UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

O princípio das gavetas de Dirichlet - problemas e aplicações

Thiago Maurício Pacífico

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Thiago Maurício Pacífico

O princípio das gavetas de Dirichlet - problemas e aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Ires Dias

USP – São Carlos
Julho de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

P122p

Pacífico, Thiago Maurício
O princípio das gavetas de Dirichlet / Thiago Maurício Pacífico; orientador Ires Dias. -- São Carlos, 2019.
59 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, Estatística e Computação Aplicadas à Indústria) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Príncipio das gavetas de Dirichlet. 2. Combinatória. 3. Problemas . 4. Aplicações. I. Dias, Ires, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Thiago Maurício Pacífico

The Dirichlet's principle - problems and applications

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Ires Dias

USP – São Carlos
July 2019

Dedico esse trabalho a Deus e a minha família

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por permitir que eu more no melhor lugar que eu poderia morar, por me atribuir os recursos financeiros coerentes com as minhas necessidades, nem mais e nem menos, mas o justo para as minhas lutas terrenas e por iluminar meus caminhos de maneira que eu possa identificar minha inúmeras imperfeições e me curar de mim.

Agradeço também a minha família, meu pai e querido mestre, que me ensinou até o final dos seus dias de jornada nessa terra; digo que não era ele que precisava da minha ajuda pra guiar a sua cadeira de rodas, mas sim eu que precisava me apoiar nela. Eu te amo, meu velho! Minha querida mãe, que viveu para o marido e os filhos, mulher abençoada e colo para o qual eu ainda corro quando o mar fica bravo, eu te amo minha mãezinha!! Tem também a Thaisinha, que hoje é mãe de duas almas abençoadas, Pedrinho e Luquinha, pensa numa menininha que eu tenho orgulho, estarei sempre aqui minha irmã, é só pedir que compro o lanche pra você. Eu te amo muito!! Minha avó e minha tia, presentes em muitos momentos importantes, obrigado por todos os ensinamentos, amo vocês também!

Alguns se foram ao longo da empreitada, mas outros espíritos abençoados apareceram para me ajudar a caminhar, minha querida esposa, companheira que me ensina todos os dias, pessoa com espírito forte e feliz e que há dois anos e meio permitiu que eu me tornasse homem de verdade. Eu te amo muito e tenho muito orgulho da mulher e mãe que você se tornou, vejo minha mãe em você!!!

Meus pequenos!!!! Bom, acho que voltei a ter a cadeira de rodas do meu pai para me apoiar, João e Cecília mudaram a minha vida, fizeram com que eu refletisse a minha existência de maneira muito profunda, com certeza vieram pra me curar. Eu te amo meus filhos, obrigado por me deixar ser o pai de vocês.

Agradeço também a todos os meus amigos e colegas de caminhada, vocês com certeza constituem parte importante da minha vida.

Não posso deixar de lembrar da minha primeira patroa - Obrigado Drª Elisete - a senhora me ofereceu muito mais do que um trabalho e com certeza também contribuiu com essa conquista.

Turminha do mestrado, vocês são nota 1000!!! Com certeza fiz amigos verdadeiros!! Valeu pela ajuda turminha!!! Gabs, valeu pela grande ajuda com o LaTeX, meu querido. Carlinhos, sem palavras, além de me salvar no LaTeX, foi o parceiro de discussões dos resultados. Muito obrigado, meu caro!!! Precisando, estou aqui.

Aos meus queridos alunos, que foram pacientes e compreensivos com minha correria. Ao estagiário que virou irmão, cara que me salvou muitas vezes, corrigindo provas, fazendo listas, me ajudando com o LaTeX, etc. Eu e a matemática agradecemos de coração.

Não menos importante, gostaria muito de agradecer à Professora Ires, pela oportunidade de ser seu orientando, pelos inúmeros ensinamentos e pela compreensão e maneira humana com que me guiou por esse caminho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, por incentivar e apoiar essa iniciativa tão importante para o engrandecimento dos professores de Matemática.

“ Seja a mudança que você
quer ver no mundo”
(Mahatma Gandhi)

RESUMO

PACÍFICO, T. M. **O princípio das gavetas de Dirichlet - problemas e aplicações**. 2019. 59 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

O princípio das gavetas de Dirichlet é um resultado matemático baseado numa proposição relativamente simples: se desejamos distribuir $N+1$ objetos em N gavetas, necessariamente alguma das gavetas conterá pelo menos 2 objetos. Apesar de parecer pouco relevante, devido a sua obviedade, esse teorema constitui uma ferramenta bastante importante na prova de outros resultados matemáticos. O presente trabalho, demonstra o Princípio das Gavetas em duas versões, uma mais simples e a outra mais geral, exibe algumas aplicações que evidenciam a sua importância como ferramenta de prova, e ao mesmo tempo, utiliza da sua simplicidade para motivar o estudo do próprio resultado assim como o de outros conceitos matemáticos. O banco de questões separado por níveis de dificuldade e o plano de aula têm o propósito de subsidiar o trabalho do professor no desenvolvimento desse interessante resultado matemático.

Palavras-chave: Princípio das gavetas de Dirichlet, combinatória, problemas, aplicações..

ABSTRACT

PACÍFICO, T. M. **The Dirichlet's principle - problems and applications**. 2019. 59 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

The Dirichlet's drawers principle is a mathematical result based on a relatively simple proposition: if we wish to distribute N+1 objects in N drawers, necessarily some of the drawers will contain at least 2 objects. Although it seems insignificant due to its obviousness, this result is a very important tool in proving other mathematical results. The present work proves the Dirichlet's principle, also know as pigeonhole principle in two versions, one simpler and the other more general, exibits some applications that show its importance as a tool of proof, and at the same time uses its simplicity to motivate the study of the own result as well as other mathematical concepts. The set of problems separated by difficulty levels and the lesson plan are intended to subsidize the teacher's work in the development of this interesting mathematical result.

Keywords: Dirichlet's drawer principle, combinatorial, problems, applications..

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Distribuição dos $N+1$ objetos nas N gavetas. 22
Figura 2 – Pontos reticulados constituindo segmentos 26
Figura 3 – Partição do intervalo [0,1) 27
Figura 4 – Tabuleiro 3×3 36
Figura 5 – Uma possível construção de 4 gavetas no quadrado de lado 2 41
Figura 6 – Distância entre dois pontos de uma mesma gaveta maior do que a distância limite 41
Figura 7 – Outra possível construção de 4 gavetas no quadrado de lado 2 42
Figura 8 – Retas horizontais e verticais e o Princípio das Gavetas de Dirichlet 44
Figura 9 – Segmento AB com 1 u.c 46
Figura 10 – Losango ACBD 46
Figura 11 – Triângulo isósceles ECD 47
Figura 12 – Losango com diagonal menor monocrática 47
Figura 13 – Uma possibilidade de distribuição dos pontos na laranja 53
Figura 14 – Relação de amizade entre 6 amigos 54

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 19

2 O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET 21
2.1 Princípio das Gavetas de Dirichlet 22
2.2 Aplicações 24

3 PROBLEMAS ENVOLVENDO O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET 31
3.1 Nível básico 32
3.1.1 Problemas resolvidos 32
3.1.2 Problemas propostos 35
3.2 Nível intermediário 36
3.2.1 Problemas resolvidos 36
3.2.2 Problemas propostos 39
3.3 Nível avançado 40
3.3.1 Problemas resolvidos 40
3.3.2 Problemas propostos 48

4 ENGAVETANDO PROBLEMAS ESQUISITOS 49
4.1 Elementos da aula 49
4.2 Introdução 49
4.3 Objetivos 50
4.4 Desenvolvimento 50

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 57

REFERÊNCIAS 59

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

O Princípio das Gavetas de Dirichlet [1], ou Princípio das casas de pombos é um resultado matemático baseado numa proposição relativamente simples: se desejamos distribuir $N+1$ objetos em N gavetas, necessariamente alguma das gavetas conterá pelo menos 2 objetos. A demonstração desse teorema é óbvia e intuitiva, ou seja, não precisamos de técnicas elaboradas para argumentar a veracidade da proposição. De fato, suponhamos que após distribuirmos todos os $N+1$ objetos, cada uma das N gavetas não apresente mais do que 1 objeto. Dessa forma, ao contabilizarmos os objetos presentes nas gavetas, daremos falta de um objeto, contradizendo a hipótese inicial.

A simplicidade do enunciado e da demonstração do resultado acabam subestimando a importância do mesmo de maneira equivocada, pois apesar de tavez aparentar ser pouco útil e não ter rigor, o Princípio das Gavetas de Dirichlet constitui uma poderosa ferramenta de demonstração em inúmeros resultados matemáticos importantes, como evidenciado em algumas aplicações presentes no segundo capítulo.

O terceiro capítulo, tem o propósito de subsidiar o trabalho do professor de Educação Básica com um conjunto de 45 problemas envolvendo o Princípio das Gavetas de Dirichlet divididos em três níveis de dificuldade. Além disso, 15 dos 45 problemas (5 de cada um dos níveis), apresentam a resolução comentada de maneira a evidenciar um certo algoritmo de resolução desses problemas, tornando a solução dos mesmos mais eficiente.

O quarto capítulo é um plano de aula denominado *Engavetando Problemas Esquisitos*. A ideia é desenvolver o Princípio das Gavetas de Dirichlet juntamente com outros conceitos matemáticos importantes (subsídios para resolver os problemas), tendo como motivação a natureza intrínseca da maioria dos problemas que sugerem o uso desse princípio, ou seja,

[1] Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805 – 1859) – matemático alemão

aproveitar a estranheza, imprecisão e até ludicidade dos enunciados para aguçar a curiosidade dos alunos e consequentemente promover um ambiente de aprendizado mais interessante. Ao final do plano são apresentadas algumas sugestões (jogos, vídeos, periódicos, etc) para o melhor desenvolvimento e aprofundamento dos conceitos estudados em aula.

O último capítulo compreende as considerações finais, e propõe reflexões acerca das contribuições desta dissertação no sentido de refletirmos a importância de se trabalhar o Princípio das Gavetas de Dirichlet na Educação Básica.

CAPÍTULO

2

O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET

É muito comum concebermos a Análise Combinatória como sendo a área da Matemática que trata somente de questões relacionadas a contagem de elementos de um determinado conjunto finito. Entretanto, a verificação da existência de certos conjuntos finitos cujos elementos satisfazem propriedades específicas também constitui objeto de estudo da mesma. E pra darmos conta de resolver alguns problemas que tratam desses objetos, lançaremos mão do Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como Princípio da Casa dos Pombos.

Nesse capítulo, além de motivar, enunciar e demostrar o Princípio das Gavetas de Dirichlet, ou PCP, serão apresentadas aplicações do mesmo na demonstração de resultados matemáticos importantes, evidenciando que apesar de ser um resultado simples e intuitivo (acessível aos alunos da Educação Básica) e num primeiro momento aparentar ser de pouca utilidade, quando usado como método de demonstração torna-se uma poderosa ferramenta.

Motivação

Numa floresta crescem 1.000 jaqueiras. É conhecido que uma jaqueira não contém mais de 600 frutos. Mostre que pelo menos 2 jaqueiras possuem a mesma quantidade de frutos.

A imprecisão da proposição "[...] pelo menos 2 jaqueiras possuem a mesma quantidade de frutos", é uma característica intrínseca do Princípio das Gavetas, que mesmo parecendo que não temos informações suficientes para resolver, nos permite, algumas vezes, chegar a conclusões um tanto quanto inesperadas.

Na verdade, o que queremos provar é a existência de um certo subconjunto das jaqueiras dadas (2 jaqueiras), cujos elementos satisfazem uma certa propriedade (possuem a mesma quantidade de frutos).

Iniciaremos a solução procurando identificar quem são os objetos (pombos) e as gavetas (casas) e compreender de que maneira os objetos são colocados nas gavetas. Vale citar que esse é um caminho interessante na resolução de problemas envolvendo o Princípio das Gavetas de Dirichlet, pois de alguma forma, acaba norteando as ações e tornando mais clara e eficiente a construção da solução. Resolvido o problema em termos de objetos (pombos) e gavetas (casas), é importante retornar ao contexto do problema para exibir o resultado final.

No nosso problema, temos 1.000 jaqueiras (objetos) e 601 possibilidades de quantidades de frutos em cada jaqueira (gavetas), ou seja, uma jaqueira pode ter i frutos, para algum $i \in \{0,1,2,\dots,600\}$. Vamos agora alocar os objetos nas gavetas de acordo com a quantidade de frutos; como não dispomos dessa informação, vamos sugerir que essa alocação aconteça de forma bem pouco provável, inclusive, essa é uma dica importante na resolução de problemas envolvendo o Princípio das Gavetas de Dirichlet, isto é, supor que em cada gaveta (possibilidade de fruto) tenhamos a mesma quantidade de objetos (jaqueiras).

Ao dividirmos 1.000 objetos por 600 gavetas, teremos aproximadamente 1,7 objetos por gaveta, sendo assim, podemos concluir que pelo menos uma das gavetas possui mais do que 1 objeto, que é o mesmo que dizer que em uma das gavetas (uma das jaqueiras) temos pelo menos 2 objetos (mesma quantidade de frutos). A maneira como resolvemos esse problema ilustra a ideia central atrelada ao Princípio das Gavetas de Dirichlet e, para formalizar essa noção, na próxima seção, apresentaremos algumas versões e demonstrações do mesmo.

2.1 Princípio das Gavetas de Dirichlet

Apresentaremos a princípio, a forma mais elementar do Princípio das Gavetas:

Conforme apresentado na figura abaixo, se temos G_i gavetas, com $i \in \{1,2,3,\dots,N\}$, e supormos uma situação extrema de distribuição dos objetos, ou seja, o objeto O_i ser alocado na gaveta G_i, o objeto excedente O_{N+1} não terá gaveta correspondente para ser alocado e, portanto, ocupará uma das gavetas já ocupadas por um dos objetos.

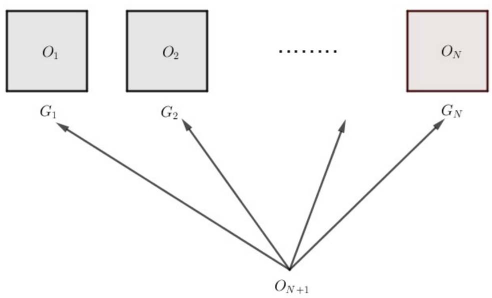

Figura 1 – Distribuição dos $N+1$ objetos nas N gavetas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 2.1 (Princípio das Gavetas de Dirichlet)**.** Se distribuímos $N+1$ objetos em N gavetas, em alguma gaveta teremos pelo menos 2 objetos.

Demonstração. Seja x_i o número de objetos contidos na gaveta $i \in \{1,2,\ldots,N\}$. É claro que *a priori* não sabemos o valor do x_i (imprecisão característica dos problemas envolvendo o Princípio das Gavetas), mas sabemos que a soma $x_1+x_2+\cdots+x_N = N+1$ constitui a totalidade dos objetos. Suponhamos por absurdo que nenhuma das gavetas possuem mais de 1 objeto, ou seja, $x_i \leq 1$, para todo $i \in \{1,2,...,N\}$. Então $x_1+x_2+\cdots+x_N \leq N$, o que constitui uma contradição. Portanto pelo menos algum $x_i > 1$, ou seja, $x_i \geq 2$, o que significa que pelo menos 2 objetos ocupam a mesma gaveta. □

Uma versão mais geral do Princípio é:

Proposição 2.2 (Generalização do Princípio das Gavetas de Dirichlet)**.** Seja k um inteiro positivo.Se distribuirmos $kN+1$ objetos em N gavetas, então em alguma gaveta temos pelo menos $k+1$ objetos.

Demonstração. A demonstração dessa proposição é similar à dada na versão mais simples do Princípio das Gavetas (Proposição 2.1). Se x_i é o número de objetos contidos na gaveta $i \in \{1,2,...,N\}$, mesmo não sabendo *a priori* o valor do x_i, sabemos que a soma $x_1+x_2+\cdots+x_N = kN+1$. Suponhamos então que não temos mais do que k objetos em cada uma das N gavetas. Logo $x_1+x_2+\cdots+x_N \leq kN$, o que contradiz o fato de termos $kN+1$ objetos. Portanto, uma das gavetas conterá pelo menos $k+1$ objetos. □

Note que a Proposição 2.1 é o caso particular na demonstração precedente, onde $k=1$.

Se preferirmos uma forma mais algébrica e menos descritiva de enunciar e demonstrar o Princípio das Gavetas de Dirichlet podemos optar pela que segue:

Proposição 2.3. Se k objetos são colocados em N gavetas, em alguma gaveta teremos pelo menos $\left\lfloor \frac{k-1}{N} + 1 \right\rfloor$ objetos, onde $\lfloor x \rfloor$ é a função maior inteiro, ou seja, $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x.

Demonstração. Suponhamos que em cada uma das N gavetas, temos no máximo $\left\lfloor \frac{k-1}{N} \right\rfloor$ objetos, portanto, a totalidade dos objetos é dada por $N \times \left\lfloor \frac{k-1}{N} \right\rfloor \leq N \times \frac{k-1}{N} = k-1 < k$, o que é uma contradição. □

2.2 Aplicações

Nessa seção, veremos alguns resultados matemáticos obtidos com o auxílio do Princípio das Gavetas de Dirichlet evidenciando sua grande utilidade como método de demonstração.

Proposição 2.4 (Média Aritmética e Princípio das Gavetas)**.** Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ inteiros positivos e M um inteiro positivo dado. Se a média aritmética dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é maior do que M, então pelo menos um dos números x_i é maior do que M.

Demonstração. A prova será pela contrarrecíproca. Sejam N a quantidade de gavetas e x_i a quantidade de objetos alocados na gaveta i, para cada $i \in \{1, 2, ..., N\}$. Se a quantidade de objetos por gaveta for menor ou igual a M, ou seja, $xi \leq M$, para todo $i \in \{1, 2, ..., N\}$, então

$$\frac{x_1 + x_2 \cdots x_n}{N} \leq \frac{nM}{M} \leq M,$$

que é o que precisava ser mostrado. □

A próxima aplicação usa o Princípio das Gavetas de Dirichlet para demonstrar um resultado sobre funções.

Proposição 2.5. Sejam O e G dois conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente. Se $m > n$, então não existe uma função injetora de O em G.

Demonstração. Dizemos que uma função, $f : O \to G$ é injetora se elementos diferentes de O são transformados por f em elementos diferentes em G, isto é, se $o_1, o_2 \in O$, são tais que $o_1 \neq o_2$, então $f(o_1) \neq f(o_2)$. Podemos redefinir essa ideia no contexto do Principio das Gavetas, ou seja, uma função é injetora se temos uma única e exclusiva gaveta para cada objeto. Portanto, isso só é possível se o número de objetos for menor ou igual ao número de gavetas, pois, caso contrário, alguma gaveta necessariamente alocará mais de um objeto. Dessa forma teremos pelo menos dois objetos $o_1, o_2 \in O$, $o_1 \neq o_2$, que estão na mesma gaveta, ou seja, $f(o_1) = f(o_2)$. □

A proposição seguinte constitui uma ferramenta básica na resolução de problemas que envolvem o máximo divisor comum (mdc) entre dois números. Na literatura, esse resultado é frequentemente enunciado como o teorema (ou identidade) de Bézout [1], ou seja, é uma aplicação dos Princípios da Gavetas para demonstrar um resultado importante de aritmética.

Proposição 2.6. Se d for o mdc de dois números naturais não nulos a e b, então existem números inteiros x e y tais que

$$d = ax + by. \tag{2.1}$$

[1] Étinne Bézout (1730–1783) - matemático frânces

Demonstração. Observemos que $d = ax + by$ se, e somente se $1 = \left(\frac{a}{d}\right)x + \left(\frac{b}{d}\right)y$. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor que $d = 1$, ou seja, que a e b são primos entre si.

Assim, dados $a,\ \ b \in \mathbb{N}$, com $\text{mdc}(a,b) = 1$, queremos mostrar que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax + by = 1$.

Consdeirando os conjuntos de números naturais, $A = \{a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, \cdots, ba\}$ e $R = \{0\}\ \text{U}\ \{z \in \mathbb{Z};\ \ 2 \leq z \leq b-1\}$.

Se em A não existe um elemento que deixe resto 1 quando dividido por b, temos que os restos da divisão dos elementos de A por b estão em R. Assim, considerando os elementos de A como objetos e os elementos de R como gavetas isto é, um elemento de A está na gaveta $k \in R$ se quando dividido por b deixar resto k, pelo Princípio das Gavetas, teremos que pelo menos dois elementos de A estarão na mesma gaveta. Logo existem $ia,\ \ ja \in A$, tais que $1 \leq i < j \leq b$ e $ia = q_1 b + r,\ ja = q_2 b + r$, para únicos $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ e $r \in R$.

Com isso obtemos, $ja - ia = (q_1 - q_2)b = K \cdot b$, para algum $K \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, b é um divisor de $(j-i)a$ e, como a e b são primos entre si, temos que necessariamente b é um divisor de $j - i$, o que é uma contradição, pois $b > j - i > 0$.

Portanto, algum dos elementos de A deixa resto 1 quando dividido por b, ou seja, se xa for este elemento, temos que $xa = qb + 1$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Assim, $1 = xa - qb = xa + yb$, com $y = -q \in \mathbb{Z}$. □

O resultado a seguir é uma aplicação do Princípio das Gavetas de Dirichlet na demonstração de um resultado de Geometria Analítica.

Proposição 2.7. Considere 5 pontos reticulados[2], distintos, no plano $\mathbb{R}^2$. Mostre que ao menos um dos segmentos definidos por esses pontos possui um ponto reticulado com seu ponto médio.

Demonstração. Sejam $A = (x_1, y_1),\ B = (x_2, y_2),\ C = (x_3, y_3),\ D = (x_4, y_4)$ e $E = (x_5, y_5)$ os pontos reticulados distintos do plano. Se combinarmos os mesmos 2 a 2, teremos

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

possibilidades de segmentos distintos com extremidades nesses pontos, conforme figura abaixo.

[2] Um ponto reticulado no plano é um ponto do tipo $P = (x, y)$, com $x, y \in \mathbb{Z}$

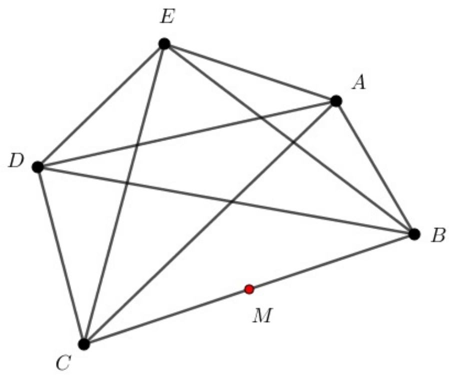

Figura 2 – Pontos reticulados constituindo segmentos

Fonte – Paiva, 2018

Também podemos fazer afirmações a respeito da paridade das coordenadas de um ponto reticulado, pois essas só podem ser pares ou ímpares. Na verdade, temos 4 possibilidades de paridade para essas coordenadas.

$$(par,par),\quad (par,ímpar)\ ,\quad (ímpar,par)\quad \text{e}\quad (ímpar,ímpar).$$

Tomando os pontos reticulados como os objetos e as possibilidades de paridade para as coordenadas de cada ponto como sendo as gavetas, o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que pelo menos uma das gavetas conterá dois objetos, ou seja, teremos ao menos 2 pontos cujas coordenadas apresentam a mesma paridade. Sejam (x_i, y_i) e (x_j, y_j) esse pontos, com $1 \leq i, j \leq 5$ e $i \neq j$ e M o ponto médio do segmento formado por esses dois pontos. Como as coordenadas de M são

$$M = \left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2} \right),$$

podemos concluir que ambas são inteiras, pois como x_i e x_j apresentam a mesma paridade, a soma $x_i + x_j$ é par, e dessa forma $\frac{x_i + x_j}{2}$ é um inteiro. Procedendo de modo análogo, para y_i e y_j, temos que o ponto médio M é um ponto reticulado, concluindo nossa demonstração. $\square$

Também conhecida como Teorema de Dirichlet, a proposição seguinte garante que temos infinitas aproximações racionais para um determinado irracional, com erro menor do que o inverso do quadrado do racional utilizado na aproximação. Esse resultado, além de auxiliar o professor da Educação Básica a formalizar a noção de densidade no conjunto dos números racionais, ao invés de somente construir essa ideia de maneira intuitiva, possibilita desenvolver habilidades relacionadas à escrita matemática, que possui rigor e formalismos intrínsecos.

Para a sua demonstração usaremos que se x é número real, então a função maior inteiro $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x escrito na forma decimal e, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1)$ é parte fracionária de x.

Proposição 2.8. Dado um número irracional α, é possível encontrar infinitos números racionais $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ de tal forma que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Demonstração. Seja α um número irracional e para cada $N \in \mathbb{N}$ considere os $N+1$ números: $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \cdots, \{N\alpha\} \in [0,1)$. Considere também uma partição do intervalo $[0,1)$ do tipo $\bigcup_{k=1}^{N} \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right)$ representada na Figura 3:

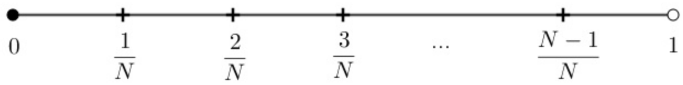

Figura 3 – Partição do intervalo [0,1)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se considerarmos os N intervalos $\left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right)$ como sendo as gavetas e os $N+1$ números do tipo $\{k\alpha\}$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq k \leq N$ como sendo os objetos, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet em alguma das gavetas teremos pelo menos dois objetos. Sejam $\{i\alpha\}$ e $\{j\alpha\}$ os números (objetos) pertencentes ao mesmo intervalo (gavetas), com $0 \leq i < j \leq N$. Dessa forma temos que $|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| < \frac{1}{N}$. Sabemos também, que

$$\begin{aligned} |\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| &= |(j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor) - (i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor)| = |j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor - i\alpha + \lfloor i\alpha \rfloor| \\ &= |(j-i)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)| \end{aligned}$$

Então,

$$|(j-i)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)| < \frac{1}{N}. \tag{2.2}$$

A ideia agora é construir uma aproximação racional a partir desses elementos. Se $q := j - i$ e $p := \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$, além de garantirmos a natureza inteira de p e q, asseguramos que $0 < q < N$. Como $q < N$, temos que $\frac{1}{q} > \frac{1}{N}$. Voltando em (2.2), temos

$$|(j-i)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)| = |q\alpha - p| < \frac{1}{N} < \frac{1}{q} \Longrightarrow |q\alpha - p| < \frac{1}{q}. \tag{2.3}$$

Dividindo ambos os membros de (2.3) por q, temos

$$\left|q\alpha - p\right| < \frac{1}{q} \Longrightarrow \left|\frac{q\alpha - p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \Longrightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}, \tag{2.4}$$

evidenciando que temos uma aproximação racional para o irracional α com erro menor do que $\frac{1}{q^2}$.

Falta provarmos, que ao invés de uma aproximação racional como a evidenciada anteriormente, temos infinitas.

Suponhamos por contradição que temos um número finito de aproximações racionais para α. Sejam $\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2} \cdots \dfrac{p_k}{q_k}$ essas aproximações e $\delta := \min\left\{\left|\alpha - \dfrac{p_j}{q_j}\right|, 1 < j \leq k\right\} > 0$, ou seja, δ é a melhor das aproximações. Como temos liberdade para a escolha de um $N \in \mathbb{N}$, podemos escolher um N suficientemente grande de maneira que $\frac{1}{N} < \delta$.

Sendo assim, temos uma melhor aproximação para $\alpha : \left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2} < \delta$ e como $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_j}{q_j}$ para todo j $\leq k$, contrariamos a suposição inicial. Ou seja, temos infinitas aproximações racionais para α. □

Além de ser um resultado importante na teoria dos números, a infinidade dos números primos é um conceito que pode ser desenvolvido na educação básica; inclusive, a motivação para os estudos pode vir de aplicações em áreas como a da segurança digital, pois a base da criptografia, por exemplo, reside nessa infinidade e na ausência de um padrão para determinar um número primo específico. Nossa próxima aplicação é usar o Princípio das Gavetas para demonstrar a infinitude dos números primos.

Vejamos antes o seguinte lema que auxiliará na demonstração.

Lema 2.9. Seja $M = \{m_1, m_2, \cdots, m_n, m_{n+1}\}$ um subconjunto dos naturais com $m_i \neq m_j$, para $i \neq j$. Os elementos do conjunto $M' = \{2^{2^{m_1}} + 1, 2^{2^{m_2}} + 1, \cdots, 2^{2^{m_n}} + 1, 2^{2^{m_{n+1}}} + 1\}$ são primos 2 a 2, ou seja mdc$(2^{2^{m_i}} + 1, 2^{2^{m_j}} + 1) = 1$.

Demonstração. De fato, se $m_i > m_j$, temos que

$$2^{2^{m_i}} - 1 = \left(2^{2^{m_{i-1}}} + 1\right)\left(2^{2^{m_{i-2}}} + 1\right)\cdots\left(2^{2^{m_j}} + 1\right)\left(2^{2^{m_j}} - 1\right)$$

Assim $2^{2^{m_i}} + 1 = \left(2^{2^{m_j}} - 1\right) \cdot q + 2$ e, portanto, pelo Lema de Euclides, temos

$$\text{mdc}\left(2^{2^{m_i}} + 1, 2^{2^{m_j}} + 1\right) = \text{mdc}\left(2^{2^{m_j}} + 1, 2\right) = 1$$

□

Proposição 2.10. Existem infinitos números primos.

Demonstração. A Demonstração será por absurdo. Suponhamos que exista n números primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Para auxiliar a demonstração, construiremos n subconjuntos G_i dos inteiros, sendo que cada G_i possui como elementos todos os múltiplos do primo p_i, com $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Afirmação: Não existe nenhum conjunto de números inteiros $\{a_1, a_2, \cdots a_n, a_{n+1}\}$ com $n+1$ elementos primos entre si 2 a 2.

De fato, se tomarmos os n subconjuntos G_i dos inteiros como sendo as gavetas e os $n+1$ elementos do conjunto $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$ como sendo os objetos, teremos pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet que pelo menos dois objetos estarão em uma mesma gaveta, ou seja, existem a_r e a_s, com $1 \leq r < s \leq n$, múltiplos de um mesmo primo p_i. Em outras palavras, o $\text{mdc}(a_r, a_s) \geq p_i$.

Entretanto, isso é uma contradição pelo Lema (2.9), pois este garante que temos conjuntos com infinitos elementos primos 2 a 2. $\square$

CAPÍTULO

3

PROBLEMAS ENVOLVENDO O PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET

O presente capítulo oferece ao professor da Educação Básica, uma coletânea de problemas envolvendo o Princípio das Gavetas de Dirichlet. Os problemas são separados em três níveis: o básico, o intermediário e o avançado; sendo que para cada um dos níveis apresentamos uma coleção de 15 problemas, nos quais cinco são resolvidos e comentados e 10 são propostos como exercício.

Como o cerne dos problemas envolvendo o Princípio das Gavetas consiste no fato de encontrarmos os objetos e as gavetas, além de compreender como se dá a relação entre essas duas coisas, é natural que o critério utilizado para classificação dos problemas nos diferentes níveis esteja atrelado a essa questão.

Dessa forma, se os objetos e as gavetas são facilmente obtidos, ou seja, senão se exige a utilização de um conceito específico, nem uma construção mais elaborada utilizando propriedades da geometria, por exemplo, este problema será do nível básico. Se para a obtenção das gavetas e dos objetos for necessário a utilização de algum conceito específico, uma técnica de contagem por exemplo, este será um problema do nível intermediário. Por fim, para ser classificado como um problema do nível avançado, além da utilização de um conceito específico, sua solução deve exigir alguma sofisticação e habilidade lógica, além de construções mais elaboradas.

Com o propósito de ser mais didático e eficiente na resolução de problemas envolvendo o Princípio das Gavetas, dividimos a mesma em três momentos: no primeiro momento - Observação inicial - interpretamos o problema e traçamos alguns possíveis caminhos. No segundo momento – Encontrando os objetos e as gavetas - como o próprio nome sugere, desenvolvemos o problema com o propósito de identificar os objetos e as gavetas dentro de um contexto específico, além de garantir as condições necessárias para a aplicação do Princípio das Gavetas. No terceiro e último momento – Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet - estabelecemos a relação entre os objetos e as gavetas, ou seja, como os objetos são colocados nas gavetas e como isso pode apontar para a solução do nosso problema.

Observação: Com relação a seleção dos problemas que não foram modificados, como foram várias as fontes consultadas (banco de questões, artigos de revista, periódicos, etc. presentes nas referências da dissertação). Inclusive, muitos apareciam em duas ou mais fontes, não fiz referências pontuais nos enunciados dos problemas.

3.1 Nível básico

3.1.1 Problemas resolvidos

Problema 1. Em um grupo formado por 13 pessoas, podemos garantir que haja pelo menos duas que fazem aniversário no mesmo mês?

Observação inicial:

A ideia é relacionarmos as pessoas com as possibilidades de meses em que uma pessoa pode aniversariar. Imagine, por exemplo, uma situação extrema em que cada pessoa faça aniversário em um mês diferente. Dessa forma, necessariamente duas pessoas farão aniversário no mesmo mês.

Encontrando os objetos e as gavetas:

Os objetos são as 13 pessoas do grupo, já as gavetas são os 12 possíveis meses para uma pessoa aniversariar. O argumento de que necessariamente duas pessoas irão aniversariar no mesmo mês é obvio, conforme interpretamos acima, mas uma demonstração matemática para a solução desse problema pode ser dada utilizando o Princípio da Gavetas.

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Seja x_i o número de pessoas que fazem aniversário no mês $i \in \{1,2,...,12\}$. É claro que a priori não sabemos o valor do x_i (quantidade de objetos por gaveta), mas sabemos que a soma $x_1+x_2+...+x_{12} = 13$ (total de objetos). Assim, se cada $x_i \leq 1$, então $x_1+x_2+...+x_{12} \leq 12$ o que seria uma contradição. Portanto pelo menos um $x_i > 1$, ou seja, $x_i \geq 2$, o que significa que pelo menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo mês.

Problema 2. Mostre que em um grupo com 40 pessoas, pelo menos 4 tem o mesmo signo.

Observação inicial:

Um possível caminho é o de relacionarmos as pessoas com as possibilidades de signos, sempre considerando um cenário extremo, ou seja, tentar dividir igualmente a quantidade de pessoas por signo.

Encontrando os objetos e as gavetas:

Os objetos são as 40 pessoas do grupo, já as gavetas, são os 12 possíveis signos do zodíaco. O argumento de que necessariamente quatro pessoas possuem o mesmo signo é direto, pois se colocarmos 3 pessoas por signo (cenário pouco provável), teremos 36 pessoas; as demais garantem que pelo menos 4 possuem o mesmo signo.

Aplicando o Princípio das Gavetas:

Como vimos, temos 40 objetos para guardar em 12 gavetas. Não sabemos de antemão quantos objetos vão em cada gaveta (quantas pessoas possuem o mesmo signo), mas sabemos que a soma das quantidades de objetos contidos nas gavetas é igual a 40. Se supormos que em cada gaveta temos 3 objetos, o somatório dos objetos resultaria em 36, ou seja, um resultado inferior a quantidade total de objetos. Portanto, como todos os objetos estão em alguma gaveta, necessariamente uma das gavetas conterá pelo menos 4 objetos.

Problema 3. A cidade de São Carlos tem aproximadamente 250 mil habitantes. Suponhamos que nenhuma pessoa da cidade tenha mais de 180 mil fios de cabelo em sua cabeça. Mostre que pelo menos dois dos habitantes apresentam a mesma quantidade de fios de cabelo.

Observação inicial:

Para encaminharmos a solução desse problema, devemos associar os habitantes às possíveis quantidades de fios de cabelo na cabeça de uma pessoa dessa cidade. Outro elemento que auxilia na compreensão e é recorrente na solução desse tipo de problema é o fato de levarmos em consideração um cenário pouco provável de distribuição dos objetos nas gavetas, ou seja, que tenhamos as mesmas quantidades de objetos em cada uma das gavetas.

Encontrando os objetos e as gavetas:

Nesse problema, as gavetas são as possibilidades de fios de cabelo nas cabeças das pessoas (de 0 até 180.000) e os objetos são os cidadãos são-carlenses.

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Como observado inicialmente, se imaginarmos um cenário no qual cada gaveta (possibilidade de fio na cabeça) tenha a mesma quantidade de objetos (cidadãos), teremos um problema, pois o resultado da divisão entre a quantidade de objetos e a quantidade de gavetas é de aproximadamente $1,39 \cong \dfrac{250.000}{180.000}$, ou seja, não se trata de uma divisão inteira. Logo, o máximo que conseguimos é colocar um cidadão (objeto) para cada possibilidade de fio de cabelo (gaveta) e ainda nos resta 80.000 cidadãos. Dessa forma, garantimos que necessariamente dois cidadãos tenham a mesma quantidade de fios de cabelo.

Problema 4. Num colégio com 16 salas são distribuídas canetas nas cores preta, azul e vermelha para realizar uma prova de concurso. Se cada sala só pode receber canetas de uma única cor, prove que existem pelo menos 6 salas que recebem canetas da mesma cor.

Observação inicial:

Uma abordagem interessante em problemas dessa natureza é imaginar uma configuração possível para a situação do problema, ou seja, podemos ter uma quantidade específica de salas recebendo canetas azuis, uma outra quantidade canetas vermelhas e outra, canetas pretas. Isto torna o problema menos abstrato.

Encontrando os objetos e as gavetas:

Nesse contexto, nossos objetos serão as 16 salas e as gavetas serão as 3 possíveis cores de canetas.

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Nesse caso, aplicaremos o caso mais geral do Princípio das Gavetas de Dirichlet, pois, como o número de objetos é o quíntuplo do número de gavetas mais 1, necessariamente teremos 6 objetos (salas) em uma única gaveta (cor da caneta).

Problema 5. Considere 6 inteiros entre 1 e 10. Prove que pelo menos dois deles serão consecutivos.

Observação inicial:

Ao dizer “pelo menos dois deles serão consecutivos”, sugere-se que os números sejam os objetos do Princípio das Gavetas e que os números consecutivos devem estar numa mesma gaveta. Outra condição necessária para que utilizemos o Princípio das Gavetas é a de que o número de gavetas sempre seja menor que a quantidade de objetos, portanto, menos do que 6 gavetas.

Encontrando os objetos e as gavetas:

Como já observamos anteriormente, os objetos serão os 6 números escolhidos entre 1 e 10. Já as gavetas serão os seguintes pares de números consecutivos: $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$, $\{7,8\}$ e $\{9,10\}$.

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Temos 6 números escolhidos (objetos) e 5 possíveis pares de números consecutivos (gavetas). Cada um dos 6 números pertence exatamente a um dos 5 pares de números e pelo Princípio das Gavetas, necessariamente dois dos números devem pertencer ao mesmo par, e consequentemente serem consecutivos.

3.1.2 Problemas propostos

Problema 6. Uma caixa contem 3 tipos de bolas: azuis, verdes e amarelas. Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?

Problema 7. Em uma biblioteca há 2500 livros. Nenhum tem mais de 500 páginas. Mostre que pelo menos 5 livros possuem o mesmo número de páginas.

Problema 8. Numa gaveta há 6 pares de meias pretas e 6 pares de meias brancas. Qual o número mínimo de meias a se retirar no escuro para garantir que as meias retiradas contenham um par da mesma cor?

Problema 9. Em uma floresta existem 106 jaqueiras. É conhecido que cada uma dessas jaqueiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Mostre que existem 2 jaqueiras na floresta que têm a mesma quantidade de frutos.

Problema 10. Um armazém contém 200 botas tamanho 41, 200 tamanho 42 e 200 tamanho 43. Destas 600, 300 são do pé esquerdo e 300 são do pé direito. Mostre que é possível encontrar pelo menos 100 pares utilizáveis.

Problema 11. A soma do salário de 5 jovens estagiários é de 1500 reais. Cada um deles quer comprar um MP3 que custa 320 reais. Mostre que pelo menos um deles vai ter que esperar pelo próximo pagamento para fazer a compra.

Problema 12. Um grupo de 6 estagiários foi designado para rever 50 processos e cada processo deveria ser revisto por apenas um dos estagiários. No final do expediente, todos os estagiários trabalharam e todos os processos foram revistos. Mostre que pelo menos um dos estagiários reviu 9 processos ou menos.

Problema 13. Quantos alunos devemos ter em uma sala para garantirmos que dois obtiveram a mesma nota em um exame de 0 a 100?

Problema 14. Vinte e cinco caixas de maçã foram entregues em uma loja. As maçãs são de três tipos diferentes, mas todas as maçãs em cada caixa são do mesmo tipo. Mostre que pelo menos 9 caixas contem o mesmo tipo de maçãs.

Problema 15. Em cada quadradinho de um tabuleiro 3×3 é colocado um dos números: -1, 0 ou 1. Mostre que entre todas as somas das linhas, colunas e diagonais do tabuleiro há duas que são iguais. Por exemplo, no tabuleiro abaixo a soma da segunda linha é 2, que coincide com a soma da terceira coluna.

-1	-1	1
1	0	1
0	-1	0

Figura 4 – Tabuleiro 3×3

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Nível intermediário

3.2.1 Problemas resolvidos

Problema 1. A prova de um concurso é composta de 10 questões de múltipla escolha com cinco alternativas por questão. É possível garantir que haja pelo menos 5 alunos que tenham acertado exatamente as mesmas questões, sabendo que 5000 alunos participaram do concurso?

Observação inicial:

Estamos interessados na coincidência de desempenho (certo ou errado em uma questão específica) entre os candidatos. Dessa forma, é irrelevante saber qual foi a alternativa assinalada.

Encontrando os objetos e as gavetas:

Os objetos são as sequências de acertos e erros de cada um dos alunos. Por exemplo, uma possível sequência referente a um dos alunos seria: CCECEEECCCE (C – Certo; E – Errado). Sendo assim, o número total de objetos será de 5.000, que coincide com o número de alunos que realizaram o exame. Já as gavetas são as possíveis sequências de acertos e erros em uma prova com 10 questões de múltipla escolha.

O cálculo dessas sequências remetem a um problema de contagem, mais especificamente ao uso do Princípio Multiplicativo. Como temos duas possibilidades para cada uma das questões (certo ou errado) e um total de 10 questões, o número total de possibilidades de sequências será de $2^{10} = 1024$.

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Segue que o número de objetos é pelo menos 4 vezes maior que o número de gavetas, e considerando o pior cenário de distribuição dos objetos, garantimos que no mínimo 5 objetos (5 alunos) estejam em uma única gaveta (apresentam o mesmo padrão de resposta).

Problema 2. Em uma reunião com n pessoas, é possivel garantir que hajam duas delas com o mesmo número de conhecidos?

Observação inicial:

Duas observações pertinentes para melhor compreensão do problema são a de que se a pessoa A conhece a pessoa B, a recíproca é verdadeira; e a de que o autoconhecimento não é considerado, ou seja, se temos uma pessoa na reunião, essa pessoa não conhece ninguém.

Encontrando os objetos e as gavetas:

Iniciaremos encontrando as gavetas, que se tratam dos possíveis números de conhecidos de cada pessoa na reunião, que representaremos pelo conjunto a seguir:

$$C = \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}.$$

Como já mencionamos anteriormente, o número mínimo de conhecidos é zero, o que implica em um total de n gavetas (possibilidades de conhecidos).Já os objetos são as n pessoas presentes na reunião.

Nesse ponto temos um problema, pois é perfeitamente possível que tenhamos um objeto para cada gaveta (número de gavetas é igual ao número de objetos), o que impossibilita garantirmos que pelo menos duas pessoas possuam o mesmo número de conhecidos.

O ponto problemático dessa questão foi gerado propositalmente no sentido de atentarmos para a modelagem do nosso problema, ou seja, não é possível que em uma mesma reunião haja uma pessoa que não conheça ninguém e outra que conheça todas, pois a relação de conhecer é simétrica, como já observado anteriormente. Assim, se o menor elemento do conjunto C é o 0, o maior é o $n-2$; já se o menor for o 1, o maior será o $n-1$, totalizando $n-1$ elementos.

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Então, considerando o pior cenário de distribuição dos objetos, garantimos que no mínimo 2 objetos (2 pessoas) estejam em uma única gaveta (apresentam o mesmo número de conhecidos).

Problema 3. Dado doze inteiros, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11.

Observação inicial:

Um caminho interessante para a solução desse problema é usar a propriedade de congruência módulo 11; ou seja, se dois números deixam o mesmo resto ao serem divididos por 11, a diferença destes é divisível por 11. Logo, devemos nos atentar para os possíveis restos na divisão.

Encontrando os objetos e as gavetas:

As gavetas são os possíveis restos da divisão do inteiro por 11, que são os números inteiros de 0 a 10, ou seja, 11 números, e os objetos são os 12 números inteiros dados.

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Como queremos garantir que pelo menos dois números dos 12 considerados tenham o mesmo resto, vamos tentar imaginar o pior cenário possível de distribuição dos objetos nas gavetas. Dessa forma, conseguiríamos 11 números (objetos) com restos distintos (em gavetas distintas); o décimo segundo número necessariamente irá apresentar o mesmo resto que um dos 11 anteriores. Logo a diferença entre pelo menos dois deles será divisível por 11.

Problema 4. Em torno de uma mesa redonda são colocadas 15 cadeiras. Sobre a mesa estão os nomes de 15 convidados. Após os convidados se sentarem, verificou-se que nenhum deles estava sentado em frente ao seu próprio nome. Mostre que a mesa pode ser rotacionada de tal maneira que 2 convidados fiquem corretamente sentados simultaneamente.

Observação inicial:

O fato de a solução não depender de como os convidados estejam sentados, indica que a solução independe da configuração de arranjo inicial dos mesmos na mesa.

Encontrando os objetos e as gavetas:

A expressão "pelo menos dois convidados" sugere "pelo menos dois objetos" no Princípio das Gavetas de Dirichlet e, portanto, os objetos devem ser provavelmente os convidados. Já para as gavetas, precisamos pensar um pouco mais. Como temos que considerar todas as possíveis maneiras de rotacionar a mesa, estas podem ser as gavetas. Se assim considerarmos, teremos 15 gavetas para 15 objetos, inviabilizando a utilização do Princípio das Gavetas. Mas ao atentarmos para a informação de que inicialmente nenhum candidato estava sentado na posição correta, excluímos uma gaveta (possibilidade de rotação), restando assim 14 gavetas.

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Para cada convidado haverá exatamente uma posição da mesa que o deixará satisfeito: um candidato está satisfeito se ele estiver sentado na frente do seu nome. Precisamos garantir que em alguma posição pelo menos dois candidatos estejam satisfeitos. Existem 15 possíveis posições, entretanto, sabemos que a posição inicial não satisfaz a ninguém. Dessa forma as 14 posições restantes (gavetas) têm que satisfazer os 15 convidados (objetos). Pelo Princípio das Gavetas, há necessariamente uma posição que satisfaz pelo menos dois candidatos.

Problema 5. Dado um número inteiro positivo n, mostre que existe um múltiplo de n que se escreve com os algarismos 0 e 1, apenas.

Observação inicial:

Sempre que pudermos exemplificar uma situação que satisfaz as condições do problema antes de generalizar, devemos assim fazer, pois isso auxilia na compreensão do problema. Nesse caso, se $n = 3$, temos 111, 1101, etc. Uma dica para esse tipo de problema é trabalhar com os restos da divisão por n, isso pode ajudar em questões que envolvem múltiplos e divisores de um determinado número.

Encontrando os objetos e as gavetas:

Se considerarmos os possíveis restos da divisão por n como sendo as gavetas, temos que imaginar uma quantidade de objetos maiores do que n, pois essa é uma condição necessária para aplicarmos o Princípio das Gavetas. Outro aspecto importante na constituição da natureza dos objetos é o de considerarmos a propriedade que garante que se dois números apresentam o mesmo resto na divisão por n, então n divide a diferença dos mesmos, ou seja, a diferença dos números é um múltiplo de n. Assim, podemos pensar em objetos cuja diferença resulte em números formados somente com os algarismos 0 e 1.

Assumiremos os $n+1$ números do tipo: $1, 11, 111, 1111, \ldots, 111\ldots1$ como sendo os objetos e os possíveis restos da divisão por n, as gavetas.

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Como vimos, temos $n+1$ objetos e n gavetas. Logo, aplicando o Princípio das Gavetas, teremos dois dos objetos necessariamente na mesma gaveta, ou seja, dois números que apresentam o mesmo resto ao serem divididos por n. Portanto a diferença entre eles será um múltiplo de n formado apenas pelos algarismos 0 e 1, o que é fácil verificar.

3.2.2 Problemas propostos

Problema 6. Uma rede de computadores é formada por seis computadores. Cada computador é conectado diretamente a pelo menos um dos outros computadores. Mostre que há pelo menos dois computadores na rede que estão diretamente conectados ao mesmo número de outros computadores.

Problema 7. Numa família formada por cinco pessoas a soma das idades é 245 anos. Mostre que podem ser selecionados 3 membros da família cuja soma das idades não é menor que 147.

Problema 8. Sejam A e B dois conjuntos finitos tais que o número de elementos de A é maior que o número de elementos de B. Prove que não existe função injetiva de A em B.

Problema 9. Demonstrar que todo inteiro tem um múltiplo cuja representação decimal começa com o bloco de dígitos 1234567890.

Problema 10. Seja C um conjunto formado por cinco pontos de coordenadas inteiras do plano. Mostre que o ponto médio de algum dos segmentos com extremos em C tem também coordenadas inteiras.

Problema 11. Em um determinado planeta no sistema solar de Tau Centauro, mais da metade da superfície do planeta é terra seca. Mostre que os habitantes desse planeta podem cavar um túnel reto passando pelo centro do planeta, começando e terminando em terra seca.

Observação: a rigor, este problema envolve conceitos mais avançados de uma área da matemática conhecida como teoria da medida.

Problema 12. Uma sorveteria serve quatro sabores de sorvete. Sete amigos aparecem e cada um deles pede um cone com dois sabores diferentes. Mostre que deve haver pelo menos duas pessoas que tenham feito a mesma escolha de sabores.

Problema 13. Seja S um conjunto qualquer de vinte inteiros distintos escolhidos dentre a progressão aritmética $(1,4,7,...,100)$. Para qual N é garantido que haverá dois números em S que somem N?

Problema 14. Cada ponto do plano é pintado de branco ou vermelho. Mostre que há dois pontos coloridos da mesma maneira a uma distância de exatamente 1 unidade de comprimento.

Problema 15. Seja n um inteiro ímpar maior do que 1 e seja A a matriz $n \times n$ simétrica tal que cada linha e cada coluna de A é formada pelos números $\{1,2,...,n\}$ escritos em alguma ordem. Mostre que cada um dos inteiros $\{1,2,...,n\}$ aparece na diagonal principal de A.

3.3 Nível avançado

3.3.1 Problemas resolvidos

Problema 1. Cinco pontos são distribuídos em um quadrado de lado 2. Mostre que há dois destes pontos que distam no máximo $\sqrt{2}$ um do outro.

Observação inicial:

Com o propósito de tentar facilitar a compreensão, podemos fazer outra leitura do problema: encontrar a maior distância em que podemos garantir que pelo menos dois dos 5 pontos pertencentes a um quadrado de lado 2 não ultrapassam.

Encontrando os objetos e as gavetas:

Os objetos são os 5 pontos pertencentes ao quadrado, e isso condiciona a construção do número de gavetas, ou seja, o número de gavetas tem que ser menor ou igual a quatro. A construção das gavetas consiste em subdividir o quadrado em 4 regiões ou menos; uma possibilidade natural seria traçarmos as diagonais do quadrado (Figura 5). Nesse caso as intersecções entre as regiões não interferem na solução do problema, poderíamos inclusive definir de uma determinada maneira em que as regiões fossem disjuntas, colocando uma fórmula para garantir que a interseção pertença a uma das regiões, mas seria desnecessário.

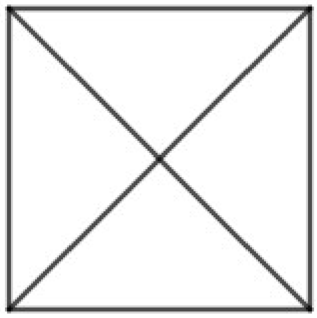

Figura 5 – Uma possível construção de 4 gavetas no quadrado de lado 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, como temos mais objetos (5 pontos) do que gavetas (4 regiões), uma das gavetas conterá mais de um objeto. No contexto do problema, ter dois objetos em uma única gaveta deveria indicar que temos dois pontos em uma mesma região que distam no máximo $\sqrt{2}$. Infelizmente isso pode não acontecer, pois podemos colocar dois pontos próximos dos vértices (sem que eles pertençam ao vértice do quadrado) e estes ultrapassarem a distância limite. A figura 6 mostra um exemplo dessa situação:

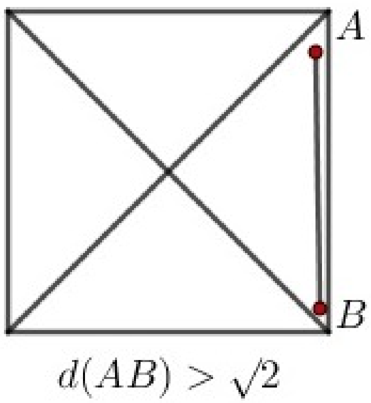

Figura 6 – Distância entre dois pontos de uma mesma gaveta maior do que a distância limite

Fonte: Elaborada pelo autor.

Mais uma vez temos um problema de modelagem: as quatro regiões não podem ser construídas pelas diagonais do quadrado. Uma outra construção, tão natural quanto a anterior e que garante que a distância entre dois pontos de uma mesma região seja no máximo $\sqrt{2}$, é formada pelos segmentos que unem os pontos médios dos lados opostos do quadrado (Figura 7), determinando 4 quadrados menores de lado 1.

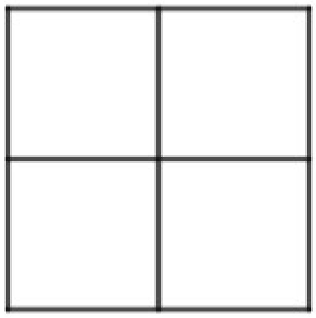

Figura 7 – Outra possível construção de 4 gavetas no quadrado de lado 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Como há 5 objetos (5 pontos) e 4 gavetas (4 quadrados de lado 1), garantimos que pelo menos dois objetos estão em uma mesma gaveta. Isso garante que a distância entre os objetos de uma mesma gaveta é menor ou igual a $\sqrt{2}$, já que essa é a maior distância possível entre dois pontos de um quadrado de lado 1 (medida da diagonal).

Problema 2. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, ..., 19, 20\}$. Quantos elementos de A no máximo eu posso escolher sem que entre eles hajam dois sendo um múltiplo do outro?

Observação inicial:

Estamos interessados em escolher a maior coleção de números possível dentro do conjunto citado, sem que tenhamos múltiplos entre quaisquer pares de números. Uma ideia seria a de tomarmos os primos de 1 a 20, resultando numa coleção de 8 elementos. Outra possibilidade seria a de considerarmos os números que não possuem múltiplos no conjunto, ou seja, os números de 11 a 20, isso resultaria numa coleção de 10 elementos, superando a anterior. Mas seria esta a maior coleção de números possível? Se sim, como demonstrar que não existe uma coleção com maior número de elementos?

Dessa forma, resumimos o problema em provar a seguinte conjectura: um subconjunto com 11 elementos de $\{1, 2, 3, ..., 19, 20\}$ necessariamente contém um número e um múltiplo dele.

Encontrando os objetos e as gavetas:

Os objetos são os 11 elementos do conjunto, já as gavetas, sabemos que são 10 (ou menos), pois se tivéssemos nove gavetas, por exemplo, dois objetos da coleção de números de 11 a 20 seriam armazenados em uma mesma gaveta e no contexto do problema, estar em uma mesma gaveta, é o mesmo que um número ser múltiplo do outro.

O ponto não trivial desta questão é a maneira como as gavetas serão construídas. Uma possibilidade é construirmos uma gaveta para cada número ímpar de 1 a 20 e utilizando a propriedade de que todos os números naturais podem ser escritos univocamente como um produto entre uma potência de 2 e um número ímpar, ou seja, na forma $n = 2^p.q$; onde q é ímpar, $n \in \{1,2,3,...,20\}$, sendo que o fator ímpar dessa representação, é o que vai determinar a gaveta na qual o número se encontra, ou seja, se o fator for 1, o número será armazenado na gaveta 1, se for 3, na gaveta 3 e assim por diante.

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Para organizarmos os objetos nas gavetas, podemos pensar da seguinte forma, na gaveta do 1, fica os números obtidos a partir do 1 dobrando, ou seja, 2, 4, 8 e 16, na gaveta do 3, ficam os números obtidos a partir do 3 dobrando, ou seja, os números 6 e 12, na gaveta do 5, os números 10 e 20, na gaveta do 7, o número 14, na gaveta do 9, o número 18 e nas gavetas do 11 em diante não ficam nenhum número. Dessa forma, distribuímos todos os números de 1 a 20.

Como temos 10 possíveis valores para q (gavetas), se tivermos 11 ou mais elementos (objetos) em uma coleção, obrigatoriamente dois deles terão o mesmo valor de q (estarão na mesma gaveta) e consequentemente serão múltiplos um do outro.

Problema 3. Considere um conjunto X contendo 10 números naturais não nulos menores que 100, ou seja, $X \subseteq \{1,2,3,...,99\}$ e $|X| = 10$. Mostre que existem dois subconjuntos Y e Z de X, tais que $Y \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$, $Y \cap Z = \emptyset$ e $\sum\limits_{y \in Y} y = \sum\limits_{z \in Z} z$.

Observação inicial:

Uma possibilidade é relacionar o número de subconjuntos possíveis de X com as possibilidades de somas dos elementos destes subconjuntos.

Encontrando os objetos e as gavetas:

Os objetos serão os possíveis subconjuntos de X que em quantidade são $2^{10} - 1 = 1023$, pois $|X| = 10$ e o conjunto vazio não pode ser considerado. Já as gavetas serão as possíveis somas atribuídas aos elementos destes subconjuntos; mas como não temos essa informação, utilizaremos o fato de que todos os elementos de X são menores ou iguais a 99. Logo, as somas atribuídas aos subconjuntos de X com 10 elementos é no máximo 990. Portanto, as possíveis somas atribuídas a estes subconjuntos são valores entre 1 e 990, ou seja, temos 990 gavetas.

Aplicando o Princípio das Gavetas:

Assim, existe uma gaveta que possui ao menos $2 \geq \frac{1023}{990}$ objetos, isto é, existem dois subconjuntos não vazios A e B de X tais que $\sum\limits_{a \in A} a = \sum\limits_{b \in B} b$. Não podemos garantir que a interseção seja vazia, mas podemos obter a partir de A e B dois subconjuntos não vazios Y e Z, com todas as propriedades desejadas, subtraindo a interseção de cada um deles, ou seja, $Y = A - (A \cap B)$ e $Z = B - (A \cap B)$. Dessa forma, além de disjuntos, os conjuntos apresentam a mesma soma, pois retiramos de ambos a mesma quantidade.

Problema 4. Cada ponto do plano é pintado de branco ou vermelho. Mostre que há um retângulo cujos vértices são todos de uma mesma cor.

Observação inicial:

Sabemos que os vértices de qualquer retângulo pertencem a dois conjuntos de retas paralelas; sendo assim, construiremos inicialmente duas retas paralelas h_1 e h_2. Entretanto, somente essas duas retas não garantem a existência do retângulo monocromático (retângulo cujos vértices são todos da mesma cor), pois os pontos de h_1 poderiam ser todos brancos e os pontos de h_2 todos vermelhos (isso ficará mais óbvio ao longo da resolução). Dessa forma, precisamos de pelo menos mais uma horizontal h_3, paralela a h_1 e h_2. Em seguida, construiremos várias retas verticais de maneira que cada uma destas retas produza três pontos de intersecção com h_1, h_2 e h_3 (Figura 8). Após essas construções, nosso problema praticamente resumir-se-á em determinar quantas retas verticais são necessárias para assegurar que dentre os pontos de intersecção resultantes, temos 4 que formam um retângulo monocromático.

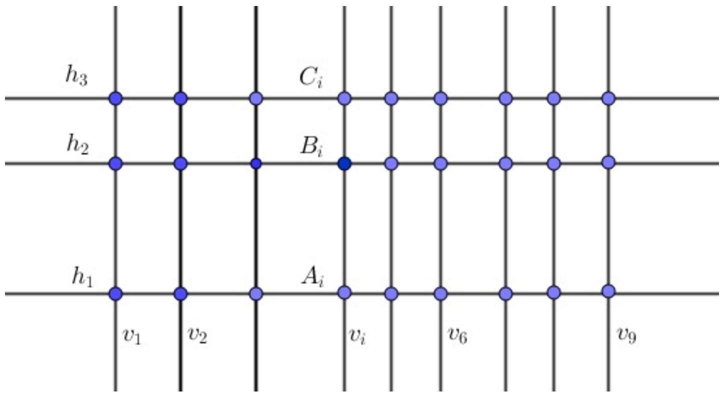

Figura 8 – Retas horizontais e verticais e o Princípio das Gavetas de Dirichlet

Fonte – Stankova, 2018

Encontrando os objetos e as gavetas:

Sejam A_i, B_i e C_i os pontos de intersecção das retas horizontais h_1, h_2 e h_3 com v_i, conforme (cf. Figura 8). Como temos duas possibilidades de cores para cada ponto, estes 3 pontos podem ser coloridos de 8 maneiras distintas. Essas diferentes maneiras serão nossas gavetas (após realizarmos alguns problemas envolvendo o Princípio das Gavetas, fica mais natural a identificação de algumas dicas para determinação do que vem a ser as gavetas e os objetos), e os objetos serão as verticais (cada vertical gera três pontos de intersecção com as horizontais).

Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet:

Para a tripla de pontos A_i, B_i e C_i sobre v_i, temos 8 maneiras distintas de colorir (gavetas), pois temos 2 possibilidades de cores para cada ponto. Como a condição necessária para aplicarmos o Princípio das Gavetas é de que tenhamos mais objetos do que gavetas, construiremos 9 retas verticais, garantindo, dessa forma, que necessariamente duas retas tenham pontos da mesma cor da tripla (A_i, B_i, C_i). Suponha sem perda de generalidade que estas duas retas sejam v_2 e v_6, de tal maneira que os pares A_2 e A_6, B_2 e B_6 e C_2 e C_6 tenham as mesmas cores entre eles.

Agora, para conseguirmos o retângulo monocromático é necessário que pelo menos dois dos pontos de v_2 ou v_6 sejam da mesma cor. Essa garantia é conseguida utilizando mais uma vez o Princípio das Gavetas, ou seja, se temos 2 cores (gavetas) e 3 pontos (objetos), necessariamente 2 pontos terão a mesma cor. Podemos tomar A_2 e B_2 como sendo brancos, sem perder generalidade e, desta forma teremos o retângulo monocromático $A_2B_2B_6A_6$ com vértices todos brancos.

Problema 5. Cada ponto do plano é pintado de branco, vermelho ou azul. Mostre que há dois pontos da mesma cor a uma distância de exatamente 1 u.c (unidade de comprimento).

Com o propósito de tornar a solução mais didática, a abordagem deste problema será diferente da adotada até o momento, ou seja, romperemos de alguma forma com o padrão de resolução (algoritmo) no qual dividíamos a solução em três momentos (Observação inicial – Encontrando os objetos e as gavetas – Aplicando o Princípio das Gavetas de Dirichlet), para resolvê-lo de maneira unificada.

Solução:

Um possível caminho é a prova por contradição, e para isso é necessário fazermos a negação do enunciado, ou seja, suponhamos que não exista dois pontos de mesma cor que distam 1 u.c um do outro, dessa forma, se tomarmos quaisquer dois pontos a 1 u.c um do outro, estes serão de cores diferentes.

Vamos considerar a seguinte construção (Figura 9): sejam A e B dois pontos que distam um do outro uma unidade de comprimento. Assumiremos sem perda de generalidade que A é branco e B é vermelho.

Sendo assim, segundo nossa suposição, todos os pontos que distam 1 u.c de A devem ser vermelhos ou azuis, isto é, a circunferência λ_1 de centro A e raio 1 u.c possui pontos vermelhos ou azuis. Analogamente a circunferência λ_2 de centro B e raio 1 u.c possui pontos azuis ou brancos.

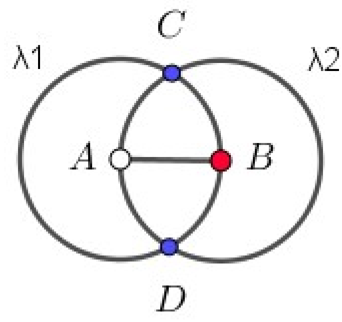

Figura 9 – Segmento AB com 1 u.c

Fonte – Stankova, 2018

Uma maneira de não encerrarmos o nosso problema de imediato, encontrando a contradição, é assumir que os pontos C e D (cf. Figura 9), gerados pela intersecção das circunferências λ_1 e λ_2, são azuis, pois essa configuração de cores satisfaz a suposição inicial; ou seja, os pontos construídos que distam um do outro 1 u.c, possuem cores diferentes. Sendo assim, até o momento, nenhuma contradição!

Assim, os pontos C e D possuem as mesmas cores e $CD = \sqrt{3}$ u.c. Isso significa que se conseguirmos encontrar dois pontos que estejam a essa distância, com cores diferentes, podemos usá-los no lugar dos pontos C e D, reconstruir o losango $ACBD$ (Figura 10) e obter a contradição.

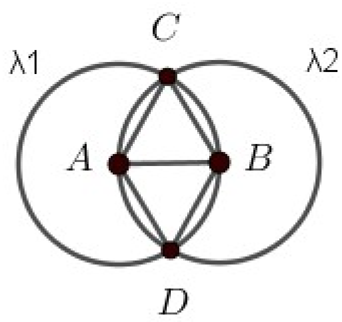

Figura 10 – Losango ACBD

Fonte: Elaborada pelo autor.

Mais uma vez, vamos utilizar a demonstração por contradição. Dessa forma, suponhamos que quaisquer dois pontos distantes $\sqrt{3}$ um do outro possuam a mesma cor. Consideremos o triângulo isósceles ΔECD de base $ED = 1$ u.c e lados $EC = DC = \sqrt{3}$ u.c (Figura 11). Sabemos, de acordo com a hipótese inicial, que os vértices E e C possuem a mesma cor, assim como os vértices C e D. Portanto, E e D, que distam 1 u.c um do outro, também possuem a mesma cor, e isso soluciona nosso problema.

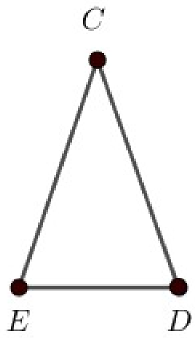

Figura 11 – Triângulo isósceles ECD

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, ao contrário do que supomos acima, sejam C e D dois pontos com cores diferentes que distam $\sqrt{3}$ u.c um do outro. Sem perda de generalidade, suponha D vermelho e C azul. Consideremos um losango de lados 1 u.c, sendo CD sua diagonal maior (Figura 12). Aplicando o Teorema de Pitágoras, por exemplo, chegamos que a diagonal menor AB mede 1 u.c.

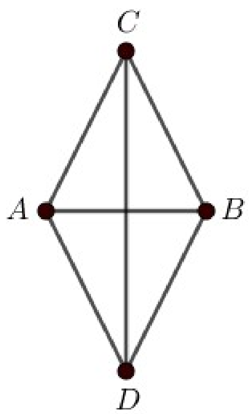

Figura 12 – Losango com diagonal menor monocrática

Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com a construção, se um dos pontos A ou B é pintado de azul ou vermelho, teremos que um dos lados do losango (segmento formado por um desses pontos e os pontos C ou D) será monocromático, ou seja, teremos dois pontos com mesma cor distando 1 u.c. Outra configuração possível é a de que A e B sejam brancos; desta forma, a diagonal menor constituirá um segmento monocromático de 1 u.c. Isso encerra todas as possibilidades e também soluciona o nosso problema.

3.3.2 Problemas propostos

Problema 6. Uma equipe formada por seis alunos de Matemática é selecionada para representar o Brasil em uma olimpíada internacional. Mostre que necessariamente existem três deles que se conhecem mutuamente, ou três que não se conhecem mutuamente.

Problema 7. Sejam $s = (a_1, a_2, ..., a_{2n+1})$ uma sequência de $2n+1$ números inteiros, $n \in \mathbb{N}$, e $p = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{i(2n+1)})$ uma permutação de s. Mostre que o produto

$$(a_{i1} - a_1)(a_{i2} - a_2)(a_{i3} - a_3)...(a_{i(2n+1)} - a_{2n+1})$$

é um número par.

Problema 8. Seja A um conjunto finito e não vazio de números naturais, com m elementos. Mostre que existe um subconjunto B de A, tal que m divide a soma dos elementos de B.

Problema 9. Cada ponto de uma tela quadrada é pintado de branco ou vermelho. Qual a menor área que a tela pode ter para garantir que haverá dois pontos de mesma cor a uma distância de exatamente 1 cm?

Problema 10. Qual é o número mínimo de cores necessário para colorir o plano de tal modo que dois pontos a uma distância de 1 cm nunca tenham a mesma cor?

Problema 11. Cada diagonal e cada lado de um n-ágono convexo é colorido com alguma de k cores. Qual o número mínimo n de vértices para garantir que o desenho resultante sempre contenha um triângulo monocromático?

Problema 12. Seja a um número irracional. Prove que existem infinitos números racionais $r = \dfrac{p}{q}$ tais que $|a - r| < \dfrac{1}{q^2}$.

Problema 13. Dado sete números reais arbitrários, demonstre que existem dois deles, digamos x e y, tais que

$$0 \leq \frac{(x-y)}{(1+xy)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Problema 14 (Teorema de Bezóut). Seja $d = \text{mdc}(a,b)$ o máximo divisor comum entre os números naturais a e b. Então existem x e y números inteiros tais que

$$ax + by = d.$$

Problema 15. Seja A um conjunto finito e não vazio de números naturais, com m elementos. Mostre que existe um subconjunto B de A tal que m divide a somas dos elementos de B.

CAPÍTULO

4

ENGAVETANDO PROBLEMAS ESQUISITOS

4.1 Elementos da aula

Escola:
Período: 4 horas aulas
Data prevista para aplicação do plano:
Componente curricular: Matemática
Público-alvo: alunos do Ensino Médio
Conteúdo: Princípio das Gavetas de Dirichlet
Recursos necessários: Lousa, giz, recursos digitais e multimídias (televisão e computadores)
Metodologia: aula dialogada com resolução de problemas
Avaliação: Além da observação direta e contínua das reações dos alunos frente às atividades propostas, uma lista de problemas e uma avaliação escrita com questões dissertativas e objetivas comporão o conjunto de instrumentos de avaliação desta sequência de aulas.

4.2 Introdução

Nessa aula, desenvolveremos um assunto que não é usual ser trabalhado nas escolas, infelizmente, pois além de constituir uma "porta" de entrada para temas extremamente importantes da matemática que não são abordados em grande parte dos currículos, é um conceito bastante acessível. Este tópico é o Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como Princípio das Casas dos Pombos. Ele possibilita tratarmos de temas relevantes da matemática em problemas com enunciados imprecisos e até mesmo esquisitos. Inclusive, esta imprecisão é característica frequente de problemas que sugerem a utilização do Princípio, o que garante a ludicidade e até a esquisitice dos contextos em que os problemas estão envolvidos (características motivadoras), sem a utilização de técnicas mais elaboradas.

Outro aspecto interessante é de que a não necessidade de utilização de técnicas específicas e mais elaboradas na resolução dos problemas envolvendo o Princípio das Gavetas faz com que o aluno se sinta mais livre, libertando-o das regras e das decorebas. Ao mesmo tempo, exige uma maior capacidade de argumentação, estimulando o raciocínio lógico e a escrita matemática mais rigorosa, algo que infelizmente é pouco desenvolvido na Educação Básica. Por este motivo, sugerimos ao professor que, além de explicar a utilização deste princípio nos problemas propostos, peça aos alunos para redigirem uma resposta com argumentos e explore em lousa as diversas possibilidades de redação e argumentação.

Por fim, o desenvolvimento deste conceito nos dá a oportunidade de olhar para o universo da análise combinatória de maneira muito mais ampla, ou seja, compreender que a mesma não se trata somente de técnicas de contagem. Na verdade, essas técnicas são somente um aspecto dentro do estudo das propriedades dos conjuntos finitos, que é o que melhor define a análise combinatória. Com relação às referências dos problemas utilizados nesse plano de aula, ver observação (3).

4.3 Objetivos

- Resolver problemas esquisitos;
- Estimular o raciocínio lógico;
- Desenvolver a escrita matemática (argumentos com rigor lógico);
- Definir e demonstrar o Princípio das Gavetas de Dirichlet;
- Resolver o problema central.

4.4 Desenvolvimento

A aula será toda estruturada em torno de um problema central, ou seja, utilizaremos da natureza motivadora dos problemas que sugerem a utilização do Princípio das Gavetas de Dirichlet (elementos lúdicos, interativos, desafiadores e contextos curiosos) para conduzirmos os alunos no estudo desse resultado e de outros objetos matemáticos que eventualmente sejam necessários desenvolver para solucionar os problemas propostos ao longo da aula.

Outro aspecto interessante de se iniciar a aula com um problema é o de fazer com que o aluno compreenda a necessidade de se tratar o objeto de estudo de maneira mais formal, fazendo com que o processo de definição e formalização do resultado passa a ter significado para o discente.

Problema Central – Eu te conheço? Em um grupo de seis pessoas, mostre que sempre haverá três pessoas que são amigos em comum ou estranhos em comum.

Em seguida, proporemos alguns problemas, que poderão ser desenvolvidos em grupo, com o propósito de familiarizar os alunos com a natureza dos contextos que apontam para o uso do Princípio das Gavetas de Dirichlet e provocar a necessidade de formalização e generalização desse resultado.

O primeiro problema da aula encontra-se resolvido e comentado no capítulo 3 (Problema 1), mas a resolução apresentada neste plano difere no sentido de não evidenciar o uso do Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Problema – Vamos "rachar" a festa de aniversário? Em um grupo formado por 13 pessoas, podemos garantir que haja pelo menos duas que fazem aniversário no mesmo mês?

Antes de esboçarmos algum tipo de solução, seria interessante experimentar essa hipótese, ou seja, propormos aos alunos que montem grupos com treze pessoas e verifiquem na prática o resultado. O próximo passo é a sistematização das observações, o que possibilita ao professor desenvolver habilidades relacionadas à escrita matemática (encadeamento lógico de ideias de maneira rigorosa) e à argumentação.

Solução

Em um grupo de 12 pessoas, é possível que cada uma das pessoas faça aniversário em um mês diferente, mesmo sendo esta distribuição pouco provável. Assim, para que possamos garantir que pelo menos duas façam aniversário no mesmo mês, precisamos de mais de 12 pessoas. Em seguida, o professor pode sugerir aos alunos uma variação do mesmo problema: quantas pessoas são necessárias para garantirmos que 3 pessoas aniversariem no mesmo mês? Inclusive, esta variação está associada ao caso mais geral do Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Problema – Brincando de Stop. Mostre que para cada 27 sequências de palavras presentes nesse plano de aula, pelo menos duas palavras começarão com a mesma letra.

Solução

Como temos 26 possibilidades de letras para iniciarmos uma palavra, é possível que em uma situação extrema, ao tomarmos 26 palavras aleatórias em um texto específico, essas sejam iniciadas por letras diferentes. Assim, para garantirmos que pelo menos duas palavras possuam as mesmas iniciais, precisamos de no mínimo 27.

Problema - Igualdade na Ceia de Natal. Mostre que no dia de Natal dois ou mais perus consumidos terão a mesma massa quando arredondadas para o milionésimo de libras mais próximo.

Solução

A massa média de um peru é de aproximadamente 15 libras, sendo que a maior massa já registrada foi de aproximadamente 37 libras. Se conseguíssemos uma aproximação de 6 casas decimais para a massa de um peru, teríamos 37 milhões de possibilidades de massas. Segundo estimativa, no dia de Natal são consumidos 46 milhões de perus. Dessa forma em um caso extremo de associação dos perus consumidos com as possibilidades de massas, teríamos 37 milhões de perus com massas distintas. Logo, qualquer quantidade de perus maior que 37 milhões garante que tenhamos pelo menos dois com a mesma massa.

Como já mencionado anteriormente, a imprecisão dos enunciados, também presente no próprio Princípio das Gavetas, faz parte da natureza da maioria dos problemas que podem ser resolvidos utilizando este resultado. Desta forma, talvez seja interessante sistematizarmos essa observação com os alunos.

Outro aspecto considerável é o de que antes de apresentarmos o Princípio das Gavetas de Dirichlet como ideia básica na solução dos problemas propostos anteriormente, seria interessante tentarmos enfatizar um padrão de resolução, que muitas vezes não é óbvio; ou seja, fazermos com que os alunos percebam uma "certa receitinha de bolo" que torna a abordagem dos mesmos muito mais eficiente.

Posteriormente, proporemos mais alguns problemas para que sejam resolvidos em grupo e ao mesmo tempo evidenciar a presença dos elementos comuns (padrão) citados anteriormente.

Problema – Lá se vão minhas moedas Uma máquina contém pequenas bolas de borracha com 10 cores diferentes. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso. Qual é o menor número de moedas a serem inseridas na máquina para garantir a retirada de 4 bolas de uma mesma cor?

Solução

As 10 possibilidades de cores serão as nossas gavetas, e para que eu garanta pelo menos 4 objetos em uma mesma gaveta (4 bolinhas da mesma cor), considerando um cenário pouco provável de distribuição dos objetos, serão necessários mais do que 30 objetos, ou seja, pelo menos 31 objetos.

Problema – Pontinhos na laranja Mostre que se você desenhar cinco pontos na superfície de uma laranja, assumindo que a mesma seja uma esfera perfeita, há uma maneira de cortar a laranja ao meio de modo que quatro dos pontos fiquem no mesmo hemisfério (suponha que um ponto no plano de corte gerado pelo grande círculo pertença a ambos os hemisférios).

Solução

Se tomarmos quaisquer dois pontos P_1 e P_2 na superfície da laranja (esfera), podemos determinar um grande círculo na mesma, e consequentemente gerar 2 hemisférios (gavetas). Como os pontos que geraram o grande círculo pertencem a ambos os hemisférios por definição, nos restam 3 pontos (objetos), P_3, P_4 e P_5, para distribuir. Então, pelo Princípio das Gavetas de

Dirichlet, um dos hemisférios conterá pelo menos 2 pontos, garantindo que um dos hemisférios contenha 4 dos 5 pontos.

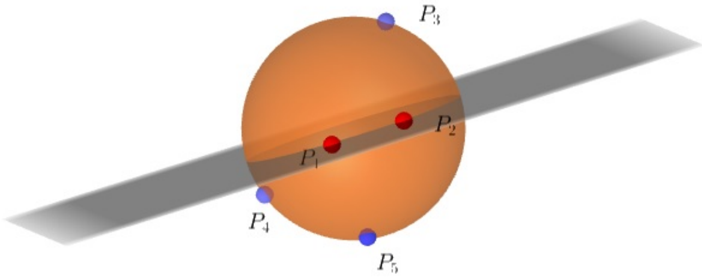

Figura 13 – Uma possibilidade de distribuição dos pontos na laranja

Fonte: Elaborada pelo autor.

Problema – Não sou só eu que estou ficando careca. A cidade de São Carlos tem aproximadamente 250 mil habitantes. Suponhamos que nenhuma pessoa da cidade tenha mais do que 180 mil fios de cabelo em sua cabeça. Mostre que pelo menos dois dos habitantes de São Carlos apresentam à mesma quantidade de fios de cabelo.

(Problema resolvido e comentado no capítulo anterior)

Após a resolução comentada dos mesmos, definiremos e demonstraremos o Princípio das Gavetas de Dirichlet nas suas duas versões, a mais simples e a mais geral. Anterior a definição e demonstração do resultado de maneira mais formal e abstrata, seria interessante que o professor utilizasse formas mais concretas (utilização de caixinhas e objetos reais, desenhos, etc) para auxiliar no entendimento do resultado, embora não seja tão elaborado.

Princípio das Gavetas de Dirichlet - Seja k um inteiro positivo, se distribuirmos $N+1$ objetos em N gavetas, então em alguma gaveta teremos pelo menos 2 objetos.

Demonstração. Podemos demonstrar esse resultado por contradição, ou seja, vamos supor que distribuímos todos os $N+1$ objetos e não existe mais do que um objeto em cada uma das N gavetas. Então, se contarmos todos os objetos presentes nas N gavetas, não teremos mais do que N objetos, contradizendo a hipótese de termos distribuído os $N+1$ objetos. □

Generalização do Princípio das Gavetas de Dirichlet. Se distribuímos $kN+1$ objetos em N gavetas, então em alguma gaveta teremos pelo menos $k+1$ objetos.

Demonstração. Demonstraremos a versão mais geral de forma similar à versão mais simples, também por contradição. Suponhamos que após distribuir os $kN+1$ objetos nas gavetas, não hajam mais do que k objetos em cada uma das N gavetas. Então, após contar todos os objetos presentes nas N gavetas, no máximo kN objetos, contradizendo a hipótese de termos distribuído $kN+1$ objetos.

Após formalizarmos e demonstrarmos o principal resultado da nossa aula, retomaremos o nosso problema central, só que desta vez mais familiarizado com a natureza do problema e dispondo de mais subsídios para resolvê-lo. □

Solução do Problema Central.

Representaremos as pessoas como sendo os vértices de um hexágono regular (veja figura 14). Os segmentos contínuos conectam pessoas que se conhecem mutuamente, já os segmentos descontínuos (pontilhados) representam pessoas que não se conhecem mutuamente.

Se observarmos a figura 14, nosso problema passa a ser equivalente a mostrar que existe um triângulo de lados contínuos ou um triângulo de lados pontilhados com vértices pertencentes a um subconjunto do conjuntos de vértices do hexágono regular.

Vejamos o vétice A_1. Note que dele partem 5 segmentos, que serão nossos objetos. Estes segmentos podem ser contínuos ou pontilhados; a natureza desses segmentos serão nossas gavetas. Então, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, teremos pelo menos 3 segmentos contínuos ou pontilhados. De fato, se imaginarmos um cenário extremo, ou seja, o mais equilibrado possível, teríamos 2 segmentos pontilhados e 2 segmentos contínuos, restando um segmento que só pode ser de uma das duas naturezas possíveis.

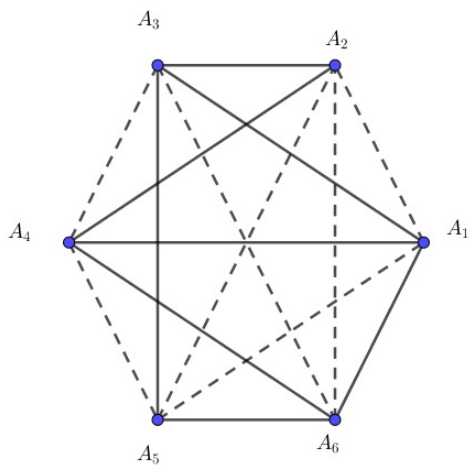

Figura 14 – Relação de amizade entre 6 amigos

Fonte – Oliveira, 2010, p.148.

Se considerarmos os segmentos A_1A_3, A_1A_4 e A_1A_6 como sendo os contínuos, conforme figura 14, se algum dos segmentos A_3A_4, A_3A_6 e A_4A_6 for contínuo, esse segmento ou os outros 3 contínuos ligados a A_1 definem um triângulo de lados contínuos, garantindo que 3 pessoas do grupo se conheçam mutuamente, por outro lado, se nenhum desses for contínuo, os mesmos formarão um triângulo de lados pontilhados, garantindo que 3 pessoas do grupo não se conhecem mutuamente, como queríamos demonstrar.

Além dos problemas presentes no banco de questões do capítulo 3, as sugestões abaixo são uma ótima oportunidade para aprofundar o conhecimento e desenvolver as habilidades dos alunos sobre o Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Sugestões ao professor:

1. Software contido na coleção M^3 Matemática Multimídia, desenvolvido pela Unicamp, que apresenta o Princípio da Casa dos Pombos de maneira lúdica e interativa.

2. Revista EUREKA! – Sob a chancela da Sociedade Brasileira de Matemática, este periódico apresenta um conjunto de artigos relevantes na preparação dos estudantes para a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) em seus diferentes níveis.

CAPÍTULO

5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que o presente trabalho tenha cumprido com a sua principal finalidade, que é a de motivar o estudo do Princípio das Gavetas de Dirichlet por ele próprio, ou seja, utilizar as características intrínsecas do resultado matemático e dos problemas que sugerem o seu uso para desenvolver este e outros conceitos matemáticos pouco trilhados nos currículos da Educação Básica.

Que professor e aluno possam compreender a simplicidade do resultado como uma oportunidade de libertar-se de regras e decorebas, inclusive desenvolvendo competências associadas a escrita matemática (raciocínio lógico, técnicas de argumentação, rigor, etc), algo que infelizmente é pouco desenvolvido na escola e não como uma diminuição em importância do mesmo.

REFERÊNCIAS

CERIOLI, Marcia R; DE FREITAS, Renata; VIANA Petrucio. **Princípio da casa de pombo**. IME, UFF, 2014. Nenhuma citação no texto.

DMITRI, Fomin; SERGEY, Genkin; ILIA Itenberg. **Círculos Matemáticos. A Experiência Russa**. Primeira edição / Impresso no Brasil. – Rio de Janeiro, 2014. Nenhuma citação no texto.

Grupo Matemática Multimídia da Unicamp. **Reducacionais multimídia para a matemática do ensino médio**. Disponível <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1223> Acesso em: 19 de fevereiro de 2019. Citado na página 55.

OLIVEIRA, KrerkleyIrraciel Martins. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. / KrerkleyIrraciel Martins Oliveira, Adán Jose Corcho Fernández. – 2º ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2010. 295 p. (Coleção Olimpíada de Matemática. Citado na página 54.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios**. Coleção do Professor de Matemática. Nona edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Nenhuma citação no texto.

PAIVA, Vinícius Barbosa; VELOSO, Marcelo Oliveira. **Sobre Pombos e Gavetas**. Revista de Matemática de Ouro Preto, volume 1, 2016. 19 p. Citado na página 26.

RALPH P. GRIMALDI. **DiscretandCombinatorialMathematicsAnAppliedIntroduction**. Addison-Wesley PublishingCompany.Thirdedition. Rose – HulmanInstituteof Technology. Nenhuma citação no texto.

SHINE, Carlos Yuso. **21 Aulas de Matemática Olímpica**. / Carlos YusoShine – Rio de Janeiro: SBM, 2009. Nenhuma citação no texto.

Z. Stankova, T. Rike **Círculo Matemático de Berkeley - A Experiência Americana**. Editores IMPA, 2018 Citado nas páginas 44 e 46.

Site da OBM. **Revista Eureka!!**. Disponível em: <https://www.obm.org.br/revista-eureka/> Acesso em: 19 de fevereiro de 2019. Citado na página 55.

ICMC USP
SÃO CARLOS