UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS GRADUAÇÃO E INOVACÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

REGINALDO JOÃO ASSUNÇÃO JÚNIOR

UMA ANÁLISE SOBRE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARITMÍCAS EM LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DAS HABILIDADES PROPOSTAS PELA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

SÃO LUÍS - MA
2019

REGINALDO JOÃO ASSUNÇÃO JÚNIOR

UMA ANÁLISE SOBRE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARITMÍCAS EM LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DAS HABILIDADES PROPOSTAS PELA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Valeska Martins de Souza

SÃO LUÍS – MA
2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Assunção Júnior, Reginaldo João.
Uma análise sobre funções exponenciais e logarítmicas em livros didáticos à luz das habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular / Reginaldo João Assunção Júnior. - 2019.
79 f.

Orientador(a): Valeska Martins de Souza.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, SAO LUIS, 2019.

1. BNCC. 2. Educação Básica. 3. Livro Didático. 4. Matemática. I. Martins de Souza, Valeska. II. Título.

REGINALDO JOÃO ASSUNÇÃO JÚNIOR

UMA ANÁLISE SOBRE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARITMÍCAS EM LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DAS HABILIDADES PROPOSTAS PELA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Valeska Martins de Souza

Aprovada em:

Banca Examinadora

____

Profa. Dra. Valeska Martins de Souza (Orientadora)

Universidade Federal do Maranhão – UFMA.

____

Prof. Dr. Antônio José da Silva

Universidade Federal do Maranhão UFMA.

____

Prof. Dr. Nilson Santos Costa

Universidade Federal do Maranhão UFMA.

"ORA ET LABORA"

(São Bento)

A minha família por sempre está ao meu lado, a

Minha esposa e minhas Marias.

AGRADECIMENTOS

A Deus Trindade Santa de Amor e Comunhão, todo meu louvor e eterna gratidão.

A minha família que sempre me incentivou e apoiou em todos os momentos, em especial meus pais Reginaldo e Conceição pela educação de valores que puderam me proporcionar.

A minha esposa Giselly e minhas filhas Maria Gabriely e Maria Graziely, pelo amor, carinho e compreensão.

Ao PROFMAT-UFMA pela grandiosa oportunidade de aprendizado, inserção no meio acadêmico-científico, que engloba a todos, proporcionando uma formação gratificante tanto para os professores quanto aos alunos, em especial ao coordenador Prof. Dr. Antônio José da Silva, pelo apoio incondicional e por acreditar em cada aluno, incentivando a oferecer o melhor de si.

Aos amigos e colegas de turma do PROFMAT-UFMA (2015), pelo companheirismo presente em nosso meio, e os momentos de estudos, de maneira especial ao amigo/irmão Gilson Ricardo.

A minha orientadora Profa. Dra. Valeska Martins de Souza, pela confiança, dedicação e apoio em todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos familiares da minha esposa, pela acolhida fraterna na cidade de Itapecuru-Mirim, em especial a Andressa e Adriely pelo apoio que sempre me proporcionaram.

RESUMO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) surgiu visando garantir aos estudantes que suas aprendizagens básicas sejam desenvolvidas e consolidadas na Educação Básica. A dissertação tem como objetivo analisar as habilidades da BNCC referentes ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas nos livros de matemática aprovados no PNLD 2018-2020: PAIVA (2015), IEZZI (2016) e SOUZA (2016), adotados em escolas da rede estadual de ensino do Maranhão. Apresentam-se as concepções a respeito da matemática de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e com a BNCC, enfatizando os parâmetros desta voltados para a análise do livro didático. A partir dos dados da pesquisa, observou-se que a habilidade EM13MAT305 está contemplada nas obras referenciadas, no entanto para a EM13MAT405 não há nenhuma menção metodológica para a mesma. As demais competências, são vistas por uma ou duas obras. Portanto, conclui-se que as obras abrangem de forma parcial as habilidades, que são necessárias para que o docente tenha domínio dos conteúdos abordados no livro pedagógico. As normativas expostas na BNCC são importantes para garantir maior eficácia no ensino da matemática

Palavras-chaves: BNCC. Educação Básica. Livro Didático. Matemática.

ABSTRACT

The Common National Curriculum Base (BNCC) has emerged to ensure students that their basic learning is developed and consolidated in basic education. The dissertation aims to analyze the BNCC skills regarding the study of exponential and logarithmic functions in mathematics books approved in PNLD 2018-2020: PAIVA (2015), IEZZI (2016) and SOUZA (2016), adopted in state schools of Maranhão. Concepts about mathematics are presented according to the National Curriculum Parameters (PCN's) and the BNCC, emphasizing its parameters for the analysis of the textbook. From the research data, it was observed that the ability EM13MAT305 is included in the referenced works, however for the EM13MAT405 there is no methodological mention for it. The other skills are seen by one or two works. Therefore, it is concluded that the works partially cover the skills, which are necessary for the teacher to have mastery of the contents covered in the pedagogical book. BNCC standards are important to ensure greater effectiveness in mathematics teaching

Key-words: BNCC. Basic Education. Textbook. Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

Educação com Computador – EDUCOM.
Programa Nacional de Informática Educativa - PRONINFE
Programa Nacional de Tecnologia Educacional – PROINFO
Núcleos de Tecnologia Educacional – NTE
Centros de Informática na Educação de 1º a 2º graus e especial – CIED
Universidade Federal do Maranhão – UFMA
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Universidade de São Paulo - USP
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp
Tecnologia, Informação e Comunicação – *ICT*
Centro de Documentação e de Informação - CDI
Plano de Ações Articuladas – PAR
Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE
Lógica de Programação – LP
Base Nacional Comum Curricular – BNCC
Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB
Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN
Estados Unidos da América – EUA
Ministério da Educação – MEC
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES
Ciência da Computação – CS
Tecnologia da Informação – TI
Literacia Digital – DL
Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC
Centro de Educação Integrado e Desenvolvimento – CIED
Centro de Inovação Para Educação Brasileira – CIEB
Comissão Nacional do Livro Didático – CNLD

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O livro didático é um dos mais antigos instrumentos utilizados no processo de educação escolar. Segundo Lopes (2013), durante o século XIX e nos primeiros anos do século XX, os livros adotados pelo Brasil eram provenientes de Portugal. Apenas em 1938, encontra-se o primeiro registro referente a preocupação oficial com o livro didático no país. Posteriormente, é criada a Comissão Nacional do Livro Didático, escolhida pelo Presidente da República, formada por sete pessoas com notório conhecimento pedagógico sendo: duas especializadas em metodologia de línguas, três especializadas em metodologia das ciências e duas especializadas em metodologia das técnicas, não podendo haver nenhuma relação comercial entre algum membro desta comissão com qualquer editora de livros.

Esta comissão tinha por objetivos: analisar e proferir pareceres a respeito dos livros didáticos apresentados a mesma, fomentar a produção e orientar a importação de livros didáticos, propor concurso visando a produção de tipos específicos de livros didáticos necessário, entretanto, inexistentes no Brasil, possibilitando o surgimento de programas oficiais para o livro didático.

Os programas oficiais para o livro didático no Brasil, segundo Ferreira, et. al. (2015), sofreram influências e transformações em decorrência do momento histórico em que o país estava inserido. Tais programas foram direcionados para demandas econômicas, políticas e sociais ocasionando um direcionamento do currículo. Assim, nota-se haver diferentes programas que desempenharam papel fundamental de acordo com o contexto político no qual o Brasil estava inserido. Apesar desta realidade, percebe-se a evolução e aperfeiçoamento do livro didático. Ao analisá-lo, faz-se necessário que o professor atue diretamente em sua concepção e atuação na sala de aula, através de concepções e intervenções pertinentes.

A partir de 1997 o MEC começou a publicar os primeiros volumes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), porém, em 2010 houve intensas discussões sobre a necessidade da instituição da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que foi definida no artigo 210 da Constituição Federal do Brasil de 1988; em 2015 foi disponibilizada a primeira versão da BNCC, e em 2018 foi divulgado o último documento referente ao Ensino Médio. Tendo como base tais recomendações, construíram-se livros didáticos que são instrumentos facilitadores da prática docente, frutos do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), sendo o mais recente é o PNLD 2018- 2020.

Entre os professores de matemática a utilização do livro didático é prática comum, entretanto, não se pode considerá-lo como único recurso pedagógico. Para Rosa, et. al. (2012), faz-se necessário inserir outros recursos levando-se em consideração o contexto escolar. Também se torna importante, verificar e avaliar as atividades propostas, bem como suas abordagens metodológicas adequando-as de acordo com as necessidades e particularidades da turma, possibilitando em harmonia com os objetivos planejados que a aprendizagem ocorra de maneira eficaz.

Assim, de acordo com Bastos (2004), verifica-se que o livro didático é de extrema importância para o desenvolvimento do trabalho docente, por isso, o MEC elabora um guia de orientação, cujo objetivo é orientar o professor em relação a escolha daquele que melhor adequa-se a sua realidade. Entretanto, nota-se, que o professor concebe apenas como manual de exercícios norteadores das ações a serem desenvolvidas em sala de aula. Tal concepção é preocupante, pois cada obra é desenvolvida em consonância com a visão de cada autor a respeito do processo de ensino e aprendizagem, e o docente utiliza o livro pedagógico apenas para retransmissão de conteúdos através de aulas expositivas e resolução de exercícios.

Ao pesquisar a realidade docente no estado de Minas Gerais, Marim et. al. (2015), valida o que Bastos (2004), expõe a respeito do livro didático, exercendo forte influência no processo de ensino e aprendizagem, ressaltando-se a necessidade de aprimoramento constante por parte docente. Ainda, segundo Marim et. al. (2015), o manual que acompanha o livro didático serve para agregar ao trabalho do professor através de metodologias e sugestões, possibilitando um ensino de qualidade.

Nessa perspectiva, segundo Lima, et.al. (2014), a análise do livro instrutivo pelo professor de matemática torna-se relevante, pois através desta poderá gerenciar os pontos positivos e negativos presentes na obra adotada, adequando a realidade discente e a proposta pedagógica escolar em que ele está inserido, explorando ao máximo as potencialidades presentes. Logo, torna-se importante que estas análises sejam executadas por toda comunidade escolar, sobretudo por aqueles profissionais mais experientes na área e que na formação inicial docente possam ser realizadas atividades objetivando-se a análise de livros didáticos.

Ao analisar algumas coleções de matemática do ensino médio, Lima (2001), ressalta que o livro didático é um instrumento essencial que o professor utiliza para desenvolver seu trabalho, pois ali são encontradas as definições, demonstrações, exemplos e atividades diversas e as orientações metodológicas para melhor desenvolvimento do trabalho e que grande parte dos professores o tem como única fonte de pesquisa. Apesar do livro ser de ótima impressão e diagramação, nota-se que o mesmo privilegia apenas a manipulação, negligenciando as outras etapas em que a matemática é caracterizada: a conceituação e as aplicações. Assim, verifica-se que a conceituação presente ocorre de maneira deficitária, ocorrendo poucas aplicações reais.

No que se refere ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas, são trabalhadas isoladamente, mesmo sabendo que uma é a inversa da outra. Também nota-se que a calculadora é pouco explorada em detrimento ao uso de tábua de logaritmo, não levando em consideração os avanços tecnológicos, suas aplicações são caracterizadas em que as funções já estão disponíveis e não há a caracterização das mesmas.

Segundo Freitas et. al. (2013), ao analisar livros de matemática indicados pelo PNLD, em relação a função exponencial, tomando-se por parâmetro e apoio a Teoria do Antropológico do Didático (TAD), percebe-se um modelo de técnica/tarefa baseado na memorização, algoritmização, raciocínio crítico e uma elaboração mais interpretativa. Entretanto, nota-se que os critérios utilizados pelo MEC não são aplicados em todos os capítulos, constatado ao analisar as funções exponenciais. Sabendo que o livro didático é utilizado como apoio, sendo na maioria das vezes o único material utilizado pelo professor, faz-se necessário selecionar tarefas significativas de variadas fontes de pesquisa possibilitando a construção do conceito sobre função exponencial e utilizar no planejamento docente.

Diante desta conjuntura, Utta (2018, p.34), ressalta que:

> [...]No dia a dia do trabalho docente, precisamos reconhecer o valor que deve ser dado à teoria (podemos considerar aqui tanto o conhecimento da disciplina que ministramos, como das questões pedagógicas mais amplas e de sala de aula), conduzindo para uma transformação na educação com base no conhecimento que gera uma crítica à sociedade e para um processo de emancipação humana[...]

Assim faz-se necessário averiguar como são organizados os livros didáticos da disciplina de Matemática, aprovados no PNLD mais recente, em relação aos parâmetros definidos na BNCC, a fim de se notar a efetivação de tais planejamentos e recomendações que visam uma melhoria na educação básica brasileira, pois como explica ROSA et. al., (2012), é a análise do livro educacional, que possibilita identificar possíveis falhas na formação didática e se há uma alguma lacuna não preenchida em relação às práticas sociais definidas à escola, ou seja, tal análise permite compreender, dentre todas as questões, como está a relação dos livros didáticos com a BNCC.

Baseado nessas considerações, o objetivo geral do trabalho consiste em analisar livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2018-2020 através de parâmetros definidos conforme a BNCC. Enquanto, que constituem os objetivos específicos: situar o ensino da

Matemática de acordo com PCN’s e BNCC; analisar os livros didáticos de PAIVA (2015), IEZZI (2016), SOUZA (2016) aprovados no PNLD 2018-2020, de acordo com as habilidades da BNCC relacionadas ao estudo de funções exponenciais e logarítmicas e retomar os conceitos básicos referente ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas para o ensino médio.

2. PARÂMETROS CURRICULARES E O LIVRO DIDÁTICO

No processo de ensino e aprendizagem, os livros didáticos, de acordo com FERREIRA (2016) são formas de proporcionar segurança aos alunos sobre a sistematização do conhecimento.

2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) de Matemática

A proposta dos PCN's visa relacionar as competências indicadas na base nacional comum em relação a matemática, buscando explicitar as habilidades básicas que o discente deve ter ao final da educação básica, complementando o aprendizado iniciado na educação infantil e ensino fundamental. Essa proposta também, organiza o aprendizado visando produzir um conhecimento efetivo, não somente na sua superficialidade, através da interdisciplinaridade e contextualização.

O ensino médio, é de caráter amplo a partir do momento que, as competências humanas devem estar associadas aos conhecimentos matemáticos, sendo parte primordial da formação cidadã de sentido universal. Os PCN's também possuem uma seção intitulada "O sentido do aprendizado na área", que, proporciona uma aprendizagem significativa na vida e no trabalho, no qual todas as competências e informações adquiridas sejam instrumentos reais de percepção e satisfação, evitando tópicos a serem mostrados como compreensíveis em outra etapa da vida acadêmica.

Outra seção presente, refere-se a contextualização, a qual deve começar com um texto introdutório, de caráter mais geral, representando sinteticamente os objetivos da matemática e como os mesmos estão em sintonia com os objetivos explícitos nas outras áreas de conhecimento. Em seguida, percebemos a parte central do conhecimento, são as proposições correspondentes ao aprendizado de matemática, aprofundando as habilidades e competências próprias dessa área de conhecimento, bem como as formas e tecnologias que podem e devem ser tratadas.

2.1.1 O sentido do aprendizado em Matemática

Na LDB/96, verifica-se que o Ensino Médio é caracterizado como a última etapa da educação básica (BRASIL, 1996) e a resolução CNE/98 institui diretrizes curriculares para esta etapa, propondo uma educação para promoção de valores, mostrando de que forma esse aprendizado de matemática, iniciado nas outras etapas da educação básica devem ser complementados e aprofundados no ensino médio, pois compreende-se que nesta etapa o discente possui maior maturidade e capacidade de abstração para que os objetivos educacionais possam ter maior ambição formativa (BRASIL, 1998) .

Nesse contexto, cada discente nessa etapa, já possui condições de desenvolver, compreender, conjecturar e abstrair os saberes matemáticos, pois já têm uma consciência mais plena de suas responsabilidades, direitos, estabelecendo metas formativas particulares em relação ao ensino da matemática, envolvendo a articulação interdisciplinar, o uso da tecnologia, de maneira prática, visando uma perspectiva integradora. A interdisciplinaridade do aprendizado matemático não sobrepões a disciplinaridade desse conhecimento, pois suas especificidades presentes na ciência, bem como em suas tecnologias associadas, seriam de difícil aprendizado, estando estes utilizados apenas no ensino médio, privilegiando o conhecimento científico disciplinar apenas nessa etapa da educação básica.

Os objetivos da matemática no ensino médio não podem resumir a treinamentos específicos, devem proporcionar ao aluno conhecimentos práticos, contextualizados, interligados a outras ciências, para que possam responder as necessidades inerentes a vida contemporânea, visando adquirir conhecimentos mais profundos que possibilitem maior conjecturação e abstração, promovendo competências e habilidades necessárias para que haja intervenções e julgamentos práticos, dando significado amplo ao que fora apreendido para a vida profissional e podendo exercer plenamente sua cidadania.

A partir dessa compreensão, o aprendizado matemático deve contribuir não só para o conhecimento específico, técnico, mas para uma cultura mais ampla, promovendo maior compreensão e intervenção de acontecimentos do cotidiano, expandindo a uma maior percepção de mundo natural e social, com caráter prático e crítico, sendo cada aluno, protagonista da realidade em que está inserido. Tal concepção não é utopia, mas faz-se necessário que toda a comunidade escolar esteja mobilizada e envolvida para que haja condições, visando promover a transformação educacional pretendida.

A princípio, deve-se tratar como conteúdo de aprendizagem matemática, situações e elementos característicos da vivência discente, e da comunidade em que o mesmo encontra-se, proporcionando maior significado para seu aprendizado, desde sua etapa inicial, transcendendo a prática imediata. O saber matemático precisa ser concebido na sua integralidade na educação básica como condição de cidadania, não apenas como prerrogativa de especialistas, o qual não deve ser focado apenas na ação individual de cada aluno com materiais instrucionais, nem resumir-se a exposição oral e professoral docente, mas precisa ser concebido com interação ativa individual e do coletivo educacional, numa prática cidadã e questionadora, através de abordagens e tratamentos interdisciplinares, consolidando este aprendizado. Nesse contexto, precisamos superar as modalidades exclusivamente pré-universitárias e profissionalizante, de forma a garantir que o aluno ao término da educação básica, possa exercer plenamente sua cidadania, obtendo condições para desenvolver uma visão de mundo atualizada, através do conhecimento específico adquirido com a matemática, mas também com as interações proporcionadas com as outras áreas de conhecimento.

A matemática torna-se essencial, pois a partir de construções abstratas mais elaboradas nas outras ciências, os instrumentos matemáticos tornam-se importantes, a partir do momento que servem de suporte para compreensão dos mesmos, entretanto ela é fundamental não apenas nesse contexto. Todas as atividades da vida contemporânea, verifica-se a presença da matemática de maneira insubstituível, através de generalizações, conjecturações, abstrações, construções, análises, validação de conceitos e procedimentos, permitindo estabelecer relações, interpretar fenômenos e informações, elaboração de modelos. Tais características não devem ser apenas preocupação dos professores de matemática, mas de todos os docentes, principalmente aqueles da área tecnológica e científica (física, química e biologia), de forma organizada e coordenada possibilitando que o aluno conjecture e abstraia, evitando a memorização indiscriminada de algoritmos, característico da educação meramente pré-universitária, prejudicando o aprendizado. A resolução CNE/98 expressa que a matemática está presente no desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, estatístico, probabilístico em seus objetivos educacionais (BRASIL, 1998).

2.1.2 Conhecimentos de Matemática

A sociedade é caracterizada pela informação crescente e globalizada, a educação deve desenvolver capacidades de comunicação, resolução e análise de problemas, tomadas de decisões, inferindo, criando, aperfeiçoando valores, o conhecimento e o trabalho cooperativo, nesse contexto a matemática no ensino médio contempla o desenvolvimento e produção do aluno, respeitando suas particularidades e processo singular de maturação, possibilitando compreender conceitos, conjecturações, abstrações e aplicações exigidas constantemente em sua vida social e profissional. Segundos os PCN's, "Todas as áreas requerem alguma competência matemática". (PCN's, parte III 1998, p.40)

As competências matemáticas que o aluno deve adquirir ao término da educação básica devem possibilitar que o mesmo obtenha capacidade de resolver problemas, gerando hábitos de investigação, propiciando uma visão ampla e científica da realidade, desenvolvendo sua criatividade e percepção da beleza que o cerca.

No contexto instrumental, a matemática deve ser vista como conjunto de técnicas, estratégias e procedimentos que são aplicados em outras áreas de conhecimento e em sua atuação profissional, possibilitando o desenvolvimento de aplicação e adaptação da matemática em diferentes contextos, de acordo com a necessidade e oportunidade. Assim, é preciso que o aluno compreenda a matemática como conjunto de signos, códigos e regras que permeiem a comunicação de ideias, a modelagem e interpretação.

Entretanto, a matemática no ensino médio não possui apenas caráter instrumental, deve ser vista como ciência, com características na qual, o aluno deva perceber e dar importância as definições, demonstrações, encadeamentos lógicos e conceituais, para construção e abstração de novos conceitos e estruturas.

Juntamente com essas concepções, o aluno do ensino médio deve aprofundar e utilizar, valorizando a abstração, resolução de problemas, análise e investigação de fatos matemático, relacionando-a com outras áreas de conhecimento. Também, compete a matemática, apresentar ao aluno novas informações proporcionando uma aprendizagem constante, promovendo o desenvolvimento da autonomia e pesquisa.

Em relação a tecnologia, a matemática propõe que o aluno aprenda continuamente num processo não mais solitário, possibilitando exercícios coletivos de memória, imaginação, percepção e raciocínios, possibilitando produção e transmissão de conhecimentos, a qual ele possa orientar-se, adequar-se e movimentar na sociedade que passa por constante mudanças.

A matemática não consiste em apenas memorização, está vinculada a apropriação do saber e pensar matemático, que são obtidos de maneira lenta, através da busca de regularidades, generalização de padrões, capacidade argumentativa, que formalizam o processo construção do conhecimento matemático.

De acordo com os PCN's, o aluno ao terminar ensino médio deve:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;

- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (PCN's, parte III, 1998, p.42)

Por outro lado, não podemos esquecer da formação cidadã, baseada em valores e atitudes que são objetivos centrais da educação, relacionando com o processo de aprendizagem. Não pode-se trabalhar apenas os aspectos científicos, sem dar a devida relevância a valorização do total do indivíduo em detrimento da sociedade em que o mesmo vive.

As competências e habilidades matemáticas devem auxiliar a interação com outras áreas de conhecimento, de forma agregadora, sendo assim, o conhecimento matemático não deve restringir-se a informação, exercitação de aplicação e fixação, pois tais conceitos e definições geralmente são apresentados de forma fragmentada. Deve-se, proporcionar que o aluno construa múltiplas relações entre a matemática, suas especificidades e outras áreas de conhecimento, dando ênfase a contextualização e interdisciplinaridade, para que o mesmo adquira a linguagem simbólica, validação de argumentos, descrição de modelos e interpretações e intervenção na realidade.

Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática.
Representação e comunicação:
• Ler e interpretar textos de Matemática.
• Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc).
• Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
• Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
• Produzir textos matemáticos adequados.
• Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
• Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.
Investigação e compreensão:
• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
• Formular hipóteses e prever resultados.
• Selecionar estratégias de resolução de problemas.
• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
• Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
• Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

> Contextualização sócio cultural:
> • Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
> • Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
> • Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
> • Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades (PCN's, parte III, 1998, p.46).

A análise de livros didáticos feito pelo docente, requer uma subjetividade própria ao considerar documentos como os PCN's e atualmente a própria BNCC. Almouloud (2016) propõe uma metodologia de análise de materiais didáticos. A Teoria Antropológica do Didático fora desenvolvida por Chevallard (1992), tornando-se de grande relevância para análise da prática docente e de livros didáticos, pois estuda o indivíduo em relação a situações matemáticas, em que o saber matemático está organizado de forma peculiar, sendo resultado da interação do homem com o meio em que está inserido. Almouloud (2015, p. 11) afirma que:

> [...] toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas. O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica[...]

A técnica citada pelo autor é definida como "maneira de fazer". Nota-se que a maioria das tarefas são apresentadas de maneira rotineira, pois são carentes de problematização. Em relação a técnica, ela deve ser compreensível, legível e justificada, para que possa fazer sentido no processo ensino aprendizagem, propondo-se "adota uma metodologia de análise com base nas perguntas que ele gera [...]" (ALMOULOUD, 2015, p. 13).

Almouloud (2015), organiza a abordagem para análise de livros didático da seguinte forma:

> • Identificação dos tipos de tarefas: analisam-se as atividades propostas nas diferentes partes do capítulo. Exemplos e atividades do curso (apresentado sob a forma de desafios ou exercícios resolvidos) permitem identificar os tipos de tarefas importantes para a instituição. A parte "exercício" permite identificar o conjunto de todos os tipos de tarefas. Note-se que, nessa fase, o pesquisador realiza agrupamentos de tarefas em tipo de tarefas tais como salienta Artaud (2007, apud Chaachoua & Comiti, 2010, p.776) que afirma que "a noção do tipo de tarefas tem por principal função na análise permitir agrupamentos de tarefas julgadas suficientemente próximas, o tamanho dos grupos depende da realidade modelada, da instituição em jogo e do trabalho que se deseje desenvolver."
> • Identificação de técnicas: Após a identificação dos tipos de tarefas, procedesse à caracterização das técnicas que permitem cumprir essas tarefas apoiando-se nos exercícios resolvidos e/ou na análise matemática das situações propostas;
> • Identificação de tecnologias: construímos a tecnologia a partir da análise dos comentários dos autores, do curso e eventualmente da análise do livro do

> professor ou de análise matemática de situações propostas para consolidação da aprendizagem [...] (ALMOULOUD, 2015, p.16)

2.1.3 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Matemática e suas tecnologias.

No que se refere a matemática, a BNCC (2018), propõe, que seja a ampliação, consolidação e aprofundamento das aprendizagens essenciais que foram aprendidas nas etapas anteriores da educação básica, objetivando relacionar e aplicar na realidade em que o aluno está inserido, relacionando e ampliando os conhecimentos adquiridos em outras etapas.

Para tanto, no ensino fundamental, propõe-se que as habilidades estejam organizadas segundo unidades de conhecimento da própria matemática: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística. Ao referirmos aos números, a base propõe que o estudante desenvolva o pensamento numérico possibilitando ampliar sua compreensão em relação as operações relacionadas, através da resolução de problemas envolvendo os conjuntos numéricos próprios da etapa em situações diversas.

Em relação a álgebra, propõe que o estudante desenvolva o pensamento algébrico, identificando e relacionando a dependência entre duas grandezas em diferentes contextos, favorecendo a sua comunicação de diferentes escritas algébricas, também por meio da resolução e interpretação de equações e inequações numa perspectiva de resolução de problemas.

Ao tratar da geometria, a base propõe que os alunos desenvolvam habilidades referentes ao plano cartesiano, transformações isométricas, sendo eles capazes de produzir ampliações e reduções de figuras, utilizar os conceitos de congruência e semelhança na resolução de problemas.

Ao estudar grandezas e medidas, torna-se necessário a expansão da noção de medida, compreender as relações entre diferentes grandezas, obtenção de expressões que possibilitem a determinação de áreas de superfícies planas e volume de alguns sólidos geométricos.

Através do comportamento e análise das variações entre grandezas, o estudante desenvolve o pensamento proporcional através de situações do cotidiano, de modo que, ele abstraia e aplique tais comportamentos entre as grandezas, quando for possível. Na probabilidade e estatística, os alunos devem construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, através da árvore de possibilidades, do princípio multiplicativo, verificando as possibilidades de ocorrência de um ou mais eventos. As habilidades voltadas a estatística não podem ficar restrita a análise e interpretação de gráficos, sendo necessário que o estudante de ensino fundamental possa planejar e executar uma pesquisa amostral, interpretando suas medidas de tendência central, representando graficamente e produzir relatórios pertinentes a mesma.

O pensamento computacional deve ser possibilitado desde as etapas iniciais do ensino fundamental para que o estudante seja estimulado a desenvolver o pensamento computacional em conjuntos com os pensamentos numérico e algébrico.

No ensino médio as aprendizagens do ensino fundamental devem ter uma perspectiva de prosseguimento, aliado a perspectiva voltada a realidade, de diferente formas, levando-se em consideração o contexto em que o aluno está inserido, os avanços tecnológicos, as exigências da educação superior e do mercado de trabalho, entre outros, destacando-se a importância do pensamento computacional.

Nesse contexto, a matemática deve ampliar e aprofundar as habilidades construídas durante o ensino fundamental, promovendo conjecturação e abstração de processos mais elaborados, possibilitando que os estudantes possam resolver problemas em diferentes contextos, favorecendo sua autonomia e capacidade criativa. Assim, torna-se preponderante que os estudantes desenvolvam habilidades relativas ao processo de investigação, construção de modelos, resolução de problemas, sendo necessário que eles desenvolvam modos próprios de raciocinar, representar, comunicar e argumentar.

As competências relacionadas ao raciocinar, propõem que o estudante possa investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas nos problemas, com ênfase em sua argumentação matemática, sempre interagindo com seus pares e professores. As competências relacionadas ao representar, propõem que o estudante possa elaborar seus próprios registros, representando a sua compreensão dos fatos, ideias e conceitos, visto que o acesso a construção do pensamento matemático acontece por conta deles, possibilitando que os estudantes conheçam e proponham diversas formas de promover os registros, para que possam transcrever a linguagem matemática, buscando aprimorar seu próprio raciocínio.

As competências relacionadas ao comunicar propõem que os estudantes apresentem e justifiquem seus resultados, interagindo com as produções dos colegas, utilizando símbolos matemáticos, conectivos lógicos e a língua materna, através de apresentações orais entre outros registros. As competências relacionadas ao argumentar propõem a formulação, abstração e testagem de conjecturas, com suas respectivas justificativas, além de outros aspectos citados anteriormente. Essas competências, são importantíssimas para que a compreensão matemática do aluno seja mais concisa e eficiente, aprofundando as habilidades propostas para o ensino fundamental, adquirindo mais subsídios para interação, compreensão e intervenção específica em variados contextos.

Diante desta conjuntura e em consonância com as competências gerais da educação básica, com a área de matemática proposta para o ensino fundamental, no ensino médio, a área de matemática e suas tecnologias devem garantir aos estudantes a apropriação de competências específicas relacionando a cada uma, um conjunto de habilidades específicas de cada, ressaltando que uma habilidade relacionada a uma competência específica, pode contribuir para a apropriação e desenvolvimento de outras, nas 3 séries do ensino médio.

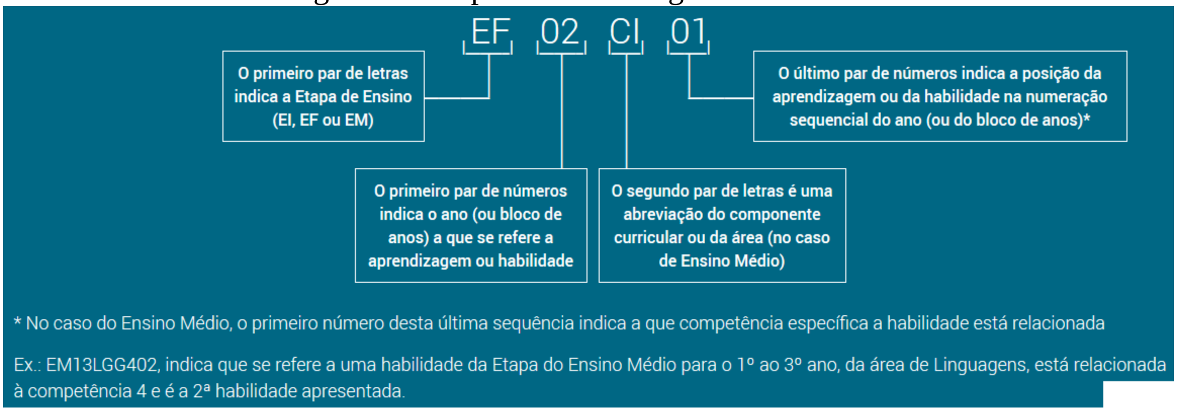
2.1.4 Competências Específicas de Matemática para o Ensino Médio

COMPETENCIA ESPECÍFICA 1 - Esta propõe que os estudantes possam interpretar e compreender a realidade em que está inserido através dos variados campos da matemática, possibilitando uma formação científica, crítica e reflexiva por parte dos alunos. Segundo a BNCC (2018, p. 532)

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Para melhor compreensão das aprendizagens relacionadas a cada competência, a figura abaixo mostra seu significado:

Figura 2.1: Explicando o código de habilidades



Fonte: (http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base)

Segundo a BNCC (2018, p.533), as habilidades são as seguintes:

> (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> (EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de

> comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas
> (EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
> (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
> (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.)

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2 - propõe que os estudantes ampliem a competência anterior, de modo que possam identificar e investigar questões de impacto social, através da participação e mobilização individual e coletiva na resolução de eventuais problemas, respeitando e valorizando a diversidade de opiniões variadas sem preconceito, permitindo a interação, cooperação, articulação e construção de saberes entre os estudantes, possibilitando aprender matemática de forma significativa.

> Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (BNCC 2018, p.534)

Segundo a BNCC (2018, p.534), as habilidades são as seguintes:

> (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa
> (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
> (EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 – Esta, propõe que os estudantes interpretem e construam modelos matemáticos, resolvam e formulem problemas envolvendo os conceitos, definições e procedimentos inerentes a matemática, aplicados em situações diversas, possibilitando ao estudante que possa resolver problemas ao longo da sua vida, através de situações reais, pois verificam-se nelas, maior significância ao aprendizado discente.

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BNCC, 2018, p.535)

Em relação a resolução de problemas, eles precisam identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários. Em seguida, devem aplicá-los e executá-los, para compartilhar em seguida dos resultados obtidos, relacionando com o problema inicial, verificando e comunicando sua solução através de argumentação consistente e linguagem adequada.

Ressalta-se que na resolução de problemas existem processos distintos de obtenção das soluções, permitindo de acordo com cada problema, que o estudante faça adaptações e/ou utilize maior grau de abstração e interpretação. Aliada a esse contexto, destaca-se o uso das tecnologias, permitindo que o estudante possa "raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínio e de construir argumentações". (BNCC 2018, p.536)

Segundo a BNCC (2018, p.536 e 537), as habilidades são as seguintes:

> (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
> (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, PH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

> (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
> (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
> (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
> (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
> (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
> (EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
> (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc).
> (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
> (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4 - Esta competência propõe que os estudantes ao resolverem problemas em diferentes contextos, possam manipular diferentes representações do mesmo objeto matemático, compreendendo as ideias que o representa, dominando os conteúdo e ferramentas, ampliando e tornando significativa sua capacidade de resolução de problemas, através da análise de representações, interpretação e raciocínio para resolução dos mesmos.

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (BNCC 2018, p.538)

Segundo a BNCC (2018, p.539), as habilidades são as seguintes:

> (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
> (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
> (EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
> (EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráficas, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
> (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
> (EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5 - Esta competência, propõe que os estudantes desenvolvam a capacidade de investigar, formular explicações e argumentos através de conjecturações, induções decorrentes de investigações, incluindo a demonstração de algumas proposições, possibilitando que o estudante tenha uma compreensão viva da matemática através do raciocínio hipotético-dedutivo.

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC 2018, p.540)

Segundo a BNCC (2018, p.541), as habilidades são as seguintes:

> (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
> (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização,

> reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
> (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
> (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
> (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
> (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
> (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
> (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
> (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografa (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
> (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
> (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Analisando a BNCC (2018), e relacionando ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas, verifica-se que as seguintes habilidades possuem relação: EM13MAT104; EM13MAT203; EM13MAT304; EM13MAT305; EM13MAT403; EM13MAT405; EM13MAT508.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

As habilidades descritas acima, serão analisadas em três livros didáticos que foram aprovados no PNLD 2018-2020. As unidades analisadas, serão as referente às funções exponenciais e logarítmicas.

Os livros escolhidos para análise são: PAIVA (2015) que é adotado no Centro de Ensino São José Operário, localizada na Avenida Divina Providencia, número 100, unidade 203, Cidade Operária; IEZZI (2016) que é adotado no Centro de Ensino Justino Pereira, localizado na Avenida 103 Unidade 103, 1349, Av. de Contorno Norte Externa da Cidade Operária e SOUZA (2016), que é adotado no Centro de Ensino Cidade Operária II, localizada na Rua Duzentos e Um, Unidade 201 - Cidade Operária, todas escolas de ensino médio da rede estadual de ensino do Maranhão na cidade de São Luís.

4. **RESULTADOS E DISCUSSÃO**

Os livros didáticos serão analisados conforme as habilidades específicas, levando em consideração a temática de funções, e especificamente as funções exponenciais e logarítmicas.

4.1 Análise das habilidades da BNCC

EM13MAT104

Na habilidade **EM13MAT104** o aluno deve:

> Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. (BNCC 2018, p.533)

Analisando o livro de PAIVA (2015), no capítulo 9 (nove), verifica-se que os conteúdos função é inicializado de maneira contextualizada, através de infográfico intitulado "Evolução Tecnológica", apresentando a linha do tempo desde a criação dos computadores até o uso da internet e definindo nanotecnologia, cujo objetivo é apresentar uma situação concreta e cotidiana em que há o crescimento exponencial, sendo recomendado pelas orientações metodológicas que anteriormente a análise deste infográfico, possa ser gerado um debate sobre situações onde as há o crescimento linear das grandezas em detrimento do crescimento exponencial em outros casos, propondo-se que os alunos pesquisem a evolução do computador em sequência. Na página (394), é proposto ao docente que seja explorado além da teoria presente no infográfico, fazendo uma abordagem a lei de Moore.

Figura 4.1: (Vendo a Competência EM13MAT104)

Fonte: (PAIVA 2015, p. 332)

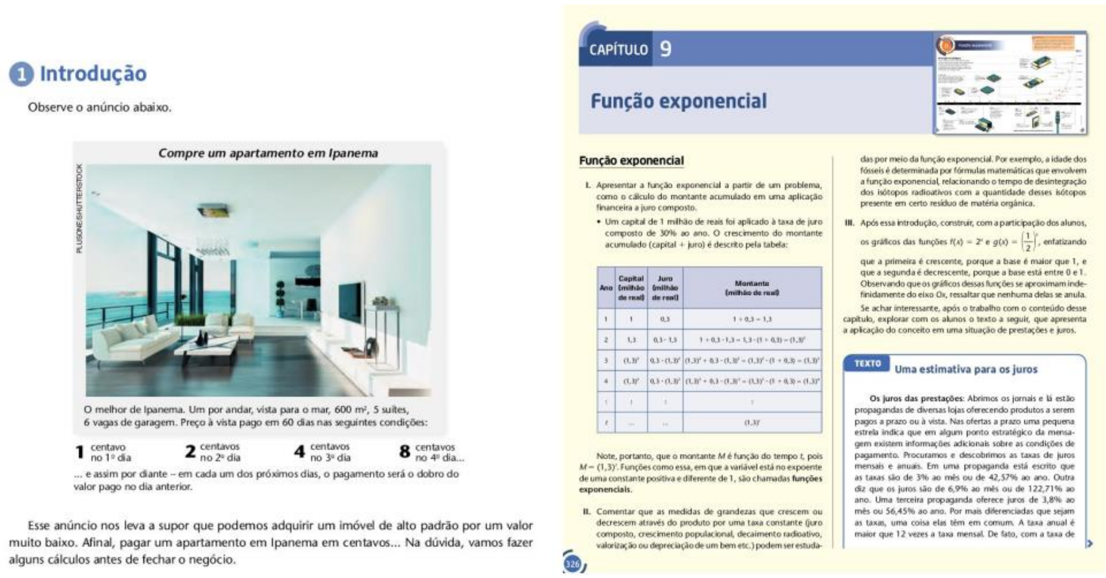
De maneira análoga, percebe-se que o capítulo 10 (dez), apresenta o infográfico "Como reconhecer os sons", em que é definido o som, como ocorre o processamento no corpo humano e as consequências da exposição de índices elevados de som. As orientações metodológicas propõem que antes, o docente deve propor aos estudantes um debate sobre situações em que sejam necessárias a utilização de proteção auricular. Em seguida, são propostos vários questionamentos para que os estudantes aprofundem o tema, com uma pesquisa na sequência sobre poluição sonora com discussão na sequência sobre as consequências que podem acarretar (PAIVA, p.332). Na página (400), é proposto ao docente que estabeleça comparação entre o som de um helicóptero e de uma bateria de escola de samba, estabelecendo parâmetros para que os estudantes possam perceber qual seria mais prejudicial.

Figura 4.2: (Vendo a Competência EM13MAT104)

Fonte: (PAIVA 2015, p. 333)

Ao iniciar o capítulo 9 (nove), percebe-se uma rápida introdução relacionando o assunto a Matemática financeira, confrontando-se com as orientações metodológicas presentes no manual do professor, Paiva (2015), propõe que é interessante, após o estudo do conteúdo fazer uma análise do texto "Uma estimativa de juros", apresentado nas páginas (326 e 327).

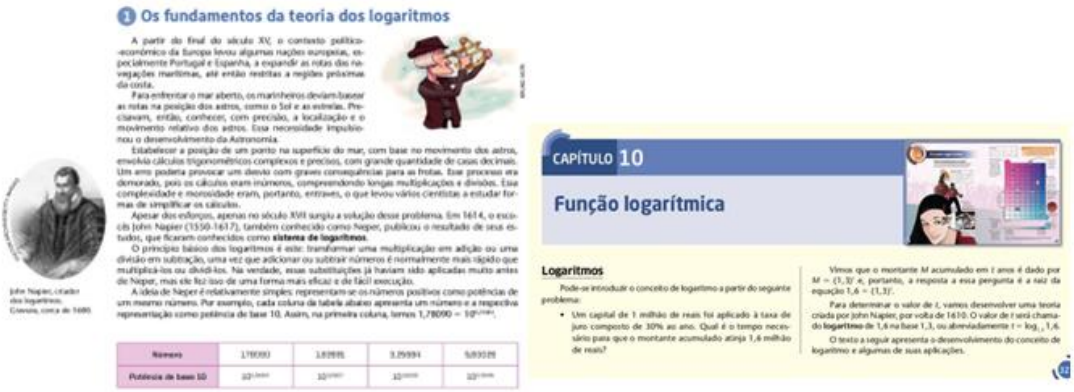
Figura 4.3: (Vendo a Competência EM13MAT104)



Fonte: (PAIVA 2015, p. 216 e 326)

Por outro lado, ao iniciar o capítulo 10 (dez), verifica-se um texto relacionando a história da matemática em relação a teoria dos logaritmos (PAIVA, p.238), não possibilitando ao estudante a perspectiva de análise de temas pertinentes a realidade em que está inserido e o estudo das funções logarítmicas. Por outro lado, as orientações na página (327), sugere que o assunto seja iniciado a partir de uma temática relacionada a juros compostos.

Figura 4.4: Vendo a Competência EM13MAT104



Fonte: (PAIVA 2015, p.238 e 327)

No desenvolver dos conteúdos, verifica-se que os temas de natureza socioeconômica são citados, sem aprofundamento que os temas requerem em alguns exemplos exercícios (páginas: 216, 219,228,230,231,232, 243,246,247,251,254,255, 246 e 257), também sendo proposto aos estudantes criassem problemas relacionando as funções exponencial e logarítmica, podendo ser feito com as taxas e índices de natureza socioeconômica ou não.

Nas primeiras páginas existe uma sessão intitulada “Questões para reflexão”, entretanto, nos capítulos analisados, não foi constatada a presença dessa sessão, mesmo que nos infográficos, exemplos e exercícios, apresentam-se temas que possibilitem uma análise crítica da realidade em que o aluno está inserido e posterior a produção de argumentos.

Ao final de cada capítulo analisado, existe uma retomada, com textos que falam sobre alometria e a idade dos fosseis, aplicações a Biologia e a História dos assuntos trabalhados durante o transcorrer do conteúdo. Em seguida, em forma de trabalho de pesquisa em equipe visando que os estudantes possam pesquisar o mundo microscópico e as unidades relacionadas, referentes a Alometria e atividades com o uso da calculadora cientifica referentes ao texto: A idade dos fosseis.

Assim, percebe-se que em relação a habilidade (EM13MAT104), os capítulos analisados de PAIVA (2015) fazem referência a índices de natureza socioeconômica, entretanto as análises pertinentes e importantes a estas questões necessitam ser mais incentivadas e aprofundadas no transcorrer do processo ensino e aprendizagem em sala de aula.

Analisando IEZZI (2016), no capítulo 7 verifica-se que o conteúdo função exponencial é inicializado de maneira contextualizada, através de um texto em que são relacionados os dados do último senso demográfico e sua perspectiva de evolução ao longo dos anos, obtendo-se uma função exponencial que caracteriza esse crescimento e fornecendo ao professor orientações para obtenção dos dados do último senso.

Figura 4.5: (Habilidade EM13MAT104)

CAPÍTULO 7

Função exponencial

Professor, os resultados do último censo podem ser consultados no *Censo demográfico 2010: características da população e dos domicílios*, disponível em: <biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/93/cd_2010_caracteristicas_populacao_domicilios.pdf>, acesso em 4 mar. 2016.

Introdução

Os dados do último censo demográfico, ocorrido em 2010, indicaram que, naquele ano, a população brasileira era de 190 755 799 habitantes e estava crescendo à taxa aproximada de 1,2% ao ano. A taxa de crescimento populacional leva em consideração a natalidade, a mortalidade, as imigrações etc.

Suponha que tal crescimento seja mantido para a década seguinte, isto é, de 2011 a 2020. Nessas condições, qual seria a população brasileira ao final de x anos (x = 1, 2, ..., 10), contados a partir de 2010?

Para facilitar os cálculos, vamos aproximar a população brasileira em 2010 para 191 milhões de habitantes.

O censo é realizado a partir da coleta de dados efetuada pelos recenseadores, que visitam cada domicílio.

- Passado 1 ano a partir de 2010 (em 2011), a população, em milhões, seria:

$$\underbrace{191}_{\text{população em 2010}} + \overbrace{1{,}2\% \cdot 191}^{\text{aumento}} = 191 + 0{,}012 \cdot 191 = 1{,}012 \cdot 191$$

$$\frac{1{,}2}{100} = 0{,}012$$

Aproximadamente 193,29 milhões de habitantes.

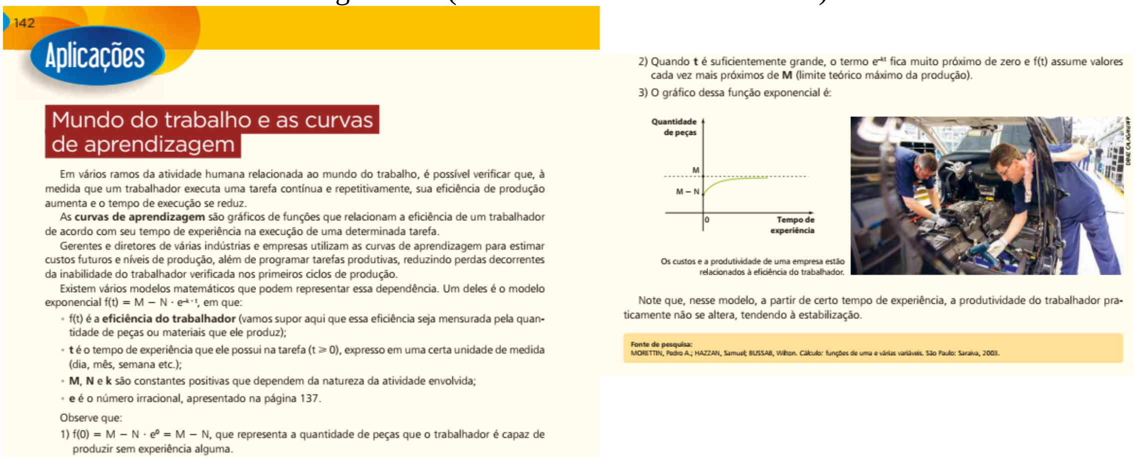
- Passados 2 anos a partir de 2010 (em 2012), a população, em milhões, seria:

Fonte: (IEZZI 2016, p.127)

Nota-se que existe uma seção chamada “Aplicações”, onde percebe-se em que os conteúdos trabalhados estão relacionados com índices de natureza socioeconômica, permitindo aos estudantes que possam investigar e analisar possibilitando a construção de argumentos a respeito da realidade que o cerca.

Nesta seção, as funções exponenciais, são trabalhadas num texto denominado “Mundo do trabalho e as curvas de aprendizagem”, onde são analisados a eficiência de um trabalhador de acordo com seu tempo de experiência na execução de determinada tarefa, possibilitando que os estudantes analisem criticamente essa relação.

Figura 4.6: (Habilidade em EM13MAT104)


142

Aplicações

Mundo do trabalho e as curvas de aprendizagem

Em vários ramos da atividade humana relacionada ao mundo do trabalho, é possível verificar que, à medida que um trabalhador executa uma tarefa contínua e repetitivamente, sua eficiência de produção aumenta e o tempo de execução se reduz.

As **curvas de aprendizagem** são gráficos de funções que relacionam a eficiência de um trabalhador de acordo com seu tempo de experiência na execução de uma determinada tarefa.

Gerentes e diretores de várias indústrias e empresas utilizam as curvas de aprendizagem para estimar custos futuros e níveis de produção, além de programar tarefas produtivas, reduzindo perdas decorrentes da inabilidade do trabalhador verificada nos primeiros ciclos de produção.

Existem vários modelos matemáticos que podem representar essa dependência. Um deles é o modelo exponencial $f(t) = M - N \cdot e^{-k \cdot t}$, em que:

- $f(t)$ é a **eficiência do trabalhador** (vamos supor aqui que essa eficiência seja mensurada pela quantidade de peças ou materiais que ele produz);
- **t** é o tempo de experiência que ele possui na tarefa ($t \geqslant 0$), expresso em uma certa unidade de medida (dia, mês, semana etc.);
- **M**, **N** e **k** são constantes positivas que dependem da natureza da atividade envolvida;
- **e** é o número irracional, apresentado na página 137.

Observe que:

1) $f(0) = M - N \cdot e^0 = M - N$, que representa a quantidade de peças que o trabalhador é capaz de produzir sem experiência alguma.

2) Quando **t** é suficientemente grande, o termo e^{-kt} fica muito próximo de zero e $f(t)$ assume valores cada vez mais próximos de **M** (limite teórico máximo da produção).

3) O gráfico dessa função exponencial é:

Os custos e a produtividade de uma empresa estão relacionados à eficiência do trabalhador.

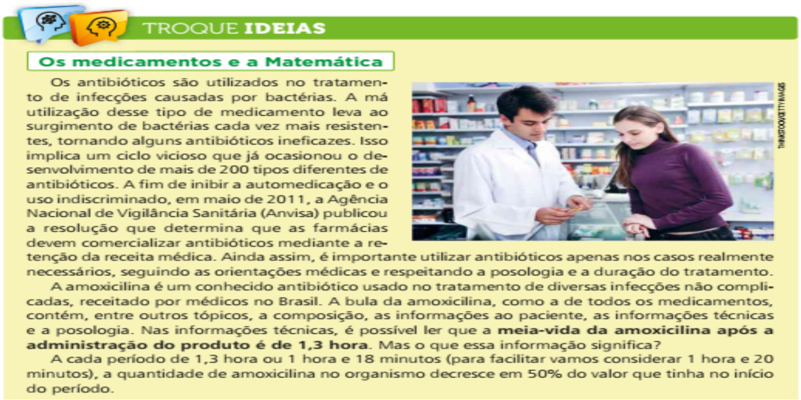
Note que, nesse modelo, a partir de certo tempo de experiência, a produtividade do trabalhador praticamente não se altera, tendendo à estabilização.

Fonte de pesquisa:
MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton. Cálculo: funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2003.

Fonte: (IEZZI, 2016, p.142)

Prosseguindo-se ao estudo das funções exponenciais, em outra seção chamada “Troque Ideias”, percebe-se a presença do texto “Os medicamentos e a Matemática”, onde expõe-se as características dos antibióticos, as regulamentações referentes a administração desses medicamentos e a meia vida do antibiótico amoxicilina, relacionando com a função exponencial.

Figura 4.7: Habilidade EM13MAT104


TROQUE **IDEIAS**

Os medicamentos e a Matemática

Os antibióticos são utilizados no tratamento de infecções causadas por bactérias. A má utilização desse tipo de medicamento leva ao surgimento de bactérias cada vez mais resistentes, tornando alguns antibióticos ineficazes. Isso implica um ciclo vicioso que já ocasionou o desenvolvimento de mais de 200 tipos diferentes de antibióticos. A fim de inibir a automedicação e o uso indiscriminado, em maio de 2011, a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) publicou a resolução que determina que as farmácias devem comercializar antibióticos mediante a retenção da receita médica. Ainda assim, é importante utilizar antibióticos apenas nos casos realmente necessários, seguindo as orientações médicas e respeitando a posologia e a duração do tratamento.

A amoxicilina é um conhecido antibiótico usado no tratamento de diversas infecções não complicadas, receitado por médicos no Brasil. A bula da amoxicilina, como a de todos os medicamentos, contém, entre outros tópicos, a composição, as informações ao paciente, as informações técnicas e a posologia. Nas informações técnicas, é possível ler que a **meia-vida da amoxicilina após a administração do produto é de 1,3 hora**. Mas o que essa informação significa?

A cada período de 1,3 hora ou 1 hora e 18 minutos (para facilitar vamos considerar 1 hora e 20 minutos), a quantidade de amoxicilina no organismo decresce em 50% do valor que tinha no início do período.

Fonte: (IEZZI 2016, p.145)

Nas Orientações didáticas, nas páginas (330-331), encontram-se orientações específicas para o trabalho da atividade com os estudantes, cujo objetivo principal é compreender o conceito de meia vida, relacionando-o com a química e a biologia. Finalizando o capítulo, encontra-se outro tópico referindo-se “Aplicações”, é apresentado um infográfico intitulado “Meia vida e Radioatividade” (IEZZI, p. 146 e 147), onde retoma-se o conceito de meia vida relacionando-se com os elementos radioativos presentes na natureza, entretanto, percebe-se que poderia haver fomento ao debate referente a energia radioativa utilizada e suas consequências para a sociedade.

Figura 4.8: (Habilidade EM13MAT104)

Fonte: (IEZZI, 2016 p.146)

Analogamente, percebe-se que no capítulo 8 (oito), o conteúdo função logarítmica é iniciado através de duas contextualizações, uma tratando-se dos sons e audição normal de uma pessoa, possibilitando-se relações com a física e a biologia. E outra em que é tratada a desvalorização de um bem de consumo (caminhão) e sua desvalorização anula, relacionando com a matemática financeira.

Figura 4.9: (Habilidade EM13MAT104)

Introdução

Situação 1

Você sabia que uma pessoa com audição normal é capaz de ouvir uma grande faixa de sons de intensidades bem diversas?

Existe um valor mínimo de intensidade de som, abaixo do qual não se ouve som algum: é o limiar de audibilidade, cujo valor é, em W/m^2, igual a 10^{-12}; há também um valor de intensidade a partir do qual há dor: 1 W/m^2. W é o símbolo de watt, unidade de potência.

Manipular e comparar valores nessa faixa numérica, de $10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$ até 1,0 (além da faixa de sons cujas intensidades superam o limiar de dor), não é tarefa fácil nem prática. A saída encontrada pela Ciência é a utilização de uma **escala logarítmica**, cuja estrutura e vantagens vamos conhecer neste capítulo.

Suponhamos que um caminhão zero-quilômetro custe hoje R$ 120 000,00 e sofra uma desvalorização de 10% por ano de uso.

Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo será igual a R$ 60 000,00?

A cada ano que passa o valor do caminhão fica sendo 90% do que era um ano atrás. Então, seu valor evolui da seguinte forma:

- após 1 ano de uso:
  90% de 120 000 reais, ou seja, 108 000 reais
- após 2 anos de uso:
  90% de 108 000 reais, ou seja, 97 200 reais
- após 3 anos de uso:
  90% de 97 200 reais, ou seja, 87 480 reais
  e assim por diante.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

No Brasil, o transporte rodoviário é um dos principais meios de distribuição de cargas.

O valor do veículo em reais evolui, ano a ano, de acordo com a sequência:

Fonte: (IEZZI 2016, p.148)

Em relação as funções logarítmicas, o texto “Os terremotos e os logaritmos” (p. 166 e 167), define-se um terremoto, sua amplitude, seus efeitos, relacionando-se com a física e a geografia, fazendo referência a um abalo sísmico que ocorrera em abril de 2015, que devastou o Nepal, entretanto, poder-se-ia aprofundar o debate, ressaltando-se quais os procedimentos a serem adotados com a suspeita de um terremoto. Ao analisar as orientações metodológicas, percebe-se que poucas orientações para trabalhar com essa seção com os estudantes.

Figura 4.10: (Habilidade EM13MAT104)

Aplicações

Os terremotos e os logaritmos

No dia 25 de abril de 2015, um forte terremoto de 7,8 graus na escala Richter, que durou aproximadamente 1 minuto, devastou o Nepal.

O terremoto deixou um saldo de quase 20000 vítimas (entre mortos e feridos) e um cenário de guerra pelo país: milhares de pessoas perderam suas casas, monumentos e templos declarados patrimônio da humanidade pela Unesco desmoronaram, água, energia e comida escassearam.

A comunidade internacional prestou grande ajuda ao Nepal, enviando recursos financeiros, médicos e alimentares até os vilarejos mais remotos e de difícil acesso.

Policial nepalês mantém vigília próximo a um templo desabado na vila Bungamati, na periferia de Katmandu, Himalaia.

A escala Richter foi desenvolvida em 1935 por Charles Richter e Beno Gutenberg, no California Institute of Technology. Trata-se de uma escala logarítmica, sem limites. No entanto, a própria natureza impõe um limite superior a esta escala, já que ela está condicionada ao próprio limite de resistência das rochas na crosta terrestre.

A magnitude (graus) de Richter é uma medida **quantitativa** do "tamanho" de um terremoto. Ela está relacionada com a amplitude das ondas registradas e também com a energia liberada.

A escala Richter e seus efeitos

Magnitude Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
De 3,5 a 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
De 5,5 a 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
De 6,1 a 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 km do epicentro.
De 7,0 a 7,9	Grande terremoto. Pode causar sérios danos numa grande faixa.
8,0 ou mais	Enorme terremoto. Pode causar graves danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Fonte de pesquisa: *A escala Richter*. Disponível em: <ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm>. Acesso em: 23 mar. 2016.

Fonte: (IEZZI 2016, p.165)

No termino do estudo das funções logarítmicas, é retomada a temática abordada no início do capítulo, com o texto "Os sons, a audição e a escala logarítmica", mostrando a relação entre o som e a audição humana e fornecendo algumas fontes sonoras e suas respectivas intensidades, relacionando com a escala logarítmica.

Assim, percebe-se que em relação a habilidade **(EM13MAT104),** os capítulos analisados de IEZZI (2016), fazem referência a índices de natureza socioeconômica, relacionando com as funções exponenciais e logarítmicas, investigando os processos de cálculos, entretanto, não consta uma análise crítica da realidade proposta visando argumentações concisas, que faz-se necessárias, pois os estudantes "devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar e argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos mais sofisticados". (BNCC 2018, p.529)

Analisando SOUZA (2016), verifica-se que o capítulo 5 (cinco), a abertura sobre o estudo das funções exponenciais é feita através de um infográfico, chamado transistores, onde é apresentada uma relação entre a matemática e a história. As orientações para o professor, na página (320), propõe, uma sequência a ser trabalhada durante a abertura do capítulo, propondo que seja trabalhado outras questões envolvendo funções exponenciais.

(Figura 4.11:Habilidade EM13MAT104)

Transistores

Novas tecnologias têm possibilitado o armazenamento de informações em dispositivos cada vez menores, como os cartões SD. Esses cartões de memória, inclusive nos formatos micro SD e mini SD, são geralmente utilizados em câmeras fotográficas, smartphones ou tablets. Os computadores também são exemplos do intenso desenvolvimento tecnológico dos tempos atuais, pois, cada vez mais, comportam grande quantidade de informações, processando-as em alta velocidade.

A constatação desse desenvolvimento nos remete a uma previsão, feita em 1965, que ficou conhecida como Lei de Moore, em homenagem ao seu criador, Gordon Moore. A lei afirma que, em determinada área, o número de transistores (dispositivos semicondutores) que compõem chips e microprocessadores dobraria a cada 2 anos. Essa lei tem acompanhado a produção dos microprocessadores até hoje e possibilitou não somente chips cada vez menores, mas também maior velocidade de processamento.

Para ter noção do crescimento do número de transistores em uma mesma área, podemos comparar o primeiro microprocessador, criado em 1971, com 2300 transistores, a outro, fabricado em 2014, quarenta e três anos mais tarde, com 1,3 bilhão de transistores.

a) Escreva o nome de aparelhos eletrônicos que armazenam informações, como os descritos no texto.

b) O que afirma a Lei de Moore?

c) Se o número de transistores de um microprocessador aumentasse exatamente segundo a lei de Moore, qual seria o número de transistores em 2021, tomando como base o primeiro microprocessador de 1971?

135

Fonte: (SOUZA, 2016. p.135)

Ao iniciar o estudo sobre as funções exponenciais, Souza (2016), propõe como situação de análise inicial uma aplicação com a biologia, as orientações para o professor sugerem que seja feito um trabalho com o professor de Biologia envolvendo as divisões mitóticas e que os estudantes tragam esquemas ou ilustrações que representem as divisões mitóticas, propondo-se que percebam a diferença entre o crescimento linear e o crescimento exponencial.

Revisitando-se notação científica se percebe uma aplicação com a geografia e física relacionando com a distância de cada planeta até o sol, visando que os estudantes tenham melhor noção de estimativa e possam inferir sobre as distâncias de cada planeta para o Sol. (SOUZA 2016, p.142).

Durante o percurso das funções exponenciais, percebe-se quantidade significativa de exercícios e problemas em que os estudantes necessitam interpretar índices de natureza socioeconômicas, porém ao analisar as respostas propostas nas orientações para o professor, percebe-se que aqueles que que foram propostos, em suas resoluções parecem a penas o operatório.

O autor propõe nas páginas (148-149), uma seção chamada contexto, onde as funções exponenciais estão relacionadas com a química, apresentando o decaimento de elementos radioativo. Nas orientações para o professor, na página (321), instiga a discussão sobre os prejuízos e benefícios pelo uso de elementos radioativos, propondo-se que os estudantes formem grupos e pesquisem a meia vida de outros elementos radioativos, elaborando problemas que serão trocados e respondidos por outros grupos.

Figura 4.12: (Habilidade EM13MAT104)

Fonte: (SOUZA 2016, p.148 e 321)

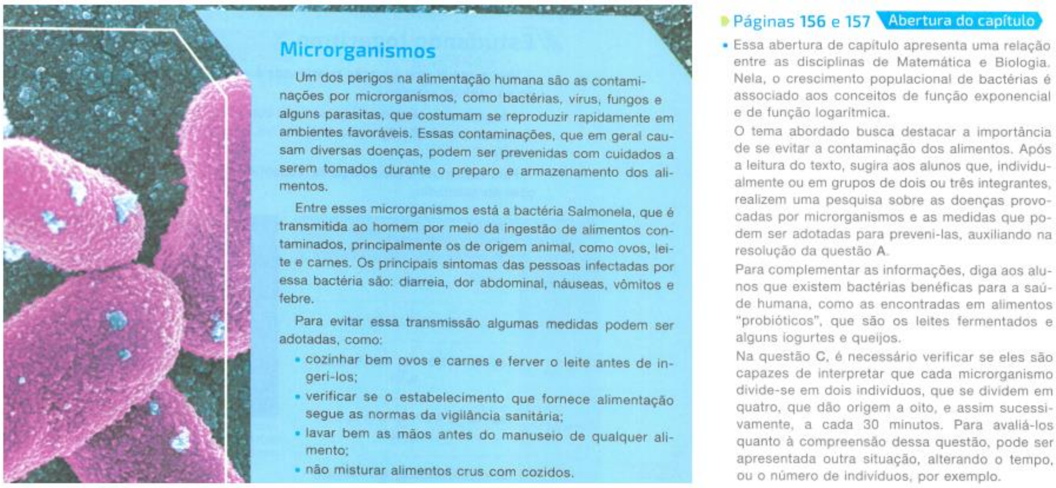
No termino do estudo sobre funções exponenciais, Souza (2016), propõe na seção “Ser consciente” um texto denominado “Evite o tabagismo”, onde há relação com a Biologia e a Química, informando todas as informações pertinentes ao tabaco, desde seu nome científico até sua ação no organismo. Nas orientações para o professor, nas páginas 321 e 322, é proposto a criação de grupos, possibilitando que cada estudante possa expressar suas opiniões e em seguida, um debate a respeito do tema, ou uma campanha de conscientização sobre o tema. Em seguida, é alunos devem fazer a seção “Analisando com a matemática”, onde serão verificados a compreensão dos mesmos, relacionando itens relacionados a nicotina e as funções exponenciais.

Figura 4.13: (Habilidade EM13MAT104)

Fonte: (SOUZA, 2016, p.154)

Em relação aos logaritmos e funções logarítmicas, Souza (2016), faz abertura do capítulo 6, nas páginas (156-157), com um infográfico intitulado “Microrganismos” relacionando a matemática e biologia, onde são analisadas o crescimento populacional de bactérias associando aos conceitos de função exponencial e logarítmica. Este tema direciona os estudantes a prevenção de contaminação de elementos. As orientações para o professor, na página (323), o autor mostrar o itinerário a ser percorrido no estudo do infográfico.

Figura 4.14: (Habilidade EM13MAT104)



Microrganismos

Um dos perigos na alimentação humana são as contaminações por microrganismos, como bactérias, vírus, fungos e alguns parasitas, que costumam se reproduzir rapidamente em ambientes favoráveis. Essas contaminações, que em geral causam diversas doenças, podem ser prevenidas com cuidados a serem tomados durante o preparo e armazenamento dos alimentos.

Entre esses microrganismos está a bactéria Salmonela, que é transmitida ao homem por meio da ingestão de alimentos contaminados, principalmente os de origem animal, como ovos, leite e carnes. Os principais sintomas das pessoas infectadas por essa bactéria são: diarreia, dor abdominal, náuseas, vômitos e febre.

Para evitar essa transmissão algumas medidas podem ser adotadas, como:

- cozinhar bem ovos e carnes e ferver o leite antes de ingeri-los;
- verificar se o estabelecimento que fornece alimentação segue as normas da vigilância sanitária;
- lavar bem as mãos antes do manuseio de qualquer alimento;
- não misturar alimentos crus com cozidos.

Páginas 156 e 157 **Abertura do capítulo**

- Essa abertura de capítulo apresenta uma relação entre as disciplinas de Matemática e Biologia. Nela, o crescimento populacional de bactérias é associado aos conceitos de função exponencial e de função logarítmica.

O tema abordado busca destacar a importância de se evitar a contaminação dos alimentos. Após a leitura do texto, sugira aos alunos que, individualmente ou em grupos de dois ou três integrantes, realizem uma pesquisa sobre as doenças provocadas por microrganismos e as medidas que podem ser adotadas para preveni-las, auxiliando na resolução da questão A.

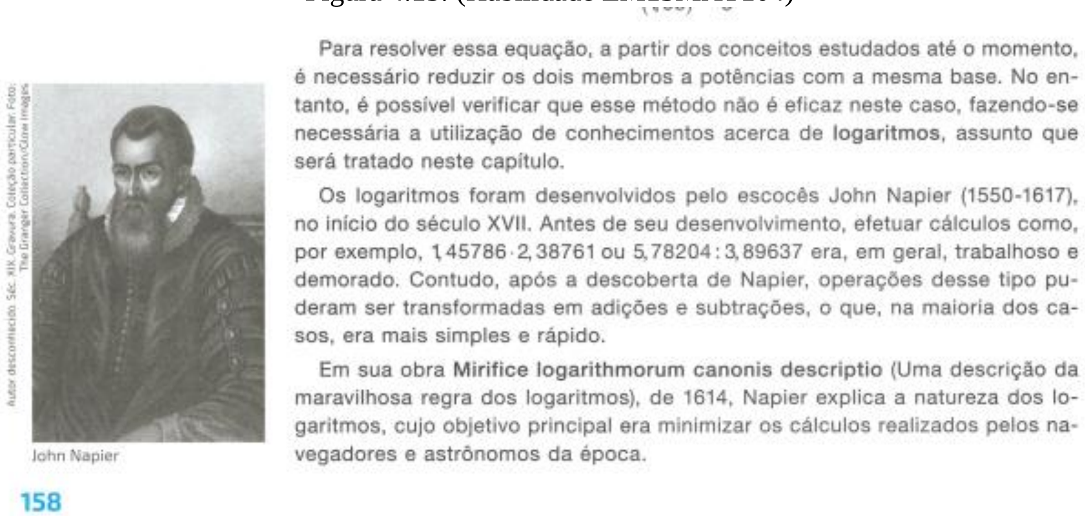
Para complementar as informações, diga aos alunos que existem bactérias benéficas para a saúde humana, como as encontradas em alimentos “probióticos”, que são os leites fermentados e alguns iogurtes e queijos.

Na questão C, é necessário verificar se eles são capazes de interpretar que cada microrganismo divide-se em dois indivíduos, que se dividem em quatro, que dão origem a oito, e assim sucessivamente, a cada 30 minutos. Para avaliá-los quanto à compreensão dessa questão, pode ser apresentada outra situação, alterando o tempo, ou o número de indivíduos, por exemplo.

Fonte: (SOUZA 2016, p.157 e 323)

Iniciando o estudo sobre função logarítmica, o autor retoma a taxa de crescimento de bactérias citados anteriormente no infográfico, relacionando-se com a história de matemática e o surgimento dos logaritmos, destacando a atuação de Jonh Napier (1550-1617)

Figura 4.15: (Habilidade EM13MAT104)



Autor desconhecido. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular. Foto: The Granger Collection/Glow Images

John Napier

Para resolver essa equação, a partir dos conceitos estudados até o momento, é necessário reduzir os dois membros a potências com a mesma base. No entanto, é possível verificar que esse método não é eficaz neste caso, fazendo-se necessária a utilização de conhecimentos acerca de **logaritmos**, assunto que será tratado neste capítulo.

Os logaritmos foram desenvolvidos pelo escocês John Napier (1550-1617), no início do século XVII. Antes de seu desenvolvimento, efetuar cálculos como, por exemplo, $1{,}45786 \cdot 2{,}38761$ ou $5{,}78204 : 3{,}89637$ era, em geral, trabalhoso e demorado. Contudo, após a descoberta de Napier, operações desse tipo puderam ser transformadas em adições e subtrações, o que, na maioria dos casos, era mais simples e rápido.

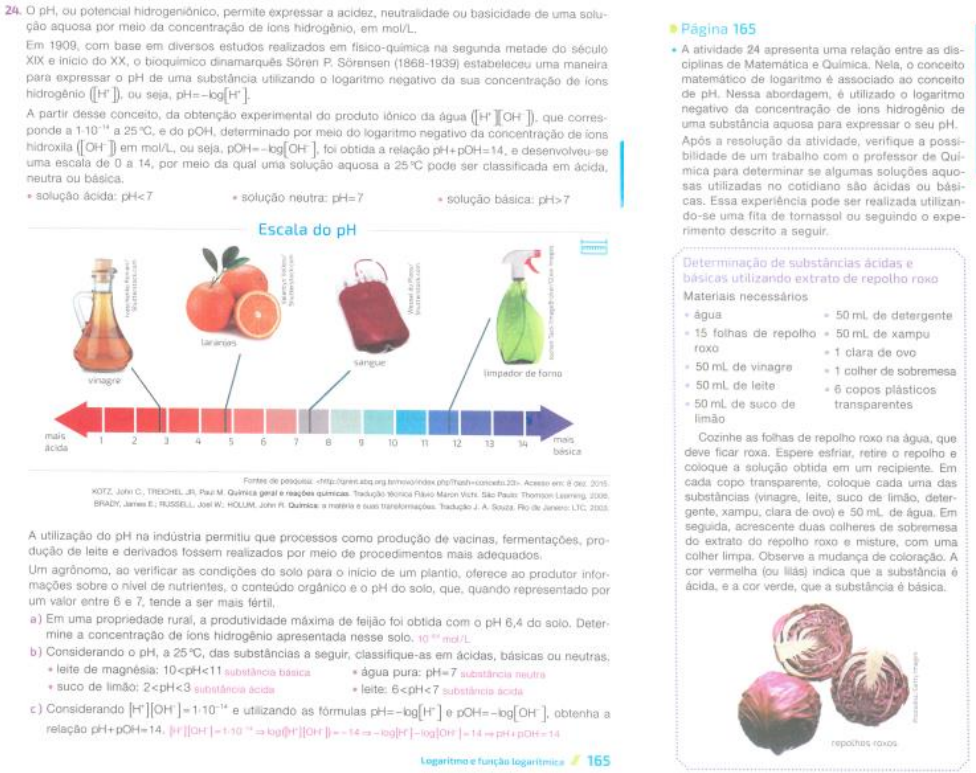
Em sua obra **Mirifice logarithmorum canonis descriptio** (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos), de 1614, Napier explica a natureza dos logaritmos, cujo objetivo principal era minimizar os cálculos realizados pelos navegadores e astrônomos da época.

158

(SOUZA, 2016, p.158)

Nota-se grande quantidade de exercícios e problemas durante o desenvolvimento do assunto, nas orientações para o professor, a atividade 24 da página 165 é dada uma ênfase especial, pois a questão relaciona a matemática e a química, através da determinação da acidez de determinados alimentos e propõe de maneira prática uma maneira de determinar substancias acidas e básicas através do extrato de repolho roxo.

Figura 4.16: (Habilidade EM13MAT104)



24. O pH, ou potencial hidrogeniônico, permite expressar a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução aquosa por meio da concentração de íons hidrogênio, em mol/L.

Em 1909, com base em diversos estudos realizados em físico-química na segunda metade do século XIX e início do XX, o bioquímico dinamarquês Sören P. Sörensen (1868-1939) estabeleceu uma maneira para expressar o pH de uma substância utilizando o logaritmo negativo da sua concentração de íons hidrogênio ($[H^+]$), ou seja, $pH = -\log[H^+]$.

A partir desse conceito, da obtenção experimental do produto iônico da água ($[H^+][OH^-]$), que corresponde a $1 \cdot 10^{-14}$ a 25 °C, e do pOH, determinado por meio do logaritmo negativo da concentração de íons hidroxila ($[OH^-]$) em mol/L, ou seja, $pOH = -\log[OH^-]$, foi obtida a relação $pH + pOH = 14$, e desenvolveu-se uma escala de 0 a 14, por meio da qual uma solução aquosa a 25 °C pode ser classificada em ácida, neutra ou básica.

- solução ácida: $pH < 7$
- solução neutra: $pH = 7$
- solução básica: $pH > 7$

Escala do pH

Fontes de pesquisa: [illegible]. Acesso em: 8 dez. 2015.
KOTZ, John C.; TREICHEL JR, Paul M. **Química geral e reações químicas**. Tradução técnica Flávio Maron Vichi. São Paulo: Thomson Learning, 2006.
BRADY, James E.; RUSSELL, Joel W.; HOLUM, John R. **Química**: a matéria e suas transformações. Tradução J. A. Souza. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

A utilização do pH na indústria permitiu que processos como produção de vacinas, fermentações, produção de leite e derivados fossem realizados por meio de procedimentos mais adequados.

Um agrônomo, ao verificar as condições do solo para o início de um plantio, oferece ao produtor informações sobre o nível de nutrientes, o conteúdo orgânico e o pH do solo, que, quando representado por um valor entre 6 e 7, tende a ser mais fértil.

a) Em uma propriedade rural, a produtividade máxima de feijão foi obtida com o pH 6,4 do solo. Determine a concentração de íons hidrogênio apresentada nesse solo. $10^{-6,4}$ mol/L

b) Considerando o pH, a 25 °C, das substâncias a seguir, classifique-as em ácidas, básicas ou neutras.
- leite de magnésia: $10 < pH < 11$ substância básica
- suco de limão: $2 < pH < 3$ substância ácida
- água pura: $pH = 7$ substância neutra
- leite: $6 < pH < 7$ substância ácida

c) Considerando $[H^+][OH^-] = 1 \cdot 10^{-14}$ e utilizando as fórmulas $pH = -\log[H^+]$ e $pOH = -\log[OH^-]$, obtenha a relação $pH + pOH = 14$. $[H^+][OH^-] = 1 \cdot 10^{-14} \Rightarrow \log([H^+][OH^-]) = -14 \Rightarrow -\log[H^+] - \log[OH^-] = 14 \Rightarrow pH + pOH = 14$

Logaritmo e função logarítmica 165

Orientações para o professor

Página 165

- A atividade 24 apresenta uma relação entre as disciplinas de Matemática e Química. Nela, o conceito matemático de logaritmo é associado ao conceito de pH. Nessa abordagem, é utilizado o logaritmo negativo da concentração de íons hidrogênio de uma substância aquosa para expressar o seu pH.

Após a resolução da atividade, verifique a possibilidade de um trabalho com o professor de Química para determinar se algumas soluções aquosas utilizadas no cotidiano são ácidas ou básicas. Essa experiência pode ser realizada utilizando-se uma fita de tornassol ou seguindo o experimento descrito a seguir.

Determinação de substâncias ácidas e básicas utilizando extrato de repolho roxo

Materiais necessários
- água
- 15 folhas de repolho roxo
- 50 mL de vinagre
- 50 mL de leite
- 50 mL de suco de limão
- 50 mL de detergente
- 50 mL de xampu
- 1 clara de ovo
- 1 colher de sobremesa
- 6 copos plásticos transparentes

Cozinhe as folhas de repolho roxo na água, que deve ficar roxa. Espere esfriar, retire o repolho e coloque a solução obtida em um recipiente. Em cada copo transparente, coloque cada uma das substâncias (vinagre, leite, suco de limão, detergente, xampu, clara de ovo) e 50 mL de água. Em seguida, acrescente duas colheres de sobremesa do extrato do repolho roxo e misture, com uma colher limpa. Observe a mudança de coloração. A cor vermelha (ou lilás) indica que a substância é ácida, e a cor verde, que a substância é básica.

Fonte: (SOUZA, 2016, p. 165 e 323)

Percebe-se que nas orientações para o professor, em relação a resolução de atividades, que sejam informados aos estudantes algumas relações entre as outras áreas de conhecimento que são utilizadas durante suas respectivas resoluções.

Nas páginas 174 e 175 na seção contexto é apresentado um texto “Terremotos” onde há uma relação com a geografia, onde o conceito de função logarítmica é associado a desastres naturais, incentivando a pesquisa da magnitude de terremotos que ocorreram recentemente, suas consequências e estratégias de prevenção.

Assim nota-se que os capítulos 5 e 6 de SOUZA (2016) instigam aos estudantes interpretar taxas e índices de natureza socioeconômicas, investigando seus processos para que possam analisar criticamente a realidade em que está inserido e produza seus próprios argumentos.

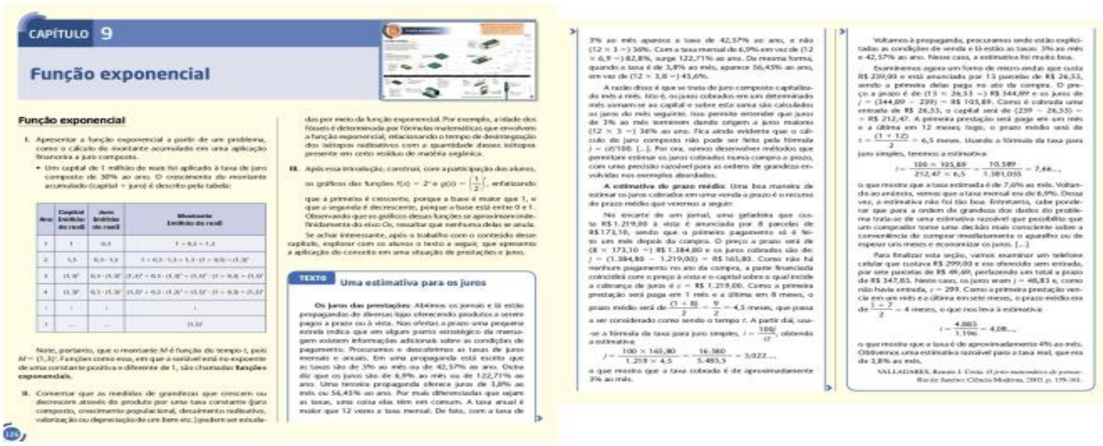
EM13MAT203

Na habilidade **EM13MAT203** o aluno deve:

> Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. (BNCC 2018, p.534)

Os capítulos (9 e 10), apresentam várias relações em que os estudantes podem utilizar aplicativos e a criação de planilhas. As orientações metodológicas de Paiva (2015), propõe uma contextualização para o estudo de funções exponenciais, o texto intitulado “Uma estimativa de Juros”.

Figura 4.17: Vendo a Competência EM13MAT203



Fonte: (PAIVA 2015, p.327 e 328)

Entretanto, percebe-se que não há orientação/motivação para que os estudantes pudessem criar planilhas para visualização mais rápida e eficiente, como aplicação das funções exponenciais visando uma melhor tomada de decisão.

Após análise, constata-se que o único aplicativo proposto a ser utilizado pelos estudantes é a calculadora, apesar de existir vários exemplos e exercícios em que o estudante pode utilizar de aplicativos e criação de planilhas. Em relação a seu uso, percebe-se que os exemplos e exercícios em que há essa utilização, seu uso está caracterizado apenas para efetuar contas com quantidade elevada de dígitos.

Figura 4.18: (Exercício referente à competência EM13MAT203)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3 Uma amostra de 4 kg de uma substância radioativa se desintegra à razão de 0,25% ao ano.

a) Qual é a equação que expressa a massa M dessa amostra, em quilograma, em função do tempo t, em ano?

b) Com o auxílio de uma calculadora científica, calcular a massa dessa amostra daqui a trinta anos.

Resolução

a) Raciocinando como no cálculo do montante a juro composto, temos que o valor M de uma grandeza qualquer a partir de seu valor inicial C, do tempo t e da taxa constante i de crescimento ou decrescimento pode ser calculado pela fórmula:

$$M = C(1 + i)^t,$$

em que t e i se referem à mesma unidade de tempo.

Nesse caso, como temos um decrescimento, a taxa i é negativa: $i = -0{,}25\%$

Assim, a amostra de 4 kg que se desintegra à razão de 0,25% ao ano terá daqui a t anos a massa M, em quilograma, dada por:

$$M = 4 \cdot (1 - 0{,}0025)^t, \text{ ou seja, } M = 4 \cdot (0{,}9975)^t$$

b) Para calcular a massa da amostra, em quilograma, daqui a trinta anos, basta substituir por 30 a variável t da função obtida no item **a**:

$$M = 4 \cdot (0{,}9975)^{30}$$

Usando uma calculadora científica, obtemos: $(0{,}9975)^{30} \approx 0{,}93$ e, portanto:

$$M \approx 4 \cdot 0{,}93 \Rightarrow M \approx 3{,}72$$

Assim, daqui a trinta anos a amostra terá 3,72 kg, aproximadamente.

Fonte: (PAIVA 2015, p.227)

Percebe-se que em alguns exercícios existe as planilhas prontas, mas não há nenhuma orientação metodológica para que o estudante possa elaborar suas próprias planilhas para análise de ações e tomadas de decisões.

Figura 4.19:(Exercício referente à competência EM13MAT203)

9 Uma caixa-d'água com 6.000 L de capacidade tem, internamente, a forma de um cubo.

Adotando o valor $\log 6 = 0{,}78$ e os valores da tabela ao lado, calcular a medida, em metro, de cada aresta do cubo.

x	10^x
0,23	1,70
0,24	1,74
0,25	1,78
0,26	1,82
0,27	1,86
0,28	1,91

Resolução

Como $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$, então: $6.000 \text{ L} = 6.000 \text{ dm}^3 = 6 \text{ m}^3$

Assim, indicando por a a medida, em metro, da aresta do cubo, obtemos:

$a^3 = 6 \Rightarrow 3 = \log_a 6$

Pela propriedade da mudança de base, transformamos o logaritmo para a base 10:

$$3 = \log_a 6 \Rightarrow 3 = \frac{\log 6}{\log a}$$

$$\therefore \log a = \frac{\log 6}{3} = \frac{0{,}78}{3} = 0{,}26 \Rightarrow a = 10^{0{,}26}$$

Observando a tabela, concluímos que $a = 1{,}82$.

Logo, cada aresta do cubo mede 1,82 m.

Fonte: (PAIVA 2015, p.246)

Nas orientações metodológicas de PAIVA (2015), percebe-se que não há sugestões para a utilização de aplicativos e criação de planilhas em relação aos capítulos analisados.

Assim, percebe-se que no estudo das funções exponenciais e logarítmicas, faz-se necessário que os estudantes possam aplicar os conhecimentos adquiridos através do uso de aplicativos e criação de planilhas, uma vez que, esses conteúdos abordados em suas contextualizações e aplicações interdisciplinares, possibilitam maior interação entre a matemática e as tecnologias, pois "eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas".(BNCC 2018, p.528), possibilitando que cada estudante possa fazer interpretações e análises pertinentes a sua tomada de decisões.

Os capítulos 7 e 8 de IEZZI (2016), apresentam várias situações em que pode-se utilizar aplicativos e criação de planilhas. No estudo sobre função exponencial, a situação inicial, referente ao aumento da população brasileira (p.127), poderia ser trabalhada em forma de planilha eletrônica durante o percurso do conteúdo, de maneira análoga, no estudo sobre a função logarítmica (p.148), percebe-se aplicações a física e a matemática financeira que poderiam ser retomadas no percurso do conteúdo possibilitando a utilização de aplicativos e a criação de planilhas, possibilitando tomada de decisões, nesse aspecto observa-se que as orientações metodológicas propõe o uso da calculadora apenas de modo operatório, não possibilitando uma análise da situação proposta para tomada de decisões.

Alguns exercícios e problemas propostos envolvem outras áreas e conhecimento e questões de relevância ao cotidiano do estudante, entretanto, verifica-se que na resolução dos mesmos, é trabalhado apenas os conceitos e propriedades operatórias, perdendo-se a oportunidade de utilizar as planilhas e aplicativos.

Figura 4.20: (Exercícios em EM13MAT203)

29 Analistas do mercado imobiliário de um município estimam que o valor (**v**), em reais, de um apartamento nesse município seja dado pela lei $v(t) = 250000 \cdot (1{,}05)^t$, sendo **t** o número de anos ($t = 0, 1, 2, \ldots$) contados a partir da data de entrega do apartamento.

a) Qual o valor desse imóvel na data de entrega?

b) Qual é a valorização, em reais, desse apartamento, um ano após a entrega?

29. a) $v(0) = 250000 \cdot (1{,}05)^0 = 250000$ (250 000 reais)

b) $v(1) = 250000 \cdot 1{,}05^1 = 262500$ (262 500 reais)

A valorização é 12 500 reais $(262500 - 250000 = 12500)$

c) $v(6) = 250000 \cdot (1{,}05)^6 = 250000 \cdot (1{,}05)^3 \cdot (1{,}05)^3 = 250000 \cdot 1{,}15^2 = 330625$ (330 625 reais)

d) Devemos determinar **t** tal que $v(t) = 1525000$.

$1525000 = 250000 \cdot (1{,}05)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}05^t = 6{,}1 \xrightarrow{\text{tabela}} t = 37$ (37 anos)

(IEZZI 2016, p.143 e 379)

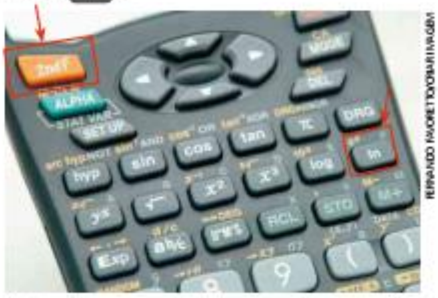
Aliás, durante análise dos capítulos, os únicos aplicativos que são propostos são a calculadora, apenas de maneira operatória, como ferramenta auxiliar na abstração do conhecimento matemático, deixando de lado sua função que consiste em auxiliar em processos mais elaborados visando análise crítica e tomada de decisões.

Figura 4.21: (Exercícios em EM13MAT203)

Muitas calculadoras científicas possuem a tecla e^x colocada, em geral, como segunda função (veja a tecla 2ndF na imagem seguinte; em alguns modelos, a segunda função da tecla é acionada por meio da tecla Shift).

Neste modelo, o cálculo de e^x é feito através da segunda função da tecla ln (o significado de ℓn será apresentado no capítulo seguinte).

Deste modo, em geral, não é necessário substituir **e** por alguma aproximação racional, bastando "entrar com" o expoente **x** para se conhecer o resultado da potência e^x.



Você pode usar uma calculadora financeira ou científica para calcular o valor de e^x.

Veja:

- Para calcular e^2, pressionamos:

  2 → 2ndF → e^x → 7.389056

  Obtemos o valor aproximado 7,389056.

- Para calcular e^{10}, pressionamos:

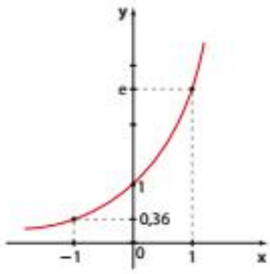
  1 0 → 2ndF → e^x → 22026.46579

  Obtemos o valor aproximado 22 026,46579.

  Em alguns modelos de calculadora, a sequência das "operações" pode ser invertida. Veja o cálculo de e^{10}:

  2ndF → e^x → 1 0 → 22026.46579

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = e^x$ é a função exponencial de base **e**, cujo gráfico é dado ao lado.



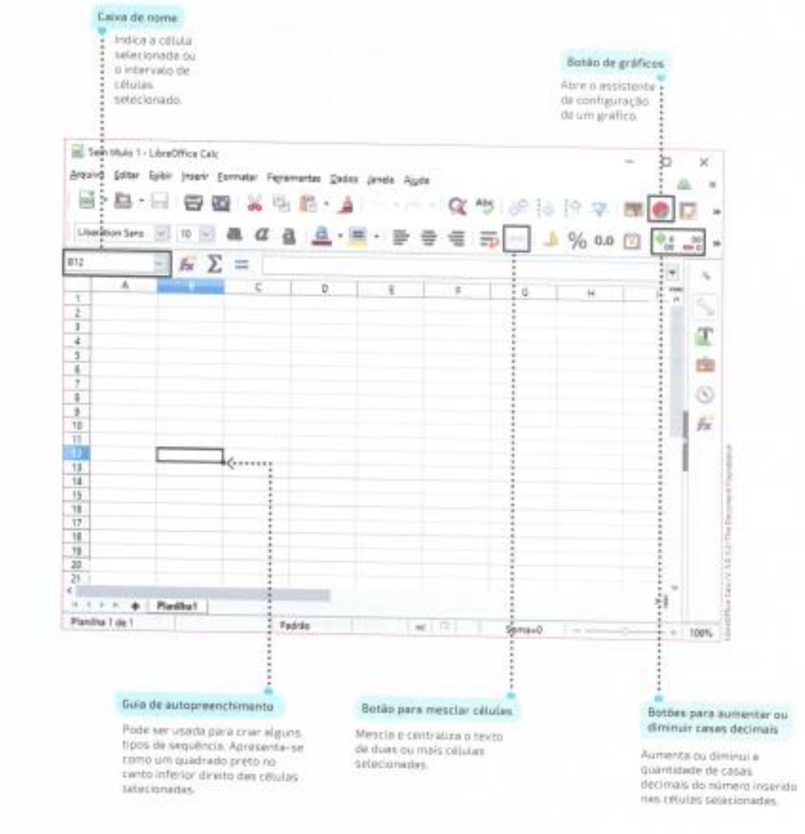
Fonte: (IEZZI 2016, p.138)

Vale ressaltar que as seções denominadas Aplicações, Troca de ideias e os infográficos apresentados nos capítulos, apresentam informações de grande relevância na realidade dos estudantes, entretanto poder-se-ia propor nesses tópicos a utilização de aplicativos e planilhas, nas orientações metodológicas é proposto para esses tópicos apenas a exposição e cálculos operatórios referentes aos estudo das funções exponenciais e logarítmicas, sem proposição de utilização de planilhas.

Assim, percebe-se a necessidade de aplicação de aplicativos e criação de planilhas possibilitando ao estudante melhor compreensão e aplicação das funções exponenciais e logarítmicas, proporcionando a formação científica geral e possibilitando uma análise aprofundada para tomar decisões.

Em Souza (2016), as funções exponenciais e logarítmicas apresentadas nos capítulos (5-6), apresentam várias situações que os estudantes poderiam utilizar aplicativos e criação de planilhas para aplicar os conhecimentos para melhor análise e tomada de decisões. Na parte final do livro, encontra-se uma seção intitulada “Acessando tecnologias”, onde nas páginas 271 a 723, o autor orienta como trabalhar com um modelo de planilha eletrônica chamado “LibreOffice Cal”.

Figura 4.22:(Habilidade EM13MAT203)



Fonte: (SOUZA 2016, p.271)

Nas orientações para o professor, não foi verificada nenhuma orientação ou sugestão para que os estudantes pudessem utilizar planilhas para aplicação de conhecimentos específicos. Em relação aos aplicativos, o único que fora observado durante analise foi a presença da calculadora, induzindo o estudante apenas ao cálculo operatório, sem análise e tomada de decisões.

No capítulo 8, que fala sobre progressões, as funções exponenciais são retomadas quando fala-se sobre progressão geométrica (P.G), sendo que a seção “Acessando tecnologias”, na (p. 273) orienta como trabalhar com planilhas envolvendo P.A e P.G, encontraram-se nesse capítulos várias atividades em que o estudante pode utilizar de aplicativos e construção de planilhas para aplicar os conceitos de progressão, aliados a função exponencial, visando tomar melhores decisões, entretanto não existe esta orientação nem nas orientações para o professor quanto no livro do aluno.

Assim, observando os conteúdos analisados, bem como as orientações e materiais disponíveis para os estudantes, percebe-se que existe orientação para utilização de aplicativos e planilhas na obra, entretanto essas orientações não são utilizadas de maneira satisfatória durante o percorrer dos capítulos.

EM13MAT304

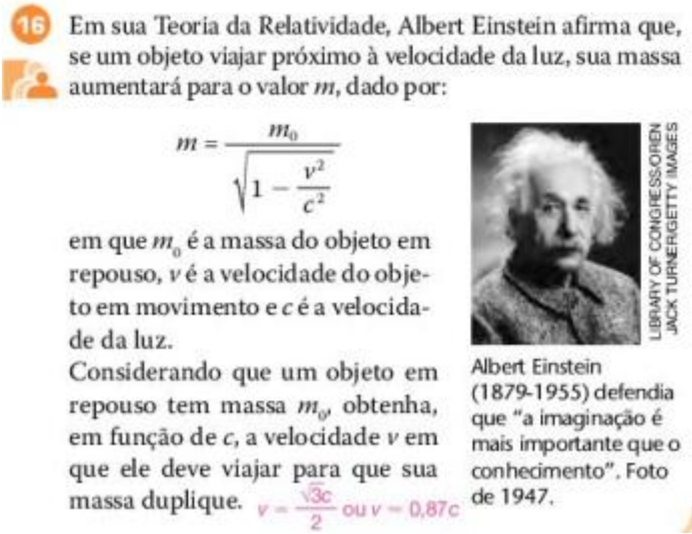
Na habilidade **EM13MAT304**, o aluno deve:

> Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. (BNCC 2018, p.536)

Em PAIVA (2015, p. 218-219), retoma-se sobre a notação científica, todos os exercícios resolvem problemas em relação com a química, física, biologia, e em seguida, é proposta para que o estudante elabore problemas tomando-se por base os problemas discorridos anteriormente.

Na sequência, ao retomar o estudo sobre radicais, na página (222), percebe-se um problema relacionado com a teoria da Relatividade de Einstein, onde o estudante conhece um pouco desta teoria, aplicando numa fórmula em seguida, sem uma interpretação da variação de suas grandezas envolvidas, podendo ocorrer quando o problema é resolvido e discutido em sal, embora as orientações metodológicas não fazem referência a esta prática.

Figura 4.23: (Exercício sobre a habilidade EM13MAT304)



16 Em sua Teoria da Relatividade, Albert Einstein afirma que, se um objeto viajar próximo à velocidade da luz, sua massa aumentará para o valor m, dado por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

em que m_0 é a massa do objeto em repouso, v é a velocidade do objeto em movimento e c é a velocidade da luz.

Considerando que um objeto em repouso tem massa m_0, obtenha, em função de c, a velocidade v em que ele deve viajar para que sua massa duplique. $v = \frac{\sqrt{3}c}{2}$ ou $v \approx 0,87c$

LIBRARY OF CONGRESS/OREN JACK TURNER/GETTY IMAGES

Albert Einstein (1879-1955) defendia que "a imaginação é mais importante que o conhecimento". Foto de 1947.

Fonte: (PAIVA 2015, p.222)

Após ser abordada e estudada a função exponencial, nas páginas (227-228), percebe-se proposição de problemas relacionados a matemática financeira, geografia, biologia, destacando-se que na sequência é proposto que o estudante possa basear-se nas temáticas propostas anteriormente para que possa elaborar um problema envolvendo o conteúdo em questão.

As equações exponenciais estão relacionadas com problemas envolvendo a biologia e a geografia nas páginas 230 e 231, onde é despertada a senso investigativo do estudante quando é proposto questionamentos sobre a curva de tendência, as orientações na página 398, através da sessão “Questões para reflexão” sugere procedimentos para que o professor possa melhor desenvolver com os estudantes esta temática.

Finalizando o capítulo, existe uma seção denominada exercícios complementares, onde ocorre a retomada do que fora trabalhado ao longo do percurso, onde verifica-se a predominância de questões que sugerem que o estudante possa compreender e interpretar a variação de grandezas envolvidas em diferentes contexto, entretanto ao analisar as resoluções presentes, percebe-se que não existe a perspectiva que o estudante possa elaborar, questões, embora nas outras atividades propostas anteriormente, existe esta tendência,

Assim, verifica-se de maneira geral que em (PAIVA)2015, existe a proposta de resolução de problemas, entretanto grande parte deles sejam apenas operatórios, não despertando no estudante a perspectiva de analisar as grandezas envolvidas em diferentes contextos, relacionadas a função exponencial.

Em IEZZI (2016), observa-se que na página (135), revisitando-se as propriedades das potências, consta um problema relacionado à educação física, fazendo referência a área da superfície corporal de uma pessoa, onde o estudante necessita interpretar a variação das grandezas envolvidas.

Figura 4.24: (Habilidade EM13MAT304)

16 A área da superfície corporal (ASC) de uma pessoa, em metros quadrados, pode ser estimada pela fórmula de Mosteller:

$$ASC = \left(\frac{h \cdot m}{3\,600}\right)^{\frac{1}{2}}$$

em que **h** é a altura da pessoa em centímetros e **m** é a massa da pessoa em quilogramas.

a) Calcule a área da superfície corporal de um indivíduo de 1,69 m e 75 kg. Use $\sqrt{3} \simeq 1,7$.

b) Juvenal tem ASC igual a 2 m² e massa 80 kg. Qual é a altura de Juvenal?

c) Considere dois amigos, Rui e Eli, ambos com 81 kg de massa. A altura de Rui é 21% maior do que a altura de Eli. A ASC de Rui é x% maior do que a ASC de Eli. Qual é o valor de **x**?

Fonte: (IEZZI, 2016, p.135)

Quando se remete as funções exponenciais, os exercícios da página (141), contam aplicações na química, matemática financeira, geografia, biologia, onde os estudantes necessitam compreender e interpretar as grandezas envolvidas para resolução dos mesmos. As orientações didáticas nas páginas 339 e 340 destacam uma atividade em grupo onde os estudantes vão relacionar as funções exponenciais e logarítmicas nos cálculos de datação radioativa.

Figura 4.25: (Habilidade EM13MAT304)

▶ **Atividade 6: As funções exponencial e logarítmica nos cálculos de datação radioativa**

Objetivos

- Utilizar os conceitos estudados nos capítulos de função exponencial e função logarítmica para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento.
- Aprofundar as discussões apresentadas no capítulo 7 sobre função exponencial e meia-vida de um isótopo radioativo.
- Conhecer a técnica de datação da idade de um material por meio do método do carbono-14, usada em Arqueologia e Antropologia.
- Exercitar habilidades como leitura e interpretação de textos científicos.

Material

- Material básico escolar (papel, lápis e borracha). Opcionalmente, poderá ser usada a calculadora científica para obtenção de valores de alguns logaritmos com várias casas decimais, a fim de melhorar as aproximações e os resultados.

Fonte: (IEZZI, 2016, p.339)

Sendo assim, observa-se que existem exercícios e problemas relacionados as funções exponenciais em diferentes contextos, exigindo que os estudantes compreendam e interpretem as variações entre as grandezas presentes, mas nota-se a ausência de temática que os motivem a elaboração de problemas autorais envolvendo o conteúdo em situações diversificadas.

Em Souza (2016), observa-se que na página (142), revistando-se notação científica, consta um problema relacionado a geografia, através da distância de cada planeta ao Sol, através do qual os estudantes podem verificar qual planeta está mais próximo.

Figura 4.26: (Habilidade EM13MAT304)

Fonte: (SOUZA, 2016, p.142)

Ainda referindo-se a notação científica, nota-se que as atividades da página 143 estão relacionadas com a geografia, física, onde faz-se necessário que o estudante interprete as grandezas envolvidas nestes contextos.

Em relação a função exponencial há considerável quantidade de atividades relacionadas com outras áreas de conhecimento, que nas orientações para o professor, estão resolvidas de maneira operatória, carecendo de maior interpretação entre as grandezas envolvidas. Outro fator de relevância é que, não fora observado que o autor propusesse aos estudantes que elaborassem problemas envolvendo as funções exponenciais em seus variados contextos.

Portanto, verifica-se que em relação as funções exponenciais, existem variados tipos de problemas em que os estudantes necessitam interpretar e analisar as grandezas envolvidas, entretanto, nota-se que não há proposta para que o mesmo possa produzir seus problemas, sendo esta etapa importante para consolidação da aprendizagem esperada, para que “os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática" (BNCC 2018, p.529).

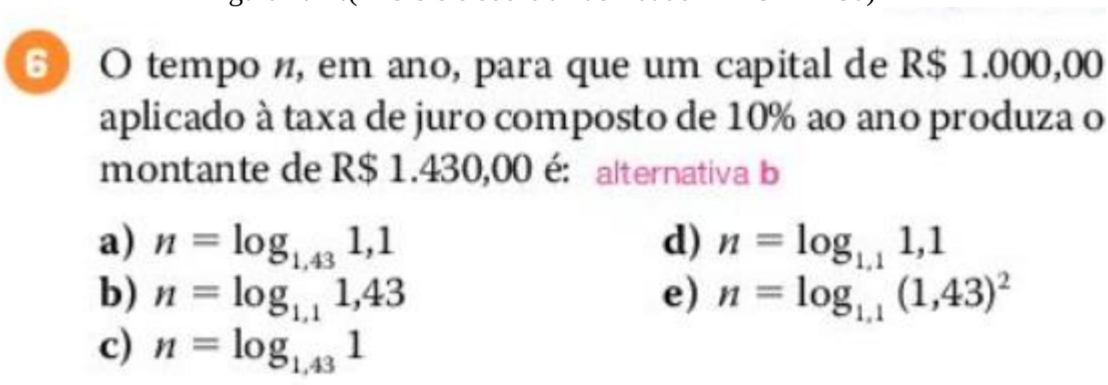
EM13MAT305

Na competência **EM13MAT305**, o aluno deverá:

> Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (BNCC 2018, p.536)

A primeira inserção de problemas que exigem a compreensão e interpretação de grandezas presentes no capítulo 10 de PAIVA (2015) ocorre na página 240, onde há relação com a geografia, analisando as grandezas que geram os abalos sísmicos. Posteriormente, verifica-se que nas páginas 243 e 244 verifica-se problemas relacionados química, geografia, matemática financeira e geografia com uma motivação para o estudante possa elaborar uma questão específica relacionando com a questão 6 (matemática financeira).

Figura 4.27:(Exercício sobre a habilidade EM13MAT30)



6 O tempo n, em ano, para que um capital de R$ 1.000,00 aplicado à taxa de juro composto de 10% ao ano produza o montante de R$ 1.430,00 é: alternativa b

a) $n = \log_{1,43} 1,1$

b) $n = \log_{1,1} 1,43$

c) $n = \log_{1,43} 1$

d) $n = \log_{1,1} 1,1$

e) $n = \log_{1,1} (1,43)^2$

Fonte: (PAIVA 2015, p.243)

As propriedades dos logaritmos estão relacionadas com a física, matemática financeira e química, nos problemas que são propostos na página (247), entretanto, as orientações para o professor, apenas resolvem esses problemas, não aprofundando-se as relações que possam existir entre as grandezas presentes em cada questão.

A função logarítmica e sua relação com a função exponencial estão presentes em problemas presentes na página (251), estando relacionados com a química, biologia e matemática financeira, logo após, há uma motivação para os estudantes baseados nas contextualizações presentes nesta página, possam elaborar e resolver problemas.

Nas equações logarítmicas, há grande quantidade de exemplos e atividades nas páginas (254-255), relacionando com a geografia, biologia, matemática financeira, com motivação posterior para elaboração de questões autorais. Os exercícios complementares são todos compostos por problemas envolvendo biologia, física e química, nas páginas (256-257), entretanto, percebe-se que a resolução destas, não há uma motivação para que os estudantes possam elaborar problemas e fazer análises entre grandezas, resumindo-se apenas a resolução dos problemas.

Em seguida, percebe-se uma seção denominada “Análise da Resolução” em os estudantes, organizados em equipes vão analisar uma proposta de resolução para determinado problema relacionado a biologia, atentando-se apenas em verificar se os cálculos estavam corretos. Como proposta final do conteúdo, existe atividades voltadas a biologia, história e química, onde os alunos resolvem os problemas baseados na leitura e análise do texto em questão (A idade dos fosseis).

Assim, verifica-se de maneira geral que em Paiva (2015), existe a proposta de resolução de problemas, entretanto, grande parte deles sejam apenas operatórios, não despertando no estudante a perspectiva de analisar as grandezas envolvidas em diferentes contextos relacionados a função logarítmica.

EM13MAT403

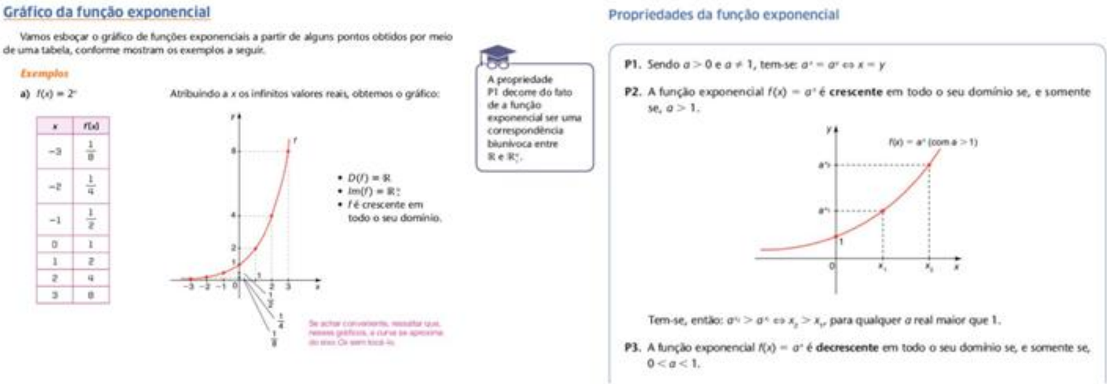
Na habilidade **EM13MAT403**, o aluno deverá:

> Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (BNCC, 2018, p.539)

As orientações gerais de PAIVA (2015) não fazem referência direta a análise das funções exponenciais e logarítmicas expressas em tabelas e no plano cartesiano para identificar suas características fundamentais, entretanto pode-se observar que essas construções estão bem estruturadas no decorrer dos capítulos, mostrando-se sua construção através de tabelas e transposição para o plano cartesiano.

Em relação a função exponencial, nas páginas (225-226), Paiva (2015), mostra de maneira prática e objetiva a construção do gráfico dessa função, delimitando suas características fundamentais e propriedades, inclusive aparece como orientação no material do professor que seja ressaltado o comportamento do gráfico em relação ao eixo das coordenadas.

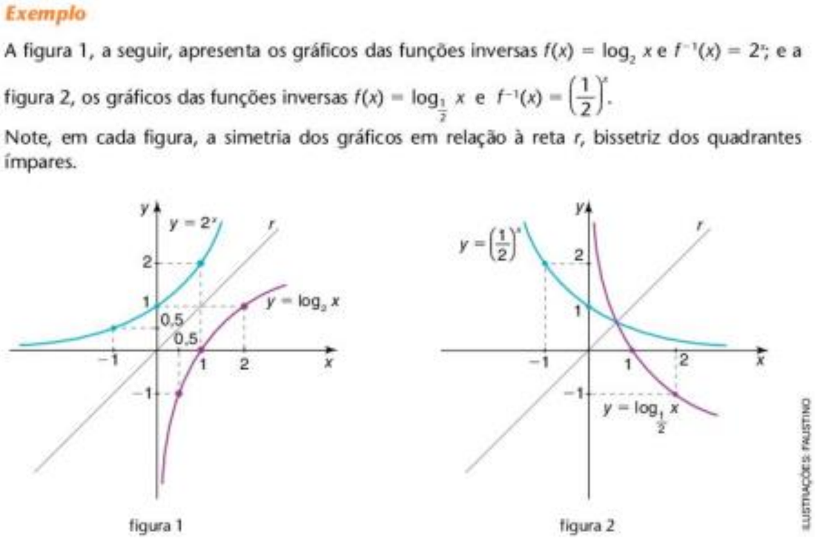
Figura 4.28: (Exercício sobre a habilidade EM13MAT403)



Fonte: (PAIVA 2015, p.225 e 226)

De maneira análoga, a função logarítmica é apresentada nas páginas (248-249), mostrando-se através de tabelas e plano cartesiano as características e propriedades da função logarítmica. Já na página 250, verifica-se a relação entre as funções exponencial e logarítmica.

Figura 4.29: (Exercício sobre a habilidade EM13MAT403)



Fonte: (PAIVA 2015, p.250)

Vale ressaltar que as construções apresentadas não foram geradas através de softwares que auxiliam a construção e percepção matemática das características das funções. Em relação aos exercícios, percebe-se que não apresentam construção, apenas análise de gráficos já gerados em situações problema.

Assim, verificamos que as tabelas apresentadas durante os capítulos analisados possibilitam a maior compreensão das características fundamentais das funções exponenciais e logarítmicas, entretanto o uso de tecnologias na construção de gráficos é pouco explorado, este, possibilita maior compreensão do aluno em relação a função a ser estudada, ressaltando a “importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento e pensamento computacional”. (BNCC 2018, p.528)

Em IEZZI (2016), as funções logarítmicas são tratadas de maneira inicial através de duas aplicações relacionadas a matemática financeira e a física, onde diante dos exemplos de desvalorização de um bem de consumo e da intensidade de sons que o ouvido humano é capaz de suportar, possibilita aos estudantes compreendam e interpretem a variação entre as grandezas envolvidas.

Assim, voltaremos constatar a presença de problemas que exijam a habilidade EM13MAT305 somente nas páginas 167 e 168, sendo relacionados com a química, geografia, biologia e matemática financeira. Nas orientações didáticas, as resoluções destes problemas remetem a compreensão e interpretação das grandezas envolvidas, entretanto percebe-se que os contextos poderiam serem melhor explorados nas considerações finais referentes a resposta de cada problema.

Figura 4.30: (Habilidade EM13MAT305)

43. a) Temos:

$v(0) = 3\,000$ (valor de aquisição) $\Rightarrow p \cdot q^0 = 30\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 30\,000$ *

$v(3) = 21\,870 \Rightarrow 21\,870 = 30\,000 \cdot q^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow q^3 = \dfrac{729}{1\,000} \Rightarrow q^3 = \left(\dfrac{9}{10}\right)^3 \Rightarrow q = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$

b) A lei é: $v(x) = 30\,000 \cdot 0{,}9^x$; devemos determinar **x** para o qual $v(x) = 10\,000$:

$10\,000 = 30\,000 \cdot 0{,}9^x \Rightarrow \dfrac{1}{3} = 0{,}9^x \Rightarrow \log_{0,9}\dfrac{1}{3} = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{-\log 3}{2\log 3 - 1} = \frac{-0{,}4771}{-0{,}0458} \simeq$$

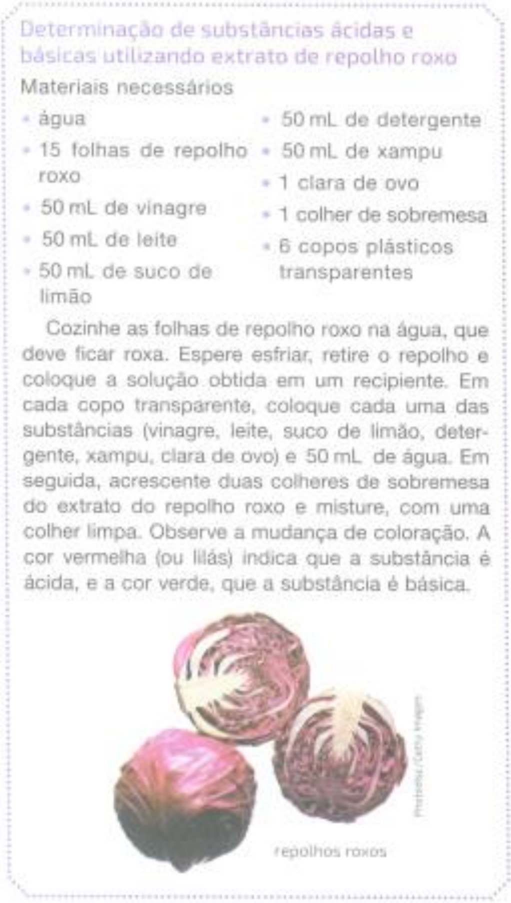
$\simeq 10{,}4$ (10,4 anos, ou seja, 10 anos e 5 meses)

Fonte: (IEZZI 2016, p.386)

As orientações metodológicas abordam uma dinâmica de trabalho em grupo, já citada na habilidade (EM13MAT305). Neste contexto, nota-se a presença de problemas envolvendo funções exponenciais, entretanto poder-se-ia haver maior quantidade de problemas, pois a maioria dos problemas são de natureza operatória, onde o estudante apenas aplica as definições, deduções e conceitos matemáticos. Também é observado a ausência de propostas sejam elaborados problemas relacionando outras áreas de conhecimento com aquilo que é proposto pelo capítulo.

Em Souza (2016), percebe-se que ao definir logaritmos, encontra-se na página (162), um problema envolvendo a biologia, relacionando com uma colônia de bactérias. Em relação as propriedades operatórias dos logaritmos, nas páginas 164 e 165 existem bastante problemas relacionados com a Biologia e a Química, onde nas orientações para o professor na página (323), existe uma orientação para que esta atividade seja melhor desenvolvida por parte dos estudantes através da determinação de substancias ácidas e básicas através do extrato de repolho roxo.

Figura 4.31: (Habilidade EM13MAT305)



Determinação de substâncias ácidas e básicas utilizando extrato de repolho roxo

Materiais necessários

- água
- 15 folhas de repolho roxo
- 50 mL de vinagre
- 50 mL de leite
- 50 mL de suco de limão
- 50 mL de detergente
- 50 mL de xampu
- 1 clara de ovo
- 1 colher de sobremesa
- 6 copos plásticos transparentes

Cozinhe as folhas de repolho roxo na água, que deve ficar roxa. Espere esfriar, retire o repolho e coloque a solução obtida em um recipiente. Em cada copo transparente, coloque cada uma das substâncias (vinagre, leite, suco de limão, detergente, xampu, clara de ovo) e 50 mL de água. Em seguida, acrescente duas colheres de sobremesa do extrato do repolho roxo e misture, com uma colher limpa. Observe a mudança de coloração. A cor vermelha (ou lilás) indica que a substância é ácida, e a cor verde, que a substância é básica.

repolhos roxos

Fonte: (SOUZA, 2016, p.323)

Nas outras atividades propostas no capítulo, nota-se relação com outras áreas de conhecimento como a biologia, a química, a geografia e a matemática financeira, onde cada estudante precisa compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, entretanto, percebe-se a ausência de atividades em que o estudante possa elaborar problemas envolvendo as funções logarítmicas.

Assim faz-se necessário que sejam propostas mais situações em que os estudantes possam elaborar seus problemas relacionando com as funções logarítmicas.

EM13MAT405

Na habilidade **EM13MAT405**, o aluno deverá:

> Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (BNCC 2018, p.539).

A única referência que encontra-se em Paiva (2015), são indicações para a leitura do professor presentes na página (292), demonstrando pouca aptidão com a construção de algoritmos e linguagens de programação, restringindo-se apenas as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's).

Figura 4.32: (Sugestão de referências sobre a habilidade EM13MAT405)

Tecnologias da Informação e Comunicação

BARUFI, Maria Cristina B.; LAURO, Maira M. *Funções elementares, equações e inequações*: uma abordagem utilizando microcomputador. São Paulo, CAEM-IME/USP, 2002.
Aborda a utilização do computador como ferramenta para o ensino de funções elementares, equações e inequações.

BONGIOVANNI, Vincenzo. *Descobrindo o Cabri-Géomètre*. Caderno de atividades. São Paulo: FTD, 1997.
O autor apresenta atividades com o uso do *software* Cabri-Géomètre, que pode ser utilizado em sala de aula em diferentes níveis de ensino como ferramenta no ensino de Geometria.

BORBA, Marcelo C.; PENTEADO, Miriam G. *Informática e educação matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
O livro faz uma abordagem sobre o uso da informática na educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores na utilização desse recurso como instrumento de ensino em suas aulas.

LÉVY, Pierre. *As tecnologias da inteligência*: o futuro do pensamento na era da informática. 2. ed. São Paulo: Editora 34, 2010.
Segundo o autor, "novas maneiras de pensar e de conviver estão sendo elaboradas no mundo das telecomunicações e da informática". A obra mostra que a cultura da informática é uma nova forma de assimilação de conhecimento e um novo caminho para a produção intelectual.

MORAN, José Manuel. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas: Papirus, 2011.
A obra traz uma análise das mudanças que as tecnologias trazem para a educação presencial e a distância, em todos os níveis de ensino, lembrando o papel que professores e gestores terão que desempenhar nessa revolução.

(PAIVA 2015, p.292)

Ao propor, que as funções exponenciais fossem trabalhadas a partir da "Estimativa para os juros", poder-se-ia incentivar os estudantes a pensar numa tabela eletrônica para calcular-se essa estimativa, propondo-se assim que eles tivessem um contato inicial com algoritmos e linguagem de programação.

Assim verifica-se a necessidade de implementação de algoritmos e conceitos iniciais de linguagem de programação, pois o ensino médio "tem que assumir a tarefa de preparar cidadãos para uma sociedade cada vez mais permeada por novas tecnologias e de possibilitar o ingresso de parcelas significativas de seus cidadãos a patamares mais elevados do saber”. (PNLD 2018: matemática, p.11)

Em Iezzi (2016), nas orientações didáticas, não há nenhuma referência a esta habilidade, limitando-se propor a utilização de “ferramentas matemáticas para analisar situações em seu entorno real” (IEZZI, 2016, p.303). Essa característica é confirmada durante a análise dos capítulos em questão, onde a única referência que é proposta refere-se a utilização do GeoGebra na construção de gráficos.

As seções em que os temas são relacionados com outras áreas de conhecimento, poder-se-ia propor uma construção de algoritmos e linguagens de programação visando que o aluno possa modelar e projetar as situações que ora foram apresentadas.

A BNCC (2018, p.528):

> Propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas.

Em Souza (2016), nas orientações para o professor e no transcorrer das funções exponenciais e logarítmicas, percebe-se que não há implementação de algoritmos, tão pouco a utilização de linguagens de programação, limitando-se apenas ao uso de planilhas eletrônicas e do software GeoGeobra, apesar que pode-se encontrar oportunidades onde poder-se-iam aplicar.

EM13MAT403

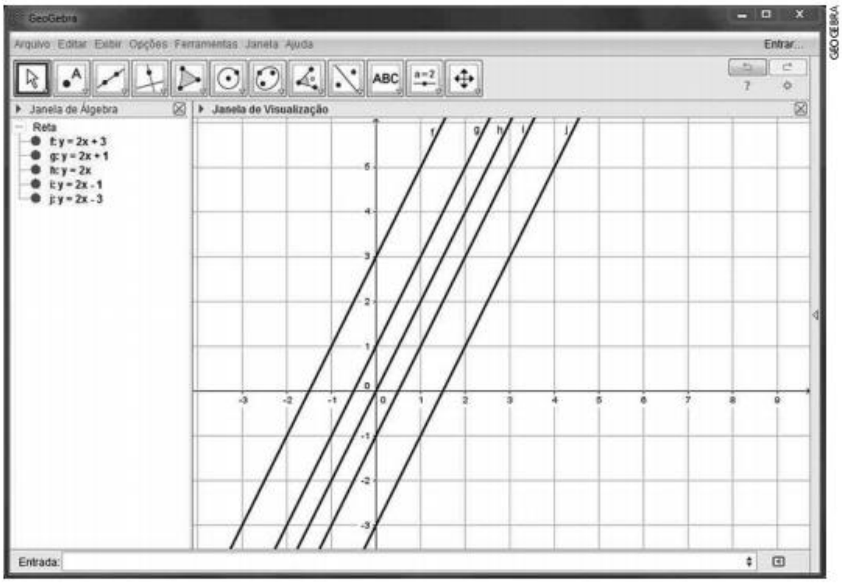
Na habilidade **EM13MAT403**, o aluno deverá:

> Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (BNCC 2018, p.539)

Nas orientações didáticas (p. 317 a 319) encontram-se sugestões de 3 softwares de matemática (GeoGebra, Winplot e Graphmática) como sugestões de trabalho para os alunos, com orientações básicas que permitem a construção inicial de funções através deles.

Figura 4.33: (Habilidade EM13MAT403)

Uma atividade que propomos, por meio do GeoGebra, é a elaboração de gráficos de várias funções a partir de uma delas. Por exemplo, a partir da função $y = 2x$, podemos construir os gráficos das funções $y = 2x + k$, com $k \in \mathbb{R}$. Podemos visualizar os gráficos gerados a partir de alguns valores de **k**.



Fonte: (IEZZI 2016, p.318)

A construção do gráfico da função exponencial, nas páginas 136 e 137, através de tabelas, plano cartesiano e do Geogebra, as funções exponenciais são representadas, identificando suas características fundamentais.

Figura 4.34: (Habilidade EM13MAT403)

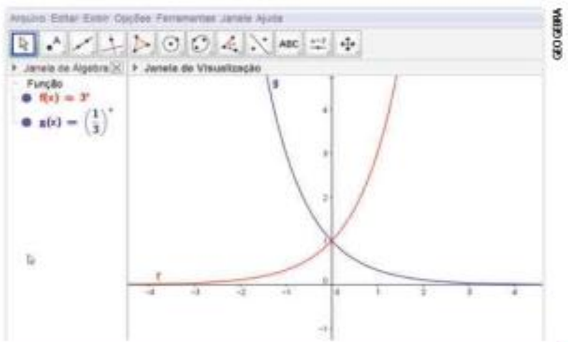
EXEMPLO 4

Observe ao lado os gráficos das funções **f** e **g** definidos por $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, traçados com o GeoGebra.

Note que, tanto para a função **f** como para a função **g**, tem-se $Im = \mathbb{R}_+^*$.

As curvas obtidas nos exemplos anteriores são chamadas **curvas exponenciais**.

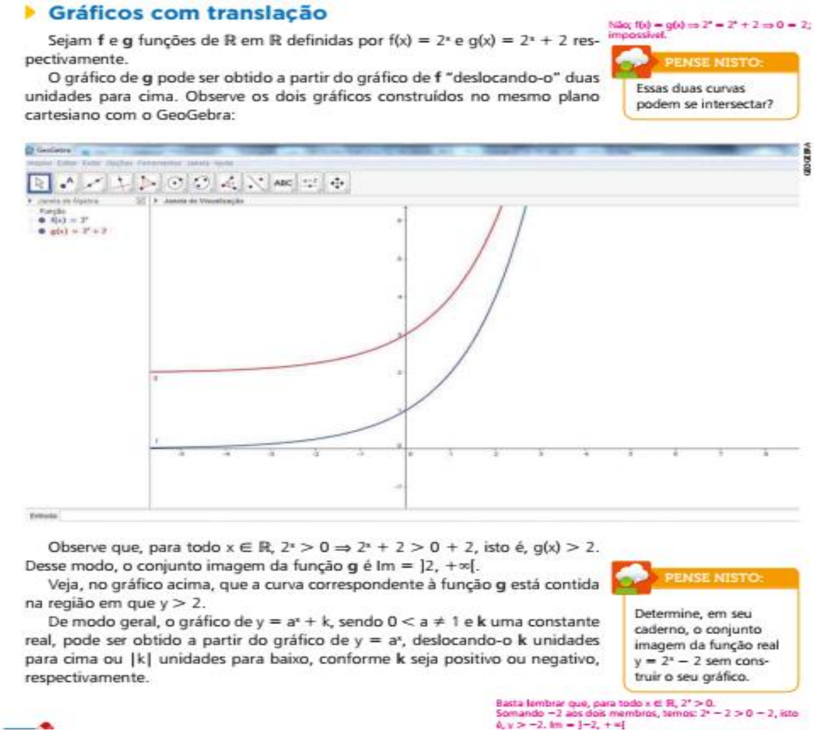
Professor, lembre-se de que no GeoGebra deve-se digitar 3^x para obter 3^x.



(IEZZI 2016, p.137)

Visando analisar o comportamento de gráficos diversos envolvendo a equação exponencial, na página (140), encontra-se uma seção chamada “Gráficos com translação” onde o estudante pode analisar algumas variações de funções exponenciais a partir do modelo clássico, com o auxílio do GeoGebra.

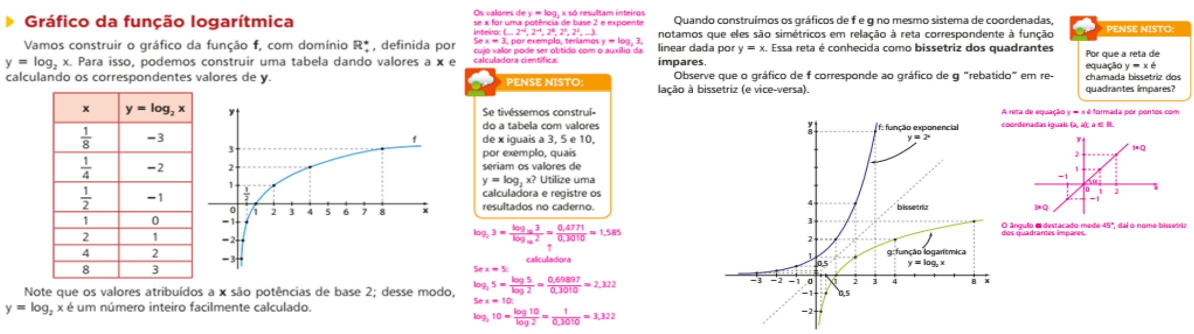
Figura 4.35: (Habilidade EM13MAT403)



Fonte: (IEZZI 2016, p.140)

Em relação a função logarítmica, nas páginas (160 a 162), constata-se a utilização de tabelas e do plano cartesiano, indicando suas características fundamentais e a relação com função exponencial, mas não constatou-se a utilização de algum software para melhor compreensão e análise do estudante.

Figura 4.36:Habilidade EM13MAT403

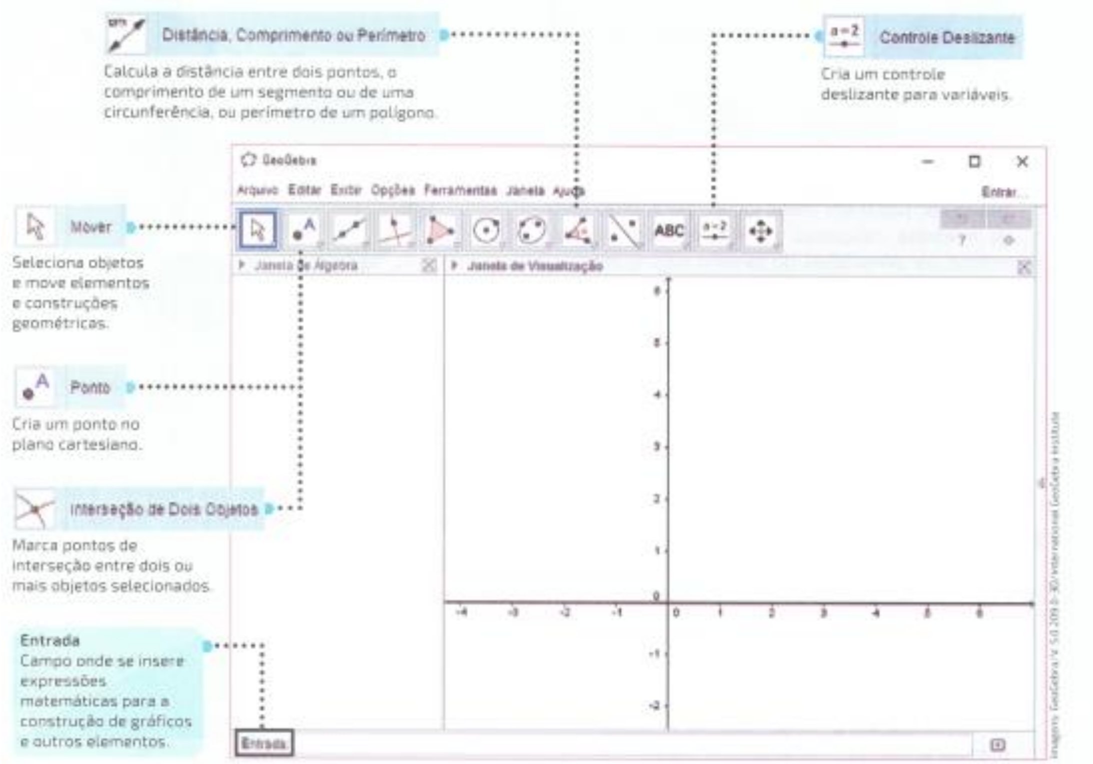


Fonte: (IEZZI 2016, p.160,162)

De maneira geral, as análises sobre as construções sobre os gráficos das funções estudadas estão bem explicitadas nas tabelas e no plano cartesiano, estabelecendo suas relações e identificando-se suas características, mas se os softwares propostos nas orientações didáticas fossem mais explorados, essas características seriam melhor absorvidas pelo estudando na construção dos gráficos.

Em Souza (2016), encontra-se uma seção denominada “Acessando Tecnologias”, nas páginas (266-267), é apresentado aos estudantes o aplicativo GeoGebra, apresentando suas funções básicas e procedimentos para construção de gráficos de funções.

Figura 4.37: (Habilidade EM13MAT403)

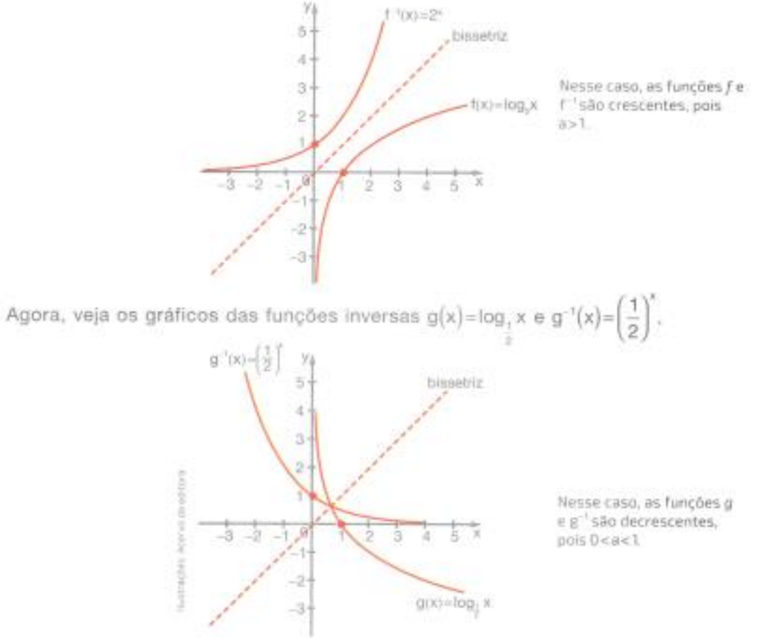


Fonte: (SOUZA 2016, p.266)

Ainda em relação a seção falada anteriormente, na página 269, as funções inversas são abordadas, onde pode-se analisar de maneira bem particular o comportamento das funções exponencial e logarítmica identificando suas características fundamentais.

De acordo com as orientações para o professor na página 321, sugere que a construção do gráfico da função exponencial na página 146, possibilite que o estudante utilize os conhecimentos adquiridos com o uso do GeoGebra, e também possa utilizar a malha quadriculada conforme orientações para o professor, já na página 170, as funções exponenciais e logarítmicas estão num mesmo plano cartesiano, possibilitando que, com a construção possa-se observar características das duas funções.

Figura 4.38: (Habilidade EM13MAT403)



Fonte: (SOUZA 2016, p.170)

Nota-se que o autor propõe estabelecer relações entre as representações das funções exponenciais e logarítmicas, identificando suas características fundamentais e com apoio e orientação sobre tecnologias digitais, possibilitando que o estudante possa “promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio”. (BNCC 2018, p.529)

EM13MAT508

Na habilidade **EM13MAT508,** o aluno deverá:

> Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (BNCC 2018, p.541).

IEZZI (2016) aborda as progressões, especificamente na página 191, durante o estudo das progressões geométricas (P.G), percebe-se a associação entre esse tema e as funções exponenciais, relacionando-se com domínios discretos, entretanto não há análise de suas propriedades, nem dedução de formulas e resolução de problemas, também não apresentado ao analisar as orientações didáticas.

Neste caso, poder-se-ia promover ao estudante uma associação mais concisa e consistente, entre a progressão geométrica e a função exponencial, permitindo-se que a dedução de fórmulas e resolução de problemas possam “promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio” (BNCC, 2018, p.529)

Souza (2016), no capítulo 8 (oito), identifica e associa as progressões geométricas (P.G) envolvendo as funções exponenciais, percebendo-se a relação entre eles e caracterizando-se suas propriedades, entretanto não consta a presença de dedução de algumas fórmulas. Na página 223 percebe-se grande quantidade de problemas em que o estudante precisa associar P.G com função exponencial. Nas orientações para o professor, existe uma sugestão de trabalho para a seção "Ser consciente" nas páginas 230 e 231, onde há uma relação entre P.G, função exponencial e biologia, ao tratar da temática do mosquito *Aedes aegypti*.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como foco analisar as habilidades da BNCC relacionadas às funções exponenciais e logarítmicas nos livros didáticos de Paiva (2015), Iezzi (2016), Souza (2016), aprovados no PNLD 2018-2020 e adotados em escolas da rede pública estadual do Maranhão.

A BNCC é um documento normativo que visa garantir um conjunto de aprendizagens essenciais que o aluno deve desenvolver durante as etapas e modalidades da educação básica. Em relação a matemática no ensino médio, a BNCC propõe que seja a ampliação, consolidação e aprofundamento das aprendizagens essenciais que foram aprendidas nas etapas anteriores da educação básica, objetivando relacionar e aplicar na realidade em que o aluno está inserido, relacionando e ampliando os conhecimentos adquiridos em outras etapas, promovendo conjecturação e abstração de processos mais elaborados, possibilitando que os estudantes possam resolver problemas em diferentes contextos, favorecendo sua autonomia e capacidade criativa.

Diante das habilidades propostas pela BNCC, em relação a matemática no ensino médio, verificou-se quais dessas habilidades estão relacionadas ao estudos das funções exponenciais e logarítmicas. A partir dessas habilidades selecionadas, realizou-se análise dos livros didáticos citados anteriormente, verificando-se quais dessas habilidades ocorrem nesses livros didáticos.

Diante da análise das habilidades e competências propostas pela BNCC, nos livros didáticos de Paiva (2005), Iezzi (2016) e Souza(2016), verificou-se que existe um enquadramento parcial às habilidades propostas pela BNCC.

As partes analisadas dos livros educacionais mostram, em geral, que há um desenvolvimento parcial de habilidades relacionadas ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas em consonância com a BNCC, corroborando que esta é mais efetiva e ampla do que os PCN's, bem como se revela mais eficaz e construtiva para o processo de ensino-aprendizagem da matemática, pois abarca em si a compreensão de que a matemática não é uma mera técnica, mas sim uma ciência que como tal necessita de investigação, reflexão e criticidade para um contínuo desenvolvimento.

Todavia, é necessário compreender que a postura e prática docente vai além do livro didático, assim, é na prática docente que as habilidades serão implementadas, portanto, é necessário que o professor tenha domínio dos conteúdos abordados no livro pedagógico, das normativas expostas na BNCC, da proposta pedagógica proposta pelo livro utilizado, bem como, alinhando seu planejamento às orientações metodológicas propostas por cada autor proporcionando maior eficácia no processo de ensino aprendizagem.

Neste contexto, faz-se necessário que a escolha do livro seja precedida de uma rigorosa e criteriosa análise, sendo executada por toda comunidade escolar, sobretudo, por aqueles profissionais mais experientes na área e que na formação inicial docente possam ser realizadas atividades objetivando-se a sua verificação, possibilitando-se identificar os pontos positivos e negativos de maneira a melhor adequar-se à realidade discente.

Acredita-se, que a análise dos livros didáticos de matemática devem estar presentes na formação inicial dos docentes, possibilitando que possam identificar em cada obra os elementos essenciais no ensino da matemática: a conceituação, a manipulação e as aplicações, bem como relacionar com as habilidades propostas pela BNCC, a fim de consolidar e aprofundar as aprendizagens básicas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **UNIÓN**: Revista Iberoamericana de Educación matemática, v. 42, p.9-34, 2015. Disponível em: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/42/revista42.pdf. Acesso em: 19 abr. 2019.

BASTOS, Marcelo Silva. O livro didático nas aulas de matemática: um estudo a partir das concepções dos professores. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 8., 2004, Pernambuco. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/CC01814219765.pdf. Acesso em: 5 ago. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação – MEC. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Lei de Diretrizes e Bases da Educação-LDB**. Brasília, DF, 1996. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf. Acesso em: 12 mar. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação – MEC. **Decreto nº 9.099**, de 18 de julho de 2017. Dispõe sobre o Programa nacional do Livro e do Material Didático-PNLD. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld. Acesso em: 25 jul. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação – MEC. **RESOLUÇÃO CEB nº 3**, de 26 de junho de 1998. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf. Acesso em: 12 mar. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação–MEC. **Histórico**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/historico. Acesso em: 25 jul. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação – MEC, Secretaria de Educação Fundamental (SEF). **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ciências naturais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação – MEC, Secretaria de Educação Fundamental (SEF). **Base Nacional Comum Curricular**, 2017.

CHEVALLARD, Y. (1992). **Concepts fondamentaux de la didactique**: perspectives apportées pr une approche anthropologique. Recherches em Didactique dês Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvag, v. 12.1, p. 73-112.

FERREIRA, Suzana Neves. Parâmetro Curricular e o livro didático no Brasil: Um saber necessário ao professor. *In:* ENDIPE Didática e Prática de Ensino no contexto político contemporâneo: cenas da Educação Brasileira, 18., 2016. Mato Grosso.

FERREIRA, S.; SILVA, H. Um olhar sobre a trajetória Política do livro didático no Brasil. *In:* Encontro de Egressos do Mestrado: Afirmação docente em Ciência, Tecnologia, Sociedade e Educação Ambiental, 1., 2015. Goiás. Disponível em: sam.ifgoias.edu.br/jatai/semlic/seer/index.php/anais/article/download/419/193. Acesso em: 28/jul/2019.

FREITAS, L. Rita. ORGANIZAÇÕES PRAXEOLÓGICAS SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA ABORADGEM DO LIVRO DIDÁTICO**.** *In*: Congresso Iberoamericano de Educación Matematica, 7., 2013. Montivideu. Disponível em: http://www.cibem7.semur.edu.uy?7?actas/pdfs/559.pdf.
Acesso em: 7 ago 2019.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática elementar 2**. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

IEZZI, G.; DEGENSZAJN, D.; ALMEIDA, N.; DOLCE, O.; PÉRIGO, R. **A Matemática Ciências e Aplicações.** v. 1, 9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2016.

LIMA, E.; SILVA, N.; COSTA, J. Análise da Abordagem Metodológica em Livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. *In*: ENCONTRO DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA DA UEPB e II ENCONTRO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA, 4., 2014. Campina Grande. **Anais eletrônicos** [...]. Campina Grande, 2014. Disponível em: http://www.editorarealize.com.br/revistas/eniduepb/trabalhos/Modalidade_1datahora_30_10_2014_21_29_07_idinscrito_676_1f108cf7063ae560f210f9db556339b8.pdf.
Acesso em: 6 ago. 2019.

LIMA, Elon Lages. **Exame de Textos**: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LÔBO, R.; ALMOULOUD, S. Organizações Praxeológicas sobre função exponencial: Uma abordagem do livro didático. *In.* CIBEM, 7., 2013, Montivideu. **Anais eletrônicos** [...]. Montivideu, 2013. Disponível em: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/559.pdf. Acesso em: 1 ago. 2019.

LOPES, Armanda. **ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS PARA O ENSINO MÉDIO**. 2013. 57 f. Dissertação (PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013

MARTIM, V.; SOUZA, A. Os livros didáticos de matemática: concepção do professor do ensino médio nas escolas públicas. **Revista de Educação, ciências e matemática**, v. 5, n.2, maio/agosto de 2015. Disponível em: http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/2801/1439. Acesso em: 05 ago. 2019.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva volume 1**. 3. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2015.

ROSA, C.; RIBAS, L.; BARAZZUTTI, M. Análise de livros didáticos. *In*: EIEMAT-Escola de Inverno de Educação Matemática, 3., Santa Maria. 2012. Disponível em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_2_Rosa_Carine_Pedroso.pdf.
Acesso em: 20 jul. 2019.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **Contato Matemática 1º ano**, 1 ed. São Paulo: Editora FTD, 2016

UTTA, Bergson Pereira. **Prática Educativa no ensino superior**: implicações metodológic no curso de pedagogia. 1.ed. Curitiba: Editora Appris, 2018.

APÊNDICE

Potências com expoente real

Neste tópico apresentar-se-á as definições de potências considerando separadamente os expoentes como números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Potência com expoente Natural

Segundo Iezzi (2004), definimos a potência cujo o expoente é um número natural da seguinte maneira:

Seja a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1, \quad para\ a \neq 0 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall\ n, n \geq 1 \end{cases}$$

Dessa definição decorre que:

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$$

$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a$$

Verificando-se que a^p é o produto de p fatores iguais a a.

Propriedades:

Seja $a > 0;\ b \geq 0;\ a \in \mathbb{R}\ \ e\ n;\ m \in \mathbb{Z}^+$+. Então valem as seguintes propriedades:

Produto de potências de mesma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Demonstração:

Sejam $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a\ (m\ vezes)$ e $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a\ (n\ vezes)$

Então,

$$a^m \cdot a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a(m + n)\ vezes$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Divisão de potências de mesma base: $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

Demonstração: Por indução sobre n

Se n = 0, tem-se :

$$a^{m-0} = a^m = \frac{a^m}{1} = \frac{a^m}{a^0}$$

Supondo que a igualdade seja verdadeira para $n = k$, isto é,

$$a^{m-k} = \frac{a^m}{a^k}$$

tem-se para $n = k + 1$:

$$a^{m-(k+1)} = a^{(m-k)-1} = a^{(m-k)-1)} \cdot \frac{a}{a} = \frac{a^{(m-k)-1} \cdot a}{a} = \frac{a^{m-k}}{a} \cdot \frac{a^k}{a^k} = \frac{a^m}{a^{k+1}}$$

Potenciação de potência: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Demonstração: Para $n = 0$, tem-se:

$$(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$$

Supondo que a afirmação seja verdadeira, para $k \epsilon \mathbb{Z}^+$:

$$(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$$

Tem-se para $n = k + 1$:

$$(a \cdot b)^{(k+1)} = (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b)^1 = a^k \cdot b^k \cdot a \cdot b = (a^k \cdot a) \cdot (b^k \cdot b) = a^{k+1} \cdot b^{k+1}$$

Potenciação de fração: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Demonstração: Para $n = 0$, tem-se:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{a^0}{b^0}$$

Supondo que a afirmação seja verdadeira, para $k \epsilon \mathbb{Z}^+$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$$

Tem-se para $n = k + 1$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a^k}{b^k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^k \cdot a}{b^k \cdot b} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}$$

Potenciação de um produto: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Demonstração: Chamando-se $a^m = b$ tem-se:

$$(a^m)^n = b^n = b \cdot b \cdot \ldots \cdot b \ (n\ fatores)$$

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m \ (n\ fatores)$$

$$(a^m)^n = a^{m+m+m+\cdots+m(n\ parcelas)}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Potência de expoente inteiro

Seja $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, define-se a potência a^{-n} pela relação:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ou seja, toda potência de base real, diferente de zero, elevado ao expoente negativo será definida pelo inverso da correspondente potência elevado ao inteiro positivo.

Potência de expoente racional

Segundo Iezzi (2004), sejam $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}\ e\ \frac{p}{q} \epsilon\ \mathbb{Q}, q \neq 0$, define-se potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

A partir da definição todas as propriedades continuam verdadeiras.

Potência com expoente Real

Dados $a \,\epsilon\, \mathbb{R}\,, a \neq 0$, e b $\epsilon\ \mathbb{Q}\ ou\ \overline{\mathbb{Q}}$. Dizemos que a potência a^n, esta defnida a potência a^b como potência com expoente real.

Todas as propriedades demonstradas anteriormente são válidas para os números reais.

Apropriando-se da definição de potenciação juntamente com suas propriedades, pode-se definir e trabalhar com diferentes funções exponenciais.

Função Exponencial

Define-se por função exponencial qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$, sendo $a \,\epsilon\, \mathbb{R}\,, a \neq 1$, definida por $f(x) = a^x$.

Suponha $a = 1$:

$$f(x) = 1^x = 1 \text{ (função constante)}$$

Consequência

Na função exponencial $f(x) = a^x$ temos:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$$

Assim pode-se afirmar que o par ordenado (0,1) pertence a qualquer função exponencial para todo $a \,\epsilon\, \mathbb{R}_{+}^{*} - \{1\}$, ou seja, o gráfico de qualquer função exponencial intercepta o eixo das ordenadas em 1.

Lema 1: Sendo $a \,\epsilon\, \mathbb{R}\,, a > 1\ e\ n \,\epsilon\, \mathbb{N}, n \neq 0$, tem-se:

$$a^n > 1 \Leftrightarrow n \geq 1$$

Demonstração: (⇒) Por contradição

Se $n = 0 \Rightarrow\ a^0 = 1\ (ABSURDO!!)$

Se $n < 0 \Rightarrow -n \geq 1$, então $a^{-n} > 1 \Rightarrow a^{-n} \cdot a^n = a^n \Rightarrow 1 >\ a^n (ABSURDO!!)$

$(\Leftarrow) \forall n \in \mathbb{N}, n > 0\ e\ a > 1$

Para $n\ =\ 1$ temos: $a^n =\ a^1\ =\ a\ >\ 1.$

Suponhamos pela hipótese de indução que $a^n > 1$ e mostra-se que:

$a^{k+1} = a^k \cdot a > 1$, pois $a > 1\ e\ a^n > 1$

Portanto $a^{n+1} > 1$

Lema 2: Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $r\ \in \mathbb{Q}$, tem-se:

$$a^r > 1 \Leftrightarrow r > 0$$

Demonstração análoga ao Lema 1

Lema 3: Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $r, s\ \in \mathbb{Q}$, tem-se:

$$a^s > a^r \Leftrightarrow s > r$$

Demonstração: Como $a^r > 0\ tem - se\ a^s > a^r \Leftrightarrow a^s \cdot a^{-r} > a^r \cdot a^{-r} \Leftrightarrow a^{s-r} > 1$

Pelo Lema 2 tem-se que:

$$s - r > 0 \Leftrightarrow s > r$$

Lema 4: Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $t\ \in \overline{\mathbb{Q}}$, tem-se :

$$a^t > 1 \Leftrightarrow t > 0$$

Demonstração: (⇒)

$$t > 0 \Rightarrow a^t > 1$$

Para definição no número t irracional e positivo, existem $r;\ s$ tal que $0\ <\ r\ <\ t\ <\ s.$

Pelo Lema 2, como $a\ >\ 1;\ r\ >\ 0\ e\ s\ >\ 0$, temos : $\boldsymbol{a^r > 1}$ **e** $\boldsymbol{a^s > 1}$**:**

Pelo Lema 3, como $a\ >\ 1$ e $r\ <\ s$, tem-se: $1\ <\ a^r\ <\ a^s$ e, tem-se:

$$1 < a^r < a^t < a^s$$

Assim:

$$a^t > 1$$

($\Leftarrow$) Provando por absurdo tem-se:

$$a^t > 1 \Rightarrow t > 0$$

Suponhamos, $t < 0$, isto é $-t > 0$.

Pela primeira parte deste lema tem-se:

$$a > 1, -t \,\epsilon\, \overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow a^{-t} > 1$$

e,

$$-t > 0 \Rightarrow a^{-t} > 1$$

Multiplicando ambos os lados pela desigualdade $a^t > 0$, tem-se:

$$a^{-t} \cdot a^t > a^t \Rightarrow 1 > a^t$$

Absurdo, pois contraria a hipótese, logo $t > 0$.

Teorema 1: Sendo $a \,\epsilon\, \mathbb{R}, a > 1 \; e \; b \,\epsilon\, \mathbb{R}$, tem-se:

$$a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0$$

Demonstração:

$$b \,\epsilon\, \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b \,\epsilon\, \mathbb{Q} \Leftrightarrow (pelo\ Lema\ 2)(a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0) \\ b \,\epsilon\, \overline{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow (pelo\ Lema\ 4)(a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0) \end{cases}$$

Teorema 2: Sendo $a \,\epsilon\, \mathbb{R}, 0 < a < 1 \; e \; b \,\epsilon\, \mathbb{R}$, tem-se:

$$a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0$$

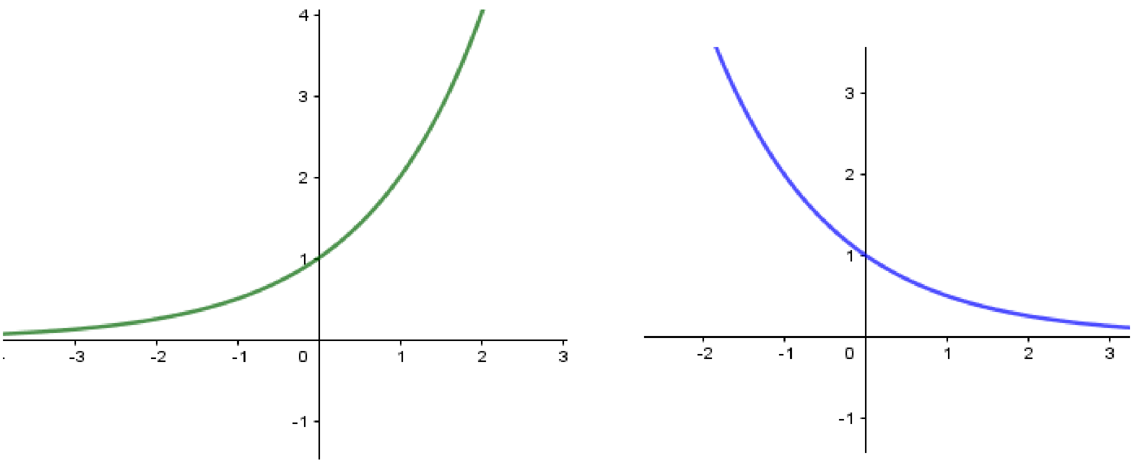
Demonstração:

Se $0 < a < 1$, então $\frac{1}{a} > 1$, tomando-se $b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^b > 1 \Leftrightarrow (a^{-1})^b \Leftrightarrow -b > 0 \Leftrightarrow b < 0$$

Gráfico da função exponencial:

Seja uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, sendo $a \in \mathbb{R}\,, a \neq 1$, definida por $f(x) = a^x$, é representada por uma curva, e esta encontra-se acima do eixo x, pois $a^x > 0$, para todo x pertencente ao conjunto dos números reais. Como $f(0) = 1$, então a curva corta o eixo y no ponto de ordenada 1; se $a > 1$ é uma função crescente. Se $0 < a < 1$ é uma função decrescente, conforme a figura abaixo:



(a) $a > 1$ (b) $0 < a < 1$

Podendo ocorrer variações de acordo com a variações de seus coeficientes, podendo-se t função $f(x) = a^{x+c} + b$

Logaritmo

Dados a e b números reais positivos, com a diferente de 1, chama-se de logaritmo de b na base a, o expoente que deve-se atribuir á base a de modo que a potência obtida seja igual a b, simbolizada por:

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, com\ a\ e\ b \in \mathbb{R}_+, a \neq 1\ e\ b > 0$$

Onde b é chamado logaritmando, a base e x, logaritmo.

As informações abaixo são decorrentes diretamente da definição de logaritmo:

1) $log_a 1 = 0, pois\ a^0 = 1$
2) $log_a a = 1, pois\ a^1 = a$
3) $a^{log_a b} = b$
4) $log_a b = log_a c \Leftrightarrow c = d$

A partir das informações decorrentes da definição, tem-se as propriedades do logaritmos:

Logaritmo do produto: Sejam $a\ \ b\ e\ c\ \in \mathbb{R}_+,\ a \neq 1\ e\ b, c\ > 0$, então $log_a(b \cdot c) = log_a b\ +\ log_a c$

Demonstração:

Seja $log_a b = x$, $log_a c = y$ e $log_a(b \cdot c) = z$ tem-se:

$$log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

$$log_a c = y \Rightarrow a^y = c$$

$$log_a(b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c = a^x \cdot a^y \Rightarrow z = x + y$$

$$log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c$$

Logaritmo do quociente: Sejam $a\ \ b\ e\ c\ \in \mathbb{R}_+,\ a \neq 1\ e\ b, c\ > 0$, então $log_a(b \div c) = log_a b -\ log_a c$

Demonstração:

Seja $log_a b = x$, $log_a c = y$ e $log_a(b \div c) = z$ tem-se:

$$log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

$$log_a c = y \Rightarrow a^y = c$$

$$log_a(b \div c) = z \Rightarrow a^z = b \div c = a^x \div a^y \Rightarrow z = x - y$$

$$log_a(b \div c) = log_a b - log_a c$$

Logaritmo da potência: Sejam $a \ \ b \ e \ c \in \mathbb{R}_+, \ a \neq 1 \ e \ b \ > 0$, então $log_a b^{\propto} = \propto \cdot \ log_a b$

Demonstração:

Seja $log_a b = x$, $log_a b^{\propto} = y$, tem-se:

$$log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

$$log_a b^{\propto} = y \Rightarrow a^y = b^{\propto}$$

$$a^y = (a^x)^{\propto} \Rightarrow a^y = a^{x \cdot \propto} \Rightarrow y = x \cdot \propto$$

$$log_a b^{\propto} = \propto \cdot \ log_a b$$

Mudança de base: Sejam $a \ \ b \ e \ c \in \mathbb{R}_+, \ a \neq 1 \ e \ c \neq 1$, então tem-se:

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

Demonstração:

Considere $log_a b = x$, $log_c b = y \ e \ log_c a = z$, com $z \neq 0, pois \ a \neq 1$.

$$log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

$$log_c b = y \Rightarrow c^y = b$$

$$log_c a = z \Rightarrow c^z = a$$

$$c^y = a^x \Rightarrow c^y = (c^z)^x$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow x = \frac{y}{x} \Rightarrow \ log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

Função logarítmica:

Define-se por função logarítmica qualquer função $f: \mathbb{R}^+ \to \ \mathbb{R}$, sendo $a \, \epsilon \, \mathbb{R} \, , 0 < \ a \neq 1$, definida por:

$$f(x) = log_a x.$$

A partir da definição de função logarítmica tem-se as seguintes consequências:

i) Se $0 < \ a \neq 1$, então as funções $f(x) = log_a x$ e $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.

Demonstração:

Para a demonstração da propriedade basta verificar que $f\big(g(x)\big) = Id_{\mathbb{R}_+}$e $g\big(f(x)\big) = Id_{\mathbb{R}}$

De fato:

$$f\big(g(x)\big) = log_a a^x = x \; e \; g\big(f(x)\big) = a^{f(x)} = a^{log_a x} = x$$

ii) A função logarítmica $f(x) = log_a x$ é crescente se $a > 1$ e é decrescente se $0 < a < 1$.

Demonstração:

Para $a > 1$:

Sejam $x_1 e \; x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, com $x_1 > x_2 \Rightarrow log_a x_1 > log_a x_2$

De fato:

Sabe-se que $a^{log_a x_2} > a^{log_a x_1} \Rightarrow log_a x_2 > log_a x_1$

Considerando:

$$log_a x_2 = y_2 \Rightarrow y_2 = a^{x_2}$$

$$log_a x_1 = y_1 \Rightarrow y_1 = a^{x_1}$$

Tem-se:

$$y_2 > y_1 \Rightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$$

Pelo fato da função exponencial ser crescente para base maior que um concluímos que $a > 1$.

De forma análoga tem-se que a função logarítmica é decrescente se, e somente se, $0 < a < 1$.

Uma função real, $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica quando tem as seguintes afirmações:

iii) L é uma função crescente, isto é, $x < y$) $L(x) < L(y)$;

iv) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x;\; y \in \mathbb{R}^+$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$., o número $L(x)$ chama-se logaritmo de x. (Se estivermos contemplando outras funções logrítmicas além de L, diremos que $L(x)$ é o logaritmo de x segundo L, ou no sistema de logaritmos L).

Segue uma lista de propriedades das funções logarítmicas, isto é, propriedades que são consequências de iii) e iv) enunciadas.

Função injetora: Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetora, isto é, números positivos diferentes tem logaritmos diferentes.

Demonstração. Com efeito, se $x, y \in \mathbb{R}^{+}$ são diferentes, então ou $x < y$ ou $y < x$. No primeiro caso, resulta de iii) que $L(x) < L(y)$. No segundo caso tem-se $L(y) < L(x)$.

Em qualquer hipótese, de $x \neq y$ conclui-se que $L(x) \neq L(y)$.

Teorema: Dadas as funções logarítmicas $L : \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$

Demonstração:

Seja $a > 1$ tal que $L(a) = a \cdot M(a)$. Tem-se que $L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r)$. Suponhamos, por absurdo, que existe um $b > 0$ tal que $L(b) < M(b)$.

Consideremos que $L(b) < M(b)$.

Seja $k \in \mathbb{R}^{+}$ tal que:

$$k \cdot (M(b) - L(b)) > L(a)$$

Então:

$$L\left(a^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{L(a)}{k} < M(b) - L(b)$$

Seja $m \cdot L\left(a^{\frac{1}{k}}\right)$, pertencente ao interior do intervalo $]L(b); M(b)[$, ou seja $L(b) < m \cdot L\left(a^{\frac{1}{k}}\right) < M(b)$. Assim tem-se que:

$$m \cdot L\left(a^{\frac{1}{k}}\right) = L\left(a^{\frac{m}{k}}\right) = M\left(a^{\frac{m}{k}}\right),$$

Então:

$$L(b) < L\left(a^{\frac{m}{k}}\right) = M\left(a^{\frac{m}{k}}\right) < M(b)$$

Como L é crescente, tem-se que $b < a^{\frac{m}{k}}$. Como M também é crescente. tem-se que $a^{\frac{m}{k}} < b$.

Pelas duas desigualdades tem-se um absurdo, sendo assim tem-se que:

$M(x) = L(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^{+}$.

Teorema: Toda função logarítmica L é sobrejetora, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um (único) número real positivo x tal que $L(x) = c$.

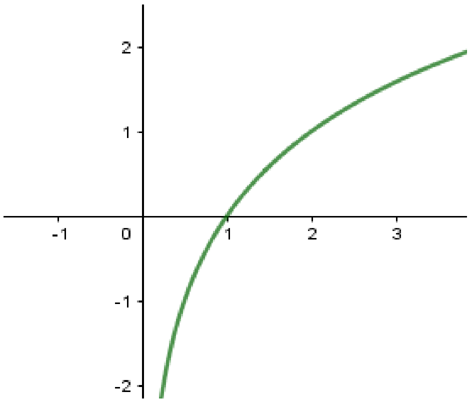
Teorema: Toda função logarítmica L é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre $\mathbb{R}^{+} e\ \mathbb{R}$, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um único número real positivo x tal que $L(x) = c$.

Demonstração:

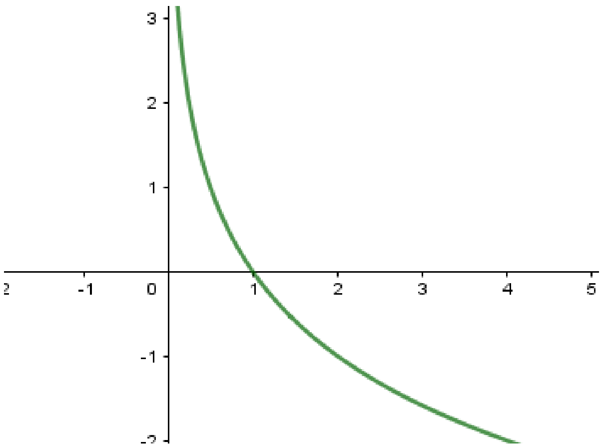
Como visto anteriormente que uma função logarítmica é sobrejetora e injetora, então tem-se que ela é bijetora.

Gráfico da Função Logarítmica

Seja uma função $f: \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$, sendo $a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$, definida por $f(x) = log_a x$, é representada por uma curva, e esta encontra-se a direita do eixo y, para todo x pertencente ao conjunto dos números reais não negativos. Como $f(1) = 0$, então a curva corta o eixo x no ponto de abscissa 1; se $a > 1$ é uma função crescente. Se $0 < a < 1$ é uma função decrescente, conforme a figura abaixo:



a>1



0 < a < 1

Podendo ocorrer variações de acordo com a variações de seus coeficientes, podendo-se ter a função $f(x) = log_a(bx + c)$