24**	**26**	30	36
11	**14**	**16**	**18**	**22**	**24**	**28**	**30**	34	40
13	**16**	**18**	**20**	**24**	**26**	**30**	32	36	42
17	**20**	**22**	**24**	**28**	**30**	34	36	40	46
19	**22**	**24**	**26**	**30**	32	36	38	42	48
23	**26**	**28**	**30**	34	36	40	42	46	52
29	32	34	36	40	42	46	48	52	58

Figura 1.2: Soma de pares de números primos até 30. Negrito: somas que valem 30 ou menos. Linha grossa: diagonal. Região sombreada: eliminação de pares simetricamente relacionados. A região sombreada é ligeiramente maior que um quarto do quadrado.

Observe que o número de espaços na Figura1.2 pode ser escrito da forma $9 \times 9 = 81$. Aproximadamente metade desses números estão no triângulo superior esquerdo. Devido a simetria desses números, eles aparecem em pares, com exceção dos números ao longo da diagonal. Sendo assim, a quantidade de espaços que não possuem uma relação é de $81/4$, algo próximo de vinte. É importante notar que a quantidade de inteiros ímpares no intervalo de 6 a 30, é treze. Portanto as vinte, ou mais somas em negrito, devem englobar somente treze números pares. Há mais somas de dois primos na região à direita, que números pares. Apesar de ter uma probabilidade muito boa da existência dos números pares na região, isso não garante a completude de sua existência, podendo ainda faltarem alguns números pares.

Nessa área, são adotadas um padrão de metodologias parecidas, porém existem uma preocupação maior em deixar o argumento mais completo. Alguns métodos que já vimos, como o da peneira de Eratóstenes, é um exemplo plausível. Assim como outros estudos baseados na densidade dos números em somas de dois conjuntos, a quantidade de números que surgem, quando os conjuntos vão se tornando muito grandes, também são instrumentos relevantes para o estudo em questão.

Uma conjectura matemática, quando é considerada como verdadeira, o problema não para por aí, outros estudiosos e pesquisadores da área buscam respostas relacionadas a tal conjectura, na busca de aperfeiçoar, ou até mesmo encontrar algo falho, visando tornar o argumento mais forte. Esse envolvimento de muitas pessoas para proporcionar a sentença matemática válida é de extrema importância para área, pois tanto pode melhorar a conjectura, fazendo algumas restrições importantes, como também abre caminhos para o surgimento de ideias novas, que podem completar a prova da conjectura. Os teoremas que foram estudados como embasamento para a conjectura de Goldbach, conseguiram êxito em suas demonstrações. Iniciando com um considerável avanço, em 1923, através de técnicas analíticas de Hardy e Littlewood, para provar a conjectura ímpar de Goldbach para todos os números ímpares grandes. Mas é aí que surge outro problema, essa prova dependia de outra expressiva conjectura, a hipótese generalizada de Riemann.

O matemático alemão, Bernhard Riemann, no ano de 1859 deixou de lado um pensamento de outro matemático, o Euler, e desenvolveu sua própria ideia, de uma forma expressivamente diferente para a definição da denominada função zeta. Com isso, Riemann conseguiu mostrar um argumento preciso para um determinado número de primos. Apesar da descoberta, os analistas já tinham conhecimento e sabiam que se tratava de uma soma infinita. Porém essa ideia do Riemann, trazia um novo e interessante entendimento dos primos. No entanto, como tudo na matemática precisa de prova, isso foi mais uma barreira para Riemann, apesar dele conseguir provar que seu argumento tinha validade, porém dependia de outra sentença matemática, aparentemente simples a respeito da função zeta, já essa sentença ele não conseguiu demonstrar. Isso talvez se justifique, pois já se passaram um século e meio e ninguém demonstrou tal resultado. Essa sentença é denominada de hipótese generalizada de Riemann, o grande desafio para ser solucionado pelos pesquisadores da matemática pura. Quando contextualiza-se a hipótese de Riemann em outras áreas, como exemplo da física matemática, novos caminhos na busca de uma solução para essa conjectura são relevantes, trazendo novas esperanças, de quem sabe um dia a hipótese de Riemann, possa ser finalmente mostrada. Contudo, ainda estamos um pouco distante de tais resultados, e a hipótese de Riemann continua sendo um dos grandes e intrigantes problemas da matemática.

O problema referente a hipótese de Riemann, continua sem sucesso, e aparentemente com uma dificuldade expressiva. Com intervenções de outros pesquisadores, trazendo conhecimentos inovadores e metodologias mais avançadas, a exemplo de Lev Schnirelmann em 1923, utilizando ideias embasadas no método de peneira. Assim, Lev Schnirelmann demonstrou que uma quantidade não nula de números, pode ser escrita como a soma de dois primos. Fazendo alguns cálculos, abordando esse último resultado e outros anteriormente mostrados, como as somas de sequências entre elas próprias, ele conseguiu demonstrar a existência de um número C, de modo que a soma de qualquer inteiro maior que um, terá limite máximo, C números primos. Posteriormente esse resultado foi denominado com a constante de Schnirelmann. Outros estudiosos conseguiram algo parecido a Schnirelmann, como foi ocaso de Ivan Matveyevich Vinogradov, em 1937.

E mais recentemente, no ano de 2002 Liu Ming-Chit e Wang Tian-Ze, conseguiram resultados expressivos na redução do limite superior, da constante de Schnirelmann, deixando esse resultado bem menor, porém ainda sendo incapazes de serem testados por computadores. Em 1969, N.I. Klomov conseguiu o primeiro levantamento envolvendo a constante de Schnirelmann, onde constatou que seria no máximo 6 bilhões. Através do esforço de outros matemáticos, esse valor foi subtraído expressivamente e, 13 anos depois já estava surpreendentemente em 19. Os responsáveis por tamanho feito foram Hans Riesel e Robert Valghan, no ano de 1982. Apesar de 19 ser claramente um número exageradamente bem melhor que o 6 bilhões, o cenário estudado leva a crer que esse número só provaria o resultado da constante de Schnirelmann, se fosse reduzido para 3. Permanecendo firmes nesse estudo, outro pesquisador em 1995, o Leszek Kaniecki, conseguiu melhorar significadamente o resultado, deixando a constate em 6, porém surgiu outro problema, sua afirmação necessitava de assumir a hipótese de Riemann como verdadeira. Se combinar o resultado de J. Richstein da hipótese de Riemann até 4×10^{14} com os resultados de Leszek Kanieck, mostravam que a constante de Schnirelmann teria limite máximo igual a 4, porém para isso teria que ser considerada a hipótese de Riemann. Em 1997, Jean-Marc Deshouillers, Gove Effinger, Herman te Riele e Dmitrii Zinoviev mostraram que a hipótese generalizada de Rieman resultaria na conjectura ímpar de Goldbach. Logo, todo número ímpar com exceção de 1, 3 e 5 é a soma de três primos.

Como a hipótese de Riemann nunca foi provada, os resultados obtidos que avançariam na demonstração da constante de Schnirelmann e consequentemente na conjectura ímpar de Goldbach, que teriam embasamento nessa prova, devem ser desconsiderados.

Devido a não existência de uma prova da conjectura da hipótese generalizada de Riemann, o matemático francês Oliver Ramaré, em 1995 fez seus estudos desconsiderando tal conjectura, e conseguiu melhorar o limite superior na abordagem de números ímpares até 7, sendo assim, ele conseguiu provar que todo número par é a soma, de no máximo 6 primos. Posteriormente outro matemático, Terence Tao em 2012, surgiu com pensamentos modernos e diferentes, capaz de avançar no problema, superando os obstáculos encontrados. **O principal teorema de Tao é o seguinte: todo número ímpar, é a soma de, no máximo, cinco primos.** Consequentemente a constante de Schnirelmann, se reduzirá para 6. Terence Tao é um matemático de expressão, devido sua capacidade e manejo em resolver problemas matemáticos de grande complexidade. As demonstrações de Terence Tao deixam o problema mais estiloso, utiliza de meios interessantes, que exigem o apoio tecnológico. No entanto, caso o número 5 pudesse ser reduzido para 3, **no teorema de Tao,** a conjectura ímpar de Goldbach seria validada. Apesar do otimismo do matemático, ainda carece de novos argumentos. Porém, a conjectura par de Goldbach, deve ser ainda mais complexa. Os matemáticos Deshouillers Saouter e Te Riele, no ano de 1998, testaram a conjectura par de Goldbach, para todos os números pares até 10^{14}. Mesmo com ajuda de algumas provas, como a de Ramaré em 1995, mostrando que todo número inteiro par é a soma, de no máximo, seis primos. A busca por uma prova de tal conjectura permanece em aberto. Portanto, a conjectura de Goldbach, continua sendo esse grande desafio para os matemáticos.

Capítulo 2

Números Perfeitos e Primos de Mersenne

Neste capítulo abordaremos os Números Perfeitos e os Primos de Mersenne. As principais referências usadas foram [1], [5].

2.1 Números Perfeitos

Um número n é chamado de *número perfeito*, quando a soma de seus divisores positivos com exceção do próprio número n tem como resultado ele mesmo. Por exemplo, $6 = 1 + 2 + 3$ sendo esse o primeiro número perfeito.

Na sua mais famosa obra, os Elementos, Euclides não só define número perfeito, como enuncia e demonstra um método para os calcular. Este método ficou conhecido por "fórmula dos números perfeitos euclidianos" que a seguir se demonstra:

Teorema 2.1. *Sendo $n \in \mathbb{N}$, se $2^n - 1$ for número primo, então o número da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito.*

Demonstração: Sejam $2^n - 1 = p$, número primo e $a = p2^{n-1}$. Pretendemos provar que, nestas condições, a é um número perfeito.

Os divisores próprios de a são: $1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}, p, 2p, 2^2p, ..., 2^{n-2}p$.
Então,

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} + p + 2p + 2^2p + ... + 2^{n-2}p = \\ &= (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}) + p(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-2}) = \\ &= 2^n - 1 + p(2^{n-1} - 1) = 2^n - 1 + (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (1 + (2^{n-1} - 1))(2^n - 1) = \\ &= 2^{n-1}(2^n - 1) = a\end{aligned}$$

Donde se conclui que $\sigma(a) = a$, ou seja, que a é um número perfeito.
Demonstração retirada de [1]

$\blacksquare$

Os números perfeitos provavelmente foram descobertos pelos egípcios, que na realidade tratavam eles como números comuns, porém suas características específicas para a realização de cálculos funcionavam normalmente. As propriedades relativas a esses números foram estudadas por Pitágoras, e seus seguidores. Para a escola pitagórica, um número é formado por seus divisores, e quando acontece da soma dos divisores de um número coincidir com ele próprio, é sem dúvida, algo de profunda admiração. Algumas curiosidades interessantes sobre os números perfeitos. Deus criou o mundo em 6 dias, e o número de dias que a lua demora para dar uma volta sobre a terra, são exatos 28 dias. Não existem registros da descoberta dos quatro primeiros números perfeitos, que são o $6, 28, 496$, e 8128, pelo menos os dois primeiros parecem ser obra do criador.

Os matemáticos árabes também tinham muito interesse pelos números perfeitos, e **Thabit Ibn Quarra** escreveu a respeito dos números que caracterizou como amigáveis, onde ele fez testes para os números da forma $2^n p$, com p primo, concluindo que números dessa forma poderiam ser perfeitos. O matemático **Ismail Ibn Ibrahim Ibn Fallus (1194 -1239)** ocupou um papel de destaque entre os árabes, devido sua curiosidade e empolgação para continuar o estudo dos gregos sobre os números perfeitos. De tanto entusiasmo com suas investigações referentes a essa temática, ele resolveu produzir uma tese. Mediante suas pesquisas e inquietações, ele propôs uma lista com dez números, dizendo ser perfeitos. No entanto, os sete primeiros estavam corretos e, sem dúvidas, eram os sete primeiros números perfeitos. O 5° número perfeito foi verificado por Regiomontanus durante sua estadia na universidade de Viena, da qual ele saiu em 1461. Ele também ficou com o título de descobridor do 5° número perfeito, já que foi a primeira verificação a ser registrada naquela época. Isto também foi encontrado no manuscrito feito por um autor anônimo por volta de 1458, enquanto que o 5° e o 6° número perfeito foram encontrados em outro manuscrito pelo mesmo autor, pouco tempo depois de 1460. O 5° número perfeito é 33.550.336, e o 6° é 8.589.869.056.

Ao longo dos tempos, muitos matemáticos focaram seus estudos na busca por números perfeitos, uma tarefa árdua e antiga. A descoberta desses números teve início aproximadamente no ano 540 a.C., na época em que a escola pitagórica tinha relevante influência. Os pitagóricos, tinham grande admiração pelos números, até diziam que eram conceitos universais. Tinham várias maneiras de classificar os números, denominando-os de: figurados, primos, amigos, triangulares, etc.

Uma de suas ideias principais, era a caracterização de um número primo, dado que através desses, se estabelecem os outros números. Outra definição curiosa que traz características interessantes, era a da perfeição de um número. Este poderia ser considerado **deficitário**, se a soma de seus divisores, exceto ele mesmo, fosse menor que ele, por exemplo o 8, logo seus divisores, $1+2+4<8$. Era considerado **abundante**, caso a soma de seus divisores, com exceção dele próprio, resultasse em um número maior que ele, temos como exemplo o 12, pois seus divisores , $1+2+3+4+6>12$. E por fim, quando a soma dos divisores de um número, exceto ele mesmo, resulta nele próprio, este é chamado de perfeito, a exemplo do 6, onde a soma de seus divisores $1+2+3=6$. Com estas classificações, os pitagóricos buscavam propriedades particulares para cada tipo de números, trabalho que foi realizado por muitos outros matemáticos durante toda a história.

Após as contribuições significativas dos pitagóricos no estudo dos números perfeitos, o próximo matemático a dar sua notória contribuição nesse campo do saber, foi Euclides (aproximadamente 300 a.C.). Dentre tantas referências de Euclides relacionadas aos números perfeitos, na sua obra "Elementos", destaca-se a seguinte proposição:

"(...)Se tantos números quantos se queira, começando a partir da unidade, forem dispostos continuamente numa proporção duplicada até que a soma de todos resulte num número primo, e se a soma multiplicada pelo último origina algum número, então o produto será um número perfeito.(...)"

Numa abordagem matemática contemporânea, este fragmento mostra que se um número da forma 2^n-1 é primo, então o número $2^{n-1}(2^n-1)$ é um número perfeito. Este resultado tornou a busca de números perfeitos mais fáceis, sendo na realidade a primeira fórmula encontrada para determinar o seu valor.

Os gregos antigos só conheciam os primeiros quatro números perfeitos: 6, 28, 496 e 8128, números estes que podem ser obtidos a partir da fórmula de Euclides utilizando para $\boldsymbol{n}$ os números 2, 3, 5 e 7 respectivamente.

Com base nestes valores, o neo-pitagórico Nicómaco (aproximadamente 100 d.C.) fez algumas afirmações referentes aos números perfeitos. Disse, que se o 6 era perfeito e tinha um algarismo, o 28 também era perfeito e tinha dois algarismos, já o 496, que era perfeito seus algarismos contavam em três, assim como o 8128 que também era perfeito e tinha quatro algarismos, logo o próximo número perfeito, o quinto, certamente teria cinco algarismos, e seria gerado do primo 11, já que era o próximo primo da lista, pois os quatro primeiros teriam sido construídos a partir dos primos, 2, 3, 5 e 7, respectivamente. E ainda observou, que os números perfeitos tinham suas terminações nos algarismos 6 e 8 alternadamente. No entanto, essas conjecturas de Nicómaco, foram rejeitadas com a descoberta dos números perfeitos seguintes. O quinto número perfeito foi descoberto no século XV, 33.550.336, e derrubou as duas primeiras conjecturas de Nicómaco, pois tem 8 algarismos e não cinco, além de ser formado a partir do primo treze e não onze. Após a descoberta do sexto número perfeito, 8.589.869.056, a última conjectura de Nicómaco foi negada, pois o número terminou em 6, assim como seu antecessor, não alternado para 8.

Aproximadamente, no ano 1000 d.C., o matemático Alhazem verificou que a proposição de Euclides era válida para números perfeitos pares, isto é, se um número perfeito era par, então ele era da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$, mesmo não conseguindo provar tal resultado. Alhazem estava correto, mas foi apenas durante o século XVIII que surgiu a demonstração desse resultado, apresentada pelo matemático suíço Leonhard Euler. Com a demonstração exibida por Euler, a procura de mais números perfeitos resumiu-se à busca de número primos da forma $2^n - 1$, **mais conhecidos por primos de Mesenne**, nome dado em homenagem a Marin Mersenne, matemático que dedicou seus estudos na procura destes números.

Mais recentemente, o matemático Édouard Lucas, teve um papel relevante na busca de mais números perfeitos. Provou que todos os números perfeitos pares terminam em 16, 28, 36, 56, 76 ou 96. Além disso, mostrou que $2^{127} - 1$ é primo, descobrindo deste modo o maior número perfeito antes da era dos computadores.

Com o surgimento dos computadores e dos supercomputadores, outros números perfeitos foram encontrados. Até 2013 eram conhecidos 48 primos de Mersenne e, por consequência, 48 números perfeitos. Já em 2017 se chegaria ao 50º número perfeito o qual foi encontrado através do GIMPS, um grande projeto colaborativo dedicado a encontrar números primos de Mersenne. Conhecido como o $M_{77232917}$, foi descoberto em 26 de dezembro de 2017, pelo voluntário Jonathan Pace, um engenheiro elétrico de 51 anos que mora em Tennessee. Este número perfeito tem mais de vinte e três milhões de algarismos, precisamente, 23.249.425 algarismos, sendo o 50° número perfeito. O GIMPS tem atingido marcas incríveis ao encontrar o triplo do número esperado de novos primos de Mersenne, uma dúzia nos últimos quinze anos. O último primo de Mersenne descoberto foi ainda mais incrível e parece ter tido muita sorte também, o Patrick Laroche de Ocala, pois conseguiu em apenas quatro tentativas encontrar o $M_{82589933}$, caracterizando o 51° primo de Mersenne. Durante anos, Patrick Laroche de Ocala usou o software GIMPS como um "teste de estresse" gratuito para suas compilações de computador. Recentemente ele começou a caça primária em seu servidor de mídia para devolver ao projeto. A título de comparação, alguns participantes do GIMPS pesquisaram por mais de 20 anos com dezenas de milhares de tentativas, mas nenhum sucesso. Isso prova que, com sorte, qualquer um pode encontrar o próximo novo primo de Mersenne. No entanto até o momento se conhece **51 primos de Mersenne e consequentemente 51 números perfeitos**.

Mesmo não existindo registros físicos que o comprovem, Nicómaco de Gerasa teria vivido no final do séc. I d.C. Segundo os historiadores, foi o primeiro a escrever sobre o pensamento e os ensinamentos matemáticos dos Pitagóricos, onde teve um relevante destaque seis séculos antes. Deste modo, os seus trabalhos foram, dos de maior importância realizados na época.

Em uma de suas obras, Introdução à Aritmética, que foi traduzido para latim por Lúcio Apuleio no séc.II e, mais tarde, por Boécio no séc.V, Nicómaco não só define números perfeitos como sendo aqueles cuja soma dos seus divisores próprios é igual ao próprio número, mas traz um sentido filosófico à classificação de "perfeito", como é mostrado no seguinte fragmento:

"Como as coisas justas e excelentes são muito poucas e facilmente enumeráveis, enquanto as coisas feias e demoníacas abundam, também os números deficientes e superabundantes existem numa enorme quantidade e de uma forma irregular, e os números perfeitos são facilmente enumeráveis e aparecem numa determinada ordem, pois:

- *só existe um entre as unidades (6),*
- *um só entre as dezenas (28) e*
- *um terceiro entre as centenas (496) e*
- *um quarto entre os limites dos milhares (8128).*
  E a sua característica constante é acabar alternadamente entre 6 e 8 e serem sempre pares."

Nicómaco, além de conjecturar a respeito de algumas propriedades dos números perfeitos, também reafirma tais conjecturas, consolidando descobertas já existentes, embasado nos trabalhos dos pitagóricos e de Euclides, que permite obter números perfeitos: "A partir das potências de 2 e iniciando na unidade, vamos somando desde o primeiro até encontrarmos um número primo; então multiplicamo-lo pela última parcela da soma efetuada, obtendo assim um número perfeito." Na realidade, Nicómaco gostava de trazer um estilo diferente na linguagem, mesmo com significados aparentemente idênticos, mas isso, talvez seja reflexo de sua aproximação com a filosofia.

Euler provou que todos os números perfeitos pares devem ser da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$, mas ninguém jamais encontrou um número perfeito ímpar, nem provou que não pode existir. Pomerance deduziu um argumento não rigoroso que indica que não existem. Um número perfeito ímpar deve satisfazer diversas condições rigorosas. Deve ser, no mínimo, 10^{300}, deve ter um fator primo maior que 10^8, segundo maior fator primo deve ser, no mínimo, 10^4 e precisa ter pelo menos 75 fatores primos e pelo menos doze fatores primos distintos.

2.2 Primos de Mersenne

Marin Mersenne (1588-1648), foi um padre que estudou alguns anos num colégio jesuíta, depois passou a fazer parte da Ordem Franciscana, a pouco tempo criada em Minims, onde acabou permanecendo até ao fim da sua vida.

Mersenne reclamava da falta de apoio naquele tempo, para desenvolver suas pesquisas junto a outros estudiosos, pois não tinham espaços, nem recursos adequados para atender as necessidades de suas demandas. Devido a sua curiosidade em descobertas de novidades no campo da matemática, Mersenne fez do seu próprio quarto no convento em Minim, um laboratório de matemática, onde se encontrava regularmente, desde 1635 até sua morte em 1648, com outros estudiosos da época.

Apesar de Mersenne não ter dado uma contribuição de uma forma direta para a realização de algumas descobertas, a sua capacidade e curiosidade de investigar os problemas, fazia dele um colaborador com questões pertinentes para a comunidade científica. Mersenne tentou criar uma rede de comunicação com todas as figuras de notória importância na sua época, para trocar informações sobre as descobertas científicas no campo da matemática, visando mais conhecimentos para divulgação. Deste modo, propagando questões e solicitando contribuições, de outros pesquisadores, entusiasmou o desenvolvimento científico, sendo este seu trabalho semelhante às avançadas publicações científicas.

Depois da sua morte, foram encontradas cartas de 78 correspondentes espalhados pela Europa, entre os quais Fermat na França, Huygens na Holanda, Pell e Hobbes na Inglaterra e Galileu e Torricelli na Itália. Particularmente, Mersenne tinha mais curiosidade no conceito grego de divisibilidade, tendo se comunicado com Fermat, levantando questionamentos acerca da fatoração de alguns números.

Mersenne, também tinha interesse em descobrir se existia, ou não, um número perfeito com vinte ou vinte e um algarismos. Este argumento é embasado pela questão de averiguar se o número $2^{37} - 1$ é primo. Fermat descobriu que os únicos divisores primos de $2^{37} - 1$ teriam de ter a forma $74k + 1$ e que 223 é um fator primo de $2^{37} - 1$. Sendo assim, Mersenne acabou descobrindo que não existe nenhum número perfeito, que tenha vinte ou vinte e um algarismos, conforme era seu desejo.

Tornou-se rotineiro expressar os números primos da forma $2^k - 1$, por primos de Mersenne, tais números, a partir de agora, denotaremos de M_k. No entanto, pelo que estudamos anteriormente, encontrar um primo de Mersenne $2^k - 1$, limita-se a estabelecer os casos em que k é primo.

Em 1644, Mersenne afirmou, de forma provocatória, que M_p era primo quando p tomava os valores 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 e 257, e composto para todos os outros números primos inferiores a 257. Na época foi de comum acordo que Mersenne não averiguou a validade de sua sentença, apesar da não credibilidade na afirmação de Mersenne, nenhum outro matemático também, se propôs a mostrar algo que anulasse tais afirmações. Entre 1460 e 1588, o matemático italiano Pietro Cataldi provou que M_{17} e M_{19} eram de fato números primos.

Em 1772, Euler verificou que M_{31} era na realidade primo, embora carecesse de argumentos e embasamentos teóricos para lidar com os números M_{67}, M_{127} e M_{257}. No entanto, sua dedicação e esforço comprovaram a existência do oitavo número perfeito,

$$2^{30}(2^{31}-1) = 2.305.843.008.139.952.128.$$

Portanto, a afirmação de Mersenne exibia falhas. Em 1883, Pervouchine, e em 1886, Seelhoff, mostraram, em trabalhos independentes, que M_{61} é primo. Posteriormente, Cole, em 1903, descobriu fatores para M_{67}. Também em 1911, Powers provou que M_{89} é primo. Em 1914, Fauquembergue, e em 1917, Powers, mostraram que M_{107} é primo. Finalmente, em 1922, Kraitchik identificou a última falha de Mersenne ao mostrar que M_{257} é composto.

Com a modernização e o surgimento da era da informática, a busca de primos de Mersenne, e por consequência, de novos números perfeitos, tem sido efetuada com recurso de computadores. Em 1996 foi fundado o projeto GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), que partilha a busca por milhões de computadores pessoais de todo o mundo. Deste modo foram descobertos mais dezesseis primos de Mersenne, sendo o maior e mais recente $M_{77232917}$ encontrado em 26 de dezembro de 2017, elevando o número total de primos de Mersenne para 50.

É importante destacar ainda, que os maiores números primos encontrados nos últimos anos têm sido exatamente os primos de Mersenne. No estudo dos primos de Mersenne, deparamo-nos com alguns fatos que aguçam a nossa curiosidade. Levando em consideração quatro primos de Mersenne (especificamente p igual a 3, 7, 31 e 127), e os utilizamos como índices para os primos de Mersenne, obtemos um primo de Mersenne superior. Isto levou a conjectura de que se M_p é primo de Mersenne, M_{M_p} também será, logo provaria, que os primos de Mersenne são infinitos.

Em 1953, o supercomputador Alas, mostrou que $M_{M_{13}} = 2^{M_{13}} - 1 = 2^{8191} - 1$ é um número composto.

Ao longo do tempo, foram criados métodos para determinar se alguns tipos de números de Mersenne são primos ou compostos.

Teorema 2.2. *Se p e $q = 2p+1$ são primos , então, ou $q|M_p$ ou $q|(M_p+2)$, mas não ambos.*

Demonstração: Pelo Teorema de Euler, sabemos que $2^{q-1} - 1 \equiv 0(mod\ q)$.
Fatorizando, obtemos,

$$2^{q-1} - 1 = (2^{\frac{q-1}{2}} - 1)(2^{\frac{q-1}{2}} + 1) = (2^p - 1)(2^2 + 1) \equiv 0(mod\ q).$$

Ou seja, temos que $M_p(M_p+2) \equiv 0(mod\ q)$
Então concluímos que $q|M_p$ ou $(q|M_p+2)$. Se tal ocorresse simultaneamente, teríamos que $q|2$, o que é impossível. Demonstração retirada de [1]

■

Posteriormente, e nas condições do teorema anterior, foi possível determinar para que valores $q|M_p$ e $q|M_p+2$.

Teorema 2.3. *Se $q = 2n + 1$ é primo, então:*

a) $q|M_n$ se $q \equiv 1(mod\ 8)$ ou $q \equiv 7(mod\ 8)$.
b)$q|(M_n + 2)$ se $q \equiv 3(mod\ 8)$ ou $q \equiv 5(mod\ 8)$.

Demonstração: Como $q = 2n + 1$, temos que $n = \frac{q-1}{2}$.

a)Dizer que $q|M_n$ significa que $q|(2^n - 1)$, ou seja, que

$$2^n \equiv 1(mod\ q) \Leftrightarrow 2^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1(mod\ q).$$

Ora, pelo símbolo de Legendre, para que $2^n \equiv 1(mod\ q)$ temos de ter $\frac{2}{q} = 1$. Então concluímos que $q \equiv 1(mod\ 8)$ ou $q \equiv 7(mod\ 8)$.

b) Dizer que $q|(M_n + 2)$ significa que $q|(2^n - 1 + 2) \Leftrightarrow q|(2^n + 1)$, ou seja, que

$$2^n \equiv -1(mod\ q) \Leftrightarrow 2^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1(mod\ q).$$

Ora, pelo símbolo de Legendre, para que $2^n \equiv -1(mod\ q)$ temos de ter $\frac{2}{q} = -1$ Então concluímos que $q \equiv 3(mod\ 8)$ ou $q \equiv 5(mod\ 8)$. Demonstração retirada de [1]

■

Jonatha Pace recebeu **US** \$3.000 pela descoberta do 50º primo de Mersenne. Seu processador Intel i5-6600 levou seis dias para calcular o número. Um GPU Intel Xeon e um AMD RX Vega 64 levaram cerca de 35 horas para verificar o resultado. Porém mais recentemente, em 07 de dezembro de 2018 foi descoberto pelo Patrick Laroche de Ocala mais um primo de Mersenne, o $M_{82589933}$ chegando ao 51º. A descoberta do 51º número primo de Mersenne implica que o 51º número perfeito também tenha sido encontrado. No entanto, não se sabe se há mais números primos de Mersenne entre o 45º e o 51º, então essas posições são provisórias. Por exemplo, o 29º primo de Mersenne foi descoberto depois do 30º e do 31º.

Finalmente, vamos mostrar na tabela 2.1, todos os primos de Mersenne descoberto até hoje, que consequentemente geram a mesma quantidade de números perfeitos, como vimos acima o último número perfeito descoberto foi o 51°, temos no entanto 51 primos de Mersenne. Na primeira coluna da tabela mostraremos os 51 primos, denominados de, $P_1, P_2, P_3, ...P_{51}$. Os 51 primos de Mersenne denominados de M_k, onde k representa o primo de Mersenne. Na segunda coluna da tabela serão listadas as formações dos números perfeitos, a partir dos respectivos primos de Mersenne. Na terceira coluna, especificaremos o ano de descoberta desse número e seu descobridor, no entanto não existe registros dos quatro primeiros números perfeitos, que são formados a partir dos primos de Mersenne, 2, 3, 5 e 7. Sendo assim usaremos a palavra antiguidade nesses casos, fazendo uma alusão ao tempo e ao não registro na história.

Primos de Mersenne	Números Perfeitos	Ano e Decobridor
$P_1 = M_2$	$2(2^2 - 1)$	Antiguidade
$P_2 = M_3$	$2^2(2^3 - 1)$	Antiguidade
$P_3 = M_5$	$2^4(2^5 - 1)$	Antiguidade
$P_4 = M_7$	$2^6(2^7 - 1)$	Antiguidade
$P_5 = M_{13}$	$2^{12}(2^{13} - 1)$	1456, Regiomontanus
$P_6 = M_{17}$	$2^{16}(2^{17} - 1)$	1588, Cataldi
$P_7 = M_{19}$	$2^{18}(2^{19} - 1)$	1588, Cataldi
$P_8 = M_{31}$	$2^{30}(2^{31} - 1)$	1772, Euler
$P_9 = M_{61}$	$2^{60}(2^{61} - 1)$	1883, Pervushin
$P_{10} = M_{89}$	$2^{88}(2^{89} - 1)$	1911, Powers
$P_{11} = M_{107}$	$2^{106}(2^{107} - 1)$	1914, Powers
$P_{12} = M_{127}$	$2^{126}(2^{127} - 1)$	1876, Lucas
$P_{13} = M_{521}$	$2^{520}(2^{521} - 1)$	1952, Robinson
$P_{14} = M_{607}$	$2^{606}(2^{607} - 1)$	1952, Robinson
$P_{15} = M_{1279}$	$2^{1278}(2^{1279} - 1)$	1952, Robinson
$P_{16} = M_{2203}$	$2^{2202}(2^{2203} - 1)$	1952, Robinson
$P_{17} = M_{2281}$	$2^{2280}(2^{2281} - 1)$	1952, Robinson
$P_{18} = M_{3217}$	$2^{3216}(2^{3217} - 1)$	1952, Riesel
$P_{19} = M_{4253}$	$2^{4252}(2^{4253} - 1)$	1961, Hurwitz
$P_{20} = M_{4423}$	$2^{4422}(2^{4423} - 1)$	1961, Hurwitz
$P_{21} = M_{9689}$	$2^{9688}(2^{9689} - 1)$	1963, Gillies
$P_{22} = M_{9941}$	$2^{9940}(2^{9941} - 1)$	1963, Gillies
$P_{23} = M_{11213}$	$2^{11212}(2^{11213} - 1)$	1963, Gillies
$P_{24} = M_{19937}$	$2^{19936}(2^{19937} - 1)$	1971, Tuckerman
$P_{25} = M_{21701}$	$2^{21700(2^{21701}-1)}$	1978, Noll e Nickel
$P_{26} = M_{23209}$	$2^{23208}(2^{23209} - 1)$	1979, Noll
$P_{27} = M_{44497}$	$2^{44496}(2^{44497} - 1)$	1979, Nelson e Slowinski
$P_{28} = M_{86243}$	$2^{86242}(2^{86243} - 1)$	1982, Slowinski
$P_{29} = M_{110503}$	$2^{110502}(2^{110503} - 1)$	1988, Colquitt e Welsh
$P_{30} = M_{132049}$	$2^{132048}(2^{132049} - 1)$	1983, Slowinski

Primos de Mersenne	Números Perfeitos	Ano e Decobridor
$P_{31} = M_{216091}$	$2^{216090}(2^{216091} - 1)$	1985, Slowinski
$P_{32} = M_{756839}$	$2^{756838}(2^{756839} - 1)$	1992, Slowinski e Gage
$P_{33} = M_{859433}$	$2^{859432}(2^{859433} - 1)$	1994, Slowinski e Gage
$P_{34} = M_{1257787}$	$2^{1257786}(2^{1257787} - 1)$	1996, Slowinski e Gage
$P_{35} = M_{1398269}$	$2^{1398268}(2^{1398269} - 1)$	Joel e Armengald
$P_{36} = M_{2976221}$	$2^{2976220}(2^{2976221} - 1)$	1997, Gordon Spence
$P_{37} = M_{3021377}$	$2^{3021376}(2^{3021377} - 1)$	1998, Roland Clarkson
$P_{38} = M_{6972593}$	$2^{6972592}(2^{6972593} - 1)$	1999, Nayan Hajratwala
$P_{39} = M_{13466917}$	$2^{13466916}(2^{13466917} - 1)$	2001, Michael Cameron
$P_{40} = M_{20996011}$	$2^{20996010}(2^{20996011} - 1)$	2003, Michael Shafer
$P_{41} = M_{24036583}$	$2^{24036582}(2^{24036583} - 1)$	2004, Josh Findley
$P_{42} = M_{25964951}$	$2^{25964950}(2^{25964951} - 1)$	2005, Martin Nowak
$P_{43} = M_{30402457}$	$2^{30402456}(2^{30402457} - 1)$	2005, Curtis Cooper e Steven Boone
$P_{44} = M_{32582657}$	$2^{32582656}(2^{32582657} - 1)$	2006, Curtis Cooper e Steven Boone
$P_{45} = M_{37156667}$	$2^{37156666}(2^{37156667} - 1)$	2008, Hans-Michael Elvenish
$P_{46} = M_{42643801}$	$2^{42643800}(2^{42643801} - 1)$	2009, Odd Magnar Strindmo
$P_{47} = M_{43112609}$	$2^{43112608}(2^{43112609} - 1)$	2008, Edson Smith
$P_{48} = M_{57885161}$	$2^{57885160}(2^{57885161} - 1)$	2013, Curtis Cooper
$P_{49} = M_{74207281}$	$2^{74207280}(2^{74207281} - 1)$	2016, Curtis Cooper
$P_{50} = M_{77232917}$	$2^{77232916}(2^{77232917} - 1)$	2017, Jonathan Pace.
$P_{51} = M_{82589933}$	$2^{82589932}(2^{82589933} - 1)$	2018, Patrick Laroche de Ocala.

Tabela 2.1: Primos de Mersenne e Números Perfeitos.

Capítulo 3

Primos em Sequências

Investigaremos neste capítulo os Primos em Sequências: A Conjectura dos Primos Gêmeos e a Conjectura dos Números Primos em Progressão Aritmética. As principais referências utilizadas foram [8], [15], [17], [19].

3.1 Conjectura dos Primos Gêmeos

No tocante a Teoria dos Números, um dos problemas que aparece com expressividade e destaque há muitos anos, é a existência, ou não, da infinitude dos primos gêmeos. A conjectura dessa questão é creditada por uma parte das pessoas ao matemático Euclides. Já para outros, este questionamento foi feito há mais de 100 anos. Na verdade, até hoje ninguém sabe a origem da conjectura dos números gêmeos, porém muitos matemáticos investigaram e ainda hoje buscam argumentos para determinar esse resultado.

Alphonse de Polignac, matemático francês, conjecturou em 1849 de forma generalizada que para todo $k \in \mathbb{N}$, existem infinitos primos p tais que $p + 2k$ também é primo. Mais especificamente, o caso onde $k = 1$, é a Conjectura dos Primos Gêmeos.

Em Abril de 2013, o matemático chinês Yithang Zhang apresentou uma prova, da existência de um n menor que 70 milhões, de tal maneira que existam infinitos pares de primos cuja a diferença entre eles seja n. Passando-se um ano dessa demonstração, foi realizado um trabalho coletivo com muito entusiasmo pela comunidade do projeto Polymath, com a intenção de reduzir essa cota de 70 milhões, e conseguiram algo bem melhor, a validação do resultado para um n inferior a 246.

Desde o tempo de Euclides sabe-se da existência da infinitude dos números primos. Recentemente em **2004, T. Tao e B. Green** provaram um resultado de progressões aritméticas arbitrariamente longas de primos. O problema aqui é um pouco diferente. Analisamos o seguinte caso básico. É fácil de mostrar que os únicos primos cuja diferença é 1, são $(2, 3)$. A famosa conjectura dos números primos gêmeos, trata exatamente da existência de um número infinito de pares de primos da forma $(p,\ p+2)$ número primo gêmeo, em outras palavras, se existem infinitos pares de números primos cuja diferença é 2. Esta conjectura ainda está em aberto, tendo avançado lentamente na busca de um resultado para sua validação, e é um dos temas centrais da moderna teoria analítica dos números. Os primeiros pares de primos gêmeos menores do que 250 são: $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$, $(17,19)$, $(29,31)$, $(41,43)$, $(59,61)$, $(71,73)$, $(101,103)$, $(107,109)$, $(137,139)$, $(149,151)$, $(179,181)$, $(191,193)$, $(197,199)$, $(227,229)$, $(239,241)$. Interessante, com exceção de $(3,5)$, todos esses pares de primos podem ser escritos como $(6k-1,\ 6k+1)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, por exemplo, $5 = 6\times1-1$ e $7 = 6\times1+1$. Isso é fácil de notar, pois todo número inteiro pode ser escrito como $6k,\ 6k-1,\ 6k-2,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3$ desses os únicos que podem ser primos são $(6k-1, 6k+1)$ com $6k+1-(6k-1) = 2$, os outros são múltiplos de 2 e de 3. Logo pelo teorema de Dirichlet existem infinitos primos da forma $6k-1$ e $6k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, e cada par pode ser escrito como $(6k-1,\ 6k+1)$ exceto para $(3,5)$. Sendo assim, a questão da existência de infinitos primos gêmeos continua sem uma validação.

Observaremos uma demonstração realizada por Euclides, em sua obra, Os Elementos (Livro IX, Proposição 20), onde garante que existem infinitos números primos. Acompanhe a demonstração parafraseada:

Demonstração: Tomando-se **L** uma lista finita qualquer de números primos:

$$\mathbf{L}= \{p_1,\ p_2,\ p_3,\ ...,\ p_n\}$$

Pode-se mostrar que existem números primos que não estão nessa lista, da seguinte maneira: Sendo **P** o produto de todos os números primos na lista:

$$P = p_1 \times p_2 \times p_3 \times ... \times p_n.$$

E sendo,

$$q = P + 1.$$

Então, **q** pode ser primo ou não:

- Se **q** é primo então há pelo menos um número primo a mais que não está listado.

- Se **q** não é primo, então algum fator primo **p** divide **q**. Esse fator **p** não está na nossa lista **L**, se estivesse, ele dividiria **P** (pois **P** é o produto de todos os número na lista); mas como sabemos, **p** divide $P + 1 = q$. Então, para não deixar resto, **p** teria que dividir a diferença entre os dois números, que é $(P + 1) - P$ ou seja, 1. Mas não existe número primo que divida 1, assim haveria uma contradição, logo, **p** não pode estar na lista. Isso significa que pelo menos mais um número primo existe além dos que estão na lista.

Isso prova que para qualquer lista finita de números primos, há um número primo que não está na lista. Portanto, existem infinitos números primos. Demonstração retirada de [16]. ■

Tendo a certeza da existência de infinitos primos, nos concentremos agora na existência de infinitos primos gêmeos.

Como visto anteriormente, sabe-se que com exceção dos números 2 e 3 todos os números primos gêmeos são da forma $p = 6k \pm 1$. Daí segue, que todos os pares de primos gêmeos, com exceção do 3 e 5 são da forma $(6k-1,\ 6k+1)$. É de notória importância a observação, de que muito dos números da forma $(6k-1)$ e $(6k+1)$ não são primos. Assim como na reta $y = x + 2$, estão presentes todos os pares ordenados que são primos gêmeos, porém nem todos seus pontos atendem a tal critério, não sendo obrigatoriamente primos gêmeos. O conjunto dos números primos gêmeos é limitado no seguinte sentido, a soma da série dos inversos dos números primos gêmeos converge, ao contrário da soma da série dos inversos dos números primos que diverge, como provado por Viggo Brun (1919). A constante de Brun, mostrando a convergência dos inversos dos números primos gêmeos, está apresentada na figura 3.1:

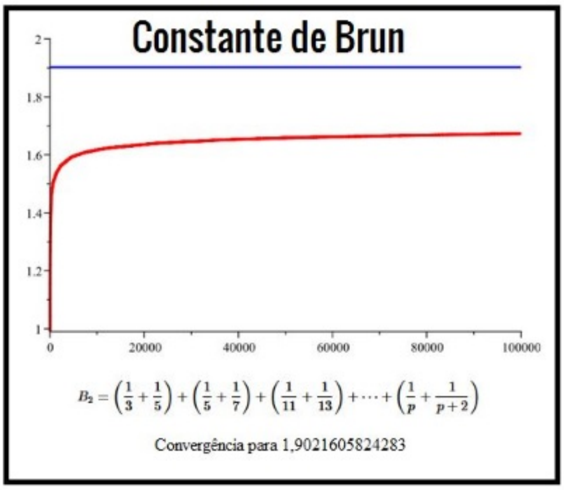

Figura 3.1: A Constante de Brun.

Apesar das descobertas de uma quantidade relevante de primos gêmeos, isso não é suficiente para garantir seu resultado. A maioria dos primos gêmeos muito grandes, que se conhece, são da forma $k \times 2n \pm 1$, No entanto se k não for muito grande, os testes de primalidade para os números serão de uma eficiência considerável.

Muitos estudiosos se dedicaram ao longo da história, em contribuir com o conceito de números primos, abordado por Euclides. E os resultados foram de diversas formas, onde o sucesso das investigações variou bastante, pois encontrar uma expressão que exibisse uma quantidade razoável de primos, e principalmente com características específicas como no caso dos primos gêmeos, era algo relevante para os matemáticos. Mesmo sabendo que a conjectura dos primos gêmeos só seria validada para uma quantidade infinita. Expressivas figuras debateram a respeito da existência de infinitos primos gêmeos. Hilbert, por exemplo mencionou o problema juntamente com a conjectura de Goldbach, no Congresso Internacional em que participou, enquanto defendia a necessidade de provar a hipótese de Riemann.

Dubner em 1993 mostrou que $459 \times 28529 \pm 1$ são primos gêmeos, Forbes em 1995 mostrou que $6797727 \times 215328 \pm 1$ são primos gêmeos e da mesma forma Lifchitz em 1999 mostrou que $361700055 \times 2\ 39020 \pm 1$ são primos gêmeos. Também os números $65516468355 \times 333333 \pm 1$ são primos gêmeos. Em janeiro de 2007, o projeto computacional sobre a distribuição dos números primos gêmeos, encontrou os maiores primos gêmeos contendo 58.771 dígitos: $2.003.663.613 \times 2195.000 \pm 1$. Em julho de 2009, foram encontrados primos gêmeos ainda maiores, com 100.355 dígitos: $65.516468355 \times 2333.333 \pm 1$.

O Teorema de Sebá diz: Se x e y são dois primos gêmeos maiores que três da forma $6n \pm 1$, então, temos que $x^2 - y^2$ é divisível por 24, para todo $x > y$. A tabela 3.1, traz a exibição do padrão desse teorema, para os dezoito primeiros números inteiros positivos:

n	$x = 6n + 1$	$y = 6n - 1$	x^2	y^2	$x^2 - y^2$
1	7	5	49	25	24
2	13	11	169	121	48
3	19	17	361	289	72
4	25	23	625	529	96
5	31	29	961	841	120
6	37	35	1369	1225	144
7	43	41	1849	1681	168
8	49	47	2401	2209	192
9	55	53	3025	2809	216
10	61	59	3721	3481	240
11	67	65	4489	4225	264
12	73	71	5329	5041	288
13	79	77	6241	5929	312
14	85	83	7225	6889	336
15	91	89	8281	7921	360
16	97	95	9409	9025	384
17	103	101	10609	10201	408
18	109	107	11881	11449	432

Tabela 3.1: Padrão demonstrado pelo Teorema de Sebá.

Na busca por alternativas que melhore a demonstração da conjectura dos Primos Gêmeos, uma das saídas, é a já mostrada anteriormente, redução da cota dos 70 milhões, descoberta por Zhang. Os matemáticos Terence Tao e James Maynard, também participaram do importantíssimo projeto Polymath, junto a outros pesquisadores da comunidade, e desenvolveram separadamente, uma mesma metodologia para redução dessa cota, que foi denominada do método de Maynard-Tao.

No entanto, sendo o mais otimista possível, mesmo utilizando de outras conjecturas como hipótese, a exemplo da conjectura de Elliott-Halberstam, esse método de Maynard-Tao, mostra avanços significativos, porém como o próprio Maynard afirma que, através desse método é impossível se chegar ao limite 2, o que certamente provaria a conjectura dos Primos Gêmeos.

Os números primos gêmeos foram caracterizados por Clement em 1949, da seguinte maneira:

Seja $n \geq 2$. Os inteiros n e $n+2$ são ambos primos, se e somente se:
$$4[(n-1)!+1]+n \equiv 0(mod\ n+2).$$

Inicialmente vamos enunciar e demonstrar o **Teorema de Wilson**, que será fundamental para a prova dessa caracterização dos primos gêmeos.

Teorema 3.1 (Wilson). *Se p é um número primo, então*

$$(p-1)! \equiv -1\ mod\ p$$

Demonstração: O teorema é válido obviamente para $p = 2$ e $p = 3$. Suponhamos $p \geq 5$ primo. para todo $i \in 1, ..., p-1$, pela Proposição 10.1, a congruência $iX \equiv 1\ mod\ p$ possui uma única solução módulo p; ou seja, dado $i \in 1, ..., p-1$ existe um único $j \in 1, ..., p-1$ tal que $ij \equiv 1\ mod\ p$. Por outro lado, se $i \equiv 1, ..., -1$ é tal que $i^2 \equiv 1\ mod\ p$, então $p|i^2-1$, o que equivale a $p|i-1$ ou $p|i+1$, o que se pode ocorrer se $i = 1$ ou $i = p-1$.

Logo,

$$2...(p-2) \equiv 1\ mod\ p,$$

e, portanto,

$$1.2...(p-2)(p-1) \equiv p-1 \equiv -1\ mod\ p.$$ Demonstração retirada de [9]

■

Após a demonstração do **Teorema de Wilson**, vamos demonstrar a caracterização dos **números primos gêmeos**.

Demonstração: Se a congruência for satisfeita, então $n \neq 2, 4$ e $(n-1)! + 1 \equiv 0(mod\ n)$ e, pelo Teorema de Wilson, n é primo. Por outro lado, $4(n-1)! + 2 \equiv 0(mod\ n+2)$
Que multiplicado por $n(n+1)$, dá:

$$[4(n+1)! + 1] + 2n^2 + 2n - 4 \equiv 0(mod\ n+2).$$

Então:

$$4[(n+1)! + 1] + (n+2)(2n-2) \equiv 0(mod\ n+2)$$

Logo:

$$(n+1)! + 1 \equiv 0(mod\ n+2).$$

De acordo com o Teorema de Wilson, $n+2$ é também primo.
Reciprocamente, se n e $n+2$ são primos, então $n \neq 2$ e:

$$(n-1)! + 1 \equiv 0(mod\ n),$$
$$(n+1)! + 1 \equiv 0(mod\ n+2).$$

Ora, $n(n+1) = (n+2)(n-1) + 2$ e daí $2(n-1)! + 1 = k(n+2)$ onde k é inteiro. De $(n-1)! \equiv -1(mod\ n)$, resulta que $2k + 1 \equiv 0(mod\ n)$ e, fazendo uma substituição,

$$4(n-1)! + 2 \equiv -(n+2)(mod\ n(n+2)).$$

Assim:

$$4[(n-1)! + 1] + n \equiv 0(mod\ n(n+2)).$$

Portanto, a demonstração está concluída. A demonstração foi retirada de [13].

■

No entanto, a conjectura dos Primos Gêmeos continua sendo um dos pertinentes mistérios da matemática, apesar de poucos avanços, quem teve um papel de destaque na busca de solucionar essa questão, foi o chinês Yitang Zhang, nascido em Xangai em 1955. Devido ter conseguido em 2013, fazer a seguinte demonstração: no lugar de pares de primos com diferença igual a 2, ele considerou diferenças quaisquer e provou que existe algum número n tal que a quantidade de pares de primos cuja diferença é n, é infinita. Por tamanho feito, Zhang foi convidado a dar a palestra de encerramento do Congresso Internacional de Matemática de 2014, em Seul, algo de extrema relevância para um matemático.

O argumento dele também mostrava que n pode ser tomado menor que 70 milhões. Um projeto colaborativo, com participação de matemáticos do mundo todo, auxiliados por computadores, conseguiu melhorar muito essa estimativa. Agora sabemos que podemos tomar $n = 246$. O problema original, com $n = 2$, continua sem solução. Despertando dessa forma, mais interesse no campo da matemática por uma solução desse importante resultado.

3.2 Conjectura dos Números Primos em Progressão Aritmética.

Existem muitas conjecturas envolvendo os primos, tanto historicamente quanto mais recentemente. Por exemplo, tem sido uma longa batalha para os pesquisadores da área, mostrarem a existência de infinitos primos gêmeos. Agora estudaremos alguns teoremas que embasam as pesquisas inerentes a existência dos **números primos em Progressão Aritmética**.

Teorema de Van Der Waerden

Para qualquer partição finita dos números naturais, $\mathbb{N} = C_1 \cup ... \cup C_r$, existe pelo menos um C_i que contém Progressões Aritméticas de comprimento arbitrariamente longo.

Na sua demonstração, **Van Der Waerden** utilizou essencialmente técnicas da teoria dos números e combinatória. No entanto, em 1977-78, Furstenberg e Weiss apresentaram uma nova demonstração desse teorema, recorrendo então a sistemas dinâmicos, em particular à dinâmica topológica. Para tal consideremos as seguintes definições:

Definição 3.1. *Define-se sistema dinâmico como sendo uma aplicação contínua $T : M \to M$ em que M é um espaço métrico compacto, e que se nota por (M, T). Para $x \in M$, considera-se $T^0(x) = x$ e, para $n \in \mathbb{N}$, $T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$, e defini-se **órbita de** x como $O(x) = \{T^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$. [12]*

Definição 3.2. *Se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(x) = x$ então x diz-se um **ponto periódico**. Se além disso, para todo $0 < m < k, T^m(x) \neq x$, então x diz-se um **ponto periódico de período mínimo** k. Neste caso, $O(x)$ contém exatamente k pontos distintos, $O(x) = \{x, T(x), ..., T^{k-1}(x)\}$. [12]*

Definição 3.3. *$x \in M$ diz-se um* ***ponto recorrente*** *por T se existir uma sucessão $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturais tais que $T^{n_k}(x) \to x$ quando $n_k \to +\infty$, ou seja, se a órbita de x contém uma subsucessão com limite x. [12]*

Definição 3.4. *Chama-se* ***espaço de probabilidade*** *a (X, m, μ) em que X é um conjunto, m é uma σ-álgebra em X (i.e., uma álgebra não vazia de subconjuntos de X que é fechada para a complementação e para uniões enumeráveis) e μ uma medida de probabilidade em (X, m), i.e, $\mu(X) = 1$. [12]*

Definição 3.5. *Considerando o espaço de probabilidade (X, m, μ), diz-se que uma transformação $T : X \to X$* ***preserva medida*** *se $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo o $A \in m$. [12]*

A ideia de recorrência é central em sistemas dinâmicos. Mais especificamente, quando o espaço M é limitado num sentido apropriado, por exemplo, tendo medida finita ou sendo compacto, algumas órbitas vão ter necessariamente alguma forma de recorrência, no sentido em que vão retornar arbitrariamente próximo da sua posição original. O primeiro resultado neste contexto foi formulado por Poincaré.

Teorema de Recorrência de Poincaré

Seja $T : X \to X$ uma transformação que preserva medida definida num espaço de probabilidade (X, m, μ). Se A é um conjunto mensurável, então para q.t.p. $x \in A$, existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) \in A$. Consequentemente, para q.t.p. $x \in A$, existem infinitos $k \in \mathbb{N}$ tais que $T^k(x) \in A$.

Demonstração: Seja $C_n = \{x \in A : T^j(x) \notin A, \forall j \geq n\}$. O teorema fica demonstrado se provarmos que $C_n \in m$ e $\mu(C_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Quanto à primeira questão, observando que $C_n = A - \cup_{j=n}^{\infty} T^{-j}(A)$, podemos concluir facilmente que $C_n \in m$. Vejamos agora que $\mu(C_n) = 0$.
Tem-se

$$C_n = A - \cup_{j=n}^{\infty} T^{-j}(A) \subseteq \cup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(A) - \cup_{j=n}^{\infty} T^{-j}(A),$$

donde

$$\mu(C_n) \leq \mu(\cup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(A)) - \mu(\cup_{j=n}^{\infty} T^{-j}(A)),$$

segue que

$$\mu(\cup_{j=n}^{\infty} T^{-j}(A)) = T^{-n}(\cup_{j=n}^{\infty} T^{-j}(A))) = \mu(\cup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(A)),$$

dado que T é uma transformação que preserva a medida μ. Logo, concluímos que $\mu(C_n) = 0$. Demonstração retirada de [12]
■

Teormema de Green-Tao

Alguns registros históricos evidenciam que a procura de padrões aditivos nos números primos tem sido um assunto recorrente na história da matemática. Uma conjectura clássica que muito estimulou a curiosidade dos matemáticos, provavelmente devido à sua simplicidade de apresentação e dificuldade de demonstração, afirma que no conjunto dos números primos existem progressões aritméticas de comprimento arbitrariamente longo. Considere-se alguns exemplos de progressões aritméticas de primos:

- (2)
- (2,3)
- (,3,5,7)
- (5,11,17,23)
- (7,37,67,97,127,157)
- (7,157,307,457,605,757)

  . . .
- $5749146449311 + 26004868890n, n = 0, ..., 20.$
- $11410337850553 + 4609098694200n, n = 0, ..., 21$
- $56211383760397 + 44546738095860n, n = 0, ..., 22$
- $515486946529943 + 136831 \times 223092870n, n = 0, ..., 23$
- $6171054912832631 + 366384 \times 223092870n, n = 0, ..., 24$
- $43142746595714191 + 23681770 \times 223092870n, n = 0, ..., 25$

A origem desta conjectura clássica sobre os números primos não é de todo surpreendente, dado que a existência de progressões aritméticas arbitrariamente longas nos primos é sugerida por heurísticas relativamente simples baseadas no Teorema dos Números Primos e abaixo explicitadas. Note-se que a inexistência de progressões aritméticas de comprimento infinito nos primos se segue de resultados clássicos de teoria dos números que afirmam que as lacunas entre primos podem ser arbitrariamente grandes.

Com os avanços dos estudos no campo da matemática, outras conjecturas foram sendo formuladas, a exemplo da conjectura que visa mostrar a existência de progressões aritméticas arbitrariamente longas de primos consecutivos, a qual iremos analisar com maior rigor. Sendo provada como verdadeira, essa conjectura conteria o Teorema de Green-Tao em particular. Van der Corput, foi o primeiro teórico a desenvolver algum trabalho inerente a conjectura de progressões aritméticas de primos, ele usou métodos analíticos para provar que há infinitas progressões aritméticas de primos com tamanho 3. O recente Teorema de Green-Tao provou a conjectura para qualquer k. No entanto, deve-se salientar que a proposição de Green-Tao é meramente um teorema da existência, não fornece um algoritmo explícito, nem um argumento rigoroso para encontrar tais progressões de primos.

Uma **progressão aritmética de primos** , é um conjunto de números primos da forma, $p_1 + kd$ para p_1 e d fixos e k consecutivos, ou seja, $\{p_1,\ p_1 + d,\ p_1 + 2d, ...\}$. Por exemplo, 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089, representa uma progressão aritmética de 10 termos, e a diferença entre os primos da sequência é 210, caracterizando assim, a razão da P.A.

As inquietações dos pesquisadores para conjecturar a existência de sequências arbitrariamente longas de primos em progressão aritmética, é algo histórico. Já em 1770, Lagrange e Waring investigaram a respeito do tamanho da distância comum dos termos, ou seja da razão de uma progressão aritmética de n primos. Em 1923, Hardy e Littlewood, desenvolveram um argumento generalizado, conhecido como a conjectura “k-tupla” sobre a distribuição de primos, que inclui a hipótese de que existem progressões aritméticas de primos infinitamente longas como um caso especial. Um avanço expressivo nessa teoria, que trouxe contribuições complementares, foi posteriormente realizado por Van der Corput (1939), onde provou que há infinitas triplas de primos em progressão aritmética, e Heath-Brown (1981), provou que existem infinitas progressões de quatro termos, dos quais três são primos e outro número que pode ser primo ou semiprimo (um número natural que é o produto de dois números primos, não necessariamente distintos).

No entanto, apesar de todo esse trabalho, a prova do resultado geral de sequências arbitrariamente longas de primos, permaneceu uma conjectura aberta. Graças ao novo trabalho de Green e Tao, uma esperança para a validação da conjectura dos primos em progressão aritmética, parece finalmente ter surgido de uma maneira adequada. Em um artigo publicado na Preprint, Green e Tao (2004), se embasam num importante resultado conhecido como Teorema de Szemerédi, além dos trabalhos recentes de Goldston e Yildirim, uma excelente pesquisa a respeito do princípio da transferência, e 48 páginas de matemática, compactas e técnica, com a finalidade aparentemente de estabelecer o teorema fundamental de que os números primos contêm progressões aritméticas de comprimento k para todos os k. Ainda em 2004, Weisstein consegue argumentos suficientes para deixar a prova sem validade. E o dilema dos matemáticos por algo mais rigoroso continua.

Esta conjectura é um clássico. Na História de Dickson afirma-se que por volta de 1770 Lagrange e Waring pesquisaram o quanto grande deve ser a diferença usual de uma progressão aritmética de L primos, porém é difícil imaginar, que os mesmos não fizesse uma alto crítica, a respeito da clareza de seus resultados em relação a todos os L.

Apesar de não ter obtido êxito na demostração da conjectura, da mesma forma não seria surpreendente se alguém tivesse conseguido tal feito, isso devido a simplicidade do método aplicado nas investigações, baseado no teorema dos números primos sugerem que existem k-tuplas $N^2/log^k N$ dos primos $p_1, ..., p_k$ na progressão aritmética, sendo cada p_i no máximo N. Hardy e Littlewood, em seu famoso artigo de 1923, mostraram uma conjectura generalizada que, como um caso especial, contém a hipótese de que o número de tais progressões com k-termos é assintoticamente $C_k N^2/log^k N$ para um certo fator numérico explícito $C_k > 0$. Contudo não foi possível, nem mesmo da aproximação de um resultado para a conjectura, mesmo assim, a pesquisa teve sua notória contribuição no tocante a obtenção de um limite inferior $(\gamma(k) + o(1))N^2/log_k N$ para alguns γ muito pequenos $\gamma(k) > 0$.

O primeiro avanço dos teóricos na busca de validar a conjectura dos números primos em Progressão Aritmética, foi feito por Van der Corput que, em 1939, usou a técnica da soma dos números primo de Vinogradov para determinar o caso de $k = 3$, ou seja, existem uma quantidade infinita com triplas de primos em progressão aritmética. No entanto, a questão de progressões aritméticas mais longas parece ter permanecido completamente aberta (exceto para limites superiores), mesmo para $k = 4$. Por outro lado, sabe-se há algum tempo que melhores resultados podem ser obtidos se substituir os primos por um conjunto ligeiramente maior de quase primos. O resultado mais interessante é abordado por Heath-Brown. Ele mostrou que existem infinitas progressões de quatro termos consistindo de três primos e um número que é primo ou um produto de dois primos.

O problema de encontrar longas progressões aritméticas nos primos, também atraiu o interesse de matemáticos computacionais. Até o ano de 2004, a maior progressão aritmética conhecida dos primos era a de 23 termos, e foi encontrada por Markus Frind, Paul Underwood e Paul Jobling: $56211383760397 + 44546738095860k$; $k = 0, 1, ..., 22$. Já em 2008 esse número aumentou para 25 termos, sendo encontradas por Chermoni e Wroblewski progressões aritméticas de primos com 24 e 25 termos: $515486946529943 + 136831 \times 223092870k, k = 0, ..., 23$ e $6171054912832631 + 366384 \times 223092870k, k = 0, ..., 24$. Contudo a maior progressão aritmética de primos conhecida é a de 26 termos, descoberta em 2010 por Perichon: $43142746595714191 + 23681770 \times 223092870k, k = 0, ..., 25$.

Agora serão abordados alguns teoremas, acerca da conjectura dos números primos em Progressão Aritmética. **Teorema 1**: Os números primos contêm infinitas progressões aritméticas de comprimento k para todo k. No próximo teorema, veremos uma argumento mais completo. **Teorema 2** (teorema de Szemeréi nos primos): Seja A qualquer subconjunto dos números primos de densidade superior relativa positiva; portanto

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} sup\ \pi(N)^{-1}|A \cap [1, N]| > 0,$$

onde $\pi(N)$ indica o número de primos menores ou iguais a N. Então A contém infinitamente muitas progressões aritméticas de comprimento k para todo k.

Observe que, se substituirmos "primos" na afirmação do **Teorema 2**, pelo conjunto de todos os inteiros positivos $\mathbb{Z}^{+}$, estaremos na realidade tratando do famoso teorema de Szemerédi: Os Primos contêm Progressões Aritméticas arbitrariamente longas. E a nossa conjectura estaria demonstrada.

O caso especial $k = 3$ do **Teorema 2** foi recentemente estabelecido pelo primeiro autor, usando métodos da análise de Fourier. Porém, os métodos usados até agora em nossos estudos, não tem muito envolvimento com a **análise de Fourier**. Embora o argumento se baseie no teorema de Szemeréi, tanto pode ser provado pela teoria abordada por Szemeréi, quanto pela análise de Fourier. Também observamos que, se os primos fossem substituídos por um subconjunto aleatório dos inteiros, com densidade de pelo menos $N^{-1/2+\varepsilon}$ em cada intervalo $[1, N]$, então o caso $k = 3$ do teorema acima seria estabelecido.

Por muito tempo, os estudiosos da matemática fizeram conjecturas sobre padrões nos primos, um dos mais triviais a afirmar é que existem muitas progressões aritméticas de primos. Não está claro exatamente quando essa conjectura foi formalizada pela primeira vez, mas já em 1770, Lagrange e Waring estudaram o problema de quão grande deve ser a diferença comum de uma progressão aritmética de k primos. Uma questão natural que surge a partir desse argumento, é perguntar se os números primos contêm progressões aritméticas arbitrariamente longas. No entanto essa indagação continua sem uma resposta rigorosa, pois se conseguissem demonstrar com precisão essa pergunta, consequentemente a conjectura dos números primos em Progressão Aritmética, aqui abordada, estaria solucionada. Porém tais resultados ainda seguem como objetivos idealizados por muitos pesquisadores da matemática e de áreas afins.

Capítulo 4

Número Lychrel

Neste capítulo analisaremos a Conjectura 196 e a existência do Número Lychrel. As principais referências usadas foram [10], [11].

Um número Lychrel é um número natural que não pode formar um palíndromo, que são os números que independente da posição de serem lidos, para frente ou para trás, permanecem os mesmos. Por exemplo, 44, 727, 1991, 38483. Esse conjunto de números assimétricos, também pode ser denominado de palíndromos numéricos. No entanto os números que mesmo utilizando o processo iterativo de reverter repetidamente seus dígitos e adicionar os números resultantes não geram palíndromos, esses seriam caracterizados por número Lychrel. Esse processo é às vezes chamado de algoritmo 196, por ser o número mais famoso associado ao processo. Na base dez, nenhum número de Lychrel foi provado existir, mas muitos, incluindo 196, são suspeitos a atenderem tal conjectura. Contudo, o grande desafio dos estudiosos dessa área é validar esse resultado.

Alguns números se tornam palíndromos rapidamente, após repetidas inversões e acréscimos, e portanto não são números de Lychrel. Todos os números de um dígito e dois dígitos eventualmente se tornam palíndromos, depois de repetidas reversões e acréscimos. Cerca de 80% de todos os números abaixo de 10.000 resultam em um palíndromo em quatro ou menos etapas; cerca de 90% desses resultam em sete etapas ou menos.

Em 23 de janeiro de 2017, um estudante russo, Andrey S. Shchebetov, anunciou em seu site que havia encontrado uma sequência dos primeiros 126 números, 125 deles nunca relatados antes que tomam exatamente 261 passos para alcançar um palíndromo de 119 dígitos. Esta sequência foi publicada no OEIS como A281506. Até então o maior número publicamente conhecido tinha sido encontrado por Jason Doucette em 2005.

Agora vamos escolher um número arbitrário, reorganizar os dígitos, invertendo sua posição e adicionando ao número original. Diz-se que a repetição dessa operação leva, em algum momento, a um palíndromo. Por exemplo, suponha que escolhemos

59. $59 + 95 = 154$, $154 + 451 = 605$, $605 + 506 = 1111$. Vamos tentar novamente com outro número, 183. $183 + 381 = 564$, $564 + 465 = 1029, 1029 + 9201 = 10230$, $10230 + 3201 = 13431$. Depois de 3 repetições da operação o número 59 chegou ao palíndromo 1111. Depois de 4 repetições o número 183 chegou ao palíndromo 13431. Quase todos os números chegam a um palíndromo quando esta operação se repete, mas os números na sequência derivados de 196 não chegaram até o momento a um palíndromo.

Todos os números de 2 dígitos geram palíndromos, para iniciar, vamos testar alguns números desse tipo: $12 + 21 = 33$; $64 + 46 = 110, 110 + 011 = 121$; $97 + 79 = 176, 176 + 671 = 847, 847 + 748 = 595$. Logo pode ser confirmado que a partir de qualquer número de dois dígitos, entre 10 e 99 leva a um palíndromo. porém nem todos eles chegam ao resultado rapidamente, um exemplo é o número 89 que parece não produzir um palíndromo, mas, após 24 iterações, o número de 13 dígitos a seguir é o primeiro palíndromo obtido, 8813200023188.

Investigar cuidadosamente cada um dos números de 2 dígitos para confirmar que ele produz um palíndromo não é muito matemático. Prestar atenção a determinados dígitos e observar sua soma combinada revela que o resultado é um palíndromo se todas as somas forem menores ou iguais a 9. Por exemplo, para 35, $3 + 5 = 8$, que é menor que 9, não é necessário averiguar mais. Existem 90 números de 2 dígitos, de 10 a 99. Esses números podem ser escritos da forma, ab, tal que, $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$.

- Quando o dígito das unidades é 0, o resultado é um palíndromo. Existem 9 casos desse tipo. ($a0$);
- Quando o dígito das unidades e os dígitos das dezenas são os mesmos, o número já é um palíndromo. Existem 9 casos desse tipo. (aa);
- Quando o dígito das unidades e o dígito das dezenas são simétricos, não há necessidade de investigar mais nada. Existem 36 casos desse tipo. (ab, ba);
- Quando a soma do dígito das unidades e das dezenas é menor ou igual a 9, não há espaço para outro dígito, portanto, o resultado é um palíndromo. Existem 16 casos desse tipo. ($a + b \leq 9$);
- Quando a soma do dígito das unidades e do dígito das dezenas for menor ou igual a 13, o resultado será um número de três dígitos e poderá ser denotado abc. Então cada dígito é menor ou igual a 4, logo no próximo passo é certo produzir um palíndromo. Existem 14 casos desse tipo. ($10 \leq a + b \leq 13$);
- Quando o dígito das unidades e o dígito das dezenas somam 14, os números podem ser 59 ou 68. Ambos $59 + 95 = 154$ e $68 + 86 = 154$, então é suficiente para investigar apenas um caso. Da mesma forma, quando a soma é 15, o

número pode ser 69 ou 78, mas $69 + 96 = 165$ e $78 + 87 = 165$, novamente, basta analisar apenas um caso.

Conforme esses resultados, temos: $90 - 9 - 9 - 36 - 16 - 14 - 2 = 4$. Basta agora verificar apenas os 4 casos seguintes. 59, 69, 79 e 89. A elaboração de uma tabela dessas observações, mostrada na figura 4.1, exibe os 4 casos mencionados acima, estão localizados no lado inferior direito da tabela. Os números que são difíceis de transformar em palíndromos são aqueles para os quais o dígito das unidades e o dígito das dezenas são próximos de 9. Portanto, isso mostra a dificuldade para o número 89 gerar um palíndromo, como já foi abordado anteriormente.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Figura 4.1: Validando os números de dois dígitos.

Agora vamos estudar os números de três dígitos, especialmente o 196 e o 879. Um método similar àquele usado para números de 2 dígitos pode ser usado para os números de 3 algarismos, mas junto com o aumento no número de algarismos, automaticamente também aumenta o grau de dificuldade da investigação em curso. Existem 900 números com 3 dígitos, de 100 a 999. Atualmente, existem 13 entre eles que são conhecidos por não produzirem palíndromos. 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986.

O primeiro desses números que foi averiguado através do processo de reversão e adição de seus algarismos e até o presente estudo não produziu um palíndromos foi o 196, então esse problema também é conhecido como o "problema 196". A Tabela 4.1, mostra o número de iterações necessárias para converter os números de três algarismos em um palíndromo. Entre os 900 casos, 90 deles já são palíndromos, a exemplo de 121, 222, 565, 818. Portanto não é necessário uma verificação. Investigando o processo pelo qual os 810 números restantes produzem palíndromos, existem 213 que resultam num palíndromo em apenas 1 passo, 281 levam duas etapas e 145 que requerem 3 passos. Isso revela que há muitos números que produzem palíndromos em um número inesperadamente pequeno de etapas. Os mais lentos requerem 23 etapas e existem 7 casos desse tipo. Há também os 13 casos mencionados acima que até o presente estudo não foi possível encontrar palíndromos.

Iterações	Frequência	Proporção
0	90	$10,0\%$
1	213	$23,7\%$
2	281	$31,2\%$
3	145	$16,1\%$
4	63	$7,0\%$
5	31	$3,4\%$
6	9	$1,0\%$
7	17	$1,9\%$
8	7	$0,8\%$
10	2	$0,2\%$
11	7	$0,8\%$
14	2	$0,2\%$
15	7	$0,8\%$
17	4	$0,4\%$
22	2	$0,2\%$
23	7	$0,8\%$
Mais de 100	13	$1,4\%$
Total	900	100%

Tabela 4.1: O número de iterações necessárias para alcançar um palíndromo (números de 3 dígitos).

Observe que o penúltimo dado elencado na primeira coluna da tabela, trata exatamente dos números candidatos a serem Número Lychrel. Apesar de trazer a informação "Mais de 100", não existe um valor exato, porém se forem encontrado um dia, certamente serão bem mais de cem iterações, pois já foram feitos testes com números extraordinariamente maiores e não se chegou a um palíndromo. Portanto, esse é o grande mistério a ser desvendado pelos estudiosos, demonstrar se esses números são palíndromos, ou não, pois caso provem que não sejam conhecidos, certamente provariam que era um número Lychrel.

Os 13 números de três dígitos que não produzem palíndromos podem ser divididos em dois grupos. O primeiro grupo é formado por 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 887 e 986, já o segundo grupo é composto por 879 e 978. Estes números são mostrados no diagrama esquemático na Figura 4.2. Os números 196 e 879 são conhecidas como "sementes", e pode ser visto que todos os outros números podem ser representados por estas sementes. A razão disso, se deve ao número 691 que é a ordem inversa do número 196, então eles são membros do mesmo grupo ($196+691 =$

691+196 = 887). OS números 295 e 592 produzem o mesmo número, 887, após uma iteração, de modo que também estão no mesmo grupo (295+592 = 196+691 = 887).

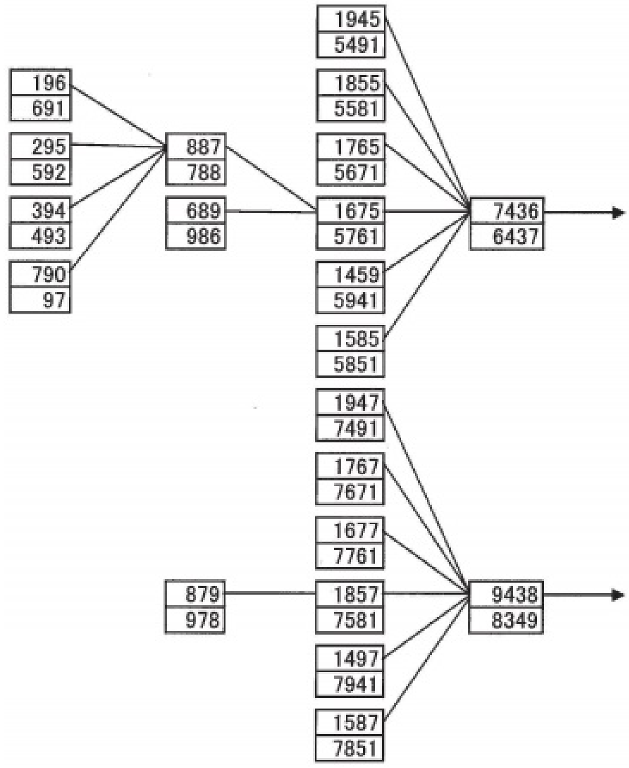

Figura 4.2: Diagrama esquemático mostrando os 13 casos não resolvidos (para números de 3 dígitos).

O menor número conhecido que não forma um palíndromo é 196. E é o primeiro candidato a número Lychrel. O número resultante da reversão dos dígitos de um número Lychrel também será um número Lychrel.

Conjectura-se que 196 e outros números que ainda não produziram um palíndromo são números de Lychrel, mas nenhum número na base dez foi provado ser Lychrel. Os números que não foram demonstrados como não-Lychrel são informalmente chamados de números "candidatos a Lychrel". Os primeiros números candidatos de Lychrel, são:
196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986, 1495, 1497, 1585, 1587, 1675, 1677, 1765, 1767, 1855, 1857, 1945, 1947, 1997.
Como 196 é o menor número de candidatos a Lychrel, ele recebeu a maior atenção.

Na década de 1980, a conjectura 196 atraiu a atenção de pesquisadores que utilizavam microcomputadores, com alguns programas de busca sofisticados, a exemplo do programa de Jim Butterfeld, que levou a pesquisa aparecer em várias revistas de computação, que tinham grande visibilidade no mercado. Em 1985, um programa computacional de James Killman, funcionou durante 28 dias na busca de um palíndromo para 196, percorrendo 12.954 passos de reversão e adição, alcançando um número de 5366 dígitos, porém seu método não obteve sucesso e a conjectura 196 continua sem um resultado.

A busca por uma solução para o problema 196 cresceu para um número com um milhão de dígitos, depois de 2.415.836 iterações sem atingir um palíndromo. Walker publicou suas descobertas na internet junto com sua última verificação, e fez um apelo convidando outros estudiosos a retomarem à missão, usando o resultado alcançado por ele até agora, como ponto de partida.

Em 1995, Tim Irvin e Larry Simkins usaram um computador multiprocessador e alcançaram a marca de dois milhões de dígitos em apenas três meses, sem encontrar um palíndromo. Jason Doucette seguiu o exemplo, e alcançou um número com 12,5 milhões de dígitos em maio de 2000. Wade VanLandingham usou o programa de Jason Doucette para chegar a um número com 13 milhões de dígitos, um registro desse trabalho foi publicado numa revista de ciências para crianças do Canadá. Desde junho de 2000, Wade VanLandingham se tornou o pesquisador de maior notoriedade na procura de um resultado para a conjectura 196, usando programas de vários pesquisadores que se dedicaram a essa questão. Em primeiro de maio do ano 2006, VanLandingham havia alcançado a marca de um número com 300 milhões de algarismos, sendo encontrado em média, um milhão de números a cada 6 dias. Usando o processador distribuído, em 2011, Romain Dolbeau, chegou a um resultado com um bilhão de iterações, para produzir um número com 413.930.770 algarismos, e em fevereiro de 2015 seus cálculos alcançaram um número com bilhões de dígitos. No entanto, um palíndromo ainda não foi encontrado.

Outros números fortes candidatos a serem de Lychrel, que também foram submetidos ao mesmo método de reversão e adição repetidas, a exemplo do 196, foram os seguintes: 879, 1997 e 7059. Eles foram levados para vários milhões de iterações sem nenhum palíndromo encontrado.

A versão original do livro de Asimov foi publicada em 1979, antes de um milhão de iterações terem sido alcançadas. Já se passaram 40 anos desde então. A inovação técnica em computação avançou e as capacidades dos computadores domésticos melhoraram, mas apesar de atingir um números com mais de 413 milhões de dígitos, até alcançado a casa dos bilhões, o problema permanece sem solução.

A discussão acima diz respeito ao recorde mundial para o qual o número 196 foi investigado e testado como não gerando um palíndromo. Mas há outro recorde, e será mostrado na Tabela 4.2, que aborda a maior quantidade de iterações realizadas por um número até o ano de 2005, antes que eventualmente produza um palíndromo.

Esta tabela é lida como indicando que o número de 2 dígitos 89 requer 24 iterações antes de produzir um palíndromo, e que o número de 3 algarismos 187, precisa de 23 iterações. Entre os maiores números de iterações obtidas até 2005, o recorde mundial era para o número de 17 dígitos 10.442.000.392.399.900, que necessita de 236 iterações. Este trabalho foi registrado por Doucette e foi calculado em 2005.

Dígitos	Número	Número de Iterações
2	89	24
3	187	23
4	1.297	21
5	10.911	55
6	150.296	64
7	9.008.299	96
8	10.309.988	95
9	140.669.390	98
10	1.005.499.526	109
11	10.087.799.570	149
12	100.001.987.765	143
13	1.600.005.969.190	188
14	14.104.229.999.995	182
15	100.120.849.299.260	201
16	1.030.020.097.997.900	197
17	10.442.000.392.399.900	236

Tabela 4.2: O maior número de iterações necessárias para produzir um palíndromo (Doucette, 2005).

No entanto, a partir de 2005 outras pesquisas foram realizadas e o estudante russo, Andrey S. Shchebetov obteve em 2017 um novo recorde para a maior quantidade de passos para um número gerar palíndromo, levando 261 iterações e alcançando um número de 119 dígitos.

Atualmente os cálculos para a conjectura 196, já atingiram a classe dos bilhões de algarismos, mas quanto a se esses resultados estão se aproximando de um palíndromo ou de um número Lychrel, que seria a prova de que 196 não geraria palíndromo, não está claro. E sem dúvidas é a grande inquietação dos estudiosos dessa conjectura, pois apesar de não encontrar um palíndromo para alguns números que são candidatos a Lychrel, também não conseguem mostrar que tais números não atendem a propriedade requerida. Portanto não pode-se afirmar que o 196, assim como outros números desse grupo são Lychrel. Contudo, sabemos que esses números, são sem dúvidas grandes favoritos a números de Lychrel, com destaque para o 196, devido a ser o primeiro dessa lista.

Capítulo 5

A Conjectura de Collatz

Neste capítulo examinaremos a Conjectura de Collatz. As principais referências utilizadas foram [3], [6].

A conjectura de Collatz, de Ulam, o problema de Saracusa, conhecida também como a conjectura $3n + 1$ foi formulada em 1937 pelo matemático alemão Lothar Collatz. Alguns nomes diferentes para um problema tão famoso no estudo da matemática, algo que se imagina ser verdadeiro, mas que nunca se chegou a uma demonstração satisfatória, tampouco a uma rejeição de tal argumento. No entanto a **conjectura de Collatz** continua despertando a curiosidade e aguçando o desejo de um resultado satisfatório em suas investigações. **Esta conjectura se expressa da seguinte maneira**: Se n é um número par, divide por 2 até chegar a um número ímpar ou 1, se for um ímpar diferente de 1, deve ser multiplicado por 3 e adicionado a 1, e inicia o processo de dividir por 2, até chegar o resultado final que será sempre 1. Esse processo mostra que sempre termina quando $(3n + 1) \div 2 = 2^k$, o $n = 2^k$ sendo $k \geq 1$, pois a divisão sucessiva de k vezes por 2 de 2^k é 1. Formalmente, isto equivale a uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que:

$$f(n) = \begin{cases} n/2, \text{se } n \text{ é par} \\ 3n + 1, \text{se } n \text{ é ímpar} \\ ((3n + 1)/2 = 2^k,\ n = 2^k) \text{ sendo } k \geq 1, \text{e o processo termina.} \end{cases}$$

O pesquisador português Tomás Oliveira e Silva explorou um grande número de hipóteses, começando no número 1 e ultrapassando o número 27 mil milhões de milhões. No entanto, não encontrou nenhum caso em que a sequência não atingisse 1. É um resultado importante, mas não basta aos matemáticos, pode haver um número ainda não explorado que falhe a conjectura. Sem uma demonstração rigorosa ou sem encontrar tal suposto número, o argumento continua sem validação.

A tabela 5.1, mostra os 17 primeiros números inteiros positivos, e seu teste para a conjectura de Collatz, assim como a quantidade de iterações para se chegar ao 1.

Números	Conjectura de Collats	Nº de Iterações
1	1	0
2	$2 \div 2 = 1$	1
3	$3 \times 3 + 1 = 10; 10 \div 2 = 5; 5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	7
4	$4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	2
5	$5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	5
6	$6 \div 2 = 3; 3 \times 3 + 1 = 10; 10 \div 2 = 5; 5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	8
7	$7 \times 3 + 1 = 22; 22 \div 2 = 11; 11 \times 3 + 1 = 34; 34 \div 2 = 17; 17 \times 3 + 1 = 52; 52 \div 2 = 26; 26 \div 2 = 13; 13 \times 3 + 1 = 40; 40 \div 2 = 20; 20 \div 2 = 10; 10 \div 2 = 5; 5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	16
8	$8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	3
9	$9 \times 3 + 1 = 28; 28 \div 2 = 14; 14 \div 2 = 7; 7 \times 3 + 1 = 22; 22 \div 2 = 11; 11 \times 3 + 1 = 34; 34 \div 2 = 17; 17 \times 3 + 1 = 52; 52 \div 2 = 26; 26 \div 2 = 13; 13 \times 3 + 1 = 40; 40 \div 2 = 20; 20 \div 2 = 10; 10 \div 2 = 5; 5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	19
10	$10 \div 2 = 5; 5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	6
11	$11 \times 3 + 1 = 34; 34 \div 2 = 17; 17 \times 3 + 1 = 52; 52 \div 2 = 26; 26 \div 2 = 13; 13 \times 3 + 1 = 40; 40 \div 2 = 20; 20 \div 2 = 10; 10 \div 2 = 5; 5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	14
12	$12 \div 2 = 6; 6 \div 2 = 3; 3 \times 3 + 1 = 10; 10 \div 2 = 5; 5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	9
13	$13 \times 3 + 1 = 40; 40 \div 2 = 20; 20 \div 2 = 10; 10 \div 2 = 5; 5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	9
14	$14 \div 2 = 7; 7 \times 3 + 1 = 22; 22 \div 2 = 11; 11 \times 3 + 1 = 34; 34 \div 2 = 17; 17 \times 3 + 1 = 52; 52 \div 2 = 26; 26 \div 2 = 13; 13 \times 3 + 1 = 40; 40 \div 2 = 20; 20 \div 2 = 10; 10 \div 2 = 5; 5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	17
15	$15 \times 3 + 1 = 46; 46 \div 2 = 23; 23 \times 3 + 1 = 70; 70 \div 2 = 35; 35 \times 3 + 1 = 106; 106 \div 2 = 53; 53 \times 3 + 1 = 160; 160 \div 2 = 80; 80 \div 2 = 40; 40 \div 2 = 20; 20 \div 2 = 10; 10 \div 2 = 5; 5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	17
16	$16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	4
17	$17 \times 3 + 1 = 52; 52 \div 2 = 26; 26 \div 2 = 13; 13 \times 3 + 1 = 40; 40 \div 2 = 20; 20 \div 2 = 10; 10 \div 2 = 5; 5 \times 3 + 1 = 16; 16 \div 2 = 8; 8 \div 2 = 4; 4 \div 2 = 2; 2 \div 2 = 1.$	12

Tabela 5.1: A Conjectura de Collatz, para os 17 primeiros números inteiros positivos.

A importância desta conjectura na análise dos números, está no fato de que a função $f(n)$ sempre nos leva a 1, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, isto é, dentro da análise dos números teremos uma função que nos leva a unidade, independente do valor de n.

A conjectura $3n + 1$ é simples de enunciar e aparentemente difícil de resolver. Paul Erdős (1913 - 1996), conhecido como o homem que só amou os números, comentou sobre a complexidade do problema $3n + 1$, "A matemática não está pronta para esses problemas". Esta conjectura tem ligações interessantes com a aproximação diofântica do logaritmo binário de 3 e da distribuição *mod* 1 da sequência $\{(3/2)^k : k = 1, 2, ...\}$, com abordagens teóricas analíticas sobre o inteiro 2, por exemplo na base 2, a expansão binária de 39 é $1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, ficando escrito em notação binária assim, 100111_2, e com a teoria da computabilidade foi demonstrado que uma generalização do problema $3n + 1$ é um argumento computacionalmente sem solução.

Esta conjectura permitiu traçar um mapa fractal sobre os número reais, como mostra a figura 5.1.

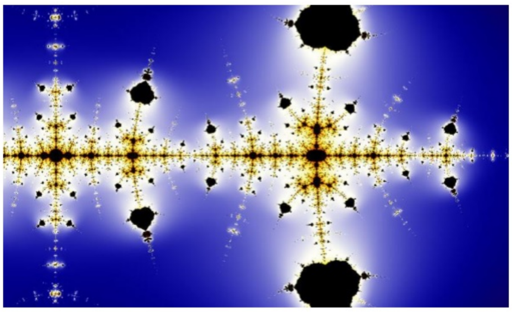

Figura 5.1: Mapa fractal sobre os números reais da conjectura de Collatz.

Qualquer contra-exemplo à conjectura de Collatz, deveria consistir em uma trajetória infinitamente divergente, ou seja, uma sequência infinita de números que nunca cumprisse as necessidades de tal conjectura, um ciclo fechado diferente do ciclo trivial $(4; 2; 1)$. Portanto, se pudesse ser provado que nenhum desses tipos de contraexemplos existe, então todos os inteiros positivos teriam um caminho que alcançaria o ciclo trivial, e o problema de Collatz estaria resolvido.

No caso da conjectura de Collatz, o tipo de ciclo pode ser definido com referência a definição de "acesso direto" do mapa de Collatz, $f(n) = (3n + 1)/2$ para n ímpar e $f(n) = n/2$ para n par. Por definição, um ciclo é uma sequência $(a_0; a_1; ...; a_n)$ onde $f(a_0) = a_1$, $f(a_1) = a_2$ e assim sucessivamente até $f(a_n) = a_0$, fechando o ciclo ao retornar para o valor inicial do dito ciclo. Para esta definição de atalho, o único ciclo conhecido é $(2; 1)$. Embora 4 seja parte do único ciclo conhecido para o mapa original de Collatz, ele não faz parte do ciclo do mapa de acesso direto.

Um ciclo k é um ciclo que pode ser dividido em $2k$ subsequências contíguas: k sequências crescentes de números ímpares alternando com k sequências decrescentes de números pares. Por exemplo, se o ciclo consiste em uma única subsequência incremental de números ímpares seguida por uma sequência decrescente de números pares, é chamada de ciclo de 1.

Steiner (1977), mostrou que não existe um ciclo de 1 que não seja trivial $(2;1)$. Simons (2004), usou o método de Steiner para provar que não há dois ciclos. Simons & Weger (2005), estenderam este teste até 68 ciclos. Não há k-ciclos até $k = 68.Almde68$, esse método fornece limites mais altos para os elementos desse ciclo. Por exemplo, se houver um ciclo de 75, então, pelo menos, um elemento do ciclo será menor que 2385×250. Portanto, à medida que as buscas exaustivas de computadores continuam, ciclos maiores podem ser descartados. Para expressar o argumento de uma forma mais intuitiva, não é necessário procurar ciclos com um máximo de 68 trajetórias, onde cada trajetória consiste em subidas consecutivas seguidas de descidas consecutivas.

B. G, Seifert (1988), também estudou com detalhes os ciclos aritméticos da conjectura de Collatz. No teste proposto pode ser determinado que não pode haver trajetórias divergentes infinitas, nem ciclos fechados que não conduzam a um valor final de 1, como expressa a conjectura de Collatz.

Frisando mais uma vez, a respeito da conjectura de Collatz: Se n é um número par, divida-o por 2 até que atinja um número ímpar ou 1, se for um número ímpar diferente de 1, multiplique por 3 e adicione 1 e inicie o processo de divisão por 2, o resultado final deve sempre chegar a 1, ou seja, se for um número par da forma $n = 2^k$ para $k \geq 1$ o processo termina, porque os sucessivos períodos de divisão por 2 virão até $n = 1$, mas se o resultado for um número ímpar $n \geq 3$, aplica-se $(3n+1)/2$ até chegar um número da forma $(3n+1)/2 = 2^k$. Por exemplo $n = 6$, $n_1 = 6/2 = 3$, $n_2 = (3n_1+1)/2 = (3 \times 3+1)/2 = 5$, $n_3 = (3 \times 5+1)/2 = 8 = 2^3$. E o processo termina porque a divisão sucessiva 3 vezes por 2 de 2^3, termina em 1.

Teste da Conjectura de Collatz:

- Existem soluções diretas com os números pares $n = 2^k$ para $k \geq 1$. Os sucessivos períodos de divisão k vezes por 2, tem um resultado final igual a 1.

- Os números ímpares $n = 1 + 2t$ para $t \geq 1$, eles teriam uma solução direta quando $(3n+1)/2 = 2^k$, onde $t = (2^k - 2)/3$ para $k \geq 3$ ímpar, considerando que sempre $2^k - 2$ é divisível por 3 quando $k \geq 3$ ímpar.

Teste:

1) Seja $n = 1 + 2t$ par, $t \geq 1$
2) De acordo com a conjectura de Collatz $(3n+1)/2 = 2^k$ de modo que o resultado final da divisão sucessiva por 2 de 2^k seja 1.
3) $(3n+1)/2 = 2 + 3t = 2^k$

4) $t = (2^k - 2)/3$.
5) Como $(2^k - 2)$ sempre é divisível por 3 quando $k \geq 3$ ímpar, portanto t seria número inteiro da forma $t = (2^k - 2)/3$ e $n = 1 + 2(2^k - 2)/3$, o que leva a uma solução direta de $(3n + 1)/2 = 2^k \implies k \geq 3$ ímpar, que por sucessivas divisões k vezes por 2 de 2^k termina em 1.

A tabela 5.2, dá exemplos do problema enunciado acima.

k	$t = (2^k - 2)/3$	$n = 1 + 2t$	$(3n + 1)/2 = 2^k$
3	2	5	8
5	10	21	32
7	42	85	128
9	170	341	512
11	682	1365	2048
13	2730	5461	8192
15	10922	21845	32768
17	43690	87381	131072
19	174762	349525	524288
21	699050	1398101	2097152
23	2796202	5592405	8388608

Tabela 5.2: Valores de k, t, n e $(3n + 1)/2 = 2^k$, onde a conjectura de Collatz é atingida diretamente, por divisões sucessivas k vezes por 2 de 2^k.

Padrões numéricos

Notaremos que, para qualquer valor ímpar n_i, nenhum deles, seu próximo valor ímpar n_{i+1} associado na sequência de Collatz é obtido a partir das seguintes expressões:

- Se $n_i = 1 + 8k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 6k$.
- Se $n_i = 3 + 4k \rightarrow n_{i+1} = 5 + 6k$
- Se $n_i = 5 + 8k \rightarrow n_{i+1} = 1 + 2k$

Sendo $k = 1, 2, 3, ...$

Expressão de n_i em função de n_{i+1}

Todos os números ímpares que atendem à conjectura de Collatz podem ser representados em uma árvore numérica, onde o primeiro nó é o número 1. As expressões anteriores permitem calcular n_{i+1} de acordo com n_i, obtendo assim as sequências que terminam no número 1. E, consequentemente, as expressões inversas de n_i em função de n_{i+1}, definem uma forma construtiva de obter esta árvore a partir do número 1. Para que a conjetura seja verdadeira, esta árvore deve conter todos os números ímpares. No desenvolvimento desse estudo, obtemos que as expressões de n_i em função de n_{i+1} são:

a)Para todo valor de $n_{i+1} : n_i = 4n_{i+1} + 1$.
b)Para $n_{i+1} \equiv 1(mod3) : n_i = (4n_{i+1} - 1)/3$.
c)Para $n_{i+1} \equiv 2(mod3) : n_i = (2n_{i+1} - 1)/3$.

A expressão a) se aplica a todos os valores de n_{i+1} e portanto, sempre irá existir, enquanto as expressões b) e c) só se aplicam quando o módulo do número n_{i+1} em relação a 3 é 1 ou 2 respectivamente.
Consequentemente, os números n_{i+1} que são múltiplos de 3, têm apenas o próximo elemento da árvore, esse número que é obtido aplicando a expressão a), enquanto números não múltiplos de 3 terão dois seguintes elementos na árvore: o resultante da expressão a) e aquele resultado da expressão b) ou da expressão c) de acordo com o seu módulo em relação a 3, seja 1 ou 2 respectivamente.

Construção da árvore numérica de Colltaz

É fácil verificar que o único número que pode ser o pai dessa árvore é o número 1, pois, para um número n_{i+1} ser o pai do grafo, ele deve cumprir que $n_i = n_{i+1}$ e ao aplicar as três expressões anteriores teremos:

$$\begin{cases} n_{i+1} = 4n_{i+1} + 1 \to n_{i+1} = -\frac{1}{3}. \\ n_{i+1} = \frac{4n_{i+1}-1}{3} \to n_{i+1} = 1 \\ n_{i+1} = \frac{2n_{i+1}-1}{3} \to n_{i+1} = -1 \end{cases}$$

Onde conseguimos observar que o único número natural que pode ser pai de si mesmo é o número 1.
O procedimento para construir a árvore é o seguinte:
1) Começa com o número 1, porque é o único número possível como pai da árvore.
2) O próximo nó que sempre existe e que é obtido ao aplicar, é calculado através da expressão a) acima.
3) O seguinte nó opcional é calculado de acordo com o módulo em relação a 3:
- Se o módulo for 0 (será um múltiplo de 3), não há um nó opcional.
- Se o módulo for 1, o nó opcional é obtido aplicando a expressão b).
- Se o módulo for 2, o nó opcional é obtido aplicando a expressão c).
3.1) Por exemplo, para o caso do número 1, o próximo nó será o número 1 e como seu módulo em relação a 3 é 1, ele também será seguido pelo nó opcional que resulta da expressão b) e que é o número 5. o número 1 não precisará ser representado

porque ele é ele mesmo.
3.2) E para o número 5, o próximo nó será o número 21 e como seu módulo com relação a 3 é 2, ele também será seguido pelo nó opcional que é resultado da expressão c) e esse é o número 3.
O processo é repetido com todos os novos números gerados.

A árvore assim gerada é única e consiste dos números ímpares infinitos que atendem à conjectura de Collatz, mas o procedimento não garante que contém todos os números ímpares, portanto, com o exposto acima, não demonstrou se a conjetura é cumprida ou não.
Exemplo dos primeiros níveis da árvore.
Os primeiros níveis da árvore construída com este procedimento estão mostrados na figura 5.2:

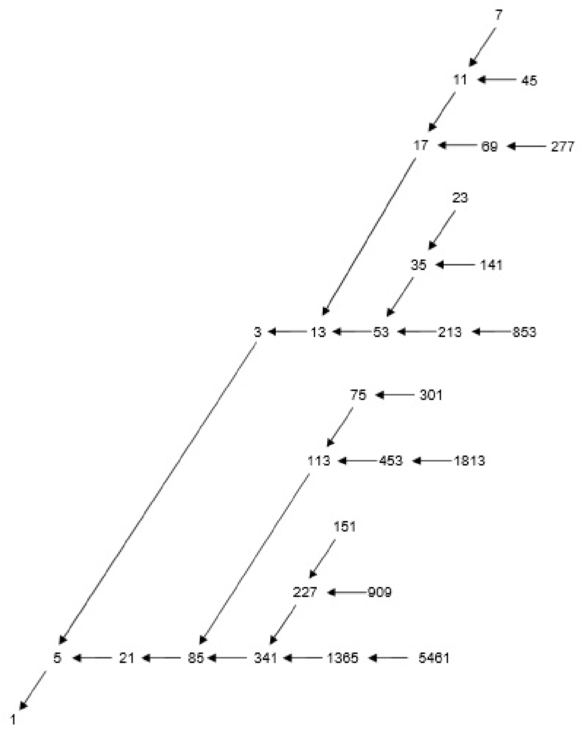

Figura 5.2: Árvore de Collatz, números ímpares infinitos.

Pode-se construir uma árvore com todos os números que atendem a Conjectura de Collatz, aplicando a definição da conjectura. A árvore como esta construída começaria no nó 1 que teria nós filho infinitos, cada dos quais, por sua vez, teria nós filho infinitos e assim por diante. A árvore aqui apresentada tem a vantagem de que um nó tem apenas um filho, se o nó é um múltiplo de 3 ou 2 surgem de outra forma.

Método para obter as sequências

Dado um valor ímpar n qualquer, a fim de obter da árvore anterior as sequências reais de números ímpares até ao número 1, na geração da árvore deve seguir os seguintes critérios:
- Representar com uma borda horizontal os valores da expressão a).
- Representar os valores das expressões b) e c) com uma borda na diagonal, como mostrado no exemplo. A única exceção da união $1 \longleftarrow 5$ que corresponderia a uma borda horizontal, mas é representado com uma borda diagonal.

Para obter a sequência real de números ímpares, começando no número dado n, deve-se atravessar a árvore até chegar ao número 1 e descarta todos os números horizontais que aparecem. Por exemplo, para o número 1813, a sequência de números ímpares, seria os seguintes números que permanecem sem parênteses após os valores horizontais terem sido colocados entre parênteses, quer dizer:

$$1813, (453), (113), 85, (21), (5), 1 \rightarrow 1813, 85, 1$$

Vamos calcular as expressões que permitem, a partir de um valor ímpar n_i obter o próximo valor ímpar n_{i+1} da sequência de Collatz.
Na tabela 5.3, os primeiros números ímpares são mostrados na coluna n_i e na coluna n_{i+1} o próximo ímpar na sequência de Collatz:

n_i	n_{i+1}
$*1$	1
$\bullet 3$	5
5	1
$\bullet 7$	11
$*9$	7
$\bullet 11$	17
13	5
$\bullet 15$	23
$*17$	13
$\bullet 19$	29
21	1
$\bullet 23$	35
$*25$	19
...	...

Tabela 5.3: Primeiros números ímpares na sequência de Collatz.

Onde para $k = 0, 1, 2, 3, ...$, temos que:
$1 + 8k \rightarrow 3(1 + 8k) + 1 = 4 + 24k = 4(1 + 6k) \rightarrow 1 + 6k$.

$3 + 4k \to 3(3 + 4k) + 1 = 10 + 12k = 2(5 + 6k) \to 5 + 6k$.
Portanto, sendo $k = 0, 1, 2, 3, ...$, os dois padrões identificados são os seguintes:
- Em (asterisco): se $n_i = 1 + 8k \to n_{i+1} = 1 + 6k$.
- Em (bolinha): se $n_i = 3 + 4k \to n_{i+1} = 5 + 6k$.

Sem identificar um padrão para os números $n_i = 5 + 8k$, para $k = 0, 1, 2, 3, ...$

Proposição 5.1 (p1). *Se para um valor ímpar n o próximo ímpar na sequência de Collatz é o valor m, então para o número ímpar $4n+1$ o próximo ímpar na sequência de Collatz é também o valor m.*

Demonstração: Se n for ímpar, $4n + 1$ também será ímpar e, aplicando a este último as expressões de Collatz, teremos que:

$$3(4n + 1) + 1 = 12n + 4 = 4(3n + 1) \to 3n + 1.$$

Portanto, se n for ímpar, então n e $4n + 1$ terão o mesmo número ímpar como o próximo valor na sequência de Collatz. A demonstração foi retirada de [6]. ∎

No entanto, apesar de ser uma temática que movimenta o campo da matemática, tanto contemporâneos quanto os de outras épocas, a conjectura de Collatz continua embelezando a matemática com sua maneira simples de compreender, mas por outro lado permanece intrigando e desafiando seus investigadores, mediante sua complexidade de encontrar uma prova. Contudo a procura por uma solução para a conjectura de Collatz ainda é um grande desafio para matemáticos e estudiosos da área.

5.1 Considerações Finais

No estudo de algumas Conjecturas em Teoria dos Números e suas Histórias, analisamos a relevância dessas conjecturas nesse campo do saber, tão importante que é a Teoria dos Números. Podemos observar conjecturas que pareciam simples, onde listamos vários casos particulares, que atendem às exigências de tal conjectura, mostrando assim, que são problemas de simples compreensão, não exigindo muito rigor técnico matemático para seu entendimento. No entanto, o grande e desafiador problema para os profissionais da área, é exatamente a prova dessas conjecturas, onde na maioria das vezes parecem simples, porém sua simplicidade reside apenas no seu enunciado e entendimento, já para o convencimento de especialistas da área com uma prova que seja convincente, continua em aberto até os dias atuais.

Mesmo com muitos estudos relevantes na área, descobertas pertinentes e de grande valia para esse ramo do saber, até o momento ninguém conseguiu convencer com seus argumentos a demonstração dessas conjecturas.

Matemáticos antigos e contemporâneos dividem responsabilidades e descobertas, na busca de um argumento que seja válido para tais resultados, apesar da ajuda de super computadores na era da informação digital, o que avançou significadamente os estudos na área, otimizando e agilizando às pesquisas. Contudo, apesar de todo esforço humano e tecnológico, ainda não foi suficiente para descoberta e convencimento dessas conjecturas, ficando como desafio tentador para os matemáticos da atualidade e do futuro, para quem sabe um dia, termos resultados convincentes e válidos, das demonstrações de tais conjecturas.

Referências Bibliográficas

[1] COSTA, T. J. M. B. Os Números Perfeitos e os Primos de Mersenne. Universidade de Lisboa. Dissertação de Mestrado Em Matemática para Professores. 2015.

[2] CASTRO, N. Conjecturas e Provas. Expresso, 2008.

[3] FERREIRA, J. H. P. Solución a la Cojetura de Collatz. Centro de Investigaciones Científicas, Escuela Naval de Cadetes "Almirante Padilla", Isla Manzanillo, Cartagena de Indias, Colombia.

[4] FERREIRA, A. J. L. Números Perfeitos. Universidade Estadual da Paraíba - UEPB. Monteiro, 2014.

[5] GALDINO, A. K. Foi descoberto um número primo de 23 milhões de dígitos (o 50° número perfeito). Outubro, 2018. Disponível em <http://engenhariae.com.br/editorial/ ciencia/foi-descoberto-um-numero-primo-de-23-milhoes-de-digitos-o-50°-numero-perfeito/>. Acesso em: 19 de Dezembro de 2018.

[6] GONZÁLEZ, J. A. Z. Estudio de la Conjectura de Collatz. Versión 2.4.

[7] Grande Internet Mersenne Prime, Pesquisa GIMPS Encontrando Primos com Recordes Mundiais desde 1996. Disponível em <https:www.mersenne.org>. Acesso em 10 de Maio de 2019

[8] GREEN, B.; TAO, T. The Primes contais arbitrarily long Arithmetic Progressions. Annals of Mathematics, 167. 2008. 481-157.

[9] HEFEZ, A. Ariitmética. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. Coleção PROFMAT. 2ª Edição, 2016, Rio de Janeiro.

[10] Lychrel Number. In: Wikpedia. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Lychrel_number>. Acesso em: 17 de Outubro de 2018.

[11] NISHIYAMA, Y. Numerical Palindromes and the 196 Problem. Departament of Business Information, Faculty of Information Management, Osaka University of Economics, 533 - 8533, Japan. International Journal of Pure and Aplied Mathematics, volume 80, n° 3, 2012, 375-384.

[12] PEIXE, T.; BUESCAU, J. Recorrências, Progressões Aritméticas Teoria Ergódica: Teorema de Van Der Waerden e de Green-Tao. Universidade de Lisboa.

[13] RIZEL, A. C. Números Primos. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. Novembro de 2014.

[14] STEWART, I. Os Maiores Problemas Matemáticos de Todos os Tempos. Editora ZAHAR.

[15] TAMAOKI, A. M. Primos Gêmeos. Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Outubro de 2017.

[16] TORRES, F.; RAMALHO, M. C.; MARCELINO, P.C. Primos Gêmeos: A Teoria Aritmética dos Números. IMEC - UNICAMP.

[17] VIANA, M. Primos Gêmeos constituem um dos mistérios mais intrigantes da Aritmética. Folha de São Paulo, Março de 2018. Disponível em <https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2018/03/primos-gemeos-constituem-um-dos-misterios-mais-intrigantes-da-aritmetica.shtml>. Acesso em: 26 de Dezembro de 2018.

[18] WANG, Y. Series in Pure Mathematics - Volume 4. The Goldbach Conjecture. Second Edition. World Scientifica, Academia Sinica, China.

[19] YANG, Z. Primes in Arbitrarily Long Arithmetic Progression. March 12, 2012.