



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Henrique de Oliveira Soares

Um Estudo Sobre a Pavimentação do Plano Euclidiano

Ouro Preto

2019

HENRIQUE DE OLIVEIRA SOARES

Um Estudo Sobre a Pavimentação do Plano Euclidiano

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre.

Área de Concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Thiago Fontes Santos

Co-orientador: Prof. Dr. Sebastião Martins Xavier.

**Ouro Preto
2019**

S676e

Soares, Henrique de Oliveira.

Um estudo sobre a pavimentação do plano Euclidiano [manuscrito] /
Henrique de Oliveira Soares. - 2019.

75f.: il.: color.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Fontes Santos.

Coorientador: Prof. Dr. Sebastião Martins Xavier.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de
Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-
Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Área de Concentração: Matemática Com Oferta Nacional.

1. Pavimentos. 2. Geometria espacial. 3. Matemática . I. Santos, Thiago
Fontes. II. Xavier, Sebastião Martins. III. Universidade Federal de Ouro Preto.
IV. Título.

CDU: 514.772.2



UFOP
Universidade Federal
de Ouro Preto



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT



Um Estudo Sobre a Pavimentação no Plano Euclidiano

Autor(a): Henrique de Oliveira Soares

Dissertação defendida e aprovada, em **14 de Junho de 2019**, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Thiago Fontes Santos - Orientador
Universidade Federal de Ouro Preto

Sebastião Martins Xavier - Coorientador
Universidade Federal de Ouro Preto

Jussara de Matos Moreira
Universidade Federal de Minas Gerais

Rodrigo Geraldo do Couto
Universidade Federal de Ouro Preto

Dedico este trabalho a todos aqueles que acreditaram e me ajudaram a trilhar esse objetivo, dedico também a todos os acadêmicos que porventura irão utilizar deste para futuras consultas e trabalhos de dissertação.

Agradecimentos

Agradeço a minha família por terem tido paciência e benevolência em horas em que sozinho me encotrava, meu pai Adilson de Miranda, e minha mãe, Juraci Tupaciguara, em especial minha esposa Priscila Roberta e meu filho Arthur Lourenço por sempre me apoiarem e acreditarem em minha capacidade.

Agradeço também ao meu orientador Thiago Fontes Santos e ao meu co-orientador Sebastião Martins Xavier por estarem presentes e me auxiliarem na elaboração do referido trabalho.

Resumo

O Objetivo deste trabalho é demonstrar o seguinte teorema: "Dados α e β números reais positivos é impossível pavimentar o plano com qualquer coleção de polígonos convexos, cada polígono com 7 ou mais lados e área maior que α e perímetro menor que β ". Para isso, precisaremos apresentar alguns conceitos básicos sobre os polígonos e as possíveis pavimentações do plano Euclidiano. Utilizaremos também a desigualdade isoperimétrica como uma ferramenta para demonstrar esse teorema.

Estudaremos os diferentes tipos de pavimentação do plano, apresentaremos os conceitos de pavimentação ideal e parcial, iremos mostrar que apenas 3 polígonos regulares pavimentam o plano, estudaremos um pouco sobre os polígonos não regulares que pavimentam o plano e mostraremos algumas curiosidades sobre eles.

A teoria envolvida no estudo sobre a pavimentação do plano é muito rica e contribuirá enormemente para a visão e a consolidação de conceitos geométricos. Utilizaremos alguns conceitos de cálculo diferencial afim de compreender e demonstrar o principal teorema, posteriormente utilizaremos desse teorema para demonstrar aspectos da pavimentação do plano. Ao final, iremos propor uma atividade com o intuito de relembrar conceitos geométricos e fornecer curiosidades relacionadas à pavimentação do plano.

Palavras-chave: Pavimentação, Plano euclidiano, Polígonos convexos, Geométricos, Desigualdade isoperimétrica.

Abstract

The objective of this work is to demonstrate the following theorem: "Given α and β real numbers and positives it is impossible to pave the plane with any collection of convex polygons, each polygon with 7 or more sides and larger area α than the perimeter less than β ". For this, we need to present some basic concepts about the polygons and the possible pavements of the Euclidean plane by Polygons, we will also use isoperimetric inequality as a tool to demonstrate this theorem.

Therefore, in this aspect we will study the different types of pavement of the plane, we will present the concepts of ideal and partial paving, we will show that only 3 regular polygons pave the plane, we will study a little about the non-regular polygons that flatten the plane and we will show some curiosities about them.

The theory involved in the paving plan study is very rich and will contribute enormously for the vision and consolidation of geometric concepts. We will use some concepts of differential calculus in order to understand and demonstrate the main theorem of the operational inequality, later we will use this theorem to demonstrate aspects of the plane flow. Later we will propose an activity with the intention of remembering geometrical aspects and providing curiosities related to the paving of the plane.

Keywords: Pavement, Euclidean Plane, Convex Polygons, Geometric, Inequality, Isoperimetry.

Conteúdo

1	Conceitos Básicos	12
1.1	Polígonos	12
1.2	Curvas planas	16
2	Pavimentação do Plano Euclidiano	17
2.1	Pavimentação por Polígonos Regulares	21
2.2	Pavimentação monoédrica por Polígonos convexos não regulares	23
2.2.1	Triângulos	24
2.2.2	Quadriláteros	26
2.2.3	Pentágonos	29
2.2.4	Pentágonos de Karl Reinhardt	29
2.2.5	Pentágonos de Richard Brandon Kershner	32
2.2.6	Pentágonos de Richard James III	34
2.2.7	Pentágonos de Marjorie Rice	35
2.2.8	Pentágonos de Rolf Stein	38
2.2.9	O Décimo quinto Pentágono não regular	38
2.2.10	Hexágonos	39
2.3	Desigualdade isoperimétrica	48
2.4	Desigualdade isoperimétrica e a pavimentação do plano	53
3	Matemática das Abelhas - Proposta de Atividade	63
3.1	Geometria e Abelhas	63
3.2	Proposta de Atividade	70
3.2.1	Iniciando a aula	70
	Referências Bibliográficas	74

Introdução

Pavimentar ou ladrilhar é simplesmente realizar encaixes de formas geométricas, sem que haja falhas (espaços vazios) ou sobreposição de peças. A Pavimentação é utilizada há muito tempo em diversas áreas, como nas artes, tapeçaria e confecções de roupas, esses padrões geométricos estiveram presentes em várias civilizações, dentre elas, assíria, babilônica, romana, persa, egípcia, grega, islâmica, árabe, chinesa. Estão presentes em vários lugares, com diferentes aplicações na física, matemática, engenharia, artes, arquitetura, computação gráfica.

Os gregos e as civilizações greco-romanas utilizaram muito as técnicas de pavimentação. Podemos citar como exemplo a construção do palácio de Alhambra, construído por volta de 1284 na cidade de Granada na Espanha. Em toda a sua construção são encontrados diferentes padrões de pavimentações. Os islâmicos também utilizaram essa técnica na fabricação de tecidos e tapetes.

Um questionamento válido é o seguinte: Quais polígonos pavimentam o plano? Para o caso de pavimentação monoédrica com polígonos convexos regulares, ou seja, pavimentações que utilizam apenas um tipo de polígono convexo, tem-se que o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono são os únicos possíveis.

Iremos começar nosso estudo introduzindo alguns conceitos básicos como linha poligonal, definição de polígono, polígonos côncavos e convexos, vamos apresentar os elementos que constituem um polígono, pavimentação do plano euclidiano, plano esse que servirá de objeto de nosso estudo, falaremos dos elementos de pavimentação, pavimentação fragmentada, pavimentação ideal e também vamos apresentar os vários tipos de pavimentação do plano euclidiano.

Posteriormente vamos apresentar a pavimentação do plano por polígonos regulares, provaremos que esse tipo de pavimentação só é possível com 3 tipos de polígonos regulares, o triângulo equilátero, quadrado e o hexágono regular, iremos também falar sobre a pavimentação do plano por polígonos não regulares, em especial, apresentaremos o caso dos pentágonos não regulares que pavimentam o plano.

Para finalizar, iremos provar a desigualdade isoperimétrica que será utilizada para validar o seguinte teorema: *"Sejam α e β quaisquer números reais positivos. É impossível pavimentar o plano com qualquer coleção de polígonos convexos, cada polígono com 7 ou mais lados, área maior que α e perímetro menor que β ".*

Após introduzir os conceitos inerentes à pavimentação do plano, iremos apresentar uma atividade referente à construção das colmeias de abelhas, o possível motivo de seus alvéolos serem feitos em formato hexagonal, provaremos que o prisma hexagonal de volume V fixado e altura h , também fixada, possui área menor que os prismas triangulares e quadrangulares de mesmo volume V e altura h . O objeto dessa atividade é relembrar conceitos geométricos que porventura podem ter se perdido ao longo da formação do discente, apresentar os três polígonos regulares que pavimentam o plano e apresentar uma curiosidade matemática.

1 Conceitos Básicos

Johannes Kepler, astrônomo, astrólogo e matemático alemão (1571-1630), em sua obra *Harmonia do Mundo*, de 1619, apresentou as primeiras investigações sobre a teoria da pavimentação do plano euclidiano, utilizando polígonos regulares e apontando um tratamento matemático para o problema.

Para começarmos a estudar os polígonos que pavimentam o plano, primeiramente precisamos definir alguns conceitos básicos e terminologias que irão nortear o estudo desses polígonos. Portanto, este capítulo tem como objetivo definir e apresentar conceitos matemáticos referentes aos polígonos e aos diferentes tipos de pavimentações que podemos realizar no plano euclidiano. As definições aqui presentes podem ser encontradas na referência [7].

1.1 Polígonos

Os polígonos são figuras geométricas cuja palavra é proveniente do grego que quer dizer: poli(muitos) + gonos(ângulos). Os polígonos são formados por uma linha poligonal fechada formada por segmentos consecutivos, não colineares.

Definição 1.1.1 (Linha Poligonal). *Sejam $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontos no plano, três a três não colineares unindo um número finito de segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$. Dizemos que $P_1, P_2, \dots, P_n$ são os vértices da linha poligonal. A linha poligonal é dita fechada quando $P_n = P_1$, se isso não ocorre dizemos que a linha poligonal é aberta.*

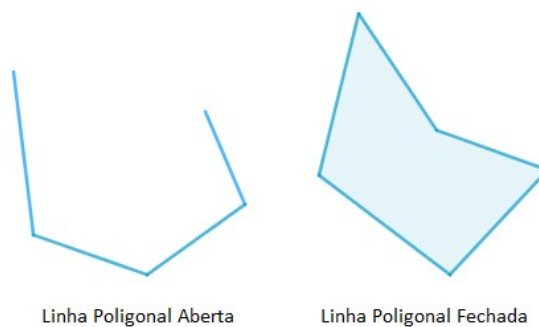


Figura 1.1: Linha Poligonal

Podemos verificar que a linha poligonal fechada divide o plano em dois subconjuntos, assim afirmado pelo teorema de Camille Jordan que diz que uma curva fechada simples no plano divide-o em duas partes, ou seja, que o complementar da curva tem duas componentes conexas, uma das quais é limitada e outra ilimitada. Uma observação cabível é a análise de um ponto interior e exterior à linha poligonal fechada. Dizemos que um ponto F é interior ou interno à linha poligonal quando toda semirreta de origem em F que não passa em um dos vértices da linha poligonal intercepta a poligonal um número ímpar de vezes. Caso a semirreta de origem em F intercepte a poligonal um número par de vezes dizemos que esse ponto F é exterior à poligonal.

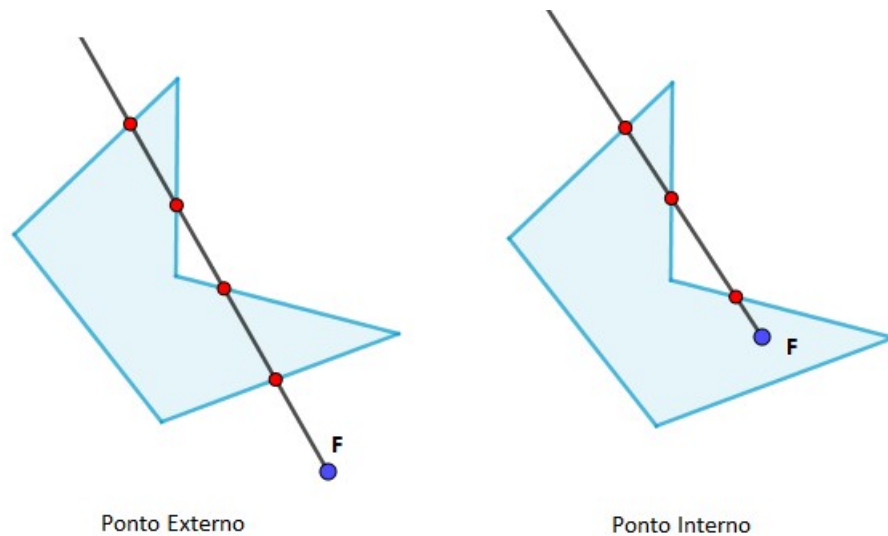


Figura 1.2: Ponto interior e exterior

Definição 1.1.2 (Polígonos). *Toda linha fechada simples (sem autointerseção) é denominada polígono. A união de todos os pontos internos a essa linha recebe o nome de região poligonal, cujo limite se estende até a linha poligonal. Nesse trabalho a palavra polígono irá designar tanto a linha poligonal quanto a região interna à linha.*

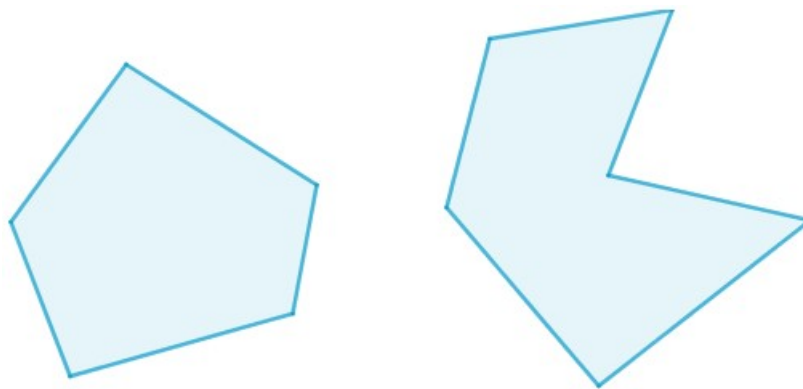


Figura 1.3: Polígonos

Definição 1.1.3 (Polígonos Côncavos). *Um polígono é denominado como não convexo ou côncavo, caso tenha algum ângulo com medida maior que 180° .*

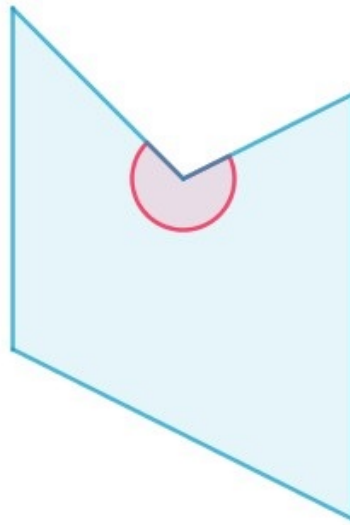


Figura 1.4: Polígono côncavo

Definição 1.1.4 (Polígonos Convexos). *Um polígono é dito convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais $(n - 2)$ vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina.*

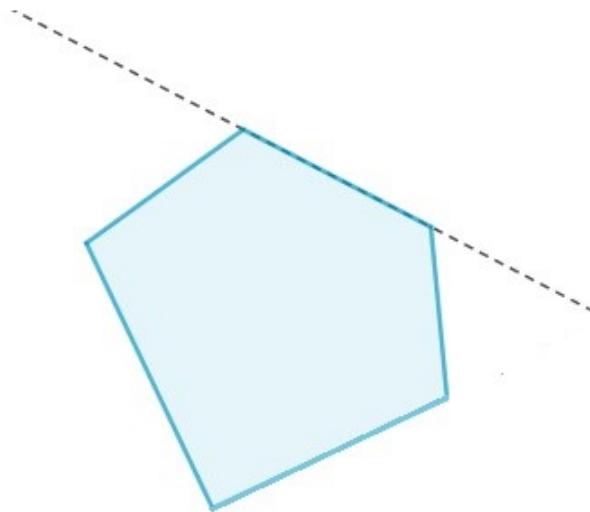


Figura 1.5: Polígono convexo

Definição 1.1.5 (Lados de um polígono). *Seja P um polígono com vértices $P_1, P_2, \dots, P_n$. Chamamos de lados desse polígono os segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$.*

Definição 1.1.6 (Ângulos internos). *Os ângulos internos de um polígono são definidos por dois lados, dois segmentos de reta, que possuem mesma origem.*

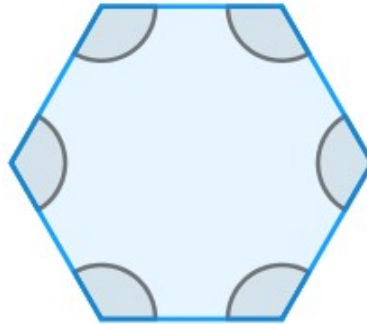


Figura 1.6: Ângulos internos

Definição 1.1.7 (Lados consecutivos). *Os lados do polígono que possuem a mesma origem são denominados como lados consecutivos.*

Definição 1.1.8 (Ângulos externos). *Os ângulos externos são formados, no exterior de um polígono, pelo prolongamento de um lado e o lado adjacente a ele.*

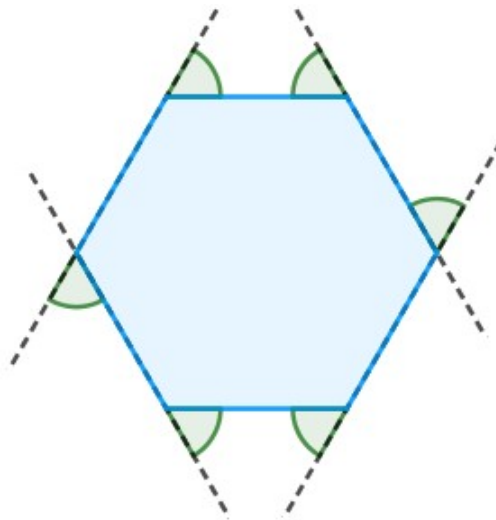


Figura 1.7: Ângulos externos

Definição 1.1.9 (Ângulos consecutivos). *Dois ângulos de um polígono são consecutivos se possuem um lado em comum.*

Definição 1.1.10 (Diagonais de um polígono). *As diagonais são segmentos de reta que unem dois vértices não consecutivos de um polígono.*

1.2 Curvas planas

Uma curva no plano pode ser pensada como sendo uma deformação contínua de um intervalo, ou ainda, a trajetória de um deslocamento de uma partícula no plano. Estas curvas podem ser descritas por meio da sua equação cartesiana $f(x,y) = c$, onde f é uma função de x, y e c é uma constante. Desta maneira, uma curva é um conjunto de pontos, tal que: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = c\}$.

A seguir vamos definir alguns conceitos referentes as curvas no plano, conceitos esses que podem ser encontrados na referência [19] com o intuito de elucidar os capítulos que se seguem.

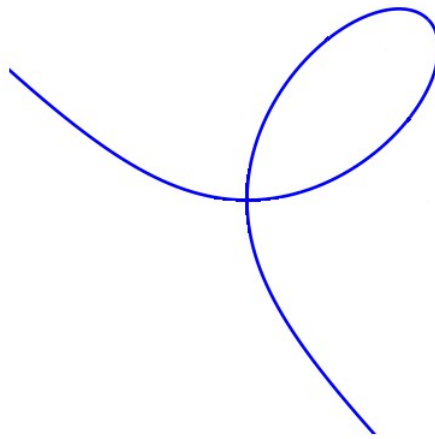


Figura 1.8: Curva Plana

Em diversas ocasiões, considerar o caso especial em que curvas são descritas por uma equação da forma $F(x,y) = 0$ pode ser útil. Podemos citar um caso especialmente importante, quando $F(x,y) = 0$ é um polinômio em duas variáveis. Nesse caso, o conjunto $F(x,y)$ é chamado uma curva algébrica.

Definição 1.2.1. Uma curva contínua no plano $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A aplicação α , dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é contínua, se cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Definição 1.2.2. Uma curva parametrizada suave ou um caminho no plano $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, que a cada $t \in I$ associada $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$.

Definição 1.2.3. Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em $t_0 \in I$, se $\alpha'(t_0) \neq (0,0)$, ou equivalentemente, se $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$. A curva α é regular em I , se α for regular para todo $t \in I$. Se $\|\alpha'(t_0)\| = 0$, dizemos que α é singular em t_0 e $\alpha(t_0)$ é chamada uma singularidade de α .

2 Pavimentação do Plano Euclidiano

Pavimentar significa utilizar figuras geométricas para cobrir o plano totalmente, sem sobreposição ou sobras, de modo que todo ponto do plano pertença a apenas uma figura, exceto os pontos que pertencem às arestas das figuras de pavimentação.

“Um conjunto de polígonos é uma pavimentação do plano se, e somente se, o conjunto de polígonos cobre sem cruzamentos o plano. Cobrir significa que todo ponto do plano pertence a pelo menos um polígono do conjunto. Sem cruzamentos significa que toda interseção de dois polígonos tem área nula”.

(BARBOSA, 1993, p.3)

Portanto pavimentar ou tesselar nada mais é do que cobrir o plano de maneira a não deixar falhas nem sobrepor figuras. A seguir vamos apresentar definições e exemplos de algumas pavimentações no plano.

Definição 2.0.1 (Nós). *Em uma pavimentação, os vértices de um polígono são denominados nós.*

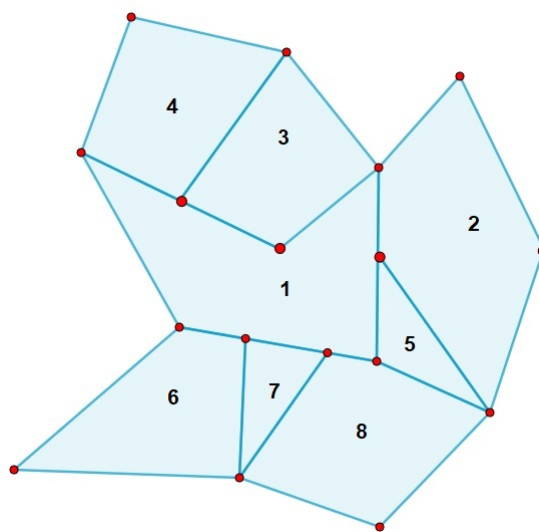


Figura 2.1: Elementos de um Polígono

Definição 2.0.2 (Arestas). *Arestas são segmentos de reta cujas extremidades são dois nós de polígonos.*

Ou seja em uma pavimentação podem existir polígonos que possuem o número de arestas superior ao número de lados. Um exemplo seria o polígono da figura (2.1) de número 1, ele possui 5 lados, porém, possui 9 arestas.

Definição 2.0.3 (Pavimentação fragmentada). *Escolhendo ao acaso um polígono qualquer, determinado por uma linha poligonal S simples e fechada, a pavimentação da região limitada por S determinada por um número finito de polígonos, tais que, a soma das áreas desses polígonos será igual à área limitada pela poligonal S é dita uma pavimentação fragmentada. Como na pavimentação não pode haver sobreposição, dizemos que a interseção entre dois ou mais polígonos é vazia.*

“Na prática não conseguimos pavimentar todo o plano, pois sua superfície é infinita, o que torna a tarefa impossível. Dizemos, então, que um conjunto finito de polígonos pavimenta o plano parcialmente, ou que é uma pavimentação parcial do plano.”
(BARBOSA, 1993)

Podemos dizer que a pavimentação de uma região poligonal é denominada como pavimentação parcial do plano Euclidiano.

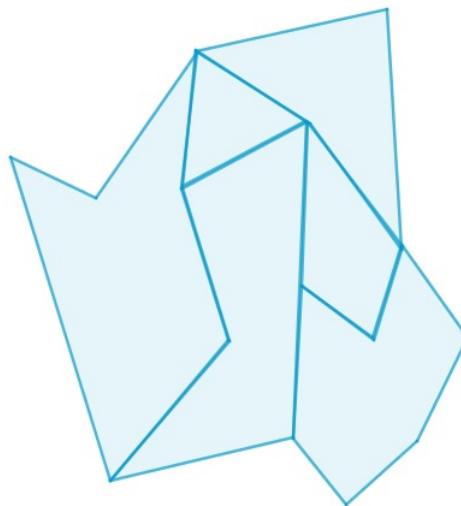


Figura 2.2: Pavimentação fragmentada ou pavimentação parcial

Definição 2.0.4 (Pavimentação Ideal). *Uma pavimentação ideal do Plano Euclidiano é uma subdivisão do plano em uma quantidade enumerável de polígonos tais que união de todos esses polígonos e suas fronteiras é todo o plano e a interseção de dois desses polígonos é sempre vazia.*

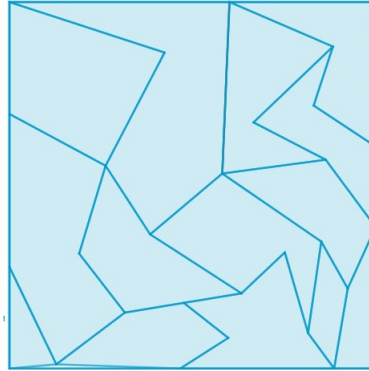


Figura 2.3: Pavimentação Ideal

Definição 2.0.5 (Pavimentação Monoédrica). *São pavimentações constituídas por polígonos congruentes entre si.*

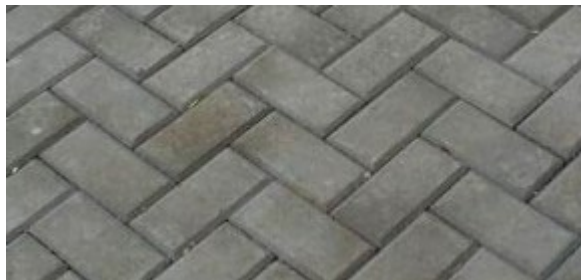


Figura 2.4: Pavimentação monoédrica com retângulos

Definição 2.0.6 (Pavimentação Regular). *As pavimentações constituídas de polígonos regulares cujos polígonos estão distribuídos lado-a-lado, são denominadas como regulares.*



Figura 2.5: Pavimentação regular com quadrados

Definição 2.0.7 (Pavimentação Semirregular). *As pavimentações semirregulares são aquelas que utilizam dois ou mais polígonos regulares distintos, cujos vértices possuem o mesmo padrão de configuração.*

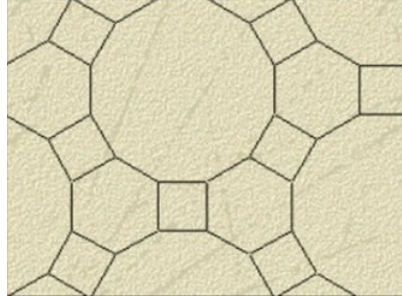


Figura 2.6: Pavimentação Semirregular

Definição 2.0.8 (Pavimentação Demirregular). *As pavimentações demirregulares possuem dois ou mais tipos de polígonos regulares, porém, diferente da pavimentação semirregular as demirregulares não possuem os vértices com mesmo padrão.*

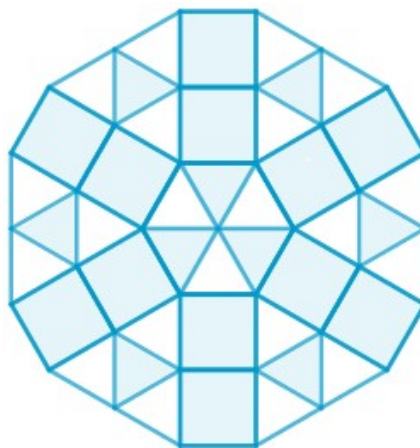


Figura 2.7: Pavimentação demirregular

Definição 2.0.9 (Pavimentação Irregular). *Pavimentações irregulares são classificadas assim quando não são formadas por polígonos regulares e portanto não são regulares, demirregulares ou semirregulares.*

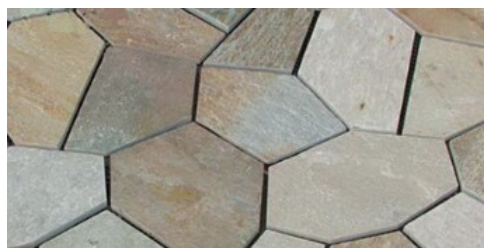


Figura 2.8: Pavimentação irregular

2.1 Pavimentação por Polígonos Regulares

A pavimentação do plano é feita "encaixando ladrilhos", que nesse caso são representados por polígonos regulares, de maneira a conseguir o preenchimento do plano sem sobreposições, coberturas ou espaços vazios. O objetivo desta seção é apresentar uma pavimentação monoédrica do plano por polígonos regulares. Vale ressaltar que todas as figuras dessa seção são de autoria própria, as mesmas, foram construídas por meio do software GeoGebra.

Considere uma pavimentação regular do plano formada apenas por polígonos regulares de n lados. Se em um nó dessa pavimentação aparecem m polígonos, como a soma dos ângulos internos de um polígono é determinada por $(n - 2) \cdot 180$ e a soma dos ângulos internos nesse nó deve ser igual a 360° , podemos escrever essa soma da seguinte maneira:

$$m \cdot \left[\frac{n-2}{n} \cdot 180 \right] = 360$$

Simplificando a equação, chegamos em $m = \frac{2n}{n-2}$ e como $m \geq 3$, ficamos com $\frac{2n}{n-2} \geq 3$, ou seja, $n \leq 6$. Portanto, só conseguimos realizar uma pavimentação com polígonos regulares com 6 ou menos lados.

Portanto, nossas possibilidades de pavimentação do plano por polígonos regulares, ficam reduzidas aos seguintes polígonos:

- Triângulo equilátero
- Quadrado
- Pentágono regular
- Hexágono regular

Agora, vamos analisar caso a caso as possibilidades de pavimentação pelos polígonos citados acima, começando pelo triângulo equilátero.

Considerando $n = 3$ temos que, $m = \frac{2n}{n-2}$, o que implica que $m = 6$. Isso significa que conseguiremos uma região de pavimentação utilizando 6 triângulos equiláteros.

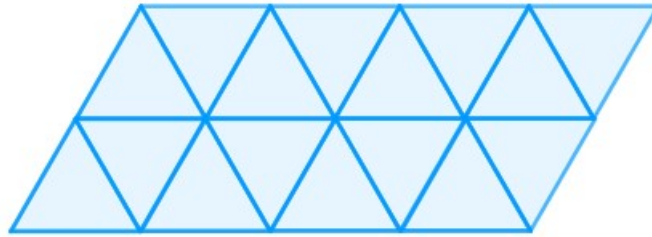


Figura 2.9: Pavimentação por triângulos equiláteros

Para $n = 4$, vamos ter $m = \frac{2n}{n-2}$, ou seja, $m = 4$. Portanto, para conseguirmos uma região de pavimentação do plano precisaremos utilizar 4 quadrados.

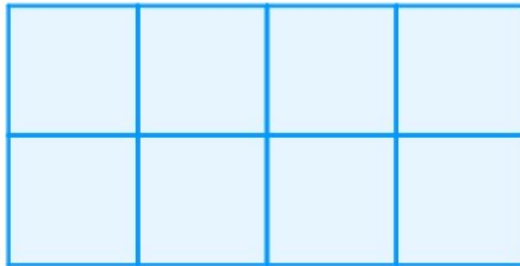


Figura 2.10: Pavimentação por quadrados

Se $n = 5$ ficamos com, $m = \frac{2n}{n-2} = \frac{10}{3}$, ou seja $m = 3,333...$, como m deve ser natural, temos que é impossível pavimentar o plano utilizando apenas pentágonos regulares.

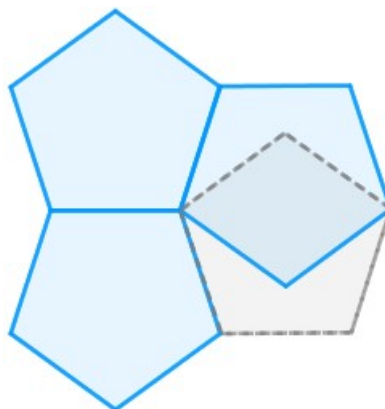


Figura 2.11: Tentativa de pavimentação por pentágonos

Para finalizar nossa análise, considere $n = 6$, ou seja, $m = \frac{2n}{n-2} = \frac{12}{4}$, o que implica em $m = 3$, portanto, ao utilizar hexágonos para pavimentar o plano, conseguimos uma região de pavimentação utilizando apenas 3 hexágonos.

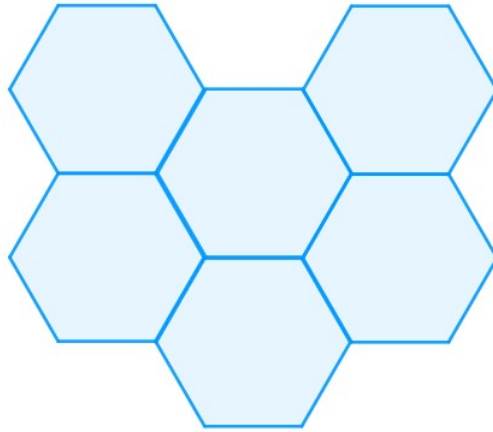


Figura 2.12: Pavimentação por hexágonos

Porntanto, pelo método da verificação, constatamos que apenas o triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular conseguem realizar uma pavimentação regular no plano.

2.2 Pavimentação monoédrica por Polígonos convexos não regulares

Polígonos não regulares são aqueles que não possuem todos os lados congruentes, consequentemente, não possuem todos os ângulos congruentes. Estudaremos agora alguns casos de pavimentações monoédricas por polígonos não regulares.

Assim como na seção anterior as figuras aqui presentes são de autoria própria, as mesmas foram construídas utilizando o software GeoGebra.

“Suponhamos que você disponha de uma quantidade infinita de cópias de uma determinada forma geométrica. Imagine que sejam como peças de um quebra-cabeça. Se for possível encaixá-las, sem falhas ou sobreposição, de modo que o plano seja todo coberto por elas, dizemos que essa forma geométrica pavimenta o plano.”(Dutenhefner, Ruiz Castro, RPM 70)

2.2.1 Triângulos

Os triângulos são figuras planas formadas por três segmentos de retas.

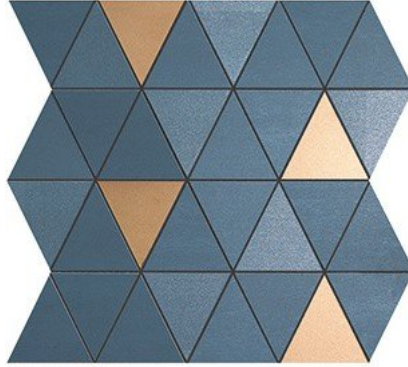


Figura 2.13: Pavimentação com triângulos

Teorema: Qualquer triângulo seja ele escaleno, isósceles ou equilátero, pode ser utilizado para formar uma pavimentação monoédrica do plano.

Demonstração:

Seja um triângulo qualquer ABC:

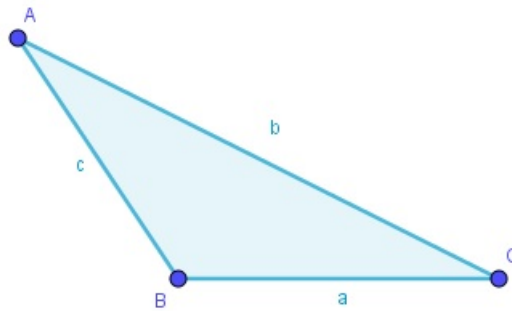


Figura 2.14: Triângulo ABC

Vamos traçar duas retas, uma passando por A, e outra passando por B, de modo que essas retas seja paralelas a $\overline{BC}$ e a $\overline{AC}$, respectivamente.

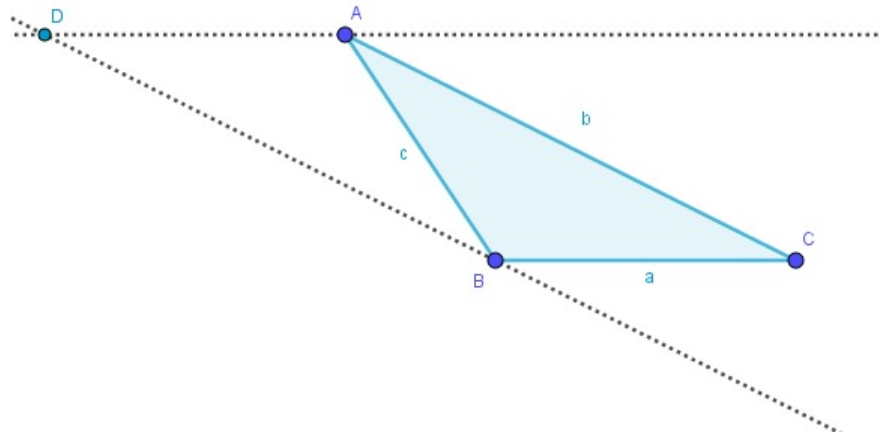


Figura 2.15: Primeiro passo de pavimentação

Transladando o paralelogramo ACBD no sentido do vetor $\overrightarrow{BC}$ iremos obter uma pavimentação horizontal do plano.

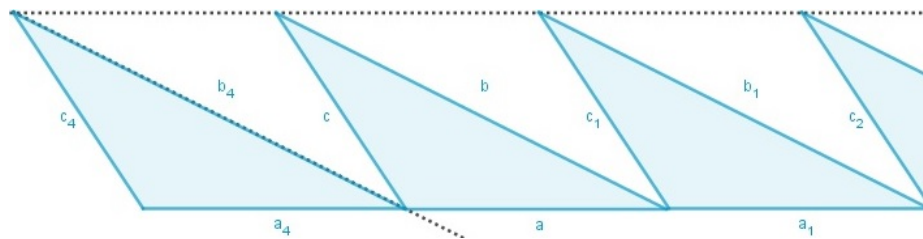


Figura 2.16: Pavimentação horizontal

Fazendo a mesma translação, agora, desta faixa horizontal na direção do vetor $\overrightarrow{AC}$, conseguimos uma pavimentação monoédrica no plano euclidiano.

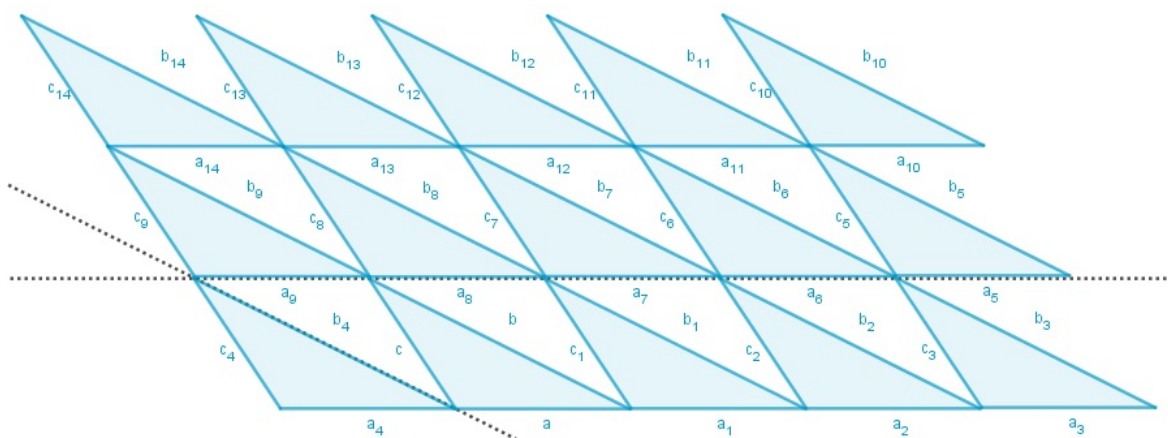


Figura 2.17: Pavimentação ideal do plano

Esses procedimentos podem ser feitos para pavimentar o plano com qualquer triângulo, seja ele regular, ou não.

2.2.2 Quadriláteros

Os quadriláteros são figuras geométricas planas de quatro lados formado por segmentos de retas.

Teorema: Qualquer quadrilátero (convexo ou não) pode ser utilizado para formar uma pavimentação monoédrica do plano.

Demonstração Escolhemos ao acaso um quadrilátero qualquer ABCD:

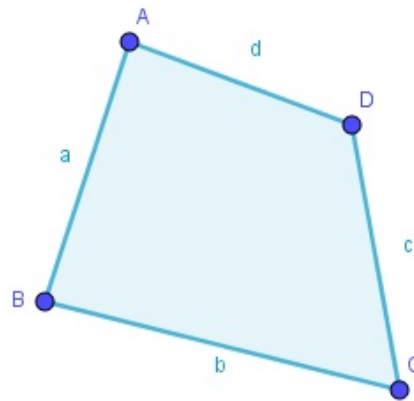


Figura 2.18: Quadrado ABCD

Vamos marcar o ponto médio de todos os seus lados, ou seja, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

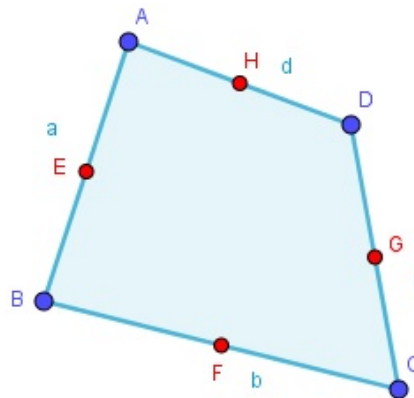


Figura 2.19: Primeiro passo de pavimentação

Faremos uma cópia do polígono ABCD rotacionado 180° em torno do ponto E.

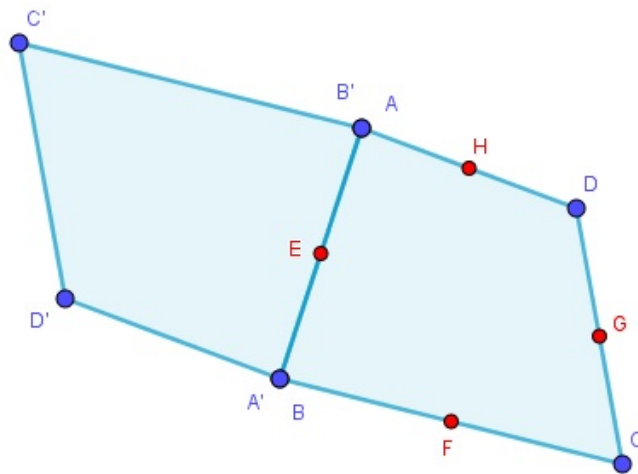


Figura 2.20: Segundo passo de pavimentação

Agora vamos rotacionar o polígono $A'B'C'D'$ em torno do ponto médio do lado $\overline{A'D'}$ em 180° .

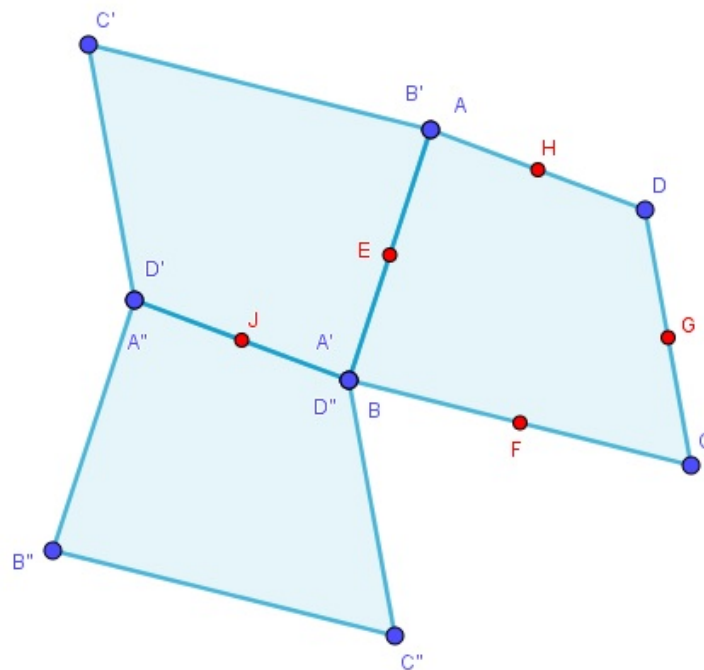


Figura 2.21: Terceiro passo de pavimentação

Fazemos os mesmos procedimentos para o polígono $A''B''C''D''$, ou seja, uma rotação de 180° em torno do ponto médio do lado $\overline{C''D''}$.

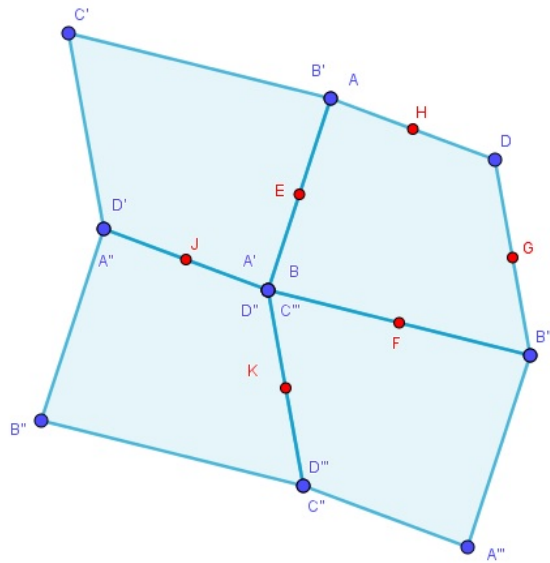


Figura 2.22: Pavimentação parcial do plano

A pavimentação representada pela figura (2.22) é denominada como pavimentação parcial do plano em torno do ponto B central da figura. A pavimentação ideal é obtida por meio de translações verticais e horizontais.

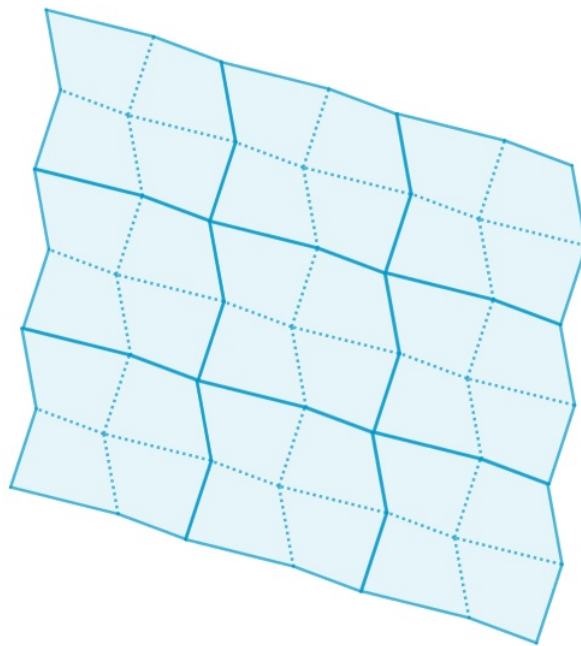


Figura 2.23: Pavimentação ideal do plano

2.2.3 Pentágonos

A pavimentação do plano por pentágonos convexos é um problema que está sendo estudado por volta de 100 anos, durante esse tempo alguns acontecimentos chamaram atenção da comunidade acadêmica, isso se deve ao fato de muitas das vezes em que o problema era visto como solucionado aparecia outro pentágono que pavimentava o plano.

Recentemente, mais uma vez, esse problema está sendo visto como solucionado, pois em julho de 2017 o professor Michael Rao afirmou, por meio de um algoritmo computacional, que havia apenas 15 pentágonos que pavimentam o plano. Caso essa demonstração esteja correta, um dos problemas mais antigos relacionados à geometria euclidiana se dará como resolvido.

A seguir vamos apresentar esses 15 tipos de pentágonos convexos que pavimentam o plano, como também fatos relacionados à história dessas descobertas.

2.2.4 Pentágonos de Karl Reinhardt

Karl Reinhardt nascido em Frankfurt foi um matemático alemão que apresentou em sua tese de doutorado 5 condições para que pentágonos convexos não regulares pavimentem o plano.

“Ainda em 1918, Karl Reinhardt apresentou cinco conjuntos diferentes de condições sobre ângulos e lados de um pentágono convexo de modo que, para cada um desses conjuntos, existe pelo menos uma pavimentação do plano.”

Temos que os cinco conjuntos de condições apresentadas por Reinhardt define um tipo de pentágono convexo que pavimenta o plano, ou seja, podem existir diferentes pentágonos que satisfazem determinada condição. Portanto podem existir diferentes pentágonos com diferentes simetrias no plano cujo processo de pavimentação é satisfeito.

A tese de Reinhardt afirma que a discussão sobre a pavimentação do plano por pentágonos convexos não regulares poderia ser encerrada caso as considerações feitas em sua tese seguissem de modelo, embora mais a frente iremos verificar que Reinhardt não estava totalmente certo, pois outros tipos de pavimentação do plano utilizando pentágonos convexos não regulares foram encontrados.

A seguir vamos apresentar essas 5 condições de pavimentação:

Tipo 1

No primeiro tipo de pavimentação os ângulos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$.

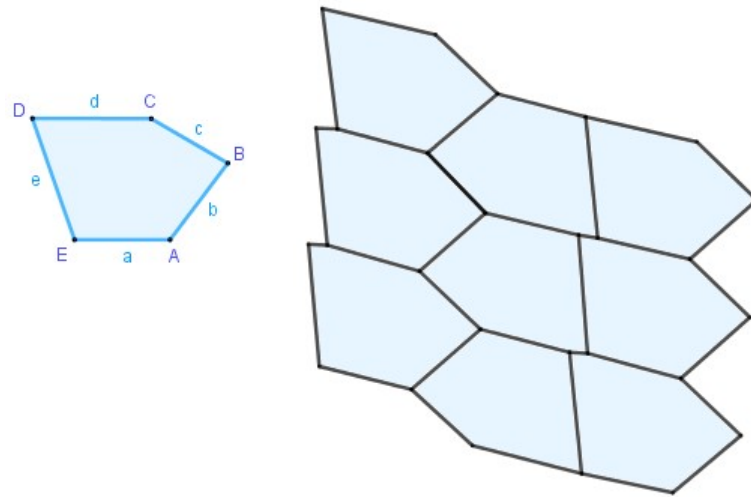


Figura 2.24: Pavimentação Tipo 1

Tipo 2

As características do segundo tipo de pavimentação são as seguintes:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 360^\circ \text{ e } a = d.$$

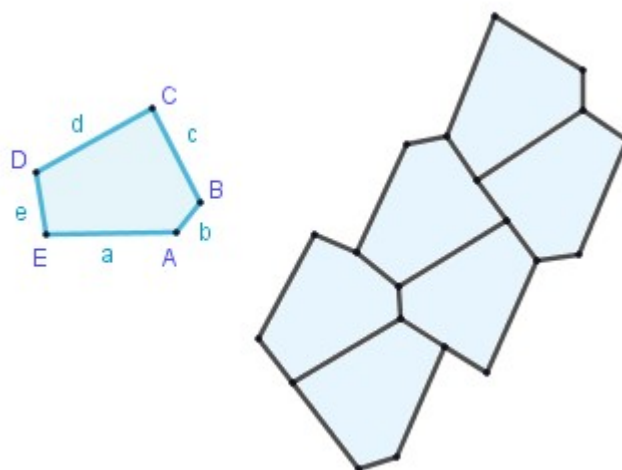


Figura 2.25: Pavimentação Tipo 2

Tipo 3

Outros pentágonos que pavimentam o plano devem possuir as seguintes características: $\hat{A} = \hat{C} = \hat{D} = 120^\circ$, $a = b$ e $d = c + e$.

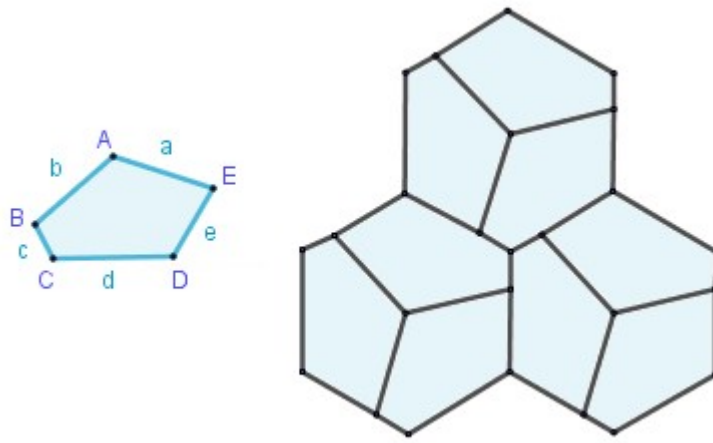


Figura 2.26: Pavimentação Tipo 3

Tipo 4

O quarto tipo de pavimentação por pentágonos não regulares possui as seguintes características: $\hat{C} = \hat{E} = 90^\circ$, $a = e$ e $c = d$.

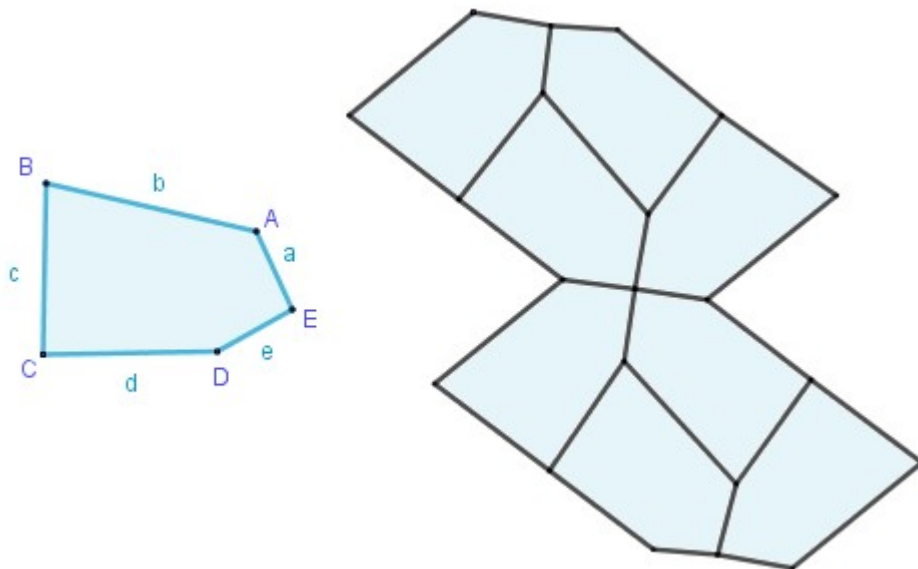


Figura 2.27: Pavimentação Tipo 4

Tipo 5

O último tipo de pavimentação apresentada por Karl Reinhardt possui as seguintes propriedades: $\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$, $a = b$ e $c = d$.

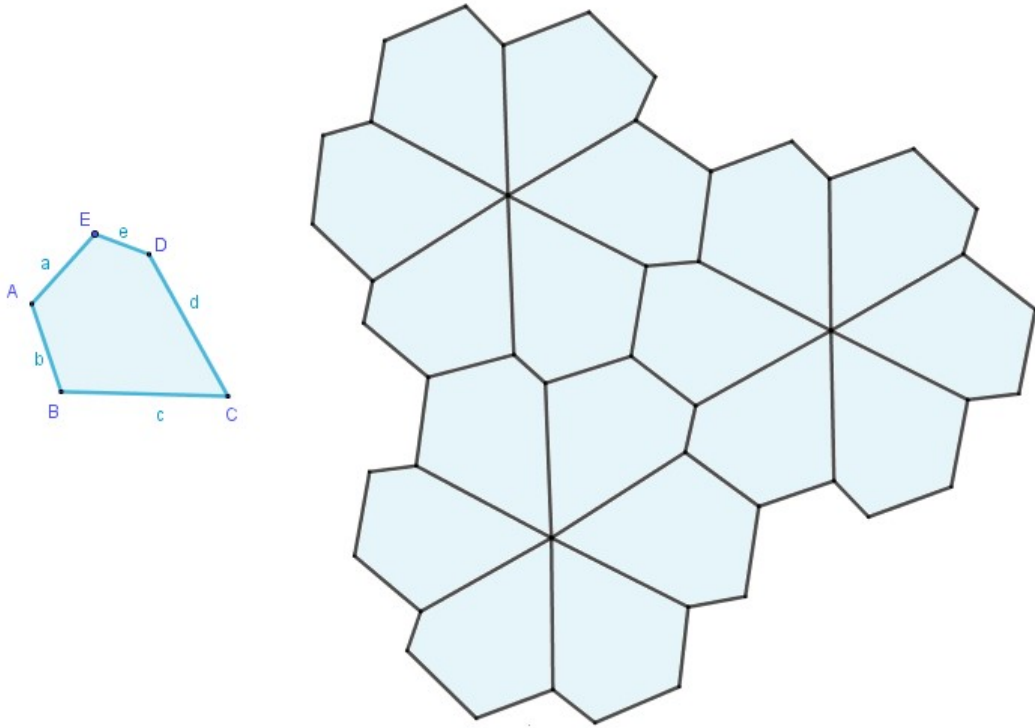


Figura 2.28: Pavimentação Tipo 5

2.2.5 Pentágonos de Richard Brandon Kershner

Até 1968 achava-se que a pavimentação por pentágonos não regulares obedecia estritamente às características de pavimentação apresentadas por Karl Reinhardt, até que nesse mesmo ano Richard Brandon Kershner apresentou outros três tipos de pentágonos convexos que pavimentam o plano.

Kershner afirmou, de maneira leviana, ou seja sem apresentar nenhum tipo de demonstração, que são apenas oito tipos de pentágonos não regulares que pavimentam o plano, os três descobertos por ele e os outros cinco descobertos por Karl Reinhardt.

Tipo 6

As características do primeiro pentágono proposto por Kershner são as seguintes:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 360^\circ \quad \hat{A} = 2\hat{C}, \quad a = b = e, \quad c = d.$$

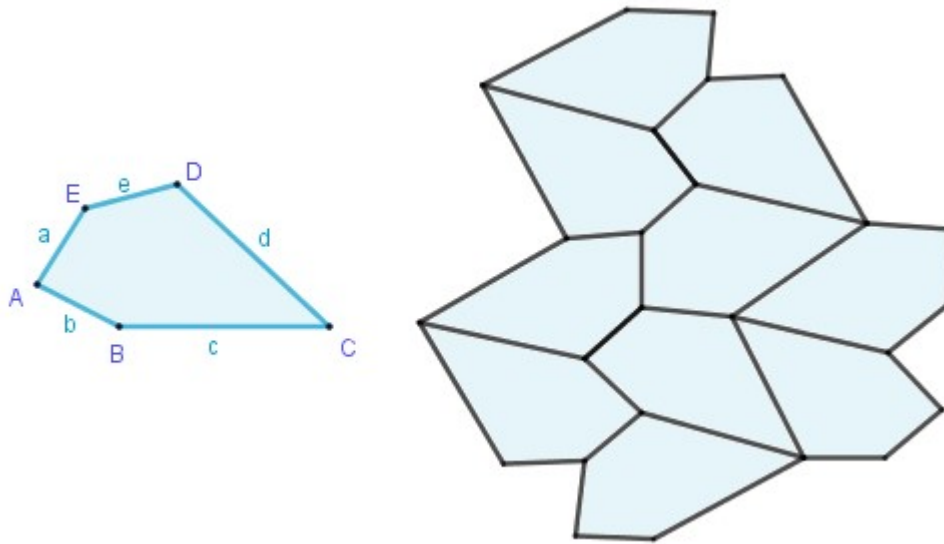


Figura 2.29: Pavimentação Tipo 6

Tipo 7

O segundo polígono apresentado por Kershner possui as seguintes propriedades:

$$2\hat{B} + \hat{C} = 360^\circ, \quad 2\hat{D} + \hat{A} = 360^\circ \quad \text{e} \quad a = b = c = d.$$

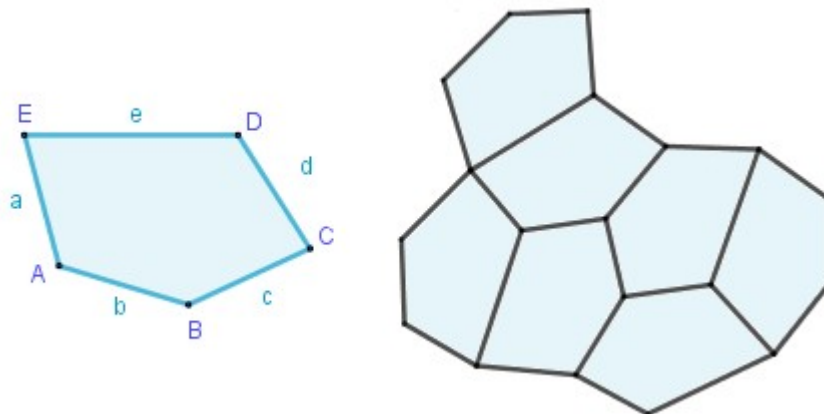


Figura 2.30: Pavimentação Tipo 7

Tipo 8

O último tipo de pavimentação apresentado por Kershner é caracterizado da seguinte maneira: $2\hat{A} + \hat{B} = 360^\circ$, $2\hat{D} + \hat{C} = 360^\circ$ e $a = b = c = d$.

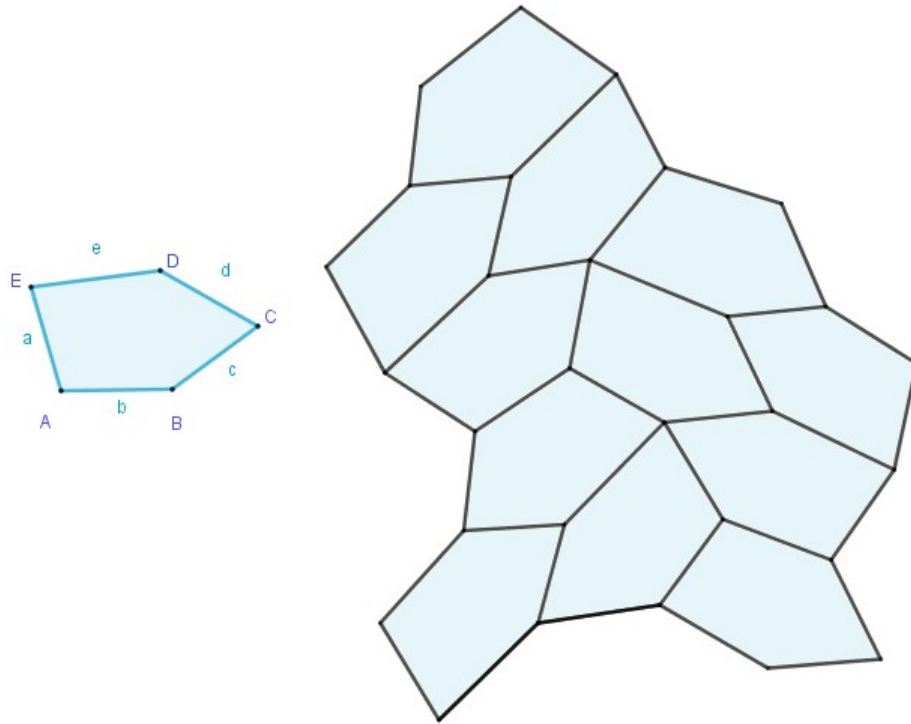


Figura 2.31: Pavimentação Tipo 8

2.2.6 Pentágonos de Richard James III

A Scientific American, uma revista científica norte americana, publicou em 1975 um artigo com o problema de pavimentação do plano por pentágonos não regulares, apresentando os oito tipos de pentágonos conhecidos até o momento.

Richard James III, cientista computacional, em posse do artigo, decidiu descobrir sem consultar a lista de Kershner algum pentágono que porventura pudesse pavimentar o plano.

Em dezembro de 1975 foi publicado pela Scientific American um artigo com o pentágono descoberto por Richard James, assim mostrando que Reinhardt e Kershner não tinham obtido sucesso em apresentar todos os pentágonos convexos não regulares que pavimentam o plano.

Tipo 9

O pentágono apresentado por James III como também suas características é apresentado a seguir: $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} + \hat{E} = 180^\circ$, $2\hat{D} + \hat{E} = 360^\circ$, $2\hat{C} + \hat{B} = 360^\circ$ e $a = b = c + e$.

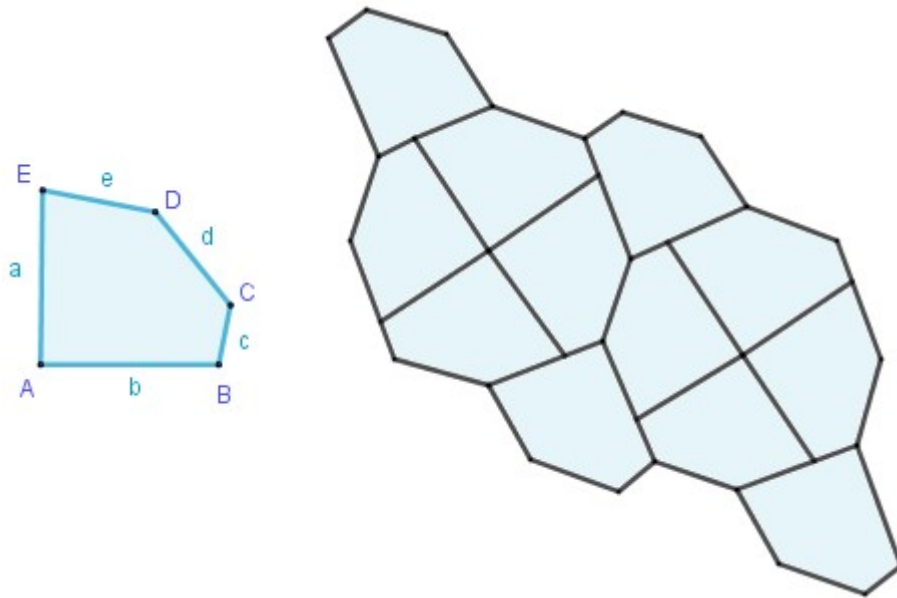


Figura 2.32: Pavimentação Tipo 9

2.2.7 Pentágonos de Marjorie Rice

Após James III apresentar mais um pentágono cujas características satisfazem a pavimentação do plano, o problema de pavimentação do plano por essas figuras foi reaberto. A Scientific American, publicou um artigo em 1975 de Martin Gardner com os polígonos apresentados até o momento. Isso possibilitou que um público não ligado à área acadêmica tivesse acesso a esse tipo de estudo.

Com isso, Marjorie Rice, nos anos de 1976 e 1977 apresentou mais quatro pentágonos convexos não regulares que pavimentam o plano euclidiano. Vale ressaltar que Marjorie Rice não era acadêmica e a única formação matemática que possuía era a obtida no ensino médio.

A seguir vamos apresentar os quatro tipos de polígonos descobertos por Marjorie Rice:

Tipo 10

Nesse pentágono temos: $2\hat{E} + \hat{B} = 360^\circ$, $2\hat{D} + \hat{C} = 360^\circ$ e $a = b = c = d$.

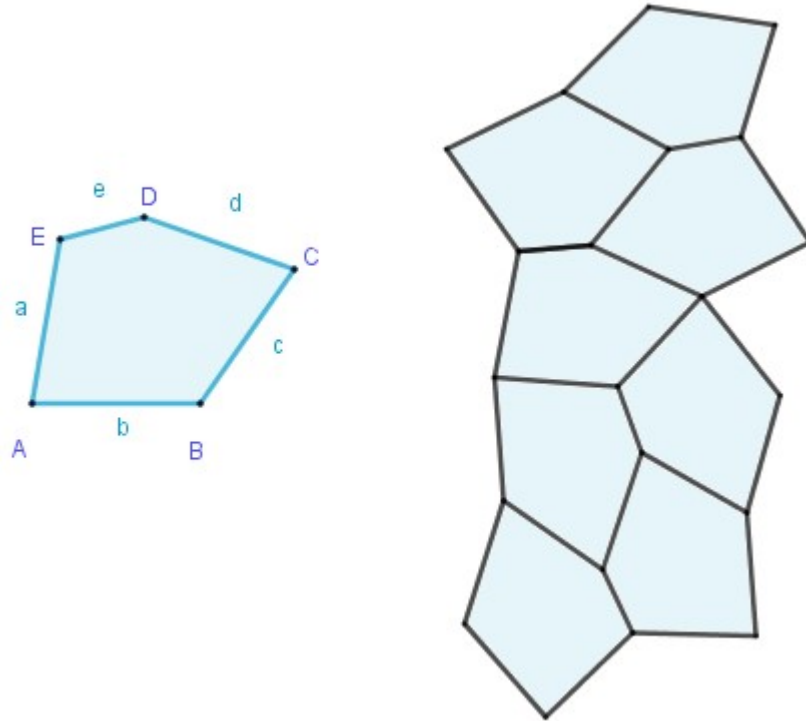


Figura 2.33: Pavimentação Tipo 10

Tipo 11

O décimo primeiro tipo de pentágono possui as seguintes características:

$$\hat{A} = 90^\circ, \hat{C} + \hat{E} = 180^\circ, 2\hat{B} + \hat{C} = 360^\circ \text{ e } d = e = 2a + c.$$

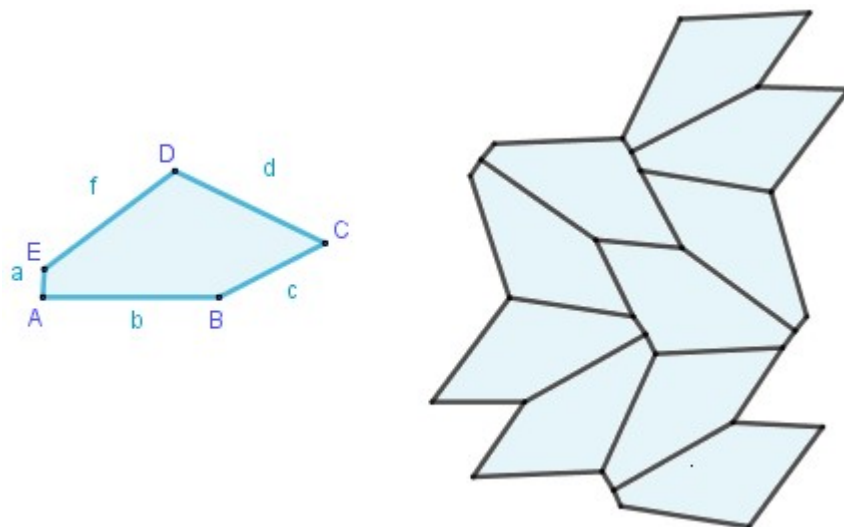


Figura 2.34: Pavimentação Tipo 11

Tipo 12

O terceiro pentágono apresentado por Marjorie Rice tem as seguintes propriedades:
 $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} + \hat{E} = 180^\circ$, $2\hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$ e $2a = d = c + e$.

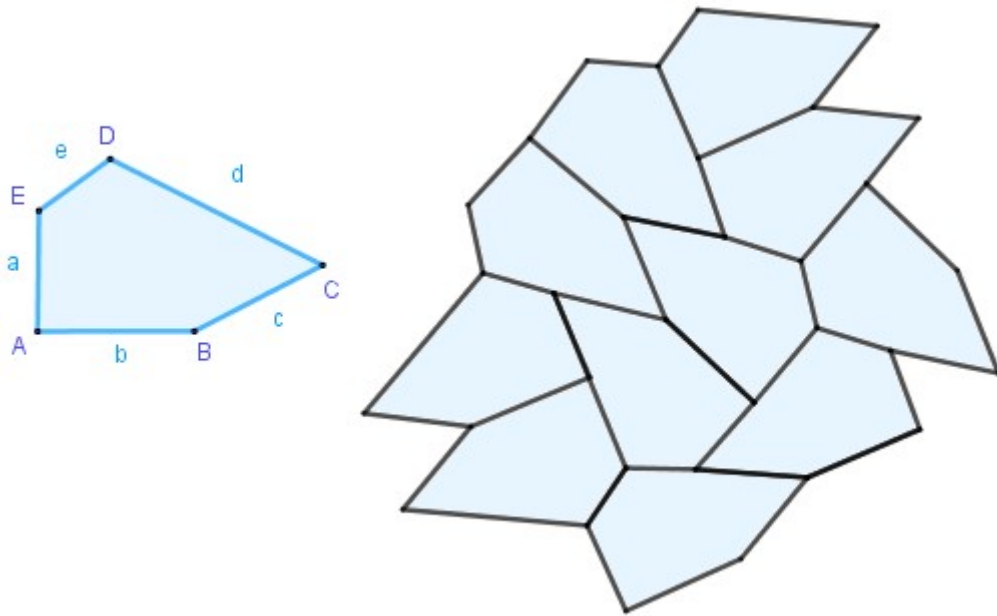


Figura 2.35: Pavimentação Tipo 12

Tipo 13

O pentágono a seguir finaliza as descobertas Marjorie Rice no âmbito da pavimentação do plano por pentágonos convexos não regulares e suas propriedades são apresentadas a seguir: $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$, $2\hat{B} = 2\hat{E} = 360^\circ - \hat{D}$ e $2c = 2d = e$.

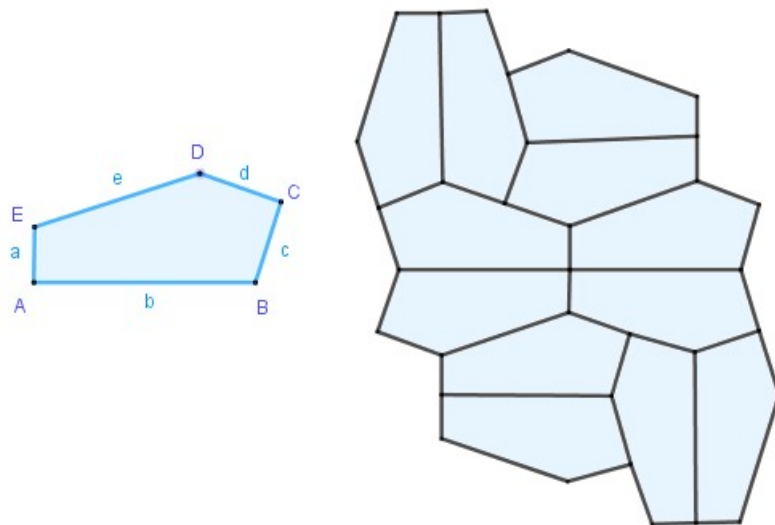


Figura 2.36: Pavimentação Tipo 13

2.2.8 Pentágonos de Rolf Stein

Em 1985, Rolf Stein, estudante da Universidade de Dortmund, apresentou o décimo quarto tipo de pentágono convexo que pavimenta o plano.

Tipo 14

Rolf Stein, um estudante de matemática da universidade de Dortmund, Alemanha, apresentou um pentágono convexo que pavimenta o plano, cujas características estão definidas a seguir: $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} + \hat{E} = 180^\circ$, $2\hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$, $d = e = 2a$ e $a = c$.

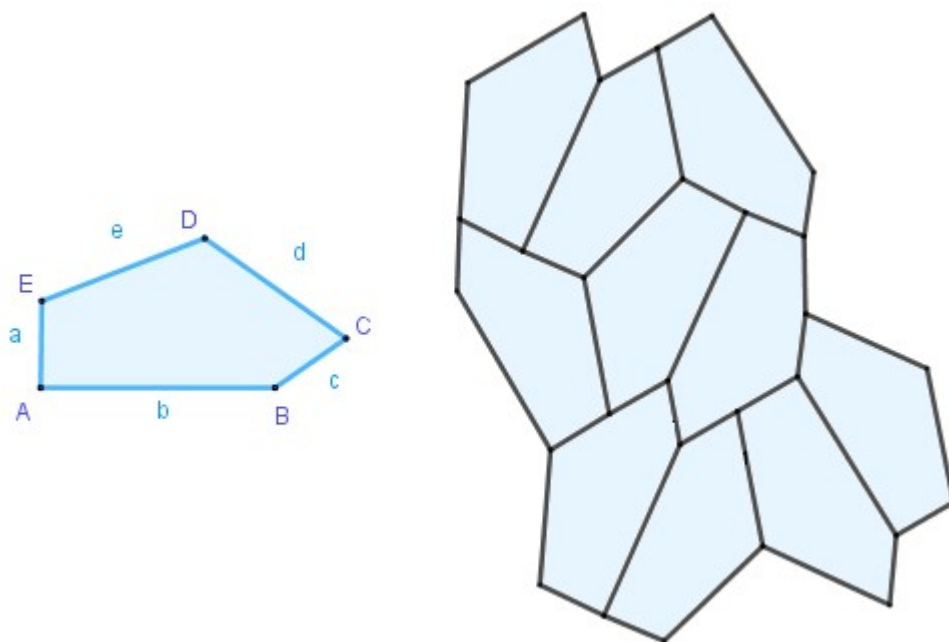


Figura 2.37: Pavimentação Tipo 14

2.2.9 O Décimo quinto Pentágono não regular

No dia 05 de outubro de 2015, Casey Mann, Jennifer McCloud e David Von, ambos da universidade de Washington Bothell, publicaram um artigo onde determinam um décimo quinto tipo de pavimentação do plano por um pentágono convexo. Essa descoberta só foi possível pois utilizaram um algoritmo computacional [13].

Tipo 15

As propriedades desse décimo quinto tipo são bem definidas e são apresentadas a seguir: $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 135^\circ$, $\hat{C} = 105^\circ$, $\hat{D} = 90^\circ$, $\hat{E} = 150^\circ$, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$, $d = \frac{1}{2}$ e $e = \frac{1}{2}$.

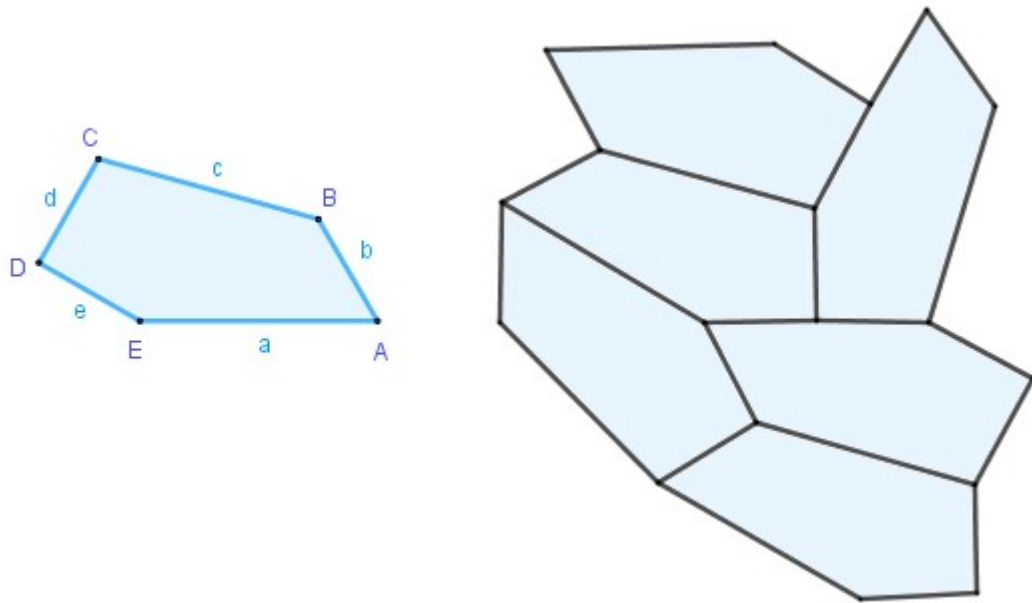


Figura 2.38: Pavimentação Tipo 15

O professor Michael Rao, da CNRS (frnce's National Center for Scientific Research) e da École Normale Supérieure de Lyon, publicou um artigo em julho de 2017, uma demonstração que prova a existência de apenas 15 pentágonos convexos que pavimentam o plano [13].

Como ele usou um software computacional para a demonstração, ela ainda precisa ser verificada, caso esteja correta, um dos mais clássicos problemas da geometria euclidiana plana acaba de ser demonstrado.

2.2.10 Hexágonos

Karl Reinhardt em sua tese de doutorado em 1918, apresentou na universidade de Frankfurt, três tipos de hexágonos convexos que pavimentam o plano [16]. Na época, Reinhardt afirmou que apenas esses hexágonos poderiam pavimentar o plano. Posteriormente, Bellá Bollobás em 1963 demonstrou tal afirmação. Agora, vamos apresentar os três tipos de pavimentação por hexágonos não regulares.

Tipo 1

Temos que o primeiro hexágono capaz de pavimentar o plano é detentor das seguintes características: Dois lados opostos congruentes e paralelos, no caso da figura a seguir $\overline{CD} \parallel \overline{AF}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{AF}$.

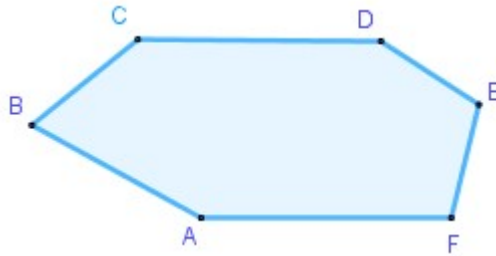


Figura 2.39: Hexágono tipo 1

Como o lado $\overline{CD} \equiv \overline{AF}$ fazendo a translação do hexágono Tipo 1 e justapondo os lados $\overline{CD}$ e $\overline{AF}$, obtemos a seguinte configuração:

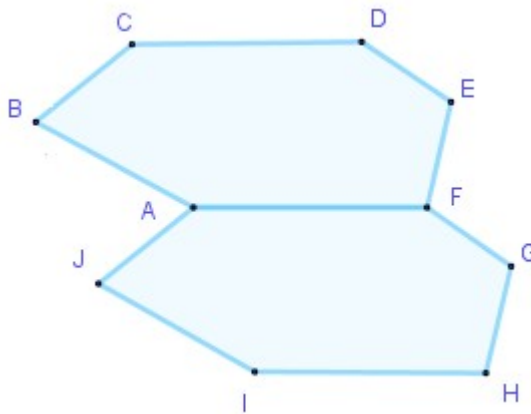


Figura 2.40: Hexágono tipo 1

Rotacionando a imagem do Hexágono $ABCDEF$ em torno do ponto médio de $\overline{AB}$ em 180° , ficamos com:

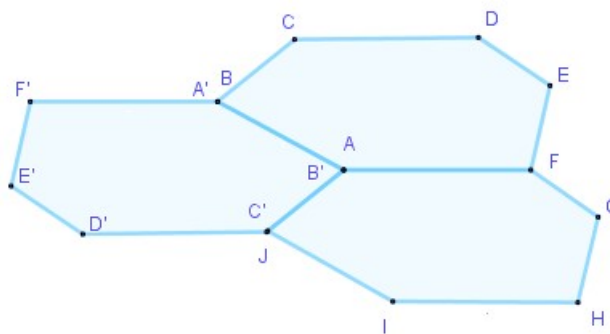


Figura 2.41: Hexágono tipo 1

Agora, vamos transladar a imagem do polígono $\overline{A'B'C'D'E'F'}$, de tal maneira que o lado $\overline{F'A'}$ seja justaposto ao lado $\overline{C'D'}$

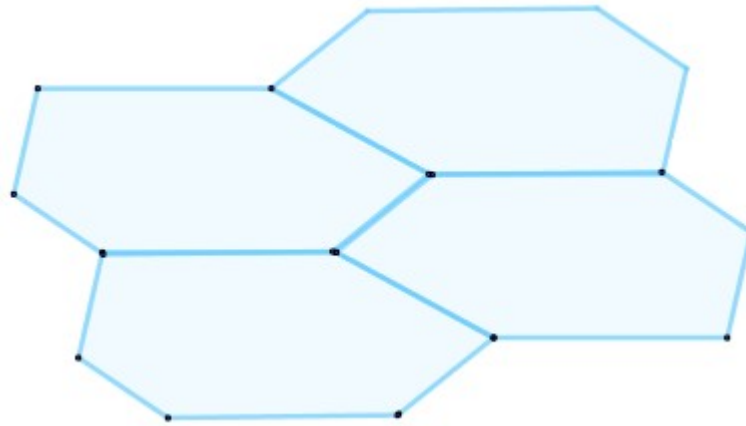


Figura 2.42: Hexágono tipo 1

Para obtermos a pavimentação ideal do plano por esse tipo de hexágono, basta fazer a translação dessa configuração.



Figura 2.43: Hexágono tipo 1

Tipo 2

Considere o hexágono $ABCDEF$, tal que $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$, $\overline{BC} \equiv \overline{DE}$ e ainda $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$. Seja $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ um hexágono congruente a $ABCDEF$.

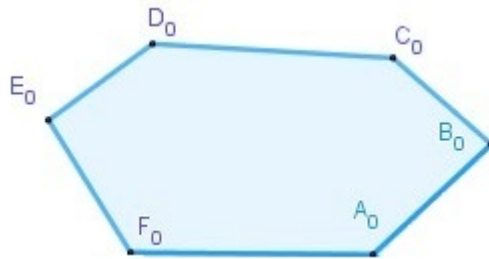


Figura 2.44: Hexágono tipo 2

Agora, considere outro hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, de tal maneira que os vértices D_1 e A_0 sejam coincidentes. Considere também C_1 coincidente com F_0 , isso é possível pois, $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$.

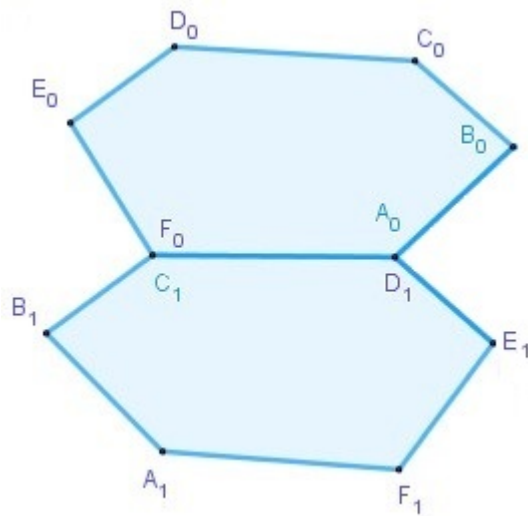


Figura 2.45: Hexágono tipo 2

Construindo um novo hexágono $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ congruente à $ABCDEF$, de maneira que o vértice B_2 seja coincidente aos vértices A_0 e D_1 :

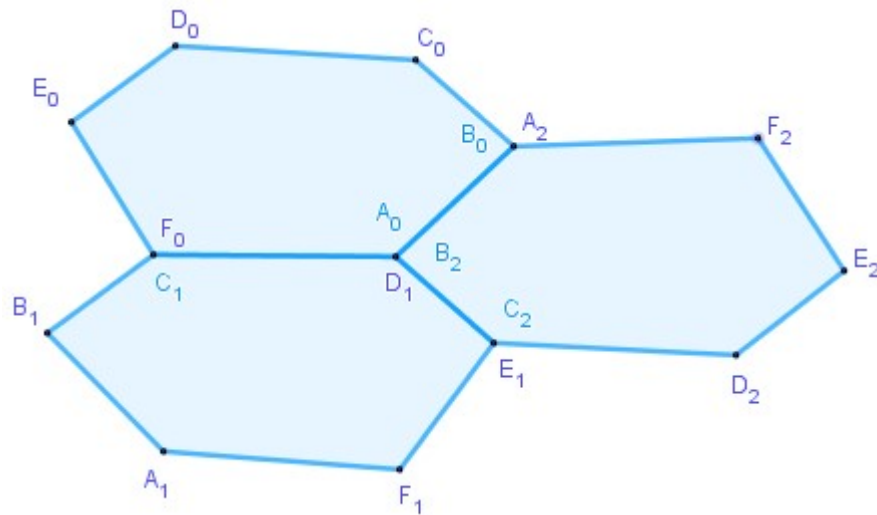


Figura 2.46: Hexágono tipo 2

O três hexágonos se encaixam perfeitamente, pois, $\overline{BC} \equiv \overline{DE}$ e ainda, $A + B + C = 360^\circ$.

Considere agora o hexágono $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$, tal que os vértices F_3 e E_3 sejam coincidentes com os vértices E_1 e F_1 respectivamente.

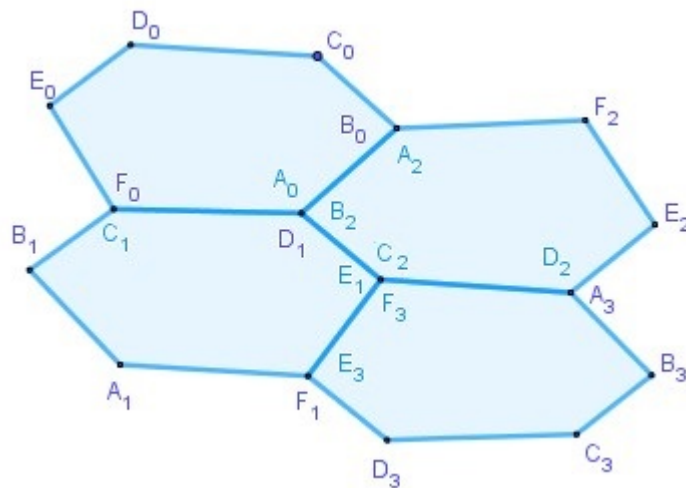


Figura 2.47: Hexágono tipo 2

Essa pavimentação só é possível pois temos $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$ e $C + E + F = 360^\circ$. Observe que essa pavimentação possui apenas dois tipos de nós, o formado pelos vértices A, B e D e o segundo formado pelos vértices C, E e F, cuja soma é igual a $(A + B + D) + (C + E + F) = 360^\circ + 360^\circ = 720^\circ$. Para pavimentar de maneira ideal o plano por esse tipo de hexágono podemos transladar sucessivamente a figura obtida acima.

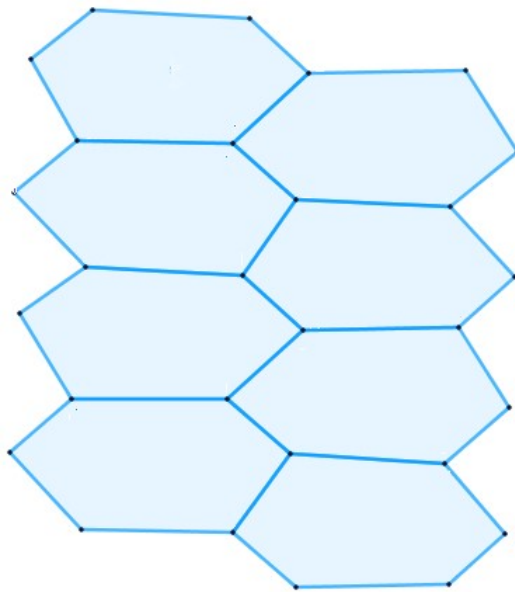


Figura 2.48: Hexágono tipo 2

Tipo 3

O próximo tipo de hexágono que pavimenta o plano possui três pares de lados congruentes e três ângulos congruentes de medida igual a 120° . Seja $ABCDEF$ um hexágono tal que, $\overline{AB} \equiv \overline{AF}$, $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$, e os ângulos $A = B = C = 120^\circ$, podemos pavimentar o plano da seguinte maneira.

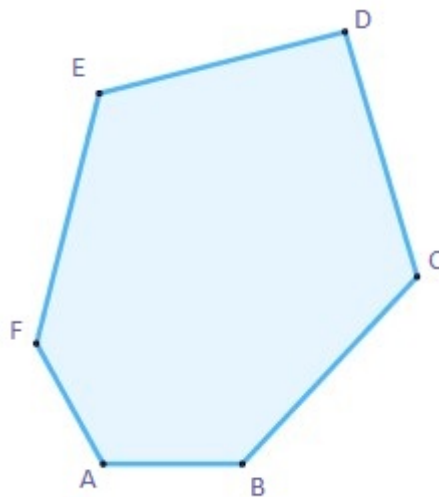


Figura 2.49: Hexágono tipo 3

Considere dois hexágonos $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ e $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ congruentes ao hexágono $ABCDEF$, de tal maneira que os vértices A_1 e F_1 sejam coincidentes aos vértices A_0 e B_0 . Como $\overline{AB} \equiv \overline{AF}$, temos que essa construção é possível.

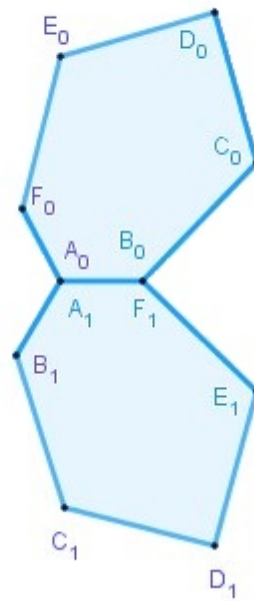


Figura 2.50: Hexágono tipo 3

Agora, seja $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ congruente à $ABCDEF$ e considere A_2 , B_2 e F_2 coincidentes respectivamente com A_0 , F_0 e B_1 .

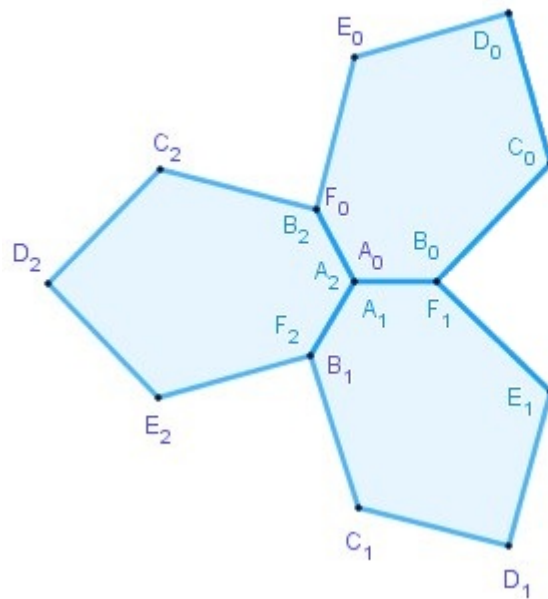


Figura 2.51: Hexágono tipo 3

O encaixe dos três hexágonos só é possível pois $A_0 = A_1 = A_2 = 120^\circ$.

Analisando a figura (2.51) percebemos que conseguimos um novo encaixe, considerando $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ um hexágono congruente a $ABCDEF$. Vamos fazer esse encaixe de tal maneira que os vértices B_0, F_1 e D_3 sejam coincidentes, ainda, devemos considerar que os lados B_0C_0 e D_3C_3 estão justapostos como também os lados E_1F_1 e E_3D_3 . Como temos que $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$, como a soma dos ângulos internos de um hexágono é 720° e temos que $A = C = E = 120^\circ$, temos que esse encaixe é possível.

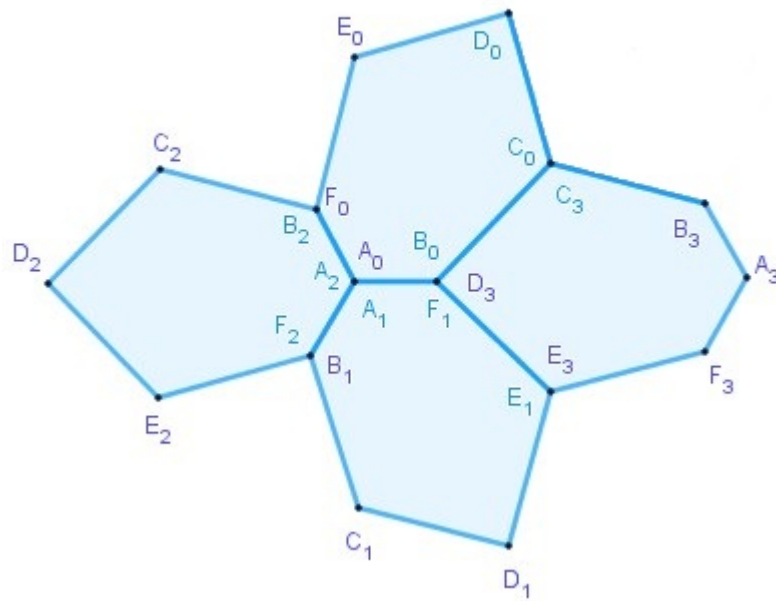


Figura 2.52: Hexágono tipo 3

Considere agora um hexágono $A_4B_4C_4D_4E_4F_4$ congruente a $ABCDEF$, sejam os vértices C_0 e C_3 justapostos a C_4 , como também os lados C_0D_0 com C_4B_4 e B_3C_3 com D_4C_4 , como $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$ e como $C_0 = C_3 = C_4 = 120^\circ$ definimos um nó de pavimentação formado por três ângulos de 120° .

Para finalizar a pavimentação parcial do plano, considere um novo hexágono $A_5B_5C_5D_5E_5F_5$, como os demais congruente a $ABCDEF$, de tal maneira que E_1, E_3 e E_5 sejam coincidentes. Considere também que os lados E_3F_3 e E_5D_5 sejam justapostos, da mesma maneira, o lado D_1E_1 com o lado F_5E_5 . Sabendo que $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$ e ainda, $E_1 = E_3 = E_5 = 120^\circ$, acabamos de definir outro nó de pavimentação.

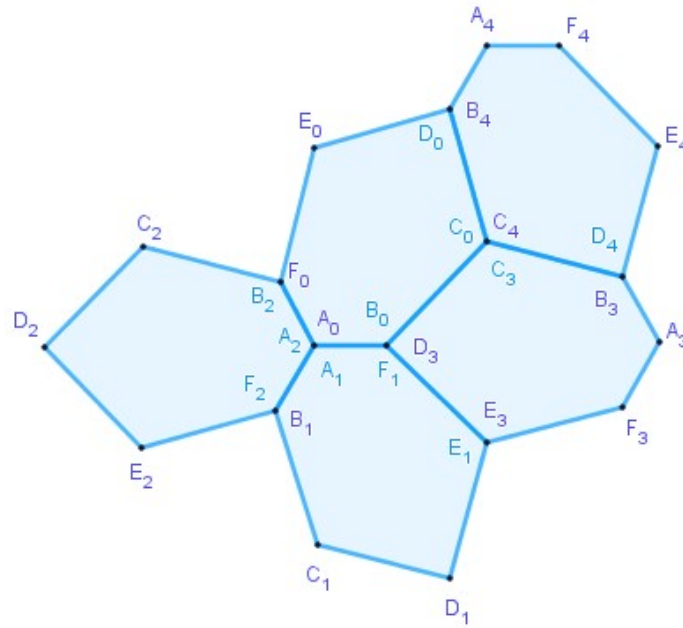


Figura 2.53: Hexágono tipo 3

Na figura (2.54) podemos observar quatro tipos de nós: um nó que possui três vértices A , um nó que possui três vértices C e um nó que possui 3 vértices E , ainda temos um outro nó, formado pelos vértices B_0 , D_3 e F_1 cuja soma é igual a 360° . Para adicionar mais um hexágono a extremidade da pavimentação parcial do plano, basta repetirmos intuitivamente algum dos passos de pavimentação descritos acima.

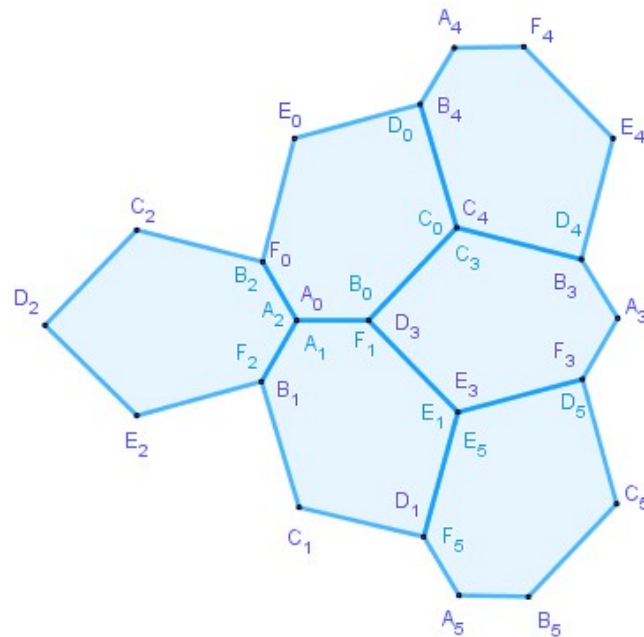


Figura 2.54: Hexágono tipo 3

Portanto, o processo de pavimentação do plano por hexágonos não regulares, como dito anteriormente, só é possível por esses três tipos apresentados anteriormente.

2.3 Desigualdade isoperimétrica

O teorema da desigualdade isoperimétrica caracteriza-se como sendo um dos problemas mais antigos relacionado à geometria diferencial e está relacionado ao seguinte problema:

"Dentre todas as curvas simples fechadas no plano com um dado comprimento l , qual delas limita a maior área?"

Os gregos apresentaram o círculo como solução para esse problema, porém, uma solução mais sofisticada foi apresentada por Weierstrass no ano de 1870, diferentemente das outras soluções apresentadas Weierstrass não assumiu que tal solução deveria existir, sua teoria era complexa, pois a mesma foi desenvolvida utilizando sua própria teoria denominada cálculo das variações. Posteriormente outras soluções foram apresentadas por diferentes matemáticos. Nesse capítulo iremos apresentar a solução desenvolvida por E.Schmidt. Primeiro vamos apresentar algumas definições que auxiliam no entendimento dessa desigualdade.

Teorema 2.3.1. *(Desigualdade Isoperimétrica) Seja C uma curva plana simples e fechada com comprimento L e seja A a área da região limitada por C . Então:*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0. \quad (2.1)$$

A igualdade é válida se, e somente se, C é um círculo.

Vamos utilizar o seguinte lema para nos auxiliar na prova do teorema da Desigualdade Isoperimétrica.

Lema 2.3.1. *Seja $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva simples fechada, positivamente orientada e definida por $\alpha(s) = (x(t), y(t))$. Temos que:*

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt. \quad (2.2)$$

A demonstração do lema [2.7.1] é simples e pode ser encontrada na referência [18].

Demonstração da Desigualdade isoperimétrica: Considere s e t retas paralelas que não intersectam o traço da curva fechada α . Agora, considere o movimento de translação dessas duas retas, até que elas toquem α pela primeira vez. Obtemos assim duas retas paralelas, s' e t' , tangentes à α , de forma que a curva α está totalmente contida na faixa limitada por s' e t' .

Seja $\bar{\alpha}$ um círculo de centro em O que tangência s' e t' nos pontos $\bar{Q}$ e $\bar{P}$, respectivamente, e não intersecta α . Introduza um sistema de coordenadas cartesianas com centro em O e eixo Ox perpendicular as retas s e t .

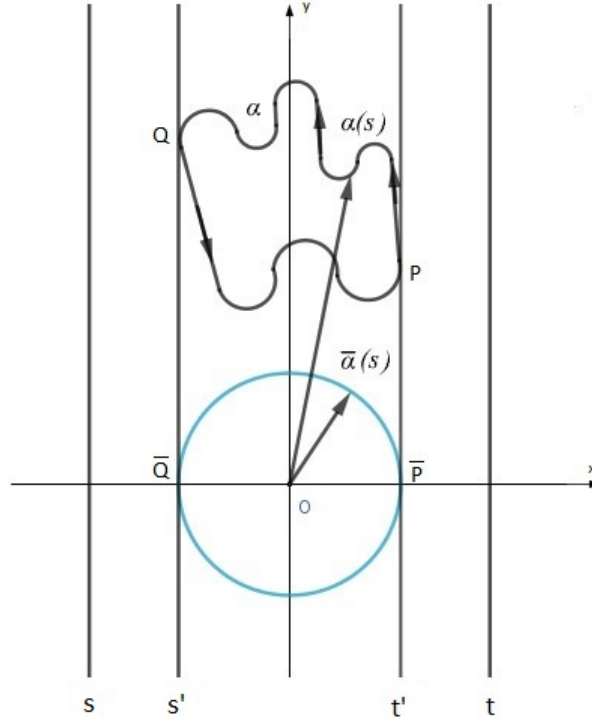


Figura 2.55: Figura auxiliar - Desigualdade isoperimétrica

Agora, suponha, sem perda de generalidade, que $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco, orientada positivamente (isso significa que a região fica a esquerda ao percorrermos a curva, aqui, percorremos a curva no sentido anti-horário) com $\alpha(0) = P$, e $\alpha(s_0) = Q$. Assim temos que:

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)), s \in [0, L]; \alpha(0) = \alpha(L).$$

Agora, vamos parametrizar o círculo $\bar{\alpha}$ por $\bar{\alpha} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$, usando o mesmo parâmetro de α , de forma que $\bar{x}(s) = x(s)$. Assim:

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s)).$$

Temos que $x^2(s) + y^2(s) = r^2$, onde r é o raio de $\bar{\alpha}$. Portanto:

$$\bar{y}(s) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2(s)}, & 0 \leq s \leq s_0 \\ -\sqrt{r^2 - x^2(s)}, & s_0 \leq s \leq L, \end{cases}$$

Sendo r o raio do círculo $\bar{\alpha}$. Temos que $\bar{\alpha}(0) = \bar{\alpha}(L)$.

Pelo Lema 2.7.1, temos que a área limitada por α é dada por $A = \int_0^L x(s)y'(s)ds$ e a área limitada pelo círculo $\bar{\alpha}$ é dada por $\bar{A} = - \int_0^L \bar{y}(s)x'(s)ds = \pi r^2$. Somando as duas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^L x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)ds \\ &\leq \int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s))^2}ds \\ &= \int_0^L \sqrt{x^2(y')^2 - 2xy'\bar{y}x' + \bar{y}^2(x')^2}ds. \end{aligned}$$

Sabemos que $-2ab \leq a^2 + b^2$, onde a, b pertencem a $\mathbb{R}$, ou seja podemos dizer que:

$$-2xy'\bar{y}x' \leq (xx'(s))^2 + (\bar{y}y'(s))^2 \quad (2.3)$$

Aplicando essa desigualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &\leq \int_0^L \sqrt{(xy'(s))^2 + (xx'(s))^2 + (\bar{y}y'(s))^2 + (\bar{y}x'(s))^2}ds \\ &\leq \int_0^L \sqrt{(x(s))^2 + (\bar{y}(s))^2((x'(s))^2 + (y'(s))^2)}ds. \end{aligned}$$

Como o vetor (x', y') é unitário podemos escrever:

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &\leq \int_0^L \sqrt{((x(s))^2 + (\bar{y}(s))^2)}ds \\ &\leq \int_0^L \sqrt{((\bar{x}(s))^2 + (\bar{y}(s))^2)}ds \\ &\leq \int_0^L rds = Lr \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$A + \pi r^2 \leq L \cdot r. \quad (2.5)$$

Pelo fato da média geométrica de dois números positivos ser menor que a média aritmética desses dois números, ou seja $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, temos que:

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{A + \pi r^2}{2} \leq \frac{Lr}{2}. \quad (2.6)$$

Considerando $\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{Lr}{2}$ e elevando ambos os lados ao quadrado e desenvolvendo, concluímos que:

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Como, $A\pi r^2 \leq \frac{(A + \pi r^2)^2}{4} \leq \frac{L^2 r^2}{4}$, temos que, $4A\pi r^2 \leq (A + \pi r^2)^2 \leq L^2 r^2$. Agora, suponha que $L^2 = 4\pi A$, então $4A\pi r^2 \leq (A + \pi r^2)^2 \leq 4\pi A r^2$. Assim, $(A + \pi r^2)^2 = 4\pi A r^2$. Desenvolvendo, temos que:

$$\begin{aligned} (A - \pi r^2)^2 &= 0 \\ A &= \pi r^2. \end{aligned}$$

Temos que se, $L^2 = 4\pi A$, substituindo $A = \pi r^2$, ficamos com, $L = 2\pi r$, portanto a distância $2r$ entre s' e t' não depende da direção comum dessas retas. Como $-2ab \leq a^2 + b^2$, utilizando (2.3), temos que a igualdade só irá acontecer quando:

$$x'(s)x(s) = a = -b = -\bar{y}(s)y'(s).$$

Portanto:

$$(x'(s)x(s))^2 + (y'(s)x(s))^2 = (y'(s)x(s))^2 + (\bar{y}(s)y'(s))^2.$$

Desenvolvendo e reagrupando:

$$\begin{aligned} (x')^2(s)x^2(s) + (y')^2(s)x^2(s) &= (y')^2(s)x^2(s) + \bar{y}^2(s)(y')^2(s) \\ x^2(s)((x')^2(s) + (y')^2(s)) &= (y')^2(s)(x^2(s) + (\bar{y})^2(s)) \\ x^2(s) &= \frac{(y')^2(s)(x^2(s) + (\bar{y})^2(s))}{(x')^2(s) + (y')^2(s)}. \end{aligned}$$

Utilizando do fato de (x', y') ser um vetor unitário, concluímos que:

$$(x(s))^2 = r^2(y'(s))^2. \quad (2.7)$$

Considere agora P' e Q' pontos sobre o traço de α , tais que suas coordenadas y , sejam máximas e mínimas respectivamente. Sabemos que α é diferenciável nesses pontos, portanto as retas tangentes à curva α em P' e Q' são paralelas ao eixo Ox . Agora sejam $\bar{s}$ e $\bar{t}$ essas retas tangentes, então a distância entre essas duas retas é igual a $2r$.

Agora vamos transladar o círculo $\bar{\alpha}$ por um vetor $(0, a)$, de maneira a se tangenciar com as retas $\bar{s}$ e $\bar{t}$.

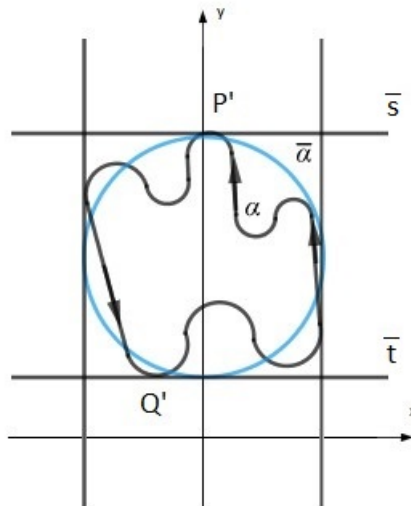


Figura 2.56: Figura auxiliar 2 - Desigualdade isoperimétrica

Repetindo os argumentos da prova (2.7), obtemos:

$$(y(s) + a)^2 = r^2(x'(s))^2. \quad (2.8)$$

Vamos somar agora as equações (2.7) e (2.8):

$$(x(s))^2 + (y(s) + a)^2 = r^2[(x'(s))^2 + (y'(s))^2] = r^2. \quad (2.9)$$

Portanto, concluímos que o traço de α é um círculo, finalizando assim a demonstração da desigualdade isoperimétrica.

2.4 Desigualdade isoperimétrica e a pavimentação do plano

Durante o trabalho, vimos os diferentes tipos de pavimentação e estudamos especificamente a pavimentação monoédrica do plano por polígonos de seis ou menos lados. Mas será que é possível pavimentar o plano com algum polígono cuja quantidade de lados seja maior do que seis? O teorema apresentado por Ivan Niven em 1978 garante que isso é impossível. A seguir vamos apresentar esse teorema e utilizar a desigualdade isoperimétrica para provar sua veracidade.

Teorema 2.4.1. *Sejam α e β quaisquer números reais positivos. É impossível pavimentar o plano com qualquer coleção de polígonos convexos, cada polígono com 7 ou mais lados, área maior que α e perímetro menor que β .*

Além da desigualdade isoperimétrica vamos utilizar dois teoremas para nos ajudar a provar o teorema apresentado por Niven, são eles, o Teorema de Euler e o Lema 2.8.1. Vejamos o que cada um propõe:

Teorema 2.4.2. *(Teorema de Euler) Seja dada uma pavimentação parcial do plano com f polígonos, v nós e a arestas. Então, é válida a seguinte igualdade [9]:*

$$v - a + f = 1. \quad (2.10)$$

Lema 2.4.1. *Se P é um polígono de perímetro menor que β , então, a área de P é menor que β^2 .*

Demonstração do Lema 2.8.1: Seja A a área limitada por um polígono de perímetro menor que β e A_c a área de um círculo cuja fronteira tem comprimento igual a β . Pela desigualdade isoperimétrica, $A < A_c$. Como um círculo de raio r possui comprimento igual a $c = 2\pi r$, isso implica que $\beta = 2\pi r$, isolando r , ficamos com, $r = \frac{\beta}{2\pi}$, substituindo no cálculo da área do círculo, temos:

$$\begin{aligned} A_c &= \pi \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^2 \\ &= \frac{\beta^2}{4\pi} < \beta^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$A < A_c < \beta^2. \quad (2.11)$$

O teorema apresentado por Ivan Niven será demonstrado utilizando o método do absurdo, vejamos:

Demonstração: Suponha que o plano possa ser pavimentado por um conjunto de polígonos convexos, tal que cada um tenha 7 ou mais lados, e sua área seja maior que α e perímetro menor que β , tal que α e β sejam números reais, positivos e pré definidos. A partir desse ponto iremos mostrar que esta hipótese leva a uma contradição.

Suponha um quadrado cujos lados são suficientemente grandes, que não pode ser coberto por polígonos que satisfazem as hipóteses já citadas.

Agora considere um sistema de coordenadas (x, y) no plano de pavimentação e uma região quadrangular $Q(r)$ contendo todos os pontos (x, y) que satisfazem $|x| \leq r$ e $|y| \leq r$, de maneira que r seja um número real e positivo. Iremos mostrar que existe r suficientemente grande que ao final nos dará a contradição desejada.

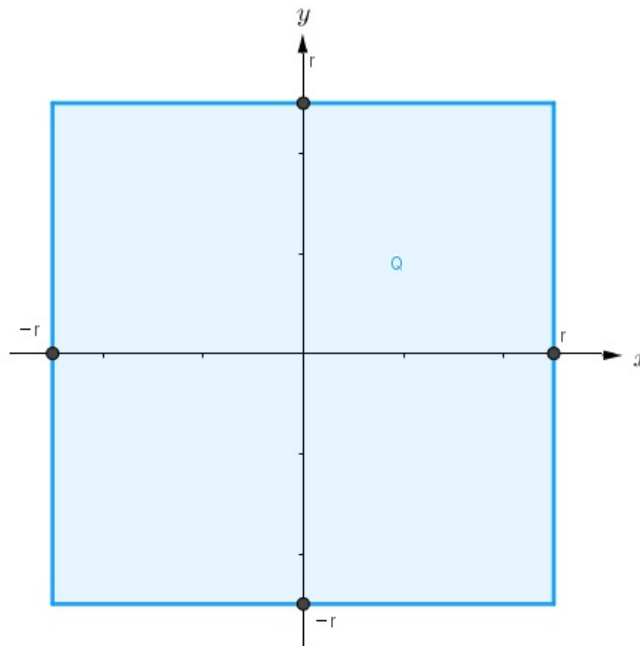


Figura 2.57: Região $Q(r)$

A pavimentação do plano P_1 será construída da seguinte maneira:

- Caso algum polígono da pavimentação do plano contenha algum ponto da região quadrangular $Q(r)$, então, este polígono pertence à pavimentação parcial P_1 .
- Caso algum polígono da pavimentação não tenha ponto em comum com $Q(r)$, porém seja cercado por peças que tenham pelo menos um ponto em comum com $Q(r)$, então,

esse polígono também faz parte da pavimentação P_1 . Essa condição garante que a pavimentação P_1 cobre toda a região sem deixar buracos.

Considere também uma região quadrangular $Q(r + \beta)$, cujos vértices correspondentes são $(\pm(r + \beta), \pm(r + \beta))$.

Já que o perímetro dos polígonos de pavimentação serão menores que β , temos que a pavimentação P_1 está toda contida no interior da região quadrangular $Q(r + \beta)$.

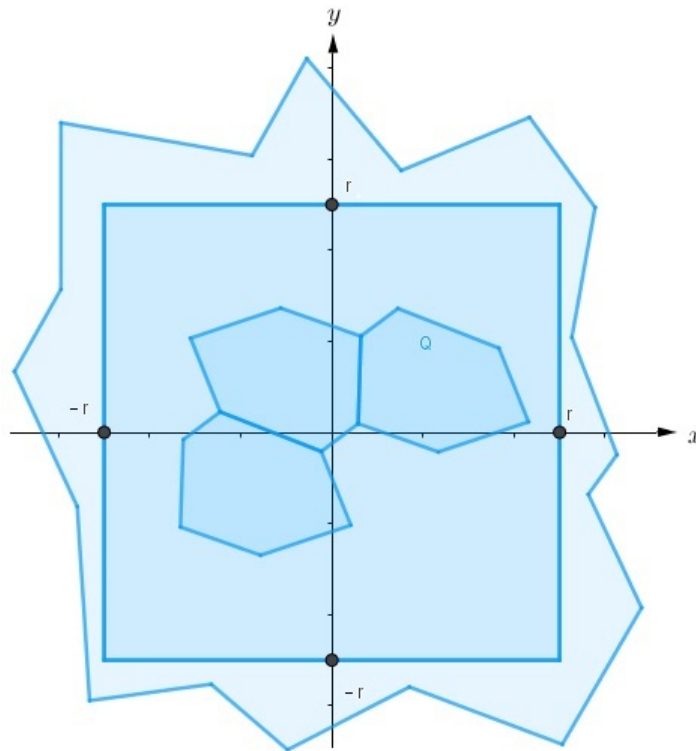


Figura 2.58: Pavimentação P_1

Suponha agora, que algum vértice dos polígonos da pavimentação P_1 esteja fora do quadrado de lado $2(r + \beta)$.

Admitimos na figura (2.59), um polígono de 7 ou mais lados cujo vértice v_1 não está contido no quadrado de lado $2(r + \beta)$. Seja d a diagonal que liga o vértice v_1 ao vértice v_4 e sejam $l_1, l_2, l_3, \dots, l_7$, os lados desse polígono.

Temos pela desigualdade triangular:

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 > d > \beta$$

$$l_5 + l_6 + l_7 > d > \beta.$$

Somando as duas desigualdades, obtemos:

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7 > 2d > 2\beta$$

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7 > \beta.$$

$$\text{Perímetro} > \beta. \quad (2.12)$$

O que é um absurdo, pois por hipótese o perímetro de cada polígono deve ser menor que β .

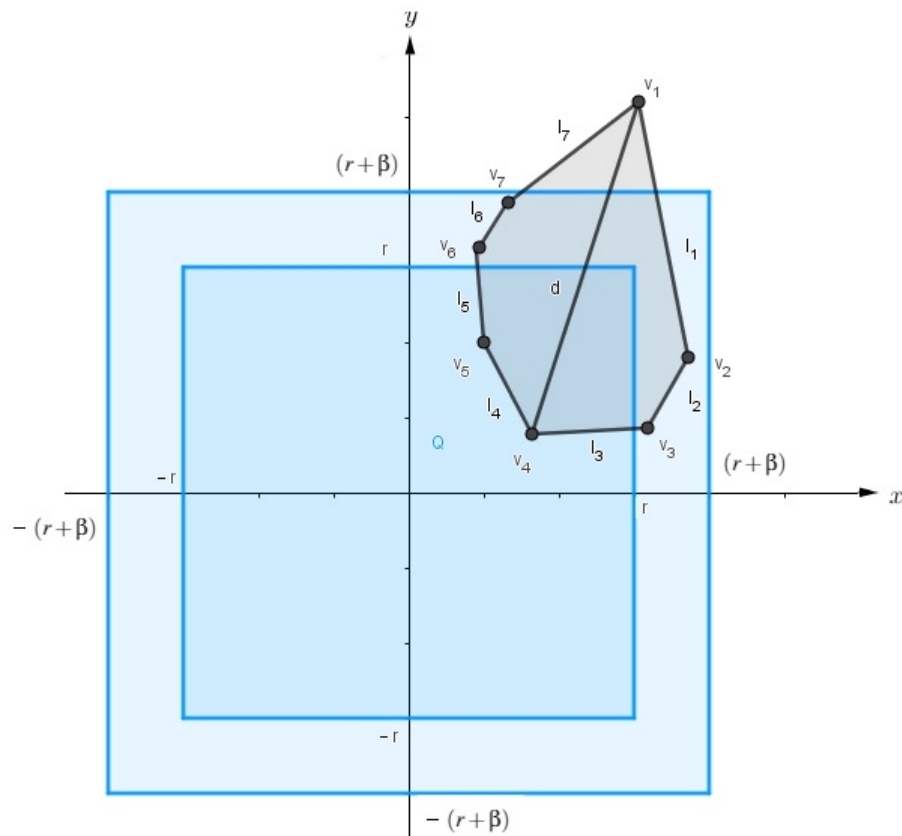


Figura 2.59: Pavimentação P_1

Já que cada polígono da pavimentação deve ter área maior que α e P_1 está totalmente contida em $Q(r+\beta)$, concluímos que P_1 deve possuir uma quantidade finita de polígonos.

Da mesma maneira que definimos a pavimentação P_1 que cobre totalmente a região quadrangular $Q(r)$, iremos definir uma outra pavimentação, P , que cobre totalmente a região quadrangular de arestas $Q(r+\beta)$.

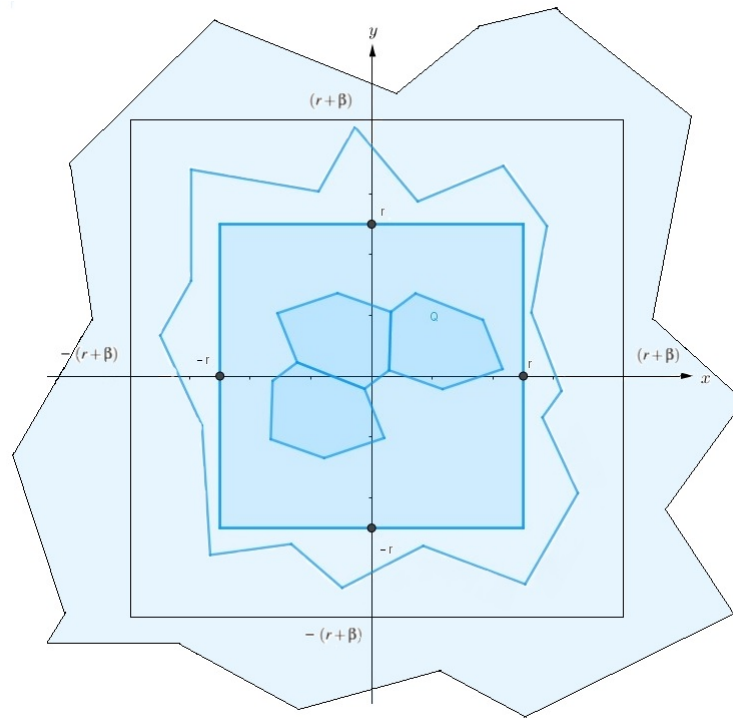


Figura 2.60: Pavimentação P_1

Anteriormente vimos que uma pavimentação em P_1 possui uma quantidade finita de polígonos. Da mesma maneira, podemos utilizar argumentos semelhantes para provar que uma pavimentação P também possui uma quantidade finita de polígonos.

Portanto, iremos definir alguns elementos dessa pavimentação:

- Pavimentação P_1 : possui f_1 polígonos e v_1 nós;
- Pavimentação P : possui f polígonos, v nós e a arestas.

Aplicando o teorema de Euler à pavimentação P , teremos que:

$$v + f = a + 1 \rightarrow v + f > a. \quad (2.13)$$

Temos que a soma dos ângulos internos em cada nó de todos os polígonos da pavimentação P_1 pode ser representada por $\sum(\alpha_i)$, sendo α_i os ângulos internos de cada nó da pavimentação, vamos utilizar a Figura 2.61 a seguir para exemplificar:

O polígono I da figura (2.61) é um triângulo com 4 nós em sua fronteira, portanto a soma dos ângulos internos em cada nó do polígono I é igual a $a + b + c + d$. Já no polígono II , temos um quadrilátero com 4 nós em sua fronteira, e a soma de seus ângulos internos em

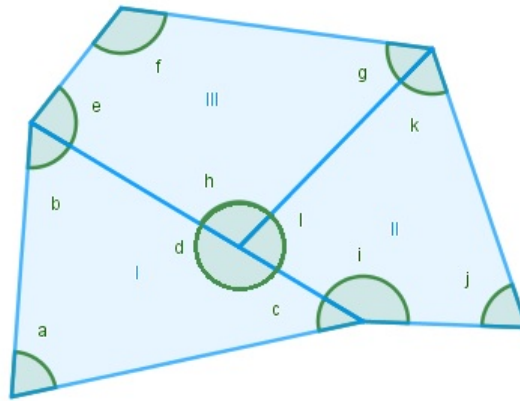


Figura 2.61: Pavimentação P_1

cada nó é igual a $i + j + k + l$, da mesma maneira no polígono *III* temos 4 nós, e a soma dos ângulos internos é igual a $e + f + g + h$. Portanto, temos que:

$$\sum(\alpha_i) = (a + b + c + d) + (e + f + g + h) + (i + j + k + l).$$

Vamos definir agora um limite inferior e superior para $\sum(\alpha_i)$.

- Limite Inferior: Considere X um polígono qualquer da pavimentação P_1 . Então o número de nós, n , nas extremidades de X é maior ou igual ao número de vértices dessas extremidades, portanto, $n \geq 7$, pois X tem no mínimo 7 lados. Concluimos que a soma S dos ângulos internos de cada nó do polígono X é tal que $S \geq (n - 2)\pi \geq (7 - 2) = 5\pi$. Se fizermos esse cálculo para cada um dos f_1 polígonos de P_1 , teremos:

$$\sum(\alpha_1) \geq 5\pi f_1.$$

- Limite Superior:

Temos que a soma de todos os ângulos internos dos nós n de P_1 será menor ou igual a 2π . Portanto:

$$\sum(\alpha_1) \leq 2\pi n_1.$$

Analisando as desigualdades apresentadas acima, concluimos que:

$$\begin{aligned} 2\pi n_1 &\geq \sum(\alpha_1) \geq 5\pi f_1 \\ 2\pi n_1 &\geq 5\pi f_1 \\ 2n_1 &\geq 5f_1. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Se analisarmos os n nós da pavimentação P , temos que P possui a arestas e cada aresta se liga a dois nós. Portanto, o dobro do número de arestas será maior ou igual do que o número de nós, $2a \geq v$. Portanto:

- Cada nó está ligado a pelo menos duas arestas, o que implica que cada nó está sendo contado pelo menos duas vezes pelo número $2a$.

- Cada nó, no interior de P , pertence a pelo menos 3 polígonos, o que implica que nestes nós concorrem pelo menos três arestas e esse nó está sendo contado pelo menos três vezes pelo número $2a$.

Temos que todos os n_1 nós de P_1 fazem parte do interior da região de pavimentação P , portanto, P deve possuir pelo menos n_1 nós interiores. Se contarmos cada um três vezes e os que sobrarem contarmos $n - n_1$ nós de P duas vezes, segue que:

$$\begin{aligned} 2a &\geq v \\ 2a &\geq 3n_1 + 2(n - n_1) \\ 2a &\geq n_1 + 2n. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Vimos em (2.13) que $v + f > a$. Agora, vamos pegar essa desigualdade e multiplicar por 2, ficando com:

$$2v + 2f > 2a. \tag{2.16}$$

Em (2.15), temos que n_1 e n representam a quantidade de nós de determinado polígono. Como a quantidade n de nós é sempre igual ou maior que a quantidade de vértices da pavimentação, vamos substituir n e n_1 por v e v_1 . Tomando a desigualdade (2.15) e substituindo em (2.16), temos que:

$$\begin{aligned} 2v + 2f &> 2a \\ 2v + 2f &> v_1 + 2v \\ 2f &> v_1. \end{aligned}$$

Multiplicando a desigualdade acima por 2, temos que $4f > 2v_1$, comparando com a desigualdade (2.14) chegamos em:

$$\begin{aligned} 4f &> 2v_1 \geq 5f_1 \\ 4f &> 5f_1. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Em contrapartida, há $f_2 = f - f_1$ polígonos em P que não pertencem à P_1 . Se multiplicarmos o primeiro e segundo membro por 4 temos que:

$$\begin{aligned} 4f_2 &= 4f - 4f_1 \\ 4f &= 4f_2 + 4f_1. \end{aligned}$$

Substituindo $4f$ em (2.17) temos que:

$$\begin{aligned} 4f_2 + 4f_1 &> 5f_1 \\ 4f_2 &> f_1. \end{aligned}$$

Ainda temos que cada polígono de P_1 possui perímetro menor que β e área menor que β^2 , pelo Lema 2.8.1, portanto os f_1 polígonos de P_1 tem área total menor que $\beta^2 f_1$. Todavia esses polígonos cobrem a área limitada pela região $Q(r)$, que possui área igual a $4r^2$. Portanto:

$$\begin{aligned} 4r^2 &< Area(P_1) \leq \beta^2 f_1 \\ \beta^2 f_1 &\geq 4r^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Analogamente, analisando a área limitada por f_2 polígonos que pertencem a P e não pertencem a P_1 , da mesma maneira que fizemos anteriormente, temos que esses polígonos estão completamente contidos na região $Q(r + 2\beta)$ representada na figura (2.62) a seguir. Isso acontece pois cada polígono contido em $Q(r + 2\beta)$ possui perímetro menor que β . Com isso podemos concluir que cada um dos f_2 polígonos que estão fora da região $Q(r)$ pertencem à região $Q(r + 2\beta)$. Temos que esse anel quadrangular possui área igual a:

$$[2(r + 2\beta)]^2 - (2r)^2 = 4(r + 2\beta)^2 - 4r^2.$$

Então, a área f_2 é menor ou igual ao limite superior, ou seja:

$$Area(f_2 \text{ poligonos}) \leq 4(r + 2\beta)^2 - 4r^2.$$

Entretanto, ainda temos cada um dos f_2 polígonos têm área maior que α . Portanto temos que a área total dos f_2 polígonos é maior que o limite inferior, ou seja maior que αf_2 , portanto:

$$\alpha f_2 \leq Area(f_2 \text{ poligonos}) \leq 4(r + 2\beta)^2 - 4r^2.$$

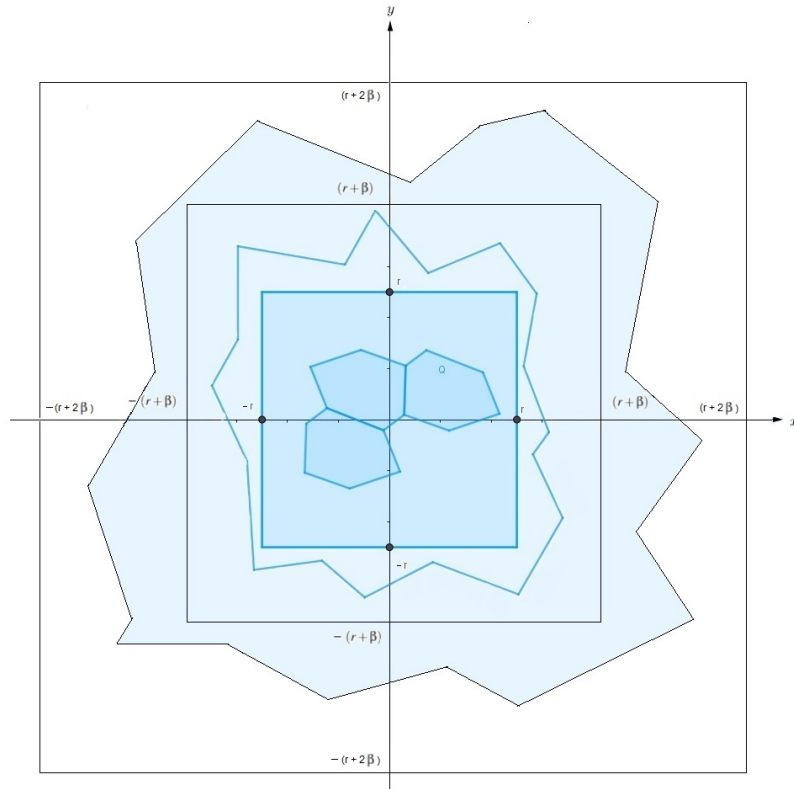


Figura 2.62: Pavimentação P_1

$$4(r+2\beta)^2 - 4r^2 \geq \alpha f_2. \quad (2.19)$$

Desenvolvendo o primeiro membro da inequação (2.19), temos que:

$$\begin{aligned} 4(r^2 + 4r\beta + 4\beta^2) - 4r^2 &\geq \alpha f_2 \\ 4r^2 + 16r\beta + 16\beta^2 - 4r^2 &\geq \alpha f_2 \\ 16\beta(r + \beta) &\geq \alpha f_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Multiplicando a desigualdade (2.20) por $4\beta^2$:

$$64\beta^3(r + \beta) \geq 4\beta^2 \alpha f_2. \quad (2.21)$$

Por meio das inequações (2.18) e (2.21), temos:

$$\begin{aligned} 64\beta^3(r + \beta) &\geq 4\beta^2 \alpha f_2 > \beta^2 \alpha f_1 > 4\alpha r^2 \\ 64\beta^3(r + \beta) &> 4\alpha r^2 \\ \alpha r^2 - 16\beta^3 r + 16\beta^4 &< 0, \forall r > 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como $\alpha > 0$, $\exists r > 0$ tal que a função $g(r) = \alpha r^2 - 16\beta^3 r + 16\beta^4 > 0$, o que contradiz a desigualdade (2.22)

Assim, provamos que se α e β são números reais positivos é impossível pavimentar o plano com qualquer coleção de polígonos convexos, cada polígono com 7 ou mais lados, área maior que α e perímetro menor que β . Concluimos assim que só podemos pavimentar o plano de maneira monoédrica com uma coleção de polígonos com menos de 7 lados.

3 Matemática das Abelhas - Proposta de Atividade

Sabemos a relação que a natureza tem com a matemática, desde a simetria encontrada nas asas de uma borboleta as rotações elípticas que determinam o movimento de alguns astros no universo. Alguns animais também utilizam de cálculos matemáticos para realizar algumas funções do seu dia a dia podemos citar como exemplo as formigas, que ao chegar no formigueiro calculam a trajetória mais curta e eficiente para ficar o menor tempo possível no sol e calor, quando forem buscar alimentos. Também temos as abelhas que constroem seus alvéolos de forma geométrica e hexagonal e é nesse último animal que iremos focar o capítulo. Iremos verificar o motivo das abelhas depositarem o mel que fabricam, nos alvéolos, como também o motivo de sua forma hexagonal.

O presente trabalho teve como objetivo abordar o assunto referente à pavimentação do plano por polígonos convexos, sejam eles regulares ou não. Nesse aspecto iremos propor uma atividade afim de verificar, por meio da tentativa e erro, os polígonos regulares que pavimentam o plano, e posteriormente iremos também, por meio da verificação, concluir que, entre o triângulo regular, quadrado e hexágono regular, todos com o mesmo perímetro, o que abrange maior área é de fato o hexágono regular.

3.1 Geometria e Abelhas

As abelhas procuram construir sua colmeia (nome dado a uma sociedade de abelhas ou ao abrigo construído para ou pelas abelhas) em lugares que naturalmente as protegem do frio, calor, chuva e de seus inimigos naturais. Esses lugares podem ser cascas ocas de árvore, buracos no solo, ou cupinzeiros abandonados.

Ao observar uma colmeia verificamos que sua estrutura social é dividida em três grupos de abelhas: a operária, cujas funções básicas são proteger a entrada da colmeia e proteger a rainha; os zangões, cuja função é a de fecundar a abelha rainha; e a abelha rainha, única abelha fértil da colmeia, responsável pela produção de mel, pode colocar em média 2500 ovos por dia, alimenta-se exclusivamente de geleia real, podendo viver até 5 anos.



Figura 3.1: Classificação das abelhas

Por instinto, as abelhas constroem seus alvéolos utilizando cera, produzida por elas mesmo. Os alvéolos são construídos para armazenar a maior quantidade de mel, utilizando a menor quantidade de material possível, ou seja, que apresente “maior volume” ou maior capacidade, para a menor porção de material empregado.

Por esse motivo a parede de um alvéolo serve também ao alvéolo vizinho, portanto não pode ter um formato cilíndrico, pois, se assim fosse, não haveria paredes em comum, o que resultaria em desperdício de material.

Essa matemática contida na vida das abelhas suscitou o interesse de vários matemáticos. Podemos citar como exemplo Pappus de Alexandria e Johannes Kepler. Foi Pappus de Alexandria (320 d.C.) o primeiro matemático que teve o interesse em estudar o problema dos alvéolos em forma de prismas de secção triangular, quadrada e hexagonal, concluindo que o hexagonal poderia armazenar mais mel do que os demais.

O cientista Dinamarquês Easmus Bartholin, concluiu que o trabalho das abelhas nada tinha a ver com economia de material, mas sim da impossibilidade de construírem paredes que não fossem planas, devido à pressão exercida por outras abelhas.

Mas então por qual motivo as abelhas utilizam o prisma hexagonal e não outro tipo, para construir seus alvéolos? Durante o trabalho vimos que apenas três polígonos regulares pavimentam o plano, o triângulo equilátero, quadrado e hexágono, portanto a escolha certa para as abelhas deve ser um dos três tipos. Levando em conta que deve haver economia de material, vamos fixar um volume V e lado l para nossos três tipos de prismas.

Temos que, para o prisma hexagonal de lado l atingir um volume igual a V , irá precisar de uma altura x , ou seja:

$$V = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}x \Leftrightarrow x = \frac{2V}{3l^2\sqrt{3}}.$$

Para o prisma quadrangular de lado l atingir um volume igual a V irá precisar de uma altura y , portanto:

$$V = l^2y \Leftrightarrow y = \frac{V}{l^2}.$$

Do mesmo modo, para o prisma triangular de lado l atingir um volume igual a V irá precisar de uma altura z , por isso:

$$V = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}z \Leftrightarrow z = \frac{4V}{l^2\sqrt{3}}.$$

Agora vamos calcular a área lateral de cada prisma, denominando A_h como sendo a área lateral do prisma hexagonal, A_q como área lateral do prisma quadrangular e A_t como área lateral do prisma triangular, assim o prisma que tiver a menor área lateral será o prisma que necessita de menos material para ser construído.

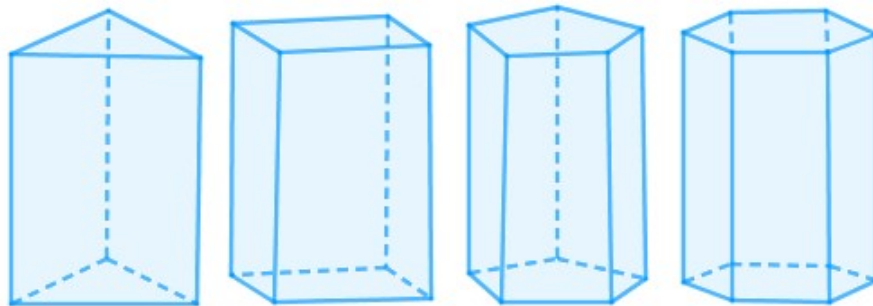


Figura 3.2: Prisma triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal

Calculando a área lateral do prisma hexagonal, prisma quadrangular e prisma triangular, obtemos respectivamente:

$$A_h = 6lx = 6l \frac{2V}{3l^2\sqrt{3}} = \frac{4V}{\sqrt{3}l},$$

$$A_q = 4ly = 4l \frac{V}{l^2} = \frac{4\sqrt{3}V}{\sqrt{3}l},$$

$$A_t = 3lz = 3l \frac{4V}{l^2\sqrt{3}} = \frac{12V}{\sqrt{3}l}.$$

Portanto, temos que:

$$A_h < A_q < A_t.$$

Concluimos então que a área lateral do prisma hexagonal é a menor, e portanto é o formato ideal para os alvéolos, pois assim, a quantidade de material gasto é a menor possível. Sabemos também que o fundo dos alvéolos não é plano, e sim, formado por três losangos cujos ângulos são congruentes.

O matemático e astrônomo Johannes Kepler conduziu um estudo que concluía que todos os ângulos diedros deveriam ser de 120° . Em meados de 1700, René Antoine Ferchault, famoso físico francês, apresentou o problema como sendo um problema de máximo e de mínimo, que as abelhas resolveriam com o intuito de minimizar a utilização de cera. Temos que o fundo de cada alvéolo é formado por três losangos iguais, formando assim, uma base poliédrica convexa.

O filósofo, físico e matemático francês, René Descartes constatou que o ângulo agudo dos losangos do fundo do alvéolo era constante. Com isso, ele começou a investigação de alvéolos da Alemanha, Suíça, Inglaterra e Canadá e todos apresentavam a medida dos ângulos iguais. Foi o matemático Ítalo-francês Dominique Maraldi que mediu com uma precisão maior o ângulo agudo e constatou que sua medida era de $70^\circ 32'$ em todos os alvéolos. Com isso, René Descartes resolveu consultar outro matemático, seu amigo Alemão, Samuel Köing, propondo-lhe o seguinte problema: *"É dado um prisma hexagonal regular. Esse prisma é fechado numa das suas extremidades por três losangos iguais. Pergunta-se: Qual deve ser o ângulo desse losango de modo que se obtenha para o prisma um volume máximo com a maior economia de material?"*

Samuel Köing encontrou uma solução para problema, afirmando que o ângulo dos losangos era de $70^\circ 34'$. Com isso, a comunidade científica francesa ficou impressionada, pois os mesmos acreditaram que as abelhas tinham cometido algum erro, mesmo que esse erro tivesse sido mínimo. Aliás, o erro do ângulo, em dois minutos, só poderia ser apreciado com instrumentos de precisão.

O matemático inglês, Colin Mac-Laurin, retomou o problema e o resolveu com recursos do cálculo diferencial, concluindo que o Problema de Máximo e Mínimo do ângulo do losango que tornava o alvéolo mais económico deveria medir $70^\circ 32'$, ou seja, as abelhas de fato estavam certas.

Posteriormente Mac- Laurin defendeu Samuel Köing, afirmando que este tinha errado devido ao uso de uma tábua de logaritmos que continha um erro de aproximação e indicou onde estava o erro.

Agora, vamos determinar o valor dos ângulos dos losangos que são utilizados para fechar a base dos álveolos. Caso o volume seja fixado, para que haja economia de material, devemos escolher o ângulo $\theta = IVV'$, de tal maneira que a projeção de I seja o centro de $A'B'C'D'E'F'$.

Como a interseção de CA e VV' é representada pelo ponto M , temos que $IM = \frac{s}{2}$, com CM sendo a altura do triângulo BCI , s o lado de $A'B'C'D'E'F'$ e $CM = \frac{s}{2}\sqrt{3}$.

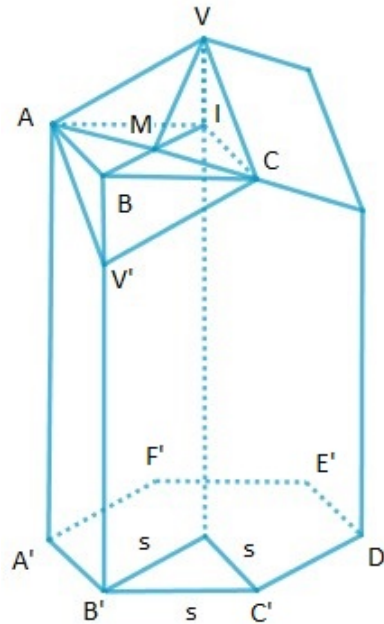


Figura 3.3: Sólido de base hexagonal

Temos que o triângulo IMV é retângulo, portanto, podemos obter a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{IM}{VM} = \frac{\frac{s}{2}}{VM} \\ VM &= \frac{s}{2 \sin \theta}. \end{aligned}$$

Como a diagonal do alvéolo possui três das diagonais de $AV'CV$, podemos calcular sua área da seguinte maneira:

$$Area(AV'CV) = \frac{(AC) \cdot (VV')}{2} = \frac{2(CM) \cdot 2(TM)}{2} = \frac{s^2 \sqrt{3}}{2 \sin \theta}.$$

Como as seis faces dos alvéolos são trapezóides congruentes, e como, $BV' = VI$, pelo triângulo VIM temos que:

$$\cot \theta = \frac{VI}{IM} = \frac{BV'}{\frac{s}{2}}.$$

Portanto temos que $BV' = \frac{s}{2} \cot \theta$, ou seja:

$$Area(AA'B'V') = \frac{s}{2}(AA' + B'V') = \frac{s}{2}(h + h - BV') = hs - \frac{s^2}{4} \cot \theta.$$

Concluimos então que a área lateral somada com o fundo do álvelo feito de cera pelas abelhas é de:

$$Area(AA'B'V') = 6hs - \frac{3}{2}s^2 \cot \theta + \frac{3s^2\sqrt{3}}{2 \sin \theta}.$$

A área acima é uma função de variável θ , agora considere, h e s dados, temos que $f(\theta)$ será representada por:

$$Area(AA'B'V') = f(\theta) = 6hs + \frac{3}{2}s^2 \left(-\cot \theta + \frac{s^2\sqrt{3}}{\sin \theta} \right).$$

Temos que em $f(\theta)$ apenas a expressão em parentêses possui a variável θ . Como para minimização dos álvelos fixamos s e h veremos agora para qual valor de θ teremos a área mínima, portanto, considere:

$$g(\theta) = -\cot \theta + \frac{s^2\sqrt{3}}{\sin \theta}.$$

Vejamos a seguir o gráfico da função g , nele, podemos perceber o valor mínimo de $g(\theta)$.

O gráfico acima foi construído utilizando o software matemático GeoGebra. O cálculo detalhado do valor de θ que minimiza a função g requer conceitos de Cálculo Diferencial. Como não abordaremos esses cálculos, o leitor pode encontrar tais cálculos na referência [11].

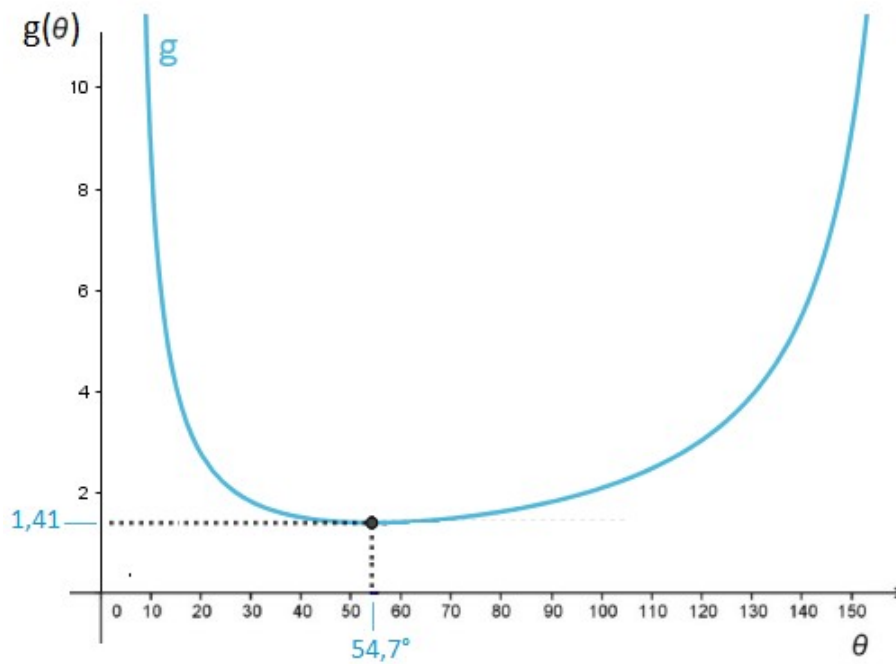


Figura 3.4: Gráfico do valor mínimo de θ

Agora vamos determinar o ângulo dos losangos que são responsáveis por fechar o fundo dos álveolos.

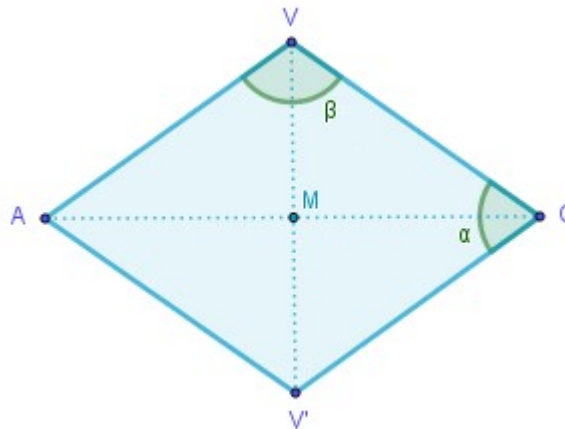


Figura 3.5: Losango

Sabemos que a medida de do segmento CM é igual a $\frac{s}{2}\sqrt{3}$ e que o segmento VM possui medida igual a $\frac{s}{\sin \theta}$. Portanto, como o triângulo VMC é retângulo, dele, podemos obter:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{VM}{CM} = \frac{\frac{1}{2\sin \theta}}{\frac{s\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} \sin \theta}.$$

Portanto, temos que, $\frac{\alpha}{2} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3} \sin \theta}$. Concluimos então que, $\alpha = 2 \arctan \frac{1}{\sqrt{3} \sin \theta}$.

Como encontramos anteriormente θ aproximadamente igual a $54,7$, substituindo esse valor e aproximando $\sqrt{3} \approx 1,73$, conseguimos encontrar os valores de α e β , ou seja:

$$\alpha = 70^{\circ}32' \quad e \quad \beta = 109^{\circ}28'.$$

Ou seja tem-se que as abelhas, de maneira intuitiva, constrói seus alvéolos assim, de maneira a economizar cera.

3.2 Proposta de Atividade

O objetivo desta atividade é introduzir o conceito de pavimentação, como também relembrar aos alunos conceitos e definições referentes aos polígonos regulares. Iremos iniciar a atividade apresentando para os alunos o conceito de pavimentação e posteriormente iremos apresentar, por meio de deduções, os polígonos que pavimentam o plano, e finalmente faremos uma atividade prática sobre pavimentação.

3.2.1 Iniciando a aula

Primeiro momento: Iremos iniciar a aula apresentando aos alunos o seguinte problema: "Bee uma abelha operária acaba de se formar em matemática na Universidade de Colmeia. Em sua primeira entrevista de emprego, seu empregador, "a rainha", como pré-requisito para contratá-la, propõe que ela resolva a seguinte situação: "Estamos com um problema de estocagem na colmeia. Determine a melhor forma geométrica, para estocagem, de maneira a resolver esse problema".

Segundo momento: Após apresentar aos alunos o problema a ser resolvido, iremos instigar os mesmos para que cheguem a conclusão que a melhor maneira para estocar o mel seria utilizando algum sólido geométrico. Nesse momento o professor pode introduzir os conceitos de pavimentação.

Terceiro momento: O professor irá entregar para cada aluno 5 figuras planas e regulares, o triângulo, quadrado, pentágono, hexágono e heptágono. Os alunos terão que tentar fazer uma pavimentação parcial do plano. Nesse momento, os mesmos irão verificar que apenas 3 polígonos regulares pavimentam o plano, o triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular.

Quarto momento: Agora, o professor irá entregar 3 modelos de prismas para cada aluno, todos com mesma altura, e cujos perímetros de suas bases também possuem mesma medida. Serão eles prisma triangular, prisma quadrangular e prisma hexagonal.

Após todos os alunos terem montado seus respectivos prismas, o professor irá fornecer para cada sementes de feijão. O intuito agora é preencher cada prisma com os feijões, começando com o prisma triangular. Iremos preenchê-lo totalmente, e depois, vamos utilizar as mesmas sementes utilizadas no preenchimento do volume do prisma triangular para preencher o prisma quadrangular. Nesse momento os alunos irão perceber que os feijões utilizados não serão suficientes, o que levará, por intuição, a pensarem que o volume então do prisma quadrangular é maior que o volume do prisma triangular.

Iremos utilizar a mesma quantidade de feijão para preencher o prisma hexagonal. Mais uma vez, os alunos irão perceber que a altura que os feijões alcançaram no prisma hexagonal foi inferior à altura alcançada nos prismas triangulares e quadrangulares, o que irá levá-los a pensar que o prisma hexagonal, de fato possui volume maior que os prismas utilizados anteriormente.

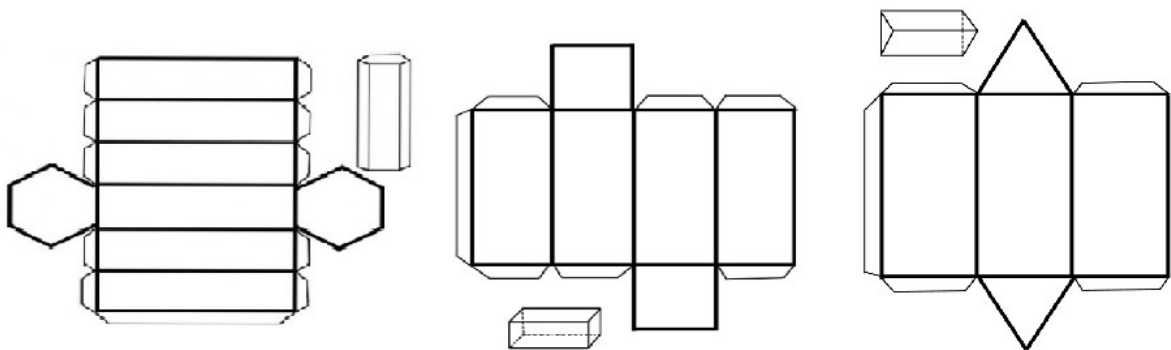


Figura 3.6: Modelo de prismas

Quinto momento: Os alunos então, chegarão à conclusão que a melhor maneira para Bee resolver o problema de estocagem de mel apresentado pela rainha, é utilizar os prismas hexagonais regulares, concluindo assim a atividade e introdução de conceitos geométricos e matemáticos.

O intuito desta atividade é apresentar para os alunos algumas das figuras planas, como também apresentar o conceito de pavimentação do plano, verificar que há apenas 3 polígonos regulares que pavimentam o plano, e mostrar para o aluno que, dado o triângulo regular, quadrado e hexágono regular, todos possuindo o mesmo perímetro, conseguimos pavimentar uma certa região do plano utilizando menos hexágonos regulares do que as demais figuras.

"Tratar os conteúdos de ensino de forma contextualizada significa aproveitar ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos e o contexto social ou pessoal do aluno, de modo a dar significado ao que está sendo aprendido, levando-se em conta que todo conhecimento envolve uma relação ativa entre o sujeito e o objeto do conhecimento". (DANTE, 2011, p. 16).

Finalizamos esse capítulo esperando que a atividade em questão sirva de referência aos possíveis professores que pretendem introduzir e desenvolver o estudo das pavimentações no plano euclidiano.

Conclusão

Esse trabalho teve o intuito de provar o seguinte teorema: Sejam α e β quaisquer números reais positivos. É impossível pavimentar o plano com qualquer coleção de polígonos convexos, cada polígono com 7 ou mais lados, área maior que α e perímetro menor que β ". Para isso tivemos que introduzir alguns conceitos básicos sobre os polígonos e sobre a pavimentação do plano.

Inicialmente conceituamos alguns aspectos básicos sobre os polígonos, definimos o que são polígonos, e os diferentes elementos que os constituem. Posteriormente apresentamos o conceito de pavimentação do plano, pavimentação essa que apresenta-se de duas maneiras distintas, a pavimentação fragmentada ou parcial e a pavimentação ideal.

Posteriormente à definição de todos esses conceitos apresentados, provamos que apenas 3 polígonos regulares pavimentam o plano, o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. Após, demonstramos por meio de construções geométricas, que o plano pode ser pavimentado de maneira monoédrica apenas pelo quadrado, triângulo, pentágono e hexágono, sendo os dois últimos até agora, limitados a 15 e 3 tipos de polígonos apenas.

Apresentamos a desigualdade isoperimétrica como uma ferramenta de prova, pois a mesma foi utilizada para provar nosso teorema inicial, assim conseguimos provar que é impossível pavimentar o plano com qualquer coleção de polígonos convexos, cada polígono com 7 ou mais lados, área maior que α e perímetro menor que β ".

Por último apresentamos uma curiosidade referente à pavimentação do plano e recomendamos uma atividade pedagógica para ser aplicada para alunos do ensino regular. Dessa maneira esperamos que esse trabalho sirva de consulta e referencial teórico para futuros acadêmicos e alunos do ensino básico ou superior.

Bibliografia

- [1] BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.
- [2] BARROS, F. C. **Pavimentações do Plano: Propostas lúdicas de aula. Trabalhando com Ângulos Internos, Simetrias, Isometrias, Obras de Artes e Mediatrizes.** (Mestrado profissionalizante) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada 2016.
- [3] BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Editora Edgar Blucher Ltda. 1974.
- [4] CASTRO, R. F. C. R. **Pavimentação no Plano Euclidiano.** 51 f. Monografia (Especialização em matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais. 2008.
- [5] COELHO, A. et al. **Estudo dos polígonos por intermédio da pavimentação do plano.** Monografia (Mestrado profissionalizante) - Universidade Federal de Goiás 2014.
- [6] DALCIN, M. **Mosaicos do Plano** - Revista Professor de Matemática, 40, Montevideu-Uruguai - Sérgio Alves (IME-USP) 2012.
- [7] DANTE. L. . **Matemática Contexto e Aplicações.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2011.
- [8] DUTENHEFNER. F; CASTRO. R. F. C. R. **Uma História sobre pavimentações do plano euclidiano: erros e acertos.** Revista do Professor de Matemática, n. 70, 2010.
- [9] LIMA. E. L. **Ainda sobre o teorema de Euler para poliedros convexos.** Revista do Professor de Matemática, n. 5, 1984.
- [10] FERREIRA. B. S. **Problemas de Máximos e Mínimos** (Mestrado Matemática para Professores) - Universidade de Lisboa - Faculdade de Ciências - Departamento de Matemática. 2012
- [11] FAORO, T. C. **Geometria das Abelhas.Dourados:** Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul.2010
- [12] MADEIRA, T. M. **O Problema isoperimétrico clássico.** (Mestrado acadêmico) - Universidade de Coimbra 2005.
- [13] MANN, C. et al. **Convex pentagons that admit i-block transitive tilings** Geometriae Dedicata,194, Vol.1,pages 141–167, 2018, Springer.

- [14] MARTINS, D. A. N. **Tratamento Interdisciplinar e Inter-relações entre Matemática e Física: Potencialidades e Limites da Implementação dessa Perspectiva**. Dissertação (Mestrado em Educação). São Paulo. PUC-SP. 2005.
- [15] PEREIRA, A. P. S. **A desigualdade isoperimétrica e uma aplicação**. (Especialização em matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais 2012.
- [16] REINHARDT, K. **Über die Zerlegung der Ebene in Polygone**. 1918. n. f. Dissertation (Dokortitel in Naturwiss)-Universit at Frankfurt, 1918.
- [17] RODRIGUES, C. et al. **Biologia e Geometria - A Geometria dos Favos das Abelhas. Projeto Pró- Ciências- A matemática no ensino médio por meio de atividades interdisciplinares**, 2001.
- [18] SANTOS, M. R. **Pavimentações do plano: um estudo com professores de matemática e arte** (Mestrado acadêmico) - Universidade Estadual Paulista 2006.
- [19] SANTOS, W. A. H. **Geometria Diferencial das Curvas Planas** 24^o Colóquio Brasileiro de Matemática. (pg 168 - 173) 2003.
- [20] TAHAN, M. **As Maravilhas da Matemática**. 6. ed. Rio de Janeiro: Edições Bloch, 1987, p.105-112.