

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Daniel de Mesquita da Silva

**ASTRONOMIA COMO CONTEXTO E AUXÍLIO DO
ENSINO DA MATEMÁTICA**

Rio de Janeiro
2019



Daniel de Mesquita da Silva

**ASTRONOMIA COMO CONTEXTO E AUXÍLIO DO ENSINO DA
MATEMÁTICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dra. Luciana Santos da Silva Martino

Rio de Janeiro
2019

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

S586 Silva, Daniel de Mesquita da

Astronomia como contexto e auxílio do ensino da matemática /
Daniel de Mesquita da Silva. – Rio de Janeiro, 2019.
121 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa,
Extensão e Cultura.

Orientador: Luciana Santos da Silva Martino.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Razão e proporção.
Probabilidade. 3. Geometria analítica. 4. Trigonometria. I. Martino,
Luciana Santos da Silva. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

Daniel de Mesquita da Silva

ASTRONOMIA COMO CONTEXTO E AUXÍLIO DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____/____/____.

Banca Examinadora:

Dra. Luciana Santos da Silva Martino (Orientador)
Colégio Pedro II

Dra. Marilis Bahr Karam Venceslau
Colégio Pedro II

Dr. Antônio Carlos Fontes dos Santos
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro
2019

Dedicado à minha mãe, Silvia Regina, que por somar seu amor, sua formação em História e sua fé, resultou na sensação de gratidão que manifesto aqui pela maravilhosa apresentação do mundo que me foi transmitida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mulher, Eduarda Ribeiro, pela paciência, carinho, companheirismo, cuidado, por ser minha companhia favorita para pensar e imaginar sobre o universo, e, principalmente, pelo apoio espiritual me ofertado, tornando o percurso muito mais fácil.

À minha professora e orientadora, Luciana Martino, por dicas tão valiosas sobre o método científico e sobre fontes para esta pesquisa, pelos conteúdos matemáticos ministrados e pela paciência e dedicação oferecidos ao orientar.

A toda a equipe de professores do PROFMAT, no polo Colégio Pedro II, além dos professores do IMPA, pelas excelentes videoaulas do PROFMAT e PAPMEM.

Ao meu pai, Francisco, por me ensinar que todos os dias são uma nova história. E que o jeito certo de acordar é contemplando o belo dia novo que surge.

Aos irmãos dos quais sou caçula: Eduardo, por me ensinar que ser feliz é simples e que o riso faz toda a diferença; Clécio, por me dar tantas grandes perspectivas sobre a vida; e Helena, por ter dividido amorosamente a estrada comigo, por tantas das primeiras descobertas e por me mostrar um pouco do mundo da perspectiva feminina.

À CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - pelo suporte materializado como bolsa de estudos, tornando esta realização possível.

Às bibliotecas do Colégio Pedro II, da Universidade Estácio de Sá, à Biblioteca Parque Estadual, no centro do Rio de Janeiro, à direção e colaboradores do Colégio Estadual Maria Zulmira Torres, lugares que ocupei por tantas horas e fui sempre tão bem recebido.

Que a escola seja vista pelo estudante como uma grande dica das ciências sobre as quais nunca deverá deixar de pesquisar e descobrir mais, independente da sua área de atuação profissional.

RESUMO

SILVA, Daniel de Mesquita da. **Astronomia como contexto e auxílio do ensino da Matemática**. 2019.

121 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

Neste trabalho são apresentados conceitos básicos de Astronomia que podem ser abordados na educação matemática, com fim inicial de motivar o aluno com perspectivas concretas de conceitos matemáticos abstratos. Na contra partida, é objetivo consequente que o aluno não se distancie da origem de grande parte dos questionamentos que levaram o homem a descobrir a Matemática como linguagem da natureza - a astronomia. Especialmente do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, ciclo no qual, a cada ano, o aluno ganha novas ferramentas matemáticas que possibilitam novos entendimentos e abordagens sobre a Astronomia. Em geral, no sistema educacional brasileiro, a aquisição destas novas ferramentas matemáticas pelo estudante não implica o ganho destes novos entendimentos astronômicos.

Palavras-chave: Razões e Proporcionalidade; Probabilidade; Geometria Analítica; Trigonometria; História da Matemática.

ABSTRACT

SILVA, Daniel de Mesquita da. **Astronomia como contexto e auxílio do ensino da Matemática**. 2019. 121 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

In this study we present basic astronomy concepts that can be approached in mathematical education, with the initial aim of motivating the student with concrete perspectives of abstract mathematical concepts. On the contrary, it is a goal that the student should not distance himself from the origin of much of the questions that lead man to discover mathematics as the language of nature - astronomy. Especially from the 6th grade of elementary school to the last grade of High School, a cycle in which, every year, the student gains new mathematical tools that enable new understandings and approaches about astronomy. In general, in the Brazilian educational system, the acquisition of these new mathematical tools by the student does not imply the gain of these new astronomical understandings.

Keywords: Reasons and Proportionality; Probability; Analytical Geometry; Trigonometry; History of Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1 Modelo simplificado do cosmos de Aristóteles	23
2 Composição de 29 fotografias tiradas em diferentes dias, mostrando o movimento retrógrado de Marte	23
3 Modelo geocêntrico de Ptolomeu com a Terra próxima ao centro do universo sendo orbitada por um planeta que descreve um epiciclo	24
4 Modelo heliocêntrico do cosmos de Copérnico	29
5 Representação do Cosmos com o Sol no centro do Sistema Solar e a Terra como mais um planeta. Esquema que, a partir de Copérnico, explica o ziguezague de Marte . . .	30
6 A precessão: além do planeta, sua órbita também gira em torno do Sol (excentricidades exageradas das elipses para deixar o efeito mais claro)	36
7 Sol na Via Láctea e uma região (com 300 anos-luz de raio, a partir do Sol) da mesma onde detectamos a maioria dos planetas que conhecemos	37
8 Uma representação da expansão do universo: pintar bolinhas numa bexiga e inflá-la. O universo seria a superfície bidimensional da bexiga e as galáxias as manchas afastando-se umas das outras	38
9 Tupolev Tu-144	42
10 SR-71 Blackbird	42
11 O decolar da nave espacial referente à missão Apollo 11	43
12 Representação artística da sonda Juno em Júpiter	44
13 As fases da Lua se ela estivesse mais longe da Terra do que o Sol	49
14 A Terra, o Sol e a Lua orbitando nosso planeta em dois momentos: quarto crescente e quarto minguante	50
15 Terra em T, Sol em S e Lua em L. Percurso da Lua até o ponto do eclipse	54
16 Eclipse total do Sol – Triângulos TLL’ e TSS’ semelhantes	54
17 Cone de sombra formado pelo bloqueio da luz solar pela Terra	55
18 Terra entre a Lua e o Sol – Triângulos DFC e CEA semelhantes	56
19 Circunferência da Terra - centro da Terra em C, Alexandria em A e Siene em S	59
20 No mesmo tempo t , a Lua vai de L para L’ e o observador vai de A para A’	60

21	Elipse – pontos P, Q, R e S, pertencentes à mesma, têm soma de distâncias aos focos constante igual a $2a$	62
22	Elipse de centro O; focos F_1 e F_2 ; eixo maior $A_1A_2 = 2a$; eixo menor $B_1B_2 = 2b$; e distância focal $F_1F_2 = 2c$	64
23	Excentricidades dos 8 planetas e Plutão. Elipses das órbitas em proporção e com o mesmo eixo maior. Em cada caso, o ponto central é o centro da elipse e o ponto da direita é a posição de um dos focos, o qual é ocupado pelo Sol	64
24	A órbita de Plutão ilustrando a segunda lei de Kepler	65
25	Marte, um planeta externo, em posições de <i>conjunção superior</i> , <i>oposição</i> e <i>quadratura</i> . Quando se tem, respectivamente, 0, 180 e 90 graus de <i>elongação</i> – ângulo de separação entre as direções do Sol e do planeta	67
26	Conjunções Inferior e Superior de Vênus, um planeta interno	67
27	Parte do Sol ejetando massa coronal e a Terra	69
28	Aplicativo GeoGebra - Círculos com raios na razão de 1 para 110, representando Terra e Sol, respectivamente.	70
29	Distância entre os pontos A e B como hipotenusa de dois triângulos retângulos possíveis: ABC' ou ABC''	72
30	Aplicativo Geogebra – Terra e Sol fora de proporção de distância, representados por circunferências de raios na razão de 1 para 110, respectivamente, sem eixos, malha e exibição de objetos	73
31	Representação - Parte de UY Scuti e o Sol, representado por um píxel	74
32	Esfera terrestre (maior) e esfera humana, representadas por círculos com raios na razão 1/13.400, obtidos no aplicativo Geogebra, com diferentes escalas de visualização. Segunda imagem, sem visualização de eixos coordenados	77
33	Burj Khalifa, o prédio mais alto do mundo, em Dubai	78
34	Estimativa de Michael Stevens do canal VSauce no YouTube do que seriam 7,2 bilhões de pessoas empilhadas no Grand Canyon.	79
35	Representação esquemática do método científico de Galileu	90
36	“Descoberta da lei da gravidade por Isaac Newton”: caricatura feita por John Leech e publicada no século XIX	91
37	Trecho do Colégio Pedro II, campus São Cristóvão II, no Rio de Janeiro até o Instituto Federal de Brasília, no Distrito Federal, estimado no aplicativo Google Maps	94
38	Ilustração – indivíduo observa o topo de uma construção através do astrolábio	96

39	Círculo graduado com numeração conveniente à montagem do Astrolábio	97
40	Astrolábio escolar – montagem em três momentos	98
41	Indivíduo calcula a altura de um poste de luz utilizando o Astrolábio. O ângulo α é medido a partir de uma distância d pré-definida	99
42	Aula inaugural interdisciplinar – Matemática/História/Ciências – com tema “Gravidade e Astronomia”, ministrada na biblioteca do colégio, projeto CAIS, ano letivo 2018	107
43	Captura do vídeo “E se os Planetas Passassem entre a Terra e a Lua”, momento em que, hipoteticamente, se veria Júpiter passar no exato ponto médio entre a Terra e nossa Lua. À esquerda de Júpiter, a Lua realçada	108
44	Instalação “Sistema Solar: astros com tamanhos e distâncias proporcionais às suas medidas reais”, montagem em andamento com alunos do Projeto CAIS	110

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 ASTRONOMIA: CONTEXTO HISTÓRICO E A MATEMÁTICA EM SEU DESENVOLVIMENTO	21
2.1 Astronomia no Mundo Antigo	21
2.2 Idade Média – Falta de desenvolvimento ou falta de visibilidade?	25
2.3 Astronomia no Mundo Moderno	28
2.3.1 Copérnico e o modelo heliocêntrico	28
2.3.2 Kepler e as órbitas elípticas	30
2.3.3 Galileu Galilei aponta o telescópio para o céu	32
2.3.4 Isaac Newton e a grande síntese	35
2.3.5 Albert Einstein e o último enigma.....	36
2.3.6 A Teoria do Big Bang.....	38
3 A MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DA REDESCOBERTA ASTRONÔMICA	40
3.1 Números, Operações, Grandezas e Medidas	40
3.1.1 A Velocidade da Luz	40
3.1.2 O homem e a Terra – uma perspectiva de tempo	44
3.1.3 A conquista da estrela mais próxima.....	46
3.2 Geometria Plana, Espacial e Analítica	48
3.2.1 Aristarco, a Terra, a Lua e o Sol.....	48
3.2.1.1 <i>Sol ou Lua: qual o mais distante? As estimativas de Aristarco</i>	49
3.2.1.3 <i>Terra e Sol numa perspectiva de tamanho</i>	53
3.2.1.4 <i>Estimativas com o raio da Terra como parâmetro</i>	55
3.2.2 Calculando o raio da Terra – A ideia de Eratóstenes	58
3.2.3 Distância Terra-Lua – O engenhoso método de Ptolomeu.....	60
3.2.4 As leis de Kepler	61

3.2.4.1 A Primeira Lei de Kepler.....	62
3.2.4.2 A Segunda Lei de Kepler	65
3.2.4.3 A Terceira Lei de Kepler	66
3.2.5 Galileu e as Observações de Marte, Vênus e Mercúrio.....	66
3.2.6 O Sol: um gigante relativamente pequeno.....	68
3.2.7 O homem e a Terra – uma perspectiva de espaço	74
3.3 Análise de Dados.....	79
3.3.1 Possibilidade de vida fora da Terra – a Equação de Drake	79
3.3.2 Existe outra versão sua no Universo?.....	84
3.4 História da Matemática.....	88
3.4.1 Construção do método científico: contribuições de Alhazen e Galileu.....	88
3.4.2 Isaac Newton: crítica à maçã.....	91
4 ATIVIDADES PROPOSTAS E REALIZADAS	93
4.1 Sugestões para recortes	93
4.1.1 Calculando o raio da Terra – A ideia de Eratóstenes	93
4.1.2 Possibilidade de vida fora da Terra – a Equação de Drake	94
4.2 Atividades Propostas	95
4.2.1 Oficina Astrolábio	95
4.2.2 Treinamento OBA	100
4.2.3 Atividades Auxiliares	105
4.3 Atividades Realizadas	106
5 CONCLUSÃO.....	117
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	118

1 INTRODUÇÃO

A escolha da Astronomia foi motivada por uma situação recorrente presenciada durante oito anos de aulas ministradas em turmas de cursos preparatórios para vestibulares no Rio de Janeiro, com alunos concluintes, ou que já haviam terminado o Ensino Médio, mas ainda estavam tentando o vestibular. Como as turmas eram heterogêneas, englobando, por exemplo, alunos de diferentes faixas etárias e classes sociais, havia a necessidade de fazer uma revisão geral dos conceitos básicos da Matemática nas primeiras aulas. Buscando fugir do mecanicismo puro e manter algum paralelo entre métodos matemáticos e descobertas científicas, alguns tópicos foram relacionados com descobertas astronômicas durante a revisão.

No artigo “Geometria e Astronomia”, o autor Ávila (2010) destaca a Astronomia como a mais antiga das ciências, capaz de produzir exemplos motivacionais interessantes, que evitam perguntas recorrentes para o professor de Matemática como o famoso *para que serve o que estou estudando?* Numa linha consonante com o autor, nessas aulas de revisão, buscou-se despertar nos alunos alguma curiosidade científica, contextualizando a Matemática com aplicações na natureza, resgatando o conhecimento prévio dos alunos a respeito de noções iniciais da Astronomia, como a Gravidade, por exemplo.

A surpresa foi a constatação de que aqueles grupos heterogêneos, eram homogêneos no desconhecimento de descobertas tão antigas da humanidade no que tange a Astronomia. Este sintoma já havia sido observado e problematizado no livro “Uma História da Astronomia” (VERDET, 1991, p. 1). Raro era algum aluno que não se surpreendesse com as respostas para perguntas que lhes foram feitas como: “O Sol é uma estrela – O que você entende por esta afirmação?”, ou “Qual a diferença entre o Sol e as estrelas que você vê à noite?”

As respostas para essas perguntas separam duas percepções muito diferentes do universo em que estamos. Numa visão menos ampla, da ideia de o Sol ser uma estrela, o estudante extrai somente o fato de ele emitir luz – resposta que foi mais comum. Nesta perspectiva, provavelmente está somente diferenciando-o dos outros astros do sistema solar, que não o fazem. Por outro lado, quando o estudante chega à conclusão de que o Sol é uma estrela dentre várias, e que a diferença entre ele e as estrelas que vemos à noite é a distância (o mais comum foi a referência ao tamanho – dizer que o Sol é maior), isto é, que o Sol está mais próximo, ele consegue entender que o tamanho pequeno da maioria das estrelas significa distância e não necessariamente tamanho. Com o agravante de o Sol ser categorizado como uma estrela do tipo anã amarela, isto é, ironicamente, a despeito do que nossos olhos nus alcançam, uma estrela

que tem como uma de suas principais características, seu tamanho pequeno. De fato, o Sol é menor do que muitas das estrelas que vemos no céu noturno.

No artigo “Os planetas do Sistema Solar em Livros Didáticos de Ciências da Quinta Série do Ensino Fundamental”, o autor Micaías Andrade Rodrigues analisa 23 livros didáticos de Ciências para este segmento (um dos poucos momentos em nosso currículo onde o estudante visita a Astronomia, a quinta série - atual sexto ano do Ensino Fundamental) e destaca uma necessidade de melhora no sentido de buscar abordagens mais críticas, a fim de que o aluno compreenda contextos como os dos planetas e das estrelas de forma mais crítica (RODRIGUES, 2007, p. 7).

A partir da conclusão sobre o Sol e as demais estrelas, o estudante está apto a fazer uma reflexão direta além do sistema solar. Ao contemplar as estrelas que vê à noite, ele pode pensá-las como “sois distantes”, isto é, pensar que cada uma é possivelmente maior do que o Sol, que é o centro de seu próprio sistema e que possivelmente tem pelo menos um planeta girando em torno de sua órbita, algo que Giordano Bruno propôs em 1584 (YATES, 1964, p. 190), mas que já havia sido proposto anteriormente por cosmólogos islâmicos (ZIN, 2015, p. 2-9) e também, de forma mais rudimentar, conjecturado por Demócrito e Epicuro na Grécia antiga, por volta do ano 300 a.E.C. (DODSWORTH, 2009, p. 10).

Esta construção de ideias em torno da Astronomia foi feita em sala diversas vezes e o resultado observado foi sempre bastante expressivo, suscitando imediatamente perguntas sobre possibilidade de vida extraterrestre, que tipo de técnicas usamos para observar e concluir tais ideias e até sobre a existência ou não de Deus. Além de pedidos recorrentes para que o tema voltasse a ser abordado.

Para os autores do livro “Astronomia: Ensino Fundamental e Médio” (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 19-20)

Ao se colocar na base da ciência, a astronomia fez sentir sua influência em praticamente todos os ramos do conhecimento científico. Mas, com a crescente repartição do saber em gavetas estanques (como, por exemplo, as disciplinas lecionadas separadamente em todas as escolas), as noções astronômicas também foram diluídas, e sua importância aparente no ensino decresceu de forma extremada. Não é difícil perceber os efeitos desse processo. Basta notar que as noções básicas sobre o Sistema Solar são dadas nas aulas de geografia, as leis de movimentos dos planetas estão no curso de física, o andamento da corrida espacial no século 20 está na disciplina de história, e as descobertas mais sofisticadas sobre a origem do universo, pasme, não estão em lugar algum.

Além da citação anterior, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2002) apresentam direcionamento equivalente:

Que ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

Foi natural concluir daí que seria válido desenvolver um trabalho interdisciplinar que tivesse como objetivo central um ganho duplo: um aumento considerável no apelo motivacional do ensino de Matemática; e, ao mesmo tempo, contribuir para diminuir o desconhecimento de uma ciência que é a origem básica de uma das maiores curiosidades científicas humanas – a Astronomia. Além ainda de uma possível última consequência, um aumento no interesse por carreiras científicas entre os estudantes (ÁVILA, 2010, p. 167).

No capítulo 2, é feita inicialmente uma breve contextualização histórica da Astronomia, dando destaque para a Matemática usada em seu desenvolvimento, desde um tempo em que essas ciências caminhavam juntas no ambiente de ensino e pesquisa. Alguns mitos alimentados em enquadramentos históricos tradicionais recebidos por estas ciências são apontados na contextualização.

A reconstrução da evolução histórica da Astronomia junto do estudante contribui para que este compreenda a necessidade humana de um *método científico* e mostra as contribuições desta ciência e da Matemática para o desenvolvimento da ideia. Justamente por suscitar perguntas cujas respostas exigiriam do homem conhecimentos que não tinha sobre os confins do universo desconhecido, a Astronomia o levou, em diferentes momentos da história, a fazer afirmações sem base científica sobre o universo em sua suposta totalidade. Fosse por demanda religiosa ou científica, o homem criou para si a necessidade de dar respostas que ainda não tinha (muitas que ainda não tem). Com isso, muitos cientistas tiveram medo de divulgar suas novas descobertas. Alguns foram mortos por fazê-lo. Estes eventos contribuíram para que o homem aprendesse a necessidade de se ter uma postura cética diante da ciência. Nesta perspectiva, a Astronomia acaba por funcionar como uma fonte de humildade para o indivíduo à medida que este precisa lidar insistentemente com o fato de não saber.

No caso da Matemática, trata-se da linguagem com a qual o universo foi escrito, como declarou Galileu Galilei, sendo também a linguagem utilizada por ciências naturais como a

Física e a Astronomia. Em seu ideal, Galileu vai além e destaca a Matemática como a linguagem do método científico.

O enquadramento histórico do capítulo 2 culmina em um recorte no fim do capítulo 3, onde estão destacadas as contribuições de dois Matemáticos e Astrônomos, um do mundo árabe (Alhazen) e outro da Europa (Galileu), que contribuíram, cada um a seu tempo, com ideias que serviram de base para o método científico moderno, com o qual trabalhamos atualmente.

O capítulo 3 traz a proposta central pensada para este trabalho. São apontados alguns conceitos matemáticos presentes na atual grade curricular brasileira, de modo que professores interessados possam alternativamente contextualizá-los com a abordagem astronômica. O público-alvo são estudantes, a partir do terceiro ciclo do Ensino Fundamental até o fim do Ensino Médio.

Entre os recortes apresentados no terceiro capítulo, estão presentes alguns pontos canônicos, como as Leis de Kepler para gravitação. No recorte “*A Velocidade da Luz*”, por exemplo, é feito um encaminhamento para que o entendimento do estudante vá além do número que a representa. O estudante é conduzido a refletir sobre o que seria possível fazer com tal velocidade. Entre recortes menos comuns está, por exemplo, o “*Existe outra versão sua no universo?*”, no qual é exposto o fundamento matemático por trás de uma ideia amplamente difundida na cultura popular. Para cada tópico matemático, são sugeridos conceitos astronômicos que possam ser melhor compreendidos utilizando-o ou o cenário astronômico que este tópico modela.

Os conceitos matemáticos estão abordados segundo a forma que os Parâmetros Curriculares Nacionais os dispõem, seguidos dos recortes onde são trabalhados:

1. Números e Operações (Ensino Fundamental)

3.1.4. O Sol: um gigante relativamente pequeno

2. Espaço e Forma (Ensino Fundamental)

3.2.1.1. Sol ou Lua: qual o mais distante? As estimativas de Aristarco

3.2.1.2. Quão mais distante o Sol está de nós, com relação à Lua?

3.2.1.3. Terra e Sol numa perspectiva de tamanho

3.2.1.4. Estimativas com o raio da Terra como parâmetro

3.2.2. Calculando o raio da Terra – A ideia de Eratóstenes

3.2.3. Distância Terra-Lua – O engenhoso método de Ptolomeu

3.2.4.1. Primeira Lei de Kepler: a excentricidade da elipse na Matemática e nas órbitas do Sistema Solar

3.2.4.2. Segunda Lei de Kepler

3.2.4.3. Terceira Lei de Kepler

3.2.5. Galileu e as Observações de Marte, Vênus e Mercúrio

3.2.6. O homem e a Terra – uma perspectiva de espaço

3. Grandezas e Medidas (Ensino Fundamental)

3.1.1. A Velocidade da Luz (há uso do resultado *Comprimento de uma Circunferência*)

3.1.2. O homem e a Terra – uma perspectiva de tempo

3.1.3. A conquista da estrela mais próxima

4. Análise de Dados (Ensino Médio)

3.4.1. Possibilidade de vida fora da Terra – a Equação de Drake

3.4.2. Universos Paralelos – Existe outra versão sua no universo?

5. História da Matemática (Ensino Fundamental)

3.4.1. Construção do método científico: contribuições de Alhazen e Galileu

3.4.2. Isaac Newton: crítica à maçã

De modo geral, os pontos com maior potencial didático do enquadramento histórico desenvolvido no capítulo 2 estão aprofundados como recortes no capítulo 3. Para trabalhar *História da Matemática* com os estudantes, por exemplo, sugere-se a desconstrução de mitos alimentados em enquadramentos históricos tradicionais, abordada no capítulo 2, a fim de dar ao estudante a perspectiva de que nem o conhecimento científico está livre de futuros questionamentos.

O capítulo 4 traz inicialmente sugestões para um melhor desenvolvimento de recortes presentes no capítulo 3, destacando necessidades logísticas para a execução de atividades em torno dos mesmos. Entre as atividades extras propostas, está a montagem de um astrolábio escolar e a medição de uma construção acessível por parte dos estudantes, valendo-se da Trigonometria.

A seção *Treinamento OBA* traz uma proposta de incentivo à participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica – OBA, mediante treinamento oferecido

pelo professor. Estão expostos como exemplo três problemas de edições anteriores. Dois deles a serem resolvidos com o auxílio de recortes presentes no capítulo 3 e um problema que faz uso somente de ferramentas matemáticas.

Posteriormente, o quarto capítulo traz a seção *Atividades Auxiliares*, onde estão sugestões de fenômenos observáveis a olho, além da indicação de leituras, filmes, séries de televisão e aplicativos, a serem transmitidos pelo professor aos estudantes.

Finalizando o capítulo 4, a seção *Atividades Realizadas* traz algumas atividades realizadas no ano de 2018, numa escola de educação básica na cidade do Rio de Janeiro, em uma turma do Projeto CAIS (Classe de Adequação Idade-Série) para o segundo segmento do Ensino Fundamental. O projeto, em andamento nesta unidade escolar pela primeira vez, dentro da necessidade de abordar mais assuntos em menos tempo, deve conter atividades e propostas de atuação que invistam e estimulem a autonomia do aluno. Uma vez iniciado o projeto, os alunos foram consultados sobre suas dificuldades para lidar com o método tradicional a que estiveram submetidos nos anos anteriores. Seus históricos escolares foram analisados e a evasão escolar foi detectada como um dos grandes desafios.

Sobre a atuação da escola frente a cenários excepcionais de ensino, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (PCNEF) ressaltam:

Cabe à escola possibilitar a educação continuada, oriunda de um planejamento sistemático, para os educandos do **Ensino Fundamental II** (6º ao 9º). Além disso, não se pode visualizar a educação como algo simplista, mas sim como algo que envolva os alunos no meio social, político e histórico do país. Tudo isso, sempre buscando a cidadania, o entendimento dos direitos e deveres de cada um. Entretanto, a evasão escolar ainda é bastante significativa. Isso pode ser originado pelo fato de a escola não reconhecer a diversidade da população a ser atendida, com a consequente diferenciação na demanda. Reconhecer a diversidade e buscar formas de acolhimento requer, por parte dos educadores e da comunidade escolar, disponibilidade, informações, discussões, reflexões. (BRASIL, 1998)

O PCNEF, sobre o quadro atual do ensino de Matemática no Brasil, diz ainda:

O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos.

Em acordo com o PCNEF, alguns recortes compatíveis com o segundo segmento do Ensino Fundamental foram utilizados no Projeto CAIS, junto de atividades práticas e interdisciplinares, aliando a Matemática à Astronomia. A evasão escolar, citada nos parâmetros curriculares, foi um desafio para a execução do trabalho planejado inicialmente para o projeto, como está descrito no capítulo 4.

O capítulo 5 traz a conclusão do trabalho aqui desenvolvido.

2 ASTRONOMIA: CONTEXTO HISTÓRICO E A MATEMÁTICA EM SEU DESENVOLVIMENTO

Entre o momento em que o homem faz suas primeiras conjecturas sobre os padrões que vê no céu noturno e as descobertas modernas como a relatividade geral e a teoria do *Big Bang*, muitos séculos se passaram. Nesse curso, a Matemática e a Astronomia se separaram, mas nunca completamente, mantendo sempre uma relação de incentivo mútuo: em dado momento, a curiosidade astronômica estimula o desenvolvimento da Matemática; noutro, a Matemática desenvolvida possibilita novos entendimentos astronômicos.

2.1 Astronomia no Mundo Antigo

O estudo da Astronomia pela humanidade teve um início utilitário. A percepção de padrões nos movimentos dos corpos celestes permitiu que os humanos fossem além de contemplá-los. Perceberam coincidências periódicas entre seus movimentos e fenômenos naturais terrestres cujo controle e previsão eram necessários à sua subsistência. A contagem do tempo a partir de ciclos solares foi a utilidade mais elementar. A antecipação de eventos como o início das estações do ano, as cheias dos rios e as épocas de plantio e colheita passou a ser possível. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 19). No campo religioso, certas cerimônias e rituais também passaram a ser regidos por eventos astronômicos, como é o caso da Páscoa cristã, cuja definição é o primeiro domingo após a primeira Lua cheia que ocorre em ou logo após o dia 21 de março, data fixada para o equinócio de primavera no hemisfério norte.

Os gregos utilizaram o conhecimento matemático herdado dos babilônios, em especial sua aritmética envolvendo tempo e distâncias angulares, para transformar sua abordagem especulativa da Astronomia em modelos geométricos. A Astronomia era estudada como um dos ramos da Matemática. Assim, na Grécia surgiram os primeiros conceitos de *Esfera Celeste*, crença de que as estrelas seriam pontos brilhantes presos numa esfera gigante que englobava a Terra. Como não sabiam da rotação da Terra, imaginaram que a esfera celeste girava em torno de um eixo que passava pelo nosso planeta. Apesar de estar errado, era um modelo que já conseguia antever diversos eventos astronômicos. Entre as descobertas está a previsão de um eclipse por Tales de Mileto (por volta de 580 a.E.C.), além da construção de mapas celestes e geográficos. Aristóteles (384 – 322 a.E.C.), percebendo que a sombra da Terra na Lua durante eclipses era sempre circular, concluiu que a Terra deveria ser aproximadamente esférica, além de determinar distâncias relativas dos corpos celestes. Eratóstenes (276 – 194 a.E.C.) mediu

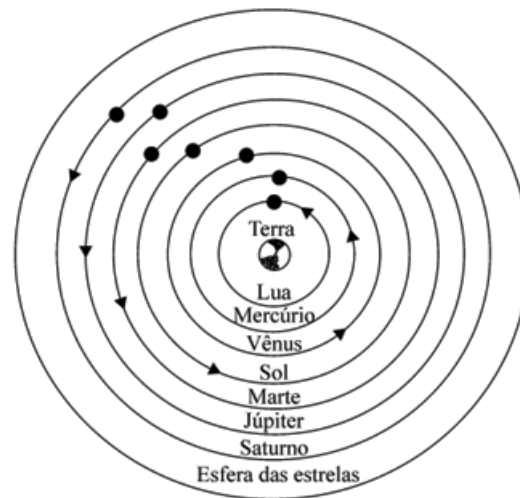
pela primeira vez o diâmetro da Terra, além de estimar as distâncias da Terra ao Sol e à Lua (como está detalhado no capítulo 3). (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 30)

O modelo do cosmos proposto por Aristóteles, era o aprimoramento de uma ideia anterior, de Eudóxio de Cnido (408 – 347 a.E.C.) que, informalmente, poderia ser descrito como uma “cebola”, com diversas camadas concêntricas. Na busca por ampliar o poder preditivo do modelo, Eudóxio chegou a considerar 27 esferas concêntricas: sendo quatro somente para justificar os movimentos do Sol. Para ele, a esfera mais externa servia para as “estrelas fixas” – a última camada do cosmos, tido, então, como finito. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 32)

Aristóteles elevou o número de esferas (que ele chamava de orbes e já não considerava mais meros modelos matemáticos, mas parte da nossa realidade física) para 56, com algumas delas sem astros (que ele chamava de anastros). Ainda assim, sem sucesso em acabar com os problemas do modelo (Figura 1).

A diferença de percepção nos movimentos aparentes das estrelas distantes em comparação com os planetas do Sistema Solar e a Lua, fez com que Aristóteles estabelecesse uma diferença crucial entre o mundo celeste e o terreno, tendo a Lua como fronteira (eles já sabiam que o Sol ficava mais distante do que a Lua, como está detalhado num recorte no capítulo 3). Para ele, só havia movimento, transformação e mudança na esfera sublunar, uma região que chamou de “imperfeita”. Nos orbes acima da Lua, havia organização perfeita e imutável. O mundo celeste era eterno e livre de transformações. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 33)

Figura 1 - Modelo simplificado do cosmos de Aristóteles



Fonte: <https://www.benitopepe.com.br/wp-content/gallery/teset/universo-aristotelico.gif>

Ptolomeu (90-168) escreveu a principal obra astronômica da antiguidade, *Almagesto*, onde descreve um sistema geocêntrico baseado em conceitos geométricos, com planetas orbitando irregularmente a Terra. Marte, por exemplo, fazia um ziguezague (movimento retrógrado) no céu que o modelo geocêntrico não conseguia explicar, como representado na Figura 2. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 31)

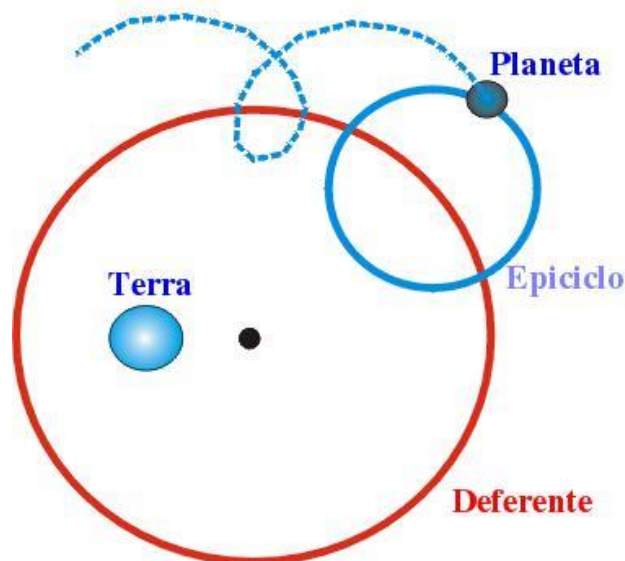
Figura 2 - Composição de 29 fotografias tiradas em diferentes dias, mostrando o movimento retrógrado de Marte



Fonte: <http://astronomia.blog.br/epiciclos-de-ptolomeu-e-materia-escura/>

Para que essas irregularidades não comprometessem as previsões, Ptolomeu propôs que além de os outros astros orbitarem a Terra em trajetórias circulares, eles também descreveriam *epiciclos* ao longo de sua órbita. Um epiciclo é um círculo cujo centro se desloca ao longo de outro círculo, o chamado *deferente*, de diâmetro maior (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 33), como representado na Figura 3.

Figura 3 - Modelo geocêntrico de Ptolomeu com a Terra próxima ao centro do universo sendo orbitada por um planeta que descreve um epiciclo



Fonte: <http://astronomia.blog.br/epiciclos-de-ptolomeu-e-materia-escura/>

Poucos séculos antes de Ptolomeu, Aristarco de Samos (310 – 230 a.E.C.) havia proposto um modelo heliocêntrico que daria conta de explicar os movimentos irregulares. A ideia foi rejeitada, em termos religiosos, porque era inaceitável que Deus tivesse colocado a Terra fora do centro do universo; e, em termos práticos, porque o modelo heliocêntrico precisava que a Terra realizasse dois movimentos: um de rotação e outro de translação ao redor do Sol.

O movimento de rotação foi descartado por Aristóteles e seu discípulo Ptolomeu pois, segundo eles, se a Terra estivesse girando, toda vez que alguém lançasse uma pedra verticalmente, veria a mesma cair “mais para trás” com relação ao ponto de lançamento, uma vez que o planeta teria avançado em sua rotação. Um argumento razoável quando não se conhece o funcionamento da lei da inércia.

O movimento de translação também foi descartado. Segundo eles, com o suposto transladar da Terra, as estrelas fixas deveriam aparecer em diferentes disposições no céu,

dependendo do lado que o planeta estivesse com relação ao Sol. Um dilema de solução simples, mas difícil de se conceber com a mentalidade da época. Era necessário imaginar que as chamadas estrelas fixas, estavam muito mais longe do que se supunha, de forma que o diâmetro da órbita da Terra em torno do Sol se tornaria ínfimo em comparação a essas distâncias (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 37). Com base nestes argumentos, o modelo heliocêntrico só voltaria a ser considerado quase 20 séculos mais tarde.

2.2 Idade Média – Falta de desenvolvimento ou falta de visibilidade?

Ptolomeu foi o último grande astrônomo da Grécia Antiga. Para construir a sequência didática da história da Astronomia, é comum no ocidente, a partir da Grécia antiga, um salto na História para o século XV, quando começam as grandes descobertas da Astronomia moderna na Europa. Por terem tido um desenvolvimento conjunto no ambiente de ensino e pesquisa, a Astronomia e a Matemática estão sujeitas à mesma abordagem questionável quando se reconstrói suas evoluções históricas. O período entre as chamadas *Idade Antiga* e *Idade Moderna*, é a chamada *Idade Média* (entre os séculos V e XV), que no ocidente por vezes é erradamente chamada de “Idade das Trevas”, dando a ideia de que foi um tempo tomado de superstições e que os mandamentos religiosos sobrepunham a razão (ROQUE, 2012, p. 23).

Nesta linha de raciocínio, o saber científico, especificamente o matemático (e conseqüentemente o astronômico) ocorreria de forma linear e cumulativa, ignorando abordagens diferentes, principalmente de culturas não-europeias. Mesopotâmicos e egípcios seriam longínquos precursores de um saber que teria se originado com os gregos. A partir da Grécia antiga, as descobertas teriam sido preservadas e traduzidas pelos árabes no início da Idade Média e depois levada de volta à Europa, seu lugar de origem. Os europeus seriam herdeiros privilegiados, prontos para dar continuidade ao trabalho dos gregos. Deste modo, a ciência de modo geral passou a ser vista como uma criação específica do mundo greco-ocidental. (ROQUE, 2012, p. 23)

Esta abordagem é amplamente questionada no meio acadêmico. Entre vários fatores em contrário destacados pela autora Tatiana Roque, estão:

- O conceito de “Idade das Trevas” derivou de estudiosos posteriores que tinham forte visão pró-Roma Antiga. O Renascimento inventou o mito das trevas para definir a si mesmo, por contraste, como a “Idade da Razão” (ROQUE, 2012, p. 25); e

- As matemáticas chinesa, indiana e árabe desenvolvidas durante a Idade Média são sistematicamente referenciadas de forma superficial e até depreciativa em livros de História da Matemática tradicionais. São tratadas como exceções, em uma linha não diretamente relacionada à matemática teórica que herdamos dos gregos (ROQUE, 2012, p. 212). Al-Khwarizmi (780 – 850), provavelmente o matemático árabe mais famoso, era também astrônomo e geógrafo. É do seu nome que deriva o termo “algarismo”, em português. Foi um importante personagem no desenvolvimento da álgebra, fato que nos leva a uma contradição imediata: se, baseado na história tradicional, o papel dos árabes foi essencialmente traduzir e transmitir a matemática grega para a Europa, sendo que esta mesma matemática grega era marcada pela geometria, então como eles poderiam ter conhecimentos algébricos significativos?

Segundo a autora, dentre as contribuições dos escritos árabes destacam-se pontos importantes que vão além do que hoje chamamos de Álgebra, abrangendo também a Geometria, a Astronomia e a Trigonometria (ROQUE, 2012, p. 214). Ela destaca ainda que, contrapondo-se à tendência eurocentrista da visão tradicional, alguns autores exageraram no sentido oposto, defendendo que a matemática medieval do período islâmico já apresentava um desenvolvimento comparável ao da matemática moderna. Alguns referiram-se a Al-Khwarizmi como “o pai da álgebra”, ideia dispensada pela autora, uma vez que, segundo ela, para aplicar tal alcunha a algum matemático do período, obteríamos múltiplas respostas: Diofanto, Al-Khwarizmi, Cardano ou Viète, dependendo da definição que usarmos para “álgebra”. Igualmente, a autora dispensa alcunhas deste tipo para a reconstrução histórica da ciência (especificamente da matemática), discutindo também a utilidade de questionamentos como “Quem foi o inventor de tal fórmula?” e outras abordagens míticas que distorceriam a realidade do ambiente de pesquisa (ROQUE, 2012, p. 219), criando uma visão de que a ciência é uma produção individual de gênios que, num instante de iluminação, desenvolvem ideias inovadoras, difíceis de serem compreendidas por homens comuns. Abandonar estas abordagens míticas seria produtivo quando se pretende incentivar mais alunos ao caminho acadêmico, um dos objetivos pensados para este trabalho. (ROQUE, 2012, p. 25)

O sistema de numeração decimal posicional que usamos hoje é de origem indiana, tendo sido transmitido para o Ocidente pelos povos islâmicos na Idade Média. (...) Alguns textos astronômicos e astrológicos do século III E.C já empregavam um sistema posicional decimal, incluindo um símbolo para o zero. No entanto, as evidências sobre a Astronomia escrita em sânscrito só se tornaram mais significativas a partir de meados do primeiro milênio. (ROQUE, 2012, p. 237)

De acordo com a autora, nesta época havia na Índia uma intensa atividade Matemática para a elaboração de tratados astronômicos aliando as obras gregas herdadas do mundo antigo com a tradição matemática indiana. O mais antigo tratado deste tipo foi escrito por *Aryabhata*, que nasceu no ano de 476. Trata-se de uma das fontes mais importantes sobre a Matemática e a Astronomia indianas. Este tratado foi escrito em versos, o que tornou-se uma tradição indiana (ROQUE, 2012, p. 238). Outras traduções do sânscrito inspiraram trabalhos árabes em astronomia e astrologia. Apesar de a maioria ter se perdido, podemos afirmar que a astronomia emergente na matemática árabe adotou diversos métodos indianos. Posteriormente, a influência indiana foi ultrapassada por traduções de textos matemáticos e astronômicos gregos. A astronomia indiana submeteu-se, então, às práticas greco-islâmicas, conservando somente a aritmética decimal posicional. (ROQUE, 2012, p. 243)

Mesmo não havendo uma grande descoberta astronômica durante a Idade Média, se houve desenvolvimento da Matemática, base e linguagem dos argumentos astronômicos, então, indiretamente, a Astronomia também esteve sendo desenvolvida no período. Para além disso, apesar de até mesmo a rotundidade da Terra ter passado a ser questionada no ocidente, no Império Árabe, a Astronomia seguiu evoluindo. Foram feitas observações mais precisas, instrumentos foram aperfeiçoados e o astrônomo, físico e matemático *Ibn El Hhaytam* (965-1039), que tinha nome ocidental *Alhazen* e foi um dos primeiros a contribuir com a metodologia científica que usamos hoje, além de dar explicações mais convincentes sobre a natureza da luz, através do desenvolvimento que realizou no estudo da *Ótica*, no âmbito da Física. Como a qualidade e amplitude científica do seu trabalho só encontrava precedente na antiguidade, foi referido por vezes como “o segundo Ptolomeu”.

Somente nos séculos 11 e 12, com as Cruzadas, o conhecimento armazenado no mundo árabe voltou a ter contato com o ocidente. O estudo dos céus foi retomado com mais afinco e, não por coincidência, esse período permitiu o desenvolvimento das chamadas “Grandes Navegações”, onde cada embarcação tinha um astrônomo à bordo e as estrelas no céu eram usadas como pontos de referência. Nesta época, os chineses tinham a astronomia similarmente desenvolvida e produziram frotas muito avançadas de navios, antes dos europeus, que tiveram esse interesse ampliado somente no fim da Idade Média. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 35)

No meio acadêmico existem debates sobre a intencionalidade de algumas dessas distorções recorrentes na reconstrução histórica. No entanto, neste trabalho objetiva-se apenas dar ciência da existência da problemática a fim de construir no entendimento do estudante a

ideia de que até o conhecimento acadêmico está sujeito a questionamentos e transformações em busca de uma maior precisão.

2.3 Astronomia no Mundo Moderno

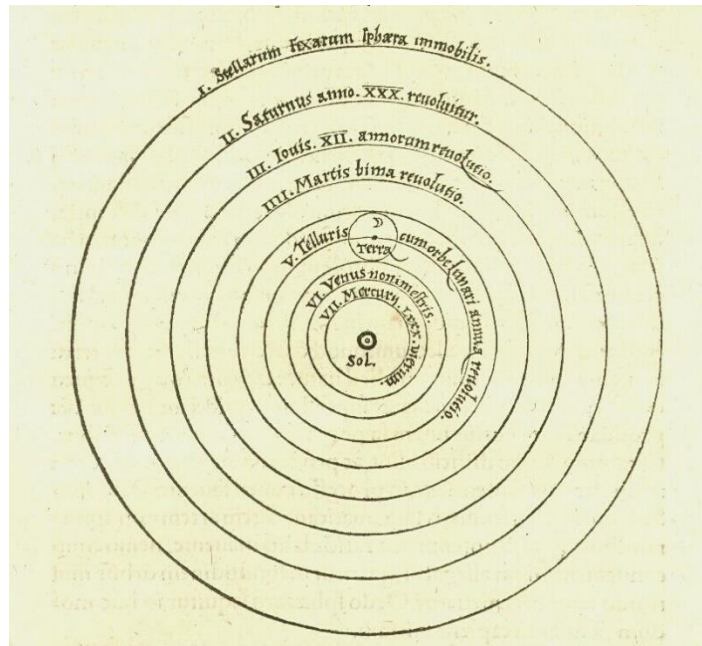
2.3.1 Copérnico e o modelo heliocêntrico

Nicolau Copérnico (1473-1543), foi o astrônomo e matemático polonês que propôs e desenvolveu a teoria heliocêntrica do sistema solar, quase 20 séculos após a tentativa frustrada de Aristarco, provocando uma revolução na Astronomia. Seguiu uma carreira monástica, apesar de apaixonado pelo estudo dos astros. Naquela época, a igreja repudiava o pensamento crítico, mas as melhores oportunidades de ensino ainda estavam entre os padres. Temeroso do que suas conclusões poderiam desencadear, Copérnico só publicou sua grande obra *De revolutionibus orbium coelestium* (Sobre as revoluções dos orbes celestes) quando estava no leito de morte, com uma introdução escrita por outra pessoa, ressaltando que as hipóteses ali apresentadas não descreviam a realidade, mas sim tratavam-se de meros artifícios matemáticos que tinham por finalidade corrigir imprecisões do modelo de Ptolomeu. Uma paráfrase da introdução feita mais tarde pelo astrônomo Carl Sagan (1993 *apud* NOGUEIRA; CANALLE, 2009, p. 36) dizia:

Prezado leitor, quando você ler esse livro, pode parecer que o autor está dizendo que a Terra não está no centro do universo. Na verdade, ele não acredita nisso. Veja, este livro é para matemáticos. Se você quiser saber onde Júpiter estará dois anos depois da próxima quarta-feira, você pode ter uma resposta precisa tomando como hipótese que o Sol esteja no centro. Mas isso é meramente ficção matemática. Isso não desafia nossa fé sagrada. Por favor, não fique inquieto ao ler este livro.

Trata-se da obra em que Copérnico afirma que a Terra tem dois movimentos, o de rotação e o de translação, considerada uma das mais importantes hipóteses científicas de todos os tempos, constituindo o ponto de partida da Astronomia moderna. Apesar de a hipótese ter sido proposta por Aristarco na antiguidade, somente com Copérnico ela foi formalizada através da produção de literatura, provas e modelos matemáticos (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 37). Seu modelo do cosmos está representado na Figura 4.

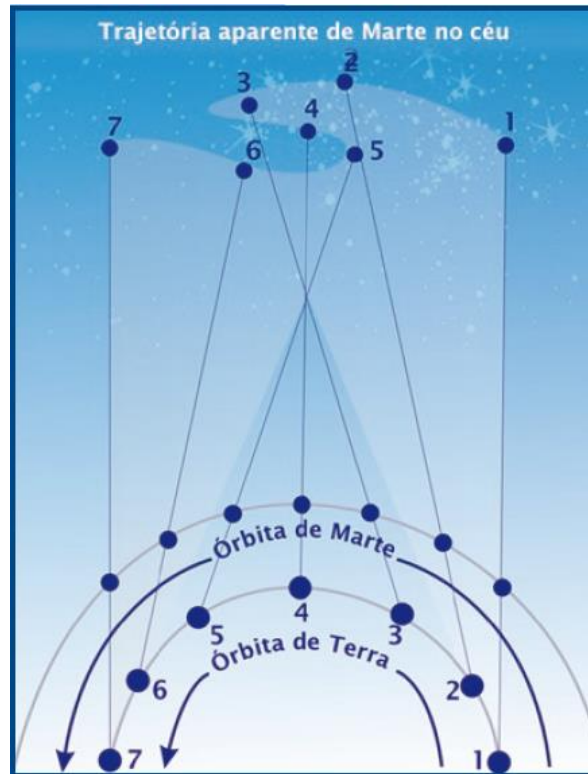
Figura 4 - Modelo heliocêntrico do cosmos de Copérnico



Fonte: NOGUEIRA e CANALLE. Astronomia: Ensino Fundamental e Médio. p.37

O modelo de Copérnico encontrou grande resistência, especialmente religiosa. Porém, como parecia concordar mais com as observações do que o modelo de Ptolomeu, logo ganhou a atenção e o entusiasmo de muitos cientistas. Estava pronto, por exemplo, um modelo que explicava os estranhos ziguezagues descritos por algumas estrelas, como representado na Figura 5.

Figura 5 - Representação do Cosmos com o Sol no centro do Sistema Solar e a Terra como mais um planeta. Esquema que, a partir de Copérnico, explica o ziguezague de Marte



Fonte: NOGUEIRA e CANALLE. Astronomia: Ensino Fundamental e Médio. p.38

2.3.2 Kepler e as órbitas elípticas

Entre os motivos que levaram Nicolau Copérnico a deixar a publicação da sua obra para o leito de morte, provavelmente estava a certeza de que ele não poderia responder a todas as perguntas que lhe seriam feitas sobre o assunto, já que seu modelo ainda tinha muitas imprecisões. O matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571 – 1630), foi um dos cientistas entusiasmados que dedicaram a vida ao aprimoramento da teoria heliocêntrica proposta por Copérnico e acabou por responder a algumas perguntas importantes que a hipótese suscitava. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 38)

Kepler foi contratado por Tycho Brahe (1546 – 1601), um rico astrônomo dinamarquês que, frente à polêmica gerada pela hipótese de Copérnico, fundou uma terceira hipótese híbrida que fazia uso do heliocentrismo, sem abandonar o geocentrismo. O sistema de Tycho colocava todos os planetas girando em torno do Sol, que, por sua vez, junto com a Lua, girava em torno

da Terra, que ainda seria o centro do universo. O modelo era menos polêmico do que o de Copérnico, porém, também menos preciso. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 39)

Tycho havia construído um ambicioso observatório na ilha de Hven, o chamado Uranienborg, de onde fez medições com exatidão sem precedentes. Em 1600, ele deu a Kepler, seu então assistente, a tarefa de determinar com precisão a órbita de Marte. O dinamarquês sabia que a missão seria difícil, pois, por ser um dos planetas mais próximos da Terra, sua trajetória no céu era bem conhecida. Porém, não se encaixava nas previsões feitas por nenhum dos três modelos disponíveis: o geocêntrico de Ptolomeu, o heliocêntrico de Copérnico ou mesmo o híbrido de Tycho. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 40)

Kepler levou oito anos para desvendar o que estava por trás daquelas imprecisões. De fato, o que faltava a ele questionar era algo que estava erroneamente presente nos três modelos: o formato circular das órbitas. Ao se deparar com as medições de Tycho, Kepler provavelmente cogitou que houvesse erros de medição nos pontos da órbita que estavam fora da descrição do círculo esperado. Porém, ao confiar na precisão das medições de Tycho, chegou a uma grande conclusão: o sistema heliocêntrico de Copérnico funciona perfeitamente se dele fossem retirados os círculos – associados ao pensamento científico desde a época dos gregos com sua adoração às esferas como a forma geométrica mais perfeita – e fossem colocadas no lugar *elipses*, com o Sol ocupando um de seus dois focos. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 40)

Embora Johannes Kepler seja o grande nome por trás da descoberta das órbitas elípticas, é importante que se destaque o cunho decisivo das precisas medições observacionais de Tycho Brahe, pois, ao contrário do que muitos livros didáticos trazem, a diferença entre a suposta órbita circular e a elíptica, no caso de Marte, é bastante pequena.

O capítulo 3 traz recortes que destacam as três leis definidas por Kepler: no recorte sobre a primeira lei, é aprofundado o conceito de *excentricidade*, parâmetro usado para medir o quão achatada é uma elipse, destacando o quão excêntricas são as órbitas do nosso sistema; no recorte sobre a segunda lei, é descrita a relação percebida por Kepler entre a velocidade dos astros em suas órbitas e a distância que se encontram do Sol; o recorte sobre a terceira lei também destaca uma relação percebida por Kepler sobre o tempo que o astro leva para cumprir uma órbita e a distância média do astro ao Sol.

Em 1609, Kepler publicou o livro “Astronomia Nova”, onde constam suas duas primeiras leis e os resultados de seus mais de dez anos de investigações sobre movimentos de planetas, em específico Marte. Em 1619, publicou o livro *Harmonices Mundi* (Harmonia do Mundo) em que está sua terceira lei, além de uma abordagem sobre harmonia e congruência de formas geométricas e de fenômenos físicos.

2.3.3 Galileu Galilei aponta o telescópio para o céu

Outro grande cientista, contemporâneo de Johannes Kepler, que entusiasmou-se pelas descobertas de Nicolau Copérnico, chegando a arriscar a própria vida para deixar contribuições para a consolidação da teoria heliocêntrica, foi o italiano Galileu Galilei (1564 – 1642). Ele era matemático, físico, astrônomo e filósofo.

Em 1597, Galileu confessou que já havia alguns anos que concordava com o trabalho escrito por Copérnico – *Sobre as revoluções dos orbes celestes* – em que ele desenvolve a teoria heliocêntrica. No entanto, não estava disposto a tentar defendê-lo publicamente por receio de cair no ridículo ou tornar-se alvo de críticas. (PENNEREIRO, 2009, p. 174)

Trinta e seis anos depois, em 1633, Galileu enfrentava o “Tribunal do Santo Ofício” (Inquisição) em Roma, por ter defendido em sua obra “*Diálogo*” (publicada no ano anterior) as mesmas ideias frente as quais ficou praticamente inerte quando mais jovem. (PENNEREIRO, 2009, p. 175)

De 1597 a 1633, muitos fatos levaram Galileu a posicionar-se em favor do heliocentrismo. Em 1597 não havia provas suficientes para persuadir a comunidade científica, partidária da doutrina ptolomaica. Da sua perspectiva, ele precisava preencher a três condições:

- Libertar-se da autoridade exercida por um lado pelas Sagradas Escrituras (Bíblia) e, por outro, pela tradição científica aristotélica;
- Elaborar novas premissas que permitissem o desenvolvimento de uma nova cosmologia, o que implicava a derrubada das premissas aristotélicas;
- Construir uma mecânica compatível com o heliocentrismo e, em particular, com o movimento diurno da Terra (rotação).

A tarefa era árdua e Galileu não teve forças para concluí-la em vida, deparando-se com dificuldades que podem parecer triviais para os dias de hoje. (PENNEREIRO, 2009, p. 176)

Diferente do que muitos pensam, Galileu não foi o inventor do telescópio (ou luneta), embora tenha sido o primeiro a fazer uso científico dele. Ocorre que em 1609, ele ouviu falar da “trompa holandesa”, um instrumento capaz de ampliar a visão humana sobre objetos à distância, composto por um tubo com uma lente em cada extremidade, que havia sido produzida no ano anterior pelo fabricante de óculos holandês Hans Lippershey.

Baseado na mesma lógica, Galileu passou a trabalhar na construção de seu próprio telescópio, com objetivos mais ambiciosos. Teve sucesso com o primeiro, que conseguia ampliar uma imagem nove vezes. O segundo, conseguia ampliar trinta vezes e já era superior a qualquer outro fabricado até então. Após apresentar o instrumento às autoridades científicas de Veneza, Galileu aponta o telescópio para o céu e, a partir do outono de 1609, faz descobertas revolucionárias, dentre as quais estão (PENNEREIRO, 2009, p. 175):

- O relevo da Lua: observando zonas de sombra na Lua que diminuía ou aumentavam de acordo com os raios de Sol, quando estes tornavam-se mais, ou menos próximos de incidir perpendicularmente, Galileu descobriu a existência de um relevo lunar, semelhante ao relevo terrestre. O que desmontava o mito aristotélico de uma Lua perfeitamente esférica e polida (na época, somente a forma esférica perfeita convinha aos corpos celestes). (PENNEREIRO, 2009, p. 177)
- As manchas solares: observando o Sol, Galileu percebeu a presença de manchas solares que se moviam, e que, em alguns casos, se dividiam em várias outras menores, ou se juntavam várias numa única, ou mesmo desapareciam. Levavam em torno de 14 dias para todo o disco solar visível, o que levou Galileu a inferir que o Sol deveria girar em torno do seu eixo em aproximadamente 28 dias. Esta descoberta também contrariava a doutrina aristotélica, pois um corpo celeste estaria sujeito a mudanças, gerações e corrupções. (PENNEREIRO, 2009, p. 177)
- As fases de Vênus: observando Vênus, Galileu percebe que este apresenta fases, semelhantes às da Lua. De onde conclui que ele efetivamente gira em torno do Sol e que não tem luminosidade própria. Logo, a Lua, Vênus e, por extensão, os demais planetas, guardam algo em comum com a Terra – não emitem luz própria. Somente refletem e espalham a luz que recebem do Sol. Esta descoberta contribuía para Galileu aceitar racionalmente que a Terra fosse incluída entre os planetas de um sistema heliocêntrico. (PENNEREIRO, 2009, p. 178)
- Os satélites de Júpiter: Galileu descobriu os quatro maiores satélites de Júpiter, que batizou de “planetas mediceanos”, em homenagem ao grão-duque da Toscana (seu então amigo próximo, pertencente à notória dinastia italiana Médici). Como o que ocorria em Júpiter era semelhante ao que ocorria com o sistema solar, isto é, os satélites orbitando em tempos diferentes segundo suas órbitas, Galileu teve um fortíssimo indício de que a Terra não seria necessariamente o centro do universo. Os satélites de Júpiter acabaram

por ser um forte argumento, embora indireto, a favor do heliocentrismo. (PENNEREIRO, 2009, p. 179)

- Observações de Saturno: o telescópio de Galileu não tinha a resolução necessária para descobrir os anéis de Saturno. Ele relatou que o planeta tinha a forma “trigêmea”. Acreditou que o planeta tivesse duas luas em lados opostos, bem próximas do planeta, como se fosse “um planeta com um par de orelhas”. Ainda na obra Diálogo, onde divulgou estes resultados, Galileu deixou claro que “a Matemática é a língua da Física” que, naquele tempo, começava a constituir-se com maior vigor. (PENNEREIRO, 2009, p. 180)

Existiram outras descobertas feitas por Galileu via observação direta que contribuíram para que num dado momento de sua vida ele se posicionasse em favor do heliocentrismo, sendo, por isso, condenado pela Inquisição ao exílio, perto do fim de sua vida. O fato de não ter conseguido apresentar uma teoria física completa em favor do copernicianismo o submeteu à condenação. (PENNEREIRO, 2009, p. 195)

No capítulo 3, há dois recortes sobre Galileu: o primeiro detalha a observação de Marte, Vênus e Mercúrio feita por ele, uma das descobertas, junto das citadas acima que o levaram a seu posicionamento em favor do heliocentrismo. O segundo recorte, traz o método científico idealizado por Galileu, para o qual ele ressalta que a Matemática será linguagem fundamental e que a observação direta será importante. Além disso, os dogmas religiosos devem ser evitados na prática científica. (PENNEREIRO, 2009, p. 181)

Além da Astronomia, Galileu deixou enormes contribuições para a Física, chegando a conjecturar prematuramente sobre a ação da gravidade, a “conservação do movimento circular” e a “Lei da Inércia”, mesmo desconhecendo alguns dos princípios físicos subjacentes aos fenômenos (como a Dinâmica que só seria inventada três décadas mais tarde) além de contribuições para a Medicina e para a Filosofia. (PENNEREIRO, 2009, p. 189)

Depois de Galileu, aprimoramentos no telescópio fizeram com que conhecimentos sobre o Sistema Solar fossem ampliados, passando este a ter dois novos planetas: Urano, encontrado por Sir William Herschel (1738 – 1822) da Inglaterra, em 1781; e Netuno, encontrado pelo observatório de Berlim em 1846. Plutão foi encontrado pelo astrônomo americano Clyde William Tombaugh (1906 – 1997) em 1930, chegando a ser categorizado como planeta. No entanto, foi rebaixado a planeta anão em 2006. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 43)

2.3.4 Isaac Newton e a grande síntese

A partir de Kepler, os movimentos planetários tornaram-se razoavelmente previsíveis. No entanto, o maior paradigma do estudo do céu permanecia desde Aristóteles: o de que as regras que operavam no céu, fossem quais fossem, eram diferentes das que operavam aqui no chão. Foi o britânico Isaac Newton (1642 – 1727), o responsável por derrubar este pensamento. Tecnicamente, Newton era um sucessor intelectual de Kepler e Galileu, mas na prática foi mais audaz, sendo por vezes referido como “a mente mais poderosa que já surgiu na ciência”. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 44)

A “Teoria da Gravitação Universal” foi seu sucesso mais famoso, que é especial, não por falar de gravitação, mas, sobretudo, por ser universal. Pela primeira vez, uma lei que não fazia distinção entre mundo celeste e mundo terreno, e que deu verdadeiro sentido aos avanços de Kepler e Galileu, em suas investidas para explicar o movimento dos astros e a ação da gravidade terrestre. Com esta teoria, Newton redefiniu as bases da ciência moderna, chegando a um novo formalismo científico.

Em 1687, Newton publicou sua obra-prima, o livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, usualmente referido como *Principia*. Tido como um dos primeiros livros a trazer o rigor e a precisão das narrativas científicas modernas, a obra contém as leis de Newton para o movimento dos corpos, compondo a fundação da Mecânica Clássica, além da lei da gravitação universal.

A lei da gravitação universal de Newton para dois corpos pode ser resumida no seguinte enunciado: *todo corpo atrai outro corpo com uma força que, para qualquer dos dois corpos, é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa.*

No século XVIII, o matemático Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) escreveu uma versão moderna em forma de equação da lei da gravitação universal, como se segue:

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

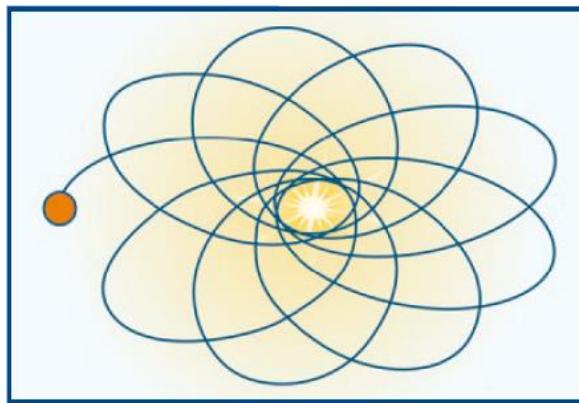
onde F é o módulo da força exercida, m_1 e m_2 são as massas dos corpos, d é a distância entre eles e G é uma constante de proporcionalidade denominada constante de gravitação universal. O valor numérico desta constante foi calculado em 1798, com o uso de uma balança de torção,

pelo francês Henry Cavendish (1731 – 1810) (HEWITT, 2002, p. 161). Em unidades do Sistema Internacional, este valor é dado por:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 .$$

Com sua obra, além de construir bases para um novo modo de fazer ciência, Newton solucionou as problemáticas acerca dos movimentos planetários, exceto por uma: havia uma estranha precessão na órbita de Mercúrio, como representado na Figura 6.

Figura 6 - A precessão: além do planeta, sua órbita também gira em torno do Sol (excentricidades exageradas das elipses para deixar o efeito mais claro)



Fonte: (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 46)

O capítulo 3 traz um recorte que, sob a ótica da História da Matemática, critica a centralização de créditos por realizações científicas em indivíduos isolados, prática comum em enquadramentos históricos, partindo da lendária caricatura de Newton com a maçã.

2.3.5 Albert Einstein e o último enigma

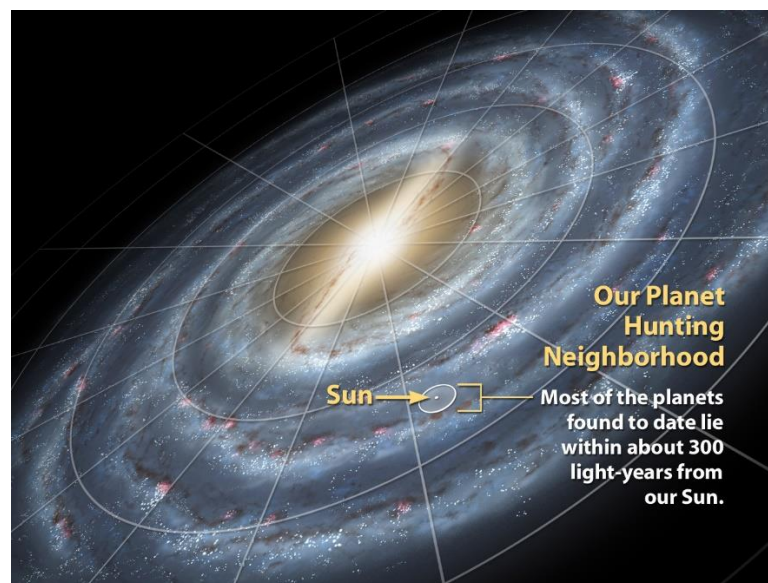
Quando aplicadas aos planetas, as equações de gravitação de Newton acertaram em cheio, exceto para aquele mais próximo do Sol. O enigma da precessão de Mercúrio gerou especulações sobre a existência de outro planeta ainda mais próximo do Sol, que justificasse o movimento. Mas a solução para o enigma só veio em 1915, quando o físico alemão Albert Einstein (1897 – 1955) apresentou sua nova teoria da gravidade, mais conhecida como a teoria da relatividade geral. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 46)

Além de explicar a precessão de Mercúrio, a relatividade de Einstein trouxe uma novidade mais impactante: o espaço e o tempo passam a ser vistos como uma entidade única e indivisível, o espaço-tempo. A gravidade acaba por ser uma curvatura nesta entidade. O Universo, por sua vez, passa a ser encarado como algo dinâmico, tendo sua história determinada pela ação da gravidade ao longo do tempo. Esta nova abordagem permitiu uma especulação mais concreta acerca das origens do Universo. Entretanto, por convicções religiosas e filosóficas, Einstein entendia que o Universo deveria ser eterno e estático, mesmo que suas equações sugerissem o contrário. Um universo regido pela gravidade estaria, necessariamente, em expansão ou em contração. Para solucionar o dilema, Einstein modificou suas equações, introduzindo em 1917 uma “constante cosmológica” – cujo objetivo era manter o Universo estático ao longo do tempo (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 46).

Edwin Hubble traz uma perspectiva intergaláctica

Com suas observações, Galileu já havia descoberto que as “emanações” vistas no céu, eram na verdade grandes concentrações de estrelas. Mas a perspectiva humana ainda não passava dos limites da nossa galáxia, afinal, salvo por raras exceções, todos os objetos visíveis a olho nu estão na Via Láctea, conjunto de estrelas no qual o Sol está inserido, como ilustrado na Figura 7.

Figura 7 - Sol na Via Láctea e uma região (com 300 anos-luz de raio, a partir do Sol) da mesma onde detectamos a maioria dos planetas que conhecemos

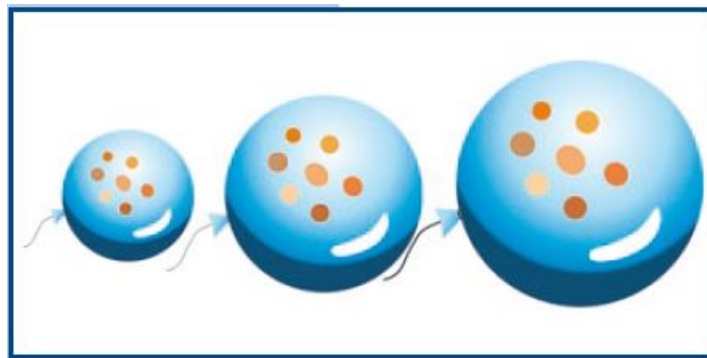


Fonte: <http://education2.marssociety.org/wp-content/uploads/2013/07/blog-20-MWG-and-sun-teachastronomy-com.jpg>

O astrônomo americano, Edwin Hubble (1889 – 1953), valendo-se de um telescópio refletor recém-construído, descobriu em 1924 que as nebulosas que conhecíamos, eram na verdade galáxias exteriores à nossa.

A partir desta descoberta, passamos a ter nossa representação moderna do Universo. Em 1929, Hubble descobriu também que as galáxias afastam-se umas das outras a uma velocidade proporcional à distância que as separa (vide Figura 8). (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 47)

Figura 8 - Uma representação da expansão do universo: pintar bolinhas numa bexiga e inflá-la. O universo seria a superfície bidimensional da bexiga e as galáxias as manchas afastando-se umas das outras.



Fonte: (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 52)

Este movimento de galáxias foi imediatamente interpretado como um sinal de que o Universo estaria de fato em expansão. Com a publicação destes resultados, Einstein repudiou sua constante cosmológica, considerando-a o maior erro de sua carreira. Ele lamentou não ter acreditado no que suas equações lhe diziam havia mais de uma década (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 47).

2.3.6 A Teoria do Big Bang

Partindo-se da premissa de que o Universo esteja em expansão, se voltássemos no tempo, provavelmente o contemplaríamos numa condição muito mais compacta. Se seguíssemos nessa linha e voltássemos até o início dos tempos, não estaria todo o cosmos concentrado num único ponto?

Esta suposição foi feita em 1927, pelo padre belga Georges Lemaître (1894 – 1966), antes das observações de Hubble que apoiaram a ideia e representou o início da chamada teoria do *Big Bang*, que mais tarde foi melhor desenvolvida pelo físico russo-americano George Gamow (1904 – 1968). Segundo ele, se esta teoria estivesse correta, deveria haver um “eco” do evento emanando de todas as partes do cosmos.

Este eco é conhecido hoje como *radiação cósmica de fundo de micro-ondas* e foi descoberto por acidente em 1965, por Arno Penzias (1933-) e Robert Wilson (1936-), trabalhando para os laboratórios Bell, nos Estado Unidos.

Após séculos de trabalho científico contínuo, a humanidade finalmente tem uma visão razoável de como o Universo nasceu e evoluiu. Inclusive, temos estimativas plausíveis para o seu futuro longínquo. Só não sabemos nada ainda sobre o começo denso e quente em si, isto é, o que fez a explosão acontecer. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 48)

Embora esta teoria não diga nada sobre o Big Bang em si, ela é a teoria mais eficiente em descrever todo o suposto desenrolar subsequente ao evento.

Entre as razões prováveis para não conseguirmos explicar o que seria o universo anterior ao Big Bang, está o fato de entre as quatro grandes forças conhecidas da natureza, três só são bem decifradas pela chamada *teoria quântica*, que descreve com grande precisão o funcionamento de coisas extremamente pequenas. São as chamadas força nuclear forte, força nuclear fraca e a força eletromagnética, cujos desígnios estão fora da alçada desta pesquisa.

A única força incompatível com o tratamento quântico é aquela que melhor traduz a realidade gravitacional nossa e dos corpos celestes, a gravidade. A relatividade ainda é a teoria que melhor traduz a ação desta que é a menos intensa das quatro forças conhecidas.

Ocorre que estas duas teorias e suas equações são incompatíveis, tendo o físico britânico Stephen Hawking (1942 – 2018), obtido alguns sucessos em combinar as duas teorias para, por exemplo, explicar radiações emitidas por buracos negros. No entanto, apesar do bom funcionamento das teorias em seus campos particulares, a descoberta de uma “teoria de tudo” ainda não parece próxima de acontecer. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 49)

3 A MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DA REDESCOBERTA ASTRONÔMICA

As quatro seções deste capítulo são: Números, Operações, Grandezas e Medidas; Geometria; Análise de Dados; e História da Matemática. Em cada seção, estão destacados os tópicos matemáticos utilizados nas subseções. Em cada subseção é construída uma narrativa, expondo as perspectivas do cenário astronômico em questão. As ferramentas matemáticas utilizadas estão atreladas ao texto e surgem à medida que são necessárias durante o desenvolvimento do recorte.

A ideia é que o professor interessado em abordar algum dos recortes, observe quais são os assuntos pré-requisitos para adequá-lo à sua turma.

Havendo possibilidade logística na escola, seria interessante que o professor incluísse uma calculadora para cada aluno ou grupo de alunos. Embora alguns cálculos de recortes estejam desenvolvidos sem uso de notação científica, o professor pode adaptá-los, caso prefira utilizar esta notação.

3.1 Números, Operações, Grandezas e Medidas

Os principais tópicos matemáticos desta seção são: Razões e Proporcionalidade; Porcentagem; Unidades de Medida de Comprimento, Tempo e Velocidade; Velocidade Média; e Ordem de Grandeza (Magnitude)

Como em muitos dos recortes aqui presentes a Astronomia trabalha com números grandes, gerando a necessidade de parâmetros para comparação, há um destaque para assuntos que relacionam parte e todo como Razão e Proporção, que têm a qualidade de gerar novas leituras sobre um dado, através da comparação deste com outros dados conhecidos, dando contribuições mais amplas no entendimento de nossa realidade humana.

3.1.1 A Velocidade da Luz

Quando nos lançamos às descobertas astronômicas, recebemos dados numéricos enormes, sem precedentes, de modo que ficamos sem parâmetro de comparação. Mesmo que o estudante aceite que as grandezas astronômicas são muitos distantes das nossas, ao receber, por exemplo, o dado numérico referente à velocidade da luz no vácuo, a intuição sobre a informação

recebida não vai muito além disto - um número enorme, isto é, com muitas ordens de grandeza. Este número equivale a 1.079.252.848,8 km/h.

Uma outra abordagem usual e mais próxima da nossa compreensão deste número é obtê-lo em km/s, onde o mesmo passa a se apresentar como

$$\frac{1.079.252.848,8 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{1.079.252.848,8 \text{ km}}{3.600 \text{ s}} = 299.792,4 \text{ km/s}$$

que tem menos ordens de grandeza, embora ainda muito grande, uma vez que a maioria das pessoas está acostumada a lidar com no máximo unidades, dezenas ou centenas de km.

Para aproximar ainda mais este número do que ele representa para nossa escala, podemos pensar no que é “possível” (hipoteticamente) fazer com ele em contextos reais. Medir o que se pode fazer com essa velocidade em viagens de um canto a outro do globo terrestre ou mesmo, o mais usual, em voltas completas em torno do mesmo são abordagens mais intuitivas.

Tomando o raio da terra 6.371 km (HEWITT, 2002, p. 29), podemos chegar ao comprimento aproximado de sua circunferência

$$\text{Comprimento} = 2\pi R = 2 \times \pi \times 6.371 = 40.075 \text{ km}$$

e, a partir daí, usando valores aproximados, podemos estimar a quantidade de voltas em torno da Terra dadas por um móvel à velocidade da luz por segundo

$$\frac{300.000 \text{ km}}{\text{s}} = 7,5 \times \frac{40.000 \text{ km}}{\text{s}} = 7,5 \text{ voltas por segundo.}$$

Para comparar, podemos pensar trajetórias em torno da Terra a partir de perspectivas concretas humanas. Em aviação comercial, a mais bem sucedida tentativa de transportar passageiros em velocidade supersônica, entre 1963 e 1983, foi o avião da antiga União Soviética Tupolev Tu-144, que atingia 2.878 km/h (VINHOLES, 2015, p. 1). Estimando por aproximações, teríamos:

$$\frac{40.000 \text{ km}}{2.900 \text{ km/h}} \cong 13,8 \text{ h}$$

Figura 9 - Tupolev Tu-144



Fonte: <https://airway.uol.com.br/conheca-os-avioes-mais-rapidos-de-todos-os-tempos/>

Isto é, o Tu-144 levaria em torno de 14 horas para dar uma única volta em torno da Terra.

No âmbito da aviação militar, as possibilidades humanas vão além. O avião tripulado mais rápido, que operou de 1964 a 1999 foi o estadunidense SR-71 Blackbird, que atingia 3.540 km/h (NAPOL, 2017, p. 1).

$$\frac{40.000 \text{ km}}{3500 \text{ km/h}} \cong 11,4 \text{ h}$$

Figura 10 - SR-71 Blackbird



Fonte: <https://airway.uol.com.br/conheca-os-avioes-mais-rapidos-de-todos-os-tempos/>

Neste caso, uma volta levaria quase 11 horas e 30 minutos.

Entre os veículos espaciais, nosso desempenho é bem superior no quesito velocidade. O voo tripulado mais veloz da história aconteceu em 1969. A missão Apollo 10, missão de preparação imediatamente anterior à famosa Apollo 11, ao retornar da órbita da Lua à Terra com 3 tripulantes, atingiu 39.897 km/h (NASA, 2009).

$$\frac{40.000 \text{ km}}{40.000 \text{ km/h}} = 1 \text{ h}$$

Figura 11 - O decolar da nave espacial referente à missão Apollo 11



Fonte: <https://www.todamateria.com.br/apollo-11/>

Nosso recorde absoluto de velocidade pertence hoje a um voo não tripulado. Em 2016, a sonda Juno, que tinha por objetivo a órbita de Júpiter, atingiu pouco mais de 250.000 km/h (BEUTEL, 2017, p. 1).

$$\frac{40.000 \text{ km}}{250.000 \text{ km/h}} = 0,16 \text{ h} = 9 \text{ min e } 36 \text{ s}$$

Figura 12 - Representação artística da sonda Juno em Júpiter



Fonte: https://www.nasa.gov/mission_pages/juno/multimedia/pia13746.html

Ou seja, hoje, a possibilidade de maior velocidade humana seria de uma volta completa em torno da Terra em 9 minutos e 36 segundos.

3.1.2 O homem e a Terra – uma perspectiva de tempo

A idade do planeta Terra foi estimada em aproximadamente 4,6 bilhões de anos, através de datação radioativa do uranio (POUGH, JANIS e HEISER, 2008, p. 1), com margem de erro de 10% para mais ou para menos. O registro mais antigo do primeiro hominídeo de que temos notícia, o Australopitecos, data de aproximadamente 4 milhões de anos atrás (POUGH, JANIS e HEISER, 2008, p. 629). Uma conclusão interessante, que desafia o senso de que o planeta Terra tenha surgido para benefício específico dos humanos, é a comparação entre essas idades.

Comparando diretamente os dois dados, voltamos a incorrer em números com ordens de grandeza diferentes, porém ambos enormes e longe da nossa percepção.

Uma forma notória de melhorar a comparação expondo a diferença de tamanho é utilizar a notação percentual

$$\frac{4.000.000}{4.600.000.000} \cong 0,0009 = 0,09\%$$

É razoavelmente esclarecedor pensar que o tempo do homem sobre a Terra, embora seja longo, representa somente 0,09% da idade do planeta. Outra leitura interessante do mesmo dado seria observar que o planeta tem 99,91% de seu tempo de existência sem a presença do homem.

Uma outra abordagem seria comparar os dados usando o conceito de proporcionalidade, na hipótese de que o planeta tivesse somente um dia, isto é, 24 horas de existência

$$24 \text{ h} = 24 \times 60 \text{ min} = 1440 \text{ min}$$

$$\frac{x \text{ min}}{1440 \text{ min}} = \frac{4.000.000 \text{ anos}}{4.600.000.000 \text{ anos}} = 0,0009$$

$$x = 1,296 \text{ min} = 1 \text{ min e } 18 \text{ s} .$$

Assim, poderíamos concluir que se o planeta tivesse apenas um dia, o homem teria 1 minuto e 18 segundos de existência, somente. Numa outra leitura, se o planeta tivesse um dia, o homem teria surgido às 23 horas, 58 minutos e 42 segundos deste mesmo dia.

Utilizando o mesmo raciocínio, agora na hipótese de que a Terra tivesse um ano de existência, teríamos

$$\frac{x \text{ dias}}{365 \text{ dias}} = \frac{4.000.000 \text{ anos}}{4.600.000.000 \text{ anos}} = 0,0009$$

$$x = 0,3285 \text{ dias} = 0,3285 \times 24 \text{ h} = 7,884 \text{ h} = 7 \text{ h, } 53 \text{ min e } 2 \text{ s}$$

Ou seja, se o planeta tivesse apenas um ano, o homem teria, de idade, menos da metade de um dia. Teria somente 7 horas, 53 minutos e 2 segundos de existência. Mantendo o raciocínio análogo, o homem teria surgido somente no dia 31 de dezembro do primeiro ano de existência da Terra. Teria surgido precisamente às 16 horas, 6 minutos e 58 segundos daquele dia.

A discussão sobre qual é exatamente o início da história humana permanece, à medida que temos hoje muito maiores possibilidades de pesquisa e uma gama de parentes genéticos com diferentes capacidades físicas e cerebrais em tempos diferentes. Além de fatos novos que desafiam as teorias mais aceitas, como a descoberta do chamado “Homem das Flores”, espécie pigmeia cujos fósseis foram encontrados na Indonésia e que viveram de 700.000 a 50.000 anos atrás. O conflito se dá por conta da desconstrução de um pensamento de que a história humana

evolui de acordo com um constante crescimento do cérebro. O cérebro do Homem das Flores é três vezes menor do que o humano atual, como o de um macaco, e, no entanto, este tinha todas as capacidades cognitivas para produzir as mesmas tecnologias (instrumentos de pedra lascada) que nós, Homo sapiens, em sua época. (CASTELFRANCHI, 2007, p. 1)

Se tomarmos nossa existência direta para comparação, isto é, o Homo sapiens (POUGH, JANIS e HEISER, 2008, p. 629) que surgiu há cerca de 350.000 anos (embora tenha adquirido o comportamento moderno somente há 50.000 anos), o abismo frente à Terra fica ainda maior. Se fizermos raciocínio análogo ao feito com o australopiteco, no caso de a Terra ter somente um dia, teremos

$$\frac{x \text{ min}}{1440 \text{ min}} = \frac{350.000 \text{ anos}}{4.600.000.000 \text{ anos}} = 0,00008$$

$$x = 0,1152 \text{ min} = 7 \text{ s}$$

Isto é, o Homo sapiens teria somente 7 segundos de existência. Ou, equivalentemente, se a Terra tivesse somente um dia, o Homo sapiens teria surgido às 23 horas, 59 minutos e 53 segundos do mesmo dia.

Na hipótese de que a Terra tivesse um ano de existência, teríamos

$$\frac{x \text{ dias}}{365 \text{ dias}} = \frac{4.000.000 \text{ anos}}{4.600.000.000 \text{ anos}} = 0,00008$$

$$x = 0,0292 \text{ dias} = 0,0292 \times 24 \text{ h} = 0,7 \text{ h} = 42 \text{ minutos}$$

Ou seja, se a Terra tivesse somente um ano, o Homo sapiens teria surgido somente em 31 de dezembro do mesmo ano, às 23 horas e 18 minutos.

3.1.3 A conquista da estrela mais próxima

Um dos maiores apelos da astronomia é a percepção de um infinito desconhecido ainda por explorar. Mas se ainda não podemos explorá-lo de forma direta, podemos conjecturar e nos relacionar com os dados que obtemos sobre astros longínquos.

A rigor, a estrela mais próxima de nós é nosso Sol, que está a 159.000.000 km de distância (STEINER, 2006, p. 1). Tomando 300.000 km/s como a velocidade da luz, temos

$$\frac{159.000.000 \text{ km}}{300.000 \text{ km/s}} = 530 \text{ s} = 8 \text{ min e } 50 \text{ s}$$

Isto é, o Sol está a quase 9 minutos-luz de distância de nós. A unidade de distância minuto-luz equivale à distância percorrida pela luz em um minuto, ou seja, a luz que o sol emite leva 9 minutos para chegar até nós.

Apesar disso, a partir do conceito de “zona habitável” - *região em torno de uma estrela, não muito perto, nem muito longe da mesma, de modo que a temperatura não seja muito elevada, nem muito baixa a ponto de impossibilitar a vida como conhecemos* (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 107) - concluímos que já estamos o mais próximo que podemos estar do Sol. Nesta perspectiva, chegar à estrela mais próxima seria chegar ao sistema estelar, Alpha Centauri, composto por 3 estrelas unidas gravitacionalmente: Alpha Centauri A, Alpha Centauri B e Próxima Centauri. Em 2016, foi descoberto o planeta Próxima Centauri B orbitando a última das três. Trata-se do planeta potencialmente habitável mais próximo de nós.

Próxima Centauri está a aproximadamente 39.735.067.984.839 (39 trilhões) de quilômetros de distância do Sol (CHANG, 2016, p. 1).

A unidade mais adequada para expressar esta distância é o ano-luz. Assim, temos por aproximação:

$$\frac{40.000.000.000.000 \text{ km}}{300.000 \text{ km/s}} = 133.333.333,3 \text{ s} = 4,2 \text{ anos}$$

Ou seja, Próxima Centauri está a aproximadamente 4,2 anos-luz do Sol.

Para ir além na apuração deste dado, podemos estimar o tempo que levaríamos até lá a partir do nosso maior feito em termos de velocidade – a sonda Juno com seus 250.000 km/h, a despeito de ser um veículo não tripulado:

$$\frac{40.000.000.000.000 \text{ km}}{250.000 \text{ km/h}} = 160.000.000 \text{ h} = 18.264,8 \text{ anos}$$

Isto é, levaríamos mais de 18 mil anos para chegar à Próxima Centauri, a estrela mais próxima do nosso Sol.

3.2 Geometria Plana, Espacial e Analítica

Separados por tipos de geometria, os principais tópicos matemáticos desta seção são:

Geometria Plana - Ângulos; Triângulos; Semelhança de Triângulos; Circunferência e Círculo; Ângulos na Circunferência; Razões Trigonométricas; e Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Geometria Analítica - Cônica: Elipse; e Distância entre Dois Pontos no Plano Cartesiano.

Geometria Espacial – Cubo; Cone; e Esfera.

A Geometria mesmo sem o rigor da formalização atual possibilitou uma série de descobertas no âmbito da Astronomia. Séculos antes de Cristo, a humanidade já sabia os tamanhos do Sol e da Lua, além das distâncias dos mesmos à Terra. Estas conquistas derivam de ideias simples e também geniais, que servem de motivação para o estudo de Geometria. (ÁVILA, 1982, p. 39)

Na primeira edição da Revista do Professor de Matemática, em seu artigo *A Geometria e as Distâncias Astronômicas na Grécia Antiga*, o autor Geraldo Ávila diz que, justamente pelo seu apelo motivacional para os assuntos acima citados, essas questões devem ser divulgadas, já que ainda não aparecem nos livros de ensino fundamental e médio.

Além das descobertas antigas, no âmbito da Geometria há aqui também recortes de perspectivas astronômicas atuais.

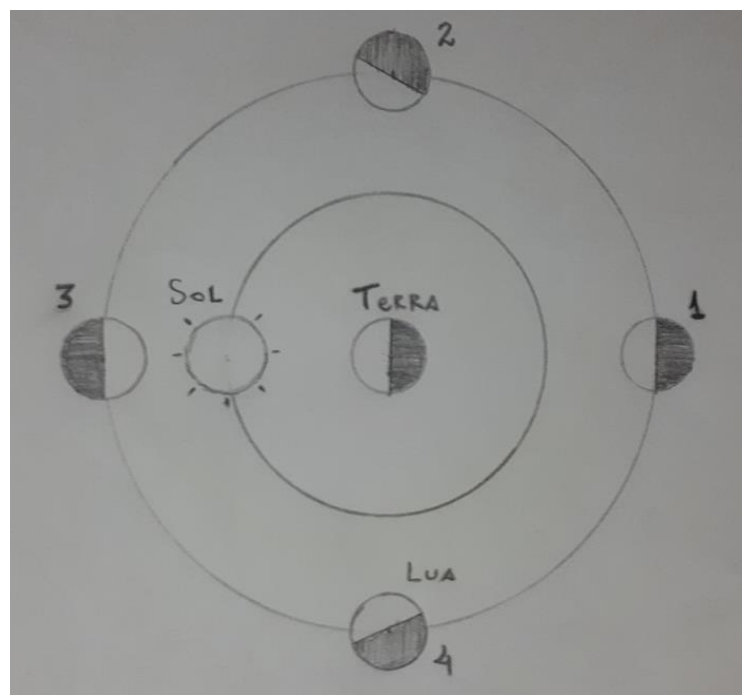
3.2.1 Aristarco, a Terra, a Lua e o Sol

O sábio grego Aristarco de Samos (séc III a.E.C.), da escola de Alexandria, foi o primeiro a propor que a Terra se movia em torno do Sol, precedendo Copérnico em quase 2.000 anos. Além disso, com inteligência e poucas ferramentas, conseguiu fazer estimativas sobre distâncias relativas e tamanhos relativos, envolvendo Terra, Lua e Sol.

3.2.1.1 Sol ou Lua: qual o mais distante? As estimativas de Aristarco

Chegar à conclusão de que o Sol está mais distante da Terra do que a Lua, exigiu dos antigos uma observação atenta às várias fases da Lua. Na hipótese de que ela estivesse mais longe de nós do que o Sol, chegou-se à conclusão de que ela estaria sempre iluminada quando vista da Terra (vide Figura 13). É o que mostra uma análise de suas várias posições, com relação ao Sol e à Terra.

Figura 13 - As fases da Lua se ela estivesse mais longe da Terra do que o Sol



Fonte: O autor, 2019

Nesta perspectiva, não haveria lua nova, além de haver duas posições da Lua, em 1 e em 3, onde ela seria lua cheia. No caso da posição 3, a lua cheia se daria ao meio dia, algo que na realidade não acontece.

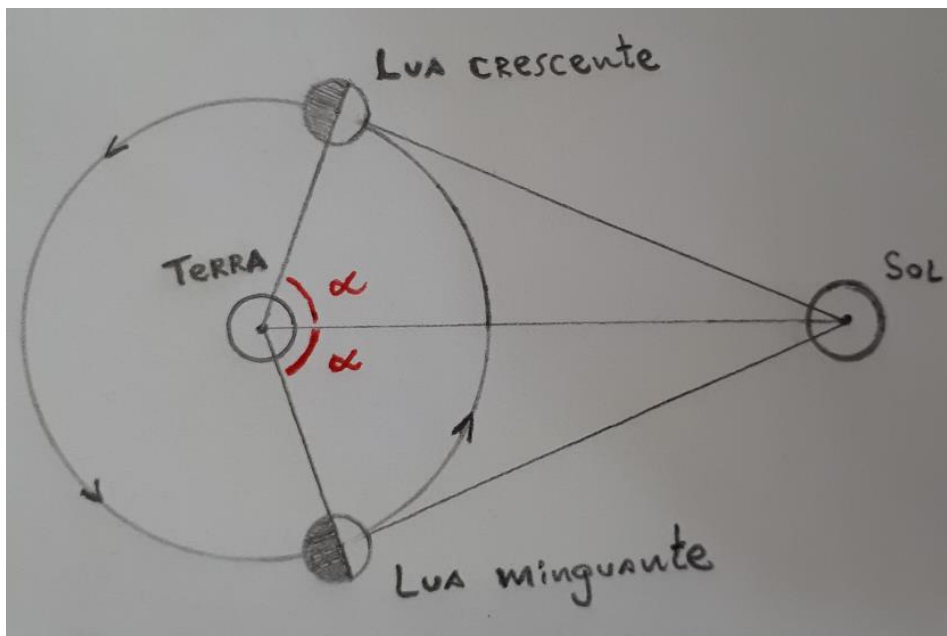
A hipótese de que a Lua estivesse mais próxima de nós do que o Sol, foi a única a encontrar compatibilidade com as várias fases da mesma, inclusive, com a ocorrência de luas novas. A ocorrência de eclipses do Sol, que só seriam possíveis com a Lua mais próxima da Terra do que o Sol, ajudou a ratificar esta hipótese. (ÁVILA, 1982, p. 39)

3.2.1.2 Quão mais distante o Sol está de nós, com relação à Lua?

A estimativa do quão mais distante, requer um maior aprofundamento no estudo dos ciclos lunares. A ideia utilizada para responder a este questionamento foi inusitada e pôs Aristarco em destaque.

Visto da Terra, o disco lunar apresenta dois momentos em que está metade escuro e metade iluminado. São estas as duas posições da Lua em sua órbita chamadas “quarto crescente” e “quarto minguante”. Nestes dois momentos, o triângulo Terra-Lua-Sol é retângulo, com ângulo reto no vértice ocupado pela Lua. Nesta configuração (ilustrada na Figura 14), onde T , L e S são respectivamente as posições da Terra, da Lua e do Sol), um observador na Terra pode notar que o ângulo $\alpha = \widehat{LTS}$ é muito próximo de 90° , o que representa um forte indício de que o Sol está efetivamente muito mais longe da Terra do que a Lua. No nascer e no pôr do Sol, com a Lua em quarto crescente ou quarto minguante (meia-lua), este fato pode ser melhor observado. (ÁVILA, 1982, p. 40)

Figura 14 - A Terra, o Sol e a Lua orbitando nosso planeta em dois momentos: quarto crescente e quarto minguante



Fonte: O autor, 2019

Em sua ideia, Aristarco teria medido esse ângulo $\alpha = \widehat{LTS}$ e encontrado a medida de 87° , aproximadamente. Logo, o ângulo $\beta = \widehat{LST}$ teria 3° . A partir deste ponto, bastava construir

um triângulo retângulo com essas medidas angulares e verificar o valor da razão TS/TL (isto é, a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua, respectivamente) já que é a mesma para todos os triângulos retângulos semelhantes a ele. Aristarco estimou que esta razão estaria entre 18 e 20 e, conseqüentemente, que a distância da Terra ao Sol era vinte vezes a distância da Terra à Lua. (ÁVILA, 1982, p. 40)

Hoje, sabemos com segurança que a distância entre a Terra e o Sol é cerca de quatrocentas vezes a distância entre a Terra e a Lua. Bem maior do que as vinte vezes estimadas por Aristarco. No entanto, não se trata de um famoso experimento que deu errado.

Aristarco estimou 87° para um ângulo que na verdade mede $89,86^\circ$. Intervalo onde a função trigonométrica cosseno varia muito mais do que entre 60° e 70° , por exemplo.

Valores da função cosseno nos ângulos citados:

$$\cos 87^\circ = 0,052$$

$$\cos 89,86^\circ = 0,002$$

$$\cos 60^\circ = 0,5$$

$$\cos 70^\circ = 0,342$$

Para se ter uma ideia do impacto causado por essas diferenças que podem não parecer grandes, podemos utilizar um dos triângulos retângulos da Figura 14 e, com o intuito de facilitar contas, supor hipoteticamente a distância da Terra à Lua (TL) como sendo 400.000km (na realidade, esta distância é de cerca de 384.400km). (HEWITT, 2002) Nesta perspectiva, teríamos para a distância da Terra ao Sol (TS):

$$\cos \alpha = \frac{400.000 \text{ km}}{TS} \rightarrow TS = \frac{400.000 \text{ km}}{\cos \alpha}$$

$$\alpha = 87^\circ \rightarrow TS = \frac{400.000 \text{ km}}{0,052} \approx 7.692.308 \text{ km}$$

$$\alpha = 89,86^\circ \rightarrow TS = \frac{400.000 \text{ km}}{0,002} \approx 200.000.000 \text{ km}$$

uma diferença de

$$200.000.000 \text{ km} - 7.692.308 \text{ km} = 192.307.692 \text{ km}$$

para uma variação de

$$89,86^\circ - 87^\circ = 2,86^\circ.$$

Por outro lado, teríamos:

$$\alpha = 60^\circ \rightarrow \text{TS} = \frac{400.000 \text{ km}}{0,5} \approx 800.000 \text{ km}$$

$$\alpha = 70^\circ \rightarrow \text{TS} = \frac{400.000 \text{ km}}{0,342} \approx 1.169.591 \text{ km}$$

uma diferença de

$$1.169.591 \text{ km} - 800.000 \text{ km} = 369.591 \text{ km}$$

para uma variação de

$$70^\circ - 60^\circ = 10^\circ.$$

Para chegar ao ângulo α , Aristarco teria percebido que seria mais fácil calculá-lo do que medí-lo diretamente. Ele teria analisado duas variáveis: o tempo gasto pela Lua para dar uma volta completa em torno da Terra e o tempo de passagem de minguante a crescente. Com estes dois dados, uma proporção simples resolveria o problema.

A partir dos 29,5 dias do ciclo lunar, Aristarco teria observado que a passagem de minguante para crescente durava 14,25 dias, um dia a menos do que a passagem de crescente a minguante. Partindo da hipótese de que a velocidade da Lua em sua órbita é uniforme, os ângulos descritos pelo seu raio seriam proporcionais aos tempos gastos nos deslocamentos correspondentes. Assim, ainda sobre a Figura 14, podemos escrever:

$$\frac{360^\circ}{29,5} = \frac{2\alpha}{14,25}$$

de onde pode-se inferir $\alpha = 86,95^\circ$, que implica

$$\frac{TS}{TL} = \sec \alpha = \sec 86,95^\circ \cong 18,8$$

logo, $TS = 18,8 TL$. (ÁVILA, 1982, p. 41)

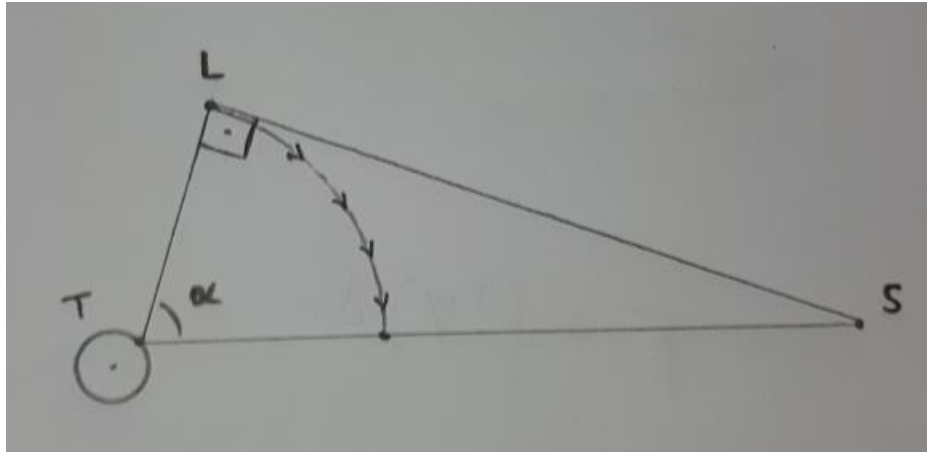
Atualmente, a distância entre a Terra e a Lua pode ser calculada com grande precisão, através da medição do tempo levado para a luz viajar entre aparelhos emissores montados na Terra e refletores posicionados na Lua por missões não tripuladas do passado. O fato de, na realidade hoje comprovável, termos TS medindo cerca de quatrocentas vezes a medida TL , que implica $\alpha = 89,86^\circ$, indica que os raios do Sol que dirigem-se à Terra e à Lua são praticamente paralelos.

Cabe ressaltar que o erro incorrido por Aristarco não está no modelo geométrico adotado por ele, mas sim na medição do ângulo α . Parte do seu erro também parece residir em peculiaridades do movimento da Lua naquela época, já que sua órbita, assim como a dos planetas, tem irregularidades estando periodicamente mais próxima e mais distante da Terra, fato que Aristarco desconhecia. Daí a diferença que teria notado entre o tempo gasto pela Lua numa volta completa em torno da Terra e o tempo para passar de minguante a crescente. (HEWITT, 2002)

3.2.1.3 Terra e Sol numa perspectiva de tamanho

Da Terra, quando observamos diretamente as imagens do Sol e da Lua no céu, ambos parecem ter o mesmo tamanho. De fato, embora tenham na prática tamanhos diferentes, as diferenças entre suas distâncias fazem com que ambos sejam vistos no céu como se fossem esferas de mesmo raio, isto é, ambos têm o mesmo “tamanho angular”. Aristarco percebeu esta coincidência e pôde confirmar através do eclipse total do Sol (um evento que se repete em ciclos) quando o disco lunar coincide com o solar, encobrindo-o completamente (Figura 15).

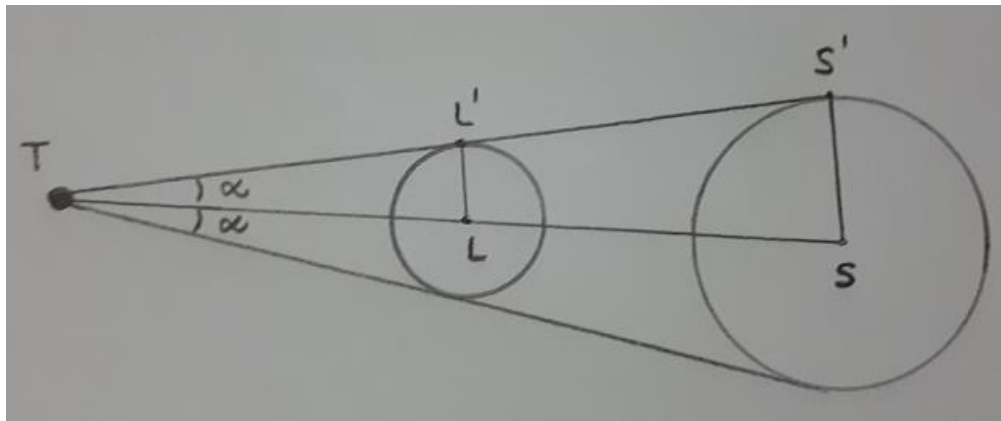
Figura 15 - Terra em T, Sol em S e Lua em L. Percurso da Lua até o ponto do eclipse



Fonte: O autor, 2019

Geometricamente, o ângulo 2α , sob o qual o observador terrestre vê o Sol (vide Figura 16), é o mesmo sob o qual o mesmo observa a Lua.

Figura 16 - Eclipse total do Sol – Triângulos TLL' e TSS' semelhantes



Fonte: O autor, 2019

Aristarco estimou o ângulo da figura em 2° , quando na verdade o mesmo mede em torno de $0,5^\circ$, somente (ÁVILA, 1982, p. 41). Apesar do erro, o resultado obtido através da semelhança dos triângulos TLL' e TSS' segue válida, uma vez que, mais uma vez, seu erro está na medição e não no modelo geométrico adotado.

Valendo-se da razão $\frac{TS}{TL} \cong 20$, obtida anteriormente por Aristarco, é possível desenvolver o cenário em que a Lua está precisamente entre a Terra e o Sol (Figura 16) como se segue:

$$\frac{TS}{TL} = \frac{SS'}{LL'}, \text{ que implica } SS' \cong 20LL'$$

ou seja, o raio do Sol seria em torno de vinte vezes o raio da Lua.

Utilizando a nomenclatura $D_S = TS$ para a distância da Terra ao Sol; $D_L = TL$ para a distância da Terra à Lua; $R_S = SS'$ para o raio do Sol; e $R_L = LL'$ o raio da Lua, podemos escrever:

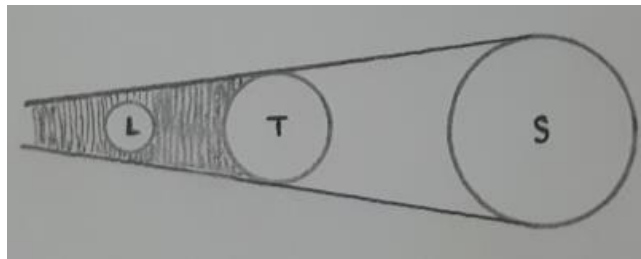
$$\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L} = a \cong \tan \alpha, \quad \frac{D_S}{D_L} = b,$$

onde as estimativas de Aristarco indicam $\alpha = 1^\circ$ e $b \cong 20$, quando na realidade tem-se $\alpha \cong 0,25^\circ$ e $b \cong 400$. (ÁVILA, 1982, p. 41)

3.2.1.4 Estimativas com o raio da Terra como parâmetro

Aristarco também estimou distâncias e tamanhos do Sol e da Lua, utilizando o raio da Terra, ainda desconhecido, como parâmetro. Para tanto, analisou o que ocorre durante um eclipse da Lua, quando esta atravessa o cone de sombra formado pelo bloqueio da luz solar pela Terra (Figura 17).

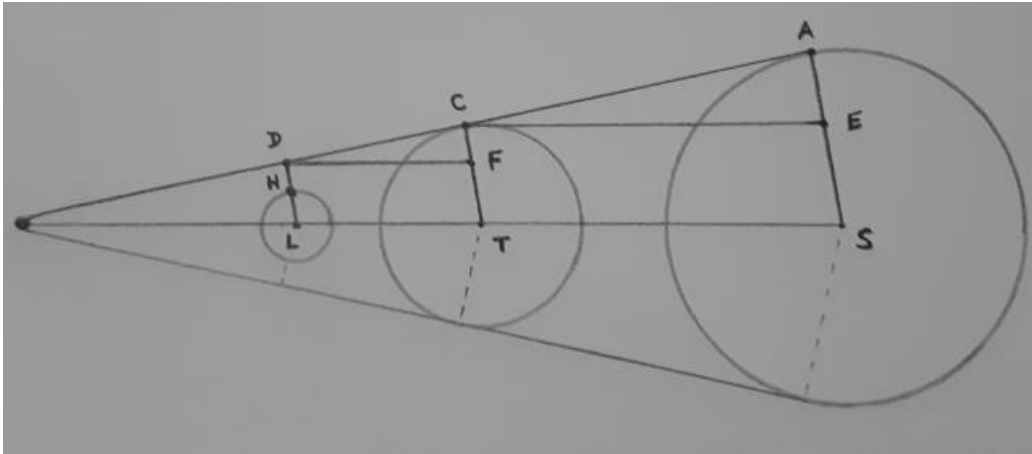
Figura 17 - Cone de sombra formado pelo bloqueio da luz solar pela Terra



Fonte: O autor, 2019

Através do tempo gasto pela Lua na travessia da região escura do cone de sombra formado, ele chegou à conclusão de que o diâmetro do cone na altura da Lua era $8/3$ do diâmetro da Lua.

Figura 18 - Terra entre a Lua e o Sol – Triângulos DFC e CEA semelhantes



Fonte: O autor, 2019

Na Figura 18, L , T e S são os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente; $LH = R_L$, $TC = R_T$ e $SA = R_S$ são os respectivos raios; LD é o raio do cone de sombra da altura da Lua, de forma que $LD = 8R_L/3$.

Como os triângulos DFC e CEA são semelhantes, pode-se escrever:

$$\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE} \quad (3.1)$$

No entanto,

$$CF = TC - TF = R_T - LD = R_T - 8R_L/3;$$

$$DF = D_L;$$

$$AE = AS - SE = R_S - R_T; \text{ e}$$

$$CE = D_S.$$

Substituindo estes valores em (3.1), tem-se

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S} \quad (3.2)$$

como no recorte anterior, chegou-se aos resultados

$$\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L} = a \cong \tan \alpha, \quad \frac{D_S}{D_L} = b$$

e pode-se escrever sobre eles

$$D_S = bD_L;$$

$$R_S = aD_S = abD_L; e$$

$$R_L = aD_L$$

para, então, ao substituí-los em (3.2), obtendo-se

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}aD_L}{D_L} = \frac{abD_L - R_T}{bD_L}$$

donde segue-se que

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)R_T = \left(\frac{8}{3} + 1\right)aD_L,$$

isto é,

$$D_L = \frac{3(b+1)R_T}{11ab} \quad (3.3)$$

Do valor obtido em (3.3), pode-se concluir

$$D_S = bD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11a};$$

$$R_S = abD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11}; e$$

$$R_L = aD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11b}.$$

Substituindo $a = \operatorname{tg} 1^\circ \cong 0,017$ e $b \cong 20$, pode-se obter as quatro grandezas, D_L , D_S , R_S e R_L , em termos de R_T , raio da Terra, de acordo com os dados de Aristarco:

$$D_L \cong 16,8 R_T, D_S \cong 337 R_T,$$

$$R_S \cong 5,7 R_T, R_L \cong 0,29 R_T.$$

Se fizermos as substituições com valores mais corretos, isto é, $a = \operatorname{tg} (1/4)^\circ \cong 0,0044$ e $b = 400$, os resultados passam a estar bem próximos dos valores modernos para as medidas:

$$D_L \cong 62 R_T, D_S \cong 24855 R_T,$$

$$R_S \cong 109 R_T, R_L \cong 0,27 R_T.$$

Segundo Ávila, todos os cálculos referentes às estimativas de Aristarco, constam em seu único livro publicado, intitulado *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*.

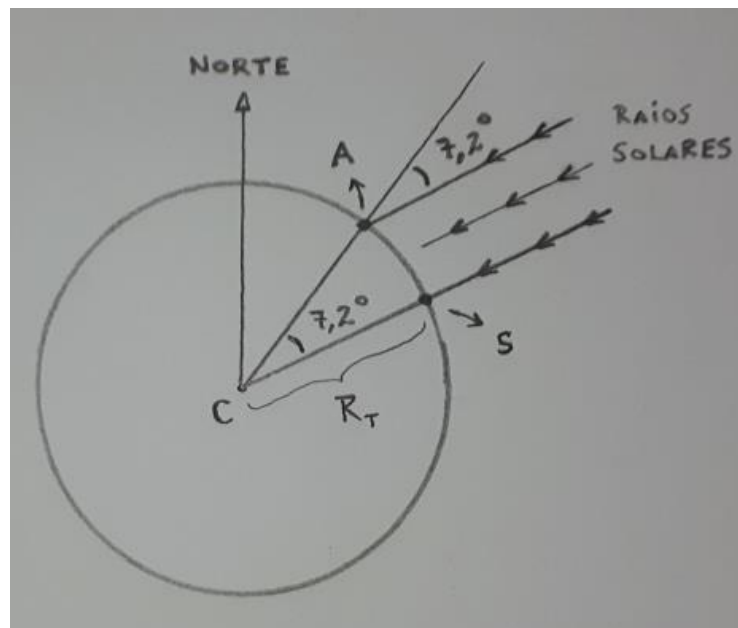
3.2.2 Calculando o raio da Terra – A ideia de Eratóstenes

A partir dos resultados obtidos no recorte anterior, obter a medida do raio da Terra significa obter em consequência os tamanhos dos raios do Sol e da Lua e distâncias que estes se encontram da Terra.

O cálculo do raio da Terra mais relevante da antiguidade foi feito por Eratóstenes (276 - 196 a.E.C.), também de Alexandria. Era conhecido o fato de que quando o Sol estava mais ao norte (solstício de inverno no hemisfério Sul), seus raios incidiam na vertical, ao meio dia, na cidade de Syene, atual cidade de Assuão, no Egito, uma vez que o reflexo do Sol podia ser visto no fundo dos poços de maior profundidade da localidade. Simultaneamente, em Alexandria, os raios solares incidiam de forma inclinada, sob um ângulo aproximado de $7,2^\circ$ com a vertical (vide Figura 19), isto é, $1/50$ de uma circunferência completa. (ÁVILA, 1982, p. 45) Como os raios solares são praticamente paralelos, valendo-se do conhecimento geométrico das retas paralelas cortadas por uma transversal, pode-se concluir que o ângulo central \widehat{ACS} também medirá $7,2^\circ$. Da proporcionalidade entre arcos e ângulos, tem-se

$$\frac{2\pi R_T}{AS} = \frac{360^\circ}{7,2^\circ}$$

Figura 19 – Circunferência da Terra - centro da Terra em C, Alexandria em A e Siene em S



Fonte: O autor, 2019

onde R_T é o raio da Terra. A medida do arco AS , distância de Alexandria a Syene, era conhecida e igual a 5000 estádios, unidade de medida utilizada na época. O valor preciso do estádio usado por Eratóstenes é desconhecido até hoje. Uma das interpretações dá conta de aproximadamente 185 metros. (ÁVILA, 1982) Com isso, tornou-se possível um cálculo estimado da circunferência terrestre:

$$2\pi R_T = 5000 \times \frac{360^\circ}{7,2^\circ} \cong 250000 \text{ estádios} \cong \frac{250000 \times 185}{1000} \text{ km} = 46250 \text{ km}$$

portanto,

$$R_T \cong \frac{46250 \text{ km}}{6,28} = 7365 \text{ km.}$$

O valor mais atual, no equador, é de 6378 km, isto é, 987 km de diferença, somente. Em termos percentuais, um erro de aproximadamente 13%.

Para a obtenção uma estimativa dos raios da Lua e do Sol (R_L e R_S) e suas distâncias até a Terra (D_L e D_S), baseado nos resultados encontrados por Aristarco, basta substituir R_T nos resultados encontrados no recorte anterior, como se segue:

$$R_L \cong 0,27 R_T = 0,27 \times 7365 \text{ km} = 1988,55 \text{ km}$$

$$R_S \cong 109 R_T = 109 \times 7365 \text{ km} = 802.785 \text{ km}$$

$$D_L \cong 62 R_T = 62 \times 7365 \text{ km} = 456.630 \text{ km}$$

$$D_S \cong 24855 R_T = 24855 \times 7365 \text{ km} = 183.057.075 \text{ km.}$$

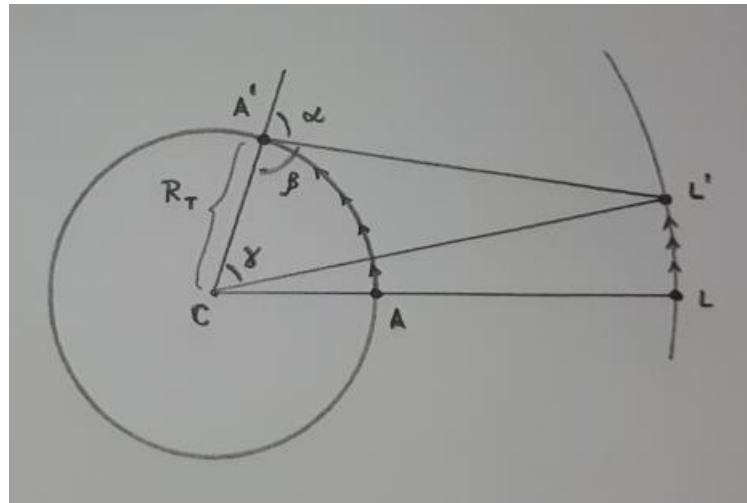
3.2.3 Distância Terra-Lua – O engenhoso método de Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu (90-168), grego também de Alexandria, produziu durante o apogeu do Império Romano, a principal obra astronômica da antiguidade – a “Composição Matemática”, mais famosa por seu nome árabe: *Almagesto*. O livro apresenta o catálogo de estrelas “fixas” mais completo do mundo antigo, contando com 1022 itens. Apresentava também registros abundantes de eclipses e outras observações astronômicas, além de um modelo matemático sofisticado do cosmos. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 33)

A exemplo de outros sábios da antiguidade que em torno de grandes descobertas, possuíam também grandes enganos, Ptolomeu imaginava que a Terra fosse o centro do universo, estática e que todos os outros corpos celestes, planetas e estrelas, a orbitavam.

Para o método proposto por Ptolomeu, imagine um observador no ponto A que aviste, verticalmente, a Lua em L , como representado na Figura 20.

Figura 20 – No mesmo tempo t , a Lua vai de L para L' e o observador vai de A para A'



Fonte: O autor, 2019

Como os movimentos relativos da Terra e da Lua eram conhecidos, sabia-se que com o passar de certo intervalo de tempo t , o observador passaria de A para A' e a Lua, no mesmo tempo t , de L para L' . Também baseado nos movimentos conhecidos de rotação da Terra e do

giro da Lua em torno da mesma, sabia-se, respectivamente, as medidas dos ângulos $\widehat{ACA'}$ e $\widehat{ACL'}$.

Para a obtenção do ângulo $\widehat{ACA'}$, bastava utilizar o tempo T_T , que a Terra leva para dar uma volta em torno de si mesma e resolver a proporção:

$$\frac{T_T}{t} = \frac{360^\circ}{\widehat{ACA'}}.$$

Analogamente, para a obtenção do ângulo $\widehat{ACL'}$, bastava utilizar o tempo T_L , que a Lua levava para dar uma volta em torno da Terra e resolver a proporção:

$$\frac{T_L}{t} = \frac{360^\circ}{\widehat{ACL'}}.$$

Mas se ambos eram conhecidos, o ângulo $\gamma = \widehat{ACA'} - \widehat{ACL'}$, também era. O ângulo α foi medido diretamente, o que possibilitou a obtenção do seu suplementar β .

Com estes dados, o triângulo $CA'L'$ pôde ser completamente determinado em função de $CA' = R_T$, raio da Terra.

Hoje, é possível valer-se da “Lei dos Senos”, para o cálculo de CL' , distância do centro da Terra à Lua, no cenário proposto por Eratóstenes.

Nomeando por θ o terceiro ângulo do triângulo $CA'L'$

$$\theta = 180^\circ - \beta - \gamma,$$

podemos escrever, pela *Lei dos Senos*:

$$\frac{CL'}{\text{sen } \beta} = \frac{R_T}{\text{sen } \theta}$$

que implica

$$CL' = \frac{R_T \times \text{sen } \beta}{\text{sen } \theta}.$$

3.2.4 As leis de Kepler

Johannes Kepler acreditava que leis matemáticas simples fossem a base de todos os fenômenos naturais e que o Sol seria a causa física de todos os movimentos celestes. Quando estudou o movimento do planeta Marte, descobriu que sua órbita era elíptica e definiu três leis

que foram generalizadas para os demais planetas do Sistema Solar. Por questões didáticas, muitos livros optam por expor as órbitas dos planetas muito mais achatadas do que são na verdade. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 40)

3.2.4.1 A Primeira Lei de Kepler

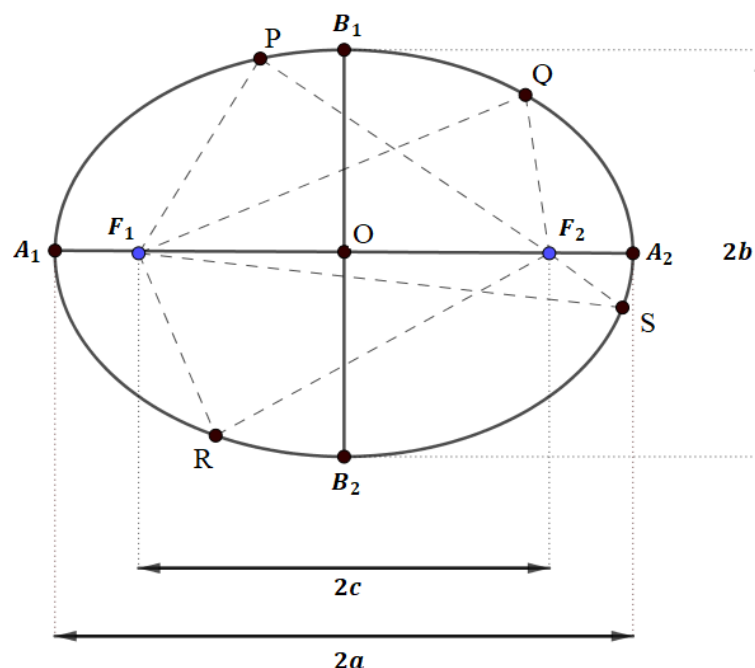
A lei das órbitas de Kepler tem o seguinte enunciado: *Todos os planetas se movem em órbitas elípticas tendo o Sol em um dos focos.*

Enquanto lugar geométrico, a elipse pode ser definida como se segue:

Definição. Sejam F_1 e F_2 , dois pontos distintos pertencentes a um plano e seja $2c$ a distância entre eles. Elipse é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 (focos) é constante e igual a $2a$ ($a > c$).

A curva obtida a partir desta definição está representada na Figura 21, onde estão destacados seu eixo focal $A_1A_2 = 2a$ (também chamado eixo maior) e seu eixo não focal $B_1B_2 = 2b$ (eixo menor). Os eixos são perpendiculares e se intersectam em O, ponto médio entre os focos e centro da elipse.

Figura 21: Elipse – pontos P, Q, R e S, pertencentes à mesma, têm soma de distâncias aos focos constante igual a $2a$



Algebricamente, uma elipse pode ser definida como uma curva do plano cartesiano cuja equação é da forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

satisfazendo

$$B^2 - 4AC < 0$$

onde todos os coeficientes são números reais. Nesta perspectiva, a circunferência pode ser vista como um caso particular de elipse, em que $A = C \neq 0$ e $B = 0$.

Quando os eixos da elipse são paralelos aos eixos coordenados, sua equação assume a forma reduzida:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

onde (x_0, y_0) é seu centro, a é semieixo maior e b é semieixo menor.

Dada uma elipse qualquer de eixo maior $2a$, eixo menor $2b$ e distância focal $2c$, com a, b e c reais positivos, sua excentricidade e fica definida pela razão entre sua distância focal e seu eixo maior, isto é:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

como para toda elipse vale a relação notável

$$a^2 = b^2 + c^2$$

podemos dividir ambos os membros da igualdade acima por a^2 , obtendo uma outra expressão para e :

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + e^2$$

que implica

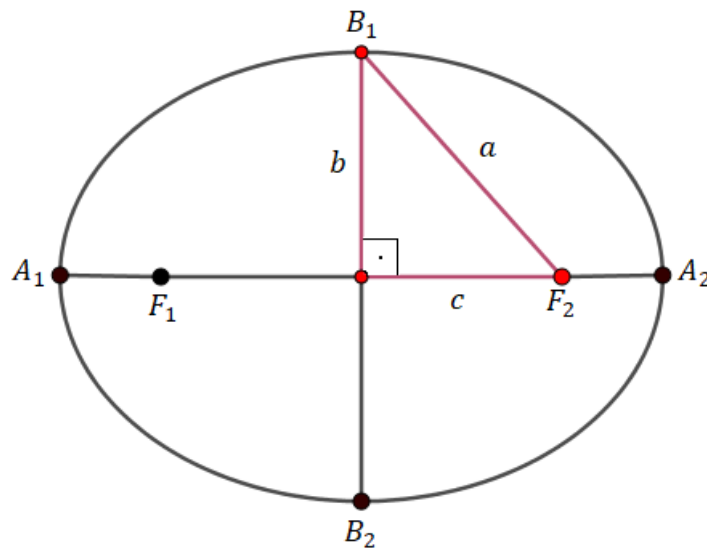
$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Nesta nova expressão para e , é fácil notar que o valor mínimo da excentricidade é zero ($e = 0$), o que se obtém quando $b = a$, isto é, quando temos um círculo. Ainda da nova expressão, é possível observar que o valor máximo para o qual a excentricidade tende é um ($e \approx 1$), que se obtém justamente quando b tende a zero, isto é, a elipse mais achatada possível.

Conclui-se portanto: $0 \leq e < 1$.

Os principais elementos da elipse e a relação fundamental pitagórica estão destacados na Figura 22.

Figura 22 - Elipse de centro O ; focos F_1 e F_2 ; eixo maior $A_1A_2 = 2a$; eixo menor $B_1B_2 = 2b$; e distância focal $F_1F_2 = 2c$



Fonte: O autor, 2019

A precisão das medições de Tycho Brahe e o bom uso das mesmas por Kepler (que substituiu corretamente os círculos das órbitas por elipses, ao confiar nos dados de Tycho) ficam realçados quando observadas as excentricidades exatas das órbitas dos oito planetas do Sistema Solar, inclusive do planeta anão Plutão, percebendo-se o quanto aproximam-se de círculos (vide Figura 23).

Figura 23 - Excentricidades dos 8 planetas e Plutão. Elipses das órbitas em proporção e com o mesmo eixo maior. Em cada caso, o ponto central é o centro da elipse e o ponto da direita é a posição de um dos focos, o qual é ocupado pelo Sol

Planeta	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão
Excentricidade	0,2	0,007	0,02	0,09	0,05	0,06	0,05	0,009	0,25

Fonte: (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 41)

A órbita de Plutão é tão excêntrica, que nela, o Sol fica bastante distante do centro, fazendo com que por períodos de tempo o planeta anão esteja mais próximo do Sol do que Netuno.

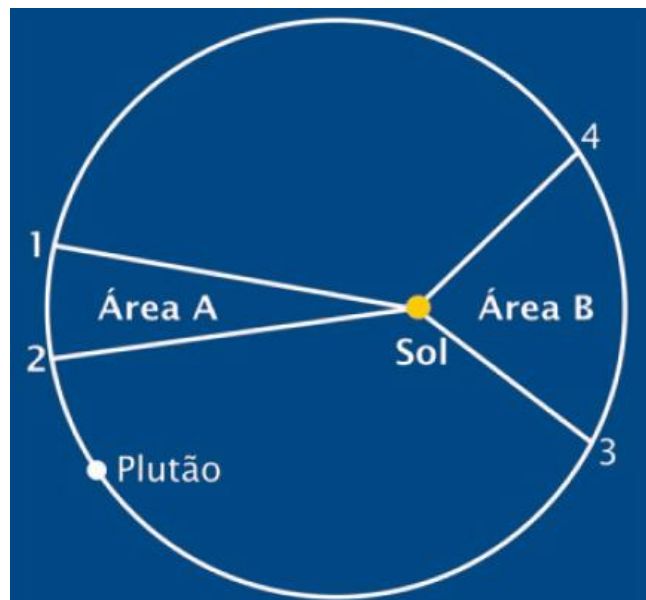
3.2.4.2 A Segunda Lei de Kepler

Em 1609, Johannes Kepler descobriu que os planetas não orbitam o Sol com velocidade constante, mas sim acelerando e desacelerando. Descobriu também que seu ritmo estava relacionado matematicamente com sua órbita. Segundo ele, esta lei poderia ser coloquialmente enunciada da seguinte forma: *a linha Sol-planeta “varre” áreas iguais na elipse em iguais intervalos de tempo.*

Esta regra se aplica a qualquer objeto, planeta ou não, que orbite o Sol. Sendo assim, torna-se interessante o uso da órbita de Plutão como exemplo ilustrativo, uma vez que esta é bem mais excêntrica do que a dos oito planetas, tornando a visualização mais fácil.

Plutão leva quase 250 anos terrestres para completar uma órbita em torno do Sol. Supondo que ele tenha levado 50 anos para deslocar-se do ponto 1 ao 2; e que tenha levado também 50 anos para deslocar-se do ponto 3 ao 4 (Figura 24). Então, pela Segunda Lei de Kepler, a área *A* é igual à área *B*. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 42)

Figura 24 - A órbita de Plutão ilustrando a segunda lei de Kepler



Fonte: (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 42)

Uma consequência imediata da segunda lei é que o planeta (ou qualquer astro que orbite o Sol) vai deslocar-se mais rapidamente quando estiver mais próximo do Sol e mais lentamente quando estiver mais longe.

3.2.4.3 A Terceira Lei de Kepler

A última grande contribuição de Kepler veio em 1619, com sua terceira lei. Desta vez, o alemão determinou que *a razão entre o quadrado do tempo (T) que um planeta leva para completar uma órbita em torno do Sol e o cubo da distância média (D) do planeta ao Sol é uma constante*, isto é:

$$\frac{T^2}{D^3} = k$$

O valor de k depende das unidades usadas para o tempo T e a distância D .

Mesmo que possa não parecer muito importante, a terceira lei de Kepler foi uma coisa que possibilitaram o inglês Isaac Newton desenvolver a teoria da gravitação universal. Além disso, como a equação é simples e o raciocínio em torno da mesma é intuitivo, o seu uso em sala de aula fica favorecido. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 43)

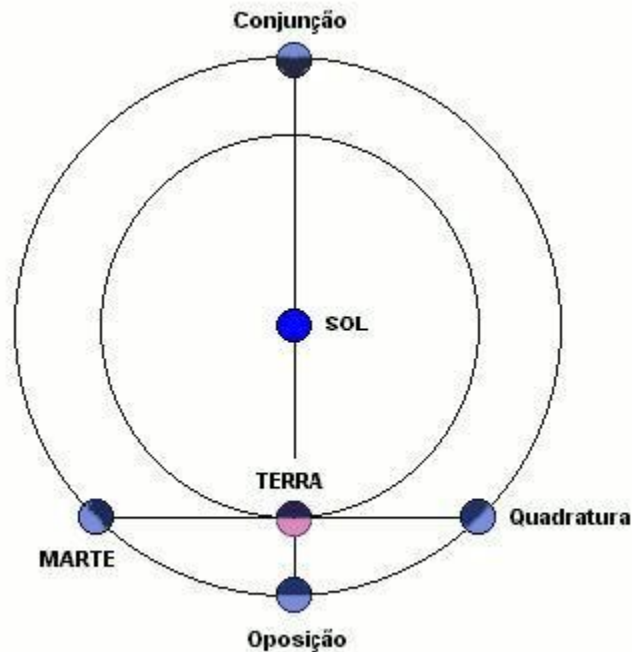
Para além de uma descoberta superada, esta lei é uma aproximação bastante eficiente das equações newtonianas. Para efeito de aproximação, os astrônomos a aplicam até hoje. Em especial quando estudam órbitas de estrelas binárias (dois astros girando em torno de um centro de gravidade comum). (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 43)

3.2.5 Galileu e as Observações de Marte, Vênus e Mercúrio

Desde Ptolomeu sabia-se que Marte tornava-se mais brilhante de tempos em tempos (quando estava em *oposição*, isto é, quando a Terra passava entre ele e o Sol). Porém, a olho nu, não havia muito o que se concluir daí. Quando Galileu Galilei observou Marte com o telescópio, percebeu que não se tratava de um ponto brilhante, mas sim de um *disco*. E que este disco não era somente mais brilhante durante a oposição, mas também muito maior do que na época da *conjunção*, isto é, quando, por alinhamento, dois astros (o Sol e Marte, por exemplo) aparecem perto um do outro no céu (vide Figura 25).

Sabemos hoje que, no Sistema Solar, se um planeta está mais distante do Sol do que a Terra (planetas externos – Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno) as configurações particulares de posicionamento possíveis para ele são diferentes de quando o planeta está mais próximo do Sol (planetas internos – Vênus e Mercúrio).

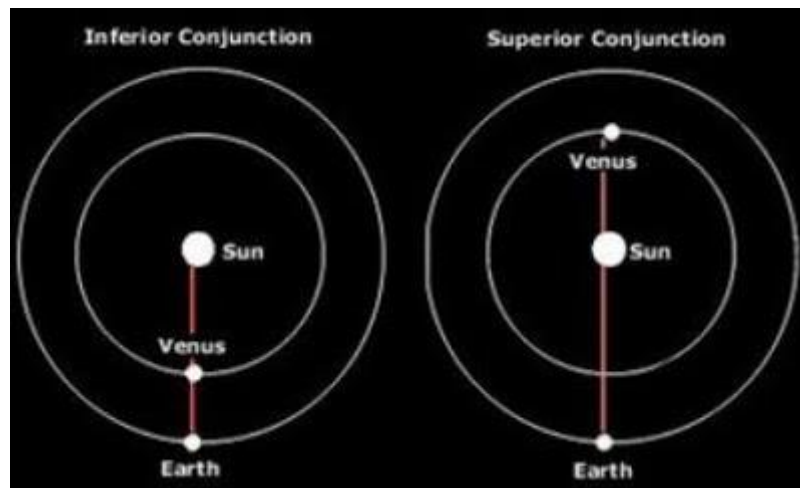
Figura 25 - Marte, um planeta externo, em posições de *conjunção superior*, *oposição* e *quadratura*. Quando se tem, respectivamente, 0, 180 e 90 graus de *elongação* – ângulo de separação entre as direções do Sol e do planeta



Fonte: <http://www.astro.iag.usp.br/~picazzio/2003/marte/fenomeno.html>

No caso dos planetas internos, existe, além da *conjunção superior*, a configuração *conjunção inferior*, quando posicionados entre a Terra e o Sol. Nesta configuração, a face iluminada do planeta fica de costas para a Terra, fazendo com que este brilhe bem menos no nosso céu (vide Figura 26).

Figura 26 - Conjunções Inferior e Superior de Vênus, um planeta interno



Fonte: <http://astrothonaspectosastrologicos.blogspot.com/p/aspectos-entre-o-sol-natal-e-venus.html>

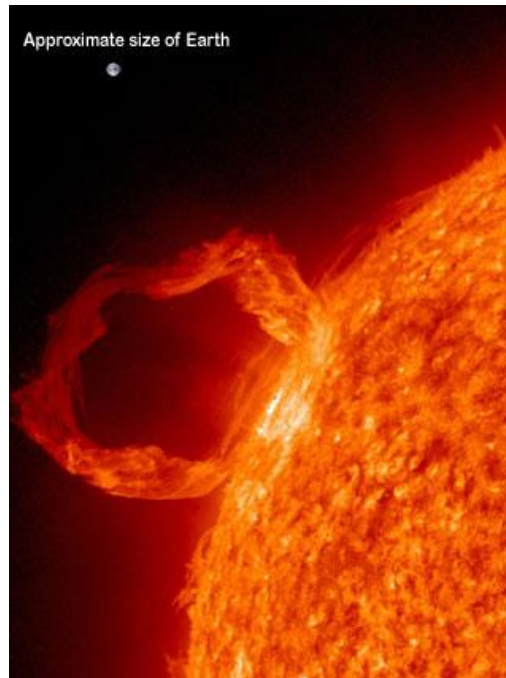
Algo similar ao ocorrido com Marte repetiu-se quando Galileu observou Vênus. Ele percebeu que o planeta ficava seis vezes maior na época de conjunção superior (Terra – Sol – Vênus) do que na época de conjunção inferior (Terra – Vênus – Sol). Apesar de estar bem mais próximo da Terra no segundo momento, a face voltada para a Terra recebe bem pouca luz, fazendo com que o planeta, que não emite luz própria, brilhe bem menos no nosso céu. Com Mercúrio, ocorreu o mesmo fenômeno, porém em escala diferente. No caso de Marte, planeta externo, a diferença de tamanho se deu por conta do posicionamento mais próximo da Terra durante a oposição, pois, para um planeta externo, tanto a conjunção quanto a oposição fazem com que a face voltada para a Terra fique completamente iluminada pelo Sol. (PENNEREIRO, 2009, p. 179)

Estas ocorrências eram evidentemente previstas pela teoria heliocêntrica, tanto para Copérnico quanto para Kepler. Eram conjecturas que deveriam confirmar-se caso o heliocentrismo estivesse certo, mas que ainda não haviam sido comprovadas por observação, o que foi feito por Galileu.

3.2.6 O Sol: um gigante relativamente pequeno

Uma das comparações mais chocantes da Astronomia, diz respeito a tamanho (volume). Em comparação com a Terra, o Sol é gigantesco. Enquanto a Terra tem um raio de 6.371 km, o raio do Sol tem aproximadamente 110 vezes essa medida (HEWITT, 2002, p. 32), isto é, quase 700.000 km de raio (Figura 27).

Figura 27 - Parte do Sol ejetando massa coronal e a Terra



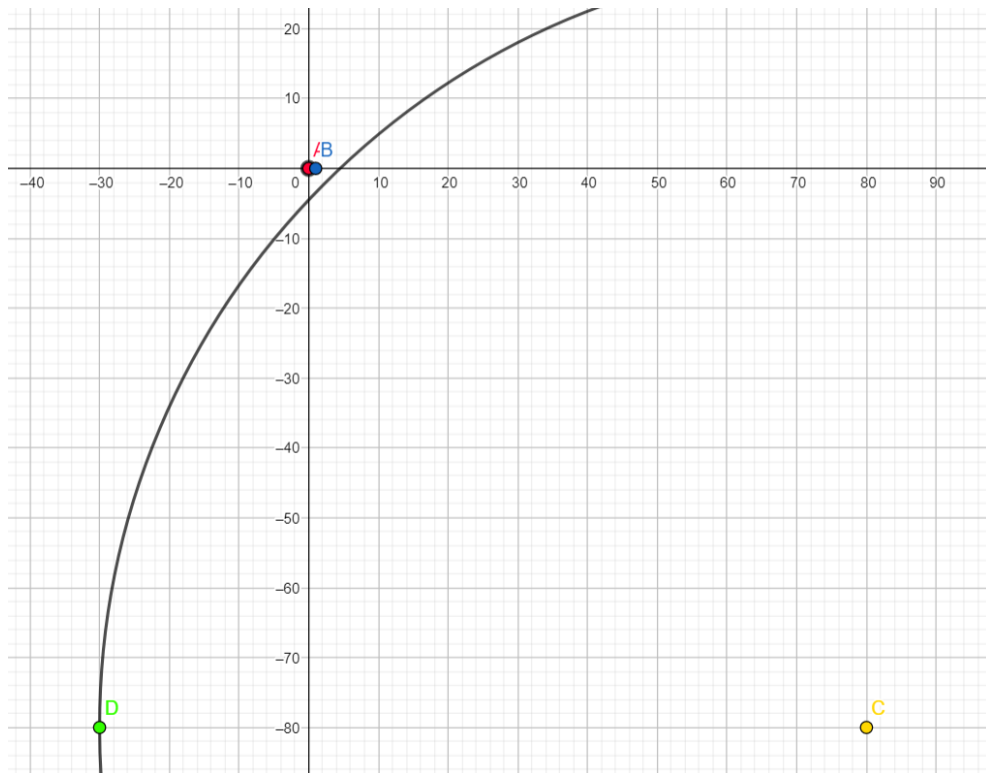
Fonte: <http://www.astronoo.com/images/soleil/proeminence-solaire-anneau-de-feu.jpg>

Para enriquecer a comparação, poderíamos usar a linguagem percentual, mas a intuição vinda daí não seria muito diferente da razão já obtida de 1 para 110. Como não falamos de distâncias no vazio, mas de objetos físicos, seria interessante nos valermos da geometria para uma comparação visual, construindo dois segmentos na razão dada, seguido de dois círculos (modelo aproximado tanto para a Terra quanto para o Sol), em que os raios são os segmentos dados.

O aplicativo Geogebra enriqueceria a abordagem deste recorte, uma vez que o estudante poderia recriar analiticamente a situação ilustrada na figura 27, como se segue:

No aplicativo, utilizando a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus pontos*, marca-se, por exemplo, o ponto $A(0,0)$ para ser centro e $B(1,0)$ como um dos pontos do primeiro círculo, representando a Terra com raio unitário; para o segundo círculo, representando o Sol por um círculo de raio 110, marca-se, por exemplo, o ponto $C(80,-80)$ para ser centro e $D(-30,-80)$ como um dos seus pontos. O resultado obtido está representado na Figura 28.

Figura 28 - Aplicativo GeoGebra - Círculos com raios na razão de 1 para 110, representando Terra e Sol, respectivamente.



Fonte: O autor, 2018

Os pontos A , B , C e D sugeridos, servem como exemplo para que o professor exponha prontamente a atividade para os alunos. No entanto, o exercício de buscar livremente quatro pontos no plano cartesiano, a fim de que se obtenha dois círculos sem interseção, com raios na razão de 1 para 110 e que os mesmos, a Terra completamente e o Sol parcialmente, caibam na mesma tela pode enriquecer o entendimento do aluno sobre o funcionamento do plano cartesiano (podendo o professor utilizar o resultado sobre *distância entre dois pontos no plano cartesiano*), sobre circunferências enquanto *lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto dado* e sobre *razões*. Assim, a ideia é que o aluno busque seus próprios pontos preferencialmente diferentes dos utilizados no exemplo. É possível realizar a atividade utilizando somente o *Teorema de Pitágoras*, caso a turma ainda não esteja estudando *Geometria Analítica*.

Calculando a distância entre dois pontos pela Geometria Analítica:

Dados dois pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$, a distância entre A e B é dada por

$$D_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

Desta forma, as distâncias entre os pontos A e B ; e C e D , fornecidos como exemplo, seriam dadas por:

$$D_{AB} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 0)^2} = 1$$

$$D_{CD} = \sqrt{(80 - (-30))^2 + ((-80) - (-80))^2} = \sqrt{110^2} = 110$$

Calculando a distância entre dois pontos pela Geometria Plana:

O Teorema de Pitágoras é o tópico da Geometria Plana que fundamenta o cálculo da distância entre dois pontos do plano cartesiano pela Geometria Analítica. Desta forma, o professor pode expor o plano cartesiano com dois pontos genéricos A e B e mostrar que o cálculo da distância entre eles pode ser separados em três casos complementares:

Caso 1 - A e B estão alinhados horizontalmente:

Neste caso, é trivial mostrar que a distância entre os pontos será dada por $D_{AB} = |x_A - x_B|$.

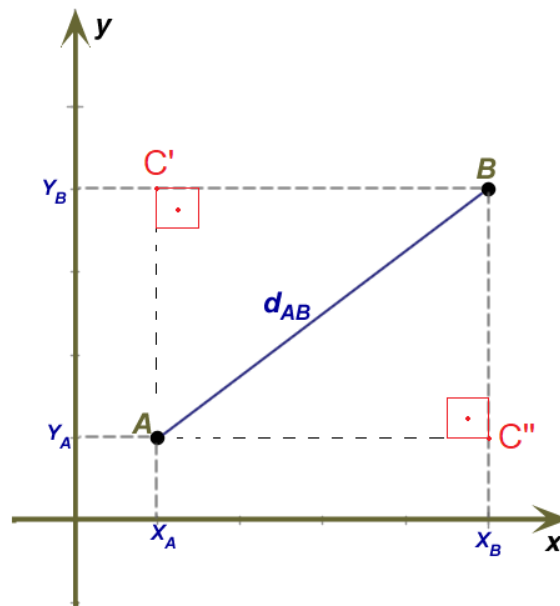
Caso 2 - A e B estão alinhados verticalmente:

Análogo ao caso 1, a distância será dada por $D_{AB} = |y_A - y_B|$

Caso 3 - A e B desalinhados horizontal e verticalmente:

Neste caso, independente da disposição em que A e B estejam, o segmento determinado por eles será a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujo terceiro ponto C poderá ser obtido em um de dois lugares do plano diferentes: em $C'(x_A, y_B)$ ou em $C''(x_B, y_A)$, como mostra a Figura 29:

Figura 29 - Distância entre os pontos A e B como hipotenusa de dois triângulos retângulos possíveis: ABC' ou ABC''



Fonte: O autor, 2019

Para concluir, basta que o professor mostre que os catetos podem ser obtidos pelas relações $|x_A - x_B|$ e $|y_A - y_B|$ e que, portanto, pelo Teorema de Pitágoras, pode-se escrever:

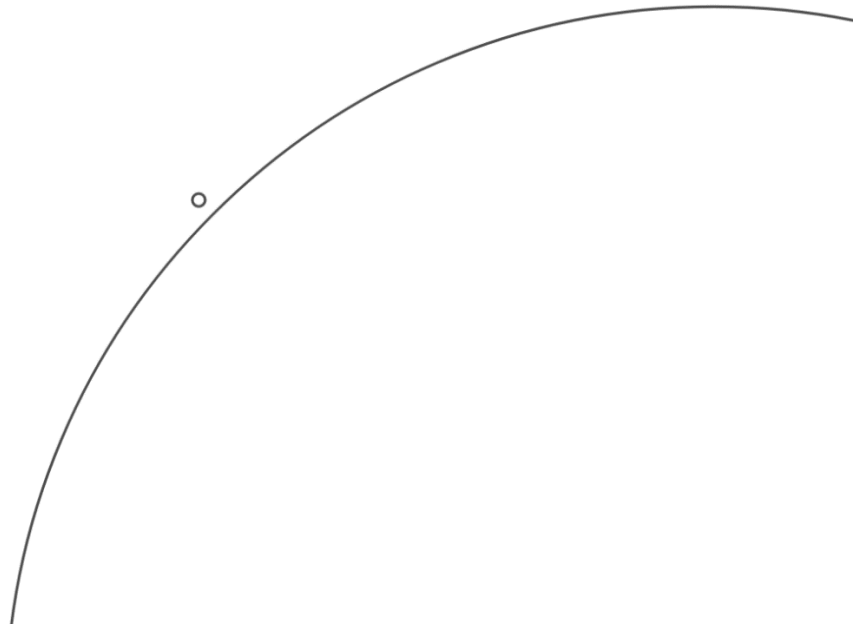
$$(D_{AB})^2 = |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2$$

que implica

$$D_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Ao fim da atividade, para uma melhor visualização, o professor pode propor que o aluno clique com o *botão direito* do mouse em qualquer área do plano cartesiano no aplicativo e desmarque as opções *Exibir Eixos* e *Exibir Malha*; a seguir, clique com o *botão direito* sobre cada um dos quatro pontos seleccionados, selecione a opção *Configurações* e desmarque as opções *Exibir Objeto* e *Exibir Rótulo*. O resultado final obtido está representado na Figura 30.

Figura 30 - Aplicativo Geogebra – Terra e Sol fora de proporção de distância, representados por circunferências de raios na razão de 1 para 110, respectivamente, sem eixos, malha e exibição de objetos



Fonte: O autor, 2018

Apesar de visualmente enorme, nosso Sol é uma estrela muito pequena quando comparado a outras estrelas conhecidas (FRÓES, 2014, p. 3). A supergigante vermelha UY Scuti, encontrada no centro da Via Láctea, é considerada atualmente a maior estrela já descoberta (embora não a mais massiva, fato que faz com que a mesma não possa ser considerada uma hipergigante) com um raio de aproximadamente 1.190.000.000 km, com margem de erro de 134.400.000 km para mais ou para menos (SCUDDER, 2015, p. 1), margem esta que sozinha já contempla o raio do Sol quase duas vezes. Esta estimativa com margem de erro tão grande dá-se devido à distância que estamos de onde UY Scuti se encontra. A razão entre os raios do Sol e de UY Scuti é dada por:

$$\frac{700.000 \text{ km}}{1.190.000.000 \text{ km}} = \frac{1}{1700}$$

Aqui a escala é bastante desproporcional dificultando a atividade de construção geométrica que foi proposta para melhorar a intuição sobre a razão entre o raio da Terra e o raio do Sol. Embora a construção ainda possa ser feita, neste caso, é sugerida apenas a exibição de uma imagem pronta (Figura 31):

Figura 31 - Representação - Parte de UY Scuti e o Sol, representado por um píxel



Fonte: <https://images.theconversation.com/files/71332/original/image-20150206-28618-18cuf3x.png?ixlib=rb-1.1.0&q=45&auto=format&w=754&fit=clip>

Se UY Scuti estivesse localizada no lugar do Sol, sua *fotosfera*, isto é, sua superfície visível, alcançaria Júpiter, o 5º planeta a partir do Sol.

3.2.7 O homem e a Terra – uma perspectiva de espaço

Para se chegar a uma boa noção da presença humana no planeta Terra, não ao longo de sua existência, mas uma análise espacial instantânea em seu momento atual de maior população, pode-se construir a razão na qual estão V_H - *volume total da humanidade* e V_T - *volume do planeta Terra* através de uma estimativa aproximada.

A pesquisa e reunião dos dados-chave (raio médio da Terra, densidade do corpo humano, massa corporal do humano médio e população mundial atual) para este recorte pode ser dada como tarefa de casa, na aula anterior à execução da tarefa em si. É recomendável o uso de calculadora.

O primeiro dado a ser construído é o volume V_T do planeta Terra, que pode ser obtido a partir do seu raio médio $R_T = 6.371$ km pela relação do *volume da esfera*:

$$V_T = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times (6.371 \text{ km})^3 = 1.083.206.916.845,7 \text{ km}^3$$

valor para o qual utilizaremos a aproximação

$$V_T = 1,083 \times 10^{12} \text{ km}^3$$

que convertendo para m^3 , torna-se

$$V_T = 1,083 \times 10^{21} \text{ m}^3 .$$

O dado seguinte, é equivalente ao *volume de todos os corpos humanos reunidos*. Ao se falar em volume do corpo humano, os estudantes podem ter dúvida sobre como chegar a este dado. De forma prática, como corpo irregular que é, pode-se utilizar o Princípio de Arquimedes, mergulhando-o completamente num tanque com água. A partir daí, calcula-se a variação do volume antes e depois do corpo ser mergulhado. Este método obviamente não satisfaz logisticamente esta proposta pedagógica, embora sua menção possa ser interessante. Também não serviria para o fim que se pretende este recorte, cujo objetivo é a obtenção de um dado que se possa generalizar para toda a humanidade.

Uma alternativa interessante seria apresentar o dado conhecido *densidade do corpo humano*, cujo valor é dado por 985 kg/m^3 , e, em seguida, valer-se da razão “*densidade = $\frac{\text{massa}}{\text{volume}}$* ,” para determinar o volume através da *massa*, um dado mais usual sobre o corpo humano (geralmente chamada de “peso”).

Em 2005, a revista *BMC Public Health* publicou um estudo que utilizou dados da *ONU* (Organização das Nações Unidas) e da *OMS* (Organização Mundial de Saúde) para estimar a *massa total da espécie humana adulta*, chegando ao valor aproximado de 287 milhões de toneladas. A partir deste dado, chegou-se também à massa do humano adulto médio, estimada em 62 kg. (WALPOLE *et al.*, 2012, p.1)

Como crianças ficaram fora do estudo, vamos generalizar 62 kg para a massa corporal das mesmas, sem prejuízo do objetivo do recorte, uma vez que se quer mostrar o quão pequena é a participação humana na superfície da Terra, em comparação com esta, numa perspectiva de espaço. Seja qual for o erro cometido por esta generalização, será possível afirmar que o erro foi por excesso, isto é, que a presença humana será na prática ainda menor do que concluiremos.

Multiplicando a massa de 62 kg pela população mundial aproximada, 7,2 bilhões de pessoas (REILLY, 2014, p. 1), tem-se:

$$62 \text{ kg} \times 7.200.000.000 = 446.400.000.000 \text{ kg}$$

Ou seja, uma aproximação para a *massa total humana* é 446,4 milhões de toneladas. Para obter-se o volume correspondente podemos utilizar a relação:

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

onde substituindo os valores conhecidos, tem-se:

$$985 \text{ kg/m}^3 = \frac{446.400.000.000 \text{ kg}}{V_H}$$

portanto,

$$V_H = \frac{446.400.000.000 \text{ kg}}{985 \text{ kg/m}^3} = 453.197.969,5 \text{ m}^3$$

valor para o qual será utilizada a aproximação $V_H = 4,5 \times 10^8 \text{ m}^3$.

Prosseguindo para a construção da razão entre o volume humano e o volume planetário, tem-se:

$$\frac{V_H}{V_T} = \frac{4,5 \times 10^8 \text{ m}^3}{1,083 \times 10^{21} \text{ m}^3} = 4,15 \times 10^{-13} = \frac{415}{10^{15}} \cong \frac{1}{2.410.000.000.000}$$

Ou seja, em termos de quantidade, toda a humanidade precisaria ser multiplicada por quase 2 trilhões e meio para se chegar ao volume que tem nosso planeta.

Para uma análise além da desproporção entre essas grandezas, pode-se trabalhar a hipótese em que o volume humano assume um formato esférico. A razão entre os raios R_T da Terra e R_H da “esfera humana” pode ser obtida valendo-se do raciocínio sobre razão de semelhança entre sólidos semelhantes, como se segue:

$$\frac{V_H}{V_P} = \left(\frac{R_H}{R_T}\right)^3 = \frac{1}{2.410.000.000.000}$$

logo,

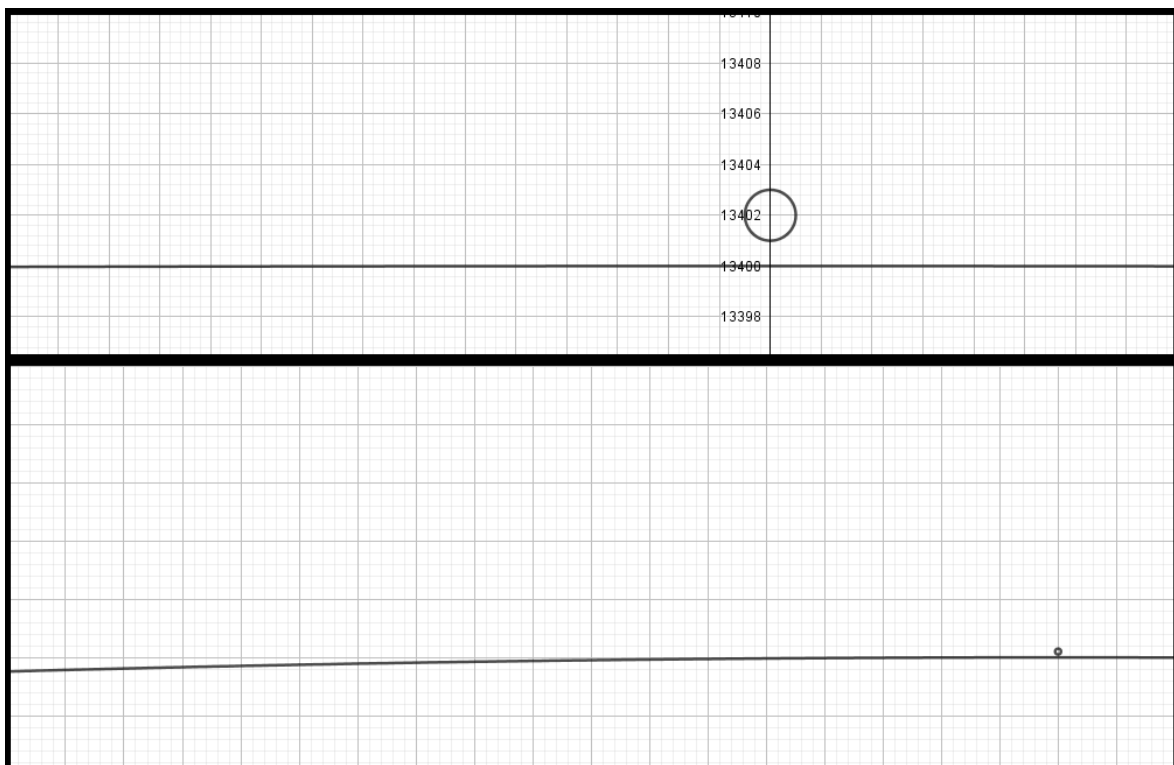
$$\frac{R_H}{R_T} = \sqrt[3]{\frac{1}{2.410.000.000.000}} \cong \frac{1}{13.400}$$

Uma impressão em duas dimensões deste cenário pode ser obtida através do aplicativo Geogebra, fazendo exatamente a mesma construção descrita no recorte 3.1.3, com diferença somente sobre a razão entre os raios. Uma sugestão é compor dois círculos para representar as esferas: um com centro em $(0, 0)$ passando pelo ponto $(0, 13400)$; e outro com centro em $(0, 13402)$ passando pelo ponto $(0, 13401)$.

Por conta da disparidade entre os tamanhos (ainda maior do que era entre o Sol e a maior estrela já descoberta, UY Scuti), a visualização via aplicativo fica comprometida de modo que, ao ampliar a visualização da esfera humana, a curvatura da esfera terrestre vai tornando-se imperceptível. A curvatura da esfera terrestre vai discretamente fazendo-se notar à medida que a esfera humana vai diminuindo, a ponto de tornar-se quase um pixel (vide Figura 32).

Mesmo com a visualização comprometida, a percepção do estudante sobre os efeitos da redução e aumento de escala de visualização (zoom) no aplicativo são interessantes, uma vez que o motivo pelo qual dificilmente notamos a curvatura do planeta no mundo real se deve principalmente à disparidade entre nosso tamanho e o tamanho do planeta, assim como no aplicativo.

Figura 32 - Esfera terrestre (maior) e esfera humana, representadas por círculos com raios na razão 1/13.400, obtidos no aplicativo Geogebra, com diferentes escalas de visualização. Segunda imagem, sem visualização de eixos coordenados



Numa outra abordagem, pode-se analisar quanto o volume humano encontrado representaria em formato cúbico:

a aresta seria a , satisfazendo:

$$a^3 = 453.197.969,5 \text{ m}^3$$

que implicaria

$$a = \sqrt[3]{453.197.969,5 \text{ m}^3}$$

cujo valor aproximado seria

$$a \cong 758 \text{ m} .$$

Isto é, se o volume de toda a humanidade assumisse um aspecto cúbico, seria 70 metros mais baixo do que o atual prédio mais alto do mundo, Burj Khalifa (Figura 33), que fica em Dubai e mede 828 m (REILLY, 2014, p. 1).

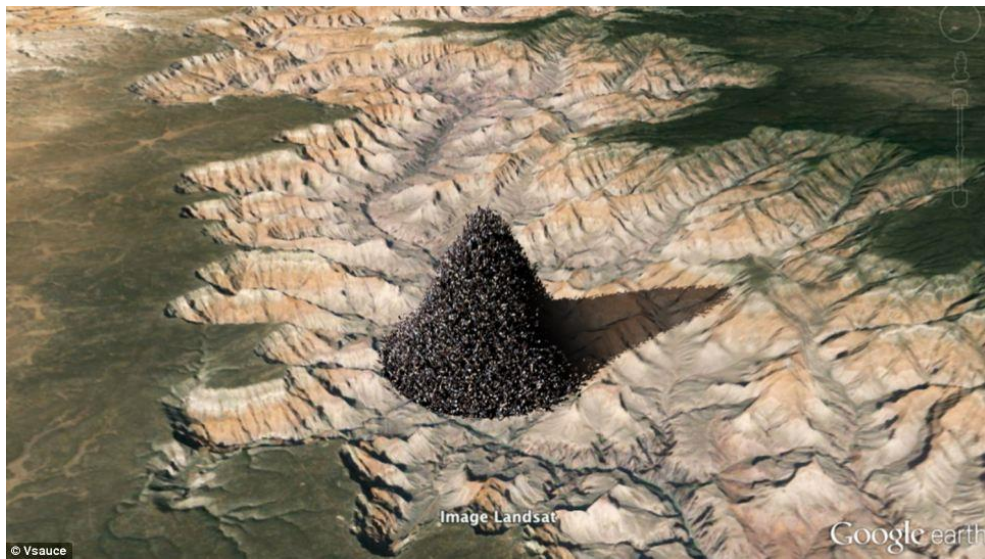
Figura 33 - Burj Khalifa, o prédio mais alto do mundo, em Dubai



Fonte: <http://www.otis.com/pt/br/projetos/estudos-de-casos/burj-khalifa/>

No ano de 2014, foi divulgada no jornal inglês *Daily Mail* uma imagem que contribuiu para a inspiração deste recorte. Numa linha de raciocínio similar à utilizada aqui, foi estimado como toda a humanidade ficaria acomodada numa área do *Grand Canyon*, no Arizona, Estados Unidos, uma área de elevação média igual a 2.134 metros. O experimento teve origem num canal do YouTube especializado em ciências chamado VSauce, que utilizou imagens de satélite para construir o que seria a humanidade num volume aproximadamente cônico ocupando a região (vide Figura 34). (REILLY, 2014, p. 1)

Figura 34 - Estimativa de Michael Stevens do canal VSauce no YouTube do que seriam 7,2 bilhões de pessoas empilhadas no Grand Canyon.



Fonte: <https://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-2617559/Fascinating-image-depicts-look-like-7-2-billion-population-dumped-Grand-Canyon.html>

O canal estimou ainda que mesmo toda a humanidade que viveu ao longo da história (dado estimado em 106 bilhões de pessoas) seria capaz de produzir somente 15 pilhas iguais à da fotografia ao longo do Grand Canyon. Quantidade insuficiente para preenchê-lo.

3.3 Análise de Dados

Os principais tópicos matemáticos desta seção são: Teoria dos Conjuntos; Probabilidade; Probabilidade Condicional; Limites; Teorema do Macaco Infinito; Espaço de Probabilidade; Independência de Eventos; Lema de Borel-Cantelli.

3.3.1 Possibilidade de vida fora da Terra – a Equação de Drake

“Só duas possibilidades existem: ou estamos sozinhos no Universo ou não estamos. Ambas são igualmente assustadoras.” (ARTHUR C. CLARKE) (NOGUEIRA, 2014, p. 49)

Mesmo depois de, com bastante sucesso, mapearmos o que chamamos hoje de “universo observável”, pensar a possibilidade de vida extraterrestre ainda remete a conjecturas subjetivas e enormes incertezas. No entanto, como se comprova neste mesmo trabalho, algumas estimativas que por séculos foram consideradas excessivamente informais e rudimentares, mais tarde mostraram margens de erro ínfimas ou serviram de base para teorias posteriores mais consistentes.

“*O mundo da realidade tem seus limites, o mundo da imaginação é infinito.*”

(ROUSSEAU, 1852, p. 431)

O questionamento sobre vida extraterrestre tem grande apelo emocional e é possivelmente um dos mais recorrentes questionamentos feitos por estudantes quando o professor propõe a Astronomia como tema para a aula. Tal recorrência deriva de ser esta uma das primeiras grandes dúvidas humanas, que, em direção ao passado, estende-se até o início da reflexão filosófica, estando presente nas obras de Demócrito (460 - 370 a.E.C.), Aristóteles (384 - 322 a.E.C.), Epicuro (341 - 271 a.E.C.), Lucrecio (99 – 55 a.E.C), Santo Agostinho (354 - 430) e pensadores posteriores. Curiosamente, Aristóteles negava completamente a possibilidade de vida extraterrestre. Ideia que concordava com sua visão cosmológica, na qual o universo estava dividido em um mundo sublunar, sujeito ao devir e transformações; e um mundo supralunar, celeste, de natureza imutável e incorruptível. Na contramão, Epicuro, em sua *Carta a Heródoto*, foi precursor ao propor não só um universo com infinitos mundos mas também que poderia haver outros mundos habitados além da Terra. (FRIAÇA, 2010, p. 95)

Mais de um milênio mais tarde, em 1961, no rádio observatório de *Green Bank*, na Virginia Ocidental, Estados Unidos, acontecia a primeira conferência SETI (*Search for Extraterrestrial Intelligence*), com o objetivo de abrir um diálogo científico em direção à busca por vida extraterrestre. Na ocasião, o então jovem rádio astrônomo Frank Drake escreveu no quadro-negro do salão de conferência a equação que até hoje leva seu nome. Estavam presentes na ocasião o também jovem Carl Sagan, o bioquímico Melvin Calvin, que ganharia dias depois o prêmio Nobel de Química por seu trabalho sobre a fotossíntese, entre outros. (FRIAÇA, 2010, p. 99)

A *Equação de Drake* é um modelo probabilístico que busca estimar N , o número de civilizações extraterrestres ativas na Via Láctea, capazes de comunicação interestelar.

$$N = R^* \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c \times L$$

Os fatores do segundo membro da igualdade acima representam:

- R^* é a taxa anual de formação de estrelas em nossa galáxia;
- f_p é a razão entre as estrelas que têm planetas em sua órbita e o total de estrelas na Via Láctea;
- n_e é a razão entre o número de planetas habitáveis e a quantidade de sistemas estelares com planetas em nossa galáxia;
- f_l é a razão entre os planetas habitáveis que efetivamente desenvolvem vida e o total de planetas habitáveis presentes na Via Láctea;
- f_i é a razão entre os planetas com vida que desenvolvem vida inteligente e o total de planetas com vida presentes na nossa galáxia;
- f_c é a razão entre os planetas com vida inteligente que têm o desejo e os meios necessários à comunicação interestelar por rádio e o total de planetas com vida inteligente na Via Láctea;
- L é o tempo médio de vida de uma civilização em comunicação.

A equação traz um bom exemplo de dispositivo matemático preenchido com elementos interdisciplinares em busca de uma resposta de amplo interesse humano. Evoca, no mínimo, estimativas da Astronomia, da Biologia, da Geografia e da Sociologia tendo sempre a Matemática como ferramenta. (NOGUEIRA, 2014, p. 50)

No entanto, a amplitude do resultado estimado para N parece ser justamente a razão da imprecisão da Equação de Drake. Dependendo do pessimismo ou otimismo do estimador, o resultado pode ser bem menor do que um ou milhões.

Debates em torno de cada fator

Na ocasião do anúncio por Drake, não sabíamos ainda de muitas coisas que sabemos hoje. O termo R^* , por exemplo, era o único que já permitia uma estimativa razoavelmente segura, bastando para tal estimativa dividir o total estimado de estrelas na Via Láctea pela idade estimada da galáxia. Ainda assim, o grupo foi conservador e, restringindo-se somente a estrelas similares ao Sol, estimou R^* em 1 estrela por ano.

O termo f_p , por exemplo, era bem mais controverso uma vez que, à época, nenhum planeta fora do sistema solar havia sido descoberto ainda. Os presentes concordavam que somente estrelas solitárias, que são minoria na galáxia, como o nosso Sol, teriam estabilidade suficiente para ter sistemas planetários (conclusão que foi contestada por pesquisas recentes). Optando mais uma vez por serem conservadores, deixaram a estimativa entre 20% e 50%, isto é, f_p ficou entre 0,2 e 0,5.

Para n_e , o grupo sequer sabia por onde começar e não houve consenso. Pelo exemplo da Terra, poderiam ter inferido que um planeta por sistema teria condições para a vida, mas acharam melhor assumir que este número poderia chegar a cinco. Assim, n_e ficou entre 1 e 5.

A partir daí, à medida que foram deixando o campo da Astronomia para entrar na Biologia, a precisão de estimativas foi diminuindo e, curiosamente, os estimadores foram posicionando-se de modo mais consensual (possivelmente pela dificuldade de se refutar argumentos postos sobre assuntos pouco conhecidos). Como a vida na Terra é estimada em aproximadamente 4 bilhões de anos, quase coincidente com o tempo desde o qual o planeta tornou-se estável e favorável à vida biológica, eles imaginaram que, satisfeitas as condições, a vida logo aparece. A estimativa foi bastante otimista e f_i ficou em 1, o que equivale a afirmar que se a vida pode surgir, ela surge.

Para f_i , que diz respeito a vida complexa e inteligente, mantiveram o otimismo baseando-se mais uma vez na particularidade da Terra, que possui civilização tecnológica e que pode ainda ter tido pelo menos mais um grupo de espécies inteligentes, os cetáceos (sobre os quais há controversas pesquisas). Assim, imaginando que a inteligência é um destino natural da evolução biológica, estimaram f_i em 1.

O fator f_c foi um dos que causaram maiores debates entre os membros. Em suma, eles levantaram o exemplo dos chineses que desenvolveram a pólvora, a bússola, o papel e a imprensa bem antes dos europeus, e que mesmo tendo condições de navegar e colonizar o mundo, não o fizeram. Pela mesma lógica, seria impossível prever se, havendo a possibilidade, uma civilização tecnológica efetivamente decidirá enviar mensagens para as estrelas. Por conta disso, mantiveram a estimativa de f_c entre apenas 10% e 20%.

O último fator, L , também suscitou grandes discordâncias. Drake acreditava que o resultado final da equação estava inseparavelmente atrelado ao tempo de existência das civilizações envolvidas. Espécies inteligentes e longevas, mesmo que fossem raras, acabariam por se acumular na galáxia. Em contrapartida, se a autodestruição chegasse imediatamente após

atingir o estágio comunicativo, mesmo que fossem muitas, provavelmente as civilizações jamais se encontrariam.

O físico americano Philip Morrison, que trabalhou no projeto que levou à criação das primeiras bombas atômicas durante a Segunda Guerra Mundial, o Projeto Manhattan, encabeçou a corrente mais pessimista neste caso. Ele duvidava que uma civilização, ao atingir simultaneamente as possibilidades de comunicação e de autodestruição, conseguisse sobreviver ao que chamou de “adolescência tecnológica”, isto é, esta civilização se destruiria antes de se comunicar. Assim, sua estimativa para L foi de 1.000 anos.

Bem menos pessimista, Carl Sagan acreditava ser muito possível que civilizações tecnológicas alcançassem estabilidade global e prosperidade antes ou mesmo depois de ter desenvolvido armas de destruição em massa. Assim, através da exploração de recursos naturais, poderiam tornar-se (virtualmente) “imortais”, sobrevivendo em escala astronômica, por centenas de milhões a bilhões de anos. Sua estimativa para L foi de 100.000.000 anos.

Tomando os valores mais pessimistas das estimativas, temos:

$$N = 1 \times 0,2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 0,1 \times 1.000$$

que implica,

$$N = 20 \text{ civilizações comunicativas na Via Láctea.}$$

Esta quantidade é irrisória, uma vez que a tarefa seria encontrar 19 civilizações em meio a pelo menos 100 bilhões de estrelas.

Por outro lado, tomando os valores mais otimistas, temos:

$$N = 1 \times 0,5 \times 5 \times 1 \times 1 \times 0,2 \times 100.000.000$$

que implica,

$$N = 50.000.000 \text{ civilizações comunicativas na Via Láctea.}$$

Daqueles dias aos dias de hoje, nossas capacidades de investigação aumentaram e hoje existem algumas iniciativas de aprimoramento para este raciocínio. No entanto, a capacidade estimativa da Equação de Drake continua longe do ideal, tendo ainda um intervalo grande de possibilidades para N . Longe de ser algo pragmaticamente diferencial, um dos seus maiores

ganhos está na percepção da complexidade da questão. Sua amplitude de possibilidades denuncia, antes de tudo, o tamanho da nossa ignorância cósmica.

3.3.2 Existe outra versão sua no Universo?

Além do que chamamos Universo Observável, numa escala bem mais ampla do que a Via Láctea, ambiente abordado pela Equação de Drake, há uma abordagem probabilística que sugere não só a existência de vida extraterrestre, como aponta para uma possibilidade de refino na exigência grande o bastante para estimar que um dado indivíduo na Terra, teria um par idêntico seu em algum lugar do cosmos. E que se essa exigência fosse um par quase idêntico, com uma singular característica como diferença, o fato teria chance praticamente total de também estar contemplado.

O que motiva este recorte é uma ideia amplamente explorada na cultura popular, em especial no âmbito da ficção científica, mas que tem seu fundamento matemático bem menos difundido. Embora não seja difícil encontrar quem já tenha assistido em filmes, seriados de televisão ou desenhos animados alguma referência a esta ideia, a sugestão é que o professor interessado em abordar este recorte indique antes alguma das mídias que conheça aos alunos, ou mesmo as reproduza para a turma antes de apresentar o modelo matemático que o ampara.

O argumento matemático mais formal e abrangente que suporta a ideia aqui apresentada é o Lema de Borel-Cantelli, um resultado sobre sequências de eventos dentro da teoria dos Espaços de Probabilidade. O nome faz referência aos matemáticos Émile Borel (França 1871-1956) e Francesco Paolo Cantelli (Itália 1875-1966). Intuitivamente, é um lema que trata da questão de ser possível ou não que algo aconteça ao longo de infinitas tentativas e pode ser encontrado na obra *Princípios de Combinatória e Probabilidade*. (FRANCO, 2017, p. 192).

Apesar de ser o mais formal, o lema de Borel-Cantelli pode ser demasiado específico para muitos cotidianos da educação básica. Assim, o mesmo não será exposto aqui. Um desdobramento do lema que faz uso de ferramentas matemáticas menos específicas e que poderia despertar maior curiosidade é o *Teorema do Macaco Infinito*. Antes de apresentá-lo junto de sua demonstração, a sugestão é que o professor construa com os estudantes uma intuição sobre o teorema, o que pode ser feito, por exemplo, através da resolução do exercício a seguir:

Exercício: Num dado bairro muito iluminado da cidade do Rio de Janeiro, a probabilidade de que um indivíduo aviste uma estrela cadente (que trata-se na verdade de um fragmento de asteroide ou cometa que incendeia-se ao entrar com grande velocidade em nossa atmosfera) ao longo de uma noite de observação é de $\frac{1}{10}$.

Qual a probabilidade de que um indivíduo, neste mesmo bairro:

- a) aviste uma estrela cadente em **uma** noite de observação?
- b) não aviste uma estrela cadente em **uma** noite de observação?
- c) não aviste uma estrela cadente com **duas** noites de observação?
- d) não aviste uma estrela cadente com **três** noites de observação?
- e) não aviste uma estrela cadente com **dez** noites de observação?

Solução:

Como as observações por noite são *eventos independentes*, denotando por A o evento em que o indivíduo avista uma estrela cadente numa noite de observação, podemos escrever:

$$a) P(A) = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$b) P(A^c) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$c) P(A^c) \times P(A^c) = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{100} = 0,81$$

$$d) P(A^c) \times P(A^c) \times P(A^c) = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{729}{1000} = 0,729$$

$$e) \underbrace{P(A^c) \times P(A^c) \times \dots \times P(A^c)}_{10 \text{ vezes}} = \underbrace{\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \dots \times \frac{9}{10}}_{10 \text{ vezes}} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = \frac{3.486.784.401}{10.000.000.000} \cong 0,348.$$

O que se observa neste exercício é que, apesar de a probabilidade de observação numa única noite ser baixa, à medida que aumentam as noites de tentativas do indivíduo, a chance de que ele não observe uma estrela cadente diminuem. Cabe destacar que em três noites de tentativa, a chance maior ainda é de que ele não observe estrela cadente alguma, mas que ao longo de dez noites de tentativas, a chance maior já é de que ele venha a observar uma estrela cadente pelo menos uma vez.

O Teorema do Macaco Infinito (assim como o Lema de Borel-Cantelli) estuda este mesmo cenário, porém ao longo de infinitas tentativas. Trata-se de uma metáfora para um dispositivo abstrato que produza uma sequência aleatória de letras *ad infinitum*. A impossibilidade física fica evidente quando pensamos sobre o fato de a idade do universo ficar relativamente pequena frente o tempo infinito a que se propõe o experimento.

Teorema. (Macaco Infinito) *Um macaco digitando aleatoriamente caracteres em uma máquina de escrever por um tempo infinito obterá, e sem nenhum erro, qualquer texto escolhido. Inclusive, por exemplo, as obras completas de Shakespeare.*

De fato, na primeira tentativa, caso o macaco não as escreva, o experimento é refeito. A probabilidade de que isto aconteça é incrivelmente baixa. Mas supondo as repetições do experimento independentes, se pudermos repeti-las infinitas vezes, o Lema de Borel-Cantelli nos diz que, com probabilidade um, o macaco escreverá as obras completas de Shakespeare não apenas uma vez, mas infinitas vezes (FRANCO, 2017, p.194). No entanto, é possível sistematizar e provar este teorema de forma direta, sem uso do Lema de Borel-Cantelli.

Demonstração.

Seja m o total de caracteres disponíveis em uma máquina de escrever, e seja N o total de caracteres que compõem as obras completas de Shakespeare. Separamos os arranjos de caracteres gerados pelo macaco em blocos disjuntos de N caracteres, um após o outro, e observamos se algum bloco contém as obras completas de Shakespeare. Por exemplo,

$$\underbrace{Yak \dots eStw}_N \quad \underbrace{xpk \dots uLi \quad mQ \dots}_N$$

Neste cenário, a probabilidade de o macaco acertar cada carácter da obra de Shakespeare é dado por $\frac{1}{m}$. Sendo A o evento em que o macaco tem sucesso em escrever toda a obra em uma tentativa, podemos escrever:

$$P(A) = \left(\frac{1}{m}\right)^N = \frac{1}{m^N}$$

por outro lado, a chance de que o macaco não consiga em uma tentativa seria dada por:

$$P(A^c) = 1 - \left(\frac{1}{m}\right)^N = 1 - \frac{1}{m^N} = \frac{m^N - 1}{m^N}.$$

Como $0 < m^N - 1 < m^N$ e sendo m^N uma expressão real, constante e positiva podemos dividir a desigualdade anterior por ela chegando à expressão

$$0 < \frac{m^N - 1}{m^N} < 1.$$

Assim, podemos escrever a probabilidade de *fracasso do macaco em todas de um total de t tentativas* como se segue:

$$\underbrace{P(A^c) \times P(A^c) \times \dots \times P(A^c)}_{t \text{ vezes}} = \left(\frac{m^N - 1}{m^N}\right)^t.$$

Para analisar o que acontece se o macaco tentar indefinidamente, basta calcularmos o limite da expressão anterior quando t tende ao infinito, como se segue:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{m^N - 1}{m^N}\right)^t = 0$$

O que significa que, ao tentar infinitas vezes, a chance de o macaco fracassar tende para zero, isto é, ele quase certamente digitará a obra completa de Shakespeare (ISAAC, 1995, p. 48).

Retornando à motivação inicial deste recorte, podemos seguir às conjecturas além do Universo Observável. De fato, sequer sabemos se o universo é ou não finito. Na hipótese de o mesmo ser infinito, independente do quão pequena seja a probabilidade de que ocorra a sequência de eventos necessária à existência de um humano exatamente igual a um outro humano dado, o Teorema do Macaco Infinito (e também o Lema de Borel-Cantelli) nos garante, com probabilidade um, que esse indivíduo se repetirá, não uma, mas quantas vezes se pretenda observar. Além disso, ao contemplarmos a possibilidade de que este indivíduo traga uma singular diferença com relação ao original, seja sobre sua personalidade ou sobre sua aparência física, mesmo que essa exigência baixe ainda mais a probabilidade da existência do indivíduo, este teorema ainda o contempla.

A hipótese de que o universo seja finito, não descarta a possibilidade de repetição de um dado indivíduo. Só a coloca num patamar questionável, variando de acordo com o quão maior do q o observável é o universo.

3.4 História da Matemática

Ao longo do desenvolvimento da Astronomia, há momentos em que o ponto crítico a se ressaltar está sobre a análise histórica de fatos e não sobre a resolução de problemas ou sobre algum grande resultado astronômico.

Esta seção traz as contribuições de dois matemáticos e astrônomos para a idealização e construção do conjunto de regras e procedimentos que compõem o método científico atual. O primeiro é Alhazen, árabe que viveu durante a Idade Antiga e o segundo é Galileu, europeu que viveu durante a Idade Moderna.

3.4.1 Construção do método científico: contribuições de Alhazen e Galileu

Alhazen

Descrições de métodos científicos ocorrem desde a antiguidade. Mas foi com o matemático, físico, astrônomo e filósofo árabe Ibn Al-Haytham (965-1039), também conhecido por Alhazen, que as primeiras bases do método científico atual foram construídas. Por conta disso, por vezes ele é referenciado como “o primeiro cientista da história”. (RAYAN, 2014, p. 322)

Alhazen acreditava que o conhecimento científico somente poderia ser alcançado através de uma postura cética. E que as hipóteses deveriam ser comprovadas por experimentos que deveriam obedecer a uma ordem e sistematização que já traziam semelhanças com o que hoje chamamos de método científico moderno, a partir de René Descartes.

Os 5 estágios nos quais o método de pesquisa de Alhazen estava organizado eram:

1. A pesquisa começa por princípios e introduções do assunto que se queira discutir, isto é, definir o problema e estudos de fundamento teórico sobre o tema, ao invés de ir direto experimento puro ou observação;
2. Começar a fazer as deduções existentes. Avaliar as partes para obter uma conclusão sobre o todo;
3. As partes separadas do estudo são categorizadas baseado em suas peculiaridades;
4. Selecionar o que é relevante para a discussão e examinar em comparação com os resultados observados;

5. Distinguir e criticar a hipótese para provar sua veracidade. Esta etapa aumenta a precisão do resultado correto ou verdade que não possa ser refutada.

Trata-se de etapas bastante próximas das exigidas pelo método científico moderno, cerca de mil anos atrás, seis séculos antes de Galileu Galilei.

Galileu

Para dar significado aos resultados de suas observações, Galileu precisou romper com o princípio de autoridade exercido de um lado pela tradição religiosa e de outro pela tradição científica. Esta dificuldade fez com que ele idealizasse e ajudasse a construir o que hoje chamamos de método científico.

Galileu teve a intuição de que num problema, tanto a pergunta, quanto as soluções devem ser elaboradas numa linguagem especial: a linguagem matemática. Justamente neste fundamento residiu a chamada “Revolução Científica do Século XVII”, momento a partir do qual a ciência separa-se da Teologia e o conhecimento torna-se mais estruturado e prático. (PENNEREIRO, 2009, p. 191)

Resumo do método:

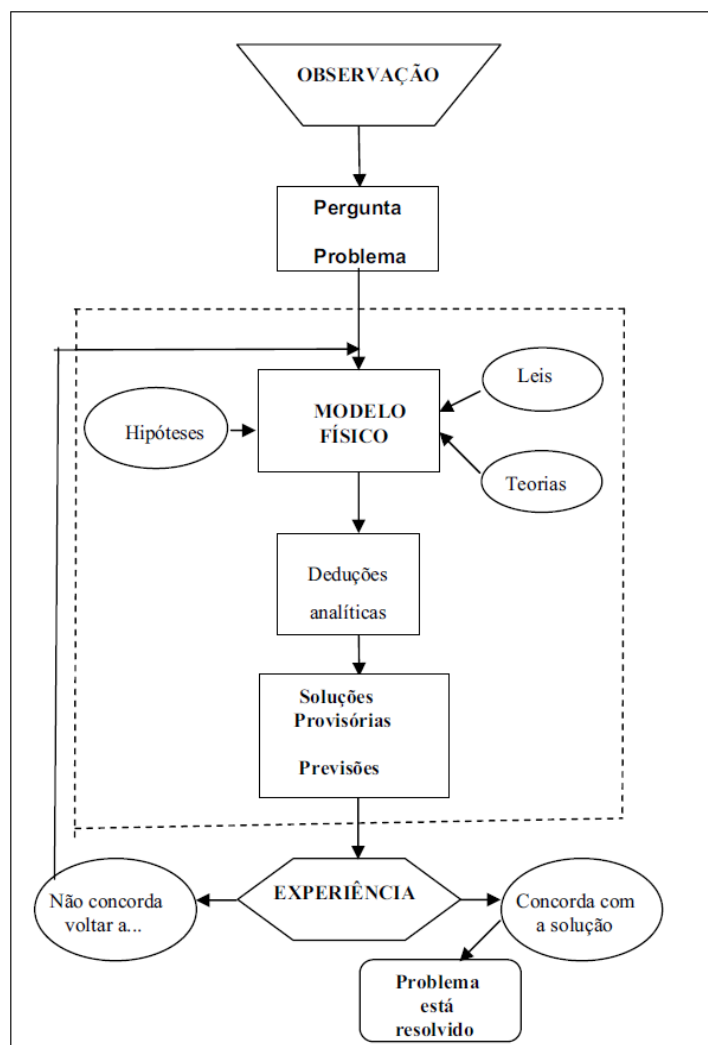
- Para tratar matematicamente um fenômeno (observação), é preciso reduzi-lo a um conjunto de parâmetros suscetíveis de medição (construção de modelo físico);
- Este modelo deve obedecer a certas leis ou teorias preexistentes. Não havendo leis, o investigador impõe hipóteses de trabalho ao modelo;
- Deduções analíticas são feitas sobre o modelo de modo que se chegue a uma resposta provisória à pergunta inicial;
- Sendo leis ou hipóteses de trabalho imposições humanas, resta saber se a natureza concorda com o resultado obtido. Volta-se à experiência para uma análise final criteriosa que vai confirmar a validade do modelo físico e das leis impostas.

O maior mérito de Galileu reside em ter entendido, ou intuído, que a chave do método científico estava na passagem abstrata do real inicial (observação) para o real final (experiência). Ele utilizou somente a Geometria Euclidiana como linguagem, uma vez que ainda não existia o que se chama hoje Análise Matemática (a Álgebra e a Análise Vetorial).

Para efeito de comparação, fora da sua zona específica de pesquisa, a Geometria (sem Análise) caiu quase que totalmente em desuso enquanto ferramenta de pesquisa. Embora sua manipulação correta ainda possa ser vista como uma verdadeira arte, ela por vezes exige intuições demasiado elaboradas. Por outro lado, a Análise oferece melhores condições de sistematização, o que aumenta muito as chances de sucesso na solução de problemas. (PENNEREIRO, 2009, p. 192)

A Análise Matemática ainda iria começar a ser desenvolvida por Gottfried Leibnitz e por Isaac Newton, no século XVII.

Figura 35 - Representação esquemática do método científico de Galileu



Fonte: (PENNEREIRO, 2009, p. 193)

3.4.2 Isaac Newton: crítica à maçã

A famosa lenda de que Newton descobriu a lei da gravidade quando uma maçã caiu em sua cabeça (Figura 36), apesar de representar uma evidente caricatura, não é recente e contribuiu para uma visão individualista da ciência. Uma maçã que caiu na cabeça como estopim de uma grande descoberta, pode traduzir para o estudante um cientista sem predecessores com teorias preexistentes sobre as quais se apoiar. Um iluminado que descobre algo num rompante iniciado por um estímulo direto da natureza, como se os debates já não estivessem sobre a mesa. (ROQUE, 2012, p. 25)

Figura 36 - “Descoberta da lei da gravidade por Isaac Newton”: caricatura feita por John Leech e publicada no século XIX



Fonte: (ROQUE, 2012, p. 25)

De acordo com a ideia de que alcunhas centralizadoras de feitos são questionáveis, cabe destacar como contraponto que no Segundo Congresso Internacional de História da Ciência, realizado em Londres em 1931, o físico russo Boris Hessen defendeu a tese de que as realizações de Newton sobre a mecânica e sobre a gravitação universal, foram consequências das demandas da sociedade mercantil inglesa daquele momento. Donde se concluiria que o conteúdo desenvolvido pela ciência seria mais determinado por questões sociais e econômicas do que pela genialidade de seus autores. Apesar de ter sido bem recebido, o trabalho de Hessen não chegou a influenciar o modo como se pratica história da ciência. (ROQUE, 2012, p. 26)

Newton deve estar em algum lugar entre “a mente mais poderosa que já surgiu na ciência” e “um grande cientista dentro de um contexto cultural e econômico favoráveis”. Provavelmente ele não conheceu esta caricatura criada sobre seu feito, porém, ainda em vida, fez questão de não concentrar em si o mérito da sua descoberta. Modesto e gentil com seus precursores, Newton declarou que só conseguiu enxergar esta teoria pois estava “sobre os ombros de gigantes”. (NOGUEIRA e CANALLE, 2009, p. 45)

4 ATIVIDADES PROPOSTAS E REALIZADAS

De maneira ampla, um cenário que já contemplaria o ideal pretendido neste trabalho, seria: um professor de Matemática que, dispondo logisticamente de algum tempo extra semanal com sua turma, anuncia o tema Astronomia como auxiliar do ensino da Matemática para a turma, num projeto a ser desenvolvido ao longo de algo entre um ou dois trimestres.

Compartilhar o enquadramento histórico desenvolvido no capítulo 2 com os estudantes por partes e, preferencialmente, intercalar cada parte da história com recortes do capítulo 3 para os quais a turma satisfaça os pré-requisitos ou com outros recursos externos sobre o tema que o professor possa encontrar: vídeos, exercícios de olimpíadas, debater alguma mídia sobre o tema que já tenha sido previamente indicada ou reproduzida para a turma, etc.

4.1 Sugestões para recortes

4.1.1 Calculando o raio da Terra – A ideia de Eratóstenes

É logisticamente viável lançar mão de aplicativos como o Google Maps (ou equivalente) para calcular distâncias e um aplicativo de conversa de vídeo em tempo real como o Skype (ou equivalente) para fazer uma releitura moderna do feito de Eratóstenes.

A sugestão é que o professor interessado, faça contato com um professor de outra instituição, em outra cidade e o convide para um desenvolvimento conjunto desta atividade.

A execução da tarefa consistiria essencialmente em estimar a distância entre as duas instituições de ensino via aplicativo e combinar uma data e horário para os alunos das duas instituições efetuarem simultaneamente medições sobre o ângulo de incidência do Sol nas suas localidades. É importante que no horário da medição, uma das cidades tenha os raios incidindo perpendicularmente.

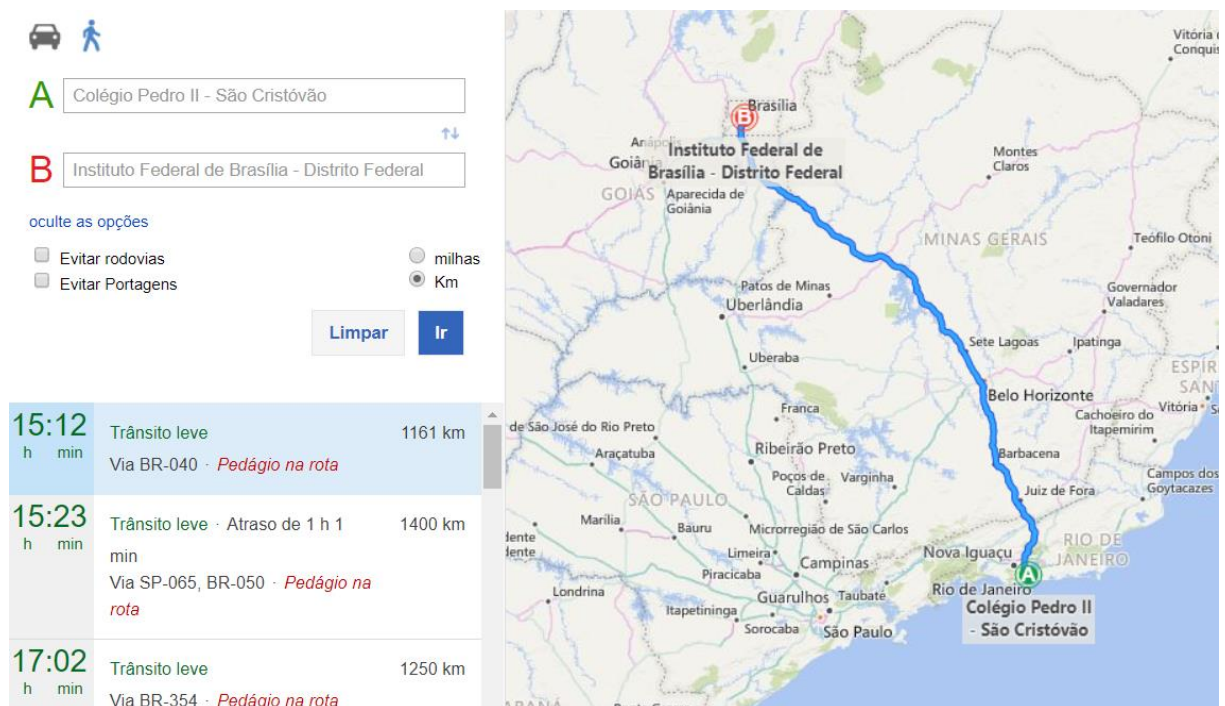
Para a medição de incidência dos raios solares, o professor pode valer-se da Trigonometria no Triângulo Retângulo, relacionando a altura de uma planta, árvore, poste ou coisa que o valha, com o tamanho da sua sombra no momento. Caso prefira, é possível obter essas medições com maior precisão e em tempo real via aplicativos como o SkyView ou Sun Surveyor.

Com os dados em mãos, os professores poderiam percorrer com suas turmas os passos de Eratóstenes e estimar o tamanho do raio do nosso planeta. Como contribuição lúdica, os

dados obtidos pelas instituições podem ser confrontados e o resultados finais celebrados em conferência via internet.

A Figura 37 traz um exemplo de estimativa realizada no aplicativo Google Maps. A distância entre o Colégio Pedro II, campus São Cristóvão II, no Rio de Janeiro e o Instituto Federal de Brasília, campus Brasília, no Distrito Federal, foi estimada pelo aplicativo em 1161 km, em seu trajeto possível mais curto.

Figura 37 - Trecho do Colégio Pedro II, campus São Cristóvão II, no Rio de Janeiro até o Instituto Federal de Brasília, no Distrito Federal, estimado no aplicativo Google Maps



Fonte: O autor, 2019

Como a menor distâncias entre dois pontos é uma reta, cabe destacar com os estudantes que a estimativa é feita por estradas pavimentadas. E que se o caminho fosse estimado em linha reta, o resultado seria um tanto menor.

4.1.2 Possibilidade de vida fora da Terra – a Equação de Drake

Material recomendado:

- uma calculadora para cada aluno e professor;

- folha impressa com resumo do cenário e exercício proposto objetivando estimativa pessoal do aluno. Uma folha para cada aluno.

Após a exposição do cenário, o professor pode propor aos alunos um debate sobre cada fator da equação e que cada aluno faça sua própria estimativa posteriormente.

Para cada fator, o professor pode conduzir o aluno a escolher adequadamente qual o grau percentual que melhor representa o otimismo ou pessimismo dele.

O professor pode convidar informalmente outros professores de Biologia, Geografia, Física, Astronomia ou Sociologia, por exemplo, uma vez que a equação evoca estimativas destas áreas. Estes participariam dos debates em torno dos fatores dentro ou próximos das suas áreas.

O professor de Sociologia, por exemplo, pode discorrer sobre o fator f_c - *fração de planetas com vida inteligente que têm o desejo e os meios necessários à comunicação interestelar por rádio*, na perspectiva de que, após uma sociedade atingir sua plenitude, não necessariamente ela procuraria existências exteriores para interagir.

O professor de Biologia, pode discorrer sobre o fator f_l - *fração de planetas habitáveis que efetivamente desenvolvem vida* ou f_i - *fração de planetas com vida que desenvolvem vida inteligente*, por exemplo.

Cabe lembrar aos colegas professores que a Equação de Drake tem pouco efeito científico prático e que a atividade em torno da mesma visa essencialmente um ganho lúdico dentro do contexto.

4.2 Atividades Propostas

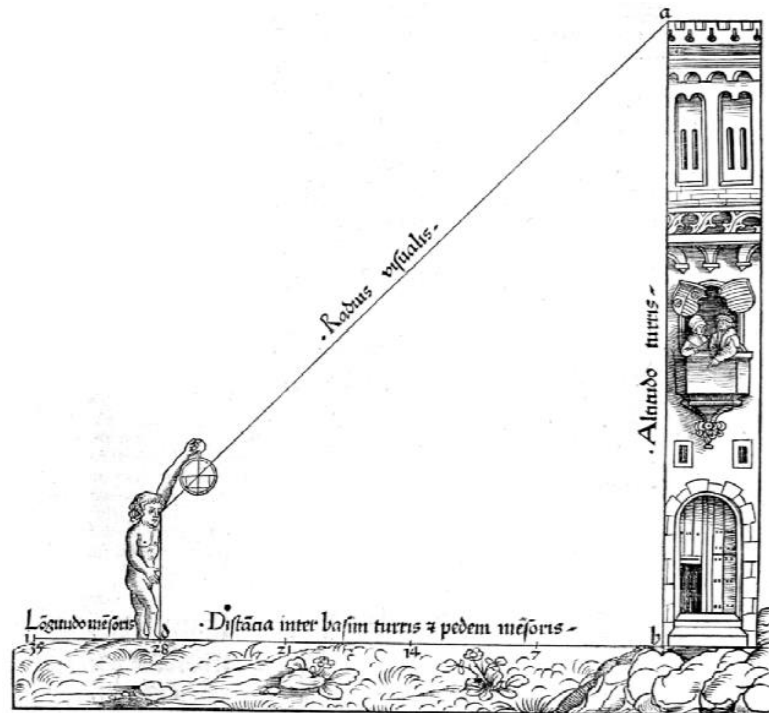
4.2.1 Oficina Astrolábio

O Astrolábio é um instrumento antigo que servia a diversos fins, especialmente para medir a altura dos astros acima do horizonte. O autor direto de sua criação é indefinido, mas é consenso que resultou da matemática desenvolvida pelos gregos, em especial Hiparco (180 – 120 a.E.C.), e difundida por Ptolomeu em sua obra *Almagesto*.

Em seus modelos originais, era bastante complexo, composto por um disco graduado, onde estavam lâminas circulares. As lâminas também eram graduadas e tangenciavam as margens, permitindo diversos tipos de medições. Havia muitas possibilidades de uso. Sua

versão náutica, desenvolvida pelos portugueses e utilizada nas navegações, era mais simples e só possibilitava a medição de astros acima do horizonte.

Figura 38 - Ilustração – indivíduo observa o topo de uma construção através do astrolábio



Fonte: http://astrolabeproject.com/downloads/Astrolabe_in_Theory_and_Practice_Version_4.pdf

Era um instrumento valioso no Islã por sua capacidade de determinar as horas do dia, especificamente a hora da oração, quando deveriam seguir para a Meca.

O declínio em seu uso deu-se na segunda metade do século XVII, com a invenção do relógio de pêndulos e com o advento de instrumentos científicos mais precisos, como o telescópio.

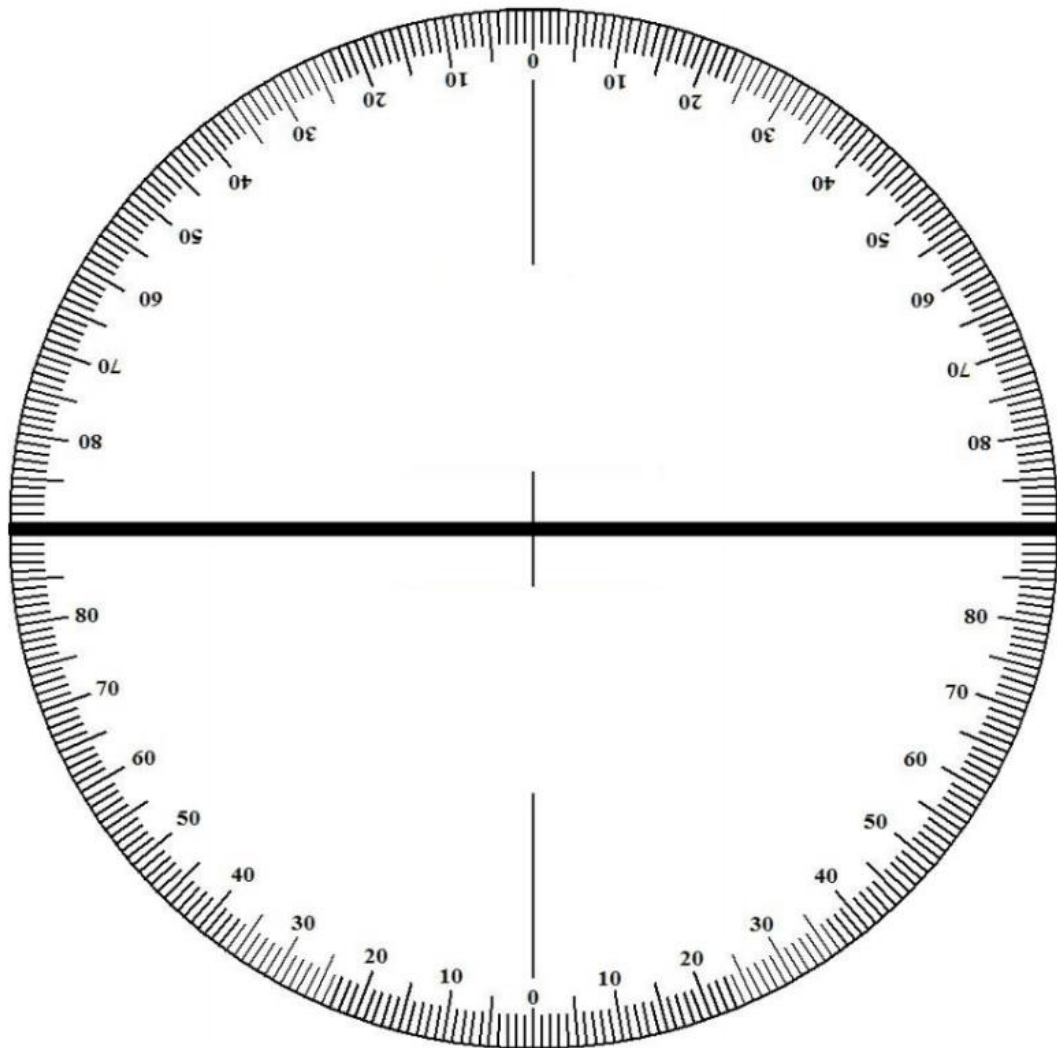
Uma utilidade simples do astrolábio fora da astronomia é o cálculo da altura de uma construção (vide Figura 38). Essa é a natureza da atividade aqui proposta, além da construção de um modelo simplificado do instrumento.

Material necessário para a construção do instrumento:

- uma folha de papelão
- uma folha impressa com um círculo graduado
- tesoura sem ponta
- cola polar

- fita adesiva
- trena
- transferidor
- compasso
- barbante
- um canudo plástico cilíndrico (ou objeto similar) através do qual se consiga olhar.

Figura 39 - Círculo graduado com numeração conveniente à montagem do astrolábio



Fonte: O autor, 2019

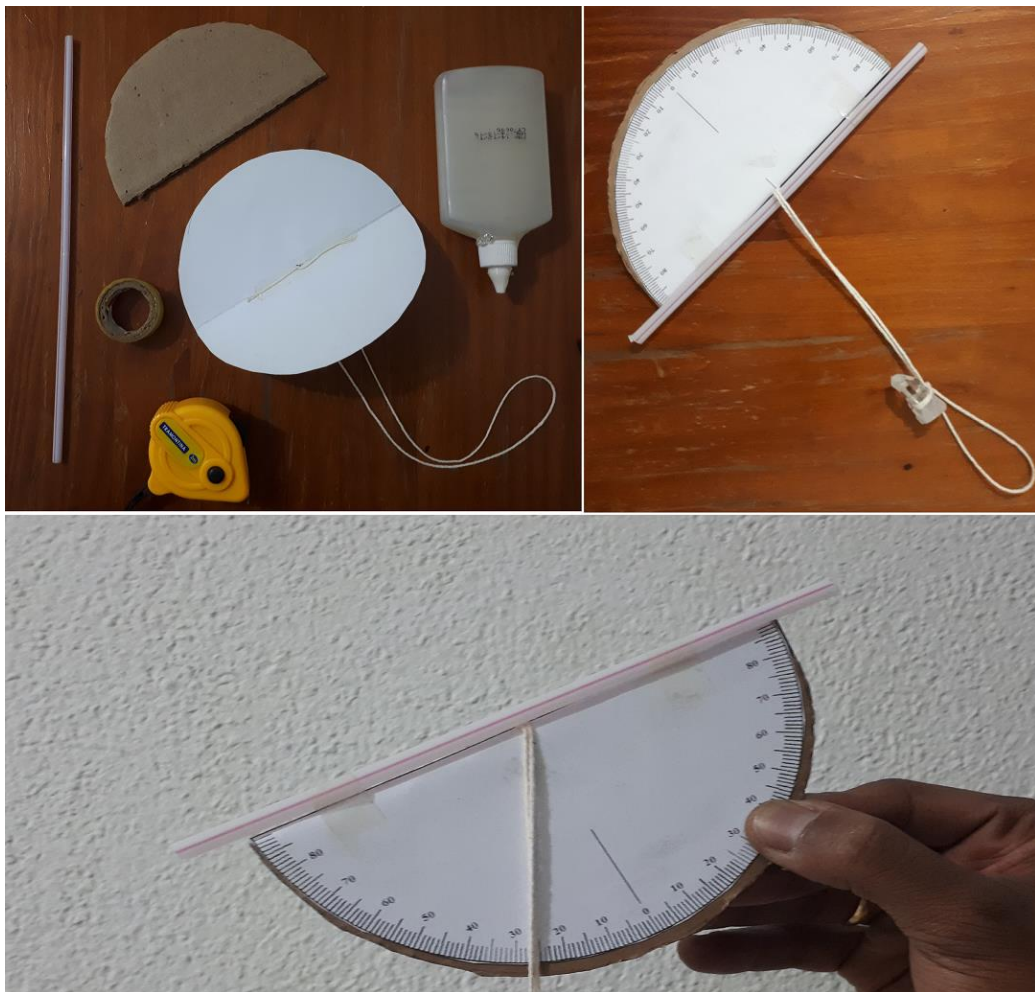
Montagem do instrumento

Para a montagem do instrumento, deve-se seguir as seguintes etapas:

- 1 - recortar o círculo graduado da folha;

- 2 - recortar do papelão um semicírculo de raio igual ao do círculo graduado;
- 3 - cortar um pedaço de barbante de aproximadamente 50 cm;
- 4 - perfurar o círculo graduado em seu centro e atravessá-lo com as duas pontas do barbante, deixando passar aproximadamente 3 cm de cada ponta. As pontas devem sair pelo lado não impresso do círculo;
- 5 - Passar fita adesiva nas pontas visando atá-las ao lado não impresso do círculo;
- 6 - Dobrar o círculo no diâmetro que tem extremos nas marcações de 90° (vide Figura 39)
- 7 - Colar cada metade do círculo de papel em uma das faces do semicírculo de papelão, de modo que a graduação fique visível e o barbante saia pelo centro
- 8 - Amarrar qualquer objeto pequeno como uma pedra (do tamanho de uma borracha ou apontador) à ponta do barbante
- 9 - Atar o canudo ao diâmetro com fita adesiva (vide Figura 40).

Figura 40 - Astrolábio escolar – montagem em três momentos



Fonte: O autor, 2019

Aplicação da atividade:

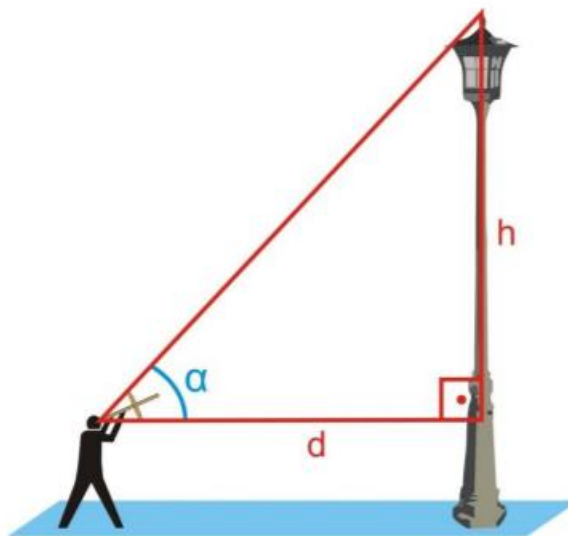
A sugestão é que o professor apresente o astrolábio aos alunos e prossiga para a construção do mesmo. Cada aluno constrói um para si. Além do material para a construção do instrumento, calculadoras científicas devem ser distribuídas aos alunos.

Com o instrumento em mãos, o professor pode propor que os alunos meçam a altura de alguma árvore, do prédio da escola ou de alguma construção razoavelmente alta da qual eles possam se aproximar mas que não possam medir diretamente, valendo-se somente do astrolábio e da *Trigonometria no Triângulo Retângulo*. A situação em que um indivíduo mede uma construção pelo método aqui descrito é razoavelmente comum enquanto exercício teórico abordado em aulas sobre o assunto. Um exemplo no qual o objetivo é medir a altura de um poste de luz está exposto na Figura 41.

Para fazer a medição, o aluno deve estar a uma distância pré-definida d do objeto a ser medido. Utilizando a trena, o professor pode oferecer distâncias d diferentes para os alunos, para que estes comparem suas aproximações, que devem resultar em números próximos.

À seguir, o estudante observa o topo da construção através do canudo do astrolábio para obter a medida α , do ângulo formado entre a linha reta através da qual observa o topo e a horizontal.

Figura 41 - Indivíduo calcula a altura de um poste de luz utilizando o Astrolábio. O ângulo α é medido a partir de uma distância d pré-definida



Fonte: <https://encrypted->

[tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTuGobkJX0RSLpRerP2WYcieryyOh1EqqME-CZCY19GHj333uC](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTuGobkJX0RSLpRerP2WYcieryyOh1EqqME-CZCY19GHj333uC)

Com os dados referentes à distância d e ao ângulo α em mãos, o estudante deve proceder ao cálculo da medida h , distância aproximada do topo do poste até o ponto do mesmo que está situado à mesma altura da cabeça do observador, através da trigonometria:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{h}{d}$$

que implica

$$h = d \times \tan(\alpha) .$$

Como a distância d é pré-definida, o uso indispensável da calculadora pelos alunos se dará pelo fato de que, provavelmente, o ângulo α será diferente dos ângulos notáveis conhecidos. Assim, os estudantes devem utilizá-la para a obtenção da tangente do mesmo.

Um vez que o estudante tenha obtido a medida h , basta que este meça sua própria altura utilizando a trena e some ao valor obtido para h . Esta soma será a altura aproximada do poste de luz. Caso o professor saiba a real altura da construção em questão, ele pode validar o método através da comparação deste dado com o resultado obtido pelos estudantes.

Como tarefa de casa, o professor pode pedir ao estudante que meça a altura da sua própria casa, ou de alguma outra construção conveniente da qual ele possa se aproximar.

4.2.2 Treinamento OBA

O professor que dispuser de mais tempo extra, pode incentivar os estudantes a participarem da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA) e oferecer um treinamento para a prova. A participação conjunta de um professor Geografia, Ciências, Física ou propriamente Astronomia, caso a instituição disponha de um, enriqueceria a experiência à medida que o conteúdo avaliado na olimpíada é interdisciplinar e perpassa todas essas áreas do conhecimento.

A olimpíada tem 4 níveis:

Nível 1 – do 1º ao 3º ano do Ensino Fundamental

Nível 2 – do 4º ao 5º ano do Ensino Fundamental

Nível 3 – do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental

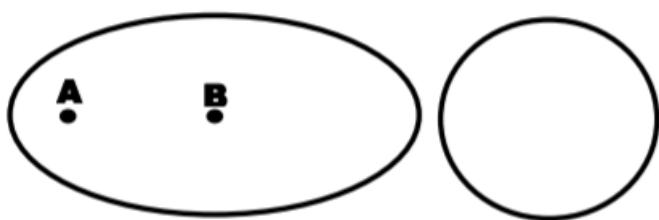
Nível 4 – para qualquer aluno do Ensino Médio

A essência do treinamento seria a resolução de questões de anos anteriores da OBA, disponíveis no site oficial da olimpíada.

Algumas questões presentes em edições anteriores da olimpíada que podem ser trabalhadas com o auxílio de recortes presentes neste trabalho são:

21ª edição – 2018 – Nível 3 – Questão 3:

Abaixo tem as elipses (órbitas) de um cometa periódico e de um planeta.



Pergunta 3a) Na figura da esquerda, faça um **X** sobre o ponto **A** ou **B** que melhor representa a posição do Sol.

Pergunta 3b) Escreva **COMETA** sobre a figura que melhor representa a órbita de um cometa periódico e escreva **PLANETA** sobre a figura que melhor representa a órbita de um planeta.

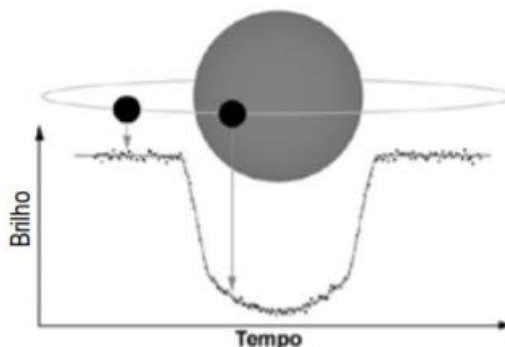
Gabarito:



O recorte *Primeira Lei de Kepler: a excentricidade da elipse na Matemática e nas órbitas no Sistema Solar* aliado à informação de que as órbitas dos cometas são, em média, bem mais excêntricas do que as dos planetas, resolve o problema proposto. Embora o mesmo tenha sido abordado no nível 3, o conceito de elipse é trabalhado de modo superficial, tornando a proposta possível mesmo para alunos que ainda não chegaram ao Ensino Médio.

20ª edição – 2017 – Nível 4 – Questão 5:

Um método usado para detectar planetas extrassolares é conhecido pelo nome de método de trânsito planetário. Como as estrelas são muito maiores do que os planetas e emitem luz, o brilho da estrela fica ligeiramente reduzido pelo bloqueio que o disco do planeta causa durante o seu trânsito, como ilustra a figura abaixo.



Cerca de 75% dos planetas extrassolares descobertos até o momento (cerca de 3.600) o foram por este método. Em fevereiro de 2017 foi anunciada a descoberta, pelo método do trânsito, do sistema planetário extrassolar TRAPPIST-1 com sete planetas, tipo terrestre, ao seu redor, sendo 4 de tamanho similar à Terra e três deles dentro da chamada zona de habitabilidade. Todos os planetas, incluindo os extrassolares, devem obedecer à terceira lei de Kepler, a qual é dada por:

$$\frac{T^2}{D^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)} = K$$

onde T é o período do planeta, D sua distância média à estrela, M a massa da estrela, m a massa do planeta, $\pi \cong 3,14$, $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$ e K é a constante de Kepler.

Pergunta 5a) Chamando K_S para o Sistema Solar e K_T para o Sistema Trappist-1, calcule a razão entre K_S e K_T , ou seja, calcule $\frac{K_S}{K_T}$.

Dados: O período orbital da Terra (T) é de 360 dias (para simplificar as contas) e sua distância média ao Sol (D) é de 1 UA (Unidade Astronômica). O período orbital do planeta “d” (T_d) de Trappist-1 é de 4 dias e sua distância média a Trappist-1 (D_d) é de 0,02 UA. Como estrelas têm muito mais massa que planetas, despreze m na Lei de Kepler. Use M_S para a massa do Sol e M_T para a massa de Trappist-1.

Pergunta 5b) Calcule quantas vezes a massa da estrela Trappist-1, M_T , é menor do que a do Sol, M_S , isto é, faça $\frac{M_T}{M_S}$.

Gabarito:

Resolução 5a)

$$\frac{K_S}{K_T} = \frac{\frac{T^2}{D^3}}{\frac{(T_d)^2}{(D_d)^2}} = \frac{\frac{4\pi^2}{GM_S}}{\frac{4\pi^2}{GM_T}} \rightarrow \frac{K_S}{K_T} = \left(\frac{T}{T_d}\right)^2 \left(\frac{D_d}{D}\right)^3 = \frac{M_T}{M_S}$$

substituindo períodos e distâncias:

$$\frac{K_S}{K_T} = \frac{M_T}{M_S} = \left(\frac{360}{4}\right)^2 \left(\frac{0,02}{1}\right)^3 = 90^2 (2 \times 10^{-2})^3 = 81 \times 10^2 \times 8 \times 10^{-6}$$

$$\frac{K_S}{K_T} = \frac{M_T}{M_S} = 81 \times 8 \times 10^{-4} = 648 \times 10^{-4} = 0,0648 \cong 0,065 .$$

Resolução 5b)

A razão coincidiu com a pedida no item anterior, logo:

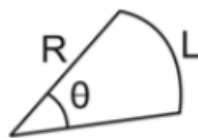
$$\frac{M_T}{M_S} = 0,065 .$$

Este exercício pode ser trabalhado após contextualização prévia através do recorte *Terceira Lei de Kepler*.

19ª edição – 2016 – Nível 4 – Questão 6:

Na Astronomia frequentemente precisamos medir a separação angular de dois astros ou o tamanho angular de um astro. Suponha que na figura abaixo, L seja o diâmetro do Sol, isto é, cerca de $1,4 \times 10^6$ km e R sua distância média à Terra, que é cerca de 150×10^6 km. Com isso, o diâmetro angular compreendido pelo Sol, visto da Terra, é, em radianos, de:

$$\theta = \frac{L}{R} = \frac{1,4 \times 10^6 \text{ km}}{150 \times 10^6 \text{ km}} = \frac{1,4}{150} = 9,33 \times 10^{-3} \text{ radiano.}$$



Num círculo temos 360° ou 2π radianos, logo, por “regra de três”, temos que 1 radiano equivale a cerca de 60 graus. Assim, o diâmetro angular do Sol, visto da Terra é, em graus, de:

$$\theta = 9,33 \times 10^{-3} \times 60^\circ = 0,56^\circ .$$

Pergunta 6a) Num futuro próximo Marte será colonizado. Qual será o diâmetro angular, em graus, com que estes colonizadores verão o Sol? A distância média Sol-Marte é cerca de 228×10^6 km. *Dica: É só repetir o cálculo acima. O resultado deve ser em graus.*

Pergunta 6b) Como você sabe, em 14 julho de 2015 a sonda “Novos Horizontes” passou “raspando” sobre Plutão, cuja distância média ao Sol é cerca de $5,9 \times 10^9$ km. Qual o tamanho angular (em graus) do Sol visto de Plutão? *Já sabe ... É só repetir o modelo dos cálculos anteriores! Abaixo tem uma figura, em escala, do Sol visto da Terra, de Marte e de Plutão.*



Gabarito:

Resolução 6a)

$$\theta = \frac{L}{R} = \frac{1,4 \times 10^6 \text{ km}}{228 \times 10^6 \text{ km}} = \frac{1,4}{228} = 6,14 \times 10^{-3} \text{ radiano} = 6,14 \times 10^{-3} \times 60^\circ = 0,37^\circ .$$

Resolução 6b)

$$\theta = \frac{L}{R} = \frac{1,4 \times 10^6 \text{ km}}{5,9 \times 10^9 \text{ km}} = \frac{1,4}{5,9 \times 10^3} = 2,37 \times 10^{-4} \text{ radiano} = 2,37 \times 10^{-4} \text{ radiano}$$

$$2,37 \times 10^{-4} \text{ radiano} = 2,37 \times 10^{-4} \times 60^\circ = 1,42 \times 10^{-2} \text{ }^\circ .$$

Este problema utiliza somente ferramentas matemáticas, dispensando um recorte que o contextualize. Uma atividade que pode derivar do conhecimento adquirido neste exercício é a recriação de como seriam os diâmetros angulares dos planetas do Sistema Solar se estes estivessem à mesma distância da Terra que a Lua está, estando o observador da Terra.

4.2.3 Atividades Auxiliares

Fenômenos observáveis a olho nu:

- Observar a superfície da Lua e os acidentes lunares com binóculo, luneta ou telescópio
- Observar numa noite o movimento aparente da Lua
- Observar a sucessão das fases da Lua
- Se estiver à beira-mar, anotar os instantes de maré alta e baixa e confrontar essas informações com a posição da Lua no céu
- Observar planetas interiores e exteriores numa sucessão de dias

Livros indicados com temática astronômica:

- O Mundo Assombrado Pelos Demônios – Carl Sagan
- Astronomia: Ensino Fundamental e Médio – Canalle e Nogueira
- História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas – Tatiana Roque

Filmes, séries ou animações com temática astronômica:

- Interstellar (filme)
- Gravidade (filme)
- Star Trek (franquia de entretenimento que conta com filmes, séries e animações)
- Rick e Morty (desenho animado)

Aplicativos indicados:

- Geogebra
- Stellarium
- SkyMap

4.3 Atividades Realizadas

No ano letivo de 2018, numa escola de educação básica, na cidade do Rio de Janeiro, o tema Astronomia foi utilizado em duas turmas do Projeto CAIS (Classe de Adequação Idade-Série), trabalhado de forma transversal entre as disciplinas de Matemática, História e Ciências.

Estas turmas contavam com quantidade reduzida de alunos em comparação com as turmas regulares e os estudantes cursariam 8º e 9º anos do Ensino Fundamental no mesmo ano letivo. Assim, com menos tempo disponível do que o normal, foi solicitado da equipe de professores o desenvolvimento de um modelo de trabalho alternativo ao tradicional, contextualizado e interdisciplinar sempre que fosse possível.

A equipe chegou ao consenso de que seria interessante suprimir alguns tópicos do planejamento original para aumentar o tempo de trabalho sobre os que fossem mais importantes, buscando assim desenvolver um maior senso crítico e autonomia nos estudantes. Com esta autonomia bem trabalhada, os temas suprimidos viriam a seguir como trabalhos indicados à parte para que os alunos desenvolvessem e apresentassem por conta própria ao longo do ano letivo.

O currículo mínimo decidido para o segundo ciclo (8º e 9º anos) da Matemática do Projeto CAIS, contava com os seguintes temas e respectivas habilidades a serem desenvolvidas:

- Números Reais, Potenciação, Radiciação e Radicais

Operações, expressões e problemas, Operar com potências e Radicais, Racionalização.

- Monômios, Polinômios, Produtos Notáveis e Fatoração

Operar monômios, polinômios, compreender algébrica e geometricamente os produtos notáveis, conhecer os principais casos de fatoração.

- Equação do 2º Grau

Identificar uma equação do segundo grau e resolver equações completas e incompletas usando fatoração, situações problema envolvendo equações do 2º grau.

- Triângulos e Congruência

Conhecer os triângulos e suas propriedades e classificações, casos de congruência de triângulos.

- Proporcionalidade e Semelhança

Complementar o conceito de razão e proporção, casos de semelhanças de polígonos e triângulos.

- Triângulo retângulo, relações métricas e razões trigonométricas

Triângulo retângulo e suas características, Teorema de Pitágoras, aplicações no triângulo retângulo, relações métricas e razões trigonométricas.

- Circunferência, arcos e relações métricas

Complementação de circunferência e suas relações métricas.

- Polígonos regulares e áreas

Cálculo de áreas de diversos polígonos e figuras geométricas.

A aula inaugural do projeto foi planejada e executada em duas etapas: na primeira etapa, os professores de Matemática, Ciências e História trabalharam isoladamente com os alunos, fazendo, cada um, uma revisão dos conteúdos particulares de cada disciplina, necessários à segunda etapa, na qual os três professores trabalhariam juntos noções básicas de Astronomia e Gravidade (Figura 42), incluindo uma atividade prática.

A revisão de Matemática consistiu principalmente na resolução de exercícios breves envolvendo razões, proporção, porcentagem, equação do 1º grau e elementos de algumas figuras planas, como o raio de uma circunferência.

Figura 42 - Aula inaugural interdisciplinar – Matemática/História/Ciências – com tema “Gravidade e Astronomia”, ministrada na biblioteca do colégio, projeto CAIS, ano letivo 2018



Na segunda etapa, os três professores reuniram-se com as duas turmas na biblioteca do campus, onde após uma explicação intuitiva sobre os efeitos conhecidos da gravidade, atuando sobre qualquer corpo terrestre, especificamente sobre o corpo humano mantendo-o preso ao planeta, sobre a Terra a partir do Sol, sobre o Sol a partir do buraco negro supermassivo situado no centro da Via Láctea, sobre nossa galáxia junto da galáxia de Andrômeda, chegando, superficialmente e somente a partir de uma perspectiva gravitacional, ao cenário que temos do universo conhecido. A partir daí, foram exibidos dois vídeos sobre Astronomia:

- O primeiro, intitulado “Comparação do Tamanho das Estrelas”, trazia uma comparação entre as esferas referentes aos planetas do sistema solar, seguindo para o Sol e estrelas maiores do que ele, obedecendo às suas proporções de tamanho.

- O segundo, intitulado “E se os Planetas Passassem entre a Terra e a Lua”, trazia a hipotética esfera visível dos planetas do sistema solar, em proporção, caso passassem no exato ponto médio entre a Terra e a nossa Lua, enquanto o observador estivesse na Terra (vide Figura 43).

Figura 43 - Captura do vídeo “E se os Planetas Passassem entre a Terra e a Lua”, momento em que, hipoteticamente, se veria Júpiter passar no exato ponto médio entre a Terra e nossa Lua. À esquerda de Júpiter, a Lua realçada



Fonte: O autor, 2018

Após a exibição e considerações sobre os vídeos, foi distribuído a cada aluno uma tabela nas quais constavam as distâncias aproximadas de cada planeta do sistema solar, mais Plutão,

até o Sol (vide Tabela 1). Em seguida, os alunos foram conduzidos ao pátio, onde deu-se a atividade prática: construir uma instalação contendo o Sol, os planetas do sistema solar e Plutão, obedecendo às suas proporções de tamanhos e distâncias, presos por barbante e pendurados no teto do pátio.

Tabela 1 - Dados relativos aos astros do Sistema Solar. Utilizada na aula inaugural do Projeto CAIS, no Colégio Pedro II, campus São Cristóvão II, no ano de 2018

ASTRO	MASSA (KG)	DIÂMETRO		DISTÂNCIA	
		(KM)	(MM)	(KM)	(M)
Sol	$1,99 \times 10^{30}$	1.392.000	800,0	--	--
Mercúrio	$0,33 \times 10^{24}$	4.860	2,8	57.900.000	33,3
Vênus	$4,87 \times 10^{24}$	12.100	7,0	108.000.000	62,1
Terra	$5,97 \times 10^{24}$	12.760	7,3	149.600.000	86,0
Marte	$0,64 \times 10^{24}$	6.800	3,9	228.000.000	131,0
Júpiter	1899×10^{24}	143.000	82,2	778.000.000	447,1
Saturno	568×10^{24}	120.000	69,0	1.430.000.000	821,8
Urano	$87,2 \times 10^{24}$	50.800	29,2	2.870.000.000	1.649,4
Netuno	102×10^{24}	49.400	28,4	4.500.000.000	2.586,2
Plutão	$0,02 \times 10^{24}$	2.740	1,6	5.900.000.000	3.390,8
Lua	$73,5 \times 10^{21}$	3.840	2,0		

Fonte: <http://www.cdcc.usp.br/cda/oba/aeb/astronomia.pdf>

Materiais utilizados

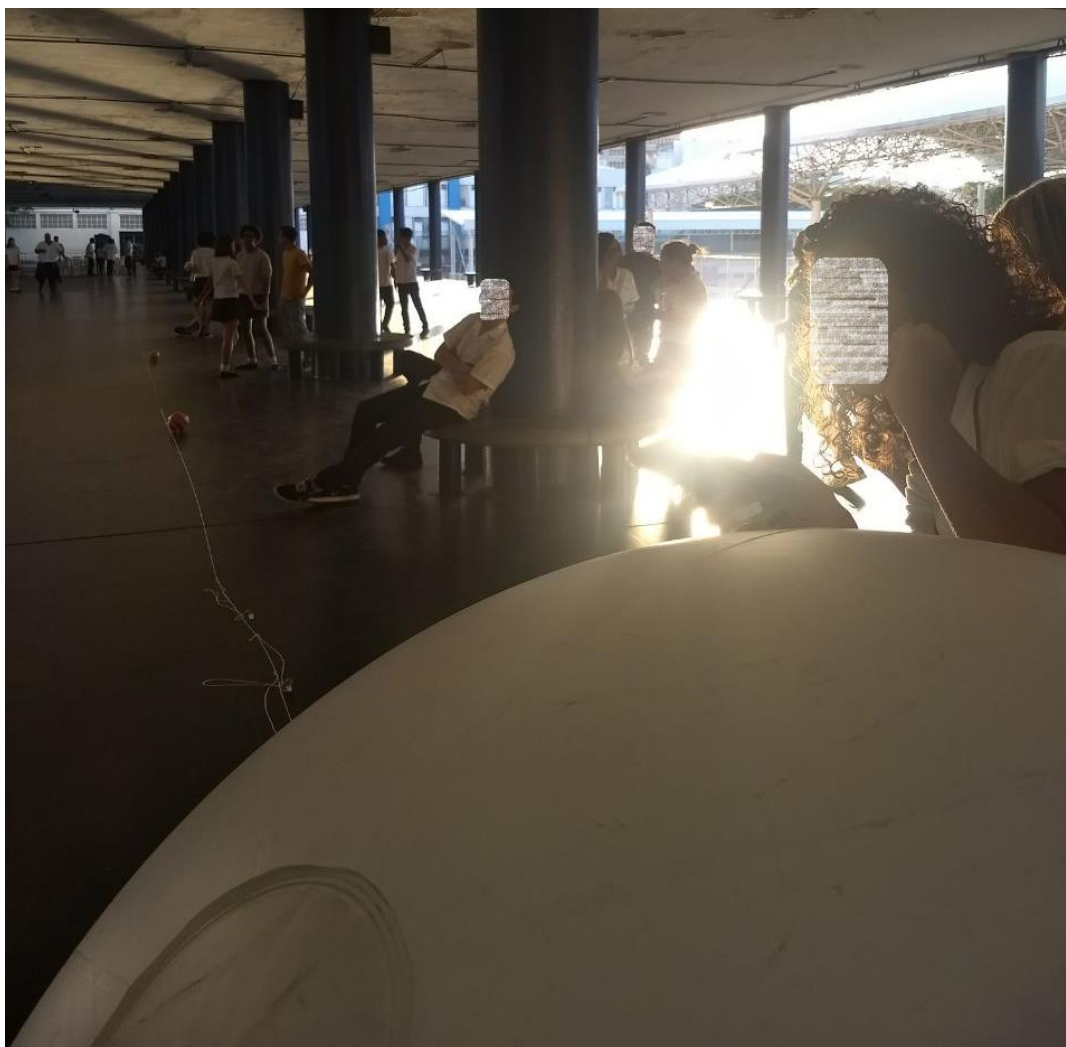
- uma folha com tabela impressa contendo as distâncias dos astros até o Sol para cada estudante;
- 9 esferas de isopor, em proporção de tamanho, uma para cada planeta, mais Plutão;
- uma esfera de plástico inflável para representar o Sol;
- barbante;
- fita adesiva;
- fita métrica;
- tesoura sem ponta; e
- escada.

A instalação

- Como o colégio já dispunha dos planetas em proporção de tamanho, a matemática desenvolvida pelos alunos na tarefa consistiu em determinar somente a proporção das distâncias entre os astros;
- A esfera que representava o Sol foi inflada e uma ponta do rolo de barbante foi preso a ela com fita adesiva. Então o barbante foi desenrolado ao longo do pátio onde ficaria a instalação (Figura 44);

- Os alunos foram separados em 9 grupos e, a partir do Sol, cada grupo ficou responsável por calcular, baseado nos dados da tabela e na escala previamente estabelecida, qual seria a distância do Sol ao planeta, ou planetóide, que tinha em mãos;
- Em seguida, os alunos utilizaram a fita métrica para situar seus respectivos planetas ao longo do barbante principal esticado no pátio, baseado nos resultados encontrados em seus cálculos. Tendo em mãos um pedaço curto de barbante extra, colaram uma extremidade em seu “planeta” e amarram a outra extremidade no barbante principal, de modo que os planetas ficariam pendurados por fios auxiliares vindos do barbante principal que atravessava o pátio;
- Por fim, os professores revisaram as distâncias obtidas pelos alunos e penduraram a instalação no teto do pátio, utilizando uma escada, finalizando a atividade e a aula inaugural.

Figura 44 - Instalação “Sistema Solar: astros com tamanhos e distâncias proporcionais às suas medidas reais”, montagem em andamento com alunos do Projeto CAIS



Após a aula inaugural, o tema Astronomia voltou a ser utilizado em aulas de Matemática do projeto CAIS. Porém, bem menos do que era objetivado inicialmente.

Foi planejado no início do ano letivo:

- Uma abordagem quinzenal, resumida e progressiva do enquadramento histórico presente no capítulo 2 deste trabalho, sempre que possível acompanhada de algum vídeo ilustrativo curto sobre Matemática e Astronomia após a aula expositiva, num tempo total mínimo de 45 minutos por quinzena;
- Uma abordagem também quinzenal, porém intercalada com o enquadramento histórico, de recortes presentes no capítulo 3 deste trabalho, desde que estivessem dentro dos pré-requisitos satisfeitos pelos alunos. Alguns recortes seriam transmitidos como aula expositiva, outros como exercício a ser desenvolvido pelos alunos em sala ou em casa, via pesquisa.
- A inscrição dos alunos que tivessem interesse na Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica;
- Um passeio ao planetário da cidade do Rio de Janeiro ao fim do ano letivo. Na ocasião, cada aluno, em posse de uma lista de exercícios, precisaria preencher lacunas com informações que seriam obtidas durante a visita.

Pouco tempo após iniciado o projeto, foi detectado o maior motivo pelo qual os alunos do projeto tinham grande distorção idade-série: muitos tinham sérios problemas em suas vidas particulares que os impossibilitava de estarem sempre na escola. Fez-se presente a problemática da evasão escolar citadas em nossos parâmetros curriculares.

Este cenário resultou na necessidade de reformulação do planejamento com a redução de atividades extras, fora do currículo mínimo exigido. Assim, o enquadramento histórico do capítulo 2 foi transmitido ao longo de menos tempo, de forma superficial e menos recortes do capítulo 3 puderam ser trabalhados.

Com o tempo restrito e a limitação dos pré-requisitos matemáticos ao Ensino Fundamental, os recortes trabalhados com as turmas do Projeto CAIS foram:

- A Velocidade da Luz

Material utilizado:

- 21 calculadoras científicas, uma para cada estudante e uma para o professor; e

- 20 folhas, sendo 5 para cada uma das 4 aeronaves do recorte (Tupolev Tu-144, SR-71 Blackbird, missão Apollo 11 e Sonda Juno), impressas isoladamente com seus dados sobre velocidade máxima.

Os alunos foram separados em 4 grupos e o cenário foi exposto pelo professor, destacando o número equivalente à *velocidade da luz no vácuo*, a relação para o *comprimento de uma circunferência de raio dado* e a medida do *raio aproximado da Terra*.

A seguir, foi feito um sorteio e, seguindo a ordem do mesmo, cada grupo escolheu uma das 4 aeronaves do recorte. O professor distribuiu para cada grupo uma folha com uma fotografia e os dados da aeronave escolhida (uma folha por estudante do grupo), onde a tarefa de cada grupo consistia em descobrir aproximadamente em quanto tempo sua aeronave daria uma volta completa em torno da Terra.

À medida que os resultados iam sendo obtidos pelos grupos, o professor ia corrigindo no quadro negro, expondo os cálculos para toda a turma e atribuindo um grau ao resultado obtido pelos alunos.

Ao final, os grupos foram incentivados a competir, descobrindo o mais depressa possível em quanto tempo se daria uma volta completa em torno da Terra com a velocidade da luz. A aula encerrou-se com a correção deste último resultado, feita pelo professor para toda a turma.

- O homem e a Terra – uma perspectiva de tempo

Material utilizado:

- 21 calculadoras científicas, uma para cada estudante e uma para o professor; e
- 20 listas impressas, uma para cada aluno, com um resumo do cenário e os dados a serem confrontados, seguido de perguntas e espaço para o desenvolvimento das mesmas.

As perguntas que constavam na lista eram:

1. Qual percentual do tempo de existência da Terra contou com a presença do homem?
2. Se a Terra tivesse apenas um dia de existência, a que horas deste mesmo dia teria surgido o homem?
3. Na hipótese de que a Terra tivesse apenas um ano de existência, determine precisamente o dia e a hora deste mesmo ano em que o homem teria surgido.

Os alunos foram separados em 5 grupos de 4 integrantes cada. O cenário foi apresentado pelo professor junto dos dados *idade aproximada do planeta Terra*, em torno de 4,5 bilhões de anos, e *registro temporal do primeiro hominídeo* de que se tem ciência, o Australopitecos, que data de aproximadamente 4 milhões de anos atrás.

As listas foram distribuídas entre os alunos e, em seguida, o professor guiou os grupos na produção dos dados pedidos. Foi atribuído um grau (pontuação) à precisão de cada grupo e o professor seguiu para a correção da tarefa.

Por fim, o professor discorreu brevemente sobre as subdivisões dos hominídeos, acrescentando o dado *registro temporal do primeiro Homo sapiens*, categoria na qual os humanos modernos estão, datando de aproximadamente 350 mil anos atrás. A tarefa de casa, esta individual, consistia na produção dos mesmos dados pelos alunos, agora para o Homo sapiens.

A correção da tarefa de casa, deu-se na aula seguinte.

- A conquista da estrela mais próxima

Material Utilizado:

- 21 calculadoras científicas, uma para cada estudante e uma para o professor; e
- 20 listas impressas, uma para cada alunos, com um resumo do cenário e os dados *distância entre a Terra e o Sol*, *velocidade da luz no vácuo* e *distância entre o Sol e a estrela mais próxima* (Próxima Centauri), seguido de perguntas e espaço para o desenvolvimento das mesmas.

As perguntas que constavam na lista eram:

1. Quanto tempo a luz do Sol leva para chegar até a Terra?
2. Hipoteticamente, se dispuséssemos da velocidade da luz, quanto tempo levaríamos para chegar à estrela mais próxima do Sol, Próxima Centauri?
3. Se um veículo tripulado humano atingisse velocidade equivalente à atingida pela Sonda Juno, em quanto tempo chegaríamos a Próxima Centauri?

Os alunos foram divididos em 5 grupos, no entanto, precisaram apresentar seus resultados individualmente. O professor fez a apresentação do cenário, apresentou os dados e resolveu o problema 1. Os problemas 2 e 3 foram propostos aos alunos.

Ao fim da aula, o professor corrigiu os exercícios 2 e 3 e pediu como tarefa de casa que os alunos estimassem o tempo que levaria do Sol até Próxima Centauri, se o veículo utilizado

atingisse velocidade equivalente à do veículo humano tripulado mais veloz da história, a missão Apollo 11, com seus aproximadamente 40.000 km/h.

A tarefa de casa foi corrigida na aula seguinte.

- Calculando o raio da Terra – A ideia de Eratóstenes

Material Utilizado:

- Projetor de slides
- 20 listas impressas, uma para cada aluno, com um resumo do cenário, o dado referente ao valor da *unidade estádio em metros*, além de 4 problemas e espaço para desenvolvimento dos mesmos.

As perguntas que constavam na lista eram:

1. Determine o comprimento total da circunferência terrestre na unidade de medida *estádio*.
2. Utilize a aproximação dada para a unidade *estádio* para determinar o comprimento da circunferência terrestre, em quilômetros.
3. Determine o raio aproximado da Terra encontrado por Eratóstenes, em quilômetros.
4. Sabendo-se que o valor aproximado mais atual para o raio da Terra é de 6378 km, determine em termos percentuais o tamanho do erro cometido por Eratóstenes.

Inicialmente foi exposto um resumo teórico sobre *ângulos nas paralelas, proporcionalidade entre arco e ângulo central numa mesma circunferência, comprimento de uma circunferência de raio dado e porcentagem*. A seguir, o professor expôs o cenário inicial do recorte, separou os alunos em 5 grupos e propôs os problemas, um por vez.

Para cada problema, o professor explicou como os alunos deveriam proceder, dando tempo para o desenvolvimento e corrigindo posteriormente.

Ao fim, as listas foram recolhidas, corrigidas e desenvolvidas na aula seguinte, com um grau atribuído a cada uma delas.

- Galileu e as Observações de Marte, Vênus e Mercúrio

Material Utilizado:

- Projetor de slides

- 20 listas impressas, uma para cada aluno, com um resumo do cenário e uma tabela com as datas das oposições de Marte de 2001 até 2035 (vide Tabela 2).

Tabela 2 - As oposições de Marte de 2001 até 2035

Data	Ascensão reta	Declinação	Diâmetro do disco	Distância
13/Jun/2001	17h 28m	-26° 30'	20,5"	0,456 U.A.
28/Ago/2003	22h 38m	-15° 48'	25,1"	0,373 U.A.
07/Nov/2005	02h 51m	15° 53'	19,8"	0,470 U.A.
28/Dez/2007	06h 12m	26° 46'	15,5"	0,600 U.A.
29/Jan/2010	08h 54m	22° 09'	14,0"	0,664 U.A.
03/Mar/2012	11h 52m	10° 17'	14,0"	0,674 U.A.
08/Abr/2014	13h 14m	-05° 08'	15,1"	0,621 U.A.
22/Mai/2016	15h 58m	-21° 39'	18,4"	0,509 U.A.
27/Jul/2018	20h 33m	-25° 30'	24,1"	0,386 U.A.
13/Out/2020	01h 22m	05° 26'	22,3"	0,419 U.A.
08/Dez/2022	04h 59m	25° 00'	16,9"	0,550 U.A.
16/Jan/2025	07h 56m	25° 07'	14,4"	0,643 U.A.
19/Fev/2027	10h 18m	15° 23'	13,8"	0,678 U.A.
25/Mar/2029	12h 23m	01° 04'	14,4"	0,649 U.A.
04/Mai/2031	14h 46m	-15° 29'	16,9"	0,559 U.A.
27/Jun/2033	18h 30m	-27° 50'	22,0"	0,427 U.A.
15/Set/2035	23h 43m	-08° 01'	24,5"	0,382 U.A.

U.A. é a abreviatura de Unidade Astronômica.

Fonte: <http://www.zenite.nu/marte-em-oposicao/>

A aula foi meramente expositiva, sem exercícios ou atividades lúdicas. Foi explicado que no dia 27 de agosto de 2003, Marte esteve em sua menor distância com relação à Terra em quase 60 mil anos.

Ao final, o professor incentivou os alunos a observarem Marte a olho nu, no dia 27 de julho de 2018, data em que o planeta estaria em oposição. Com isso, seu brilho estaria bem mais intenso no céu.

- Isaac Newton: crítica à maçã

Material Utilizado:

- Projetor de slides
- 20 folhas impressas com o resumo do cenário, uma para cada aluno

O ano letivo estava a dois meses do fim e os alunos do projeto estavam desenvolvendo um trabalho interdisciplinar intitulado “Roteiro Individual de Estudos”, no qual precisavam selecionar assuntos de quaisquer disciplinas que tivessem estudado até aquele momento. Dentro de cada assunto, eles precisavam gerar uma ou mais perguntas sobre algo que tivessem dúvidas. Os alunos também precisavam destacar e discriminar informações que fossem senso comum e informações científicas. Cada professor do projeto orientou de 2 a 5 alunos no desenvolvimento do trabalho.

A partir de cada pergunta, o aluno precisava pesquisar na biblioteca do colégio ou na internet, fontes científicas para respondê-la, produzindo ao fim um trabalho com diversas perguntas respondidas e fundamentadas cientificamente.

O tema Astronomia foi escolhido por diversos alunos e houve mais de uma referência à maçã que caiu na cabeça de Newton (vide Quadro 1). Oportunamente, foi ministrada uma aula em torno do recorte *Isaac Newton: crítica à maçã*.

**Quadro 1 - Fragmento de trabalho desenvolvido por um estudante do Projeto CAIS.
Referência à maçã de Newton destacada**

O que eu quero aprender com esse projeto?			
Semana	Perguntas e Tarefas	Registro	Fontes
28/11/18	P1. Qual a diferença entre conhecimento científico e senso comum?	Conhecimento científico é baseado na ciência, em fatos comprovados. E o senso comum no que se ouve, no que crê e no que lhe é traduzido.	https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/administracao/conhecimento-cientifico-versus-senso-comum/38194
	P2. Quem descobriu a gravidade?	Isaac Newton	https://www.sitedecuriosidades.com/curiosidade/quem-descobriu-a-gravidade.html
	P3. Como ele descobriu a gravidade?	Isaac Newton estava, em Woolsthorpe, e ficou lá por cerca de 2 anos, fugindo da peste bubônica. Quando um dia, saiu para passear, e ficou embaixo de uma macieira onde por vezes deitava ou sentava, mas não para dormir, e sim para meditar e pensar. Não se sabe se é verdade, mas dizem que, um dia ao estar embaixo de uma macieira e cair uma maçã nele, Newton resolveu estudar o por quê das coisas serem atraídas para o chão.	http://www.biografiaisaa.newton.com.br/2013/12/Teoria-da-Gravitacao-Universal-A-maca-cai-na-cabeca-de-Newton.html

Fonte: O autor, 2018

A aula foi meramente expositiva, sem exercícios ou atividades lúdicas. Ao fim, foi proposto um debate com os alunos sobre a importância de se diferenciar senso comum de conhecimento científico.

5 CONCLUSÃO

O trabalho desenvolvido aqui, inclusive pela grande quantidade de informação disponível hoje sobre o assunto, está muito aquém do que se poderia desenvolver no sentido de trazer para a sala de aula contextos mais modernos do que se tem descoberto no âmbito da Astronomia. Buscou-se trazer esboços mínimos do que seria o “front” das descobertas da humanidade sobre o universo que nos é “visível”, que também significa, na perspectiva individual de cada indivíduo, descobrir sobre si mesmo, como parte integrante do universo que é.

Muitas perspectivas interessantes ficaram fora do trabalho. Seria interessante que se realizassem mais pesquisas que sirvam de ponte entre descobertas modernas das ciências naturais e a sala de aula, onde estão estudantes que, havendo suporte logístico, podem lidar desde muito jovens com uma quantidade de informação disponível sem precedentes. De modo que torna-se mais ineficaz tentar prever o que estudantes conseguiriam ou não compreender aos 12, aos 14 ou aos 16 anos, dependendo da paixão que lhes é despertada.

Aqui foi tomado um recorte que foi da antiguidade até a idade moderna, terminando o enquadramento histórico na teoria do Big Bang, que não é ainda a fronteira do que já se descobriu no âmbito da Astronomia. Há muito o que se falar sobre gravidade, observações em escala mais ampla, aglomerados e superaglomerados de galáxias (como, por exemplo, a maior estrutura individual descoberta pela ciência, que é um superaglomerado), sobre como a busca pela “teoria de tudo”, que uniria a teoria quântica à relatividade poderia explicar o que teria gerado o Big Bang. Buscas perspectivas destes cenários onde a matemática básica possa participar de algo interessante que tenha sido ou que ainda esteja por ser decifrado.

Que surjam novas tentativas, mesmo que modestas como a aqui desenvolvida, de captar fragmentos de cenários que, em geral, requerem grande maturidade matemática, mas que algumas vezes podem ser abordados de perspectivas simples, mais compatíveis com o cotidiano da sala de aula. E que as iniciativas no mesmo sentido já existentes também sejam mais postas em prática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, G. A Geometria e as Distâncias Astronômicas na Grécia Antiga. **RPM - Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 1, p. xx-xx, 1982.

ÁVILA, G. Geometria e Astronomia. **RPM - Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 13, 2010.

BEUTEL, A. <https://www.nasa.gov>. **NASA**, 2017. Disponível em: <<https://www.nasa.gov/press-release/nasas-juno-spacecraft-in-orbit-around-mighty-jupiter>>.

CASTELFRANCHI, Y. Homo e Seus irmãos. **Com Ciência**, dez. 2007.

CHANG, K. <https://www.nytimes.com>. **The New York Times**, 2016. Disponível em: <<https://www.nytimes.com/2016/08/25/science/earth-planet-proxima-centauri.html>>.

DODSWORTH, A. A Afirmação Cósmica da Vida. **Filosofia Ciência & Vida**, p. 9-16, 2009. Disponível em: <<http://www.academia.edu/download/33425857/Astrobiologia.pdf>>.

FRANCO, T. **Princípios de Combinatória e Probabilidade**. Salvador, BA: IMPA/UFBA, 2017. Disponível em: <<http://w3.impa.br/~tertu/>>.

FRIANÇA, A. C. S. Subjetividade no reconhecimento da vida no universo. **Revista Brasileira de Psicanálise**, São Paulo, v. 44, p. 93-101, 2010. Disponível em: <<http://pepsic.bvsalud.org/pdf/rbp/v44n3/a10.pdf>>.

FRÓES, A. L. D. Astronomia, Astrofísica e Cosmologia para Ensino Médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 36, ago. 2014.

GHEZ, A. M.; SALIM, S.; WEINBERG, N. N. Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits. **The Astrophysical Journal**, 689, 2008. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/article/10.1086/592738/meta>>.

HEWITT, P. G. **Física Conceitual**. 9. ed. Porto Alegre: Bookman Companhia Editora, 2002.

ISAAC, R. **The Pleasures of Probability (Undergraduate Texts in Mathematics)**. 1. Ed. New York: Springer Science+Business Media, 1995.

NAPOL, I. <https://www.tecmundo.com.br>. **Tecmundo**, 2017. Disponível em: <<https://www.tecmundo.com.br/mobilidade-urbana-smart-cities/121400-nasa-divulga-novos-videos-aviao-rapido-do-mundo.htm>>.

NASA. <https://www.nasa.gov>. **NASA**, 2009. Disponível em: <https://www.nasa.gov/mission_pages/apollo/missions/apollo10.html>.

NOGUEIRA, S. **Extraterrestres**. 1. ed. São Paulo: Editora Abril, 2014. Disponível em: <<http://socientifica.com.br/2017/06/equacao-mais-instigante-do-universo/>>.

NOGUEIRA, S.; CANALLE, J. B. G. **Astronomia: Ensino Fundamental e Médio**. Brasília: MCT (BRASILIA); MEC (BRASILIA), 2009. Disponível em: <http://www.santoandre.sp.gov.br/pesquisa/con_detalhe.asp?ID=102800>.

PENEREIRO, J. C. GALILEO E A DEFESA DA COSMOLOGIA COPERNICANA: A SUA VISÃO DO UNIVERSO. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física - UFSC**, São Paulo, 1 abril 2009. 173-198. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/2175-7941.2009v26n1p173/10026>>. UNICAMP - São Paulo.

POUGH, F. H.; JANIS, C. M.; HEISER, J. B. **A Vida dos Vertebrados**. 4ª. ed. São Paulo: Atheneu, 2008.

RAYAN, S. Analogical reasoning roots in Ibn al-Haytham's. **International Journal of Computational Bioinformatics**, Jerusalem, 3 fevereiro 2014. 321-326. Disponível em: <<http://bioinfo.aizeonpublishers.net/content/2014/1/bioinfo321-326.pdf>>.

REILLY, J. What it would look like if 7.2bn population were dumped into Grand Canyon. **Daily Mail Online**, 2014. Disponível em: <<https://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-2617559/Fascinating-image-depicts-look-like-7-2-billion-population-dumped-Grand-Canyon.html>>.

RINCÓN, L. **Curso Intermedio de Probabilidad**. Cidade do México: Las Prensas de Ciencias - UNAM, 2010. Disponível em: <www.matematicas.unam.mx/lars>.

RODRIGUES, M. A. OS PLANETAS DO SISTEMA SOLAR EM LIVROS DIDÁTICOS DE CIÊNCIAS DA QUINTA SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL. **Revista Experiências em Ensino de Ciências**, Cuiabá-MT, v. 2, p. 1-10, Agosto 2007. Disponível em: <http://if.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo_ID36/pdf/2007_2_2_36.pdf>.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROUSSEAU, J.-J. **Émile, ou De l'éducation. Oeuvres Complètes de Jean-Jacques Rousseau**. Paris: [s.n.], v. 2, 1852.

SCUDDER, J. How big is the biggest star we have ever found? **The Conversation**, 9 fevereiro 2015. Disponível em: <<http://theconversation.com/how-big-is-the-biggest-star-we-have-ever-found-37304>>.

STEINER, J. E. Origem do Universo e do Homem. **SciELO**, São Paulo, 2006.

VERDET, J.-P. **Uma História da Astronomia**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991.

VINHOLES, T. <https://airway.uol.com.br>. **Airway**, 2015. Disponível em: <<https://airway.uol.com.br/conheca-os-avioes-mais-rapidos-de-todos-os-tempos/>>.

WALPOLE, S. C. et al. The weight of nations: an estimation of adult human biomass. **BMC Public Health**, Londres, 18 junho 2012. Disponível em: <<https://bmcpublihealth.biomedcentral.com/articles/10.1186/1471-2458-12-439#Bib1>>.

YATES, F. A. **Giordano Bruno and the Hermetic Tradition**. [S.l.]: Routledge, 1964.

ZIN, M. The Impact of Qur'anic Conception of Astronomical Phenomena on Islamic Civilization. **Ulasan Jurnal - Universiti Putra Malaysia**, Selangor, 2015. Disponivel em: <https://www.academia.edu/20062866/The_Impact_of_Qur_anic_Conception_of_Astronomical_Phenomena_on_Islamic_Civilization>.