

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Daniele Simas Pereira Alves

PAVIMENTAÇÕES E CALEIDOSCÓPIOS
UMA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

Rio de Janeiro
2019



Daniele Simas Pereira Alves

PAVIMENTAÇÕES E CALEIDOSCÓPIOS UMA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dr^a. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

Rio de Janeiro
2019

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

A474 Alves, Daniele Simas Pereira

Pavimentações e caleidoscópios: uma experiência em sala de aula /
Daniele Simas Pereira Alves. – Rio de Janeiro, 2019.
98 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa,
Extensão e Cultura.

Orientador: Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Polígonos. 4.
Simetria. 5. Geogebra. I. Costa, Liliana Manuela Gaspar Cerveira da. II.
Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Daniele Simas Pereira Alves

PAVIMENTAÇÕES E CALEIDOSCÓPIOS UMA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____/____/____.

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Liliana Manuela Gaspar Cerveira
da Costa
PROFMAT - Colégio Pedro II

Prof. Dr. Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos
PROFMAT - Colégio Pedro II

Prof^a Dr^a. Patrícia Erthal de Moraes
PROFMAT - Colégio Pedro II

Rio de Janeiro
2019

Este trabalho é dedicado a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão da mesma: Deus, família, amigos, professores e alunos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por mais esta conquista. Em segundo lugar aos meus pais, Sr. Sérgio Simões Alves e Sra. Conceição Simas Pereira Alves, que me transmitiram o valor da educação. À eles, aos meus irmãos, e familiares pela compreensão e apoio em todas as horas, para que eu pudesse realizar esse trabalho.

À professora Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa, pelo auxílio desde a escolha do tema até a conclusão desta dissertação. Por acreditar em mim e pela condução desse trabalho com muita dedicação, incentivo, paciência e carinho.

O apoio e convivência dos amigos do corpo docente de matemática do Colégio Pedro II, campus Engenho Novo II. Em especial aos amigos João Domingos Gomes da Silva Junior pelas contribuições relevantes, e a Marcela Frontelmo Gomes da Silva pelo auxílio na aplicação do trabalho junto aos alunos. Aos alunos do 6º ano do colégio que foram essenciais para a aplicação das atividades e pelo empenho em que as realizaram.

Aos professores do PROFMAT que contribuíram com meu crescimento acadêmico e aos colegas de turma que estiveram presentes durante a realização do curso.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, participaram direta ou indiretamente no desenvolvimento e conclusão desta dissertação.

“A natureza está escrita em linguagem matemática.”
(Galileu Galilei)

RESUMO

ALVES, Daniele Simas Pereira. *Pavimentações e caleidoscópios uma experiência em sala de aula*. 2019. 98 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós- Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

Neste trabalho é apresentado um estudo referente aos conceitos e propriedades geométricas no que concerne aos caleidoscópios. Se inicia com a apresentação do conceito de pavimentações do plano por polígonos regulares, em especial as pavimentações uniformes; das simetrias do plano por um e por dois espelhos articulados, perpassando pelos caleidoscópios, seus tipos e bases geradoras. Em seguida é feito um relato de atividades propostas para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, onde se introduz e se aplica o conceito de simetria reflexional, estuda as pavimentações planas, bem como suas aplicações a caleidoscópios. A aplicação das atividades divide-se em três momentos: no primeiro momento as tarefas consistem na manipulação de espelhos planos no estudo de simetrias e bases geradoras de pavimentações, no segundo momento as tarefas consistem em um estudo, das simetrias, das bases geradoras e das bases transformadas na geração de pavimentações, com o software de geometria dinâmica GeoGebra e, no terceiro momento na construção de um caleidoscópio. O objetivo é propiciar um ensino de forma dinâmica e investigativa que estimule a exploração e observação de objetos geométricos, pelos alunos, confrontando teoria e prática. As tarefas foram desenvolvidas em sala de aula e no laboratório de informática e foram executadas com o auxílio dos professores. Na sequência desse estudo são desenvolvidas as ideias de simetria em eixos não paralelos, de pavimentação do plano, de base geradora de pavimentações e suas respectivas bases transformadas, finalizando a ação dos alunos com a construção de um caleidoscópio. Esse conjunto de tarefas permite ao aluno uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos por trás de um brinquedo simples que produz belas imagens.

Palavras-chave: Caleidoscópio; Simetrias; Pavimentação; Reflexão.

ABSTRACT

ALVES, Daniele Simas Pereira. *Pavimentações e caleidoscópios uma experiência em sala de aula*. 2019. 98 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós- Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

This thesis presents a study on the concepts and geometric properties related to kaleidoscopes. It begins with the presentation of tessellations of the plane by regular polygons, in particular the uniform tessellations, and the definition of reflection on the Euclidean plane by one mirror or by two articulated mirrors, passing through kaleidoscopes, their types and generating bases. Next, it is described an activity applied to students of the 6th grade, where the concept of reflex symmetry is introduced and applied for studying plane tiling, as well as their applications to kaleidoscopes. The activity are divided into three phases: in the first one, the students manipulated flat mirrors to search symmetries and generator bases of some tessellations, in the second moment the same study was done using the dynamic geometry software GeoGebra, and in the third moment the students construct kaleidoscopes. The purpose is to provide a dynamic and investigative teaching that stimulates the exploration and observation of geometric objects by the students, confronting theory and practice. The activities were developed in the classroom and in the Informatics Lab and were carried out with the support of teachers. This set of tasks allows the student a better understanding of the concepts involved behind a simple toy that produces beautiful images.

Keywords: Kaleidoscope; Symmetries; Tessellation; Reflection.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Nós, arestas, ladrilhos e arranjos de uma pavimentação	21
Figura 2 – Pavimentações lado-lado	22
Figura 3 – Soma dos ângulos internos dos polígonos regulares em torno de um nó .	23
Figura 4 – Pentágonos regulares não formam uma pavimentação regular	24
Figura 5 – Pavimentações regulares	25
Figura 6 – Nem todo arranjo pavimenta o plano	27
Figura 7 – Arranjos que pavimentam o plano	27
Figura 8 – As onze pavimentações descobertas por Johannes Kepler	28
Figura 9 – Reflexão $P \notin r$ e $Q \in r$	29
Figura 10 – Simetria num laço	30
Figura 11 – Simetria de um segmento	31
Figura 12 – Transformações em um triângulo	31
Figura 13 – Reflexão de E pelos eixos r e s	32
Figura 14 – Simetria central por determinados ângulos	33
Figura 15 – Reflexão do ponto P por um espelho E	34
Figura 16 – Eixos de simetria de figuras	34
Figura 17 – Exemplos de mudanças na orientação dos ângulos de figuras refletidas .	35
Figura 18 – Imagens refletidas por espelhos planos paralelos	36
Figura 19 – Espelhos E_1 e E_2 paralelos e frente a frente	36
Figura 20 – Reflexões com ângulos variados entre os espelhos articulados	37
Figura 21 – Ponto P entre espelhos articulados	38
Figura 22 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 45° , em que $\hat{x} = 20^\circ$ e $\hat{y} = 25^\circ$	39
Figura 23 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 60° , em que $\hat{x} = \hat{y}$	40
Figura 24 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 90°	41
Figura 25 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 75° , em que $\hat{x} = 30^\circ$ e $\hat{y} = 45^\circ$	42
Figura 26 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 110° , em que $\hat{x} = 25^\circ$ e $\hat{y} = 85^\circ$	43
Figura 27 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 110° , em que $\hat{x} = 50^\circ$ e $\hat{y} = 60^\circ$	44
Figura 28 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 45° , produz octavértices	45
Figura 29 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 60° , produz hexavértices	46

Figura 30 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 90° , forma quadrivértices	46
Figura 31 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 75° , forma pentavértices	47
Figura 32 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 110° , pode formar quadri e pentavértices	48
Figura 33 – Pentavértice	48
Figura 34 – Trivértice regular	49
Figura 35 – Trivértice semirregular	49
Figura 36 – Ponto P junto a um dos espelhos e $\hat{z} = 90^\circ$	50
Figura 37 – Ponto P próximo ao vértice formado pelos espelhos	50
Figura 38 – Polígono formado por um segmento entre dois espelhos	51
Figura 39 – Polígonos regulares formados por espelhos	51
Figura 40 – Configurações de espelhos para caleidoscópios de base triangular	54
Figura 41 – Caleidoscópio plano de base triangular	55
Figura 42 – Viewing Machine (2001-2008) de Olafur Eliasson	56
Figura 43 – Caleidoscópio popular	56
Figura 44 – Caleidoscópios de base triangular	57
Figura 45 – Caleidoscópios de base quadrangular	58
Figura 46 – Caleidoscópios modificados de bases triangular e quadrangular	59
Figura 47 – Base geradora	60
Figura 48 – Bases geradoras por triângulos equiláteros	61
Figura 49 – Bases geradoras por triângulos isósceles	61
Figura 50 – Bases geradoras por quadriláteros	61
Figura 51 – Método II de obtenção de bases geradoras	62
Figura 52 – Estudo da base geradora da pavimentação (4,6,12)	63
Figura 53 – Bases geradoras e transformadas de pavimentações (4,6,12) e (3,3,6,6)	64
Figura 54 – Material manipulativo utilizado na atividade	66
Figura 55 – Cartões pra determinação do eixo de simetria	66
Figura 56 – Cartões para determinação da figura simétrica em relação ao eixo	67
Figura 57 – Cartões pra determinação de possíveis eixos de figuras	67
Figura 58 – Folha de tarefas	68
Figura 59 – Cartões para estudo da quantidade de figuras geradas pela reflexão nos dois espelhos articulados	69
Figura 60 – Cartões para estudo de figuras obtidas por segmentos refletidos segundo determinados ângulos	70
Figura 61 – Cartões para o estudo das imagens geradas pelas reflexões nos espelhos	71
Figura 62 – Bases geradoras de pavimentações formadas por triângulos equiláteros	72

Figura 63 – Bases geradoras de pavimentações formadas por triângulos isósceles e escaleno	72
Figura 64 – Pavimentações preto e branco para a determinação de bases geradoras	73
Figura 65 – Pavimentações coloridas para a determinação de bases geradoras	73
Figura 66 – Base geradora a ser criada pelos alunos	74
Figura 67 – Alunos realizando as atividades	74
Figura 68 – Visualização da tarefa 1 proposta aos alunos	75
Figura 69 – Visualização da tarefa 2 proposta aos alunos	76
Figura 70 – Visualização da tarefa 3 proposta aos alunos	76
Figura 71 – Visualização das tarefa 4 e 5 propostas aos alunos	77
Figura 72 – Visualização das tarefas 6 e 7 propostas aos alunos	77
Figura 73 – Visualização da tarefa 8 proposta aos alunos	78
Figura 74 – Visualização da tarefa 9 proposta aos alunos	78
Figura 75 – Visualização da tarefa 10 proposta aos alunos	79
Figura 76 – Visualização da tarefa 11 proposta aos alunos	80
Figura 77 – Visualização da tarefa 12 proposta aos alunos	80
Figura 78 – Visualização da tarefa 13 proposta aos alunos	81
Figura 79 – Visualização da tarefa 14 proposta aos alunos	81
Figura 80 – Visualização da tarefa 15 proposta aos alunos	82
Figura 81 – Visualização da tarefa 16 proposta aos alunos	83
Figura 82 – Visualização da tarefa 17 proposta aos alunos	83
Figura 83 – Visualização da tarefa 18 proposta aos alunos	84
Figura 84 – Visualização da tarefa 19 proposta aos alunos	84
Figura 85 – Visualização da tarefa 20 proposta aos alunos	85
Figura 86 – Material utilizado na construção dos caleidoscópios	86
Figura 87 – Alunos construindo os caleidoscópios	87

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	METODOLOGIA	18
3	PAVIMENTAÇÃO DO PLANO	21
4	SIMETRIA	29
4.1	Reflexão	29
4.2	Simetria Central ou Rotação	32
4.3	Espelhos	33
4.3.1	Utilização de um espelho plano	34
4.3.2	Utilização de dois espelhos planos	35
4.3.2.1	Dois espelhos planos paralelos	35
4.3.2.2	Dois espelhos planos articulados	37
4.3.2.2.1	Dois espelhos planos articulados formando ângulos cujo dobro divide 360° .	39
4.3.2.2.2	Dois espelhos planos articulados formando ângulo cujo dobro não divide 360°	41
4.3.2.2.3	Polivértice	44
4.3.2.2.4	Ponto junto a um dos espelhos	48
4.3.2.2.5	Ponto próximo ao vértice formado pela junção dos espelhos	50
4.3.2.2.6	Segmento entre dois espelhos	50
4.3.3	Utilização de três espelhos planos	53
5	CALEIDOSCÓPIOS	55
5.1	Construção do caleidoscópio modificado	58
5.2	Bases geradoras	60
5.3	Base transformada	62
5.3.1	Método I	62
5.3.2	Método II	62
5.3.3	Método III	63
6	ATIVIDADE	65
6.1	Atividades com o material manipulativo	65
6.1.1	Uso de material manipulativo no estudo das simetrias com um espelho plano	66
6.1.2	Uso de material manipulativo no estudo das simetrias com dois espelhos planos articulados	68

6.1.3	Uso de material manipulativo no estudo das simetrias e pavimentações com três espelhos planos articulados	71
6.2	Atividade com o GeoGebra	75
6.2.1	Uso do GeoGebra para averiguar simetria de figuras	75
6.2.2	Uso do GeoGebra para estudo de reflexões com eixos de simetria não paralelos	79
6.2.3	Uso do GeoGebra para estudar pavimentações e bases geradoras . . .	81
7	CONSTRUÇÃO DO CALEIDOSCÓPIO	86
8	CONCLUSÃO	88
	REFERÊNCIAS	90
	ANEXOS	92
	ANEXO A – FOLHA DE TAREFAS	93

1 INTRODUÇÃO

No campo da geometria existem diversas propostas metodológicas de ensino. Desta forma, seria leviano afirmar que uma determinada forma de ensino é mais eficiente que outra e em qual a aprendizagem é mais efetiva. Nesse contexto, o que deve ser considerado são as diversas possibilidades, que têm à disposição dos professores, para trabalhar com os alunos em sala de aula, utilizando os mais variados recursos didáticos e enfoques metodológicos diferentes.

A utilização desses recursos na educação vem facilitar o processo de ensino-aprendizagem, uma vez que permitem aos alunos construir, manipular, fazer experimentações, observações, comparações, análises, bem como generalizações. Isto é, os recursos didáticos permitem ensinar de forma mais dinâmica e colaborativa, confrontando a teoria e a prática. O uso de recursos aumenta a autonomia do aluno, o que o proporciona uma mudança de atitude, deixando de ser passivo no processo de ensino-aprendizagem e passando a ser ativo, além de deixá-lo mais entusiasmado em aprender geometria.

A tentativa de diversificar processos e de adequá-los às expectativas dos alunos, decorre da inquietação em propor diferentes formas de abordar o conceito de simetria e suas aplicações à pavimentação. A presente proposta recorre à utilização de materiais manipulativos e à utilização de tecnologia, porque ambos promovem a percepção de ideias e conceitos geométricos simples e intuitivos.

A motivação para o uso dos materiais manipulativos deve-se ao fato que estes permitem aos alunos a observação dos objetos estudados, através da experimentação e manipulação. Em seus estudos Pais (1996) destaca a importância dos materiais manipulativos, pois funcionam como recursos didáticos auxiliares e representativos do processo de construção dos conceitos geométricos em suas correlações com os aspectos teóricos, intuitivos e experimentais da geometria.

Os materiais manipulativos são recursos atrativos que oferecem a exploração de diversas possibilidades para o ensino de geometria. O ato de manipular materiais permite aos alunos experiências físicas pelo contato direto com os materiais, realizando medições e/ou descrições por meio da comparação de objetos de mesma natureza. Manusear esses materiais coloca o aluno como agente ativo no processo de ensino-aprendizagem e, estimula o interesse do aluno uma vez que este deixa de ser apenas ouvinte. Ao assumir o papel participativo no processo de ensino-aprendizagem, o aluno pode explorar os objetos matemáticos, bem como suas características, construir conceitos, investigar conexões entre entes matemáticos e formular conjecturas.

A Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa. [...] As investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da actividade matemática tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 71)

O uso do material manipulativo, além de ser uma prática diferenciada, permite uma maior interatividade entre os alunos, visando estimular a troca de ideias e estimular a descoberta.

Os materiais manipulativos são importantes na criação de significados no estudo de objetos geométricos, mas em face aos incontáveis recursos didáticos, não podemos cometer o risco de presumir que devam ser utilizados como únicos recursos para a construção de conceitos geométricos. É de suma importância que o processo pedagógico recorra a diversificados recursos didáticos a fim de se obter uma construção mais significativa dos conceitos envolvidos num estudo. O uso de mais de um recurso didático de forma alinhavada possibilita uma investigação mais completa e detalhada, através de diferentes óticas, das propriedades dos objetos geométricos e auxilia no alcance dos objetivos educacionais de forma completa.

O ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (BRASIL, 1997, p.31)

Segundo Carvalho (1990), desenvolver uma abordagem de um conteúdo utilizando-se um material concreto como recurso didático requer um planejamento de ações que sejam centradas nas operações que podem ser realizadas com estes materiais, isto é, ações que proporcionem a construção de um pensamento lógico/matemático, consolidado e significativo.

Os textos de referência da educação brasileira apresentam propostas metodológicas que sugerem o uso de ferramentas tecnológicas em sala de aula. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda o uso das tecnologias associado a prática social dos alunos.

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva". (BRASIL, 2016, p. 9)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apresentam propostas para o uso de tecnologias de maneira a aproximar os estudantes de suas realidades cotidianas e levá-los a atingir uma das competências gerais da educação básica.

Novas competências demandam novos conhecimentos: o mundo do trabalho requer pessoas preparadas para utilizar diferentes tecnologias e linguagens (que vão além da comunicação oral e escrita), instalando novos ritmos de produção, de assimilação rápida de informações, resolvendo e propondo problemas em equipe. (BRASIL, 1998, p. 26)

Assim, cabe aos professores transformar a sala de aula num ambiente mais atrativo e dinâmico para os alunos, podendo recorrer ao uso de novas tecnologias, que propiciem uma provocação, que desafie os alunos e estimule o raciocínio e a criatividade. O estímulo ao uso de tecnologias está presente em todo o PCN, seja através do uso de uma simples calculadora, passando a computadores, tablets e celulares.

Ao longo da evolução da humanidade, Matemática e tecnologia se desenvolveram em íntima associação, numa relação que poderíamos dizer simbiótica. A tecnologia entendida como convergência do saber (ciência) e do fazer (técnica), e a matemática são intrínsecas à busca solidária do sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto ser dissociada da tecnologia disponível. (D'AMBROSIO, 1996, p. 13)

A ausência de uma prática laboratorial em sala de aula, distancia cada vez mais a atividade docente da realidade e das habilidades dos alunos no que tange ao uso de tecnologias. Nesse contexto está inserido o ensino da matemática, tornando-se necessária uma busca constante de diferentes maneiras de atrair o aluno para o que está sendo ensinado, sempre levando-se em consideração experiências anteriores. Por outro lado, o estado da arte do recurso à tecnologia em educação e ensino permite o acesso a uma grande diversidade de propostas, tanto no que refere aos processos, como no que concerne aos conteúdos.

Para o ensino de matemática existem inúmeras propostas metodológicas como a utilização de planilhas eletrônicas, softwares de cálculos e de geometria dinâmica. Vários autores ressaltam a importância da utilização de softwares em sala de aula e como a tecnologia se faz cada vez mais necessária no cotidiano dos educandos.

A utilização dos softwares em sala de aula deve ser norteada por interesses pedagógicos, pois o software em si, não implica em nenhuma mudança no processo educacional. Com a introdução do computador como mediador didático, desenvolveram-se softwares específicos para serem utilizados em contextos de ensino aprendizagem. (ASSIS; BEZERRA, 2011, p.2)

Nesse sentido, visando diversificar processos e adequá-los às expectativas dos alunos, surge a preocupação de propor uma forma diferenciada de abordar o conceito de reflexão junto a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental (EF).

Considerando o conhecimento intrínseco à tecnologia, os ambientes de aprendizagem devem utilizar as diferentes mídias disponíveis. O computador e a calculadora, por exemplo, podem favorecer o processo de ensino e aprendizagem da matemática, permitindo atividades experimentais mais ricas, sem que a máquina modele ou solucione problemas ao aluno. (MARTINS, 2003, p. 35)

Neste trabalho descreve-se um conjunto de tarefas para efetuar o estudo de simetrias, bem como suas aplicações a pavimentações e caleidoscópios, recorrendo à utilização de materiais manipulativos e a softwares de geometria dinâmica. O uso de materiais concretos, em especial os caleidoscópios, é de extrema importância para o ensino de geometria, pois permite o estudo de conceitos como simetria, eixos, reflexões, translações e rotações de objetos. O recurso tecnológico justifica-se pelo rigor das construções elaboradas, e pela rapidez em se obter uma pavimentação do plano, corroborando o estudo sobre simetrias e sobre as possibilidades de bases geradoras de pavimentações.

Foi através de um kit de espelhos, elaborado pela autora, e do software GeoGebra que se implementou este trabalho. O kit de espelhos possibilita a visualização de retas, planos, polígonos, reflexões e pavimentações planas por polígonos regulares. Já a utilização de caleidoscópios e de softwares educacionais em atividades de geometria permite um estudo mais detalhado com vistas as propriedades dos polígonos.

Alcançar outros objetivos: desenvolvimento da percepção espacial e da habilidade para visualizar (como propõem os PCN); motivação para estudo e exploração de propriedades dos polígonos (especialmente relações angulares e de transformações geométricas, particularmente as relacionadas à simetria reflexional). (MARTINS, 2003, p.5)

O uso do GeoGebra permite realizar com facilidade construções geométricas, proporcionar de uma maneira mais simples a compreensão de objetos geométricos e das relações entre eles e desenvolver a capacidade de raciocínio dedutivo indutivo.

A utilização de caleidoscópios no ensino de geometria tem sido objeto de interesse de inúmeros pesquisadores no Brasil, o que revela uma vasta preocupação de autores em lançar diversos recursos atrativos, e em relatar as explorações realizadas e as possibilidades que estes instrumentos oferecem para o ensino de geometria. É possível observar uma cronologia sobre a utilização deste tema nos processos de ensino-aprendizagem em Batistela e Santos (2013).

Assim, este trabalho visa explicitar as atividades desenvolvidas, envolvendo simetrias e pavimentações do plano com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, a partir de tarefas que utilizam espelhos como materiais manipulativos e recursos tecnológicos como o GeGebra, para a apreensão de conceitos e a exploração de propriedades e relações geométricas relativas à estrutura das pavimentações e simetrias existentes nos caleidoscópios.

No capítulo 2, apresenta-se de forma breve a metodologia utilizada. Nos capítulos 3, 4 e 5, apresenta-se o suporte teórico relativamente a pavimentações, simetrias e caleidoscópios, respectivamente. Assuntos esses que serão explorados na atividade descrita no capítulo 6. No capítulo 7, descreve-se a culminância da atividade, que foi a construção de um caleidoscópio. Finalmente, no último capítulo apresentam-se algumas reflexões e conclusões sobre o trabalho efetuado.

2 METODOLOGIA

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, já que o processo é mais importante que o produto. Nela, procura-se unir a pesquisa à ação ou prática, isto é, desenvolver o conhecimento e a compreensão como parte da prática, daí se enquadrar no registro da pesquisa-ação.

Essa metodologia exige uma estrutura de relação entre os pesquisadores e as pessoas envolvidas no estudo da realidade do tipo participativo/coletivo.

Uma pesquisa pode ser qualificada de pesquisa-ação quando houver realmente uma ação por parte das pessoas implicadas no processo investigativo e estar centrada no agir participativo e na ideologia de ação coletiva. (BALDISSERA, 2001, p. 6).

Tal metodologia agrega várias técnicas de pesquisa, recorre a técnicas de coleta e interpretação de dados, intervenção e solução de problemas, bem como técnicas de dinâmica de grupos.

Aplicando essas ideias ao ensino, a pesquisa-ação revelou-se como um instrumento eficiente para o desenvolvimento profissional do professor, além de ser um instrumento valioso, a que os professores podem recorrer, para melhorar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Engel (2000, p.190) “ao considerarmos as limitações atuais da teoria educacional, a pesquisa-ação leva a soluções imediatas para problemas educacionais urgentes, que não podem esperar por soluções teóricas”.

Por ser investigativa e participativa supõe um conjunto de procedimentos técnicos e operativos para o conhecimento da realidade ou um aspecto desta, com o objetivo de transformá-la pela ação coletiva, como também, supõe uma co-implicação no trabalho dos pesquisadores e das pessoas envolvidas no projeto onde se faz intercâmbio, socialização das experiências e conhecimentos teóricos e metodológicos da pesquisa.

A atividade foi desenvolvida com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Aqui será apresentada a atividade na íntegra que culmina com a proposta de construção de um caleidoscópio. A atividade desenvolveu-se em três momentos distintos: no primeiro momento, a manipulação de espelhos no estudo de simetria e bases geradoras, no segundo momento, no estudo, também de simetrias e bases geradoras, com atividades feitas no software de geometria dinâmica GeoGebra e, no terceiro momento na construção de caleidoscópios.

No primeiro momento os professores realizaram uma explanação sobre o conceito de simetria axial, apresentando algumas imagens, que permitissem a intuição do conceito. Essa apresentação inicial foi necessária uma vez que o trabalho foi realizado com alunos do 6º ano que ainda não estavam familiarizados com tal conceito. Após a explanação foi

realizada a formalização dos conceitos necessários para assim dar início à execução de tarefas com os materiais manipulativos.

O estudo com o material manipulativo foi dividido em quatro fases, a primeira constitui o estudo de simetrias utilizando-se um único espelho plano, a segunda fase constitui um estudo das simetrias utilizando-se dois espelhos planos articulados e, a terceira e quarta fases centram-se no estudo das simetrias e bases geradoras de pavimentações utilizando-se três espelhos planos.

Na primeira fase os alunos, de posse de material fornecido, tiveram de estudar através da manipulação de um espelho plano, utilizando algumas figuras apresentadas em malhas quadriculadas, os lugares exato dos eixos de simetria de algumas delas, a imagem simétrica em relação a um eixo pré-determinado de outras e, os possíveis eixos de simetrias de figuras geométricas. Na segunda fase os alunos passaram a estudar as simetrias reflexionais utilizando, agora, um par de espelhos planos e articulados e algumas figuras em uma malha isométrica. Os alunos tiveram de estudar as reflexões ocorridas a imagens localizadas entre os espelhos articulados, variando os ângulos livremente entre os espelhos. Estudaram, também, os padrões ocorridos nas reflexões das figuras entre os espelhos, em determinados ângulos de abertura entre eles. A terceira fase consiste na manipulação de três espelhos planos e algumas pavimentações do plano compostas por polígonos regulares (em preto e branco), para o estudo das reflexões originadas pela reflexão dos polígonos das pavimentações nos espelhos e a determinação de bases geradoras dessas pavimentações. A quarta fase é semelhante à anterior, mas utilizando pavimentações do plano coloridas. Desta vez os alunos observaram, além das simetrias nos polígonos para a obtenção das bases, o encaixe correto das cores dos polígonos na formação da pavimentação. Ao fim deste primeiro momento o professor iniciou uma discussão relativa ao que pôde ser observado durante a realização das tarefas.

No segundo momento os alunos realizam as tarefas no laboratório de informática do colégio utilizando o software GeoGebra. O estudo com o GeoGebra conta de 20 tarefas, divididas em três fases e foi realizado em dupla pelos alunos. Na primeira fase, são apresentadas um conjunto de nove tarefas, que têm como suporte uma malha quadriculada, relacionadas ao estudo de simetrias reflexionais com um eixo. As tarefas consistem na determinação da posição de um eixo que deve ser ajustado entre uma figura original e uma refletida, no estudo das figuras a serem refletidas por um espelho (eixo) fixado previamente diante de uma figura original e, no estudo dos possíveis eixos de simetria de cada uma das figuras de uma série de figuras geométricas. A segunda fase conta com um conjunto de cinco tarefas que têm como suporte a malha isométrica e dois eixos de simetria não paralelos que simulam dois espelhos. As tarefas consistem em observar o comportamento de figuras frente a espelhos não paralelos e suas reflexões, mediante a variação do ângulo de abertura entre os espelhos. Para isso, na realização das mesmas era necessário manipular imagens posicionadas entre os dois espelhos com uma determinada

abertura, ora era necessário variar o ângulo de abertura entre eles, sendo, em algumas delas a manipulação feita livremente, e em outras sob determinados ângulos, e observar as reflexões geradas, que em algumas situações previam a manipulação de ambos os objetos, tanto os espelhos quanto as figuras entre eles. A terceira fase possui um conjunto de 6 tarefas que têm três eixos de simetria que formam um triângulo equilátero. Essa fase consiste no reconhecimento das reflexões pelos eixos (espelhos) neles mesmos e na identificação de bases geradoras e transformadas de pavimentações do plano. A tarefa inicial permite a observação das primeiras reflexões de objetos nos espelhos reais e a observação da segunda e da terceira reflexões nos espelhos virtuais gerados pelo reflexo dos espelhos reais. Em seguida, as atividades permitem o estudo das bases geradoras e de suas respectivas bases transformadas, sendo este estudo até à quarta base transformada. Nas demais tarefas os alunos podem observar pavimentações formadas por bases geradoras. A última tarefa desse conjunto simula um caleidoscópio e permite a observação do padrão criado pelas reflexões nos espelhos, dos objetos entre eles.

Após a realização das tarefas com o material manipulativo e com o GeoGebra os alunos passam para a construção dos caleidoscópios. Nesse momento tem a culminância do projeto, pois é realizada a execução e a manipulação de um objeto concreto. O amplo estudo realizado em face das simetrias e pavimentações e bases geradoras permite aos alunos uma melhor compreensão da matemática envolvida por trás de um objeto que produz belas figuras.

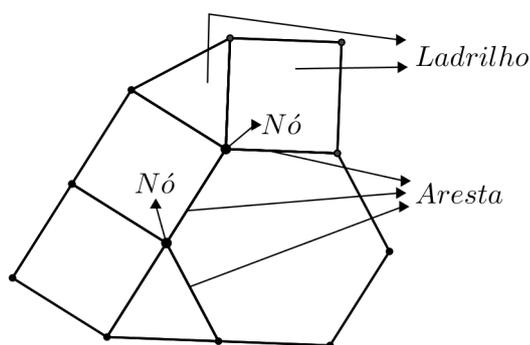
3 PAVIMENTAÇÃO DO PLANO

Uma pavimentação do plano, segundo (LOURENÇO, 2014, p.11) “é o recobrimento de uma superfície com ladrilhos (peças) sem deixar espaços intermediários nem sobreposições”. As pavimentações usadas como elemento decorativo, estão presentes em obras de arte, pisos e paredes de palácios e igrejas, calçadas das ruas, entre outros lugares. Sua presença no artesanato de mosaicos de muitas civilizações como a babilônica, a grega, a chinesa, a árabe e a egípcia, remonta a cerca de 4500 anos a.C. No campo do estudo da geometria as pavimentações, levando em consideração suas propriedades geométricas e suas construções com polígonos, tem um histórico mais recente. Segundo Murari e Santos (2010), o estudos da geometria das pavimentações parece ter sido iniciado pelo astrônomo Joannes Kepler (1580-1630). Kepler principiou seus estudos a partir dos trabalhos sobre os poliedros de Arquimedes e os de Platão.

Kepler apresentou uma classificação das pavimentações usando polígonos, provando a existência de exatamente onze pavimentações por polígonos regulares. Estas pavimentações consistem no recobrimento de um plano por polígonos regulares sem a ocorrência de espaços ou sobreposição entre os polígonos.

As pavimentações formam-se a partir de **nós**, pontos de encontro dos vértices dos polígonos, e dois nós consecutivos de um mesmo lado de um polígono unem-se por um segmento de reta, chamado **aresta**. Os polígonos reunidos que formam uma pavimentação são chamados de **ladrilhos** (Figura 1). A configuração composta pelos polígonos (ladrilhos) em torno de um nó é chamada de **arranjo**.

Figura 1 – Nós, arestas, ladrilhos e arranjos de uma pavimentação

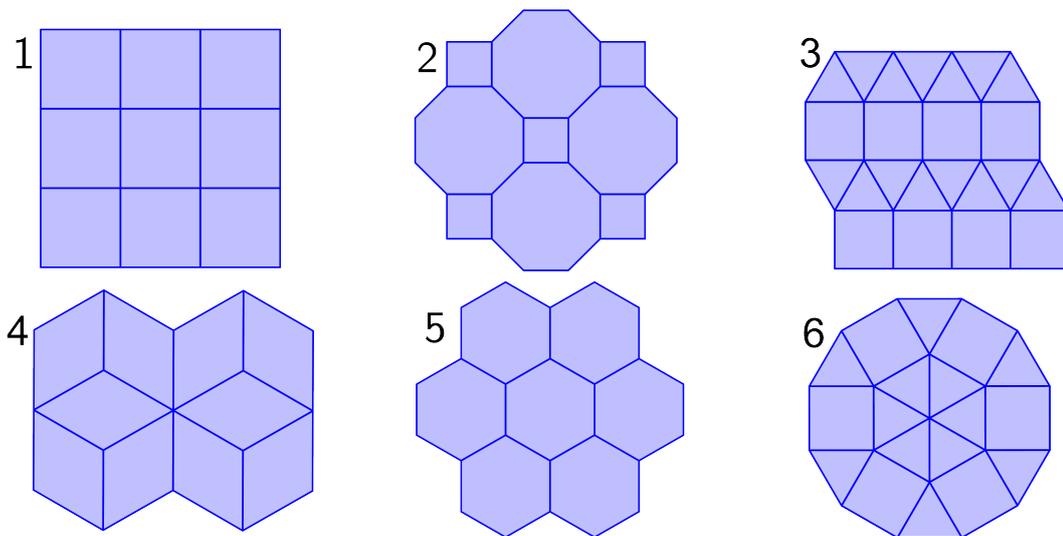


Fonte: O autor, 2019

Segundo Barros (2016) as pavimentações podem ser classificadas em vários tipos: lado-lado, puras ou monoédricas, regulares, semi-regulares ou arquimedianas, demiregulares, entre outras. **Lado-lado** são pavimentações nas quais toda aresta é lado comum a dois polígonos e assim todo nó na aresta é comum a pelo menos dois polígonos da pavimentação; **monoédricas ou puras** são as pavimentações que possuem polígonos congruentes entre si, ou seja, por um único ladrilho, podendo este ser regular ou não; **regulares** são as pavimentações monoédricas e lado-lado cujos ladrilhos são polígonos regulares (convexo, lados iguais e ângulos internos iguais); **semirregulares** são pavimentações formadas por polígonos regulares de pelo menos dois tipos diferentes e os arranjos são todos do mesmo tipo e **demiregulares** são pavimentações constituídas por mais de um tipo de polígonos regulares e por mais de um tipo de arranjo.

Em uma pavimentação lado-lado utilizando polígonos, só poderá ser acrescentado outro polígono à pavimentação caso o lado do polígono a ser acrescentado seja congruente ao lado do polígono já integrante da pavimentação. A pavimentação lado-lado pode ser formada por um só tipo de polígono ou por vários tipos de polígonos diferentes (Figura 2).

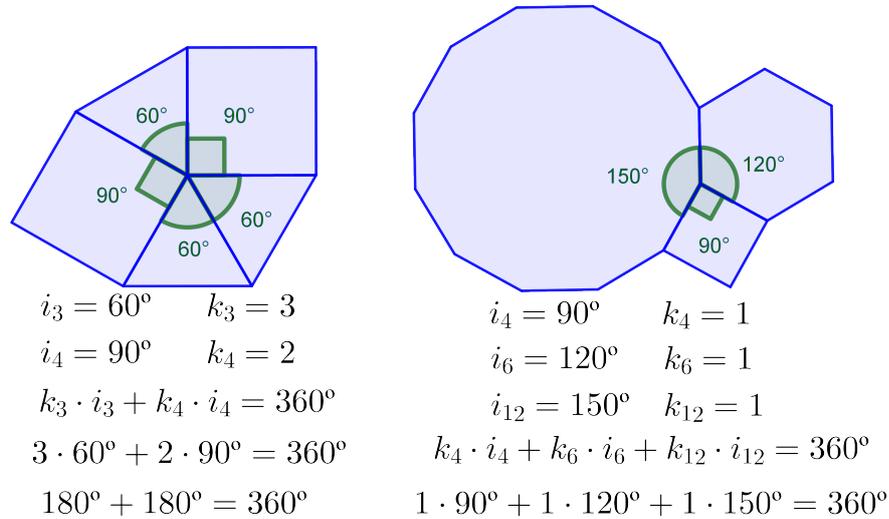
Figura 2 – Pavimentações lado-lado



Fonte: O autor, 2019

Nas pavimentações lado-lado os ângulos internos dos polígonos, que se juntam em um nó, quando somados devem resultar em 360° , isto é, dado um arranjo formado por um número k de polígonos reunidos em um nó, a soma dos ângulos internos i dos polígonos dispostos em torno do nó deve ser igual a 360° , isto é, sendo k_n o número de polígonos regulares de n lados, cujo ângulo interno é i_n , tem-se que $\sum_{j=3}^n k_n \cdot i_n = 360^\circ$ (Figura 3).

Figura 3 – Soma dos ângulos internos dos polígonos regulares em torno de um nó



Fonte: O autor, 2019

Na figura (Figura 2) pode-se observar todos os tipos de pavimentação lado-lado. As pavimentações 1, 4 e 5 são monoédricas ou puras, pois possuem apenas um único tipo de ladrilho; as pavimentações 1 e 5 são regulares, pois apresentam somente um tipo de polígono regular, as pavimentações 2 e 3 são semi-regulares, pois utilizam dois tipos de polígonos regulares e apenas um tipo de arranjo em sua configuração e a pavimentação 6 é demi-regular, pois apresenta mais de um tipo de polígonos regulares e mais de um tipo de arranjo. Neste estudo, abordaremos as pavimentações lado-lado regulares e semi-regulares.

Começando por polígonos de um mesmo tipo, uma vez que a soma dos ângulos internos i dos polígonos k ao redor de um nó deve ser 360° , pode-se averiguar quais os polígonos regulares capazes de formar um arranjo de uma pavimentação por meio de um estudo dos seus ângulos internos.

Um polígono de n lados, pode ser decomposto por diagonais partindo dum mesmo vértice em $n - 2$ triângulos. Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é igual a um ângulo raso, a soma dos ângulos internos do referido polígono é $(n - 2)180^\circ$. Se o polígono for regular, cada ângulo interno vale $i = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$.

Sabemos que a soma dos ângulos internos com vértice em um nó é igual a 360° e que se os polígonos são regulares os ângulos serão todos iguais entre si, pelo que o seu valor tem que ser divisor de 360° . Mas, da fórmula anterior sabemos, também que o ângulo interno de um polígono regular tem que ser inferior a 180° e não inferior a 60° , valor que se obtém para $n = 3$. Ora, temos apenas 3 divisores de 360° nestas condições: 60° , 90° e 120° que, atendendo à fórmula anterior, correspondem a $n = 3$, $n = 4$ e $n = 6$, respectivamente. Para cada um dos ângulos i em questão, sendo k o número de polígonos temos que $ki = 360^\circ$.

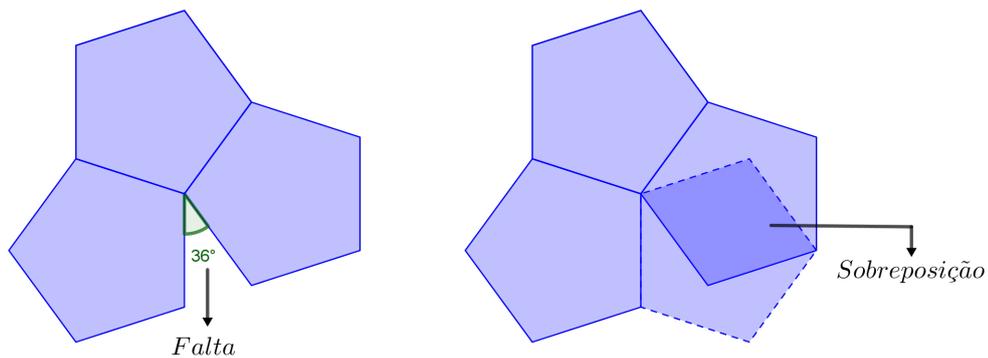
Temos que para $k \cdot 60^\circ = 360^\circ$, $k = 6$, que é a maior quantidade de polígonos regulares, de um único tipo, que pode ser usada para formar uma pavimentação. De forma análoga, temos que quando $i = 90^\circ$, $n = 4$, $k = 4$ e quando $i = 120^\circ$, $n = 6$, $k = 3$. Assim, temos que o polígono regular com o maior número de lados que se pode utilizar é o hexágono ($n = 6$) e este constitui uma pavimentação com a menor quantidade de um mesmo tipo de polígono regular, com três hexágonos. No caso em que $i = 90^\circ$, é possível formar uma pavimentação com quatro quadrados.

Note-se que, por exemplo, o ângulo interno de um pentágono regular é

$$i = \frac{(5 - 2)180^\circ}{5} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ,$$

que não é divisor de 360° pelo que não é possível formar uma pavimentação utilizando apenas pentágonos regulares (Figura 4).

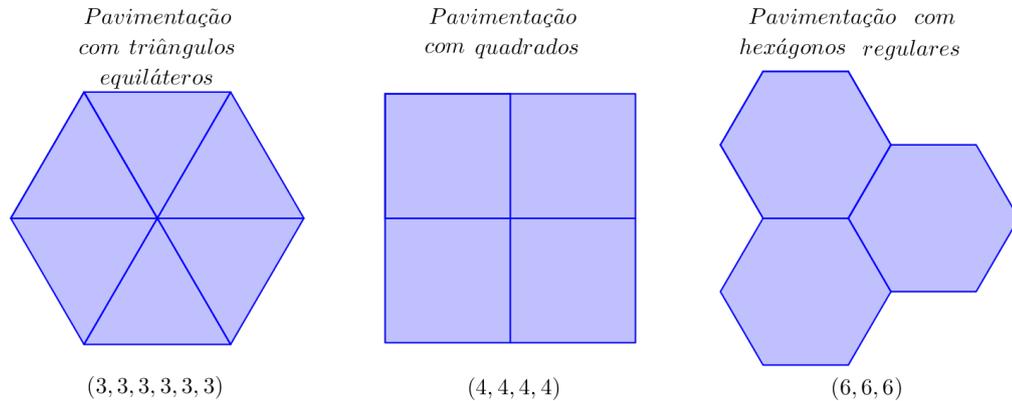
Figura 4 – Pentágonos regulares não formam uma pavimentação regular



Fonte: O autor, 2019

Assim, os polígonos regulares capazes de formar uma pavimentação são triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares (Figura 5). Para representar as pavimentações por polígonos regulares, pelos polígonos que a geram utilizamos a notação $(\underbrace{n, n, \dots, n}_k)$, onde n é o número de lados dos polígonos usados na pavimentação e esse número repete-se a quantidade k de vezes que o polígono aparece no arranjo e na ordem que aparecem ao redor dos vértices. Por exemplo, a pavimentação formada por seis triângulos equiláteros pode ser representada pela notação $(3,3,3,3,3,3)$.

Figura 5 – Pavimentações regulares



Fonte: O autor, 2019

Além das pavimentações regulares, existem também as semi-regulares, formadas por mais de um tipo de polígono regular. As pavimentações semi-regulares são classificadas de acordo com o número de arranjos que possuem em sua formação. As 1-uniformes são formadas por um único tipo de arranjo, as 2-uniformes são formadas por dois tipos de arranjos e, assim sucessivamente.

Em seguida irá ver-se o que ocorre se forem considerados diferentes tipos de polígonos regulares. Repare-se que $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$, pode ser escrito como: $180^\circ \left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

Se três polígonos de lados n_1 , n_2 e n_3 , se unem ao redor de um vértice formando um arranjo, então:

$$180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) = 360^\circ \iff$$

$$\left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) = 2 \iff$$

$$3 - \left(\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{2}{n_3}\right) = 2 \iff$$

$$\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{2}{n_3} = 1 \iff$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

Podemos representar as possíveis soluções para a equação de forma análoga à representação de pavimentações formadas por polígonos regulares. Por exemplo, um arranjo (4,8,8), indica por sua notação que ao redor de cada vértice teremos um quadrado e dois octógonos. Ora, soluções possíveis para a equação são (6,6,6), (5,5,10), (4,5,20), (4,6,12), (4,8,8), (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18), (3,10,15) e (3,12,12). Esses são os possíveis arranjos utilizando três polígonos regulares. A primeira solução apresentada é o caso da pavimentação regular por hexágonos.

Para arranjos utilizando quatro polígonos regulares, podemos realizar o procedimento análogo ao anterior. Assim, para $n = 4$ obtemos

$$180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_4}\right) = 360^\circ \iff$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

As soluções possíveis para um arranjo com quatro polígonos são $(4,4,4,4)$, $(3,3,4,12)$, $(3,6,3,6)$ e $(3,4,4,6)$. A primeira solução apresentada é o caso da pavimentação regular por quadrados.

Para arranjos utilizando cinco polígonos regulares ($n = 5$) obtemos

$$180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_4}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_5}\right) = 360^\circ$$

$$\iff \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$$

As soluções possíveis para um arranjo com cinco polígonos são $(3,3,3,3,6)$ e $(3,3,3,4,4)$.

Para arranjos utilizando seis polígonos regulares ($n = 6$) obtemos

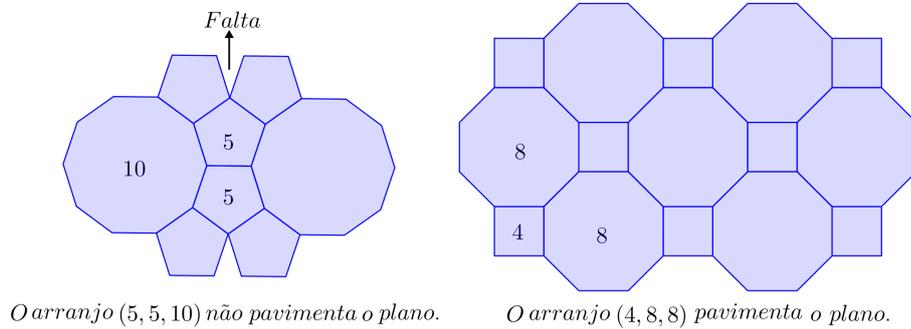
$$180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_4}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_5}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n_6}\right) = 360^\circ$$

$$\iff \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = 2$$

A única solução possível para um arranjo com seis polígonos é $(3,3,3,3,3,3)$, que é a pavimentação regular com triângulos.

Cada uma das soluções anteriores descreve um arranjo em torno de um nó, mas ao tentar construir as pavimentações correspondentes, percebe-se que nem todas elas permitem cobrir o plano a ponto de formar uma pavimentação (Figura 6).

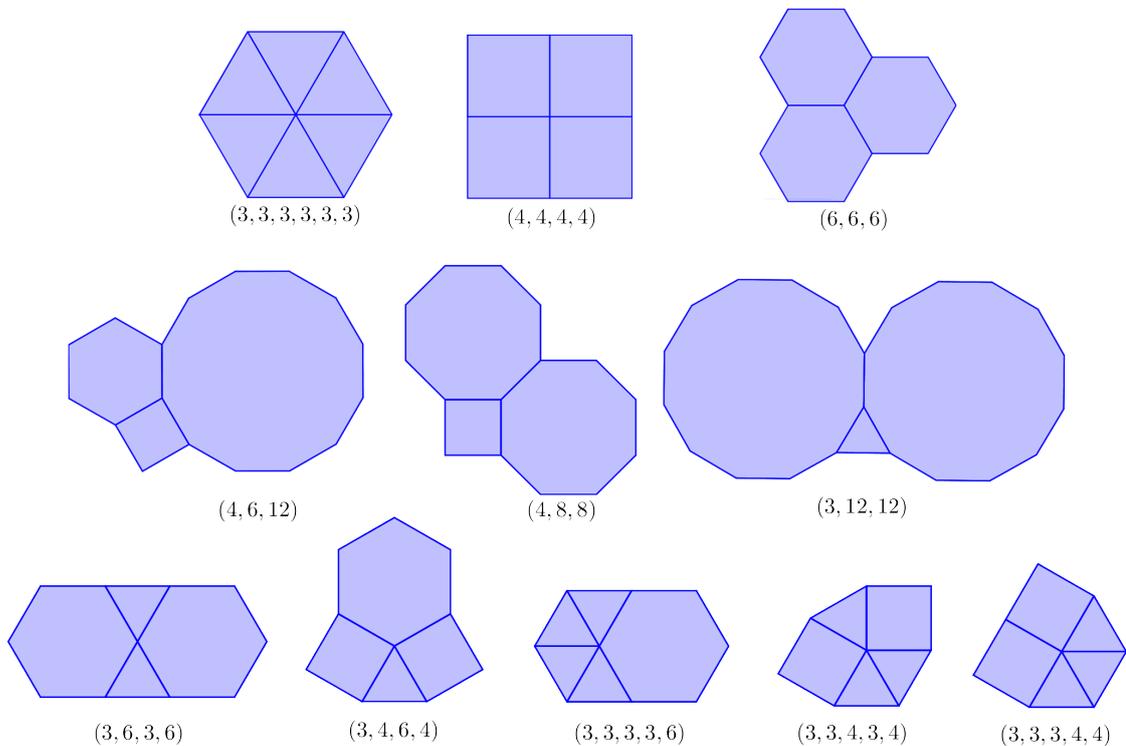
Figura 6 – Nem todo arranjo pavimenta o plano



Fonte: O autor, 2019

Assim, verifica-se que, de todas as soluções encontradas, apenas onze permitem pavimentar o plano (Figura 7). Como referido anteriormente, temos três pavimentações regulares formadas por um arranjo de polígonos regulares: $(3,3,3,3,3,3)$, $(4,4,4,4)$ e $(6,6,6)$. Das pavimentações semirregulares temos: $(4,6,12)$, $(4,8,8)$, $(3,12,12)$, $(3,6,3,6)$, $(3,4,6,4)$, $(3,3,3,3,6)$, $(3,3,4,3,4)$ e $(3,3,3,4,4)$ também formadas por um único arranjo de polígonos regulares.

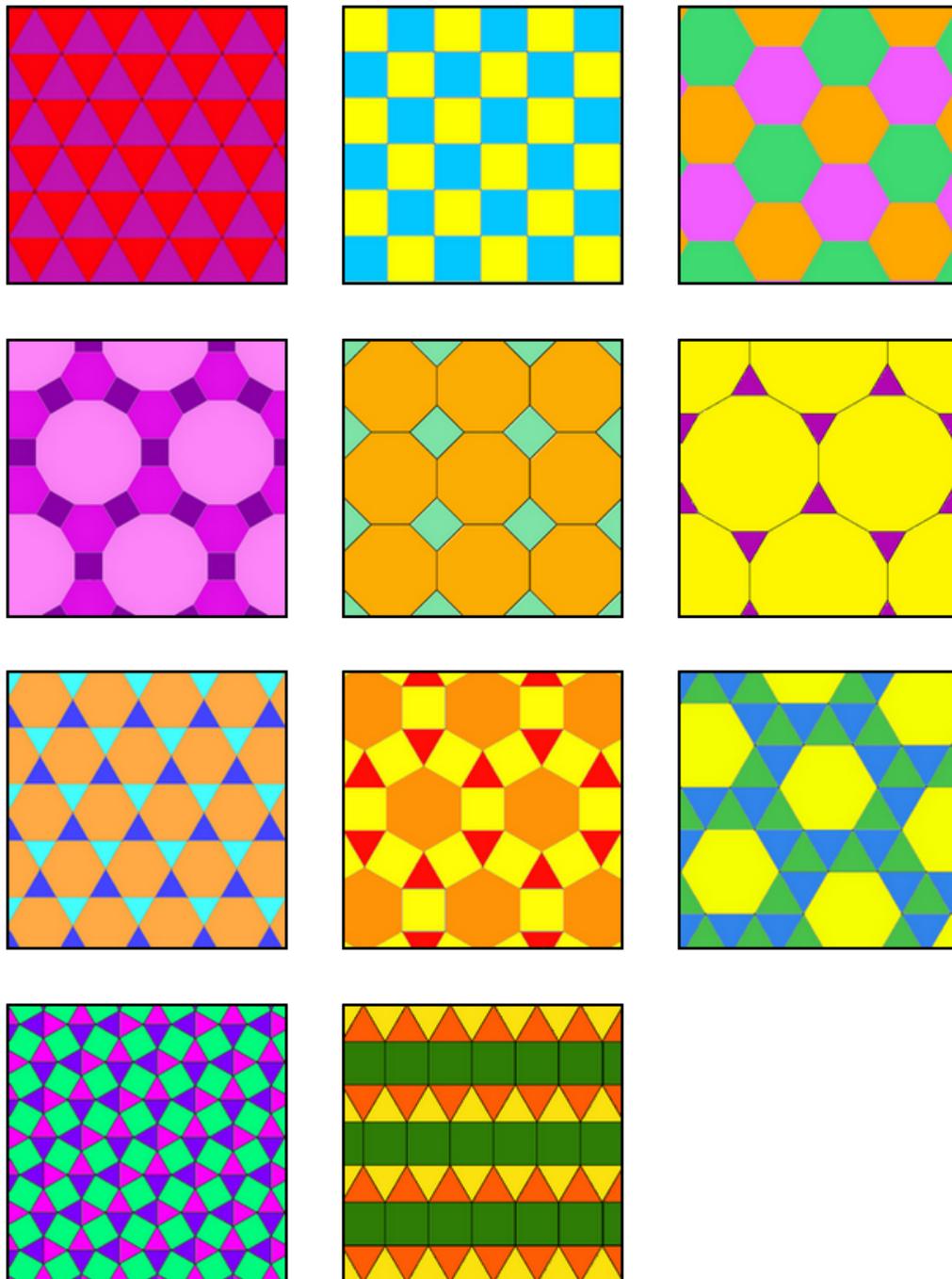
Figura 7 – Arranjos que pavimentam o plano



Fonte: O autor, 2019

As pavimentações encontradas, por Johannes Kepler são representadas na figura seguinte (Figura 8):

Figura 8 – As onze pavimentações descobertas por Johannes Kepler



Fonte: O autor, 2019

4 SIMETRIA

De maneira simples, simetria é a invariância de uma figura/forma sob determinadas transformações. Murari e Barbosa (2012, p. 15) definem que “o conceito de simetria é relacionado ao atributo de uma forma (ou configuração) que, sob transformações mantém-se constante alterando-se apenas a posição dos seus elementos constitutivos”.

Em matemática o conceito de simetria vai além desta noção comum, sendo particularmente explorada no tratamento das isometrias, gráficos de funções, parábolas, eixos de simetria de figuras geométricas, etc. As simetrias não estão relacionadas apenas a matemática, elas estão presentes na matemática, na natureza, na física, na arte e na arquitetura.

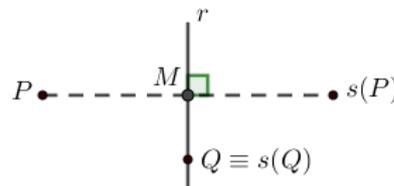
As simetrias podem ser de diferentes tipos, tais como: axiais ou de reflexão, translação, rotação ou centrais e de inversão. Porém, no presente trabalho serão consideradas apenas as simetrias de reflexão e centrais, uma vez que constituem conceitos essenciais ao estudo das reflexões em caleidoscópios.

4.1 Reflexão

A simetria de reflexão, ou simplesmente reflexão, está relacionada à ideia de um eixo, denominado eixo de simetria, que corresponde à mediatriz do segmento que une dois pontos. O eixo de simetria divide a figura em duas partes iguais que podem se sobrepor. De maneira formal podemos definir reflexão.

Reflexão: Sejam uma reta r e um ponto P do plano. Se $P \notin r$, seja o ponto $P' = s(P)$ tal que a reta r é a mediatriz do segmento PP' ; se $P \in r$, seja o ponto $P' = s(P) \equiv P$. (Figura 9).

Figura 9 – Reflexão $P \notin r$ e $Q \in r$



Fonte: O autor, 2019

O ponto P' diz-se o simétrico do ponto P em relação à reta r .

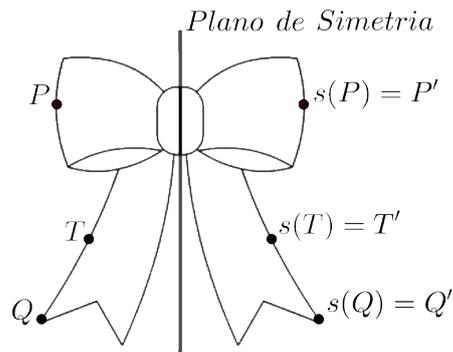
Decorre da definição que, $\overline{PP'} \perp r$ e a distância de P a r é igual à distância de P' a r , isto é, $\overline{PM} = \overline{MP'}$. Podemos reescrever $\overline{PP'}$ como o par (P, P') .

O simétrico do ponto simétrico de um ponto é o próprio ponto $s(s(P)) = P$.

Seja \mathcal{F} uma figura. Se existe uma reta r tal que para qualquer ponto $P \in \mathcal{F}$ existe um ponto $P' \in \mathcal{F}$ com $P' = s(P)$, então a figura \mathcal{F} diz-se **simétrica**.

Em um objeto simétrico todos os seus pontos possuem seus respectivos simétricos, então $s(P) = P'$, $s(Q) = Q'$ e $s(T) = T'$ (Figura 10).

Figura 10 – Simetria num laço



Fonte: O autor, 2019

A simetria não se dá apenas em um ponto, mas no conjunto de pontos da figura, preservando assim as distâncias (isometria). Segundo, Murari e Barbosa (2012, p. 14), “isometria é uma transformação geométrica entre pontos do plano (ou do espaço) que preserva distâncias, isto é, se (P, P') e (Q, Q') são pares de pontos correspondentes pela transformação, temos que $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ ”.

A reflexão é uma isometria.

Prova:

Dados uma reta r e um segmento \overline{AB} , vamos ver que, sendo A' e B' os simétricos de A e B em relação a r , então $\overline{A'B'}$, simétrico de \overline{AB} , é tal que $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. De fato:

- Se $A \in r$ e $B \in r$, da definição decorre que $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$.
- Se $A \notin r$ e $B \notin r$, então, existem pontos, M e N em r tais que $\overline{A'M} = \overline{AM}$ e $\overline{B'N} = \overline{BN}$.

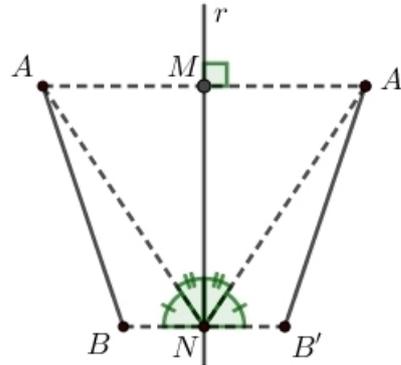
Considere os triângulos $\triangle AMN$ e $\triangle A'MN$.

Como $\overline{AM} = \overline{A'M}$ e $\widehat{AMN} = \widehat{A'MN} = 90^\circ$, segue que $\triangle AMN \cong \triangle A'MN$ (caso *LAL*), com $\overline{NA} = \overline{NA'}$ e $\widehat{MNA} = \widehat{MNA'}$ (Figura 11).

Como $\widehat{MNB} = \widehat{MNB'} = 90^\circ$, segue que $\widehat{ANB} = \widehat{A'NB'}$.

De $\overline{BN} = \overline{B'N}$ e $\widehat{ANB} = \widehat{A'NB'}$, temos que $\triangle ANB \cong \triangle A'NB'$ (caso *LAL*), assim $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Figura 11 – Simetria de um segmento

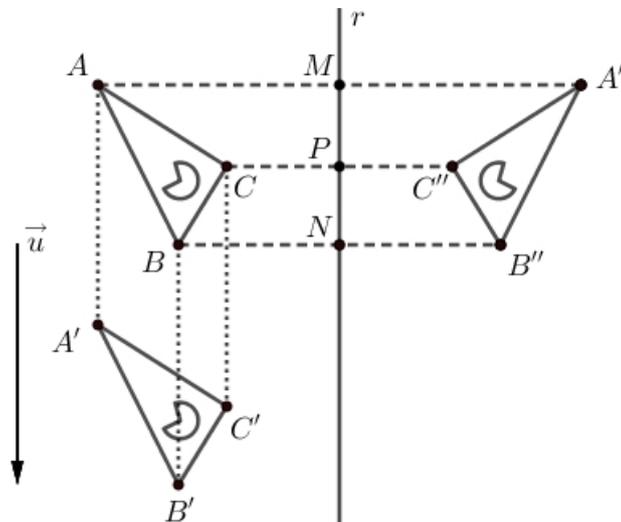


Fonte: O autor, 2019

- Se $A \notin r$ e $B \in r$ (ou $A \in r$ e $B \notin r$), basta ter em atenção que $N \equiv B$ (ou $M \equiv A$) e a igualdade segue.

Como foi visto, a reflexão conserva distâncias, tratando-se de uma isometria. Uma isometria conserva a forma de um objeto, gerando apenas figuras congruentes, isto é, que coincidem perfeitamente havendo apenas uma mudança de posição ou de movimento no objeto ou de orientação. Segundo Murari e Barbosa (2012) as mudanças nas posições de um objeto, que ocorrem na isometria, podem ser de: reflexão, rotação, translação e translação refletida. Observe-se a figura seguinte onde se tem uma reta r e um triângulo escaleno $\triangle ABC$ (Figura 12).

Figura 12 – Transformações em um triângulo



Fonte: O autor, 2019

Podem observar-se, ainda duas figuras isométricas ao triângulo dado, obtidas por:

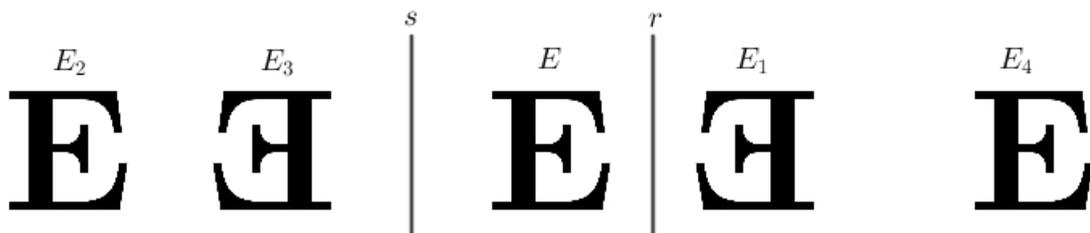
- Uma translação que transforma o triângulo $\triangle ABC$ no triângulo congruente $\triangle A'B'C'$, obtido pelo deslocamento do triângulo $\triangle ABC$ na direção de \vec{u} .
- Uma reflexão que transforma o triângulo $\triangle ABC$ no triângulo congruente $\triangle A''B''C''$.

Em ambos os casos as medidas das amplitudes dos ângulos e dos comprimentos das arestas do triângulo $\triangle ABC$ são preservadas. É de fácil percepção que a primeira transformação se estabelece com o deslocamento do triângulo $\triangle ABC$, já na segunda transformação é impossível que esta seja realizada apenas com o deslocamento do triângulo $\triangle ABC$, sem que este saia do plano, uma vez que existe inversão do sentido (horário e anti-horário) dos ângulos do triângulo.

Podemos considerar também, o caso de ter mais do que um eixo de reflexão, por exemplo, dois eixos paralelos.

Dadas as retas r e s , ambas eixos de reflexão, e uma figura original, chamada de E , localizada entre r e s , obtém-se a imagem formada de E , pela reflexão por r , E_1 . Essa imagem E_1 , por sua vez, passa a ser objeto para a reflexão por s , produzindo então E_2 , que por sua vez será objeto para a reflexão por r , e assim sucessivamente. Da mesma forma, a imagem de E pela reflexão por s é E_3 , que por sua vez passará a ser objeto para a reflexão por r , produzindo E_4 , e assim sucessivamente. Dessa forma, são geradas infinitas imagens (Figura 13). A composta de duas reflexões de espelhos paralelos é uma translação associada a um vetor perpendicular à direção dos espelhos, com sentido do primeiro espelho considerado para o segundo e com comprimento igual ao dobro da distância entre os espelhos.

Figura 13 – Reflexão de E pelos eixos r e s



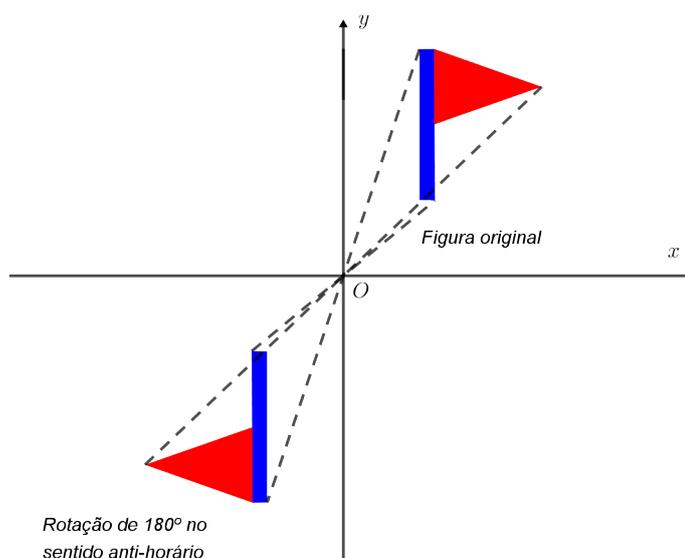
Fonte: O autor, 2019

4.2 Simetria Central ou Rotação

Na simetria central, segundo (MURARI; BARBOSA, 2012, p. 17) existe “um ponto fixo, chamado de centro de simetria, em relação ao qual um ponto, objeto ou parte de um objeto pode ser girado, de maneira que, por um determinado número de vezes, esses

elementos coincidem um com o outro”. Dado um sistema de eixos cartesianos xy e uma figura localizada no primeiro quadrante, se efetuarmos uma rotações na figura original, no sentido anti-horário, em relação à interseção dos eixos, O , por um ângulo de 180° teremos uma simetria central da figura original, isto é, a figura manterá sua forma, dimensões e orientação dos ângulos, sendo apenas rotacionada por um ângulo de 180° ao redor de um centro (Figura 14).

Figura 14 – Simetria central por determinados ângulos



Fonte: O autor, 2019

4.3 Espelhos

Segundo Murari e Barbosa (2012, p. 27) ao colocarmos uma figura num plano, à frente e num plano perpendicular a um espelho plano, obteremos o simétrico dessa figura em relação ao espelho, devido ao fenômeno da reflexão. Tendo em vista que a utilização de espelhos se assemelha à utilização de eixos de reflexão, gerando os mesmo efeitos sobre um mesmo objeto e que o presente trabalho foi realizado utilizando espelhos planos, será utilizada também a nomenclatura espelho, a partir deste ponto.

O incentivo ao uso de espelhos no estudo de simetrias, por estimularem a aprendizagem, provocarem o desenvolvimento e despertarem interesse é ressaltado em Batistela (2005).

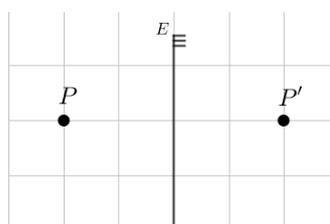
O fenômeno da reflexão que obedece às leis da reflexão da ótica geométrica faz com que, dada uma figura qualquer num plano, colocada à frente e perpendicularmente a um espelho plano, obtenha-se o simétrico da figura em relação ao espelho. O espelho funciona como uma linha de simetria, e, dessa maneira, promovem-se situações de aprendizagem exploratórias de propriedades e conceitos geométricos. (BATISTELA, 2005, p. 29)

Murari e Barbosa (2012, p. 28) afirmam que “o uso de um espelho permite situações de aprendizagem interessantes, oportunizando circunstâncias adequadas e favoráveis para que o ensino se desenvolva de uma maneira informal, promovendo e aguçando a visualização do espaço”.

4.3.1 Utilização de um espelho plano

Ao colocar um ponto P na frente de um espelho plano, será gerada a imagem P' , de P . A imagem de P' é o reflexo de P por meio do espelho E (Figura 15), tal como ocorre na definição de reflexão de um ponto.

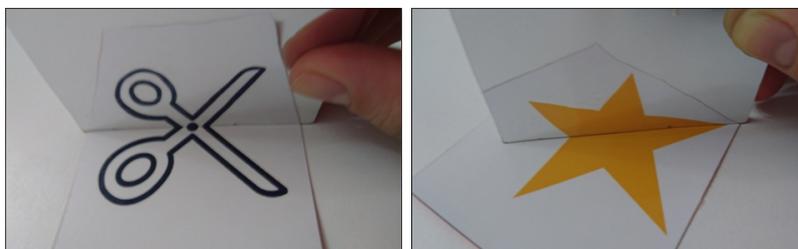
Figura 15 – Reflexão do ponto P por um espelho E



Fonte: O autor, 2019

Existem figuras que possuem eixos de simetria, podendo ser geradas apenas com sua metade e um eixo. Esse processo também pode ser realizado com os espelhos, uma vez que estes apresentam em sua reflexão as mesmas propriedades da reflexão geométrica. Existem ainda, figuras que possuem mais do que um eixo de simetria (Figura 16).

Figura 16 – Eixos de simetria de figuras



Fonte: O autor, 2019

Uma figura colocada à frente de um eixo de simetria gera uma imagem isométrica, com orientação invertida, isto é, se a orientação da figura inicial é no sentido anti-horário, a imagem gerada pela simetria possuirá sentido horário, e vice-versa. Essa propriedade em que a orientação se altera na reflexão, também ocorre em espelhos planos. Qualquer figura

posicionada à frente de um espelho plano produzirá uma imagem de orientação invertida através da reflexão no espelho. A seta à frente do espelho, na figura abaixo (Figura 17), possui sentido anti-horário e a imagem gerada pelo espelho possui sentido horário. O mesmo ocorre nas demais figuras, isto é, nas reflexões por espelhos planos o sentido dos ângulos das figuras refletidas é invertido.

Figura 17 – Exemplos de mudanças na orientação dos ângulos de figuras refletidas



Fonte: O autor, 2019

4.3.2 Utilização de dois espelhos planos

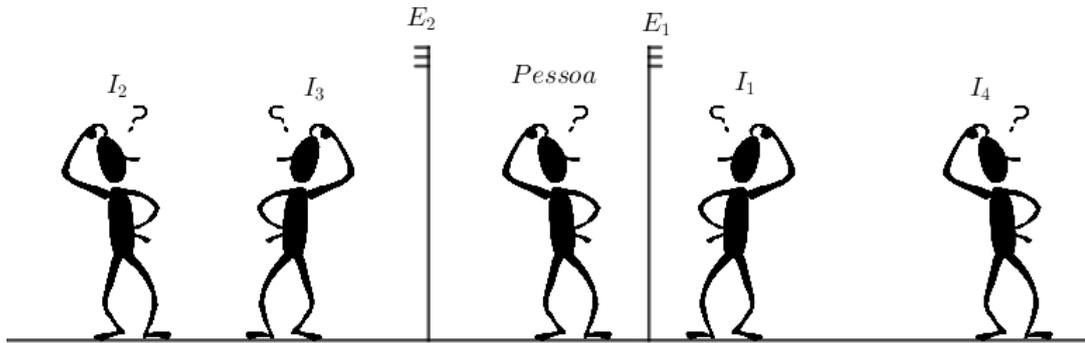
Dois espelhos planos produzem cenários propícios para a exploração de conceitos matemáticos. Ao utilizar dois espelhos planos têm-se duas configurações possíveis, espelhos planos paralelos e espelhos planos articulados formando ângulos.

4.3.2.1 Dois espelhos planos paralelos

Dois espelhos planos e paralelos dispostos frente a frente com as faces espelhadas voltadas para o interior produzem infinitas reflexões.

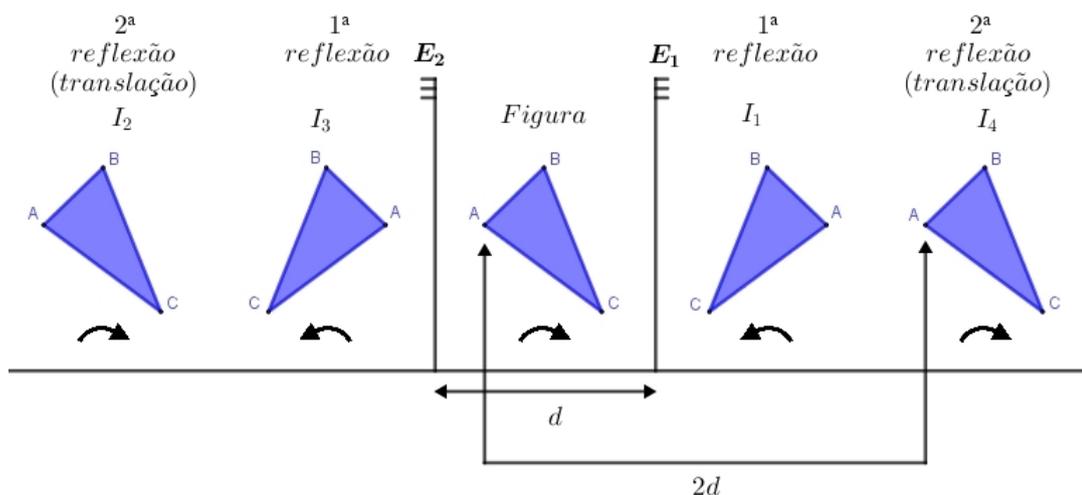
Na situação ilustrada pela (Figura 18) tem-se dois espelhos E_1 e E_2 planos e paralelos, com faces espelhadas voltadas para o interior, e uma pessoa posicionada entre eles. Os dois espelhos geram a imagem I_1 , formada pela pessoa no espelho E_1 , e a imagem I_3 , gerada pelo espelho E_2 . Essa imagem I_1 , por sua vez, passa a ser objeto para E_2 , produzindo então I_2 , que por sua vez passa a ser objeto para E_1 , gerando outra imagem e assim sucessivamente. Da mesma forma, a imagem I_3 , por sua vez será objeto para E_1 , produzindo I_4 , que por sua vez será objeto de E_2 , gerando outra imagem e assim sucessivamente. Ocorre que quando dois espelhos são dispostos frente a frente, de forma paralela, são geradas infinitas imagens pelos espelhos.

Figura 18 – Imagens refletidas por espelhos planos paralelos



Fonte: O autor, 2019

Os espelhos assim colocados despertam a atenção dos alunos, inspirando a observação e o raciocínio relativo ao conceito de reflexão. Manipular os espelhos paralelos e as figuras que darão origem às demais imagens permite ao aluno observar e inferir sobre o comportamento dos objetos frente aos espelhos. Os alunos ainda podem se aperceber de um fenômeno associado à ideia de infinito, que para muitos é um conceito muito abstrato e que até ao momento ficava no campo do imaginário. A composição de duas reflexões paralelas conserva a orientação inicial já que é o mesmo que uma translação. (Figura 19).

Figura 19 – Espelhos E_1 e E_2 paralelos e frente a frente

Fonte: O autor, 2019

As primeiras reflexões, em cada um dos espelhos, invertem o sentido da figura. As primeiras reflexões, por sua vez, serão refletidas novamente em cada um dos dois espelhos gerando as segundas reflexões, que terão sentido inverso das primeiras reflexões, isto é,

terão o mesmo sentido da figura original. Analisando as reflexões pelo par de espelhos, tem-se que as reflexões de ordem ímpar invertem os sentidos da figura original, enquanto que as reflexões de ordem par preservam o sentido da figura original.

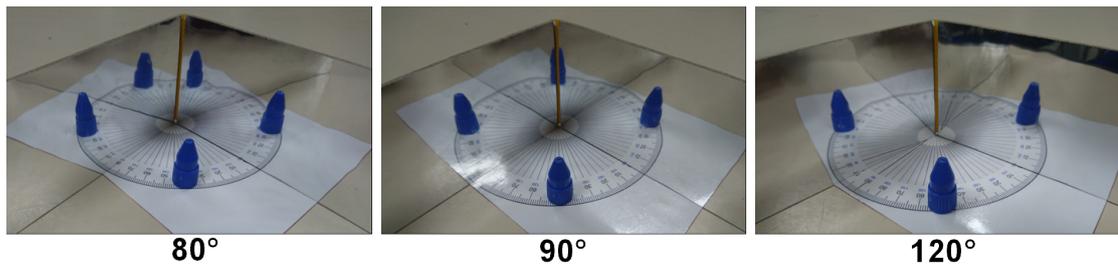
Em relação às infinitas imagens geradas pelos espelhos planos paralelos, elas ocorrem devido à reflexão de um espelho no outro, surgindo espelhos virtuais que atuam como se fossem os espelhos originais. Os espelhos virtuais refletem as imagens dos espelhos reais, desta forma, as imagens geradas são sempre reflexões dos espelhos virtuais nos espelhos originais. Como os espelhos são paralelos esta situação ocorre infinitamente.

4.3.2.2 Dois espelhos planos articulados

Dois espelhos planos articulados com as faces refletoras voltadas para o interior formando ângulos geram sucessivas imagens refletidas, de objetos situados no interior dos espelhos. A variação do ângulo entre os espelhos permite o estudo de inúmeros conceitos matemáticos, como a noção de polígonos regulares, simetria, pavimentação, reflexão, entre outros.

Na reflexão de um espelho no outro, são gerados espelhos virtuais, que geram reflexões. Diferentemente dos espelhos paralelos, nos espelhos articulados o número de imagens geradas é determinado de acordo com o ângulo de abertura entre os espelhos, que varia de 0° a 180° . À medida que o ângulo formado entre os espelhos diminui, aproximando-se de 0° o número de reflexões aumenta, tornando-se muito grande (Figura 20).

Figura 20 – Reflexões com ângulos variados entre os espelhos articulados



Fonte: O autor, 2019

O número de imagens a serem geradas, segundo Barbosa (1957) é obtido pela fórmula:

$$n = \frac{360^\circ - R}{\hat{z}} + n'$$

onde n é o número de imagens a serem geradas, \hat{z} é o ângulo formado entre os espelhos, \hat{x} é o ângulo formado entre o objeto P e o espelho E_1 , \hat{y} é o ângulo formado entre o objeto P e o espelho E_2 , ($\hat{x} + \hat{y} = \hat{z}$), R é o resto da divisão de 360° por $2\hat{z}$ e:

$$n' = \begin{cases} -1, & \text{se } R = 0, \\ 0, & \text{se } 0 < R \leq 2\hat{x}, \\ 1, & \text{se } 2\hat{x} < R \leq 2\hat{y}, \\ 2, & \text{se } 2\hat{y} < R < 2\hat{z}. \end{cases}$$

Dado um ponto P localizado entre as faces espelhadas de dois espelhos articulados E_1 e E_2 .

Seja $\widehat{AP} = \hat{x}$ e $\widehat{PB} = \hat{y}$ os ângulos formados entre o espelhos E_1 e o ponto P e, o ponto P e o espelho E_2 , respectivamente.

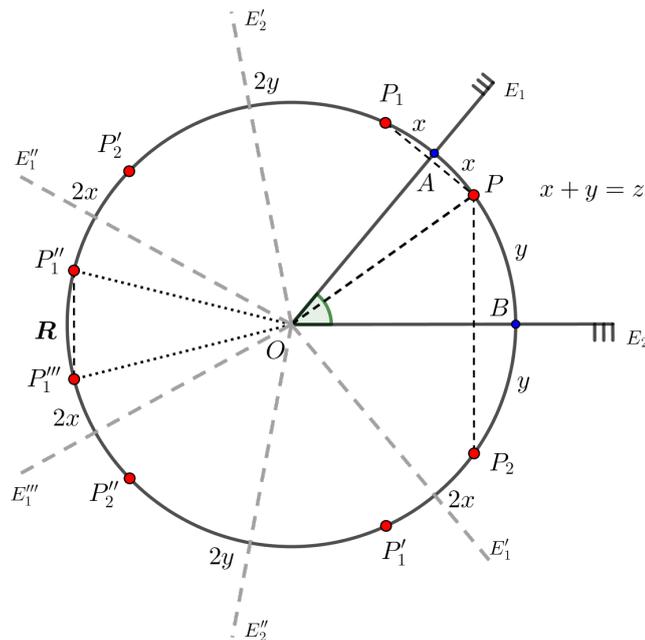
Então, o ponto P e as imagens produzidas pelos espelhos pertencem a uma circunferência, pois $m(\overline{OP}) = m(\overline{OP}'_1) = m(\overline{OP}'_2)$, uma vez que P'_1 e P'_2 são imagens obtidas pela reflexão de P através dos espelhos E_1 e E_2 .

P_1 é a imagem de P por E_1 , P_2 é a imagem de P por E_2 , por sua vez, P'_1 é a imagem de P_1 por E_2 e P'_2 é a imagem de P_2 por E_1 e assim sucessivamente. Pela isometria reflexional tem-se que $m(\overline{PP}'_1) = 2\hat{z}$ e $m(\overline{PP}'_2) = 2\hat{z}$. Assim como, $P_1P''_1 = P_2P''_2 = 2\hat{z}$, sucessivamente.

Considerando que as imagens refletidas aparecem de forma alternada a partir de P com medidas de $2\hat{x}$ e $2\hat{y}$, é fácil perceber que as imagens só coincidirão se na divisão de 360° por $2\hat{x} + 2\hat{y} = 2\hat{z}$, obtermos resto zero, isto é $R = 0$.

No caso de $R \neq 0$, as imagens não se coincidirão, formando-se atrás do espelho, como no caso da figura anterior (Figura 21), com os pontos P''_1 e P'''_1 .

Figura 21 – Ponto P entre espelhos articulados

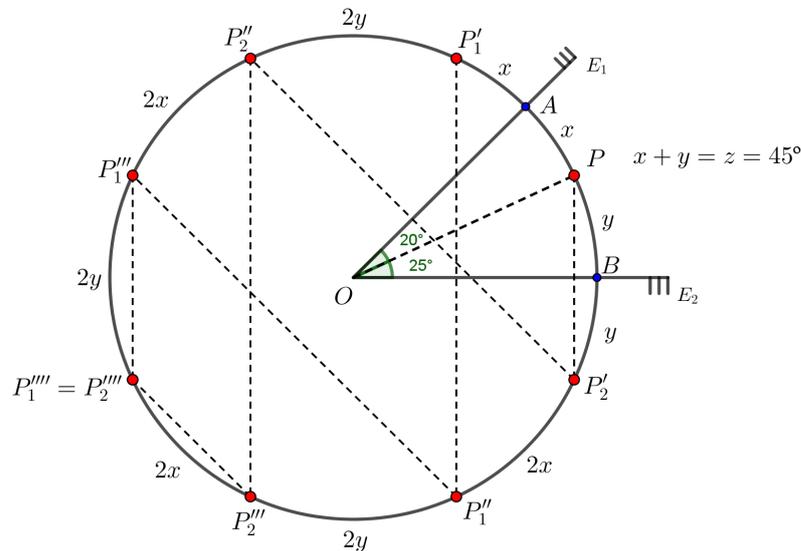


4.3.2.2.1 Dois espelhos planos articulados formando ângulos cujo dobro divide 360°

Para espelhos planos formando ângulos cujo dobro divide 360° , isto é, $2\hat{z}$ é um divisor de 360° , temos os seguintes casos para ângulos inteiros entre os espelhos: $\hat{z} = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 10^\circ, 12^\circ, 15^\circ, 18^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 36^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ e 180° . Em todos esses casos temos que $2\hat{z}$ divide 360° então $R = 0$ e $n' = -1$. A seguir são dados alguns exemplos:

Exemplo 1 *Caso em que $\hat{x} = 20^\circ$ e $\hat{y} = 25^\circ$, formando um ângulo de 45° entre os espelhos E_1 e E_2 (Figura 22).*

Figura 22 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 45° , em que $\hat{x} = 20^\circ$ e $\hat{y} = 25^\circ$



Fonte: O autor, 2019

Neste caso, temos que $\hat{z} = 45^\circ$ então $R = 0$, pois $\frac{360^\circ}{90^\circ} = 4$. Com isso, $n' = -1$.

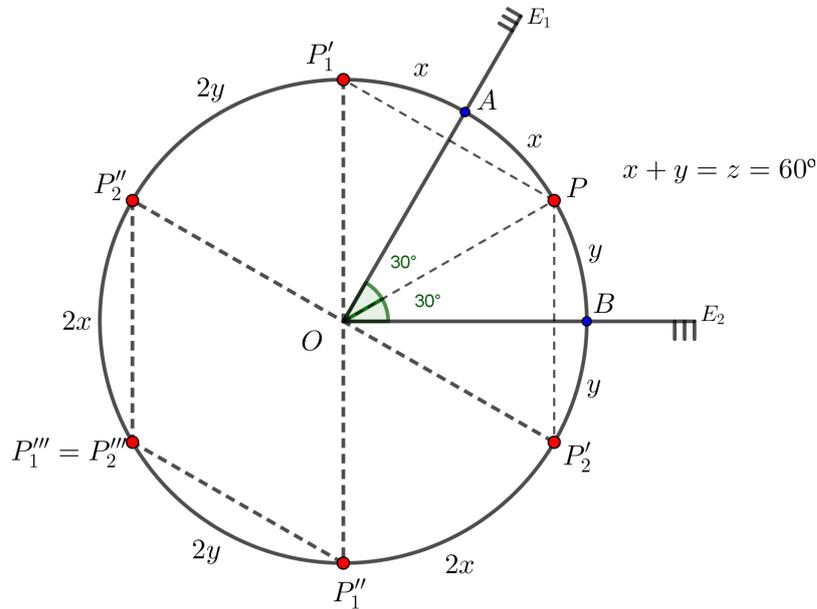
Assim,

$$n = \frac{360^\circ - 0}{45^\circ} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Note que os espelhos gerarão sete imagens refletidas e que ocorre a coincidência de imagens em $P_1''' = P_2''''$. Esta coincidência de imagens deve-se ao fato das imagens estarem distribuídas na circunferência de acordo com os arcos $2x$ e $2y$, alternadamente.

Exemplo 2 Caso em que $\hat{x} = 30^\circ$ e $\hat{y} = 30^\circ$, isto é, $\hat{x} = \hat{y}$, formando um ângulo de 60° entre os espelhos E_1 e E_2 (Figura 23).

Figura 23 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 60° , em que $\hat{x} = \hat{y}$



Fonte: O autor, 2019

Neste caso, temos o ponto P localizado na bissetriz do ângulo $\hat{z} = 60^\circ$ com $R = 0$, pois $\frac{360^\circ}{120^\circ} = 3$. Com isso, $n' = -1$.

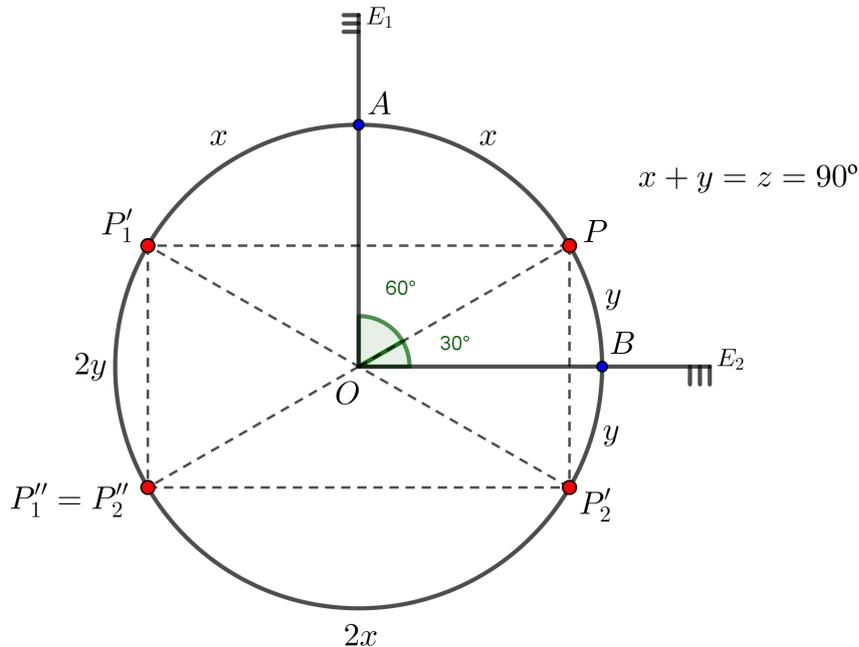
Assim,

$$n = \frac{360^\circ - 0}{60^\circ} - 1 = 6 - 1 = 5.$$

Note que os espelhos gerarão cinco imagens refletidas e que ocorre coincidência de imagens em $P_1''' = P_2'''$.

Exemplo 3 Caso em que $\hat{x} = 60^\circ$ e $\hat{y} = 30^\circ$, formando um ângulo de 90° entre os espelhos E_1 e E_2 (Figura 24).

Figura 24 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 90°



Fonte: O autor, 2019

Neste caso, temos que $\hat{z} = 90^\circ$ então $R = 0$, pois $\frac{360^\circ}{180^\circ} = 2$. Com isso, $n' = -1$. Assim,

$$n = \frac{360^\circ - 0}{90^\circ} - 1 = 4 - 1 = 3.$$

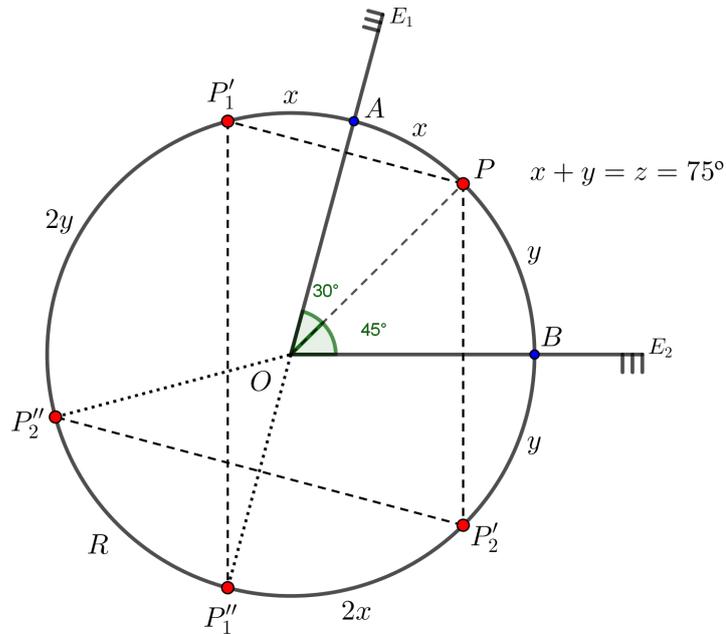
Os espelhos gerarão três imagens refletidas. Repare-se que, neste caso, ao dividir 360° por z , obtém-se o número de imagens mais um (que é o objeto).

4.3.2.2.2 Dois espelhos planos articulados formando ângulo cujo dobro não divide 360°

Para espelhos planos formando ângulo cujo dobro não divide 360° , isto é $2\hat{z}$ não é um divisor de 360° , temos que $R \neq 0$, podendo ocorrer uma das situações, $0 < R \leq 2\hat{x}$ ou $2\hat{x} < R \leq 2\hat{y}$ ou $2\hat{y} < R < 2\hat{z}$ a que correspondem $n' = 0, 1$ ou 2 , respectivamente. A seguir são dados alguns exemplos:

Exemplo 4 Caso em que $\hat{x} = 30^\circ$ e $\hat{y} = 45^\circ$, formando um ângulo de 75° entre os espelhos E_1 e E_2 (Figura 25).

Figura 25 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 75° , em que $\hat{x} = 30^\circ$ e $\hat{y} = 45^\circ$



Fonte: O autor, 2019

Neste caso, temos que $\hat{z} = 75^\circ$ e $0 < R \leq 2\hat{x}$, pois $360^\circ = 2 \times 150^\circ + 60^\circ$. Com isso, $n' = 0$.

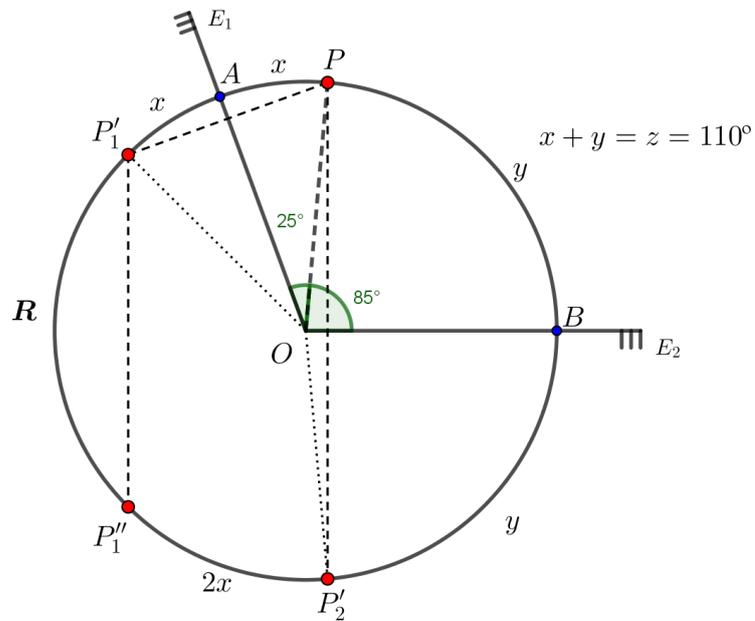
Assim,

$$n = \frac{360^\circ - 60^\circ}{75^\circ} + 0 = 4 + 0 = 4.$$

Os espelhos gerarão quatro imagens refletidas. Neste caso, as imagens não coincidirão, formando-se atrás do espelho, pois $R \neq 0$.

Exemplo 5 Caso em que $\hat{x} = 25^\circ$ e $\hat{y} = 85^\circ$, formando um ângulo de 110° entre os espelhos E_1 e E_2 (Figura 26).

Figura 26 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 110° , em que $\hat{x} = 25^\circ$ e $\hat{y} = 85^\circ$



Fonte: O autor, 2019

Neste caso, temos que $\hat{z} = 110^\circ$ e $2\hat{x} < R \leq 2\hat{y}$, pois $360^\circ = 1 \times 220^\circ + 140^\circ$. Com isso, $n' = 1$.

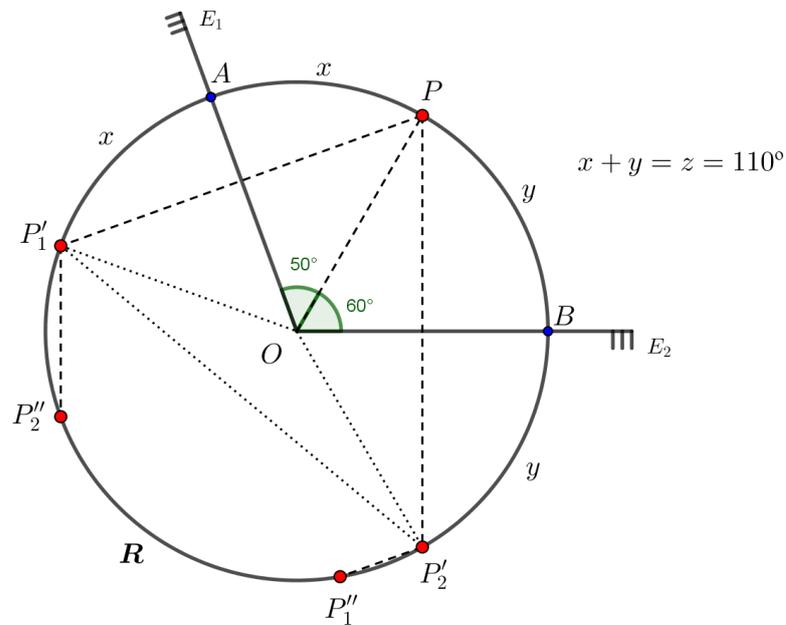
Assim,

$$n = \frac{360^\circ - 140^\circ}{110^\circ} + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Os espelhos gerarão três imagens refletidas.

Exemplo 6 Caso em que $\hat{x} = 50^\circ$ e $\hat{y} = 60^\circ$, formando um ângulo de 110° entre os espelhos E_1 e E_2 (Figura 27).

Figura 27 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 110° , em que $\hat{x} = 50^\circ$ e $\hat{y} = 60^\circ$



Fonte: O autor, 2019

Neste caso, temos que $\hat{z} = 110^\circ$, $2\hat{y} < R < 2\hat{z}$, pois $360^\circ = 1 \times 220^\circ + 140^\circ$. Com isso, $n' = 2$.

Assim,

$$n = \frac{360^\circ - 140^\circ}{110^\circ} + 2 = 2 + 2 = 4.$$

Os espelhos gerarão quatro imagens refletidas.

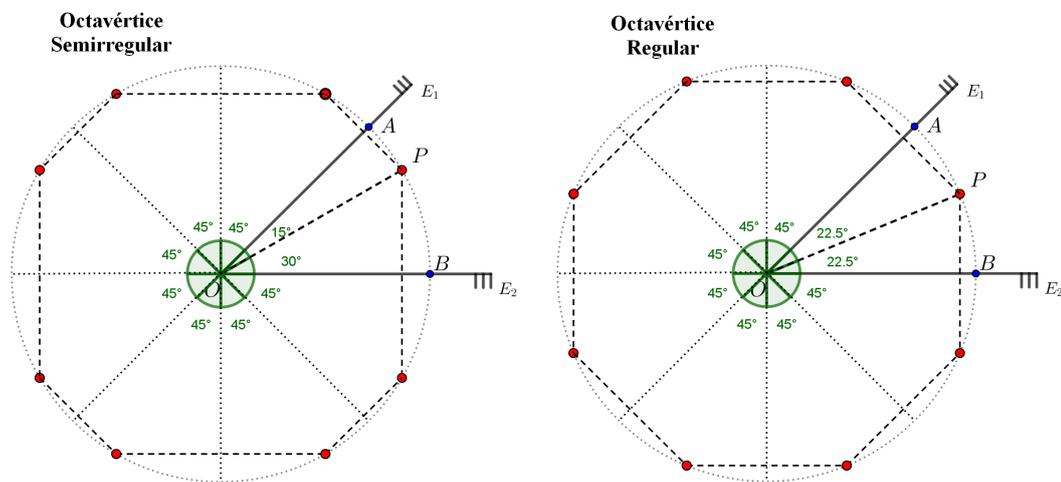
4.3.2.2.3 Polivértice

Ao colocarmos um ponto entre dois espelhos planos articulados, obtemos uma série de pontos virtuais. O conjunto formado pelo ponto-objeto e pelos pontos virtuais é chamado de **polivértice**, e origina um polígono quando se ligam por segmentos de reta os pontos consecutivos. Os polivértices são denominados regulares ou semirregulares de acordo com a classificação do polígono a que dão origem. Sabendo que numa circunferência, a arcos iguais correspondem cordas iguais, e reciprocamente, a classificação dos polivértices fica dependente dos pontos dividirem a circunferência em arcos iguais ou não.

No exemplo 1, visto anteriormente, o ângulo entre os espelhos é de 45° , originando um total de 8 vértices. Seja P um ponto localizado entre dois espelhos planos articulados que formam um ângulo de 45° , então:

- Se P não pertence à bissetriz do ângulo formado entre os espelhos, então será gerado um octavértice semirregular;
- Se P pertencer a bissetriz do ângulo formado entre os espelhos, será formado um octavértice regular (Figura 28).

Figura 28 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 45° , produz octavértices

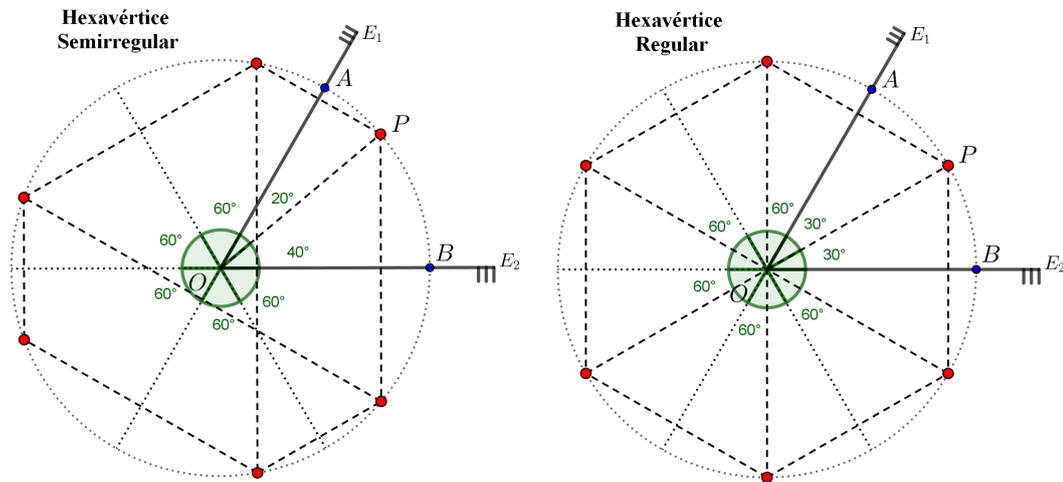


Fonte: O autor, 2019

No exemplo 2, o ângulo entre os espelhos é de 60° , e tem-se um total de 6 vértices. Seja P um ponto localizado entre dois espelhos planos articulados que formam um ângulo de 60° , então:

- Se P não pertence à bissetriz do ângulo formado entre os espelhos, então será gerado um hexavértice semirregular;
- Se P pertencer a bissetriz do ângulo formado entre os espelhos, será formado um hexavértice regular (Figura 29).

Figura 29 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 60° , produz hexavértices

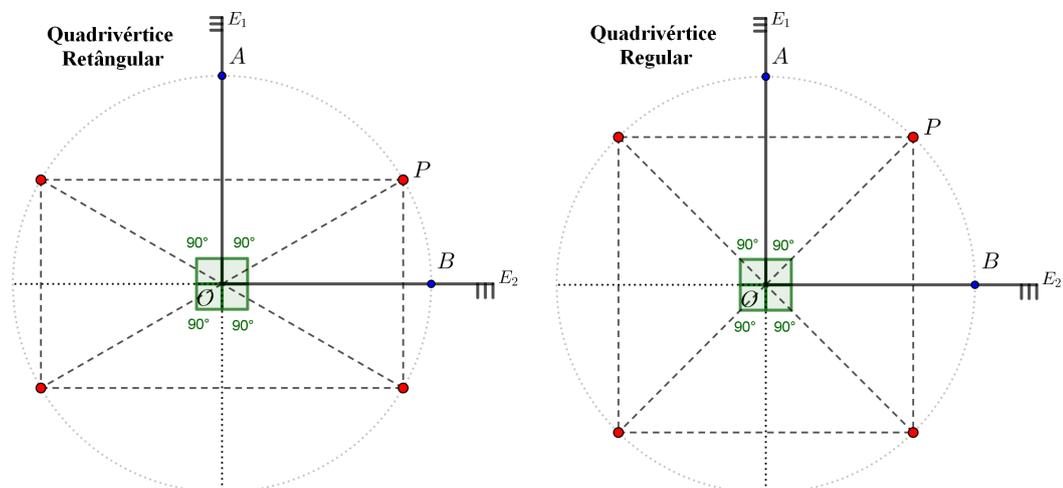


Fonte: O autor, 2019

No exemplo 3, o ângulo entre os espelhos é de 90° , formando um total de 4 vértices. Seja P um ponto localizado entre dois espelhos planos articulados que formam um ângulo de 90° , então:

- Se P não pertence à bissetriz do ângulo formado entre os espelhos, então será gerado um quadrivértice retângular;
- Se P pertencer a bissetriz do ângulo formado entre os espelhos, será formado um quadrivértice regular (Figura 30).

Figura 30 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 90° , forma quadrivértices

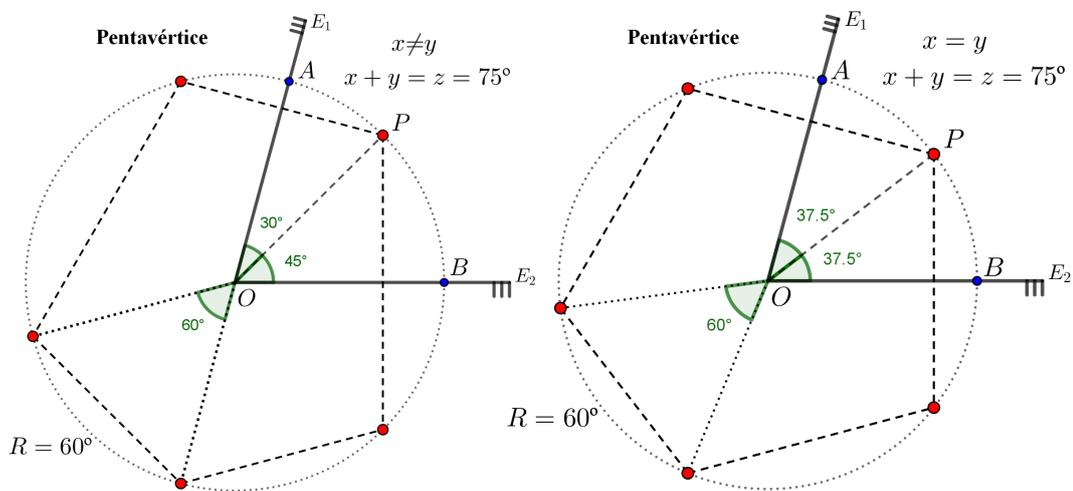


Fonte: O autor, 2019

Caso o ângulo entre dois espelhos não seja divisor de 360° , o polígono obtido nunca será regular. Vejamos o que ocorre no exemplo 4, em que o ângulo entre os espelhos é de 75° , dando origem a um total de 5 vértices. Seja P um ponto localizado entre dois espelhos:

- Se P pertence à bissetriz do ângulo formado pelos espelhos, então será obtido um pentavértice com 4 lados iguais e o lado que se opõe a P com medida diferente;
- caso contrário, o pentágono pode não ter lados iguais (Figura 31).

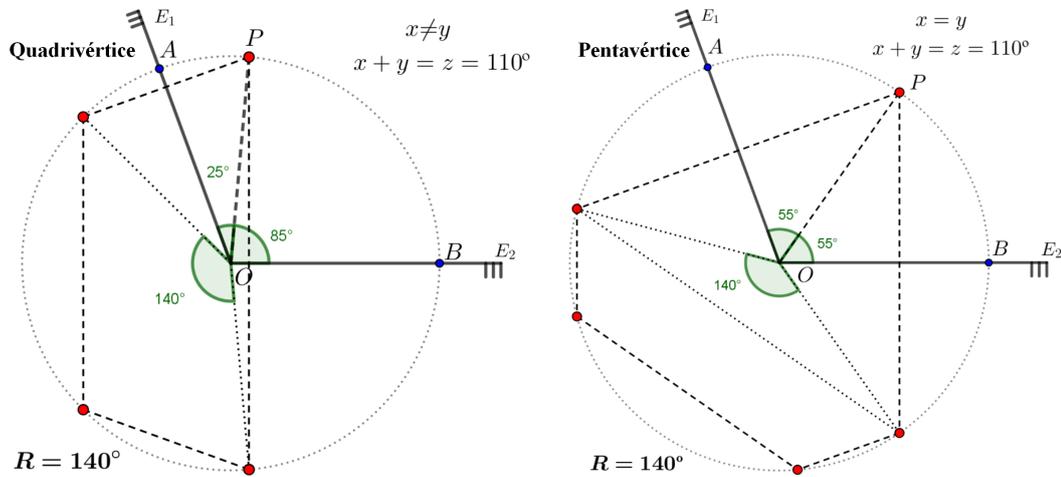
Figura 31 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 75° , forma pentavértices



Fonte: O autor, 2019

Analogamente, no exemplo 5, o ângulo entre os espelhos é de 110° , originando um total de 4 vértices, pois P está localizado entre os dois espelhos, com $\hat{x} = 25^\circ$ e $\hat{y} = 85^\circ$, isto é, P não pertence à bissetriz do ângulo formado entre os espelhos, então será gerado um quadrivértice. Já no exemplo 6, temos um caso em que o ângulo entre os espelhos é de 110° , formando um total de 5 vértices. O ponto P está localizado entre os dois espelhos, com $\hat{x} = \hat{y} = 55^\circ$, isto é, P pertence à bissetriz do ângulo formado entre os espelhos, então será gerado um pentavértice (Figura 32). Em nenhum dos casos existe regularidade ou semi-regularidade polígonos obtidos.

Figura 32 – Ponto P entre espelhos articulados formando um ângulo de 110° , pode formar quadri e pentavértices

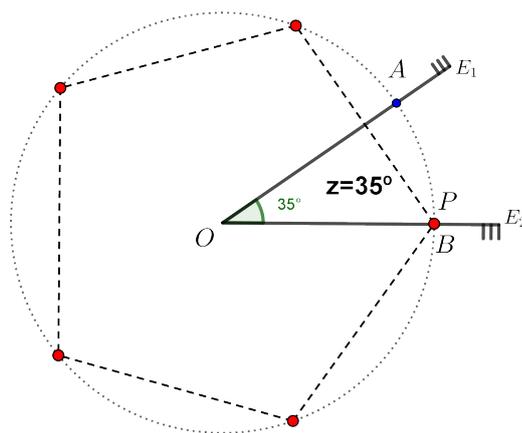


Fonte: O autor, 2019

4.3.2.2.4 Ponto junto a um dos espelhos

No caso de ter-se um ponto P tão próximo de um dos espelhos que se possa considerar sobre o mesmo, isto é, $\hat{x} = 0$ ou $\hat{y} = 0$ e $2\hat{z} = 70^\circ$, tem-se um pentavértice (Figura 33).

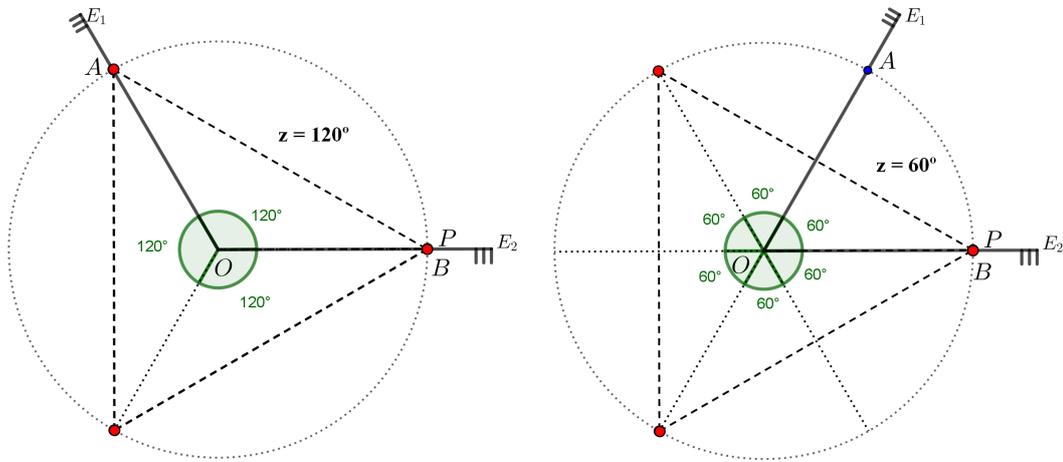
Figura 33 – Pentavértice



Fonte: O autor, 2019

Para $\hat{x} = 0$ ou $\hat{y} = 0$ e $2\hat{z} = 240^\circ$ ou $2\hat{z} = 120^\circ$, tem-se um trivértice regular (Figura 34).

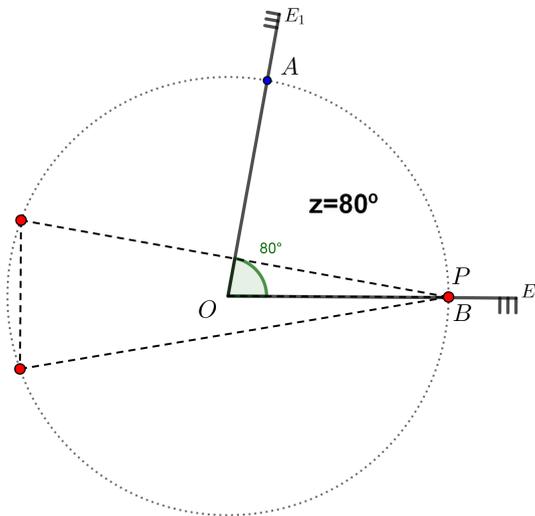
Figura 34 – Trivértice regular



Fonte: O autor, 2019

Considerando ainda $\hat{x} = 0$ ou $\hat{y} = 0$, mas agora com $120^\circ \leq 2\hat{z} < 180^\circ$, tem-se um trivértice semirregular (Figura 35).

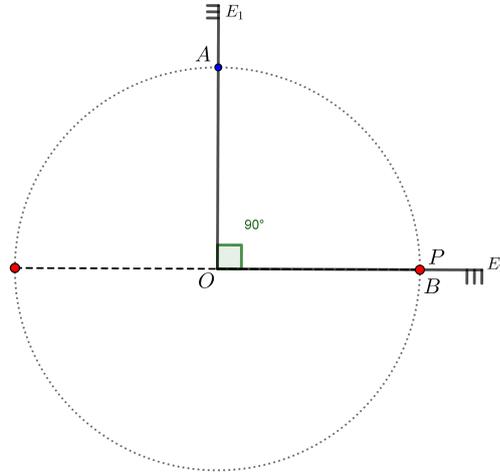
Figura 35 – Trivértice semirregular



Fonte: O autor, 2019

Observe que o ângulo $\hat{z} = 90^\circ$ não foi considerado no caso anterior. Ocorre que quando $\hat{x} = 0$ ou $\hat{y} = 0$ e $\hat{z} = 90^\circ$, forma-se apenas mais um ponto na reflexão pelo espelho (Figura 36).

Figura 36 – Ponto P junto a um dos espelhos e $\hat{z} = 90^\circ$

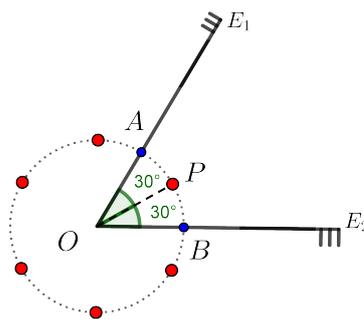


Fonte: O autor, 2019

4.3.2.2.5 Ponto próximo ao vértice formado pela junção dos espelhos

No caso do ponto (objeto) P estar localizado próximo ao vértice do ângulo formado pelos espelhos, ainda teremos polivértices sendo formados. O que irá variar é o tamanho da figura gerada, de acordo com a distância do ponto P ao vértice, isto é, quanto mais próximo do vértice menores as dimensões da figura gerada (Figura 37).

Figura 37 – Ponto P próximo ao vértice formado pelos espelhos



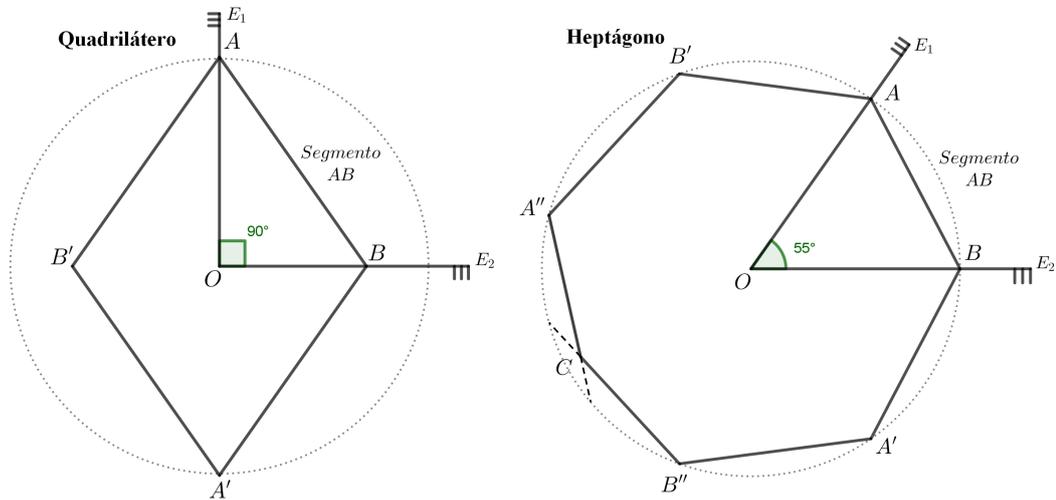
Fonte: O autor, 2019

4.3.2.2.6 Segmento entre dois espelhos

Se um segmento é colocado entre dois espelhos articulados geram-se polígonos. Na figura abaixo (Figura 38) temos exemplos de segmentos entre dois espelhos formando polígonos por meio das reflexões. No primeiro caso tem-se um losango e no segundo caso

temos um heptágono com cinco lados iguais ao segmento objeto e dois lados menores que ele.

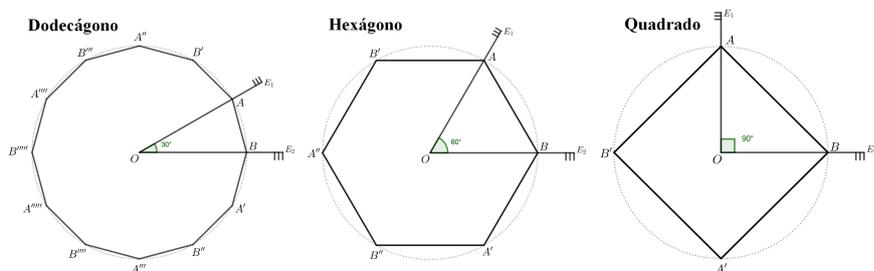
Figura 38 – Polígono formado por um segmento entre dois espelhos



Fonte: O autor, 2019

Se o objeto e os espelhos forem posicionados de tal maneira a formar um triângulo isósceles, será possível obter-se, por meio das reflexões, polígonos regulares, os quais terão um maior número de lados quanto menor for o ângulo formado pelos espelhos, e vice-versa. Porém, a determinação de polígonos regulares também está relacionada à amplitude do ângulo entre os espelhos, uma vez que somente em alguns casos se determinam polígonos regulares. Um par de espelhos articulados, com um segmento em seu interior, de maneira a formar um triângulo isósceles, com as aberturas de 30° , 60° e 90° , formam, respectivamente o dodecágono, o hexágono regular e o quadrado (Figura 39).

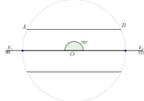
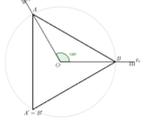
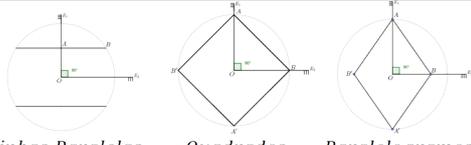
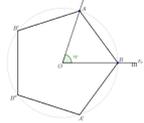
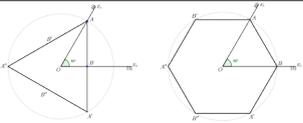
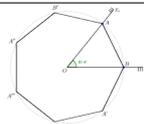
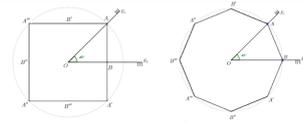
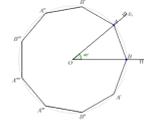
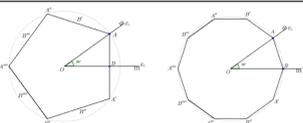
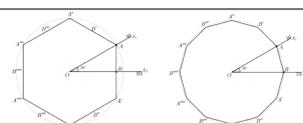
Figura 39 – Polígonos regulares formados por espelhos



Fonte: O autor, 2019

A seguir uma tabela com a listagem de figuras geométricas que podem ser obtidas em função da amplitude do ângulo formado entre os espelhos (Tabela 1).

Tabela 1 – Figuras geométricas obtidas pela reflexão de um segmento em função da amplitude do ângulo formado entre dois espelhos

Ângulo	Construções geradas
180°	 <p><i>Linhas Paralelas</i></p>
120°	 <p><i>Triângulos</i></p>
90°	 <p><i>Linhas Paralelas</i> <i>Quadrados</i> <i>Paralelogramos</i></p>
72°	 <p><i>Pentágonos</i></p>
60°	 <p><i>Triângulos</i> <i>Hexágonos</i></p>
51°4'	 <p><i>Heptágonos</i></p>
45°	 <p><i>Quadrados</i> <i>Octógonos</i></p>
40°	 <p><i>Eneágonos</i></p>
36°	 <p><i>Pentágonos</i> <i>Decágonos</i></p>
30°	 <p><i>Hexágonos</i> <i>Dodecágonos</i></p>

Fonte: O autor, 2019

4.3.3 Utilização de três espelhos planos

Na utilização de três espelhos planos concorrentes dois a dois teremos imagens coincidentes e repetição perfeita das imagens obtidas, quando o dobro de cada um dos três ângulos entre os espelhos for divisor de 360° . Isto é, sendo os ângulos \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} formados entre os espelhos, deve ser cumprida a condição:

$$\frac{360^\circ}{2\hat{a}} = \frac{180^\circ}{\hat{a}} = n_1, \quad \frac{360^\circ}{2\hat{b}} = \frac{180^\circ}{\hat{b}} = n_2, \quad \frac{360^\circ}{2\hat{c}} = \frac{180^\circ}{\hat{c}} = n_3, \quad \text{com } n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}.$$

Como $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$, segue que n_1, n_2, n_3 devem satisfazer a equação

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1$$

Sem perda de generalidade, suponha-se que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, com $n_1 \geq 2$ (pois se $n_1 = 1$, teríamos $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} > 180^\circ$ (Impossível)).

Temos, então: $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} \geq 1$ ou $\frac{3}{n_1} \geq 1 \implies n_1 \leq 3$

Como $n_1 \geq 2$, existem duas possibilidades: $n_1 = 2$ ou $n_1 = 3$.

- Para $n_1 = 2$:

Considerando $n_2 \leq n_3$ e colocando

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} \geq 1 \implies \frac{2}{n_2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \implies n_2 \leq 4$$

Portanto, $n_2 = 3$ ou $n_2 = 4$, (pois se $n_2 = 2$, viria $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n_3} = 1$ (Impossível))

Para $n_1 = 2$ e $n_2 = 3$, então $n_3 = 6$ para $n_1 = 2$ e $n_2 = 4$, então $n_3 = 4$.

- Para $n_1 = 3$:

Se $n_2 \leq n_3$, tem-se

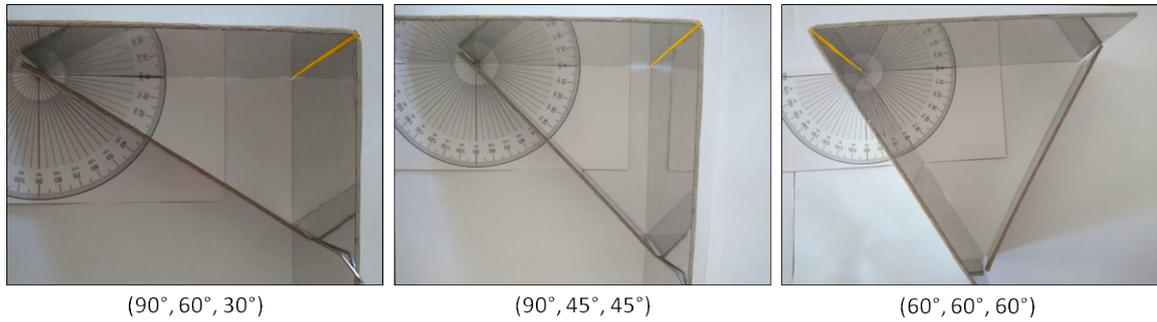
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} \geq 1 \implies n_2 \leq 3$$

Como $n_1 \leq n_2$, então $n_2 = 3$.

De $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n_3} = 1$ tem-se $n_3 = 3$.

Ou seja, há três possibilidades para os n_i : (2,3,6), (2,4,4) e (3,3,3), que correspondem a três formas triangulares para os caleidoscópios com os seguintes ângulos ($90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$), ($90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$) e ($60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$), respectivamente (Figura 40).

Figura 40 – Configurações de espelhos para caleidoscópios de base triangular



Fonte: O autor, 2019

Na utilização de três espelhos formam-se múltiplas imagens, uma vez que as imagens obtidas num dos espelhos originam novas imagens nos dois outros espelhos, e assim sucessivamente, estendendo-se e cobrindo todo o plano.

5 CALEIDOSCÓPIOS

Há muito tempo as reflexões em espelhos planos atraíram a atenção do homem e aguçaram sua curiosidade, os levando a estudar os encantos causados por tais reflexões. Os homens começaram a associar espelhos, dispostos de diferentes maneiras, para estudar os diferentes padrões originados nas reflexões. Ao colocar-se dois ou mais espelhos planos articulados, perpendiculares ao plano, e com as faces espelhadas voltadas para o interior podem-se gerar belas e atraentes imagens obtidas pelas reflexões nos espelhos. As imagens geradas pelos espelhos do caleidoscópio, devem-se a reflexão em espelhos virtuais, formados pelas reflexões dos espelhos do caleidoscópios, e que parecem refletir as imagens de objetos colocados entre os espelhos (Figura 41). A essa construção damos o nome de caleidoscópio plano. Este nome *caleidoscópio* é originário de três palavras gregas: *Kalos* (belas), *eidos* (formas) e *skopein* (ver), isto é, ver coisas belas. Segundo Murari e Barbosa (2012, p.60) a primeira publicação relativa a este instrumento é devida a Kircher (1646), mas sua denominação foi introduzida por Sir David Brewster em seu livro *A treatise on the Kaleidoscope*, em 1819.

Figura 41 – Caleidoscópio plano de base triangular



Fonte: O autor, 2019

Devido a sua beleza, os caleidoscópios têm inspirado obras de arte, como, por exemplo, o *Viewing Machine* (2001-2008), de Olafur Eliasson, localizado no Instituto de Arte Contemporânea e Jardim Botânico, na cidade de Brumadinho em Minas Gerais. Na obra o autor utiliza seis espelhos que formam um tubo hexagonal e geram um efeito obtido pelo reflexo da luz. O visitante aponta a máquina para seu ponto de interesse e, por meio da sobreposição dos reflexos, inúmeras formas são reveladas (Figura 42).

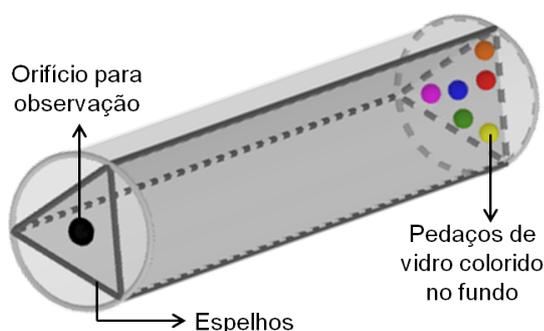
Figura 42 – Viewing Machine (2001-2008) de Olafur Eliasson



Fonte: O autor, 2019

O caleidoscópio tornou-se um brinquedo bastante popular pela sua particularidade de gerar imagens imprevisíveis. Os caleidoscópios populares são tubos na forma de um cilindro, com espelhos planos disposto em seu interior formando prismas, geralmente triangulares, e fechados por duas tampas. Em uma das tampas existem pequenos pedaços de vidros ou pedras coloridas, e na outra tampa existe um pequeno orifício, que permite a visualização do interior do prisma. Ao girar o cilindro, os pedaços de vidro se movem formando belas imagens simétricas, através da reflexão nos espelhos (Figura 43).

Figura 43 – Caleidoscópio popular



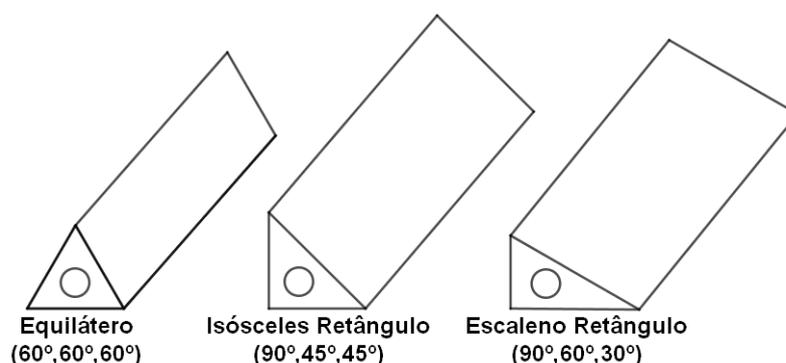
Fonte: O autor, 2019

No Brasil, segundo Murari e Barbosa (2012, p.70) os caleidoscópios surgiram como material didático principalmente nas disciplinas de Ciências e Física, em especial num material didático para Ciências, cerca de 1950/1960, num livro de doze páginas da Prof^a. Maria Julieta Sebastiani Ormastroni, com o título *Brincando com espelhos*. O livro tratava o estudo de reflexões de uma maneira recreativa. Ainda no Brasil, um dos pesquisadores que se destacou no estudo de espelhos e caleidoscópios é o Prof. Ruy Madsen Barbosa, que com a finalidade de auxiliar o ensino de física, apresenta, em 1957,

um estudo sobre o comportamento de imagens em espelhos planos angulares. Em 1993, ele destina dois capítulos de sua obra, *Descobrendo padrões em mosaicos*, ao estudo de espelhos e caleidoscópios, no qual detalha minuciosamente um estudo sobre a variação do número de imagens de um ponto-objeto posicionado entre espelhos, relacionando a posição do objeto/ângulo entre os espelhos e o número de imagens desse ponto/objeto. Ainda, segundo Murari e Barbosa (2012) no Canadá, E.U.A, e Austrália, nas décadas de 70 e 80, também era possível encontrar atividades educacionais de matemática que incluíam o uso de caleidoscópios (Jacobs (1974), O'Daffer & Clemens (1977), Ball & Coxeter (1987)).

Como foi visto anteriormente, ao dispor três espelhos articulados, perpendiculares ao plano, formando um prisma de base triangular, as imagens formadas por um dos espelhos originam novas imagens nos demais espelhos, e assim, sucessivamente, formando uma imagem que se estende por todo o plano. Para que esta repetição aconteça de forma que as imagens geradas sejam idênticas ao objeto no interior dos três espelhos, os ângulos \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} formados pelos espelhos, dois a dois, devem satisfazer a condição dos seus dobros serem divisores de 360° e devem satisfazer a equação $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$. Assim, vimos que as soluções possíveis para \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} são $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$, $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ e $(90^\circ, 60^\circ, 30^\circ)$, que formam três tipos de caleidoscópios triangulares com espelhos planos: o equilátero, o isósceles retângulo e o escaleno retângulo (Figura 44).

Figura 44 – Caleidoscópios de base triangular

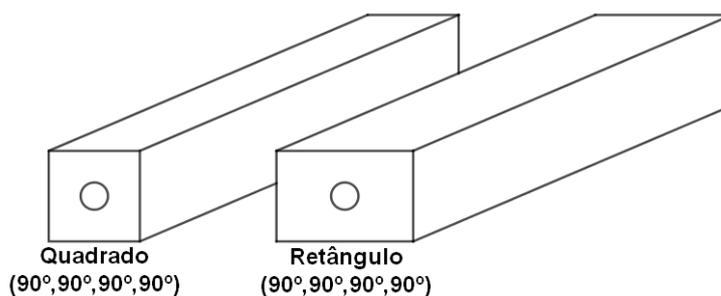


Fonte: O autor, 2019

Se forem dispostos quatro espelhos articulados, perpendiculares ao plano, formando um prisma de base quadrangular, as imagens formadas por um dos espelhos originam novas imagens nos demais espelhos, e assim, sucessivamente, formando uma imagem que se estende por todo o plano. Para que esta repetição aconteça de forma que as imagens geradas sejam idênticas à figura no interior dos três espelhos, os ângulos \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} e \hat{d} formados pelos espelhos, dois a dois, devem satisfazer a condição dos seus dobros serem divisores de 360° e devem satisfazer a equação $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360^\circ$. Assim, a única solução possível para

\hat{a} , \hat{b} , \hat{c} e \hat{d} é $(90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ)$, que forma dois tipos de caleidoscópios de base quadrangular com espelhos planos: o quadrado e o retângulo (Figura 45).

Figura 45 – Caleidoscópios de base quadrangular



Fonte: O autor, 2019

Segundo Murari (1995) esses caleidoscópios são semelhantes ao caleidoscópio popular, mas são chamados de caleidoscópios educacionais por gerarem imagens previsíveis. Na extremidade aberta do caleidoscópio existe a possibilidade de substituição de “desenhos” (bases) que produzirão o visual desejado através das reflexões nos espelhos. Existem também, os caleidoscópios modificados, que servem para o trabalho em grupo, devido as suas grandes proporções. O caleidoscópios modificados são confeccionados com espelhos planos de grandes dimensões, o que permite uma visualização melhor para os alunos e viabiliza a observação e estudo das simetrias.

O caleidoscópio modificado possibilita a construção dos três tipos de bases diferentes existentes nos caleidoscópio triangulares: equilátero, isósceles e escaleno e, permite a construção dos dois tipos de bases existentes nos caleidoscópios quadrangulares: quadrado e retângulo.

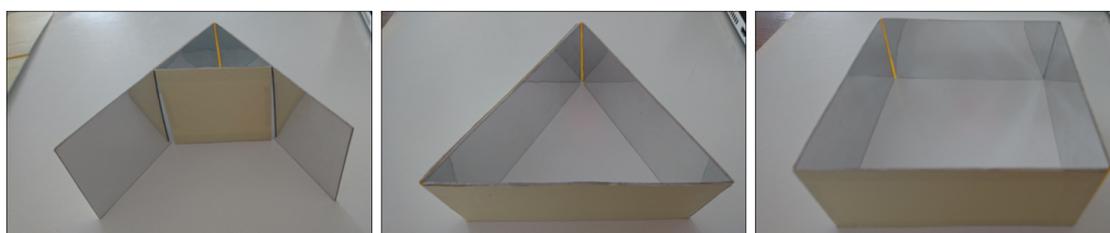
5.1 Construção do caleidoscópio modificado

Foram utilizados os seguintes materiais para a construção do caleidoscópio modificado:

- 4 espelhos de 15cmx5cm;
- 1 espelho de 5cmx8cm;
- fita adesiva grossa;
- papel A3 colorido;
- cola e tesoura.

Una os espelhos de 15cmx5cm pelos lados de 5cm, com um pedaço da fita adesiva sendo colada nas faces não espelhadas, deixando, entre eles, um espaço da espessura de um espelho. Esse espaço entre os espelhos é necessário para que eles fiquem articulados. Corte e cole o papel colorido nas faces não espelhadas dos dois espelhos, para cobri-las e dar um melhor acabamento. Repita o processo anterior com os outros pares de espelhos. Corte e cole um pedaço de papel colorido na face não espelhada do espelho de 5cmx8cm para dar um melhor acabamento. Com esse conjunto de espelhos podem ser formados caleidoscópios com três ou com quatro espelhos (Figura 46)

Figura 46 – Caleidoscópios modificados de bases triangular e quadrangular



Fonte: O autor, 2019

A abertura dos espelhos articulados e a quantidade de espelhos usados na construção determinará o tipo de caleidoscópio pretendido. Os caleidoscópios modificados formados por uma base triangular serão formados por um par de espelhos articulados e um espelho sozinho e terão como ângulos entre os espelhos:

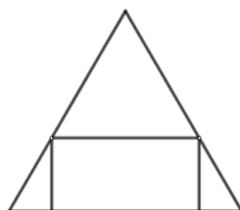
- base triângulo equilátero terá entre os espelhos articulados um ângulo de 60° , formando com o terceiro espelho ângulos de 60° e 60° ;
- base com triângulo isósceles terá entre os espelhos ângulos de 90° , 45° e 45° ;
- base com triângulo escaleno terá entre os espelhos ângulos de 90° , 60° e 30°
- e os caleidoscópios modificados de base com quadrado e retângulo serão formados por dois pares de espelhos articulados e terão ângulos de 90° , 90° , 90° e 90° .

Na pesquisa realizada com os alunos foram utilizados todos os tipos de caleidoscópios modificados, porém foi dada maior ênfase ao caleidoscópio de base com triângulo equilátero. O estudo com os caleidoscópios modificados necessita de bases substituíveis para serem utilizadas no estudo de simetrias e pavimentações, que também foram confeccionadas para realização da pesquisa.

5.2 Bases geradoras

Ao colocarmos bases no interior desses caleidoscópios podemos observar algumas pavimentações uniformes do plano. Para uma pavimentação ser visualizada em um caleidoscópio é necessário que sejam elaboradas figuras construídas especialmente por polígonos regulares, que pela reflexão produzem a pavimentação. Nesses polígonos regulares é possível traçar linhas de simetrias. Ao traçar-se as linhas de simetria nos polígonos que formam uma pavimentação, obtêm-se determinadas porções desses polígonos. A figuras que dão origem a uma pavimentação através das reflexões nos espelhos, damos o nome de **base geradora** (Figura 47). Murari (1999) afirma que base geradora é o menor modelo que pode ser introduzido em um caleidoscópio para visualizar uma determinada pavimentação plana. A construção dessas bases geradoras envolve o estudo de inúmeros conceitos geométricos como simetrias, polígonos, pavimentações, ângulos, entre outros.

Figura 47 – Base geradora



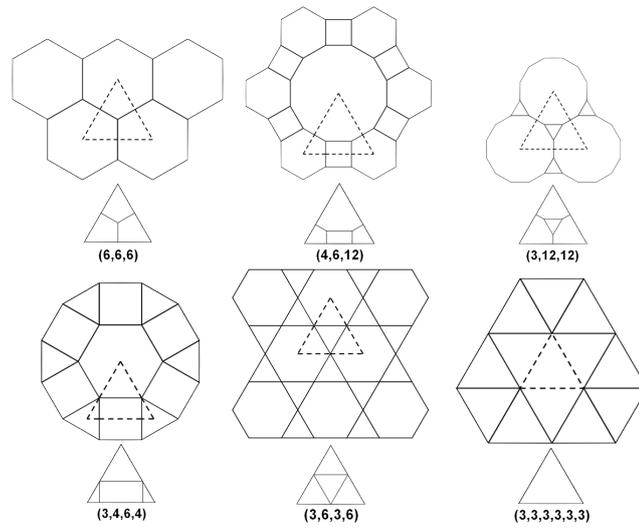
Fonte: O autor, 2019

Nos três tipos de caleidoscópios de bases triangulares podemos visualizar as seguintes pavimentações:

- Caleidoscópio equilátero: $(3,3,3,3,3,3)$, $(3,4,6,4)$, $(3,6,3,6)$, $(3,12,12)$, $(4,6,12)$, $(6,6,6)$ (Figura 48);
- Caleidoscópio isósceles: $(4,4,4,4)$, $(4,8,8)$ (Figura 49);
- Caleidoscópio escaleno: $(3,3,3,3,3,3)$, $(3,4,6,4)$, $(3,6,3,6)$, $(3,12,12)$, $(4,6,12)$, $(6,6,6)$.

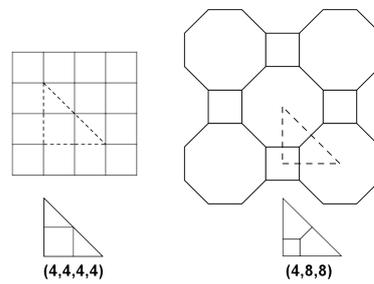
As pavimentações $(3,3,4,3,4)$ e $(3,3,3,4,4)$ somente podem ser visualizadas em caleidoscópios de quatro espelhos de base quadrada ou retângular (Figura 50), e a pavimentação $(3,3,3,3,6)$ não pode ser visualizada em nenhum tipo de caleidoscópio, pois esta não apresenta linhas de simetria em sua composição.

Figura 48 – Bases geradoras por triângulos equiláteros



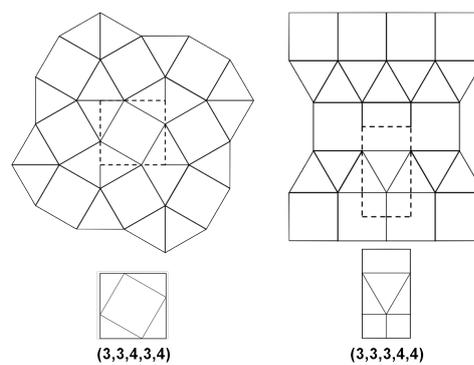
Fonte: O autor, 2019

Figura 49 – Bases geradoras por triângulos isósceles



Fonte: O autor, 2019

Figura 50 – Bases geradoras por quadriláteros



Fonte: O autor, 2019

Os caleidoscópios objetos do estudo realizado são os de base triangular equilátera, na produção de pavimentações do plano por polígonos regulares.

5.3 Base transformada

Para Murari (1999) uma base transformada é composta por réplicas de uma base geradora, que reproduzem a mesma figura da base geradora, isto é, quando uma base provém de uma geradora, recebe o nome de **base transformada**.

As bases geradoras e as suas respectivas transformadas quando observadas no interior de um caleidoscópio, constituem a mesma pavimentação. Para a obtenção de uma base geradora e suas bases transformadas, é necessário um estudo relativo as linhas de simetria dos polígonos que as formam. Murari (1999) descreve alguns métodos para essa obtenção:

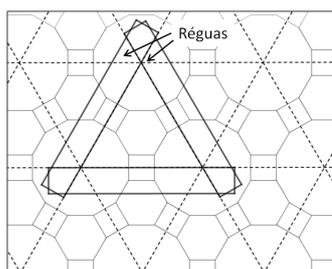
5.3.1 Método I

Uma vez conhecido o visual a ser gerado por segmentos em relação aos ângulos dos espelhos, pode-se construir uma base geradora com segmentos apropriados, para que nas simetrias reflexionais possa se obter, através das regiões delimitadas por esses segmentos, os polígonos regulares desejados.

5.3.2 Método II

Utilizando três régua para formar triângulos sobre o desenho de uma pavimentação, pode-se “visualizar” (descobrir), através da observação e de tentativas, as bases que geram essa pavimentação, pois réplicas triangulares da base são reproduzidas por toda a porção da pavimentação (Figura 51). As régua formando os triângulos devem ser posicionadas a partir do centro dos polígonos da pavimentação em estudo. Desta forma, os vértices do triângulos formados pelas régua corresponderão ao centro de três polígonos, como na figura abaixo. Embora não seja uma regra, isso ocorre na maioria das vezes na obtenção das bases.

Figura 51 – Método II de obtenção de bases geradoras



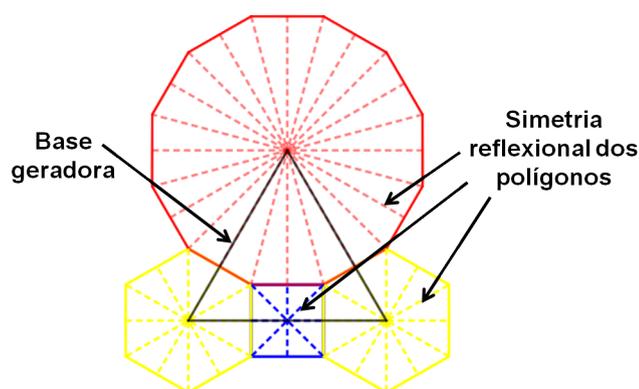
Fonte: O autor, 2019

5.3.3 Método III

Segundo Kingston (1957) *apud* Murari e Barbosa (2012) existem pavimentações que apresentam simetrias reflexionais em relação às mediatrizes dos lados dos polígonos. Por isso, Murari (1999) propõe uma nova maneira de obter as bases, traçando-se as linhas de simetrias da pavimentação, que são as linhas de simetria dos polígonos regulares. A este método dá-se o nome de “algoritmo”.

A utilização dos métodos I e III pode ser empregada com o objetivo de desenvolver, nos alunos, a percepção espacial com exploração de simetrias e construções geométricas adequadas na determinação das bases e serão os métodos utilizados nos estudos. Tomando como base uma pavimentação (4,6,12), pode-se observar que existem linhas de simetria reflexional nos polígonos regulares e por isso pode-se construir uma base geradora com o método III (Figura 52). As linhas tracejadas são as linhas de simetria reflexional de cada um dos polígonos. É possível observar que, em determinadas mediatrizes, essas linhas de simetria reflexional coincidem. Unindo essas linhas em suas interseções forma-se a base geradora, em destaque na figura, da pavimentação estudada.

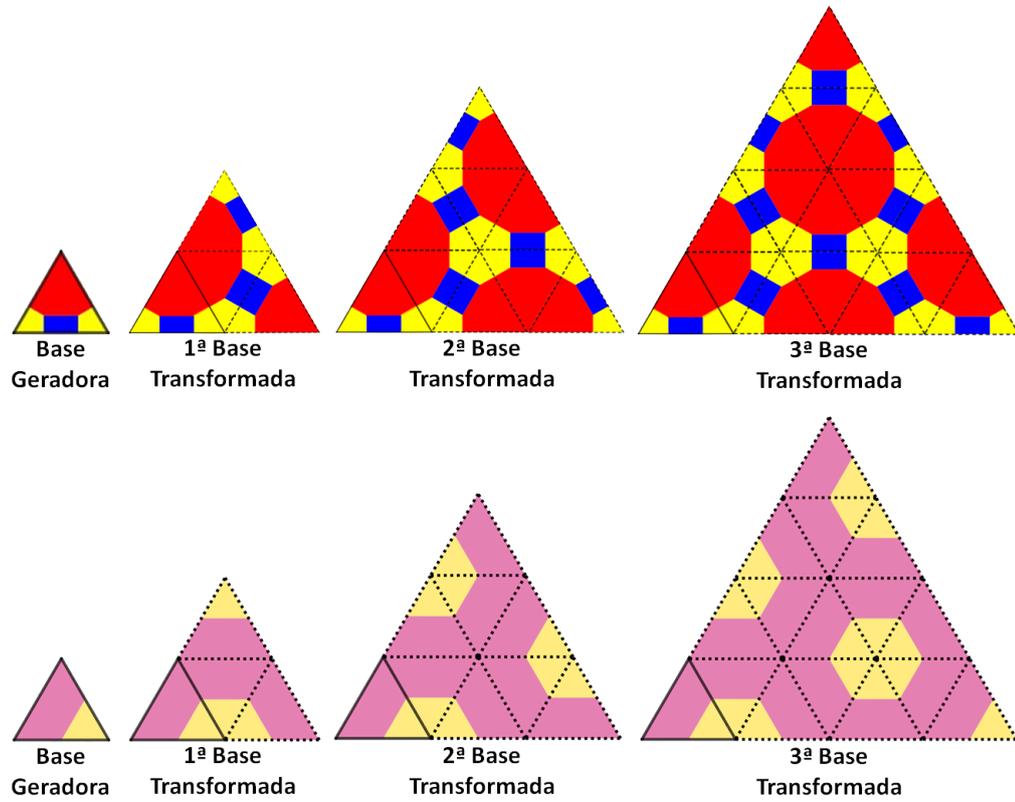
Figura 52 – Estudo da base geradora da pavimentação (4,6,12)



Fonte: O autor, 2019

As bases transformadas são compostas por réplicas da base geradora. A primeira base transformada é constituída por quatro bases geradoras; a segunda base transformada é constituída por nove bases geradoras; a terceira base transformada é constituída por dezesseis bases geradoras (Figura 53). Ocorre que a cada base transformada são acrescentadas 3, 5, 7, 9... réplicas da base geradora à base anterior.

Figura 53 – Bases geradoras e transformadas de pavimentações (4,6,12) e (3,3,6,6)



Fonte: O autor, 2019

6 ATIVIDADE

A seguir, descreve-se uma atividade desenvolvida com cinco turmas do 6º ano do Ensino Fundamental do Colégio Pedro II, campus Engenho Novo II que teve como objetivo principal a determinação de bases geradoras de pavimentações do plano, recorrendo a espelhos planos, e que culminou com a construção de um caleidoscópio.

A execução da atividade teve três momentos distintos: a manipulação de modelos, o uso do GeoGebra e a construção do caleidoscópio. O primeiro momento foi realizado em sala de aula e teve uma duração de duas aulas com dois tempos de 45 minutos em cada aula. Uma vez que as reflexões em caleidoscópios resultam de simetrias de reflexão, e como os alunos não estavam familiarizados com este conceito, foram apresentadas várias imagens para intuir o conceito de reflexão, e, em seguida, foi efetuada a formalização do mesmo. Antes do início da atividade foi necessária uma breve instrução aos alunos, sobre como manusear os espelhos para que pudessem obter as reflexões a serem estudadas, isto é, que os espelhos fossem sempre dispostos de forma perpendicular ao plano.

6.1 Atividades com o material manipulativo

A atividade foi desenvolvida em dupla a fim de incentivar a comunicação entre os estudantes, estimular a troca de ideias e raciocínio, além de descentralizar a figura do professor e promover a autonomia dos alunos. A atividade dispunha para sua realização 16 kits que continham (Figura 54):

- 16 espelhos planos de 5cmx8cm;
- 45 espelhos planos articulados de 15cmx5cm cada espelho;
- 40 cartelas com figuras para estudo das simetrias;
- 16 pavimentações em preto e branco para estudo das bases geradoras de pavimentações;
- 19 pavimentações coloridas para estudo das bases geradoras de pavimentações;
- 16 transferidores.

A atividade com o uso do material manipulativo teve três fases. A primeira fase consistiu no estudo das simetrias por um espelho plano, a segunda no estudo das simetrias com dois espelhos planos e articulados com as faces espelhadas voltadas para o interior, e a terceira fase consistiu no estudo das reflexões por três espelhos planos, das bases geradoras de pavimentações e das pavimentações geradas pelos três espelhos planos.

Figura 54 – Material manipulativo utilizado na atividade



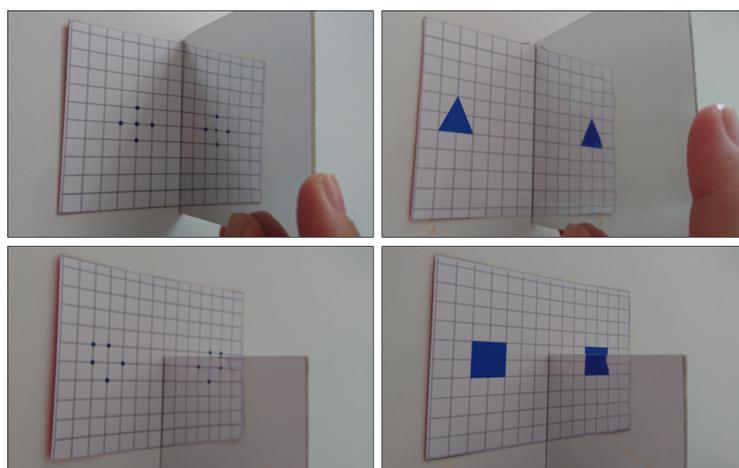
Fonte: O autor, 2019

6.1.1 Uso de material manipulativo no estudo das simetrias com um espelho plano

Nesta fase, os alunos de posse do material fornecido, tiveram que determinar a localização exata do eixo de simetria, as figuras simétricas em relação a um eixo já determinado, e identificar polígonos que possuem, ou não, eixo(s) de simetria.

Inicialmente as duplas receberam um espelho plano e cartões com figuras. Os primeiros cartões consistiam de duas figuras simétricas desenhadas em um papel quadriculado e dispostas em lados opostos do papel quadriculado. Os alunos deveriam determinar, com o auxílio do espelho, o lugar exato do eixo de simetria, para que as figuras fossem simétricas. Os cartões continham figuras de pontos, triângulos, quadrados e outros polígonos (Figura 55).

Figura 55 – Cartões pra determinação do eixo de simetria

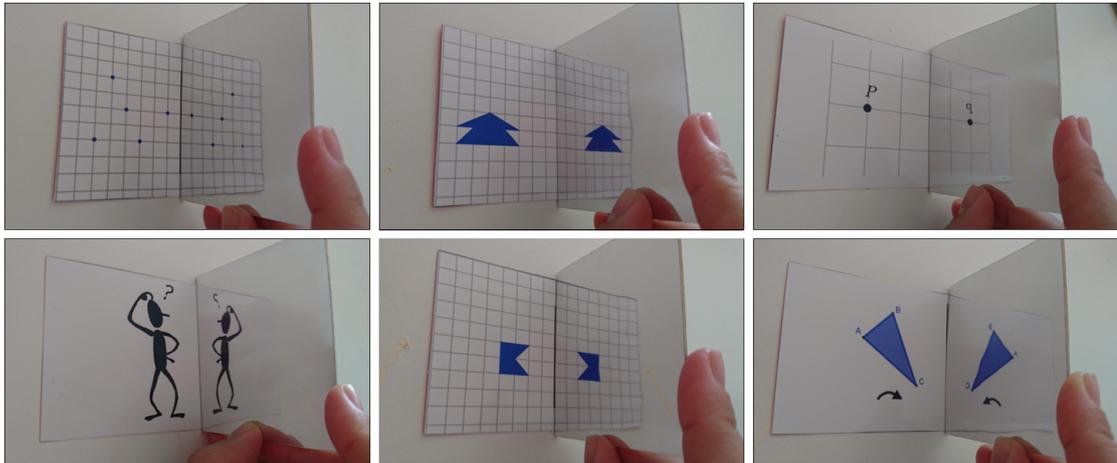


Fonte: O autor, 2019

Em seguida os alunos receberam cartões com malha quadriculada, que continham uma figura e um eixo. Os alunos deveriam determinar a imagem reflexa pelo eixo de

simetria contido no cartão (Figura 56). Os alunos poderiam utilizar o espelho para auxiliar na tarefa.

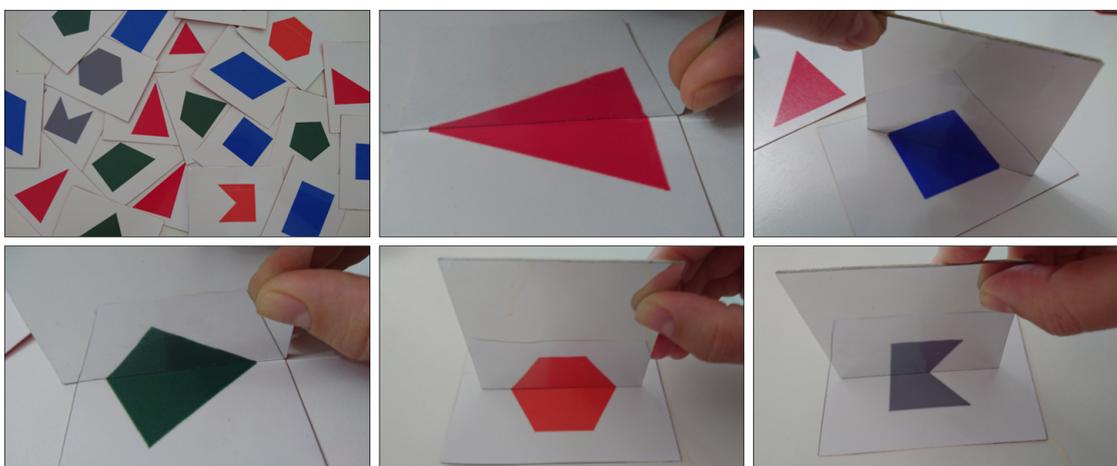
Figura 56 – Cartões para determinação da figura simétrica em relação ao eixo



Fonte: O autor, 2019

Para finalizar o estudo das simetrias com um espelho, os alunos receberam cartões contendo algumas figuras geométricas, tais como: triângulo equilátero, triângulo isósceles, triângulo escaleno, quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio retângulo, um quadrilátero pipa, um hexágono regular, um pentágono côncavo em formato de bandeirinha, um hexágono regular e um círculo. Os alunos tiveram de encontrar possíveis eixos de simetria em cada uma das figuras apresentadas (Figura 57).

Figura 57 – Cartões pra determinação de possíveis eixos de figuras

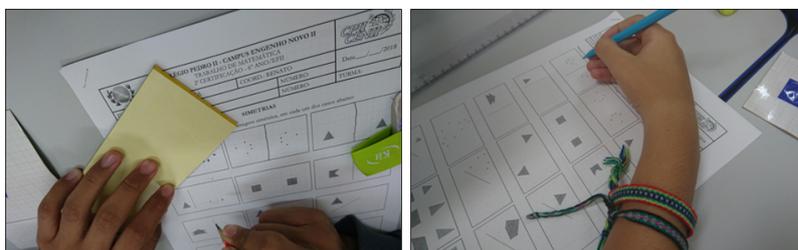


Fonte: O autor, 2019

Os alunos receberam também, uma folha de atividades (Anexo A), que continha todas as figuras dispostas nos cartões. O objetivo da folha de questões era que os alunos pudessem, além de trocar os cartões estudados entre eles, realizar os registros do que foi feito nesta fase da atividade, bem como suas observações e conclusões.

A primeira e segunda parte das tarefas com um eixo foram realizadas sem dificuldade. Na última parte da atividade, os alunos observaram que algumas das figuras não possuíam eixo de simetria, outras possuíam apenas um eixo e as demais mais de um eixo de simetria e realizaram os registros na folha de tarefas com os possíveis eixos encontrados em cada uma das figuras (Figura 58).

Figura 58 – Folha de tarefas



Fonte: O autor, 2018

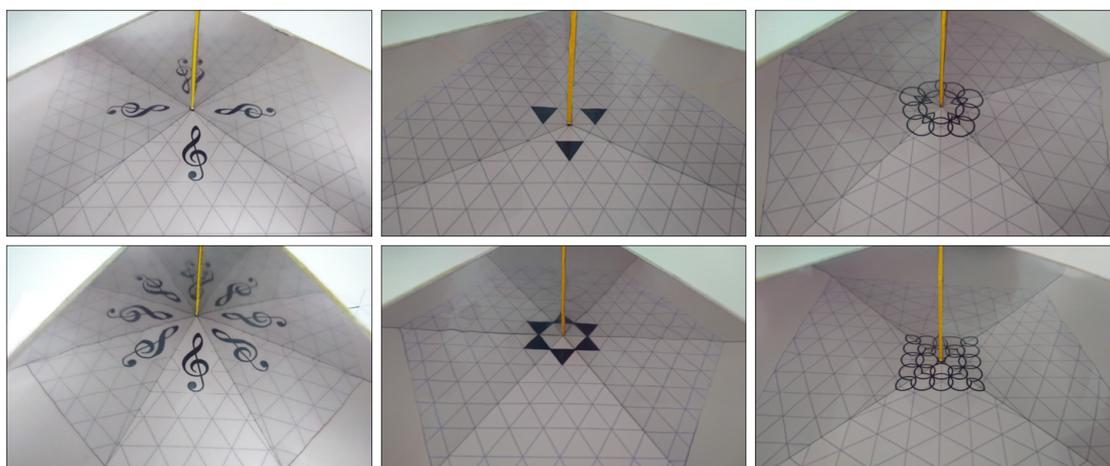
Na primeira fase, os alunos estudaram as propriedades da simetria reflexional, por meio da análise de inúmeras figuras e polígonos, e perceberam que nas reflexões por espelhos planos, perpendiculares ao plano, a forma e as medidas se mantêm inalteradas.

6.1.2 Uso de material manipulativo no estudo das simetrias com dois espelhos planos articulados

Na segunda fase da atividade, os alunos receberam dois espelhos planos e articulados, que formavam ângulos entre os espelhos, e um conjunto de cartões. Os primeiros cartões com uma malha isométrica, que possuíam figuras como triângulos, chave de sol, circunferências e círculos. Os alunos deveriam posicionar os espelhos em torno das figuras e variar livremente a abertura entre os espelhos segundo determinados ângulos, a fim de observar as reflexões produzidas pelos dois espelhos articulados.

Em seguida, utilizando os mesmos cartões, os alunos deveriam posicionar o vértice formado pela união dos dois espelhos articulados sobre o ponto demarcado em cada cartão e variar de 30° a 120° o ângulo de abertura entre os espelhos, com incremento de 30° . Os alunos deveriam realizar esta tarefa com o auxílio do transferidor (Figura 59).

Figura 59 – Cartões para estudo da quantidade de figuras geradas pela reflexão nos dois espelhos articulados



Fonte: O autor, 2019

A folha de tarefas possuía uma tabela, onde os alunos deveriam fazer o registro do ângulo de abertura dos espelhos e o número de vezes que a figura entre os espelhos aparece refletida, mais a figura original (Tabela 2).

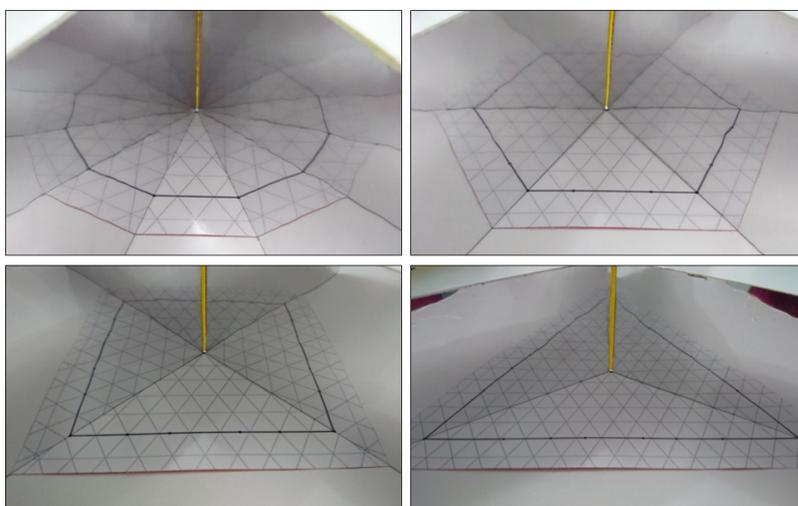
Tabela 2 – Quantidade de figuras geradas pela reflexão nos dois espelhos articulados

Ângulo de abertura dos espelhos	Total de figuras geradas com as reflexões
30°	12
60°	6
90°	4
120°	3

Fonte: O autor, 2019

Em seguida, os alunos avançam na resolução das tarefas, utilizando cartões que continham um ponto e um segmento (com alguns pontos marcados) desenhados sobre uma malha isométrica. Os alunos primeiramente, deveriam posicionar o vértice formado pela união dos espelhos sobre o ponto no cartão, variar livremente os ângulos de abertura entre os espelhos e observar a figura gerada pela reflexão do segmento. Em seguida, os alunos deveriam seguir as marcações pré-determinadas no segmento, que estabelecia ângulos de 30°, 60°, 90° e 120°, como na sequência anterior, e observar, segundo os ângulos determinados, as figuras geométricas geradas pelas reflexões nos espelhos, que serão de polígonos regulares (Figura 60).

Figura 60 – Cartões para estudo de figuras obtidas por segmentos refletidos segundo determinados ângulos



Fonte: O autor, 2019

Tal como na tarefa anterior, nesta tarefa também se fornece uma tabela (Tabela 3) para o registro dos ângulos e dos polígonos observados nas reflexões, consoante a variação dos respectivos ângulos.

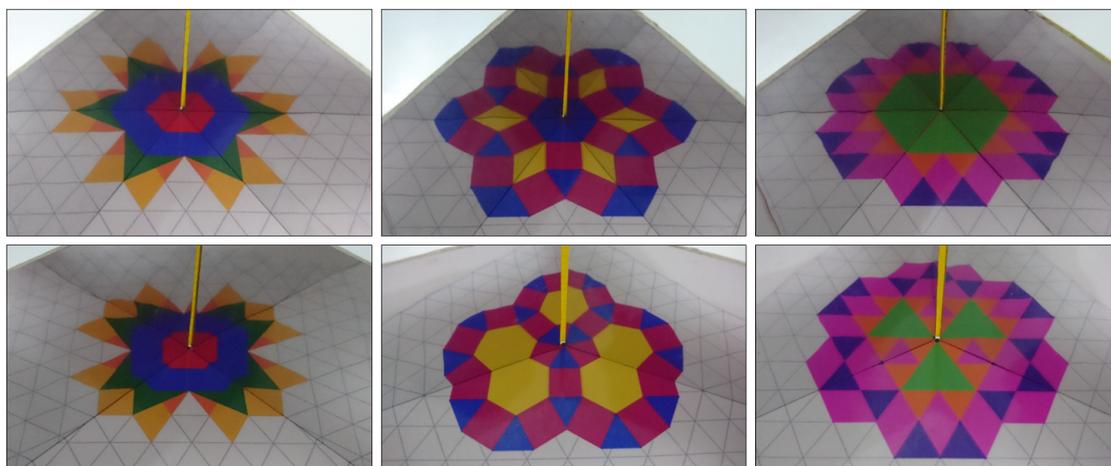
Tabela 3 – Estudo dos polígonos gerados pelas reflexões nos espelhos

Ângulo entre os espelhos	Nº de lados do polígono formado	O polígono é regular?	Nome do polígono formado
30°	12	Sim	Dodecágono regular
60°	6	Sim	Hexágono regular
80°	5	Não	Pentágono
90°	4	Sim	Quadrado
120°	3	Sim	Triângulo equilátero

Fonte: O autor, 2019

Na seqüência os alunos receberam cartões com figuras, nos quais deveriam posicionar o vértice entre os espelhos sobre um ponto marcado na figura e, em seguida, manipular livremente os ângulos entre os espelhos e observar as imagens formadas por tais variações. (Figura 61).

Figura 61 – Cartões para o estudo das imagens geradas pelas reflexões nos espelhos



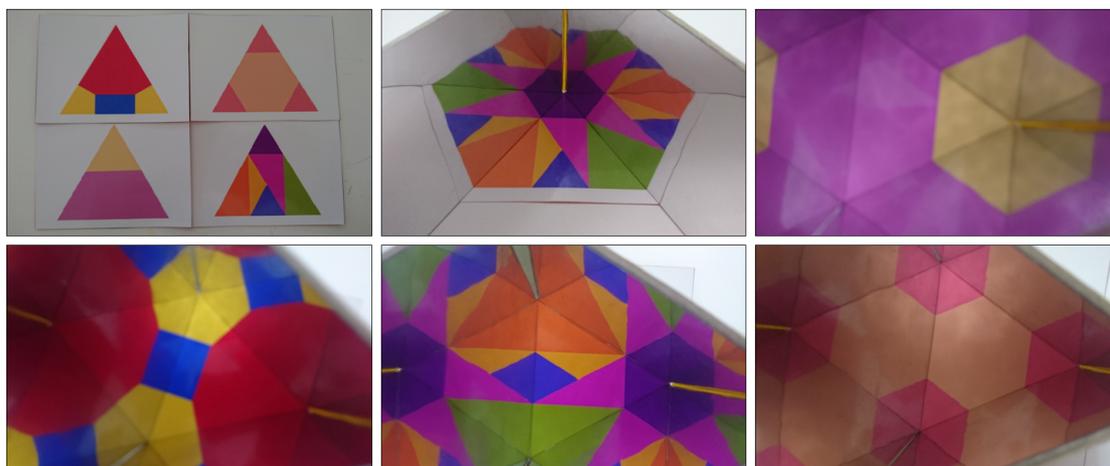
Fonte: O autor, 2019

6.1.3 Uso de material manipulativo no estudo das simetrias e pavimentações com três espelhos planos articulados

Na terceira fase da atividade, os alunos realizaram um estudo sobre as bases geradoras de pavimentações utilizando ora as bases geradoras, ora pavimentações. Para isso, além dos espelhos articulados, os alunos receberam um terceiro espelho. Nesta fase, foi necessário fazer uma explanação sobre pavimentações e bases geradoras, fazendo uma amostra também do que são bases transformadas.

Na utilização das bases geradoras, os alunos receberam cartões com malha isométrica que continham triângulos equiláteros com figuras no seu interior, isto é, bases geradoras, os alunos deveriam posicionar os três espelhos sobre as arestas do triângulo da base geradora e observar a pavimentação gerada pelas reflexões da imagem da base nos três espelhos (Figura 62).

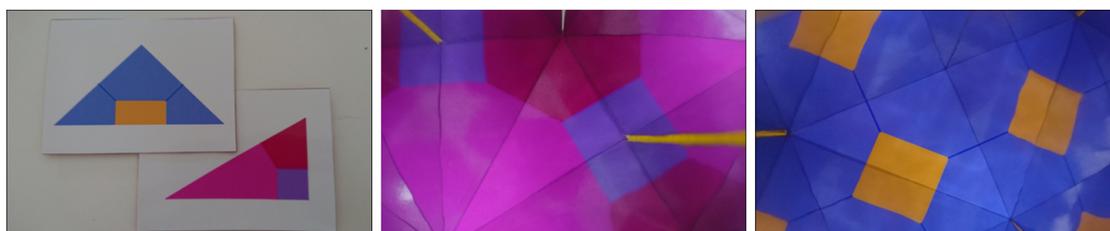
Figura 62 – Bases geradoras de pavimentações formadas por triângulos equiláteros



Fonte: O autor, 2019

Os alunos também receberam cartões com bases geradoras formadas por triângulos isósceles e escaleno, que deveriam manipular como no caso anterior (Figura 63).

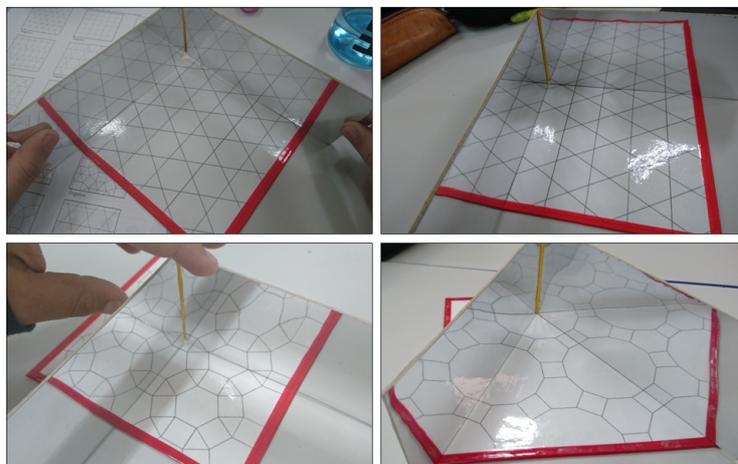
Figura 63 – Bases geradoras de pavimentações formadas por triângulos isósceles e escaleno



Fonte: O autor, 2019

Posteriormente, os alunos receberam algumas pavimentações em preto e branco onde deveriam, com o auxílio dos três espelhos, determinar as menores bases geradoras das pavimentações estudadas (Figura 64). Vale ressaltar que nem todas as pavimentações poderiam ser geradas por bases geradoras. O objetivo de inserir pavimentações deste tipo era poder apresentar contra-exemplos aos alunos. Além disso, nem todas as pavimentações poderiam ser geradas por bases geradoras formadas por triângulos equiláteros, mas também pelo uso de quatro espelhos paralelos dois a dois. Esses tipos de pavimentações foram introduzidas na atividade para que os alunos pudessem observar que era possível gerar pavimentações por meio de outros tipos de base.

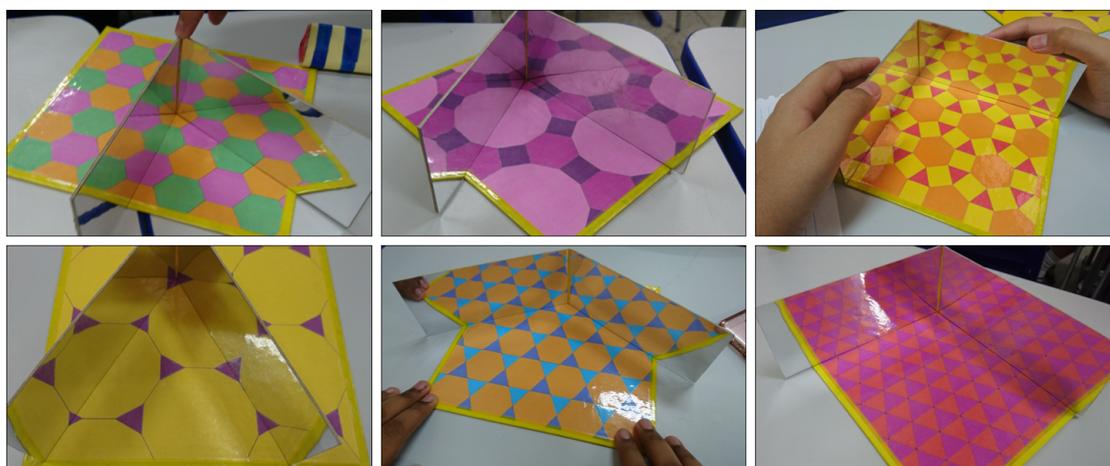
Figura 64 – Pavimentações preto e branco para a determinação de bases geradoras



Fonte: O autor, 2018

Os alunos receberam também pavimentações coloridas, para que pudessem estudar suas respectivas bases geradoras por meio dos espelhos. Em determinadas pavimentações o colorido não altera a base geradora, porém em outras a base é alterada por conta do encaixe das cores na pavimentação (Figura 65). Este estudo torna-se mais complexo que o anterior, pois requer uma análise não só dos polígonos usados nas pavimentações, mas também das cores, para que a pavimentação seja gerada de forma correta pela base. A maioria dos alunos tentou utilizar as mesmas bases encontradas nas pavimentações em preto e branco, mas os alunos perceberam que em algumas pavimentações a base usada anteriormente não funcionaria da mesma forma, devido às cores empregadas na formação.

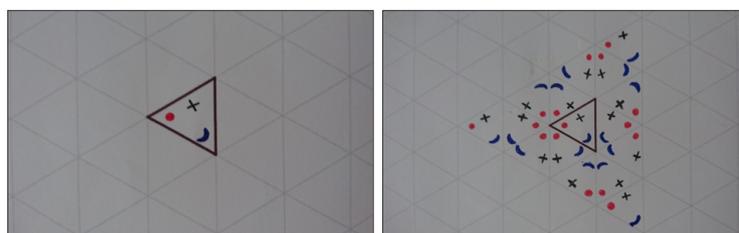
Figura 65 – Pavimentações coloridas para a determinação de bases geradoras



Fonte: O autor, 2018

Para finalizar o conjunto de atividades realizadas com material manipulativo, os alunos receberam uma folha com malha isométrica e um triângulo equilátero demarcado sobre a malha, ao qual foi dado o nome de base geradora. Os alunos deveriam desenhar pelo menos três símbolos pequenos no interior da base geradora e em seguida, com o auxílio dos espelhos desenhar as respectivas reflexões geradas em cada um dos três espelhos, de maneira a formar uma pavimentação (Figura 66). Os alunos deveriam desenhar no mínimo duas bases transformadas para observar a pavimentação formada.

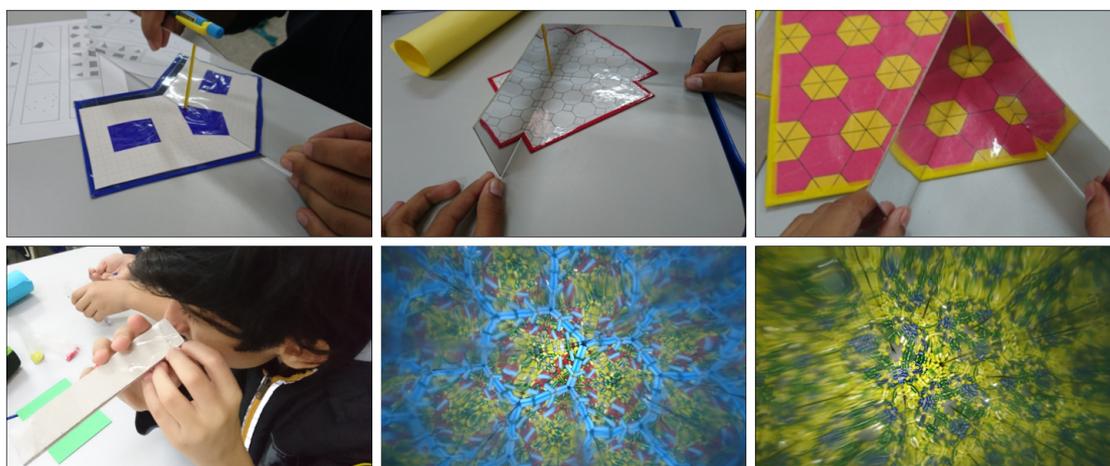
Figura 66 – Base geradora a ser criada pelos alunos



Fonte: O autor, 2019

Todas as atividades decorreram de forma dinâmica e os alunos manifestaram envolvimento e interesse na realização das mesmas. A parte em que os alunos apresentaram mais dificuldade foi a terceira fase, no estudo das bases geradoras das pavimentações (Figura 67). Ao fim do estudo os alunos estavam em plenas condições para compreender o funcionamento e toda a matemática por trás dos caleidoscópios.

Figura 67 – Alunos realizando as atividades



Fonte: O autor, 2018

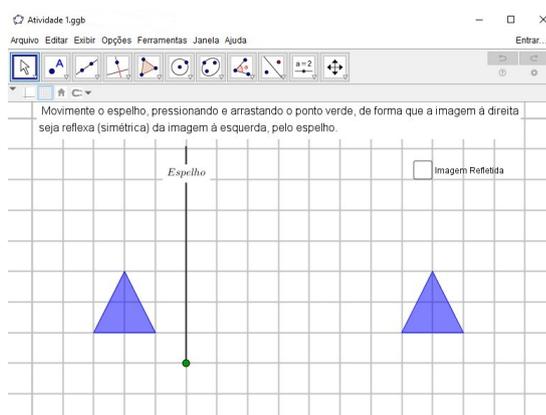
6.2 Atividade com o GeoGebra

A apresentação da atividade com o GeoGebra foi dividida em três fases e teve a duração de dois tempos de 45 minutos cada. Na primeira, foram apresentadas aos alunos algumas tarefas para o estudo do conceito de reflexão, utilizando-se apenas um eixo de simetria. Na segunda fase, os alunos continuaram o estudo sobre simetrias axiais, utilizando, agora, dois eixos concorrentes representando dois espelhos não paralelos e estudando as possíveis reflexões geradas por eles. Na terceira fase da atividade, os alunos realizaram um estudo sobre as bases geradoras de pavimentações utilizando as bases geradoras.

6.2.1 Uso do GeoGebra para averiguar simetria de figuras

O conjunto de tarefas permite ao aluno estudar a simetria de reflexão. Para facilitar a orientação e a visualização nessa fase do estudo as atividades apresentam uma malha quadriculada. As tarefas 1 e 2, apresentam dois polígonos congruentes (triângulos e quadrados, respectivamente) e um eixo entre os dois polígonos. Na tarefa os alunos devem posicionar a reta no lugar exato para que esta seja eixo de simetria entre os polígonos, ou seja, de forma que os polígonos sejam simétricos um ao outro. Na tarefa 1¹ (Figura 68), o espelho pode ser manipulado (arrastado) apenas por meio de translações para a esquerda ou para a direita.

Figura 68 – Visualização da tarefa 1 proposta aos alunos



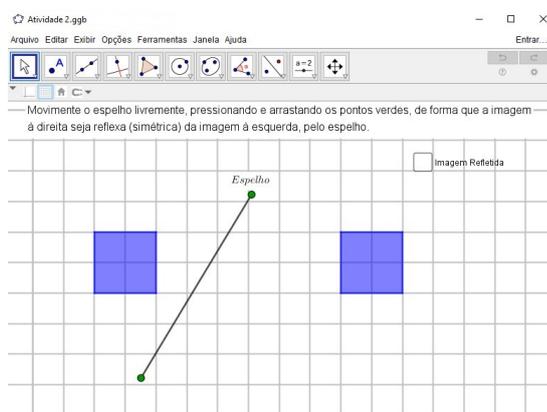
Fonte: O autor, 2018

Já na tarefa 2² (Figura 69), o espelho pode ser manipulado livremente, podendo ser movido por translações ou rotações.

¹ Tarefa 1 disponível em: <<https://ggbm.at/btjptpb2>>

² Tarefa 2 disponível em: <<https://ggbm.at/caybgeg6>>

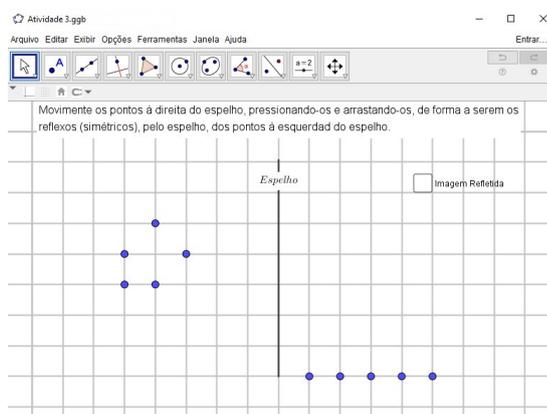
Figura 69 – Visualização da tarefa 2 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

As tarefas 3, 4 e 5 trabalham o conceito de simetria de reflexão usando pontos. A tarefa 3³ (Figura 70) apresenta um conjunto de 5 pontos e um eixo fixos, e um conjunto de 5 pontos livres, que devem ser movimentados e posicionados de modo a obter uma figura simétrica da dada.

Figura 70 – Visualização da tarefa 3 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

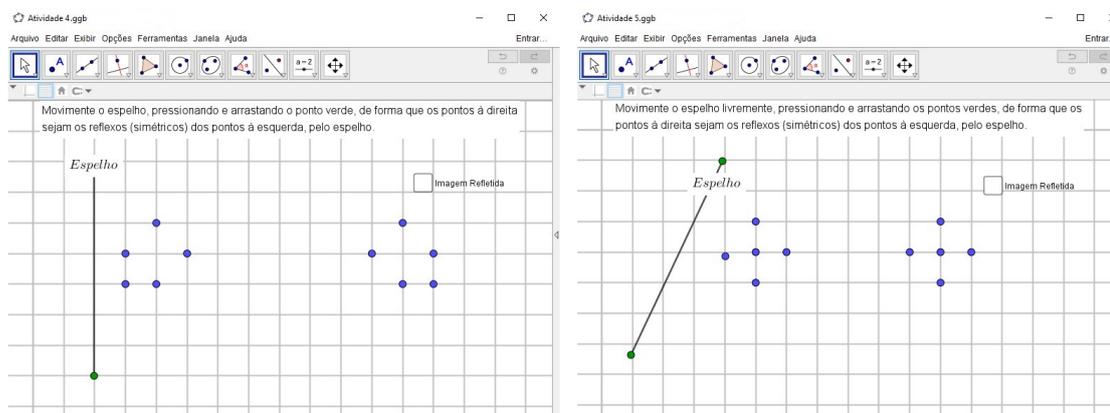
Nas tarefas 4⁴ e 5⁵ (Figura 71) há dois conjuntos de pontos fixos e um espelho que pode ser movido e posicionado de tal maneira que este seja o eixo de reflexão das figuras, sendo que na tarefa 4 o espelho só pode movimentar-se por translações e na tarefa 5 o espelho pode movimentar-se por translações e efetuar rotações.

³ Tarefa 3 disponível em: <<https://ggbm.at/vzudgjpr>>

⁴ Tarefa 4 disponível em: <<https://ggbm.at/ugpjvnu>>

⁵ Tarefa 5 disponível em: <<https://ggbm.at/t9m4pj89>>

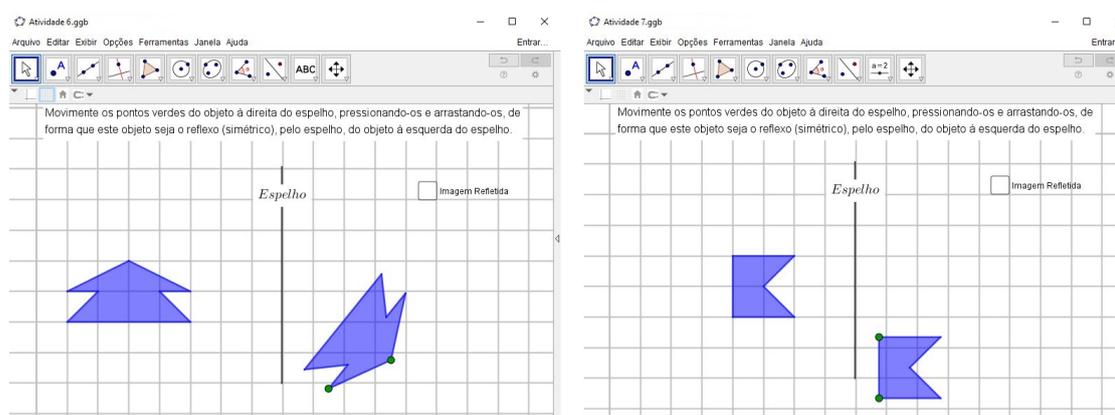
Figura 71 – Visualização das tarefa 4 e 5 propostas aos alunos



Fonte: O autor, 2018

As tarefas 6⁶ e 7⁷ (Figura 72), apresentam, em cada uma delas, dois polígonos iguais e rígidos, um deles fixo e posicionado à esquerda de um espelho também fixo. O outro polígono posicionado à direita do espelho é manipulável e deverá ser movido por meio de translações e rotações de tal forma que o polígono se posicione como a imagem reflexa do polígono à esquerda pelo espelho.

Figura 72 – Visualização das tarefas 6 e 7 propostas aos alunos



Fonte: O autor, 2018

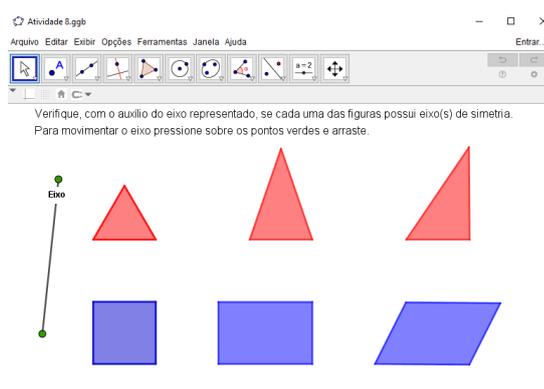
Em todas as tarefas anteriores, os alunos, após posicionarem o espelho nos seus devidos lugares, conferem a resposta dada selecionando a caixa “Imagem Refletida” e, caso a imagem refletida não corresponda à resposta encontrada na realização da tarefa, os

⁶ Tarefa 6 disponível em: <<https://ggbm.at/fufjj89f>>

⁷ Tarefa 7 disponível em: <<https://ggbm.at/utrjjjudm>>

alunos retornam a ela até a acertarem. Na tarefa 8⁸ (Figura 73) são dados três triângulos e três quadriláteros e, um eixo manipulável que pode sofrer translações e rotações. A atividade, diferentemente das anteriores, visa a obtenção de possíveis eixos de simetria existentes em cada um dos polígonos, utilizando-se para isso a manipulação do eixo por meio de translações e rotações. Nesse momento os alunos devem anotar a quantidade de eixos de simetria encontrados em cada uma das figuras.

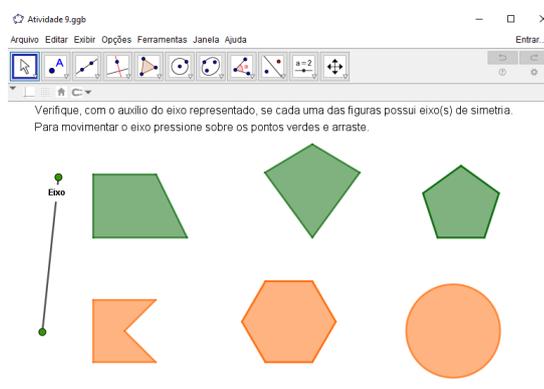
Figura 73 – Visualização da tarefa 8 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

A tarefa 9⁹ (Figura 74) é semelhante à tarefa 8, porém com outras classes de figuras. Apresenta um trapézio, um quadrilátero pipa, um pentágono regular, um pentágono côncavo em formato de bandeirinha, um hexágono regular e um círculo. Os alunos também devem anotar a quantidade de eixos de simetria encontrados na tarefa 9.

Figura 74 – Visualização da tarefa 9 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

⁸ Tarefa 8 disponível em: <<https://ggbm.at/frzkywdm>>

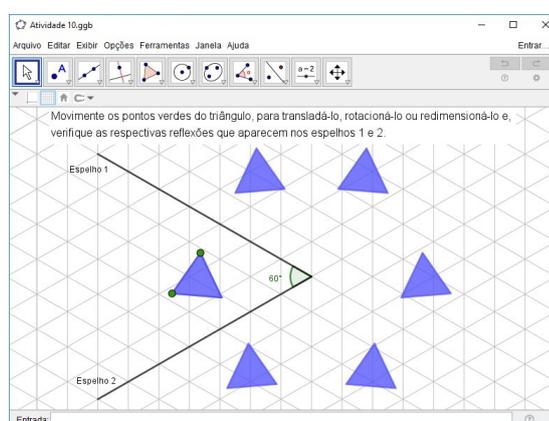
⁹ Tarefa 9 disponível em: <<https://ggbm.at/hwgtudd2>>

Como fechamento das tarefas 8 e 9 é feita uma pausa para que os alunos possam discutir sobre as observações feitas em relação aos polígonos que possuem eixos de simetria e os que não possuem. Para os polígonos que possuem eixos de simetria, deve ser feita uma comparação sobre as quantidades de eixos encontrados e sobre quais polígonos possuem eixos diagonais, verticais ou horizontais. A discussão deve ser livre entre os alunos, porém norteada pelos professores.

6.2.2 Uso do GeoGebra para estudo de reflexões com eixos de simetria não paralelos

A segunda fase da atividade é composta por um conjunto de cinco tarefas que têm como suporte a malha isométrica e que contêm dois eixos não paralelos, simulando dois espelhos com faces espelhadas voltadas para o interior e abertas segundo um ângulo inferior a 180° . A tarefa 10¹⁰ (Figura 75) possui além dos espelhos formando uma abertura de 60° , um triângulo equilátero posicionado entre eles. Os alunos devem movimentar o triângulo por translações, rotações e redimensionamento, e observar as reflexões geradas pelos dois espelhos.

Figura 75 – Visualização da tarefa 10 proposta aos alunos



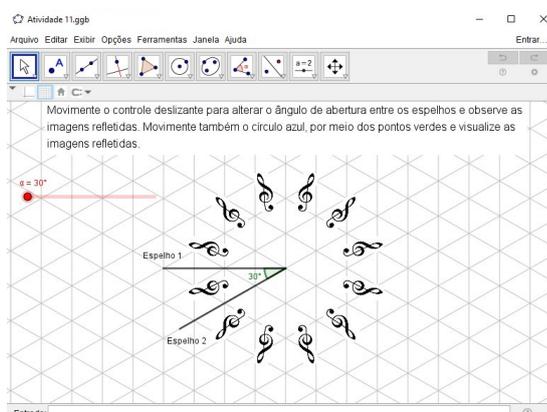
Fonte: O autor, 2018

A tarefa 11¹¹ (Figura 76) apresenta dois espelhos posicionados formando, entre suas faces espelhadas, um ângulo de 30° , um controle deslizante que permite variar a amplitude do ângulo de 30° a 120° , com um incremento de 30° e uma chave de sol posicionada entre eles, gerando reflexões da imagem. Nesta tarefa, o aluno, após variar o ângulo formado pelos espelhos, por meio da manipulação do controle deslizante, deve observar, de acordo com cada ângulo, a figura resultante nas respectivas reflexões.

¹⁰ Tarefa 10 disponível em: <<https://ggbm.at/ukyftmb>>

¹¹ Tarefa 11 disponível em: <<https://ggbm.at/cshxzjfv>>

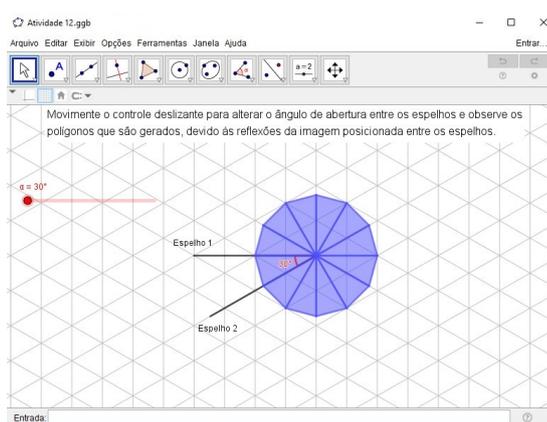
Figura 76 – Visualização da tarefa 11 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

As tarefas 12 e 13 apresentam dois espelhos posicionados formando um ângulo de 30° , um controle deslizante para o ângulo formado entre os espelhos, variando de 30° a 120° , com um incremento de 30° . A tarefa 12¹² (Figura 77) mostra também um triângulo isósceles azul com lados sobre os espelhos, formado com os lados dos espelhos. Os alunos devem variar o ângulo formado entre os espelhos, movimentando o controle deslizante, e observar, de acordo com cada ângulo, os diferentes polígonos regulares formados.

Figura 77 – Visualização da tarefa 12 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

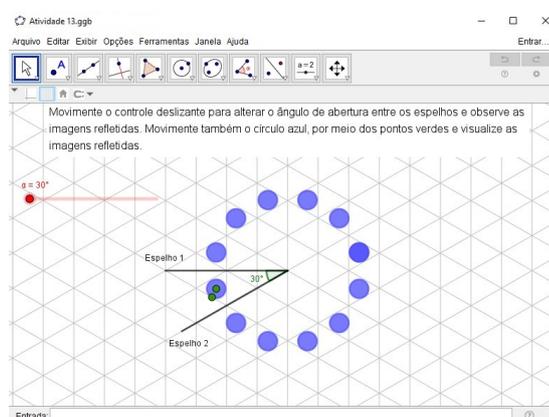
Já na tarefa 13¹³ (Figura 78), entre os espelhos existe um círculo, que pode ser movido livremente. Os alunos devem transladar, rotacionar e redimensionar o círculo

¹² Tarefa 12 disponível em: <<https://ggbm.at/xytszs7q>>

¹³ Tarefa 13 disponível em: <<https://ggbm.at/t2mqbh3n>>

e, variar o ângulo formado entre os espelhos, através do controle deslizante, para assim observarem por meio das variações nas imagens e nos espelhos, a produção desses efeitos.

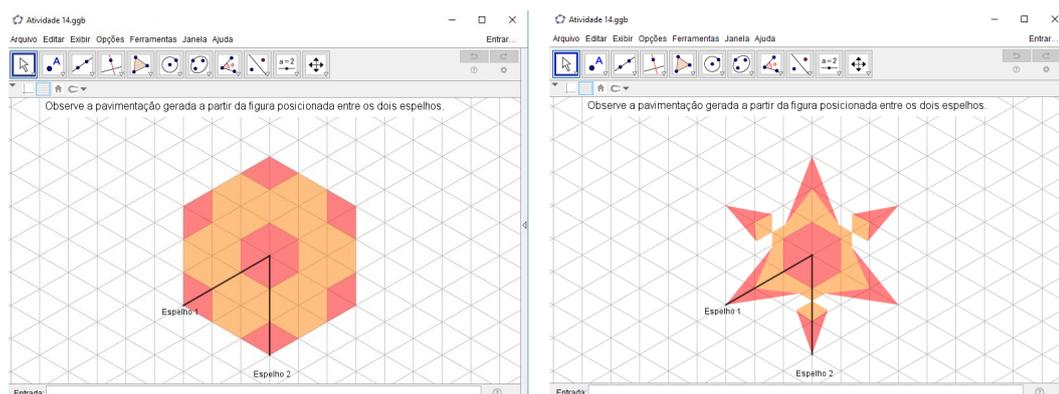
Figura 78 – Visualização da tarefa 13 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

A tarefa 14¹⁴ (Figura 79) possui alguns polígonos formando uma figura, posicionada entre os espelhos, que formam entre si um ângulo de 60° . Aqui os alunos devem alterar os contornos da figura entre os espelhos, movimentando o cursor, e observar o arranjo formado para cada variação na figura.

Figura 79 – Visualização da tarefa 14 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

6.2.3 Uso do GeoGebra para estudar pavimentações e bases geradoras

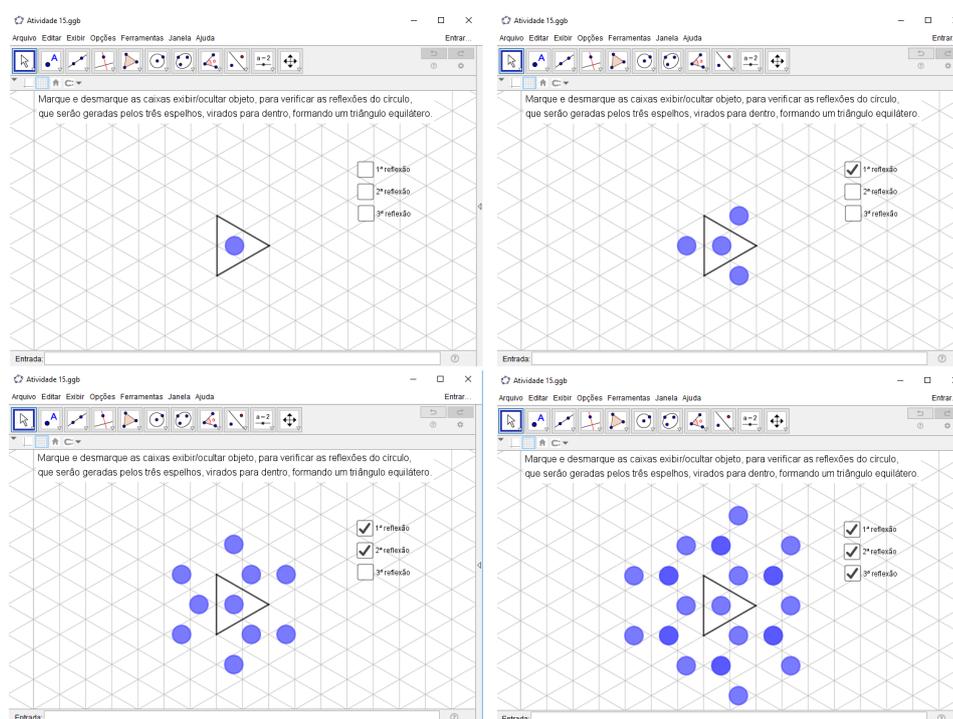
A terceira fase é composta por um conjunto de tarefas em que usam três espelhos, formando um triângulo equilátero, cujo interior vai sendo preenchido por diferentes figuras.

¹⁴ Tarefa 14 disponível em: <<https://ggbm.at/stdu9rrv>>

Esse conjunto de atividades tem como objetivo fazer com que o aluno reconheça as reflexões nos espelhos, identifique e procure criar bases geradoras, bases transformadas e, finalmente, o padrão criado pelas reflexões em caleidoscópios.

A tarefa 15¹⁵ (Figura 80) tem um círculo azul localizado entre os espelhos e três caixas de exibir/ocultar objeto. Nela, os alunos devem marcar as caixas de exibir/ocultar objeto da 1ª reflexão, a 2ª reflexão e a 3ª reflexão, para observar as respectivas reflexões ocorridas nos três espelhos.

Figura 80 – Visualização da tarefa 15 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

Na tarefa 16¹⁶ (Figura 81) existe uma figura no interior dos três espelhos e quatro caixas de exibir/ocultar objeto. Os alunos devem marcar as caixas 1ª base transformada, 2ª base transformada, 3ª base transformada e 4ª base transformada para observar, na respectiva ordem, as reflexões ocorridas em um dos espelhos por uma figura (base geradora).

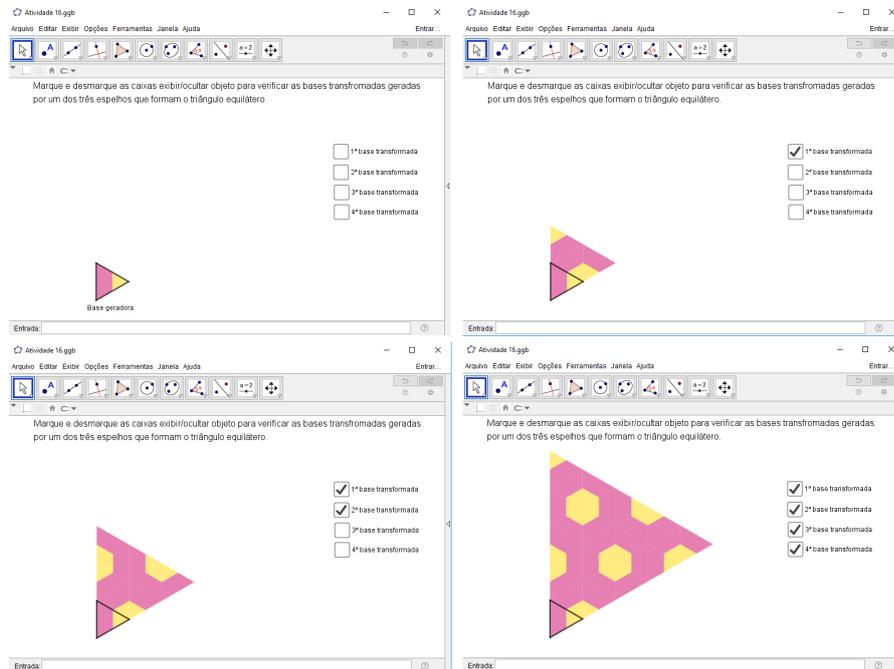
A tarefa 17¹⁷ (Figura 82) é semelhante à anterior, sendo que esta exibe, marcando as caixas de exibir/ocultar objeto, até a 3ª base transformada, pela reflexão da figura da base em apenas um dos espelhos. Neste caso, a figura (base geradora) entre os espelhos é diferente da utilizada na tarefa 16.

¹⁵ Tarefa 15 disponível em: <<https://ggbm.at/jvb3t6ez>>

¹⁶ Tarefa 16 disponível em: <<https://ggbm.at/wp8ge2uj>>

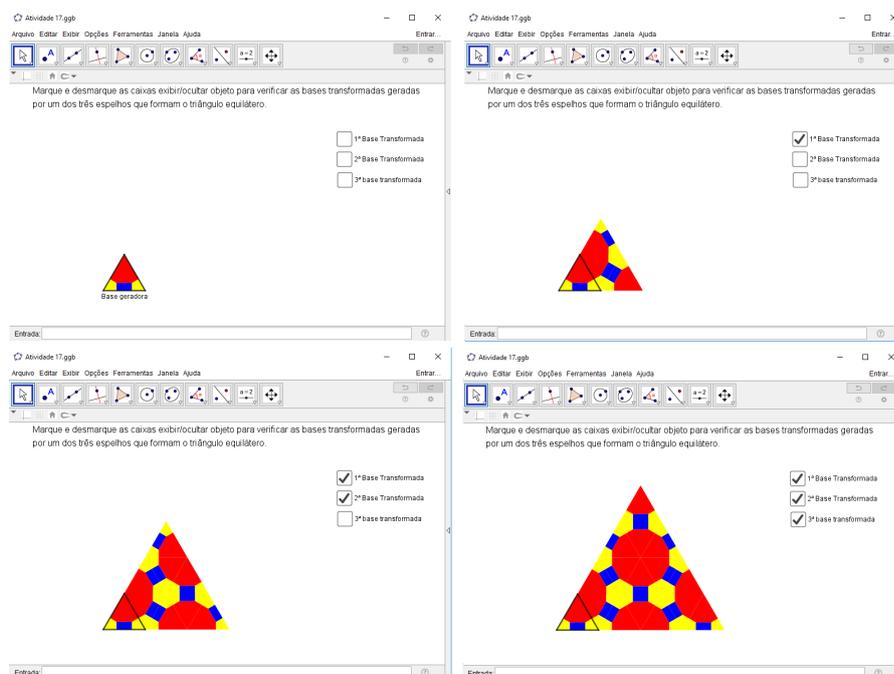
¹⁷ Tarefa 17 disponível em: <<https://ggbm.at/wef6r9jg>>

Figura 81 – Visualização da tarefa 16 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

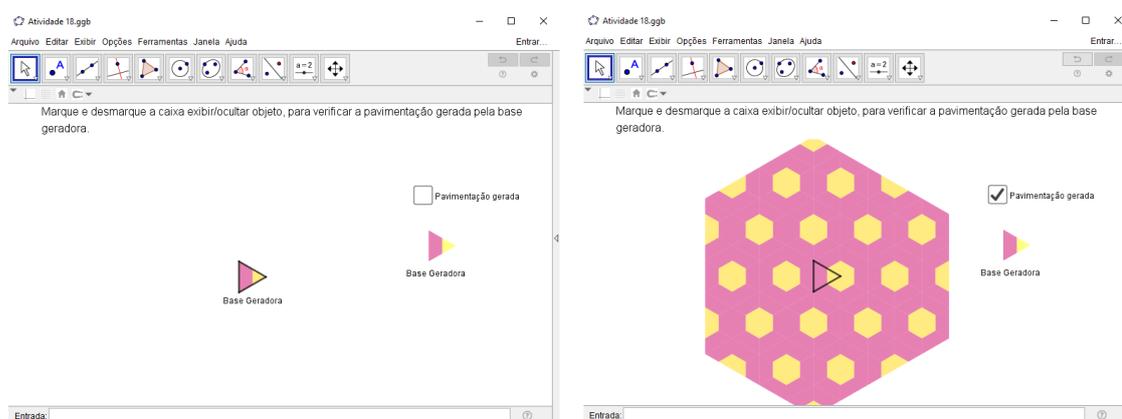
Figura 82 – Visualização da tarefa 17 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

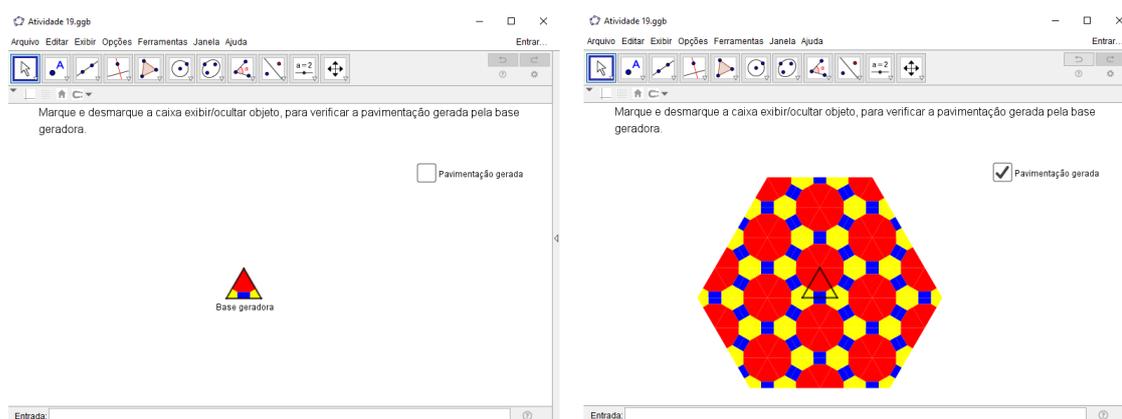
As tarefas 18 e 19 exibem uma base geradora e uma caixa de exibir/ocultar o objeto chamada pavimentação gerada. Os alunos devem inicialmente observar a base geradora localizada entre os espelhos e em seguida marcar a caixa para exibir a pavimentação gerada pela reflexão da base ocorrida nos três espelhos. Na tarefa 18¹⁸ a base geradora compõe juntamente com as reflexões pelos três espelhos uma pavimentação de hexágonos rosas e hexágonos amarelos (Figura 83) e na tarefa 19¹⁹ a base geradora compõe juntamente com as reflexões quadrados azuis, hexágonos amarelos e dodecágonos vermelhos (Figura 84).

Figura 83 – Visualização da tarefa 18 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

Figura 84 – Visualização da tarefa 19 proposta aos alunos



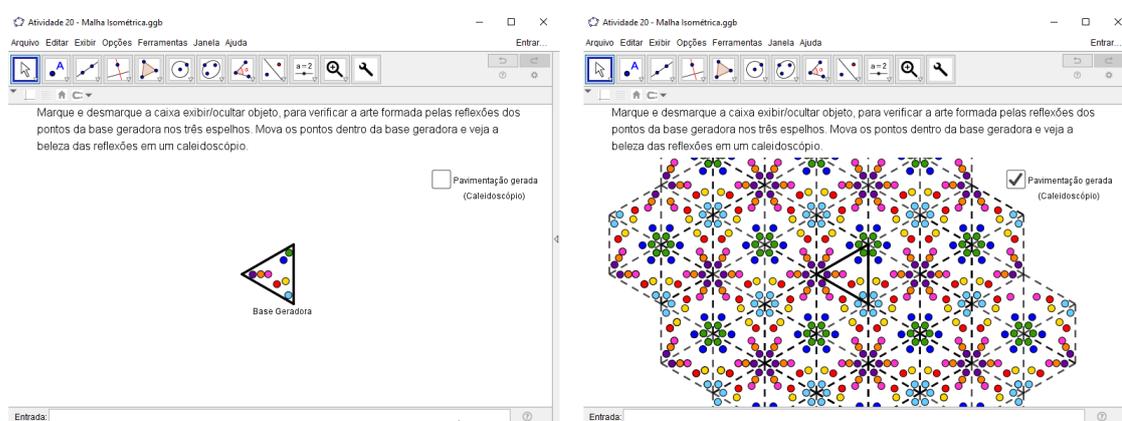
Fonte: O autor, 2018

¹⁸ Tarefa 18 disponível em: <<https://ggbm.at/ezzjjacw>>

¹⁹ Tarefa 19 disponível em: <<https://ggbm.at/k4zcfqfn>>

Finalmente, com uma dinâmica semelhante às anteriores, a tarefa 20²⁰ (Figura 85) possui uma base geradora com alguns pontos coloridos em seu interior, e uma caixa de exibir/ocultar pavimentação gerada (caleidoscópio). Nela, os alunos devem marcar a caixa de exibir pavimentação e movimentar livremente os pontos coloridos no interior da base. Assim, é possível criar pavimentações partindo de diferentes bases geradoras e observar as transformações sofridas tanto na base quanto nas reflexões pelos três espelhos. A movimentação dos pontos da base ainda simula a ideia de um caleidoscópio em movimento, gerando belas imagens através das reflexões.

Figura 85 – Visualização da tarefa 20 proposta aos alunos



Fonte: O autor, 2018

Todas as tarefas foram realizadas em sala juntamente com os professores, tendo sido prestada toda a orientação necessária para um melhor aproveitamento dos alunos. As tarefas realizadas no GeoGebra, foram realizadas após a realização das tarefas com o material concreto. As tarefas com o GeoGebra serviram para complementar as primeiras, no sentido de fazer a conexão das simetrias e pavimentações de uma maneira em que os alunos pudessem observar as reflexões geradas pelos três espelhos por bases formadas por triângulos equiláteros. Além disso, puderam observar a simetria e a pavimentação envolvida por trás de um caleidoscópio e manipulá-lo, antes mesmo da confecção do caleidoscópio como produto final.

²⁰ Tarefa 20 disponível em: <<https://ggbm.at/sevmttuh>>

7 CONSTRUÇÃO DO CALEIDOSCÓPIO

Após a compreensão de todos os conceitos estudados, os alunos já possuíam uma ideia do funcionamento de um caleidoscópio e de toda a matemática envolvida na construção de um objeto simples, mas que produz belas figuras.

Para confeccionar o caleidoscópio, os alunos dividiram-se em duplas e dispuseram de duas aulas de 45 minutos cada. Na confecção foram utilizados os seguintes materiais (Figura 86):

- três espelhos retangulares de 2,8cmx15cm;
- um pedaço de papel manteiga ou translúcido de 5cmx5cm;
- um pedaço de plástico transparente de 5cmx5cm;
- um pedaço de cartolina de 5cmx5cm;
- um pedaço de cartolina de 15cmx12cm;
- fita dupla face;
- fita adesiva colorida;
- fita adesiva grossa;
- miçangas coloridas;
- lantejoulas;
- tesoura sem ponta.

Figura 86 – Material utilizado na construção dos caleidoscópios



Fonte: O autor, 2019

Os alunos, com os três espelhos, formaram um prisma triangular e passaram a fita adesiva grossa, em torno do prisma, de forma que este ficasse rígido. Em uma das bases do prisma colaram um pequeno pedaço de fita dupla face, de tal maneira que a fita não cobrisse toda a base. Nos pedaços de papel manteiga e papel transparente, marcaram e cortaram dois triângulos ligeiramente maiores do que a base do prisma. Na base do prisma que continha um pedaço da fita dupla face, colaram o triângulo de papel manteiga, fechando totalmente esta base. Pela outra base colocaram as miçangas ou lantejoulas no interior do prisma e a fecharam colando o triângulo de plástico transparente. A fita dupla face colada em uma das bases serviu para que algumas das miçangas ficassem fixas e outras móveis dentro o caleidoscópio. Em seguida, com o pedaço pequeno de cartolina cortaram um triângulo um pouco maior que a base do prisma, fizeram um pequeno orifício no centro triângulo e o colaram sobre a base que continha o plástico transparente. Feito isto, colaram, com o auxílio da fita dupla face, a cartolina ao redor do prisma. Para finalizar, os alunos fizeram um acabamento no caleidoscópio, ornamentando-o da forma desejada com fita adesiva colorida, paetês e desenhos (Figura 87).

Figura 87 – Alunos construindo os caleidoscópios



Fonte: O autor, 2018

8 CONCLUSÃO

Na realização das atividades foi possível perceber o grande entusiasmo dos alunos em poder utilizar materiais concretos em sala de aula e em utilizar o computador. O uso dos materiais permitiram aos alunos observar os objetos estudados, através da experimentação e da manipulação. As tecnologias também foram de grande importância na execução das atividades, uma vez que propiciaram a manipulação de determinados experimentos que permitiram aos alunos fazer comparações entre os ângulos formados pelos espelhos e as correspondentes reflexões dos objetos. Esses recursos foram essenciais para a descoberta e troca de ideias dos alunos.

As etapas da atividade com o material concreto permitiram aos alunos observar as simetrias e as reflexões acontecendo, de fato, através dos espelhos. Isso foi extremamente importante, pois os alunos, principalmente do 6º ano necessitam da experimentação de materiais concretos. Inclusive, pelo fato da reflexão ser um conteúdo que requer uma certa abstração. Principalmente nas situações em que intervêm dois espelhos articulados, o estudo com espelhos planos torna-se essencial.

As tarefas realizadas com o software GeoGebra foram fundamentais para reafirmar os conceitos estudados e observados com o material concreto. O software permite o aluno observar o rigor nas construções e reflexões, de maneira mais eficiente do que no estudo com os espelhos. Além disso, o software proporcionou o estudo das bases geradoras e as bases transformadas das pavimentações, estudo este que se torna mais difícil de ser realizado com os espelhos.

O conjunto de tarefas iniciais permite ao aluno compreender de forma consistente o conceito de reflexão, uma vez que ele pode participar ativamente na construção do conhecimento, manipulando por vezes os eixos de simetria e por vezes as figuras simétricas. Após o segundo conjunto de tarefas o aluno pode perceber o que ocorre com as reflexões geradas por imagens posicionadas entre dois espelhos não paralelos e formando um ângulo menor do que 180° . O estudo dos espelhos articulados é essencial para o terceiro momento, de maior complexidade e abstração, que consiste na construção do conceito de base geradora de uma pavimentação.

Ao finalizar as sucessivas etapas da atividade proposta foi visível que em cada uma delas o aluno atingiu um grau de conhecimento efetivo e mais consistente, apropriando-se dos conceitos de simetria, pavimentação e bases geradoras.

A culminância das atividades com a construção e manipulação de um caleidoscópio foi o ápice de todo o estudo realizado. Com o caleidoscópio pronto os alunos perceberam que todo o estudo realizado estava presente no objeto que acabara de ser construído.

Posteriormente à realização das tarefas e da construção dos caleidoscópios, os alunos participaram de uma feira de matemática realizada na escola, em que explicaram, aos

demais colegas, a matemática envolvida por trás de um objeto simples de ser confeccionado, mas de tamanha beleza.

A realização de atividades como a descrita nos capítulos 6 e 7 leva os alunos a encararem a geometria de uma maneira mais lúdica e prazerosa. A aula de matemática deixa de ser encarada como um momento em que se repetem rotinas fastidiosas para passar a ser um momento em que o aluno é convidado a agir e a prever o que vai ocorrer, sendo por vezes surpreendido pela beleza das imagens que obtém. O recurso a uma forma de trabalho colaborativo leva a atribuir mais significado ao conhecimento assim construído. Trata-se de uma oportunidade que permite estabelecer conexões entre alguns aspectos da matemática e que proporciona, também, a realização de estudos interdisciplinares.

REFERÊNCIAS

- ASSIS, C. C. de; BEZERRA, M. da C. A. Formação continuada para professores de matemática: integrando softwares educativos à prática docente. In: *XIII Conferência interamericana de Educação Matemática*. Recife: CIAEM, 2011. p. 1–12. Citado na página 16.
- BALDISSERA, A. Pesquisa-ação: uma metodologia do “conhecer” e do “agir” coletivo. *Sociedade em Debate*, Pelotas, v. 7, n. 2, p. 5–25, ago 2001. Citado na página 18.
- BARBOSA, R. M. Determinação do número de imagens para espelhos planos. *Atividades Pedagógicas*, p. 45–48, 1957. Citado na página 37.
- BARROS, F. de C. *Pavimentações do Plano: Propostas lúdicas de aula: Trabalhando com Ângulos internos, simetrias, isometrias, obras de arte e mediatrizes*. 120 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Sociedade Brasileira de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2016. Citado na página 22.
- BATISTELA, R. de F. *Um kit de espelhos planos para o ensino de Geometria*. 144 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2005. Citado na página 33.
- BATISTELA, R. de F.; SANTOS, M. R. dos. As pesquisas sobre a utilização de caleidoscópios e espelhos para o ensino de geometria no brasil: de onde vêm, para onde vão? In: *VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática*. Montevideo: CIBEM, 2013. p. 1–7. Citado na página 17.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1997. Citado na página 15.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998. Citado na página 16.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEF, 2016. Citado na página 15.
- CARVALHO, D. L. de. *Metodologia do Ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 1990. 120 p. Citado na página 15.
- D’AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? *Temas e Debates*, Brasília, v. II, n. 2, p. 15–19, 1996. Citado na página 16.
- ENGEL, G. I. Pesquisa-ação. *Educar*, Curitiba, n. 16, p. 181–191, 2000. Citado na página 18.
- KINGSTON, M. Mosaics by reflection. *The Mathematics Teacher*, Reston, p. 280–286, Apr 1957. Citado na página 63.
- LOURENÇO, M. T. C. *O ensino de geometria através da pavimentação do plano*. 120 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2014. Citado na página 21.

MARTINS, R. A. *Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais*. 246 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

MURARI, C. Um caleidoscópio educacional modificado para trabalho em grupo. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, v. 3, n. 2, p. 11–15, 1995. Citado na página 58.

MURARI, C. *Ensino-aprendizagem de geometria nas 7^a e 8^a séries, via caleidoscópios*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 60, 62 e 63.

MURARI, C.; BARBOSA, R. M. *Belas formas em caleidocópios, caleidosciclos e caleidostrótons*. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. v. 3. 174 p. O professor de matemática em ação. Citado 10 vezes nas páginas 29, 30, 31, 32, 33, 34, 55, 56, 57 e 63.

MURARI, C.; SANTOS, M. R. dos. Pavimentações do plano por polígonos regulares e visualização em caleidoscópios. In: *X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador: ENEM, 2010. p. 1–9. Citado na página 21.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. *Zetetiké*, Campinas, v. 4, n. 6, p. 65–74, jul/dez 1996. Citado na página 14.

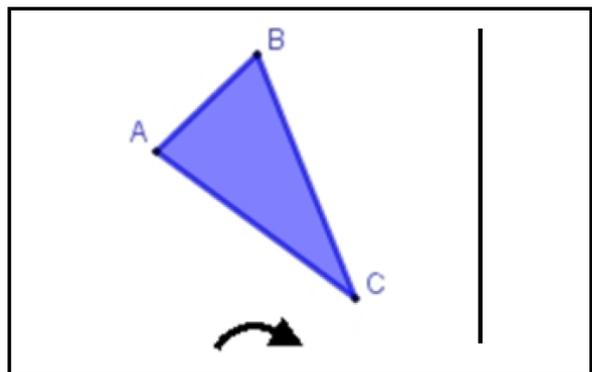
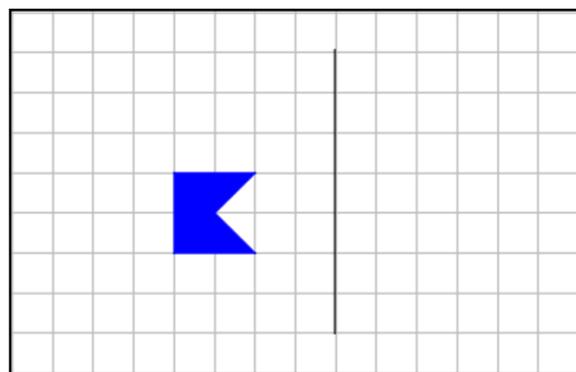
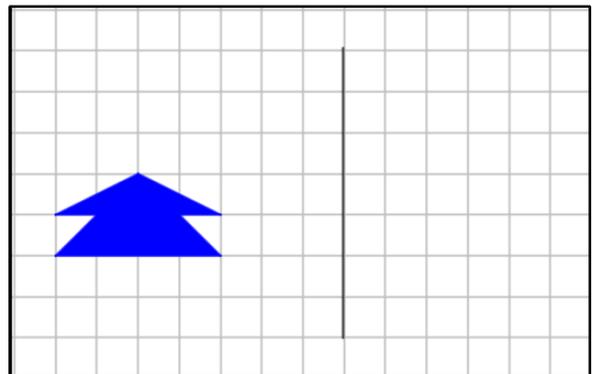
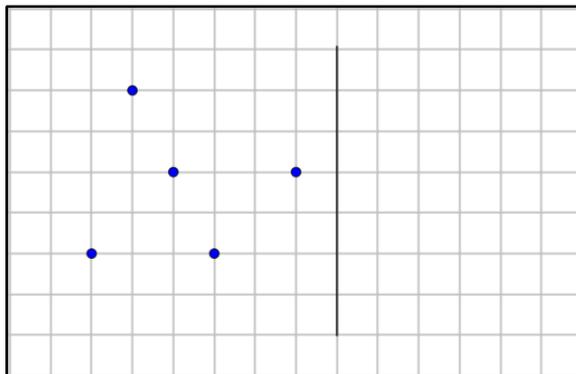
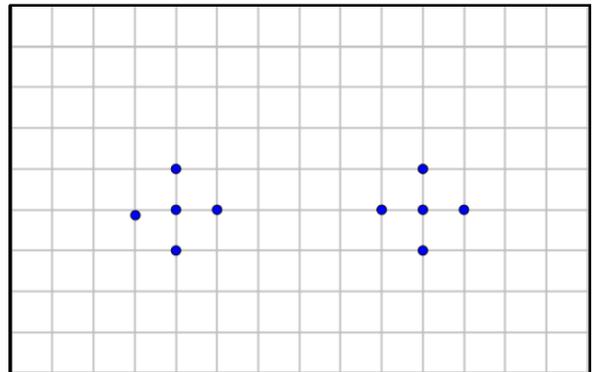
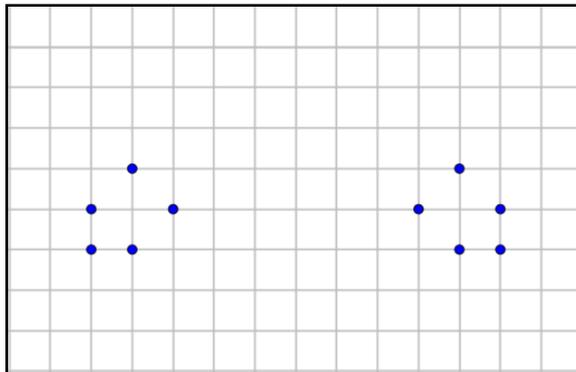
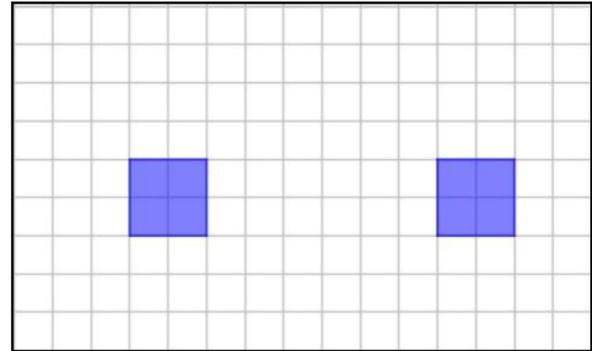
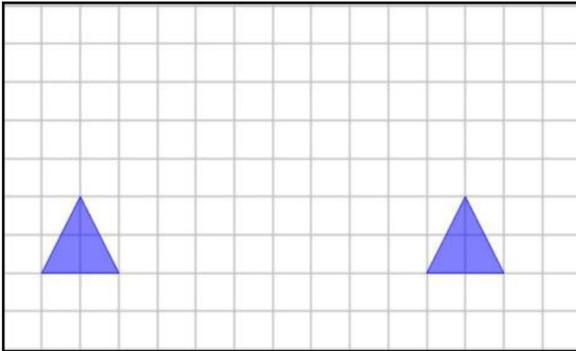
PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 152 p. Citado na página 15.

ANEXOS

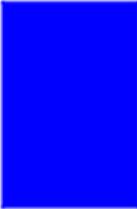
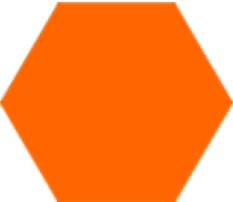
ANEXO A – FOLHA DE TAREFAS

SIMETRIAS

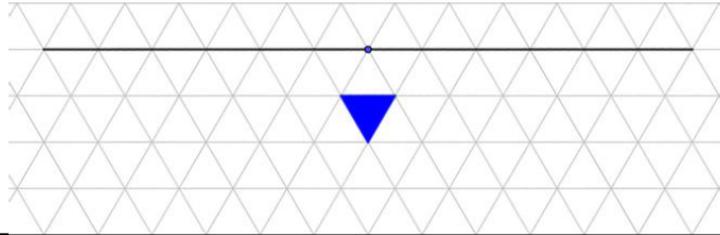
Marque os eixos das simetrias ou reproduza a imagem simétrica, em cada um dos casos abaixo:



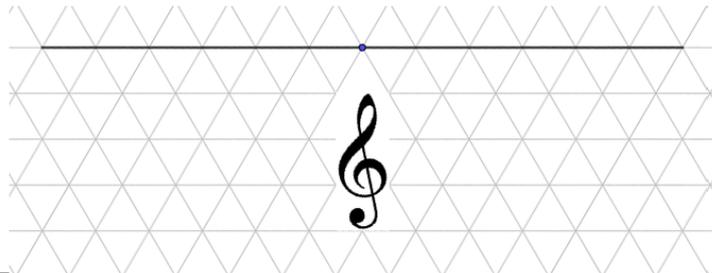
Marque o(s) eixo(s) de simetria das figuras, caso elas possuam e preencha a tabela abaixo:

Figura	Possui eixos(s)?	Quanto(s)?	Figura	Possui eixos(s)?	Quanto(s)?
					
					
					
					
					
					

Variando os ângulos entre os espelhos preencha a tabela de acordo com suas observações:

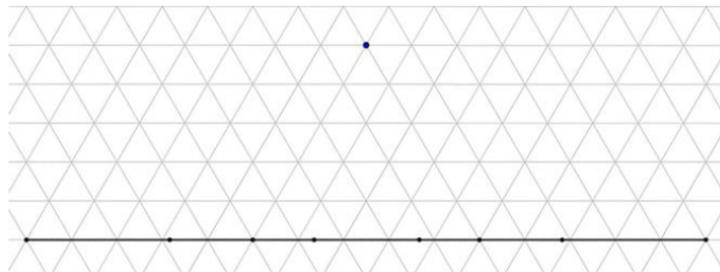


Ângulo de abertura dos espelhos	Total de figuras geradas com as reflexões
30°	
60°	
90°	
120°	



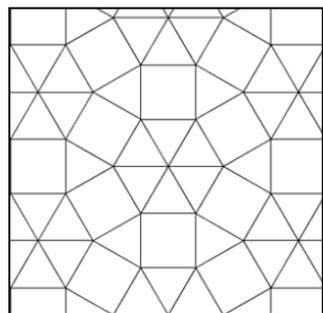
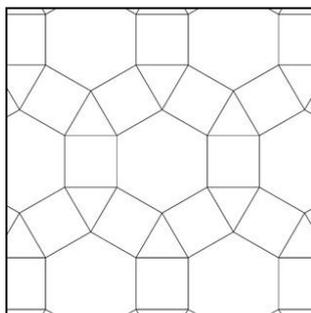
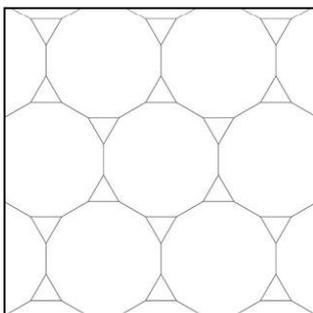
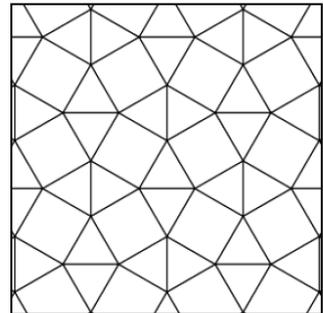
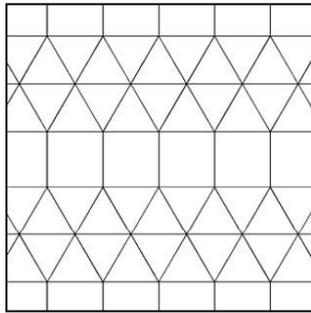
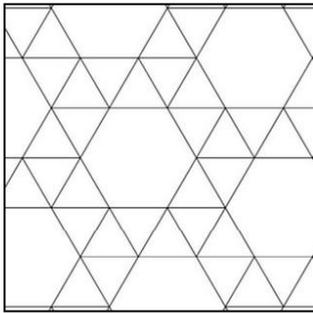
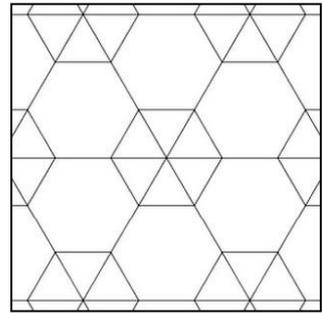
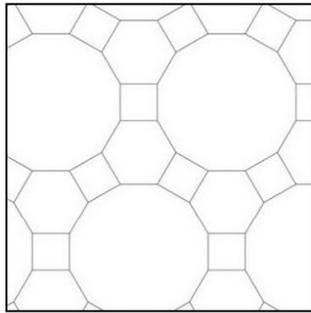
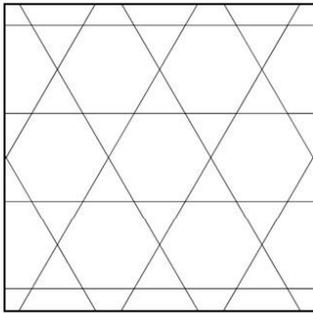
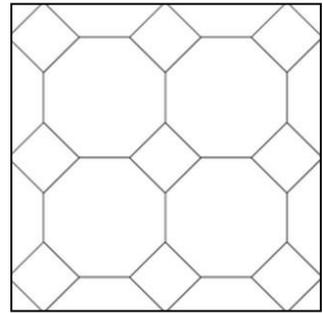
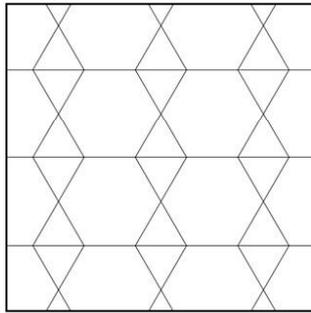
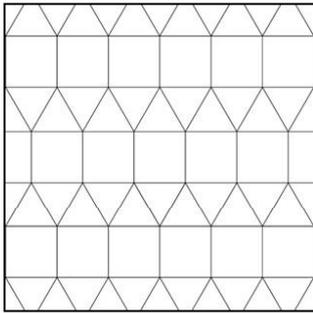
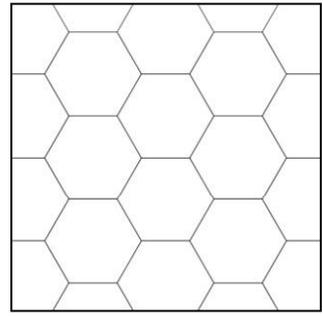
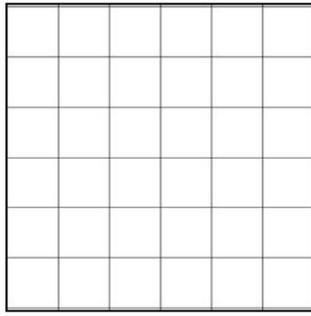
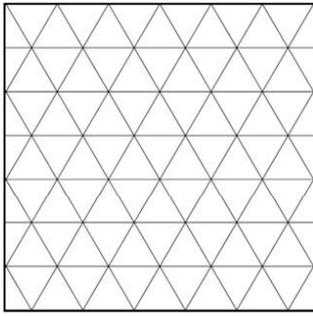
Ângulo de abertura dos espelhos	Total de figuras geradas com as reflexões
30°	
60°	
90°	
120°	

Variando os ângulos entre os espelhos preencha a tabela de acordo com suas observações:

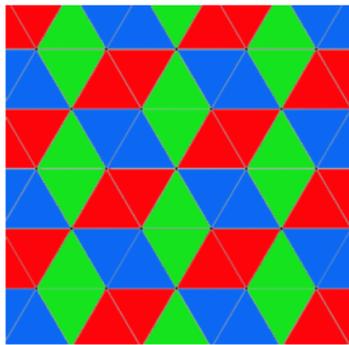
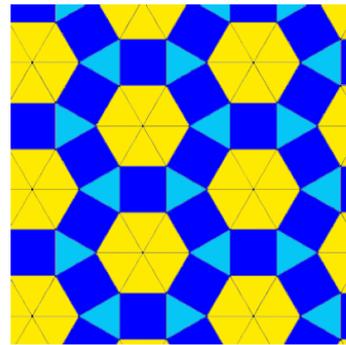
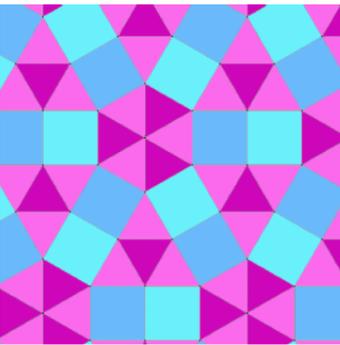
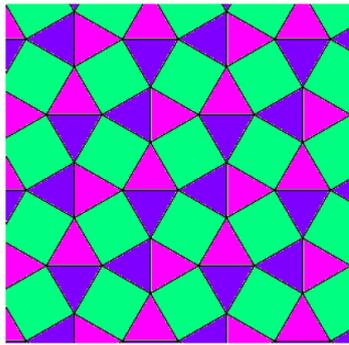
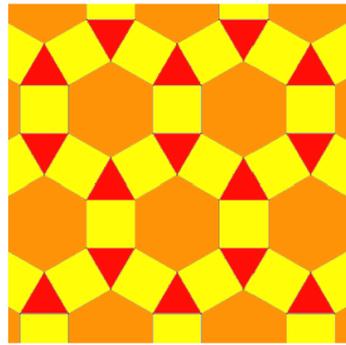
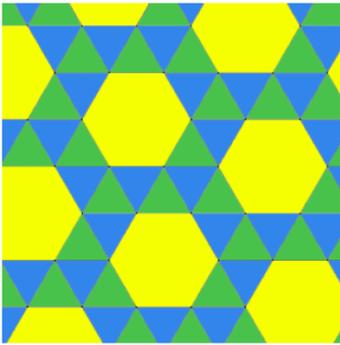
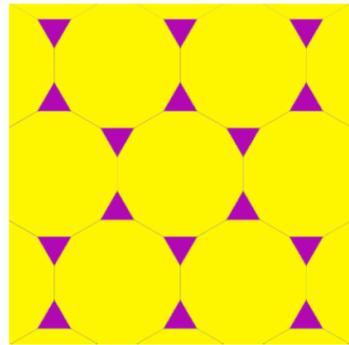
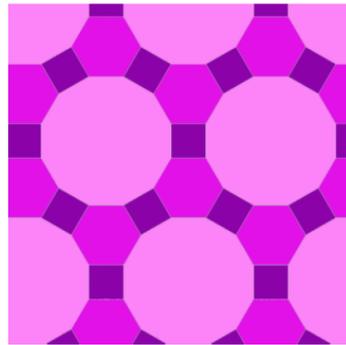
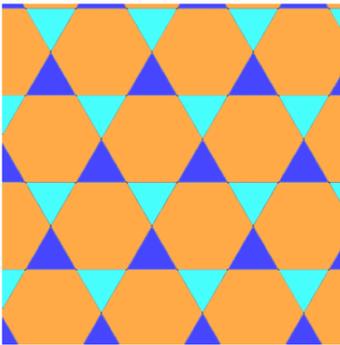
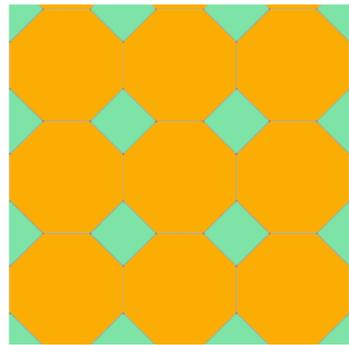
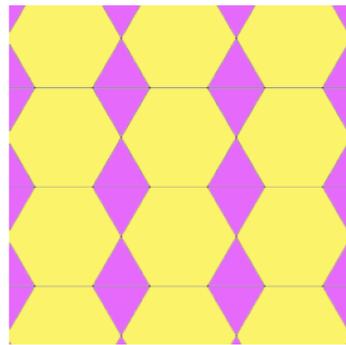
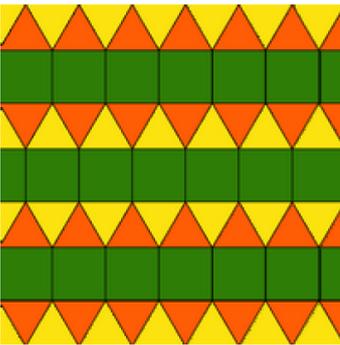
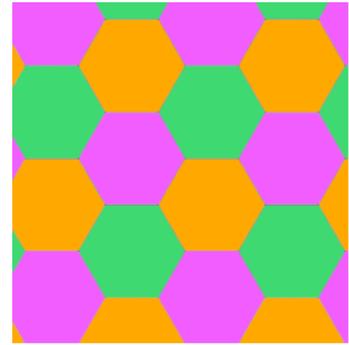
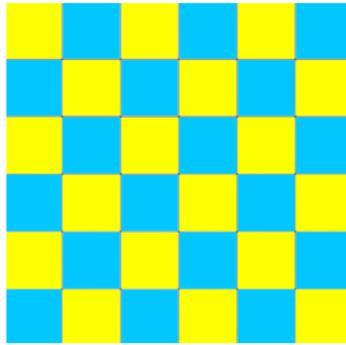
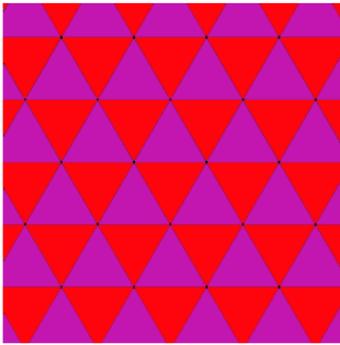


Ângulo entre os espelhos	Nº de lados do polígono formado	O polígono é regular?	Nome do polígono formado
30°			
60°			
80°			
90°			
120°			

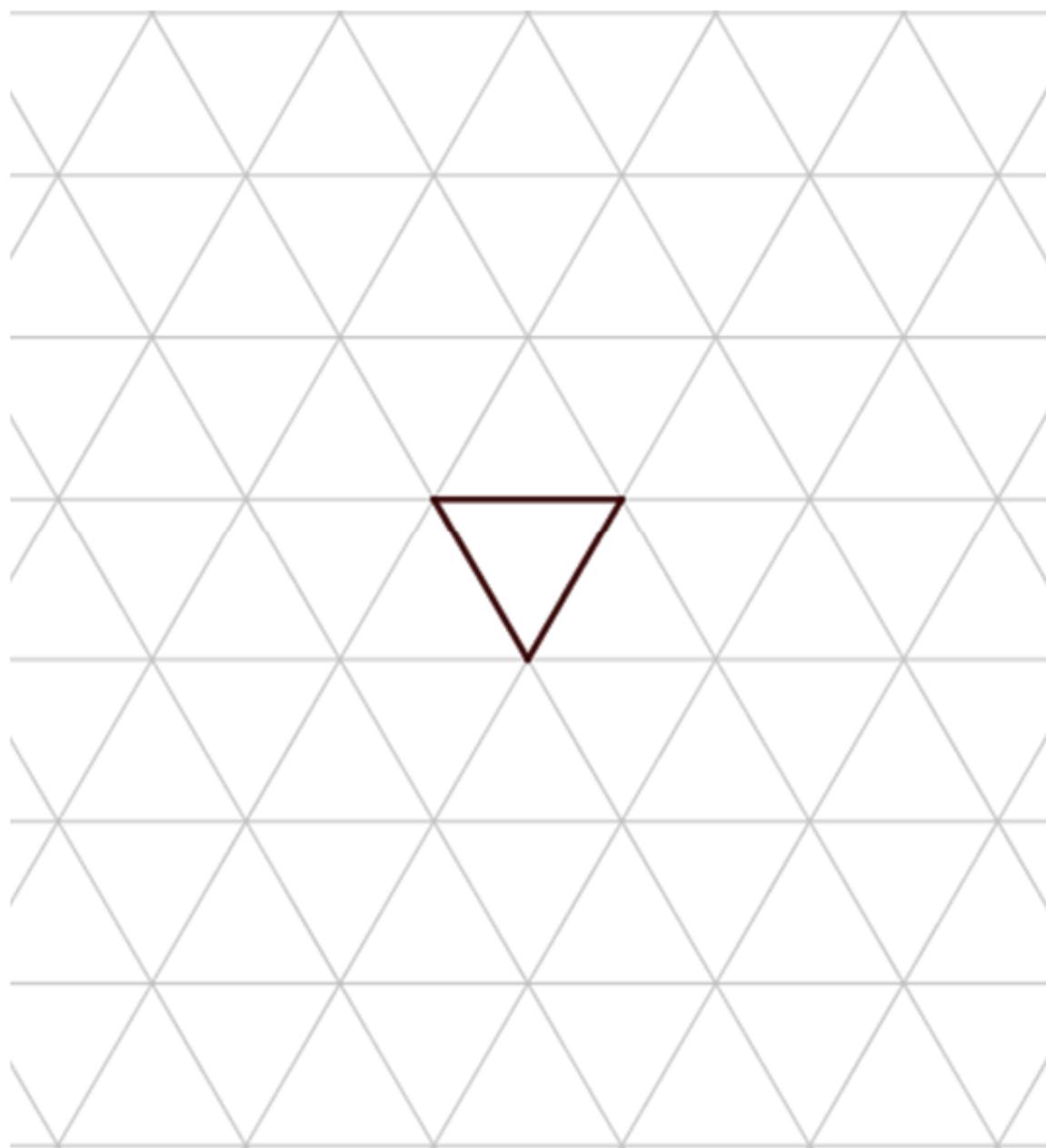
Marque as bases geradoras, encontradas em sala, das pavimentações abaixo:



Marque as bases geradoras, encontradas em sala, das pavimentações abaixo:



No triângulo mais escuro (base geradora) desenhe pelo menos três símbolos coloridos e, em seguida, com o auxílio dos espelhos construa as bases transformadas para gerar uma pavimentação caleidoscópica.



Observações:
