

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Felipe Augusto de Oliveira Martins

**EXPLORANDO ALGUMAS CURVAS NOTÁVEIS NO
ENSINO MÉDIO:
história, propriedades e aplicações**

Rio de Janeiro
2019



Felipe Augusto de Oliveira Martins

EXPLORANDO ALGUMAS CURVAS NOTÁVEIS NO ENSINO MÉDIO:
história, propriedades e aplicações

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Marilis Bahr Karam Venceslau

Rio de Janeiro
2019

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

M386 Martins, Felipe Augusto de Oliveira
Explorando algumas curvas notáveis no ensino médio: história,
propriedades e aplicações / Felipe Augusto de Oliveira Martins. – Rio de
Janeiro, 2019.
120 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa,
Extensão e Cultura.

Orientador: Marilis Bahr Karam Venceslau.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Cônicas. 3. Curvas. I. Venceslau,
Marilis Bahr Karam. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692

Felipe Augusto de Oliveira Martins

EXPLORANDO ALGUMAS CURVAS NOTÁVEIS NO ENSINO MÉDIO:
História, propriedades e aplicações

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____ / ____ / ____.

Banca Examinadora:

Dra. Marilis Bahr Karam Venceslau (Orientadora)
Colégio Pedro II

Dra. Katia Rosenvald Frensel
Universidade Federal Fluminense

Dra. Patrícia Erthal de Moraes
Colégio Pedro II

Dr. Diego de Souza Nicodemos
Colégio Pedro II

Rio de Janeiro
2019

À memória de Mirian Célia de Oliveira.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida.

A minha eterna mãe, Mirian, que sempre incentivou meus estudos.

Minha amada companheira, Sharon, pelo incentivo e paciência.

Aos colegas de turma do PROFMAT – Pedro II, por toda ajuda durante o curso.

Aos familiares e amigos, por toda força que me deram durante esta caminhada.

Aos professores, que de alguma forma contribuíram à minha formação, em especial a Professora Marilis Bahr Karam Venceslau, por me orientar, pela paciência, disponibilidade e principalmente por acreditar em mim.

Ao PROFMAT, por oferecer um curso tão enriquecedor e a CAPES, pelo apoio financeiro.

"Não há linhas retas ou cantos afiados na natureza."

Gaudí

RESUMO

MARTINS, Felipe Augusto de Oliveira. **Explorando algumas curvas notáveis:** história, propriedades e aplicações. 2019. 100 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

O presente trabalho discorre sobre algumas curvas notáveis: cônicas, cicloides, catenárias e lemniscatas. A pesquisa considera a importância de dar significado ao estudo da Matemática e disserta sobre aspectos históricos, propriedades e aplicações de algumas curvas. As cônicas têm sua teoria trabalhada com mais rigor, pois são conteúdos comuns na grade curricular do ensino médio das escolas. Delas são apresentadas uma introdução histórica, definições, propriedades, equações, gráficos e diversas aplicações. A cicloide é trabalhada com maior enfoque nas aplicações; também são apresentados os famosos problemas da braquistócrona e da tautócrona. O mesmo ocorre no estudo da catenária, cujo enfoque principal está nas suas aplicações e no problema da corrente suspensa. E por fim, trata-se da lemniscata, que é apresentada como um caso especial das curvas ovais de Cassini, abordando-se sua definição, suas propriedades e equações gerais.

Palavras-chave: Curvas notáveis; Matemática; Aplicações.

ABSTRACT

MARTINS, Felipe Augusto de Oliveira. **Título:** e subtítulo se houver. 2019. 100 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

The present work discusses some remarkable curves: Conics, Cycloids, Catenaries and Lemniscates. This research considers the importance of giving meaning to the study of mathematics and disserts about historical aspects, properties and applications of some curves. The theory of Conics is worked more rigorously, as they are common contents in the curriculum of High School. For them, it is presented a historical introduction, definitions, properties, equations, graphs and various applications. The Cycloid is worked with greater focus on applications, also presenting the famous problems of Brachistochrone and Tautochrone. The same happens with the Catenary, being in its applications and the problem of a hanging chain the main focus of its study. Finally, it is introduced the Lemniscate, which is presented as a special case of the Cassini ovals, addressing its definition, its properties and general equations.

Keywords: Remarkable curves; Mathematics; Applications.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	12
2 ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS.....	15
2.1. Rene Descartes, o pai da Matemática Moderna.....	16
2.2 Pierre de Fermat, o príncipe dos amadores.....	18
3 COORDENADAS NO PLANO.....	20
3.1 Translação dos eixos coordenados.....	22
3.2 Distância entre dois pontos no plano.....	22
4. CÔNICAS.....	25
4.1 Circunferência.....	27
4.1.1 Definição de circunferência.....	27
4.1.2 Elementos da Circunferência.....	27
4.1.3 Equação da circunferência centrada em (x_0, y_0) e $r > 0$	28
4.1.4 Propriedades da circunferência.....	28
4.1.5 Aplicações.....	31
4.2 Elipse.....	34
4.2.1 Definição de elipse.....	34
4.2.2 Elementos da elipse.....	34
4.2.3 Forma Canônica da elipse.....	39
4.2.3.1 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX	39
4.2.3.2 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY	40
4.2.4 Esboço do gráfico da elipse.....	41
4.2.5. Forma canônica da elipse transladada.....	43
4.2.5.1 Elipse centrada no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX	43

4.2.5.2 Elipse centrada no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY.....	44
4.2.6 Propriedade geométrica da elipse e aplicações.....	45
4.2.6.1 Propriedade refletora da elipse	45
4.2.6.2 Espelhos elípticos.....	47
4.2.6.3 Aplicações à Arquitetura	49
4.3 Parábola.....	56
4.3.1 Definição da parábola	56
4.3.2 Elementos da parábola	57
4.3.3 Forma Canônica da parábola	58
4.3.3.1 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX	58
4.3.3.2 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY	60
4.3.4 Forma canônica da parábola transladada	62
4.3.4.1 Parábola com vértice no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX..	62
4.3.4.2 Parábola com vértice no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY .	63
4.3.5 Propriedade geométrica da parábola e aplicações.	65
4.4 Hipérbole	72
4.4.1 Definição de hipérbole	72
4.4.2 Elementos da hipérbole	73
4.4.3 Forma canônica da hipérbole.....	79
4.4.3.1 Hipérbole centrada na origem e reta focal coincidente com eixo OX	79
4.4.3.2 Hipérbole centrada na origem e reta focal coincidente com eixo OY	80
4.4.4 Esboço do gráfico da hipérbole	81
4.4.5 Forma canônica da hipérbole transladada	83
4.4.5.1 Hipérbole centrada no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX.....	83
4.4.5.2 Hipérbole centrada no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY	84
4.4.6 Propriedades geométricas da hipérbole e aplicações	85
4.4.6.1 Propriedade refletora da hipérbole	85

4.4.6.2 O telescópio refletor.....	87
5 MAIS ALGUMAS CURVAS.....	91
5.1 Cicloide	91
5.1.1 Introdução histórica	91
5.1.2 Definição da cicloide	91
5.1.3 Parametrização da cicloide.....	92
5.1.4 Aplicações	93
5.2 Catenária	97
5.2.1 O Problema da corrente suspensa	97
5.2.3 Definição da catenária.....	99
5.2.4 Equação cartesiana da catenária	99
5.3 Lemniscata.....	106
5.3.1 Um breve relato sobre as Ovais de Cassini	106
5.3.2 Lemniscata de Bernoulli	108
5.3.2.1 Definição da Lemniscata de Bernoulli.....	108
5.3.2.2 Elementos da lemniscata	109
5.3.2.3 Forma Canônica da Lemniscata.....	110
5.3.2.4 Equação da lemniscata dados os focos não pertencentes aos eixos.....	112
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	114
REFERÊNCIAS.....	116

1 INTRODUÇÃO

Tão importante quanto estudar Matemática é saber o porquê e o para que se estuda tal disciplina. Alguns, quando estão diante desta ciência, não percebem o quão rica e bela ela é.

Muito da falta de interesse dos alunos pela Matemática, decorre por não perceber sentido naquilo que se está aprendendo. Por isso é necessário que o professor dê significado ao conteúdo praticado em sala de aula.

As curvas exercem um fascínio sob o homem desde a Antiguidade. Elas estão presentes, por exemplo, em ornamentos em forma de ondas ou espirais em cerâmicas pré-históricas; na arquitetura gótica e até em telhados em construções contemporâneas. Muitos matemáticos se dedicaram ao estudo de algumas curvas e com a invenção da Geometria Analítica outras mais foram descobertas. Se determinadas curvas e suas propriedades não fossem exploradas, muitas das invenções, dos monumentos e das construções que se conhece hoje talvez não existissem.

O tema curvas é muito vasto e rico. Porém, sua riqueza só é explorada mais profundamente no Ensino Superior para aqueles que desejam cursar alguma carreira na área das Ciências Exatas, na Engenharia ou em áreas em que haja alguma interdisciplinaridade com a Matemática. Na Educação Básica, o ensino da reta e da circunferência se iniciam no Ensino Fundamental com uma abordagem puramente geométrica. Quando se inicia o estudo das funções, já no fim do Ensino Fundamental ou no início do Ensino Médio, a reta e a parábola são apresentadas como, respectivamente, gráficos das funções polinomiais de primeiro e de segundo graus. Basicamente, no Ensino Médio, as curvas são tratadas como gráficos de funções reais de variáveis reais. Somente no terceiro ano a Geometria Analítica é abordada. Acredita-se que para muitos alunos, o estudo de funções e, conseqüentemente, o de Geometria Analítica parece-lhes muito abstrato e sem significado.

É importante ressaltar que, embora o tópico cônicas esteja presente nos livros didáticos do terceiro ano do Ensino Médio (SMOLE et al, 2016; PAIVA, 2015; IEZZY et al, 2016), as cônicas não estão presentes na grade curricular da rede pública de alguns estados. No currículo mínimo da SEEDUC (Secretaria de Estado da Educação do Rio de Janeiro), a Geometria Analítica só aparece no terceiro e quarto bimestre do terceiro ano, tratando dos seguintes tópicos: distância entre pontos, equação geral e reduzida de uma reta, posição relativa entre retas e equação reduzida da circunferência dado seu centro e raio. Por outro lado, o currículo do Estado de São Paulo, não só se refere às cônicas, como sugere o estudo de suas aplicações.

Atualmente, em muitos livros didáticos que tratam o assunto, tem-se tomado o cuidado em justificar o aprendizado das cônicas: Smole (2016), Iezzy (2016) e Paiva (2015) trazem uma

introdução histórica, citando a obra de Apolônio e mostrando algumas aplicações práticas para tal. Porém, na maioria das vezes, essas contextualizações são muito breves, ocupam, quando muito, duas páginas do capítulo.

Baseando-se nisso, este trabalho tem como objetivos principais: apresentar um estudo de algumas curvas planas – além das cônicas – que devido a suas propriedades, são empregadas, por exemplo, no estudo da órbita dos planetas, em obras arquitetônicas ou em invenções, tais como, telescópios e antenas, justificando seu estudo e mostrando suas aplicações no cotidiano; e incentivar o uso do GeoGebra¹, um *software* de Geometria Dinâmica, como um facilitador da aprendizagem – para atingir tal propósito, todas as figuras elaboradas pelo autor, apresentadas neste trabalho, foram feitas utilizando-se o GeoGebra. Pretende-se assim, despertar o interesse de todos os alunos para o estudo do assunto abordado e não somente daqueles que gostam da Matemática. Mais, especificamente, pretende-se, para cada curva apresentada, fazer-se um breve relato histórico sobre sua origem, descrevê-la geométrica e algebricamente, analisar suas propriedades e apresentar algumas de suas aplicações à Arquitetura, à Engenharia, ou à Natureza.

A proposta deste trabalho é pensada para aulas no Ensino Médio, pois espera-se que, neste nível, os alunos já possuam um conhecimento de certos conteúdos matemáticos, que são pré-requisitos, para uma melhor compreensão do assunto, dado que, em geral, os tópicos Geometria Analítica e cônicas estão presentes no currículo de Matemática da 3ª série do Ensino Médio. Todavia as curvas podem ser abordadas em qualquer série, até mesmo no Ensino Fundamental, desde que haja uma adequação do tema ao público-alvo. Por exemplo, pode-se falar apenas de suas construções geométricas sem tratar de expressá-las através de equações, ou apenas apresentá-las, destacando suas propriedades geométricas e enfatizando suas aplicações, sem se aprofundar no aspecto matemático.

No Capítulo 2, abordar-se alguns aspectos históricos sobre curvas, e, no Capítulo 3, se faz uma apresentação do plano cartesiano e do cálculo da distância entre dois pontos, fundamentais para expressar as equações das curvas. Posteriormente, no Capítulo 4, faz-se uma introdução histórica do surgimento das cônicas, seguido de um estudo teórico das mesmas e suas aplicações. E por fim, no Capítulo 5, apresenta-se mais algumas curvas: a cicloide, a catenária e a lemniscata. Começa-se pela cicloide, abordam-se os problemas da Braquistócrona

¹ *GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI. Sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License, e é escrito em linguagem Java. Disponível gratuitamente em: <<https://www.geogebra.org/?lang=pt>>.*

e da Tautócronana, na sequência, introduz-se a curva catenária e finaliza-se com a bela lemniscata. O estudo destas curvas é composto por breves apresentações, definições e propriedades, e, quando possível, são exibidas algumas aplicações.

2 ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS

Os matemáticos gregos foram os primeiros a estudar as curvas definidas geometricamente. Na resolução de problemas geométricos, outros métodos além da régua e compasso – instrumentos utilizados para traçar retas e circunferências – podiam ser empregados, pois estes nem sempre resolviam todos os problemas propostos pelos matemáticos gregos antes e depois de Euclides. Estes outros métodos utilizam cônicas e curvas mecânicas – curvas construídas por mecanismos articulados – tais como a quadratriz, a espiral de Arquimedes e a conchoide de Nicodemes conhecidas antes de 300 a.E.C. Alguns dos problemas clássicos da geometria grega, como a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e posteriormente a trissecção do ângulo foram resolvidos recorrendo-se a cônicas e curvas mecânicas.

Pappus classificava os problemas geométricos em três classes: “problemas planos”, os quais podiam ser resolvidos por meio de retas e círculos; “problemas sólidos”, aqueles cujas soluções eram obtidas por meio de uma ou mais secções cônicas; e “problemas lineares”, aqueles que necessitavam de outras linhas envolvendo origens diversas das requisitadas para a resolução de problemas das duas outras classes tais como as espirais, a quadratriz, a conchoide e a cissoide (ROQUE, 2012).

No início do século XVII, houve um profundo avanço na teoria das curvas com a invenção de uma nova geometria chamada de Geometria Analítica. Em 1637, Descartes e Fermat:

“Dois pensadores trabalhando de modo independente, obtiveram resultados inovadores semelhantes. Antes do início desse ano, Fermat anunciou e enviou a Mersenne sua *Introduction des lieux plans et solides* (Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos). Este último recebeu, quase ao mesmo tempo, as provas do livro *Discurso do método*, de Descartes, contendo a Geometria. Ambos haviam estabelecido nesses textos técnicas semelhantes para tratar problemas de lugares geométricos de modo algébrico”. (ROQUE, 2012, p.332)

Isto possibilitou uma curva ser descrita como uma equação ao invés de uma construção geométrica. Além de possibilitar a introdução de novas curvas, também promoveu uma distinção formal entre as curvas que podem ser expressas por equações algébricas, chamadas curvas algébricas, e aquelas que não podem, chamadas curvas transcendentais. Também, possibilitou o desenvolvimento de outras áreas da Matemática como o Cálculo.

Nas seções a seguir, faz-se um breve relato da vida destes dois homens notáveis.

2.1. Rene Descartes, o pai da Matemática Moderna

Rene Descartes (1586 – 1650) obteve uma excelente formação acadêmica. Frequentou o colégio de jesuítas de La Flèche, onde estudou Línguas Clássicas, Ética, Lógica, Matemática e Física, porém graduou-se em Direito em Poitiers. Viajou por muitos anos com campanhas militares, não verdadeiramente como um soldado profissional, pois em muitas destas oportunidades Descartes se separava das campanhas para fazer viagem e estudos independentes.

Em grande parte, a ciência se desenvolve por substituição. Normalmente, quando se descobre algo novo e melhor, o anterior é descartado. Na Matemática, em geral, não há esta ruptura, ela cresce somando e não substituindo. Descartes seguia exatamente esta linha. Sua filosofia e ciência eram quase revolucionárias, ao passo que sua matemática tinha referências do passado. Boyer (1996) reforça este argumento afirmando que a principal contribuição de Descartes à Matemática, a invenção da Geometria Analítica, foi motivada por uma tentativa de resolver um problema do passado. A data de tal invenção não é conhecida, mas Boyer acredita que não foi muito posterior a 1628. Neste ano, Descartes escreveu uma carta ao amigo holandês, onde descrevia uma regra para construção das raízes de qualquer equação cúbica ou quártica por meio de uma parábola. Ainda em cartas para o amigo holandês, Descartes afirma que tinha feito tantos avanços na Aritmética e na Álgebra que já estava satisfeito. Infelizmente não se sabe quais seriam estes avanços, pois nada foi publicado.

A Holanda seria para onde Descartes se mudaria posteriormente. Três ou quatro anos depois de lá instalar-se, um outro amigo holandês chamou a atenção de Descartes para o *problema das três e quatro retas de Pappus*. Descartes acreditava que seus antepassados não teriam conseguido resolver tal problema. Motivado, ele aplicou seus métodos e o resolveu sem dificuldades. Percebendo o poder e a generalidade de seu ponto de vista, ele resolve levar a Geometria Analítica ao conhecimento de seus contemporâneos através da obra *La géométrie*.

La géométrie era um dos três apêndices do tratado *Discour de la méthode*. A edição original deste tratado foi publicada sem o nome do autor, mas todos conheciam a autoria da obra. Para Boyer (1996), a partir deste momento, a geometria cartesiana é sinônimo de Geometria Analítica, porém o objetivo fundamental de Descartes nada tem a ver com os textos atuais, que de modo geral reduz a Geometria à Álgebra, evidenciado na primeira frase do apêndice: “todo problema de geometria pode facilmente ser reduzido a termos tais que o

conhecimento dos comprimentos de certos segmentos basta para a construção” (BOYER, 1996). Esta frase deixa claro que o objetivo é basicamente uma construção geométrica. Apesar de que *La géométrie* ser frequentemente descrita como aplicação da Álgebra à Geometria, Boyer (1996) a caracteriza como “a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica”.

Boyer (1996) trata *La Géométrie* como o auge do progresso da álgebra formal e Descartes como autor que ia mais longe que qualquer outro em sua álgebra simbólica, enfatizando que *La Géométrie* é o livro mais antigo de Matemática que um estudante de hoje pode ler e entender sem dificuldades com a notação. Uma das poucas diferenças citadas é o uso do símbolo “∞” no lugar do “=” para descrever uma igualdade. Uso de letras do início do alfabeto para parâmetros, e do final, para incógnitas, dos símbolos “+” e “- V”, e a notação de exponencial são características que assemelham a notação de Descartes a utilizada atualmente, pois para o autor, nós adota-se sua notação. Descartes interpretava x^2 e x^3 também como segmentos, e não como área e volume, como era feito anteriormente. Para Boyer (1996), tal interpretação permitiu-lhe abandonar o princípio da homogeneidade, ao menos explicitamente, e, no entanto, preservar o significado geométrico. Isso torna sua Álgebra Geométrica mais flexível, a ponto de ler “xx” como “x quadrado”, sem necessariamente imaginar um quadrado.

Boyer (1996) alerta que não se deve enganar pelo título *La Géométrie*, que sugere uma obra primariamente geométrica. Para ele, Descartes era imparcial ao discutir os méritos da Álgebra e da Geometria. “Acusava a segunda de usar, demasiadamente, diagramas que fatigam a imaginação desnecessariamente, e a primeira de ser uma arte confusa por meio de interpretações geométricas” (BOYER, 1996, p. 233). Descartes decidiu usar o melhor de cada ramo, partindo de um problema geométrico, traduzi-lo para linguagem de equação algébrica, simplificá-la ao máximo para finalmente resolvê-la.

A abordagem mais geral que Descartes fez à família de curvas cônicas foi em decorrência do estudo do problema do lugar das três ou quatro retas de Pappus, curiosamente, o mesmo problema que o motivou a escrever *La Géométrie*, derivando a equação $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$ (equação geral de uma cônica passando pela origem). Citou os casos para as quais a cônica é uma reta, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

Descartes generaliza no livro II de *La Géométrie*, o “método do jardineiro” de construir uma elipse utilizando barbante, porém sem qualquer referência à equação desta curva. “Se D_1 e D_2 são as distâncias de um ponto variável P a dois pontos fixos F_1 e F_2 , respectivamente, se m e n são inteiros positivo, e K é qualquer constante positiva, então o lugar de P tal que $mD_1 + nD_2 = K$ é agora chamado uma oval de Descartes”. (BOYER, 1996, p.237).

Ainda sobre Descartes, Boyer (1996) finaliza que em termos de capacidade matemática, ele era o primeiro de sua época, mesmo afirmando que “no fundo não era realmente um matemático”, e classifica a Geometria apenas como um episódio de uma vida dedicada à Ciência e à Filosofia.

Descartes falece prematuramente em 1650, um ano após aceitar o convite da rainha Cristina da Suécia para instruí-la em Filosofia e estabelecer uma academia de ciência em Estocolmo.

2.2 Pierre de Fermat, o príncipe dos amadores

Para Boyer (1996), Fermat (1607 – 1665) era um rival de Descartes em capacidade matemática, mesmo não sendo um matemático profissional. Estudante de direito em Toulouse, onde serviu no parlamento local como advogado e conselheiro, dedicava-se a Literatura Clássica, Ciência e Matemática por prazer. Em 1629, começou a dedicar-se à “restauração” de obras perdidas na antiguidade, baseado em informações de tratados clássicos preservados. Neste mesmo ano, começou a fazer descobertas importantes em Matemática.

Uma das reconstruções de Fermat foi **Lugares planos de Apolônio**. Consequência deste esforço foi a descoberta em 1636, do que para Boyer corresponde ao princípio fundamental de Geometria Analítica: “Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, parábola um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva” (BOYER, 1996, p.238).

A exposição de Fermat ao que se refere à Geometria, encontra-se no curto tratado *Ad lucus planos et solidos isagoge* (Introdução aos lugares planos e sólidos), começando com a equação linear, ele escolheu um sistema de coordenadas arbitrárias para esboçar tal equação.

Usando a notação de Viète, Fermat esboçou o caso mais simples de equação linear:

$$“D in A aequetur B in E” (Dx = By \text{ em linguagem moderna}).$$

Fermat fez uso dum sistema uniaxial, considerando numa reta o semieixo positivo das abscissas, e não explicitando o semieixo positivo das ordenadas. Não usou abscissas negativas, restrição cuja consequência se refletiu nas suas construções geométricas, não obtendo a visualização de metade ou mais (por vezes até três quartos) do gráfico de algumas curvas (RAMOS, 2013).

Assim, o gráfico da equação linear acima seria uma semirreta com extremidade na origem, e a equação linear mais geral $ax + by = c^2$ seria um segmento de reta no primeiro

quadrante com extremidade no eixo das coordenadas. Posteriormente, Fermat anunciou o seguinte problema: “Dado qualquer número de retas fixadas, num plano, o lugar de um ponto tal que a soma de múltiplos quaisquer dos segmentos traçados a ângulos dados do ponto às retas dadas é uma reta” (BOYER, 1996, p.239). Isso, claro, é um corolário simples do fato de que as equações anteriores são funções lineares das coordenadas, e da proposição de Fermat que diz que toda equação do primeiro grau representa uma reta (BOYER, 1996).

Em seguida Fermat mostrou que a equação:

$$xy = k^2$$

representa uma hipérbole;

$$x^2 = y^2$$

uma reta ou semirreta;

$$a^2 \pm b^2 = by$$

uma parábola;

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2ay = c^2$$

um círculo;

$$a^2 - x^2 = ky^2$$

uma elipse; e

$$a^2 + x^2 = ky^2$$

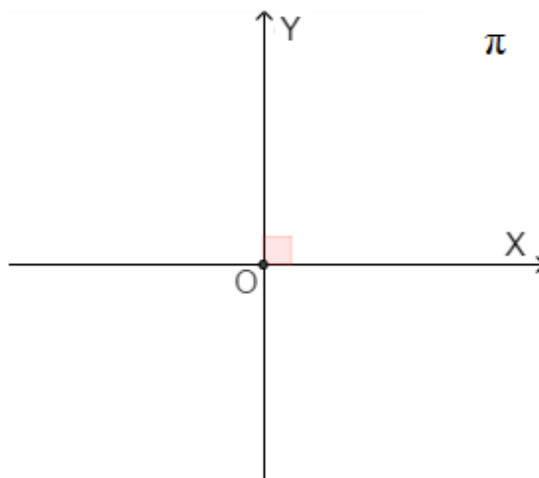
uma hipérbole.

Aplicando rotação dos eixos, Fermat reduziu as equações quadráticas mais gerais à uma das formas anteriores. Finalmente, Fermat considerou a seguinte proposição: “Dado qualquer número de retas, o lugar geométrico de um ponto tal que é constante a soma dos quadrados dos segmentos traçados a ângulos dados do ponto às retas é um lugar solido”, (BOYER, 1996, p.239). Para Boyer (1996), isto é o “coroamento” de seu tratado.

3 COORDENADAS NO PLANO

Segundo Delgado (2013), um sistema de eixos ortogonais num plano π é um par de eixos OX e OY perpendiculares e contidos em π que têm a mesma origem O . O eixo OX é chamado eixo horizontal e o eixo OY , eixo vertical. A este sistema dá-se o nome de plano cartesiano (Figura 1) em homenagem a seu criador Rene Descartes, que na Idade Moderna também era conhecido por seu nome latino Renatus Cartesius.

Figura 1 – plano cartesiano



Fonte: O autor, 2019.

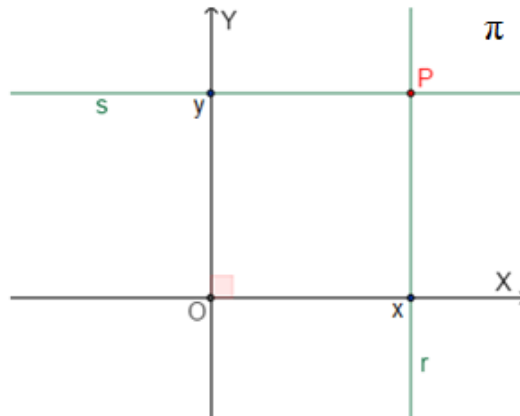
A escolha de um sistema de coordenadas no plano π permite estabelecer uma correspondência biunívoca $\pi \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dado um ponto $P \in \pi$, baixa-se por P paralelas aos eixos OX e OY , as quais cortam os eixos em pontos cujas coordenadas são x e y respectivamente. Logo, ao ponto $P \in \pi$ corresponde o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Reciprocamente, para cada par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ corresponde um ponto $P \in \pi$, interseção da paralela a OY traçada pelo ponto de coordenada x com a paralela a OX traçada a partir do ponto de OY cuja coordenada é y . Os números x e y são as coordenadas do ponto P relativamente ao sistema OXY definidos da seguinte maneira:

P está sobre o eixo OX , então P tem coordenadas $(x, 0)$.

P está sobre o eixo OY , então P tem coordenadas $(0, y)$.

P não está sobre qualquer um dos eixos, então P tem coordenadas (x, y) , onde x é a interseção da reta r paralela a OY , que passa por P , com OX e y é a interseção da reta s paralela a OX , que passa por P , com OY (Figura 2). Denomina-se x a *abscissa* e y a *ordenada* de P .

Figura 2 – Coordenadas do ponto P no plano cartesiano



Fonte: O autor, 2019.

Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro regiões chamadas quadrantes, conforme ilustra a Figura 3 abaixo:

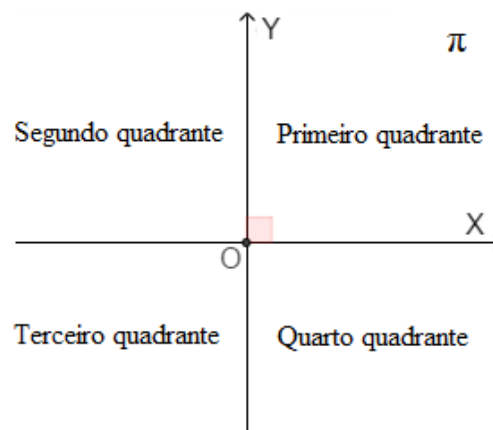
Primeiro Quadrante: $\{P = (x, y) \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$

Segundo Quadrante: $\{P = (x, y) \mid x < 0 \text{ e } y > 0\}$

Terceiro Quadrante: $\{P = (x, y) \mid x < 0 \text{ e } y < 0\}$

Quarto Quadrante: $\{P = (x, y) \mid x > 0 \text{ e } y < 0\}$

Figura 3 – Os quadrantes no plano cartesiano

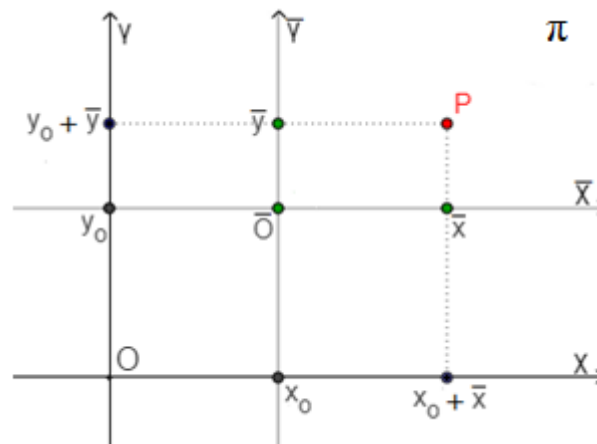


Fonte: O autor, 2019.

3.1 Translação dos eixos coordenados

Considere os pontos $P(x, y)$ e $\bar{O}(x_0, y_0)$ no sistema cartesiano OXY . Um novo sistema cartesiano $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ será obtido por uma translação de OXY se $OX // \bar{O}\bar{X}$ e $OY // \bar{O}\bar{Y}$ com o mesmo sentido dos eixos, respectivamente. Agora, basta estabelecer uma relação das coordenadas de P no sistema OXY e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$.

Figura 4 – Translação dos eixos coordenados



Fonte: O autor, 2019.

Sejam (\bar{x}, \bar{y}) as coordenadas do ponto P no sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ e (x, y) as coordenadas de P no sistema OXY , conforme mostra a Figura 4 acima. Então (DELGADO, 2013) as relações entre as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ são dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + \bar{x} \\ y = y_0 + \bar{y} \end{cases} \quad (3.1)$$

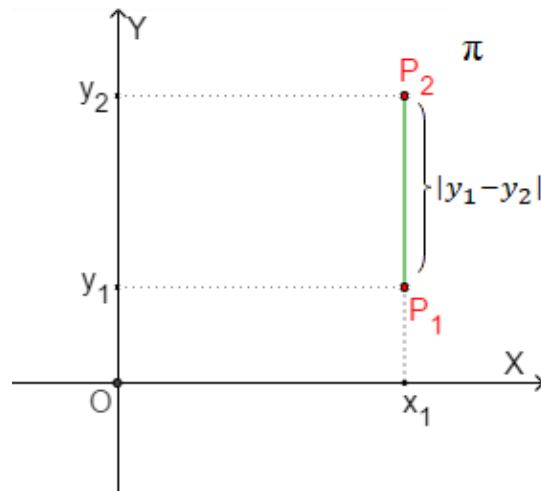
3.2 Distância entre dois pontos no plano

Sejam π um plano munido de um sistema de eixos ortogonais OXY e $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos deste plano.

Se P_1 e P_2 têm a mesma abscissa, ou seja, $x_1 = x_2$, conforme Figura 5, a distância entre P_1 e P_2 é dada por:

$$d(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|. \quad (3.2)$$

Figura 5 – Distância entre pontos de mesma abscissa

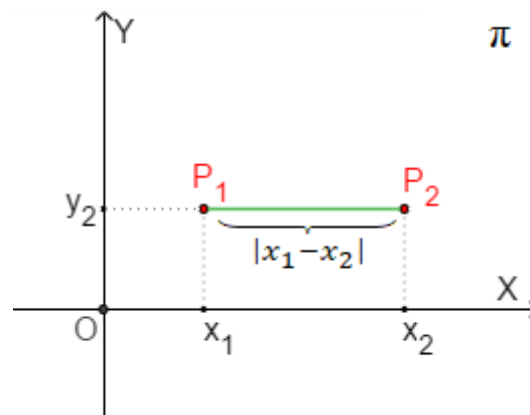


Fonte: O autor, 2019.

Se P_1 e P_2 têm a mesma ordenada, ou seja, $y_1 = y_2$, então a distância entre P_1 e P_2 é dada por (Figura 6):

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$$

Figura 6 – Distância entre pontos de mesma ordenada



Fonte: O autor, 2019.

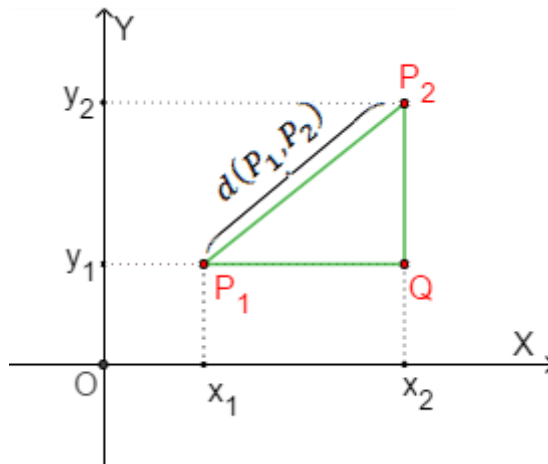
Já no caso das abscissas e ordenadas serem distintas entre si, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, a distância entre P_1 e P_2 é, aplicando o teorema de Pitágoras, conforme mostra a Figura 7, dada por:

$$d(P_1, P_2)^2 = d(P_1, Q)^2 + d(P_2, Q)^2$$

$$d(P_1, P_2)^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Figura 7 – Distância entre pontos através do Teorema de Pitágoras

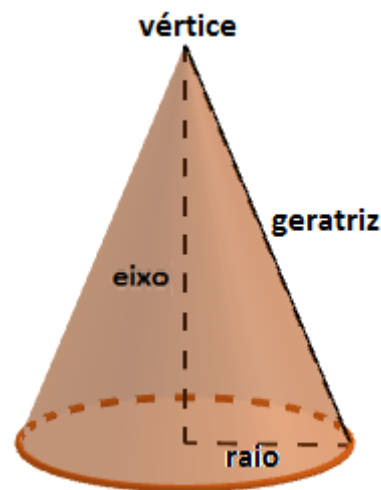


Fonte: O autor, 2019.

4. CÔNICAS

Foi na busca pela solução de um famoso problema da época, o da duplicação do cubo, que Menaecmus (380 – 320 A. C.) descobriu as seções cônicas, definidas segundo Boyer (1996) como a família de curvas que podem ser obtidas de uma mesma fonte, cortando um cone circular reto (Figura 8) por um plano não paralelo à sua base. Tais curvas, mais tarde, seriam chamadas de elipse, parábola e hipérbole. Porém essas curvas não eram tratadas de forma analítica, pois o conceito de equação geral em quantidades incógnitas era estranho ao pensamento grego, sendo essa deficiência na notação algébrica o principal motivo que impediu que os gregos construíssem uma geometria de coordenadas.

Figura 8 – Cone circular reto e seus elementos



Fonte: O autor, 2019.

Em termos de exposições gerais, as seções cônicas também foram escritas por Aristeu (370 – 300 a.C.) e Euclides. Mas nenhuma obra foi tão conceituada como *As cônicas* de Apolônio de Perga (262 – 190 a.C.). Este tratado foi um compilado das obras que abordavam o tema até aquele momento, com inovações importantes feitas por Apolônio.

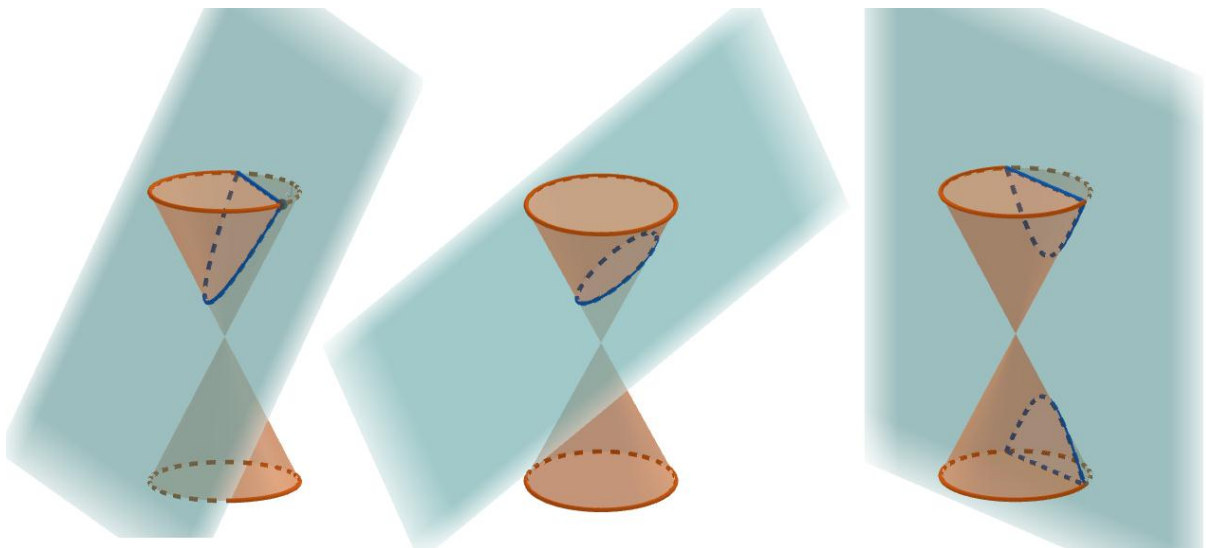
Boyer (1996) relata que até então as cônicas eram obtidas como secções de três tipos diferentes de cones circulares retos, conforme o ângulo do vértice fosse agudo, reto ou obtuso.

Apolônio foi o primeiro a conceder as cônicas como a interseção de uma mesma superfície circular cônica, cortadas por planos de inclinações distintas. Uma segunda generalização importante feita por Apolônio foi que o cone não precisa ser necessariamente reto, podendo este ser oblíquo ou escaleno.

Roque (2012) acrescenta que uma das novas concepções introduzidas por Apolônio, é a consideração de um cone de duas folhas (dois cones de mesmo vértice, em sentidos opostos, de modo que seus eixos estejam em uma mesma reta). Desta forma, se o plano corta todas as geratrizes sobre uma mesma folha do cone, obtém-se uma elipse; se o plano é paralelo a uma das geratrizes, obtém-se uma parábola; e se o plano corta as duas folhas do cone, obtém-se uma hipérbole (Figura 9). Também o mérito de ter cunhado os nomes elipse, parábola e hipérbole é atribuído a Apolônio, o qual deixou um tratado sobre cônicas em oito volumes.

A circunferência pode ser obtida pela interseção de um plano perpendicular ao eixo de um cone (Figura 10). Neste caso o plano intersecta também todas as geratrizes deste.

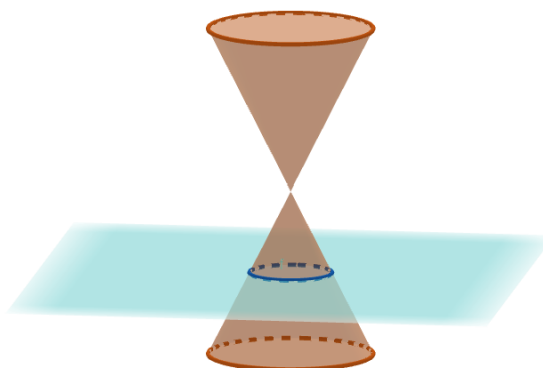
Figura 9 – Seções Cônicas



Fonte: Só Matemática, Disponível em:

<<https://www.somatematica.com.br/emedio/conicas/conicas.php>>. Acesso em: 12 Abr. 2019

Figura 10 – Circunferência através da secção do cone



Fonte: O autor, 2019

No capítulo, a seguir, o estudo teórico sobre as cônicas é baseado em Delgado et al (2013).

4.1 Circunferência

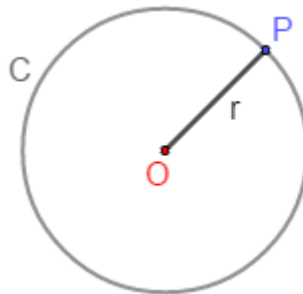
4.1.1 Definição de circunferência

Dados um ponto O pertencente à um plano π e um número $r > 0$. Uma circunferência C de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano cujas distâncias a O é igual a r , ou seja:

$$C = \{P \mid d(P, O) = r\}.$$

A Figura 11, a seguir, mostra o esboço de uma circunferência.

Figura 11 – Esboço da circunferência de acordo com a definição



Fonte: O autor, 2019.

4.1.2 Elementos da Circunferência

1. O ponto O é o **centro** da circunferência.
2. A distância r entre o centro O e qualquer ponto P da circunferência é chamado **raio** da circunferência.
3. O conjunto de pontos P' do plano cuja distância ao centro O é menor que o raio r , é chamado **interior da circunferência**.
4. O conjunto dos pontos P'' do plano cuja distância ao centro O é maior que o raio r é chamado **exterior da circunferência**.

4.1.3 Equação da circunferência centrada em (x_0, y_0) e $r > 0$

Considere o sistema de eixos ortogonais OXY . Pretende-se obter a equação da circunferência de centro $O = (x_0, y_0)$ e $r > 0$.

Pela definição de circunferência (4.1.1), tem-se que:

$$P = (x, y) \in C \Leftrightarrow d(P, O) = r.$$

Então:

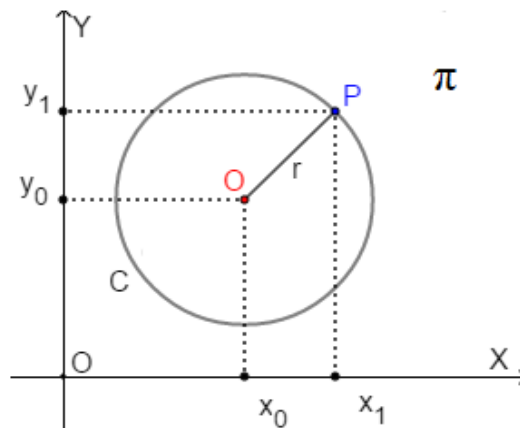
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtém-se a equação:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

que é a equação da circunferência com centro no ponto $O = (x_0, y_0)$ e raio $r > 0$, como mostra a Figura 12.

Figura 12 – Esboço da circunferência $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

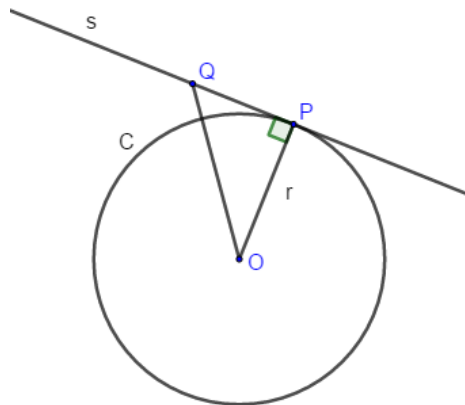


Fonte: O autor, 2019.

4.1.4 Propriedades da circunferência

1. A reta tangente a uma circunferência em qualquer um de seus pontos é perpendicular ao seu raio.

Figura 13 – Reta tangente a circunferência



Fonte: O autor, 2019.

Demonstração:

O ponto de tangência P é o ponto da reta s mais próximo do centro da circunferência, pois qualquer outro ponto Q , Q pertencente a s formará um segmento OQ maior que o raio (Figura 13). Para mostrar que a reta s e o raio r são perpendiculares, basta mostrar que o segmento que liga um ponto fora da reta ao ponto mais próximo na reta é perpendicular a reta.

Por hipótese temos que OP é a menor distância entre o ponto O e a reta s . Suponha por absurdo que OP não é perpendicular a s . Assim, existe um ponto Q pertencente a reta s , com $Q \neq P$ tal que OQ é perpendicular à s (Figura 14). Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ΔOPQ :

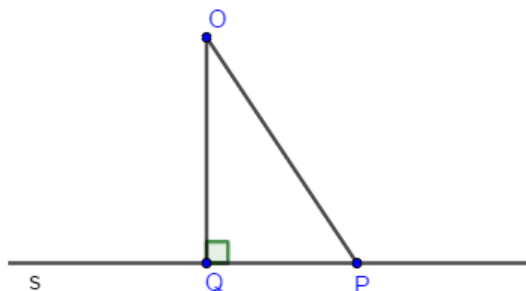
$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2,$$

desta forma,

$$\overline{OP} > \overline{OQ},$$

contrariando a hipótese. Logo OP é perpendicular a reta s .

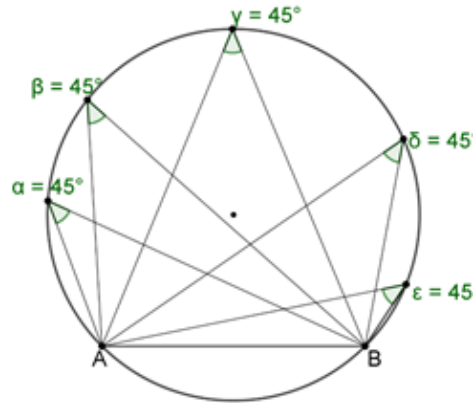
Figura 14 – Menor distância entre um ponto e uma reta



Fonte: O autor, 2019.

2. Em uma circunferência, o ângulo inscrito oposto à uma corda (como o segmento AB na Figura 15) é o mesmo em todos os pontos e igual à metade do arco \widehat{AB} .

Figura 15 – Ângulos inscritos na circunferência

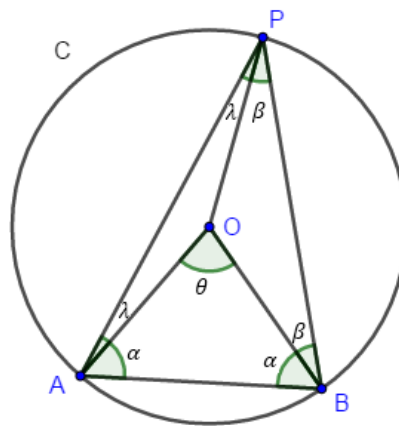


Fonte: O autor, 2019.

Demonstração:

Seja AB uma corda sobre a circunferência C de centro O e P um ponto qualquer de C diferente de A e B .

Figura 16 – Ângulos na circunferência



Fonte: O autor, 2019.

Observe que:

$$\overline{OA} = \overline{OP} = \overline{OB} = r$$

Assim, os triângulos ΔOAB , ΔOAP e ΔOPB são isósceles de base AB , AP e PB , respectivamente.

No triângulo ΔOAB , tem-se:

$$\theta + 2\alpha = 180^\circ$$

$$2\alpha = 180^\circ - \theta. (*)$$

No triângulo ΔPAB , tem-se:

$$2\alpha + 2\beta + 2\lambda = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2(\beta + \lambda) = 180^\circ. (**)$$

Substituindo (*) em (**), tem-se que:

$$180^\circ - \theta + 2(\beta + \lambda) = 180^\circ$$

$$2(\beta + \lambda) = \theta = \widehat{AB}$$

e, por fim, obtemos:

$$\beta + \lambda = A\widehat{P}B = \frac{\widehat{AB}}{2}.$$

4.1.5 Aplicações

Teatros Circulares

Figura 17 – Teatro de Epidauro, na Grécia



Fonte: História e Arquitetura. Disponível em:

<<http://historiaearquitectura.blogspot.com/2012/01/teatro-de-epidauro-grecia.html>>. Acesso em: 28 Abr. 2019.

Os teatros em forma de uma circunferência, ou arco de circunferências, foram inspirados no teatro da cidade de Epidauro, na Grécia (Figura 17 acima). Neste tipo de estrutura, os espectadores dispostos em uma mesma fileira têm o mesmo ângulo de visão. O formato circular além de favorecer a acústica do teatro, permite uma maior capacidade e uma maior proximidade do palco, mesmo nas fileiras mais altas.

Rampa de skate *Half Pipe*

As rampas de skate *Half Pipe* são aquelas com formato de “U”. As laterais das rampas são compostas por dois setores circulares (Figura 18) e podem chegar a 4 metros de altura. Com a ajuda do *software* GeoGebra é possível visualizar as circunferências utilizadas para moldar a rampa (Figura 18).

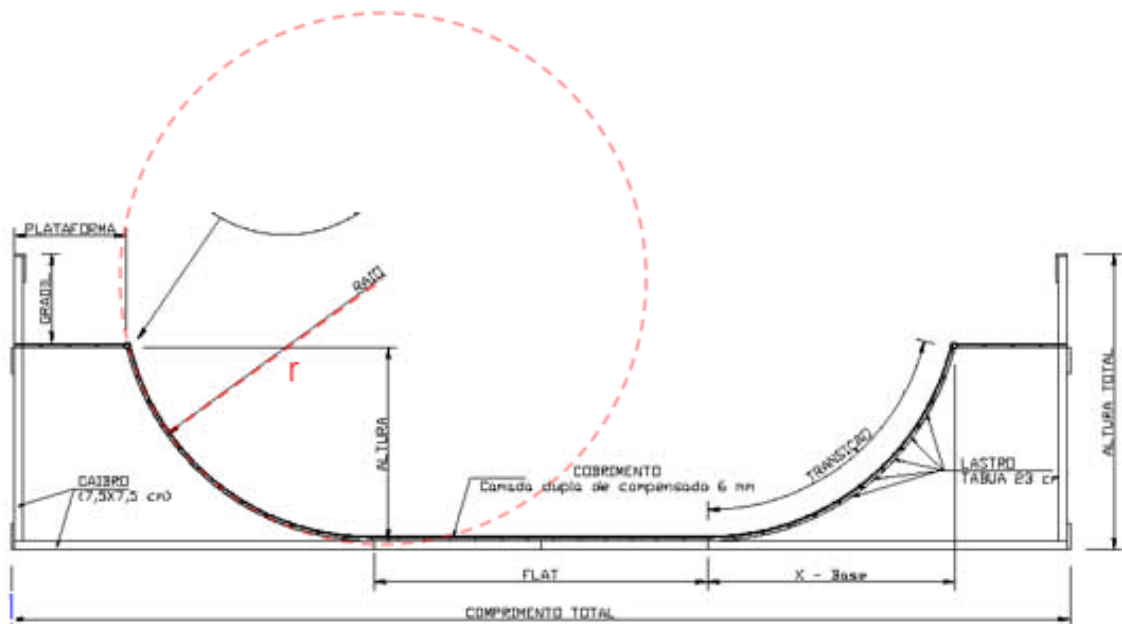
Figura 18 – Rampa de skate Half Pipe



Fonte: Up On Board. Modificado de
 :<<https://uponboard.wordpress.com/tag/vertical/page/2/>>. Acesso 28 Abr. 2019.

A Figura 19 mostra a planta de uma mini rampa *Half Pipe*. Nesta planta é dada o raio da circunferência utilizada para moldar a lateral da rampa.

Figura 19 – Planta de um rampa de skate Half Pipe



Fonte: Woohoo. Modificado de: <<http://www.woohoo.com.br/noticia/mini-rampa-1>>. Acesso: 28 Abr. 2019.

Além da presença da circunferência neste tipo de rampa, qual o propósito de mencionar esta prática esportiva no contexto deste trabalho?

Nas últimas décadas tem-se discutido a importância do trabalho por projetos no ambiente escolar (MELLO, 2006, apud MACHADO, 2000). O artigo intitulado “A rampa de skate de tempo mínimo”, RPM 59, (MELLO, 2006), exemplifica uma abordagem teórica no trabalho com projetos de matemática de um forma muito clara e didática que é válido ser mencionada: Mello (2006) parte de uma situação-problema sobre a rampa de skate *Half Pipe*, e propõe: “múltiplas possibilidades de abordagem do tema gerador no contexto de um projeto de matemática com alunos de ensino médio”. Assim, ele desafia os alunos e instiga-os perguntando se “a circunferência que compõe a lateral da rampa é, de fato, a curva do tempo mínimo de descida”, (MELLO, 2006). A partir daí, introduz o problema da braquistócrona, que é o problema da curva de tempo mínimo ligando dois pontos de alturas diferentes; e apresenta um estudo sobre a cicloide – a curva que resolve o problema da braquistócrona, a qual será tratada no próximo capítulo – utilizando várias abordagens: histórica, matemática, tecnológica e experimental. O leitor que desejar mais detalhes consulte Mello (2006).

4.2 Elipse

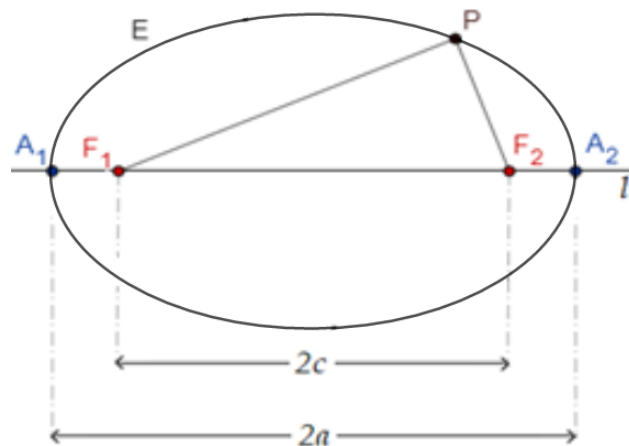
4.2.1 Definição de elipse

Sejam dados dois pontos F_1 e F_2 , tais que a distância entre eles seja igual a $2c \geq 0$. A elipse E (Figura 20) de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a constante $2a > 2c \geq 0$, isto é:

$$E = \{P / d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\},$$

onde $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$.

Figura 20 - Esboço de uma elipse de acordo com a definição



Fonte: O autor, 2019.

4.2.2 Elementos da elipse

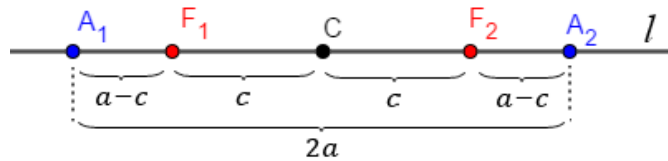
1. Os pontos F_1 e F_2 são **os focos** da elipse.
2. A reta l que contém F_1 e F_2 é chamada de **reta focal** (Figura 15, acima).
3. Há exatamente dois pontos de interseção A_1 e A_2 da elipse com a reta focal l , os quais são chamados **vértices** da elipse.

Observe que se A é um vértice da elipse, não pode ocorrer que A esteja entre F_1 e F_2 , pois, caso contrário, (Figura 21), tem-se:

$$2c = d(F_1, F_2) = d(F_1, A) + d(A, F_2) = 2a,$$

o que contradiz a definição ($2a > 2c \geq 0$).

Figura 21 – Posição dos vértices A_1 e A_2 da elipse em relação aos seus focos



Fonte: O autor, 2019.

Seja $A_1 \in E \cap l_1$ tal que $d(A_1, F_1) = x$, sendo l_1 a semirreta de l de origem F_1 que não contém F_2 . Desde que F_1 está entre A_1 e F_2 e $A_1 \in E$, tem-se:

$$d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = 2a$$

$$x + 2c + x = 2x + 2c = 2a$$

$$x = a - c.$$

Portanto, o ponto A_1 , $A_1 \in l_1$ que dista $a - c$ do foco F_1 , pertence à elipse E . Analogamente, mostra-se que o ponto A_2 , $A_2 \in l_2$ que dista $a - c$ do foco F_2 , pertence à elipse E , sendo l_2 a semirreta da reta focal de origem F_2 que não contém F_1 .

4. O segmento A_1A_2 é o **eixo focal** da elipse e $d(A_1, A_2) = 2a$.

De fato, como:

$$d(A_1, F_1) = d(A_1, F_2) = a - c,$$

F_1 está entre A_1 e F_2 e F_2 está entre F_1 e A_2 , tem-se:

$$d(A_1, A_2) = d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) + d(F_2, A_2) = (a - c) + 2c + a - c = 2a.$$

5. O ponto médio C do segmento A_1A_2 é o **centro** da elipse (C também é ponto médio de F_1F_2).

6. A reta l' que contém C e é perpendicular a l é chamada **reta não focal**.

7. Há exatamente dois pontos de interseção B_1 e B_2 da elipse com a reta não focal l' , os quais são chamados **vértices da elipse sobre a reta não focal**.

Isso é fácil de ser visto dado que se C é o centro da elipse E , ele é o ponto médio do segmento A_1A_2 e também é ponto médio de F_1F_2 . Desta forma, tem-se que

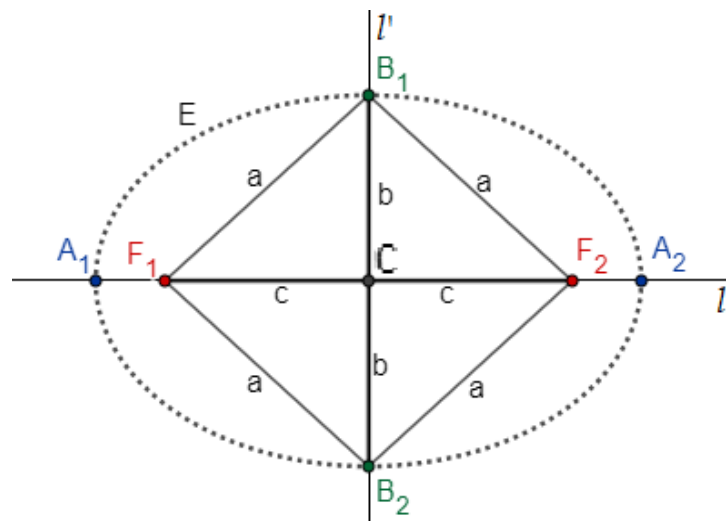
$$d(C, A_1) = d(C, A_2) = a \text{ e } d(C, F_1) = d(C, F_2) = c.$$

Agora como a reta não focal l' é a mediatriz do segmento F_1F_2 tem-se que $B \in l' \cap E$ se, e somente se, $d(B, F_1) = d(B, F_2) = a$. Aplicando o Teorema de Pitágoras, segue que existem dois pontos B_1 e B_2 pertencentes à $l' \cap E$ tal que B_1 e B_2 pertencem a l' e

$$d(C, B_1) = d(C, B_2) = b,$$

onde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, conforme mostra a Figura 22.

Figura 22 – Elipse com seus elementos e distâncias destacados

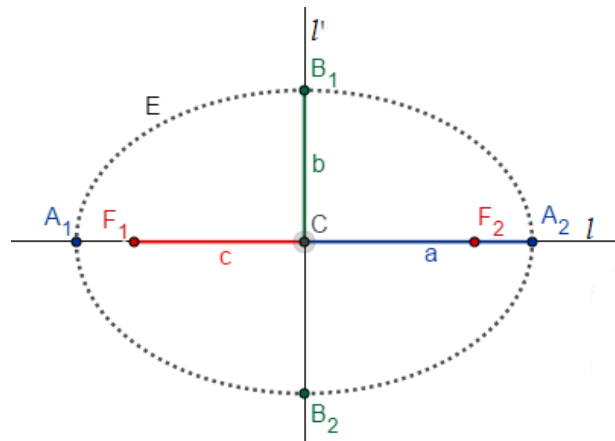


Fonte: O autor, 2019.

8. O número $e = \frac{c}{a}$ é a **excentricidade** da elipse e $0 \leq e < 1$. Observe que a circunferência é um caso especial da elipse, onde os dois focos são coincidentes, ou seja, a distância entre eles é nula, e os comprimentos dos dois eixos são iguais, isto é, $a = b$. Consequentemente, a excentricidade é zero. Quando e tende a 1, os focos estão distantes do centro da elipse e as elipses ficam mais achatadas.

9. Os números a , b e c são as distâncias do centro, respectivamente, aos vértices sobre a reta focal, aos vértices sobre a reta não focal e aos focos, conforme mostra a Figura 23.

Figura 23 – Representação das distâncias a , b e c na elipse



Fonte: O autor, 2019.

Observação 1

A elipse E é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro.

Sejam $P \in E$ e P' o simétrico de P em relação à reta focal, por congruência de triângulos (LAL), temos:

$$\Delta F_2 P Q \equiv \Delta F_2 P' Q \quad e \quad \Delta F_1 P Q \equiv \Delta F_1 P' Q.$$

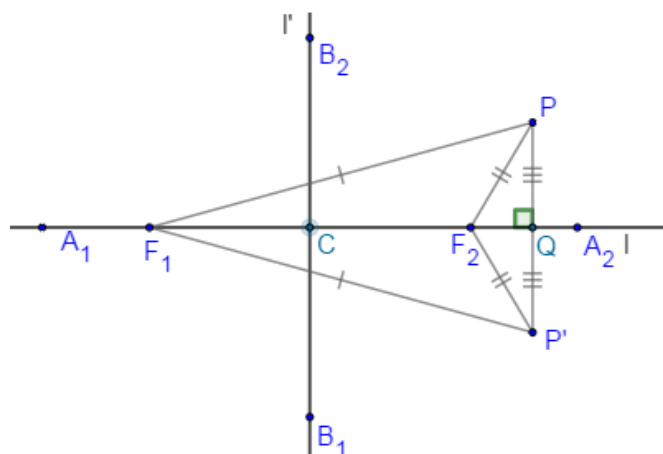
Em particular,

$$|F_1 P| = |F_1 P'| \quad e \quad |F_2 P| = |F_2 P'|.$$

Logo,

$$d(P', F_1) + d(P', F_2) = d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow P' \in E.$$

Figura 24 – Simetria da elipse em relação à reta focal



Fonte: O autor, 2019.

Se $P \in E$, e P'' é o simétrico de P em relação à reta não focal, então:

$$\Delta QPM \equiv \Delta QP''M \text{ e } \Delta F_1MC \equiv \Delta F_2MC.$$

Em particular,

$$|PM| = |P''M|, \quad |F_1M| = |F_2M| \text{ e } \widehat{F_1MC} = \widehat{F_2MC},$$

Portanto,

$$|F_1P''| = |F_2P|.$$

Por congruência (LAL), temos:

$$\Delta F_1P''F_2 \equiv \Delta F_2PF_1.$$

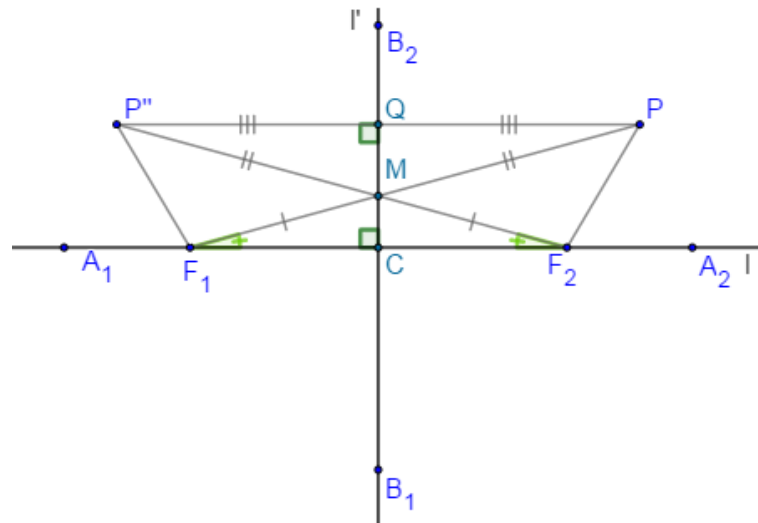
Em particular,

$$|PF_1| = |P''F_2|,$$

Portanto,

$$d(P'', F_1) + d(P'', F_2) = d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow P'' \in E.$$

Figura 25 – Simetria da elipse em relação à reta focal



Fonte: O autor, 2019.

Se $P \in E$ e P_0 é o simétrico de P em relação ao centro, então:

$$\Delta PCF_2 \equiv \Delta P_0CF_1 \text{ e } \Delta F_1CP \equiv \Delta F_2CP_0.$$

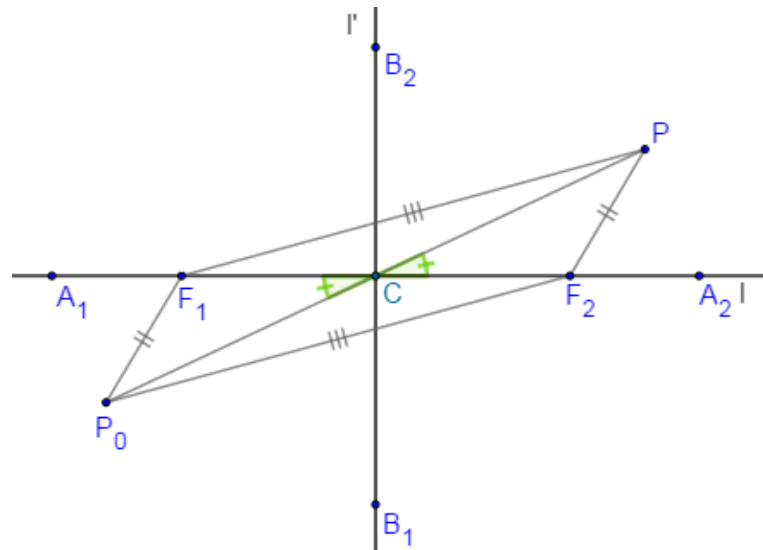
Em particular,

$$|F_1P| = |F_2P_0| \text{ e } |F_2P| = |F_1P_0|.$$

Portanto,

$$d(P_0, F_1) + d(P_0, F_2) = d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow P_0 \in E.$$

Figura 26 – Simetria da elipse em relação à reta focal



Fonte: O autor, 2019.

4.2.3 Forma Canônica da elipse

Pretende-se a seguir, para alguns casos especiais, obter a equação da elipse em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY .

4.2.3.1 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Considere o sistema de eixos ortogonais OXY . Para obter a equação da elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX , deve-se ter:

$$F_1 = (-c, 0), \quad F_2 = (c, 0), \quad A_1 = (-a, 0), \quad A_2 = (a, 0), \\ B_1 = (0, -b) \text{ e } B_2 = (0, b),$$

onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Pela definição de elipse:

$$P = (x, y) \in E \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Então,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4a^2 - 4xc = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(a^2 - xc)^2 = (a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2,$$

mas, como $b^2 = a^2 - c^2$, tem-se:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por a^2b^2 , com a e b não nulos, obtém-se a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a forma canônica da elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

Para maiores detalhes o leitor é convidado a consultar Delgado et al (2013).

4.2.3.2 Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Considere o sistema de eixos ortogonais OXY . Para se obter a equação da elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY , deve-se ter:

$$F_1 = (0, -c), \quad F_2 = (0, c), \quad A_1 = (0, -a), \quad A_2 = (0, a),$$

$$B_1 = (-b, 0) \text{ e } B_2 = (b, 0),$$

onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Procedendo-se de maneira análoga, ao caso da elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX , obtém-se que a equação desta elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

que é a forma canônica da elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY .

4.2.4 Esboço do gráfico da elipse

A fim de esboçar uma elipse E , considere um sistema de eixos ortogonais OXY , com origem O no centro de E e o eixo OX coincidindo com sua reta focal, então a equação da elipse E é dada na forma canônica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Logo,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Considere a função:

$$f(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [0, a].$$

Para $x = 0$, tem-se:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - 0^2} \Leftrightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2} \Leftrightarrow y = b.$$

Para $y = 0$, tem-se:

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

Desta forma, o gráfico da elipse passa pelos pontos $(0, b)$ e $(a, 0)$. Além disso, tem-se que:

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} < 0, \forall x \in (0, a).$$

Logo, pelo Teste da crescente/decrescente, Stewart (2013), a função é decrescente. Todavia, pelo Teste da concavidade, Stewart (2013).

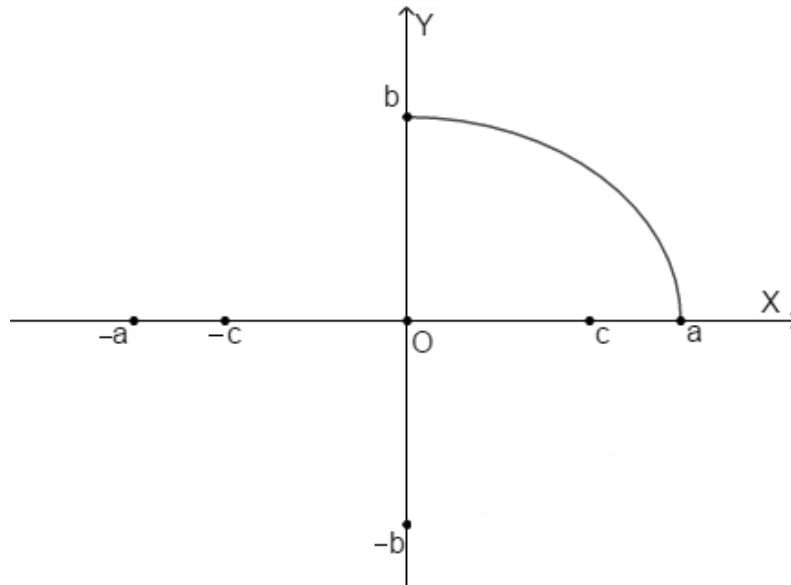
$$y'' = \frac{-ba}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0, \forall x \in (0, a).$$

Assim, y'' é decrescente em $(0, a)$, logo f é côncava².

A Figura 27, a seguir, mostra o gráfico de f .

²Uma função f é côncava se o segmento que liga quaisquer dois pontos do gráfico fica completamente (exceto as extremidades) abaixo do gráfico de f .

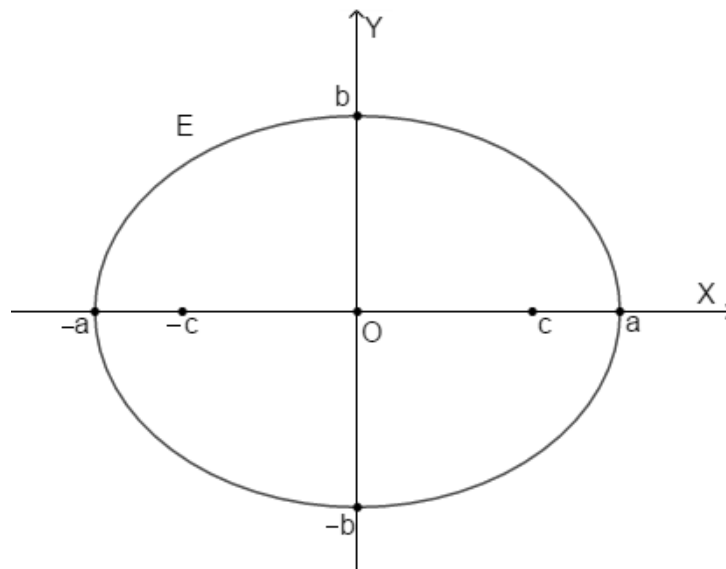
Figura 27 - Gráfico da função $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$



Fonte: O autor, 2019.

Como a elipse é simétrica em relação ao eixo OX (reta focal) e em relação ao eixo OY (reta não-focal), seu gráfico tem a forma apresentada na Figura 28:

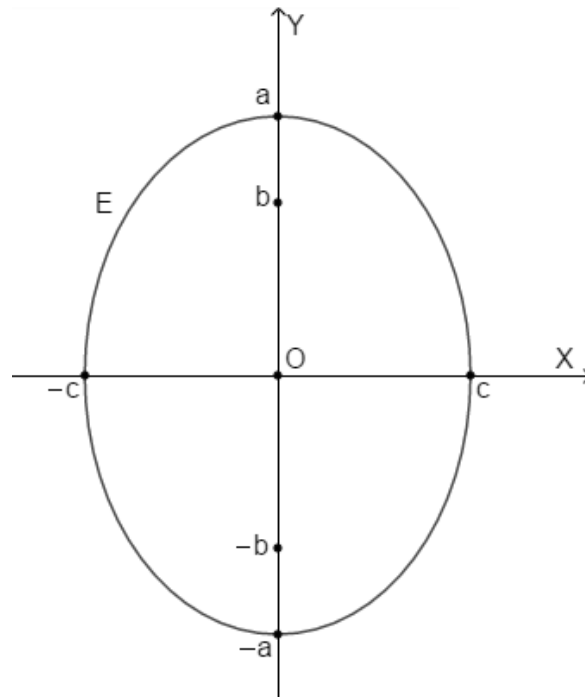
Figura 28 - Gráfico da elipse $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Fonte: O autor, 2019.

De forma análoga, na Figura 29, esboça-se o gráfico da elipse $E: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Figura 29 - Gráfico da elipse $E: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$



Fonte: O autor, 2019.

4.2.5. Forma canônica da elipse transladada

4.2.5.1 Elipse centrada no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX

Sendo o ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$ o centro da elipse E e como a reta focal l contém \bar{O} , tem-se que a reta focal l é dada pela equação: $y = y_0$ (paralela ao eixo $\bar{O}\bar{X}$). A reta não focal l' que contém \bar{O} e é perpendicular a l é da forma $l' : x = x_0$ (paralela ao eixo $\bar{O}\bar{Y}$), conforme Figura 27.

No sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ a elipse tem equação:

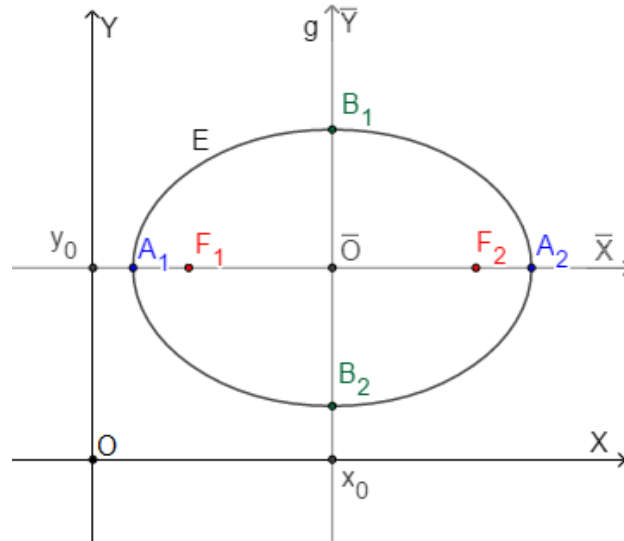
$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1.$$

Usando-se as Equações (3.1), obtém-se a equação da elipse E no sistema OXY :

$$E: \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

A Figura 30, a seguir, ilustra o esboço do gráfico da elipse $E: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Figura 30 – Esboço de E: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

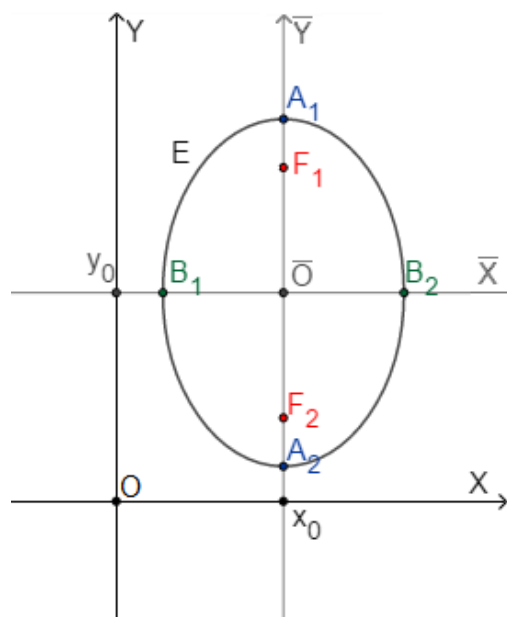


Fonte: O autor, 2019.

4.2.5.2 Elipse centrada no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY

Neste caso, a reta focal é $l : x = x_0$. (paralela ao eixo $\bar{O}\bar{Y}$) e a reta não focal é $l' : y = y_0$ (paralela ao eixo $\bar{O}\bar{X}$), conforme Figura 31.

Figura 31 – Esboço de E: $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$



Fonte: O autor, 2019.

No sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ a elipse tem equação:

$$E: \frac{\bar{x}^2}{b^2} + \frac{\bar{y}^2}{a^2} = 1,$$

cuja equação no sistema OXY , é dada por:

$$E: \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1.$$

4.2.6 Propriedade geométrica da elipse e aplicações

4.2.6.1 Propriedade refletora da elipse

Segundo Valladares (2011), a propriedade bissetora garante que todo som emitido em um dos focos se dirigirá após a reflexão exatamente para o outro foco. Pela própria definição de elipse, todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos, que ao se refletirem nas paredes da sala, cheguem ao segundo foco, terão percorrido a mesma distância e por isso chegarão ao mesmo tempo. Assim, conjugando essas duas propriedades, conclui-se que todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos chegarão ao mesmo tempo no outro foco.

Propriedade bissetora da Elipse

Seja uma elipse E , como focos F_1 e F_2 e seja um ponto $P \in E$. Neste caso a reta r , tangente a E em P , forma ângulos iguais com os raios focais F_1P e F_2P (Figura 29).

Demonstração:

Segue da definição de elipse, que um ponto A não está na elipse, se e somente se,

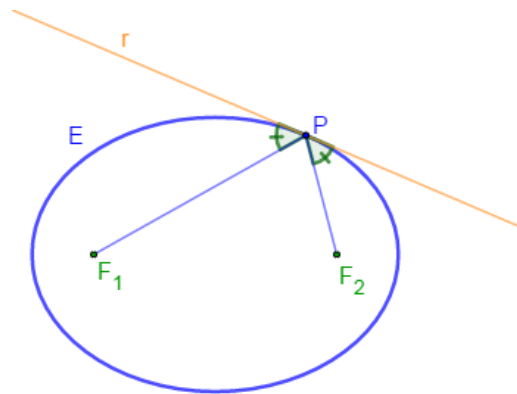
$$d(A, F_1) + d(A, F_2) \neq c.$$

Logo, uma reta r será tangente à elipse E em um ponto P se e somente se intersectar E em P , e qualquer que seja $A \neq P$, tenha-se:

$$d(A, F_1) + d(A, F_2) \neq d(P, F_1) + d(P, F_2).$$

Seja, agora, um ponto P na elipse E , toma-se uma reta r (bissetriz de um dos ângulos formados pelas retas F_1P e F_2P) passando por P de tal forma que o ângulo entre F_1P e r seja igual ao ângulo entre F_2P e r (Figura 29). Mostrando que r é tangente a E em P , mostra-se a propriedade bissetora, devido à unicidade da tangente à elipse por um de seus pontos.

Figura 32 – Reta tangente a elipse E



Fonte: O autor, 2019.

Seja P um ponto da Elipse, então:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = c.$$

Seja um ponto $A \neq P$, pertencente a r e um ponto F_1' , simétrico de F_1 em relação a r . A reta r é então mediatriz do segmento F_1F_1' (Figura 33).

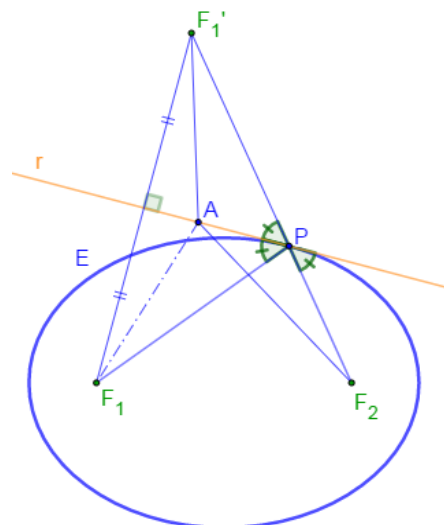
Logo,

$$d(P, F_1) = d(P, F_1').$$

Assim como,

$$d(A, F_1) = d(A, F_1').$$

Figura 33 – Propriedade refletora da elipse



Fonte: O autor, 2019

Por construção, a reta r faz ângulos iguais com PF_1 e PF_2 e, pela simetria, os ângulos $A\hat{P}F_1$ e $A\hat{P}F_1'$ são iguais. Logo, os segmentos PF_2 e PF_1' fazem ângulos iguais com r e, portanto, os pontos F_1' , P e F_2 são colineares. Segue-se então que:

$$c = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, F_1') + d(P, F_2) = d(F_1', F_2).$$

Aplicando desigualdade triangular no triângulo AF_2F_1' obtém-se:

$$d(F_1', F_2) < d(A, F_1') + d(P, F_2) = d(A, F_1) + d(A, F_2).$$

Como,

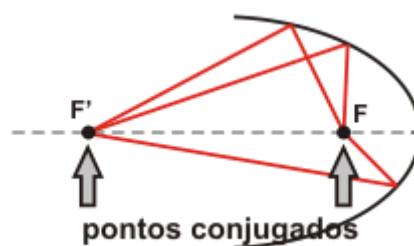
$$d(A, F_1) + d(A, F_2) > c$$

Conclui-se que P é o único ponto de r que pertence à elipse, o que mostra que r é tangente a elipse em P .

4.2.6.2 Espelhos elípticos.

O espelho elíptico (Figura 34) é formado pela superfície de um elipsoide de revolução. Neste espelho se verifica a propriedade refletora da elipse.

Figura 34 – reflexão no espelho elíptico



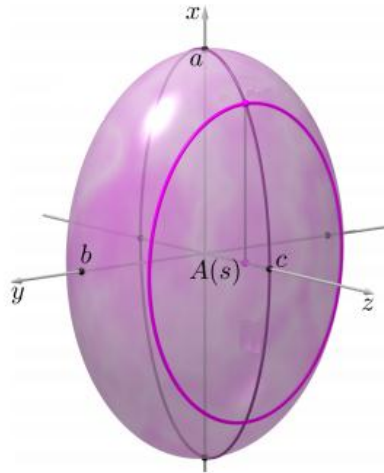
Fonte: Alfa Connection. Disponível em:

<<https://www.alfaconnection.pro.br/fisica/luz/espelhos/espelhos-parabolicos-elipticos-e-hiperbolicos/>>. Acesso em: 28 Abr. 2019.

Segundo Frensel et al (2008b), **uma superfície de revolução S** de geratriz C e eixo de revolução r é a superfície descrita pela rotação da curva C em torno da reta r .

Uma **elipsoide de revolução** (Figura 35) é a superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma elipse em torno de um dos seus eixos.

Figura 35 – Elipsoide de revolução



Fonte: Frensel et al, 2008b.

Luminária odontológica.

Segundo Valladares (2011), a luminária utilizada pelos dentistas, tem como função iluminar uma área específica (a boca) sem incomodar a vista do paciente (Figura 36).

Figura 36 – Luminaria odontológica

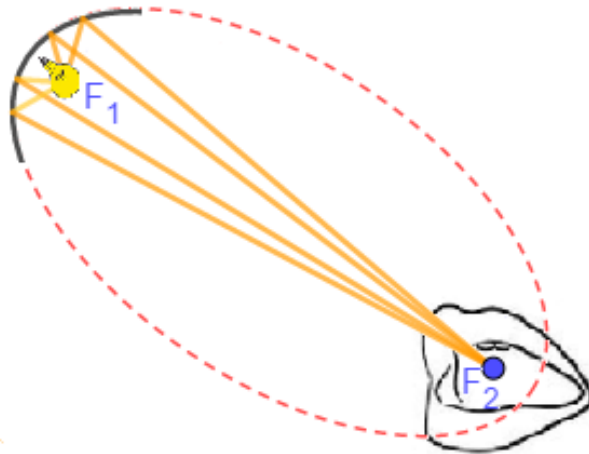


Fonte: Blog Mamã Sortuda. Disponível em:

<<http://www.mamaesortuda.com/2017/11/nunca-foi-tao-facil-levar-criancas-ao.html>> Acesso em: 6 Mai. 2019.

Para isso, tal luminária conta com um espelho elíptico e uma fonte luminosa localizada em um dos seus focos. Desta forma, basta posicionar a boca do paciente no outro foco para que os raios luminosos incidam sobre este ponto (Figura 37).

Figura 37 – Luminária elíptica



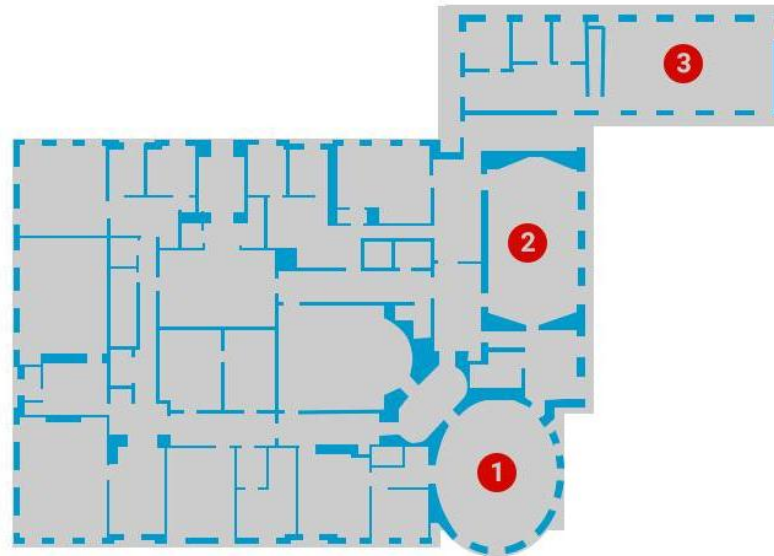
Fonte: O autor, 2019.

4.2.6.3 Aplicações à Arquitetura

Casa Branca, em Washington DC

Talvez o cômodo mais famoso da Casa Branca, o salão oval representado por “1” na Figura 35, é o escritório onde o presidente dos Estados Unidos trabalha. “As salas com formato de elipse são conhecidas como sala de sussurros. Isso ocorre pelo fato de que se duas pessoas estiverem em focos distintos da elipse, elas podem se comunicar em voz sussurrada, inaudíveis no restante da sala”, (VALLADARES, 1998, p.143). Os salões ovais da casa branca, foram construídos neste formato, justamente para explorar essa propriedade (Figura 38).

Figura 38 – Planta da ala oeste onde está localizado o salão oval

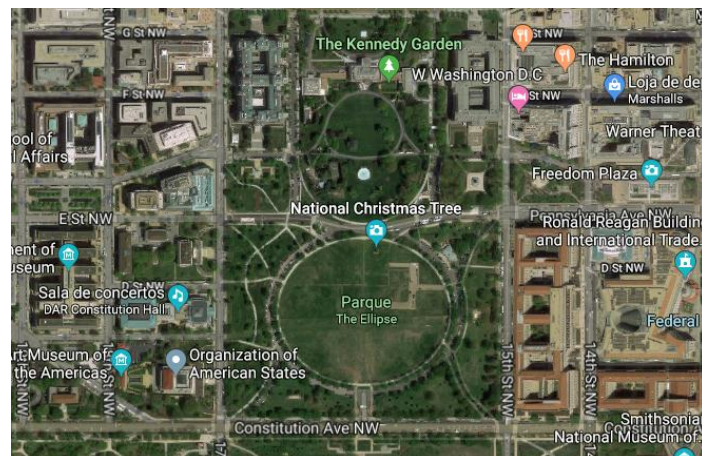


Fonte: Veja. Disponível em: <<https://veja.abril.com.br/especiais/por-dentro-da-casa-branca/>>.

Acesso em 16 Mar. 2019

Curiosamente, a elipse está presente em outros ambientes da Casa Branca: Park the Ellipse (Figura 39 e na sala de recepção diplomática (Figura 40). Este cômodo era a antiga fornalha da Casa Branca, transformado em um salão de entrada em 1902.

Figura 39 – Park the Ellipse

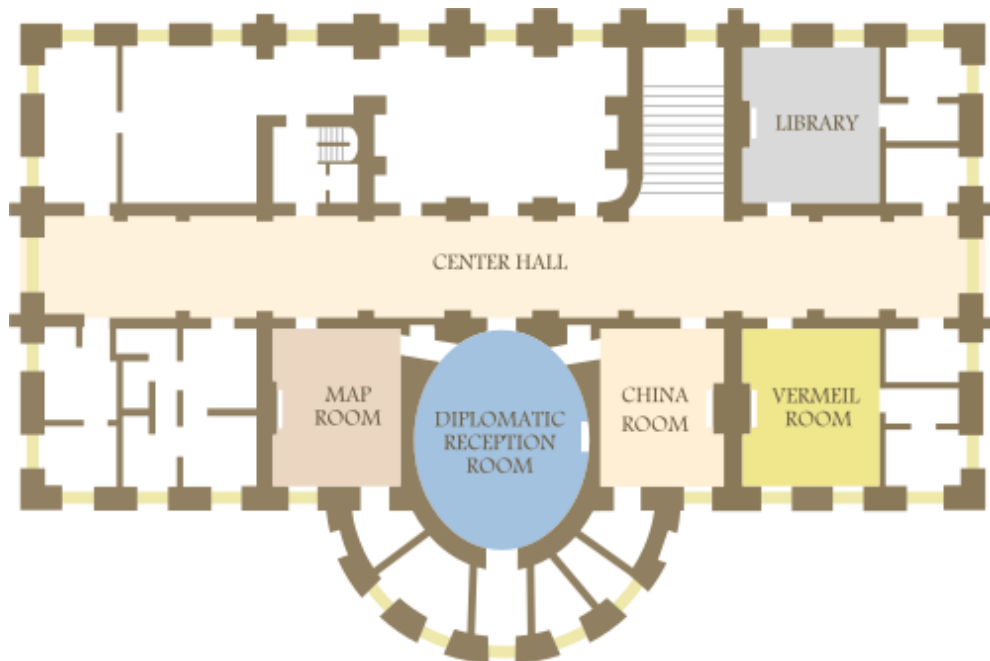


Fonte: Google Maps. Disponível em:

<<https://www.google.com/maps/place/The+Ellipse/@38.8948187,-77.0365296,1213m/data=!3m1!1e3!4m6!3m5!1s0x0:0x9acbbad2bbc35466!4b1!8m2!3d38.8939655!4d-77.036513>>.

Acesso em: 16 Mar. 2019.

Figura 40– Planta do térreo da Casa Branca, onde está localizada a sala de recepção diplomática.



Fonte: Revolvly. Disponível em: <<https://www.revolvly.com/page/Executive-Residence>>

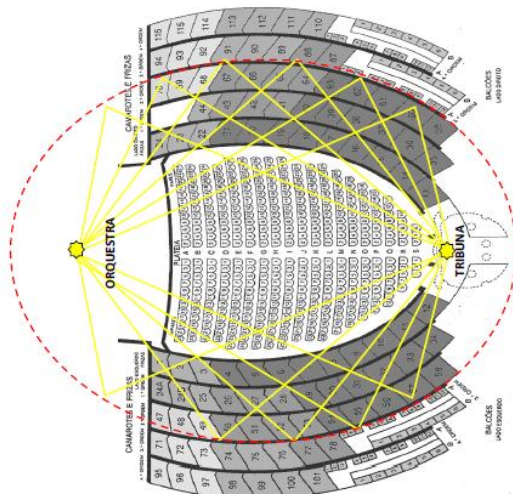
Acesso em: 15 Mar. 2019.

Teatro Nacional de São Carlos

Segundo Correia (2013), o Teatro Nacional de São Carlos, em Portugal (Figura 38), foi construído de forma elíptica para que em um dos focos fosse localizado o palco e no outro a tribuna, onde estaria o Rei. Assim, garantir-lhe-ia uma acústica perfeita, independente do ruído ambiente. Essa qualidade acústica é enfatizada por Carneiro (2007) quando descreve a sala “como de excelente sonoridade!”, e elogia o arquiteto responsável pela obra, José da Costa e Silva (1747-1819), por estar consciente dos debates que então corria na Europa sobre os méritos e vantagens da forma elíptica nas salas de ópera.

Figura 41 – Elipse desenhada sobre a planta do Teatro Nacional de São Carlos.

(a) Elipse desenhada sobre a planta do Teatro Nacional de São Carlos



Fonte: Correia, 2013.

(b) Vista interna do Teatro Nacional de São Carlos



Fonte: Revista Caras. Disponível em: <http://caras.sapo.pt/famosos/2015-11-12-Madama-Butterfly-em-noite-de--glamour-no-Teatro-Sao-Carlos>. Acesso em: 23 Abr. 2019

Arenas / Estádios

Considerado um dos grandes monumentos da Roma antiga, o Coliseu (Figura 42) era um enorme anfiteatro de entretenimento da época. Sua construção foi iniciada no ano 72 d.C., por ordem do imperador Flávio Vespasiano e finalizada quando Roma já era governada pelo seu filho Tito. Chama atenção nesta obra o seu formato elíptico.

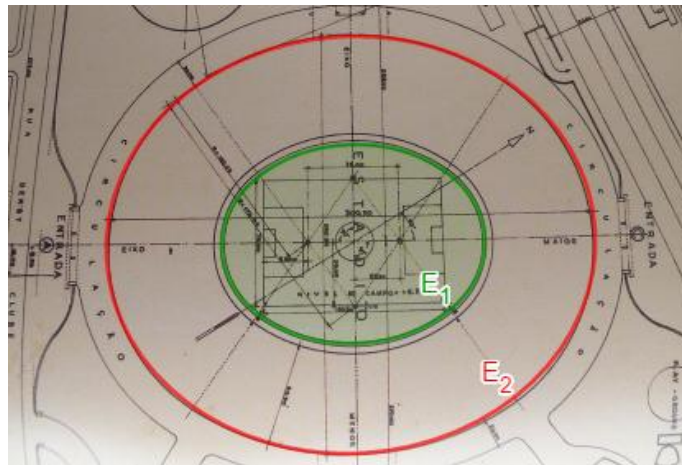
Este formato também está presente em estádios brasileiros, como, por exemplo, no Estádio Jornalista Mario Filho (Maracanã), sede da final da copa do mundo de seleções de 2014. A Figura 43, abaixo, mostra a planta do Maracanã. Em destaque observam-se duas elipses: uma no entorno do gramado e outra no estorno da cobertura. Estas elipses foram desenhadas com o auxílio do *software* GeoGebra. Este formato propicia uma maior capacidade do estádio.

Figura 42 – Vista área do Coliseu



Fonte: GONÇALVEZ, 2019.

Figura 43 – Elipses desenhadas sobre a planta do maracanã



Fonte: IG Esportes. Modificado de:

<<https://esporte.ig.com.br/futebol/2010/11/23/marcia+lins+detalha+o+novo+maracana+10223091.html>> Acesso em: 17. Mar. 2019.

Nas arenas atuais construídas na última década, como por exemplo a Arena do Grêmio (Figura 44) inaugurada em 8 de dezembro de 2012 em Porto Alegre, tem-se adotado um formato retangular com os vértices achatados, permitindo assim uma maior proximidade entre o público e o campo de jogo.

Figura 44 – Vista aérea da Arena do Grêmio



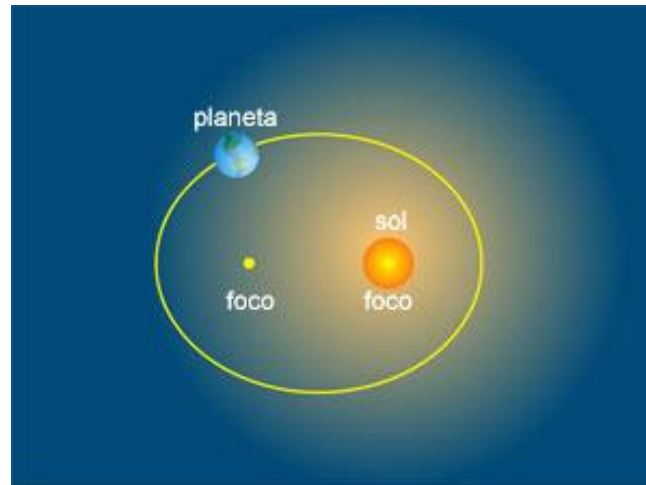
Fonte: Blogando. Modificado de: <<http://blog.wieczorek.com.br/index.php/arena-do-gremio-fotos-aereas-2?blog=1>> Acesso em: 17. Mar. 2019.

Órbitas Planetárias e Primeira lei de Kepler

Segundo Halliday (2006), o astrônomo alemão Johannes Kepler, no século XVII, usou dados observacionais de anos de estudos de seu mestre astrônomo Tycho Brahe, para concluir que os planetas do sistema solar moviam-se sob órbitas elípticas ao redor do Sol, que se localizava em um dos focos da elipse. Essa conclusão é conhecida como primeira lei de Kepler, enunciada da seguinte maneira: “Todos os planetas se movem em orbitas elípticas tendo o Sol como um dos focos.” (HALLIDAY, 2006, p.42). A descoberta de Kepler se torna ainda mais surpreendente pelo fato de que, segundo Halliday (2006) a excentricidade das órbitas planetárias é quase nula (Uma excentricidade nula corresponde a uma circunferência, no qual os dois focos se unem em um único ponto: o centro). A excentricidade da órbita da terra é de apenas 0,0167. A excentricidade da elipse, representada na Figura 42, foi exagerada para maior clareza.

Batista (2010) afirma que a explicação teórica de porque as órbitas planetárias possuem o formato de uma elipse somente foi possível com a lei da gravitação universal, desenvolvida pelo matemático e físico inglês Sir Isaac Newton.

Figura 45 – Órbita elíptica com sol localizado em um dos focos



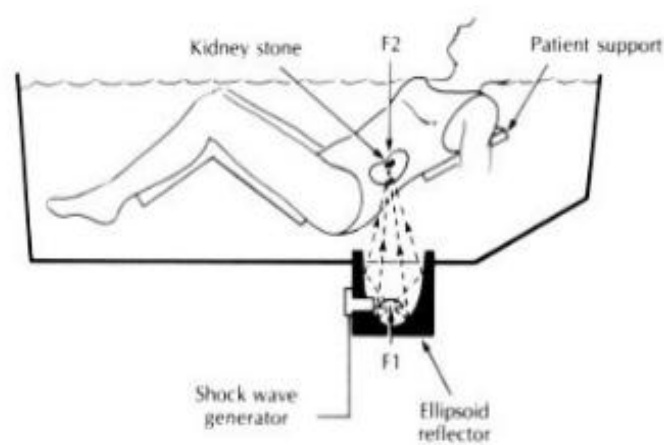
Fonte: Museo Virtual. Disponível em:

<<http://museovirtual.csic.es/salas/universo/universo10.htm>>. Acesso em: 21 Mar. 2019

Medicina – Litotripsia extracorpórea por ondas de choque

O termo extracorpóreo denomina o ato de aplicar um instrumento ou energia em um paciente para tratamento sem que haja a perfuração da pele ou através da entrada pelos seus orifícios naturais.

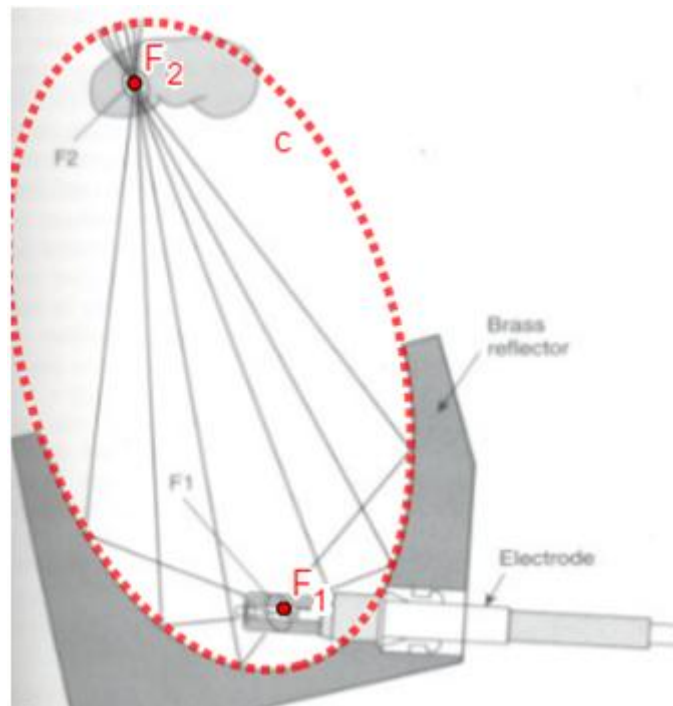
Figura 46 - Litotripsia extracorpórea por ondas de choque



Fonte: SlideShare. Disponível em: <<https://pt.slideshare.net/urovideo/litotripsia-extracorporea-por-ondas-de-choque-leco>>: Acesso em: 22. Mar. 2019

Segundo Correia (2013), a litotripsia extracorpórea é a fragmentação de cálculos renais por meio de energia acústica transferida ao paciente por contato. Este método usa um aparelho chamado Litotriptor que contém um espelho elíptico. As ondas de choque criadas pelo aparelho (fora do corpo) em um dos focos da elipse são refletidas no espelho e concentradas nos calcos mais densos (dentro do corpo) no outro foco, pulverizando-os.

Figura 47 - Fragmentação do cálculo Renal



Fonte: Modificado de SlideShare. Disponível em:

<<https://pt.slideshare.net/urovideo/litotripsia-extracorporea-por-ondas-de-choque-leco>>:

Acesso em: 22. Mar. 2019

4.3 Parábola

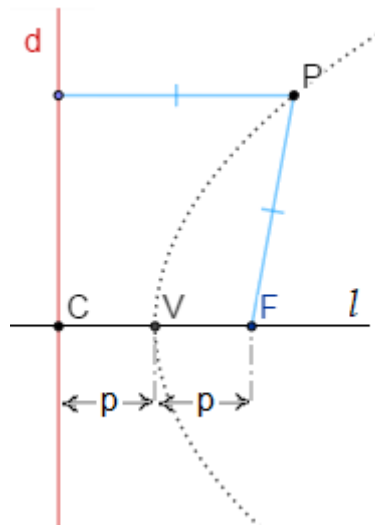
4.3.1 Definição da parábola

Dados um ponto F , e uma reta d , com $F \notin d$, a parábola \mathcal{P} de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos P do plano que são equidistantes de F e de d , isto é:

$$\mathcal{P} = \{P \mid d(P, F) = d(P, d)\}.$$

A Figura 48, a seguir, mostra o esboço de uma parábola.

Figura 48 – Esboço da parábola segundo a definição



Fonte: O autor, 2019.

4.3.2 Elementos da parábola

1. O ponto F é o **foco** da Parábola.
2. A reta d é a **diretriz** da parábola.
3. A reta l que contém F e é perpendicular a d é a **reta focal**. (Figura 45, acima).
4. Há exatamente um ponto de interseção V da Parábola com a reta focal l , o qual é chamado **vértice** de parábola. V é também o ponto médio de CF , tal que $\{C\} = d \cap l$.
5. O número $2p = d(d, F)$ é o **parâmetro** da Parábola. Então, $d(V, d) = d(V, F) = p$.

Observação 2

A Parábola P é simétrica em relação a sua reta focal.

De fato, seja \mathcal{P} uma parábola de foco F , vértice V , diretriz d e reta focal l .

Sejam $P \in \mathcal{P}$ e P' o simétrico de P em relação à reta focal, por congruência de triângulos (LAL), temos:

$$\Delta PQF \equiv \Delta P'QF.$$

Em particular,

$$|PF| = |P'F|.$$

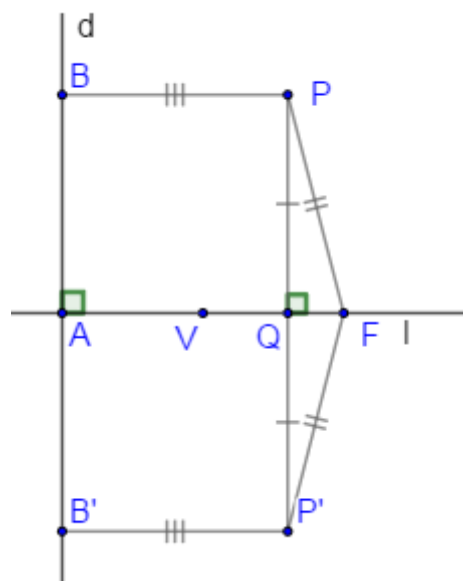
Como $BPQA$ e $AQP'B'$ são retângulos, tem-se que:

$$d(P, d) = d(Q, d) = d(P', d).$$

Logo,

$$d(P', F) = d(P, F) = d(P, d) = d(P', d) \Rightarrow d(P', F) = d(P', d) \Rightarrow P' \in \mathcal{P}.$$

Figura 49 – Simetria da parábola em relação a sua reta focal



Fonte: O autor, 2019.

4.3.3 Forma Canônica da parábola

Pretende-se a seguir, para alguns casos especiais, obter a equação da parábola em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY .

4.3.3.1 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Considere o sistema de eixos ortogonais no plano OXY . Para obter a equação da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX , deve-se considerar os seguintes casos:

- i) Foco à direita da diretriz.

Neste caso, deve-se ter:

$$V = (0, 0), \quad F = (p, 0) \quad e \quad d: x = -p.$$

Pela definição de parábola:

$$P = (x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d).$$

Então,

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|$$

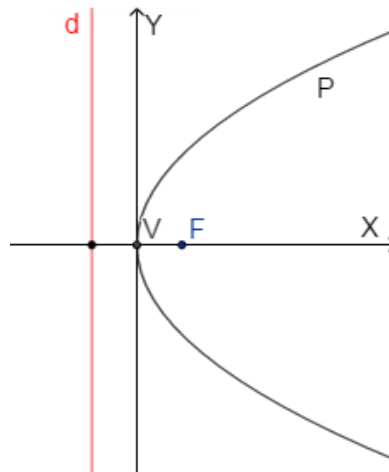
$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

$$y^2 = 4px.$$

Obtendo, assim, a forma canônica da parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OX e foco à direita da diretriz (Figura 50).

Figura 50 – Parábola com foco à direita da diretriz



Fonte: O autor, 2019.

ii) Foco à esquerda da diretriz.

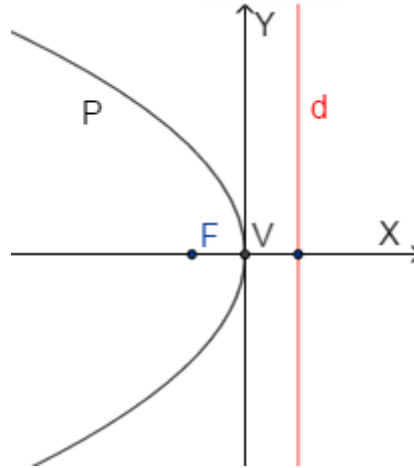
Neste caso, deve-se ter:

$$V = (0, 0), \quad F = (-p, 0) \quad e \quad d: x = p.$$

Procedendo de maneira análoga, ao caso da parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OX e foco a direita da diretriz, obtém-se que a equação desta parábola é dada por:

$$y^2 = -4px.$$

Figura 51 – Parábola com foco a esquerda da diretriz



Fonte: O autor, 2019.

4.3.3.2 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Considere o sistema de eixos ortogonais no plano OXY . Para obter a equação da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY , deve-se considerar os seguintes casos:

i) Foco acima da diretriz.

Neste caso, deve-se ter:

$$V = (0, 0), \quad F = (0, p) \quad e \quad d: y = -p.$$

Pela definição de parábola:

$$P = (x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d).$$

Então,

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

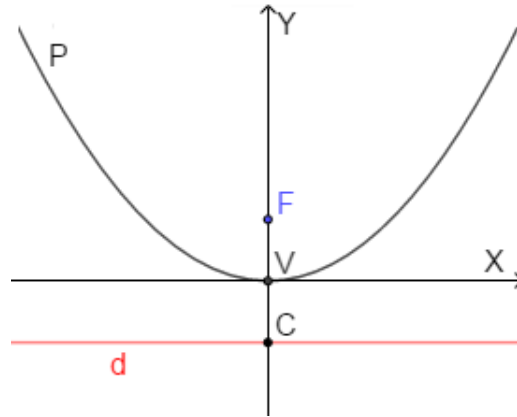
$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

$$x^2 = 4py.$$

Obtendo, assim, a forma canônica da parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OY e foco acima da diretriz.

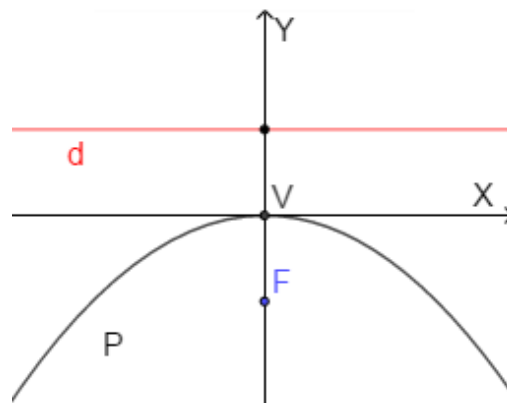
Figura 52 – Parábola com foco acima da diretriz



Fonte: O autor, 2019.

ii) Foco abaixo da diretriz.

Figura 53 – Parábola com foco abaixo da diretriz



Fonte: O autor, 2019.

Neste caso, deve-se ter:

$$V = (0, 0), \quad F = (0, -p) \quad e \quad d: y = p.$$

Procedendo de maneira análoga, ao caso da parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo OY e foco acima da diretriz, obtém-se que a equação desta parábola é dada por:

$$x^2 = -4py$$

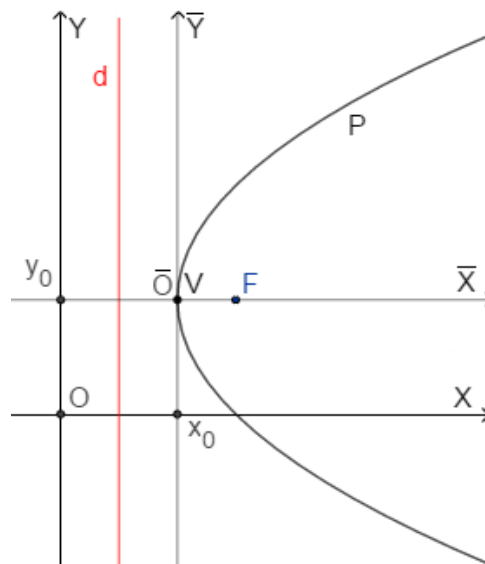
4.3.4 Forma canônica da parábola transladada

4.3.4.1 Parábola com vértice no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX

Sendo o ponto \bar{O} o vértice V da parábola, tem-se $V = (x_0, y_0)$. A reta focal l que contém \bar{O} é o eixo $\bar{O}\bar{X}$, paralelo ao eixo OX . Assim como o eixo $\bar{O}\bar{Y}$ é paralelo ao eixo OY .

i) Foco à direita da diretriz

Figura 54 – Esboço da parábola $\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$



Fonte: O autor, 2019.

No sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ a parábola tem equação:

$$\bar{y}^2 = 4p\bar{x}.$$

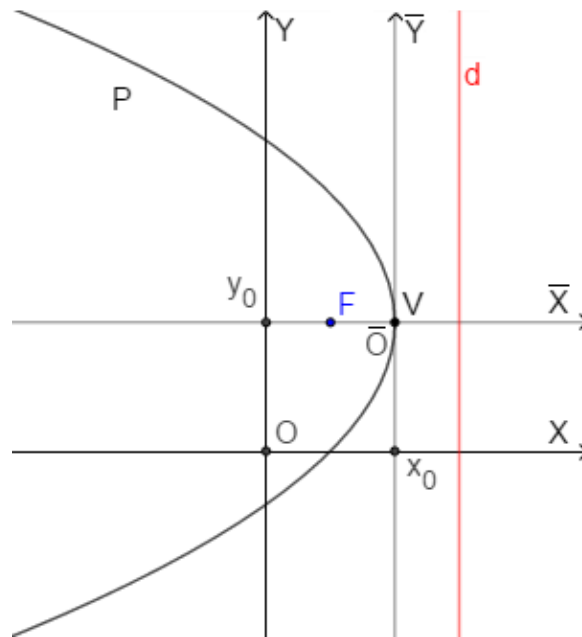
Passando para as coordenadas x, y do sistema OXY , deve-se ter

$$\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0),$$

como equação da parábola (Figura 50).

ii) Foco à esquerda da diretriz.

Figura 55 – Esboço da parábola $\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$



Fonte: O autor, 2019.

No sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ a parábola tem equação:

$$\bar{y}^2 = -4p\bar{x}.$$

Passando para as coordenadas x, y do sistema OXY , deve-se ter:

$$\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0),$$

como a equação da parábola (Figura 55).

4.3.4.2 Parábola com vértice no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY

Sendo o ponto \bar{O} o vértice V da parábola, tem-se $V = (x_0, y_0)$. A reta focal l que contém \bar{O} é o eixo $\bar{O}\bar{Y}$ paralela ao eixo OY . Assim como o eixo $\bar{O}\bar{X}$ é paralelo ao eixo OX .

i) Foco acima da diretriz.

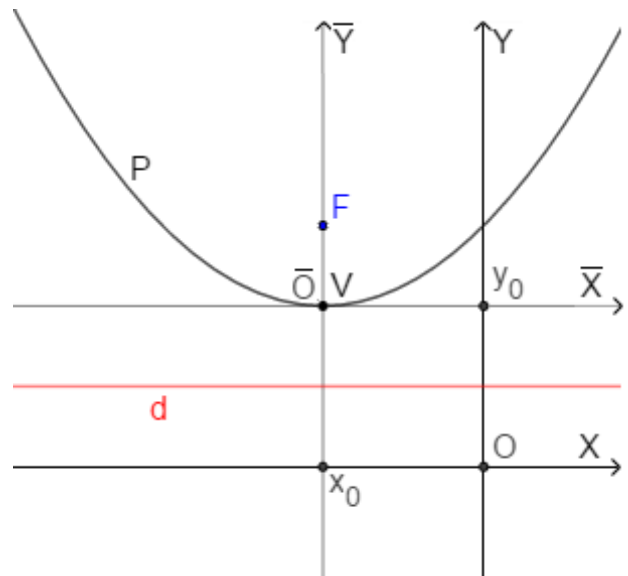
No sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ a Parábola tem equação:

$$\bar{x}^2 = 4p\bar{y}.$$

Passando para as coordenadas x, y do sistema OXY , deve-se ter:

$$\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Figura 56 – Esboço da parábola $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$



Fonte: O autor, 2019.

ii) Foco abaixo da diretriz.

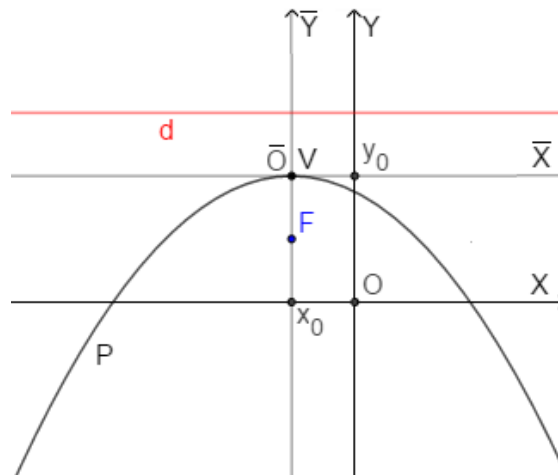
No sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ a Parábola tem equação:

$$\bar{x}^2 = -4p\bar{y}.$$

Passando para as coordenadas x, y do sistema OXY , deve-se ter:

$$\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0).$$

Figura 57– Esboço da Parábola $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$



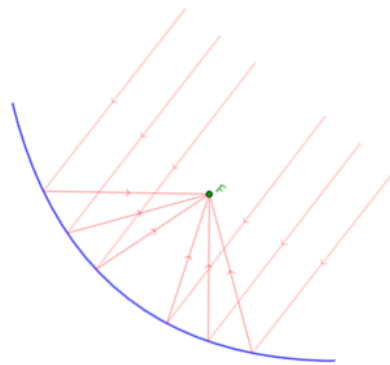
Fonte: O autor, 2019.

4.3.5 Propriedade geométrica da parábola e aplicações.

4.2.5.1. Propriedade Refletora da Parábola.

Todo sinal recebido na direção do eixo da parábola toma a direção do foco após a reflexão (Figura 58).

Figura 58 - Raios paralelos ao eixo da parábola refletidos na superfície parabólica.



Fonte: O autor, 2019.

Demonstração:

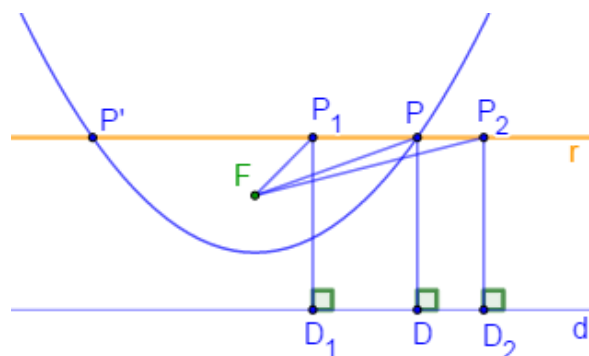
Segundo Wagner (1997), a parábola separa os demais pontos do plano em duas regiões:

Região interior: onde cada ponto tem distância menor que a sua distância à diretriz.

Região exterior: onde cada ponto tem distância maior que sua distância à diretriz

A Figura 59 mostra uma parábola de foco F e diretriz d e um reta r paralela à d cortando a curva em P' e P .

Figura 59 – Interior e exterior da parábola



Fonte: O autor, 2019.

Se o ponto P_1 da reta r é interior ao segmento PP' , então:

$$P_1F < PF = PD = P_1D_1,$$

e, portanto, P_1 é interior à parábola. Por outro lado, se P_2 é um ponto da reta r exterior ao segmento PP' , então:

$$P_2F < PF = PD = P_2D_2,$$

e P_2 é exterior á parábola.

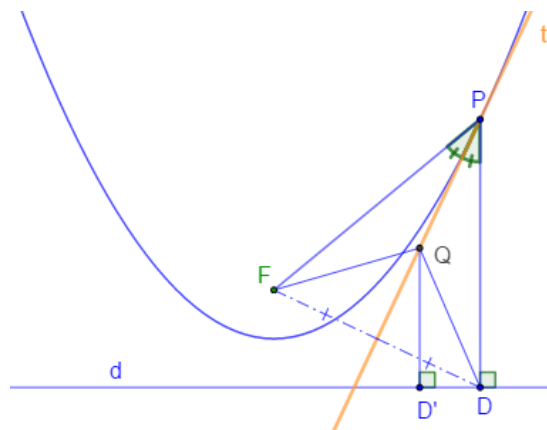
Considere agora um ponto P qualquer da parábola de foco F e diretriz d , uma reta t , bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$ (Figura 57). O intuito é mostrar que t é tangente e a parábola.

Pela definição de parábola, $PF = PD$. Como a reta t é bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$, ela é também mediana, altura e mediatriz do segmento PD . Seja Q , um ponto qualquer da reta t , distinto de P . Se D' é a projeção de Q sobre d , temos:

$$QF = QD > QD'.$$

Portanto, Q é exterior à parábola. Assim, o ponto P da reta t pertence à parábola e todos os outros pontos de t são exteriores. Logo, t é tangente à parábola em P .

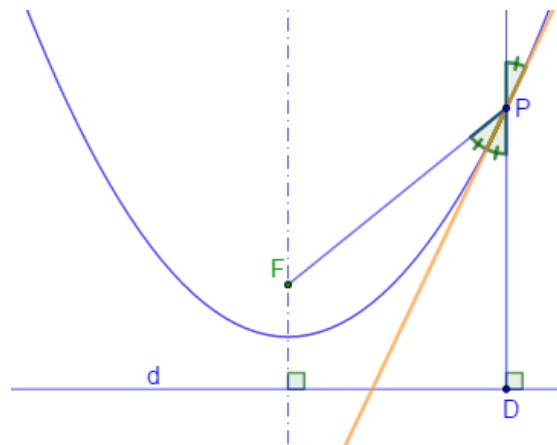
Figura 60 – Reta t tangente à parábola



Fonte: O autor, 2019.

Como a tangente à parábola é bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$, temos que PY (prolongamento do segmento DP) e PF fazem ângulos iguais com essa tangente (Figura 61). Portanto, todo sinal recebido na direção do eixo da parábola toma a direção do foco após a reflexão.

Figura 61 – Propriedade refletora da parábola

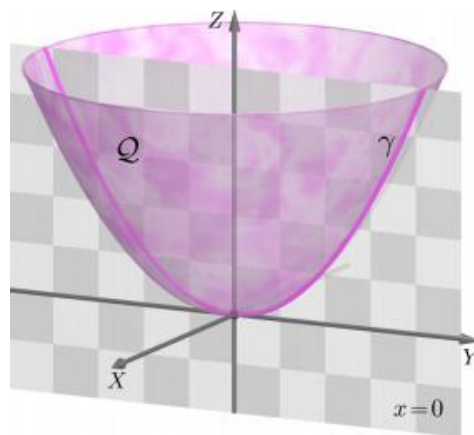


Fonte: O autor, 2019.

Antena parabólica

Um **paraboloide elíptico** (Figura 62) é a superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma parábola em torno de sua reta focal.

Figura 62 – Paraboloide elíptico

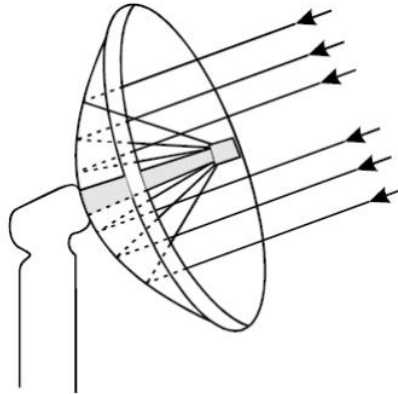


Fonte: Frensel et al, 2008.

Segundo Wagner (1997), os sinais de ondas de rádio ou luz são muito fracos, necessitando captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que estes sinais sejam naturalmente amplificados. A parábola é a forma mais eficiente para que estes sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto. Não

é inteiramente verdadeiro afirmar que as ondas de rádio se propagam em linha reta no espaço. Praticamente, para nós (observadores na terra), elas as são. Todo sinal recebido na direção do eixo da parábola toma a direção do foco após a reflexão.

Figura 63 – Antena parabólica



Fonte: QSL. Disponível em: <<https://www.qsl.net/py4zbz/offset.htm>> Acesso em: 5 Mai. 2019.

Faróis parabólicos

O farol parabólico dos automóveis e motos é um exemplo bem prático da aplicação da parábola em nosso cotidiano. Chung (2013) apresenta duas situações em que a posição da fonte luminosa em relação ao foco altera a área atingida pela luminosidade. Em termos práticos, essa mudança é conhecida como luz baixa e luz alta.

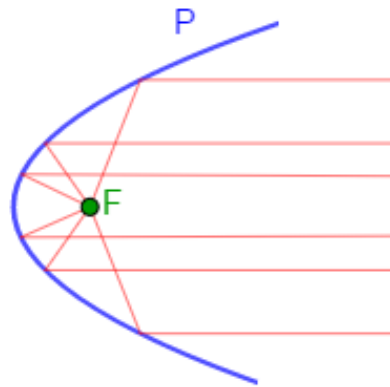
i) Luz baixa:

Neste caso, a fonte luminosa é posicionada no foco da parábola, garantindo, pela propriedade refletora desta curva, que os raios refletidos no espelho parabólico sejam lançados paralelamente ao eixo de simetria (Figura 64).

ii) Luz alta:

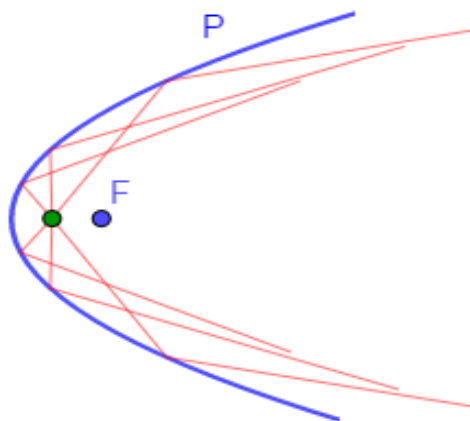
Neste caso a fonte luminosa é posicionada antes do foco, no eixo de simetria, garantindo, pela propriedade refletora desta curva, que os raios refletidos no espelho parabólico sejam divergentes, iluminando uma área maior (Figura 65).

Figura 64 – Modelo de farol parabólico com fonte luminosa sobre o foco



Fonte: O autor, 2019

Figura 65 – Modelo de farol parabólico com fonte luminosa entre o foco e o vértice

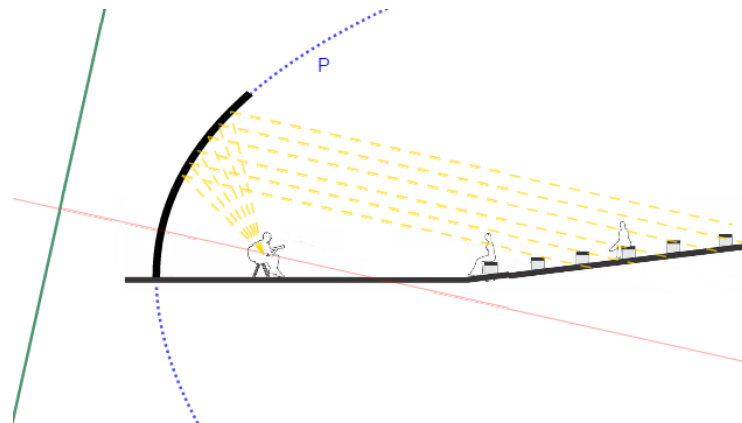


Fonte: O autor, 2019.

Concha Acústica

Segundo Azevedo (2013), as superfícies parabólicas são amplamente utilizadas em espaços com palco e plateia como concha acústica. Na superfície parabólica (Figura 66), quando a fonte sonora é colocada sobre seu foco, o som refletirá sobre a superfície e sairá de forma paralela em direção a plateia.

Figura 66 – Propriedade refletora da parábola na concha acústica



Fonte: Arch Daily. Modificado de: <<https://www.archdaily.mx/mx/890188/como-funcionan-y-se-diseñan-las-conchas-acusticas>>. Acesso em: 30 Abr. 2019.

Comuns em palcos ao ar livre (Figura 63), as conchas acústicas têm como características arquibancadas com baixa inclinação, visto que as ondas sonoras se propagam em linhas paralelas.

Figura 67 – Conchas acústicas

(a) Rio das Ostras – RJ



Fonte: Posto Zero. Disponível em: <<http://postozero.com/arte-e-cultura/casas-de-show/ao-ar-livre/concha-acustica-da-praca-sao-pedro>> Acesso em: 5 Mai. 2019

(b) Campinas - SP



Fonte: Prefeitura de Campinas. Disponível em: <<http://www.campinas.sp.gov.br/noticias-integra.php?id=20071>> Acesso em: 5 Mai. 2019.

Coletores Solares

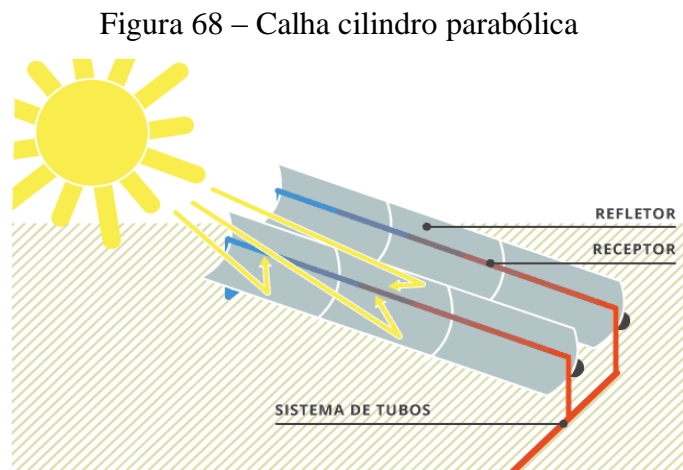
Devido à grande distância entre o sol e a terra, os raios solares que chegam à superfície terrestre são praticamente paralelos. Assim, quando refletidos em uma superfície parabólica, concentram-se em um ponto (foco da parábola). Neste ponto haverá uma grande concentração

de energia térmica, elevando rapidamente a temperatura das imediações e do próprio foco. Serão vistos a seguir dois exemplos de mecanismos de concentração solar para gerar energia hipotérmica, também conhecida como Concentrating Solar Power (CSP), processo de uso e acúmulo do calor proveniente dos raios solares.

Para que isso aconteça, espelhos são usados para refletir a luz solar e concentrá-la num único ponto, onde há um receptor. Dessa forma, grande quantidade de calor é acumulada e usada tanto para processos industriais que demandam altas temperaturas como para gerar eletricidade.

Coletor cilindro parabólico

Espelhos cilindro-parabólicos (Figura 68) são utilizados para concentrar a luz solar em tubos receptores posicionados ao longo da linha focal dos espelhos, que são desenhados para seguir a posição do Sol. Um fluido de transferência circula através desses tubos e é aquecido pelos raios solares até aproximadamente 400°C no caso do óleo térmico ou 450°C no caso de sais fundidos. Esse fluido é bombeado através de uma série de trocadores de calor, de forma a produzir vapor dentro da usina. O vapor é, então, utilizado para movimentar turbinas e gerar eletricidade.



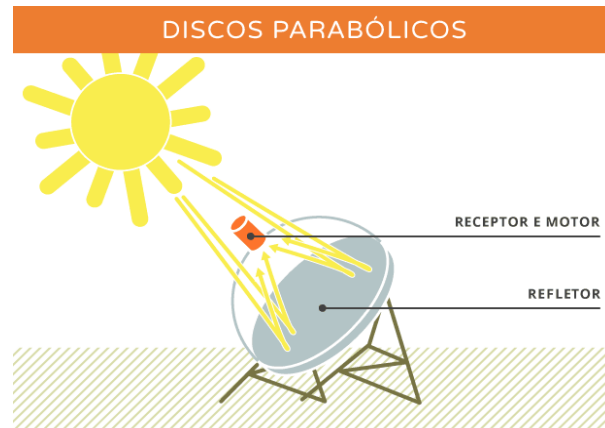
Fonte: Energia Heliotérmica. Disponível em: <<http://energiaheliotermica.gov.br/pt-br/energia-heliotermica/como-funciona>>. Acesso em: 4 Abr. 2019.

Discos parabólicos

Um refletor em formato de disco parabólico concentra a luz solar em um receptor localizado no ponto focal do espelho parabólico, como mostra a Figura 69, abaixo. O feixe de

irradiação é absorvido pelo receptor para aquecer um fluido até aproximadamente 750°C. O calor desse fluido é, então, utilizado num motor ou numa microturbina localizada no receptor.

Figura 69 – Discos parabólicos



Fonte: Energia Heliotérmica. Disponível em: <<http://energiaheliotermica.gov.br/pt-br/energia-heliotermica/como-funciona>>. Acesso em: 4 Abr. 2019.

Hoje, esta tecnologia é pouco utilizada, pois ainda é difícil utilizá-la para armazenar energia e, dessa forma, entra em concorrência direta com a energia fotovoltaica³, que é mais simples e barata.

4.4 Hipérbole

4.4.1 Definição de hipérbole

Sejam dados dois pontos F_1 e F_2 , tal que a distância entre eles seja igual a $2c > 0$. A Hipérbole H de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cujo o módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é igual a constante $2a > 0$, com $2a < 2c$. Isto é:

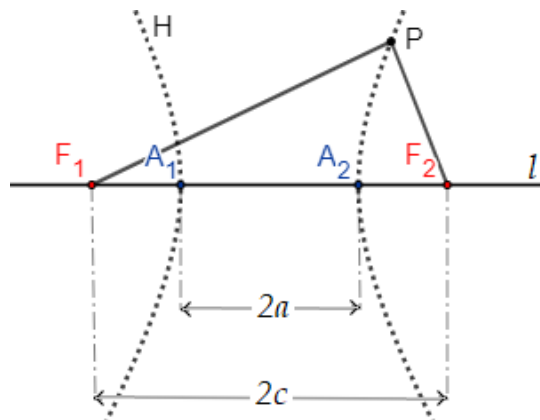
$$H = \{ P / |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \},$$

onde $0 < a < c$ e $d(F_1, F_2) = 2c$.

A Figura 70, a seguir, mostra o esboço de uma hipérbole.

³ A energia solar fotovoltaica é a energia obtida através da conversão direta da luz do sol em eletricidade,

Figura 70 - Esboço da hipérbole de acordo com a definição



Fonte: O autor, 2019.

4.4.2 Elementos da hipérbole

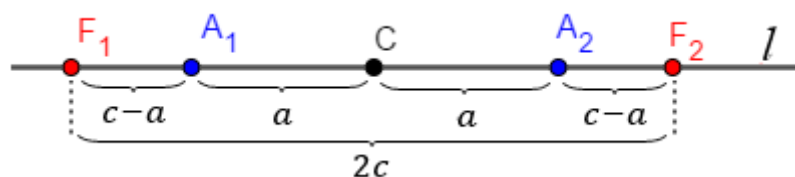
1. Os pontos F_1 e F_2 são os focos da hipérbole.
2. A reta l que contém F_1 e F_2 é chamada **reta focal** (Figura 70).
3. Há exatamente dois pontos de interseção A_1 e A_2 da hipérbole com a reta focal l , os quais são chamados vértices da hipérbole.

Observe que se A é um vértice da hipérbole então $A \in H \cap l$, logo não pode ocorrer que A esteja na semirreta de origem em F_2 que não contém F_1 , pois, caso contrário, (Figura 70), tem-se:

$$2a = |d(A, F_1) - d(A, F_2)| = |d(F_1, F_2) + d(F_2, A) - d(A, F_2)| = d(F_1, F_2) = 2c,$$

o que contradiz a definição ($0 < c < a$). De maneira análoga, mostra-se que não podemos ter A pertencente a semirreta de origem em F_1 que não contém F_2 .

Figura 71 – posição do vértice A em relação aos focos



Fonte: O autor, 2019.

Seja $A_1 \in H \cap F_1F_2$, tal que $d(A_1, F_1) = x$ com $0 < x < c$. Como A_1 está entre F_1 e F_2 , tem-se:

$$|d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = 2a$$

$$|x - (2c - x)| = 2a$$

$$|2x - 2c| = 2a$$

$$2c - 2x = 2a$$

$$x = c - a.$$

Portanto, o ponto $A_1 \in H \cap F_1F_2$, que dista $c - a$ do foco F_1 , pertence à hipérbole H . Analogamente, mostra-se que o ponto $A_2 \in H \cap F_1F_2$, e que dista $c - a$ do foco F_2 pertence à hipérbole H .

4. O segmento A_1A_2 é o **eixo focal** da hipérbole e $d(A_1, A_2) = 2a$.

De fato, pela Figura 71,

$$d(A_1, C) = d(F_1, C) - d(F_1, A_1) = c - (c - a) = a$$

$$d(A_2, C) = d(F_2, C) - d(F_2, A_2) = c - (c - a) = a$$

Assim,

$$d(A_1, C) + d(C, A_2) = 2a.$$

5. O ponto médio C do segmento A_1A_2 é o **centro** da hipérbole (C também é ponto médio de F_1F_2).

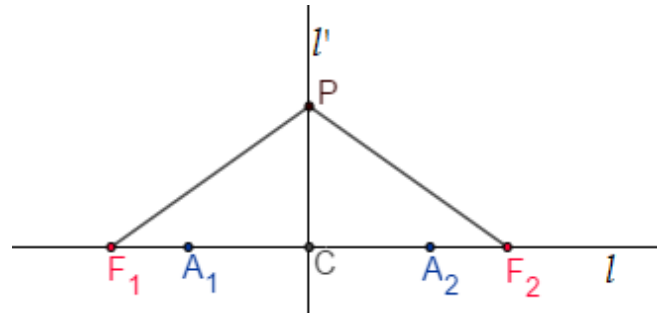
6. A reta l' que contém C e é perpendicular à reta focal l é chamada **reta não focal**.

A reta não focal l' não intersecta a hipérbole. Isso é fácil de ser visto dado que l' é mediatriz do segmento F_1F_2 (Figura 72). Desta forma, se $\{P\} = l' \cap H$, se teria:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a,$$

o que contradiz a definição ($2a > 0$).

Figura 72 – Reta não focal



Fonte: O autor, 2019.

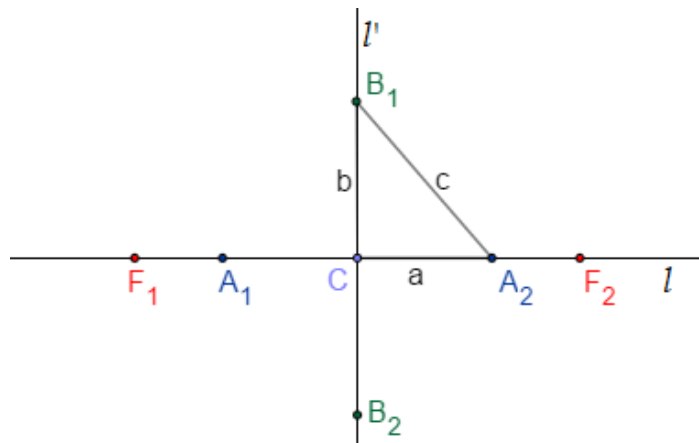
7. O segmento B_1B_2 contido em l' que tem C como ponto médio e comprimento igual a $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$ é chamado **eixo não focal** (Figura 73).

8. Os pontos B_1 e B_2 pertencentes a reta não focal, que tem C como ponto médio, são chamados **vértices imaginários** da hipérbole, e

$$d(B_1, C) = d(B_2, C) = b,$$

onde $b^2 = c^2 - a^2$ (Figura 73).

Figura 73 – Elementos da hipérbole sobre a reta focal e não focal

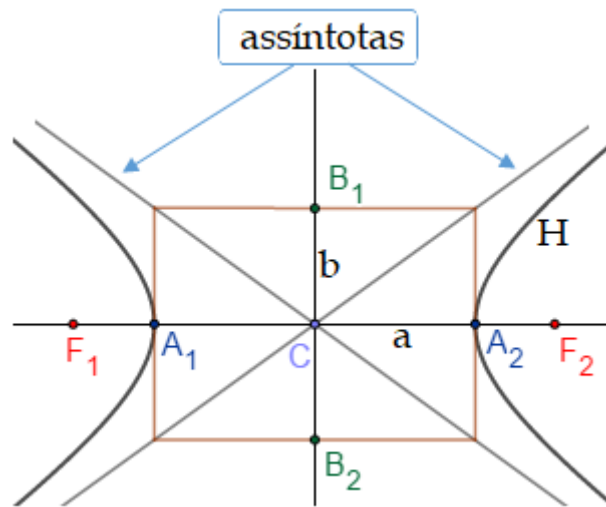


Fonte: O autor, 2019.

9. O número $e = \frac{c}{a}$ é a **excentricidade** da hipérbole. Note que na hipérbole $e > 1$, pois $c > a$.

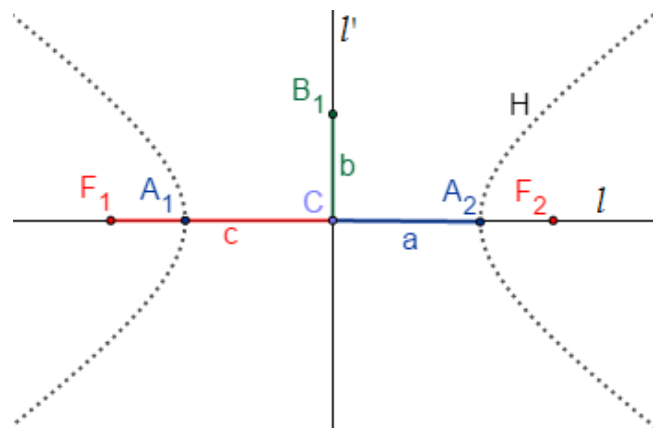
10. As retas que contêm o centro da hipérbole e têm inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação à reta focal são chamadas **assíntotas da hipérbole** (Figura 74).

Figura 74 – As assíntotas da hipérbole



Fonte: O autor, 2019

11. Os números a , b e c são as distâncias do centro, respectivamente, aos vértices, aos vértices imaginários e aos focos, conforme mostra a Figura 75.

Figura 75 – As distâncias a , b e c na hipérbole

Fonte: O autor, 2019.

Quando $a = b$, as assíntotas tem inclinação ± 1 em relação ao eixo focal. Neste caso as hipérboles são chamadas de **hipérboles equiláteras**.

Observação 3

A Hipérbole H é simétrica em relação a reta focal, à reta não focal e ao centro.

Seja $P \in H$ e P' o simétrico de P em relação à reta focal (Figura 76), por congruência de triângulos (LAL), temos:

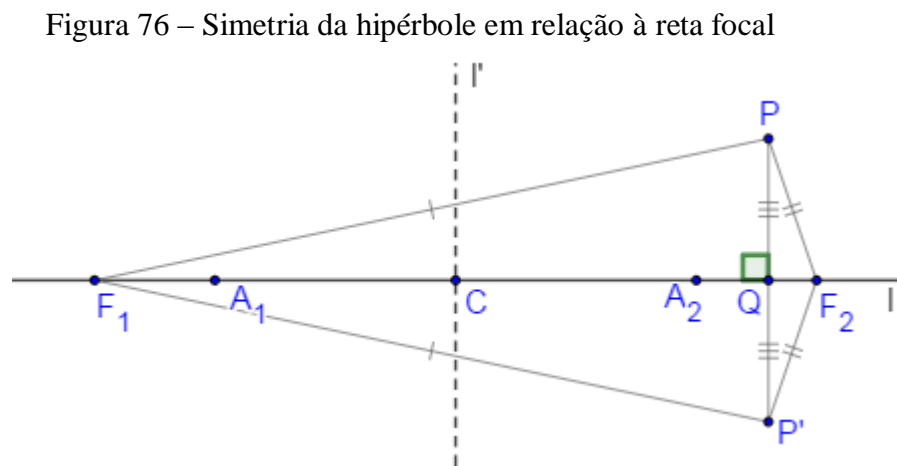
$$\Delta F_2PQ \equiv \Delta F_2P'Q \quad e \quad \Delta F_1PQ \equiv \Delta F_1P'Q.$$

Em particular,

$$|F_2P| = |F_2P'| \quad e \quad |F_1P| = |F_1P'|.$$

Logo,

$$|d(P', F_1) - d(P', F_2)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow P' \in H.$$



Fonte: O autor, 2019.

Se $P \in H$, e P'' é o simétrico de P em relação à reta não focal (Figura 77), então:

$$\Delta QPM \equiv \Delta QP''M \quad e \quad \Delta F_1MC \equiv \Delta F_2MC.$$

Em particular,

$$|PM| = |P''M|, \quad |F_1M| = |F_2M| \quad e \quad F_1\widehat{M}C = F_2\widehat{M}C,$$

Portanto,

$$|F_1P''| = |F_2P|.$$

Por congruência (LAL), temos:

$$\Delta F_1P''F_2 \equiv \Delta F_2PF_1.$$

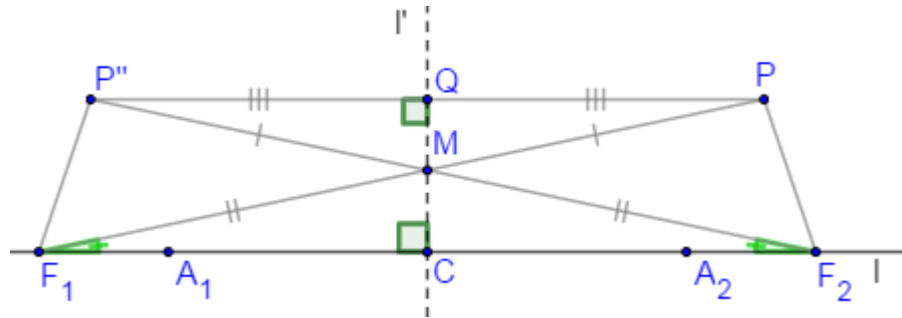
Em particular,

$$|PF_1| = |P''F_2|,$$

Portanto,

$$|d(P'', F_1) - d(P'', F_2)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow P'' \in E.$$

Figura 77– Simetria da hipérbole em relação à reta não focal



Fonte: O autor, 2019.

Se $P \in H$ e P_0 é o simétrico de P em relação ao centro (Figura 78), então:

$$\Delta PCF_2 \equiv \Delta P_0CF_1 \quad e \quad \Delta F_1CP \equiv \Delta F_2CP_0.$$

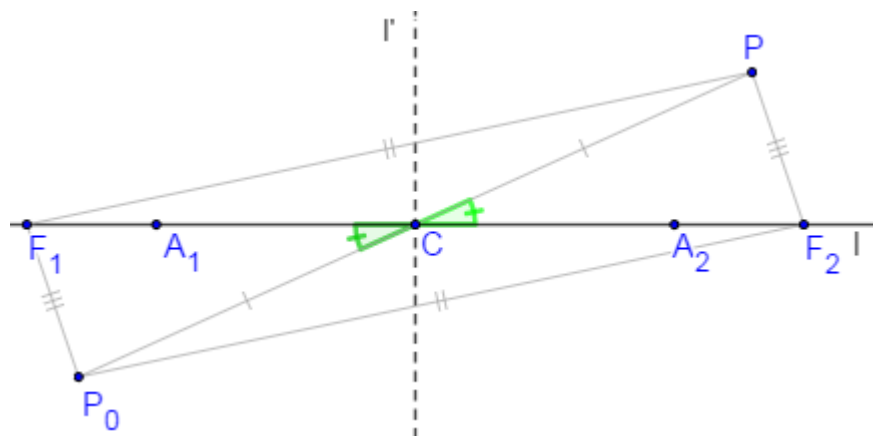
Em particular,

$$|F_1P| = |F_2P_0| \quad e \quad |F_2P| = |F_1P_0|.$$

Portanto,

$$|d(P_0, F_1) - d(P_0, F_2)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow P_0 \in E.$$

Figura 78 – Simetria da hipérbole em relação ao centro



Fonte: O autor, 2019.

4.4.3 Forma canônica da hipérbole

Pretende-se a seguir, para alguns casos especiais, obter a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY .

4.4.3.1 Hipérbole centrada na origem e reta focal coincidente com eixo OX

Considerando o sistema de eixos ortogonais OXY no plano, para obter a equação da hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX , deve-se ter:

$$F_1 = (-c, 0), \quad F_2 = (c, 0), \quad A_1 = (-a, 0), \quad A_2 = (a, 0), \\ B_1 = (0, -b) \quad e \quad B_2 = (0, b),$$

onde $0 < a < c$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Pela definição de hipérbole:

$$P = (x, y) \in H \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Então,

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(xc - a^2)^2 = (\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4 + a^2y^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 = a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2,$$

mas, como $b^2 = c^2 - a^2$, tem-se:

$$b^2x^2 = a^2b^2 + a^2y^2$$

e

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por a^2b^2 , obtém-se a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a forma canônica da hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente como o eixo OX . Uma prova mais rigorosa da demonstração acima é feita em Frensel et al (2013).

Neste caso as assíntotas da hipérbole passam pelo centro e suas equações são:

$$y = -\frac{b}{a}x \text{ e } y = +\frac{b}{a}x.$$

4.4.3.2 Hipérbole centrada na origem e reta focal coincidente com eixo OY

Considerando o sistema de eixos ortogonais OXY no plano, para obter a equação da hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY , deve-se ter:

$$F_1 = (0, -c), \quad F_2 = (0, c), \quad A_1 = (0, -a), \quad A_2 = (0, a), \\ B_1 = (-b, 0) \text{ e } B_2 = (b, 0),$$

onde $0 < a < c$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Procedendo-se de maneira análoga, ao caso da hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX , obtém-se que a equação desta e hipérbole é dada por:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

que é a forma canônica da hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY .

4.4.4 Esboço do gráfico da hipérbole

A fim de esboçar uma hipérbole E , considere um sistema de eixos ortogonais OXY , com origem O no centro de H e o eixo OX coincidindo com sua reta focal neste sistema de eixos, a equação da hipérbole E é dada na forma canônica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Então,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Considere a função:

$$f(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, x \in [a, +\infty).$$

Para $y = 0$, tem-se:

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

Desta forma, o gráfico da hipérbole passa pelo ponto $(a, 0)$. Além disso, tem-se que:

$$y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} > 0, \forall x \in (a, +\infty)$$

Logo, pelo Teste da crescente/decrescente, Stewart (2013), a função é crescente.

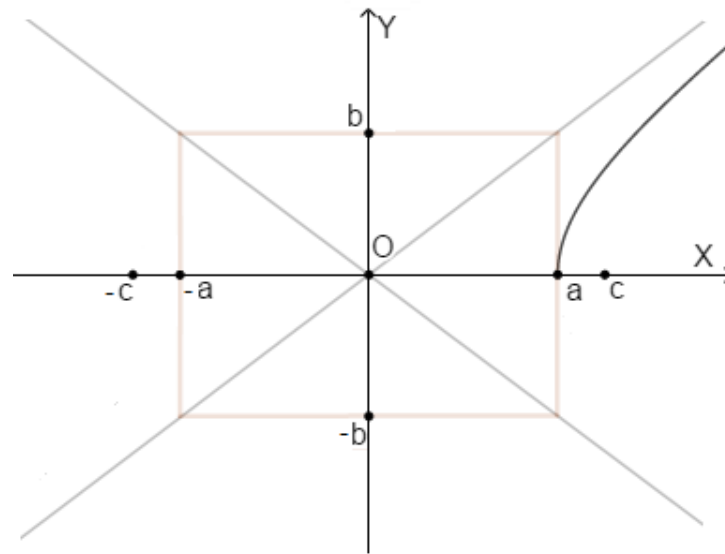
Todavia, pelo Teste da concavidade, Stewart (2013).

$$y'' = \frac{-ab}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} < 0, \forall x \in (a, +\infty)$$

Assim y' é decrescente em $(a, +\infty)$, logo o f é côncava.

A Figura 79, a seguir, mostra o gráfico de f .

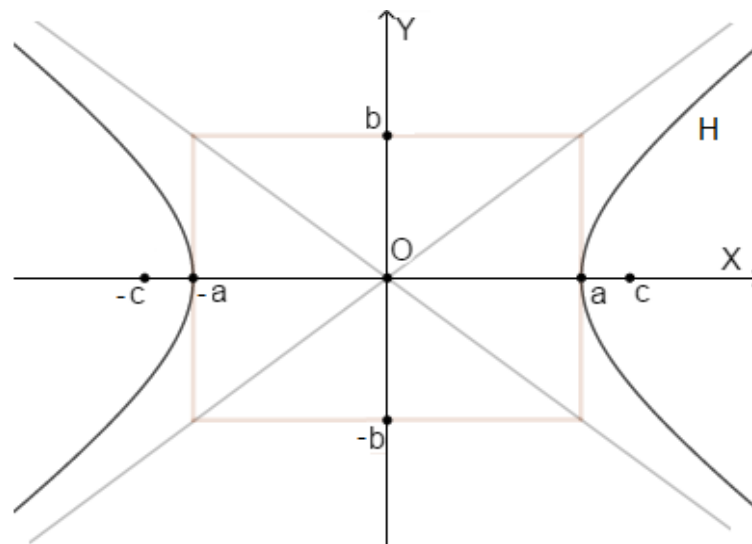
Figura 79 – Gráfico de $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, x \in [a, +\infty)$



Fonte: O autor, 2019.

Como a hipérbole é simétrica em relação ao eixo OX (reta focal) e em relação ao eixo OY (reta não-focal), seu gráfico tem a forma apresentada na Figura 80:

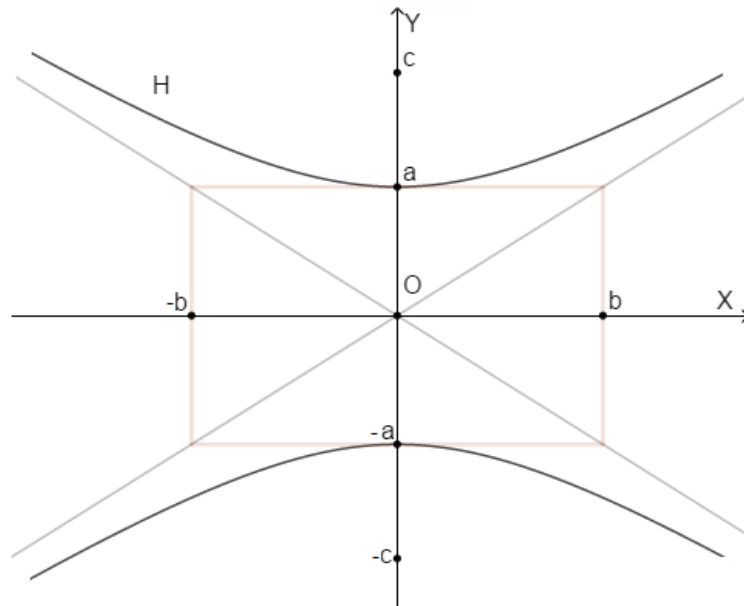
Figura 80 – Esboço da hipérbole $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Fonte: O autor, 2019.

De forma análoga, na Figura 81, esboça-se o gráfico da hipérbole $H: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Figura 81 – Esboço da hipérbole $H: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



Fonte: O autor, 2019.

4.4.5 Forma canônica da hipérbole transladada

4.4.5.1 Hipérbole centrada no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX

Sendo o ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$ o centro da hipérbole e como a reta focal l contém \bar{O} , tem-se que $l: y = y_0$ (paralela ao eixo OX). A reta não focal l' que contém \bar{O} e é perpendicular a l é da forma $l': x = x_0$ (paralela ao eixo OY), conforme Figura 82.

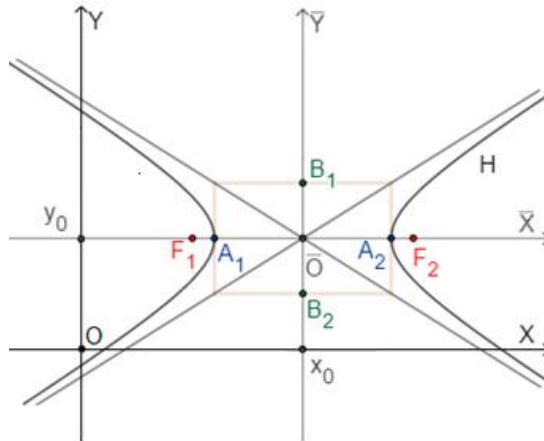
No sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ a hipérbole tem equação:

$$H: \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1.$$

Usando a relação (3.1), obtém-se finalmente a equação da hipérbole no sistema OXY .

$$H: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Figura 82 – Esboço da hipérbole $H : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$



Fonte: O autor, 2019.

4.4.5.2 Hipérbole centrada no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY

Neste caso, a reta focal é $l: x = x_0$ (paralela ao eixo OY) e a reta não focal é $l: y = y_0$ (paralela ao eixo OX).

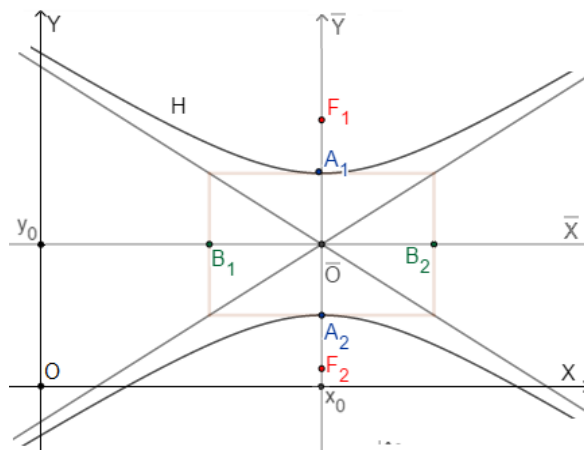
No sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ a hipérbole tem equação:

$$H: \frac{\bar{y}^2}{a^2} - \frac{\bar{x}^2}{b^2} = 1,$$

e no sistema OXY , é dada por:

$$H: \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Figura 83 – Esboço da Hipérbole $H : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$



Fonte: O autor, 2019.

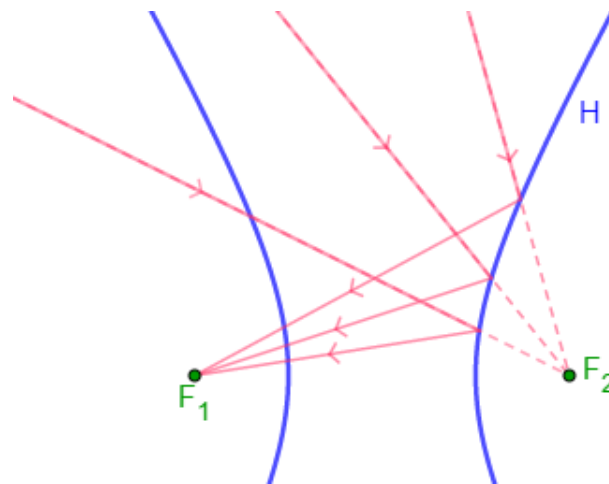
4.4.6 Propriedades geométricas da hipérbole e aplicações

4.4.6.1 Propriedade refletora da hipérbole

Seja P um ponto pertencente a uma hipérbole de focos F_1 e F_2 . A bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$, é tangente a uma hipérbole no ponto P .

Esta propriedade garante que todo raio de luz (ou uma onda) emitido em linha reta na direção de um dos focos de uma hipérbole, reflete no ramo da superfície mais próximo a este foco, passando pelo outro foco, como ilustrado na Figura 84.

Figura 84 – Reflexão em um dos ramos da hipérbole.



Fonte: O autor, 2019.

Demonstração:

Seja Q um ponto pertencente a t , com $Q \neq P$. Como t é bissetriz de $F_1\hat{P}F_2$, temos $Q\hat{P}F_1 \cong Q\hat{P}F_2$. Considerando o ponto A pertencente a PF_2 , de modo que $|PF_1| = |PA|$ (Figura 78), temos:

$$|AF_2| = |PF_2| - |PA| = |PF_2| - |PF_1| = 2a.$$

Por congruência de triângulo (LAL), t é perpendicular a F_1A , base do triângulo isósceles F_1PA . Portanto, se Q pertence a t , $Q \neq P$, temos que ΔF_1QA é também isóscele e, em particular

$$|QF_1| = |QA|.$$

Sendo Q, A e F_2 não alinhados, pela desigualdade triangular, temos:

$$|QA| < |QF_2| + |AF_2|$$

e

$$|QF_2| < |QA| + |AF_2|.$$

Assim:

$$|QA| - |QF_2| < |QF_2| < |QA| + |AF_2|.$$

Subtraindo $|QA|$ nas inequações acima, obtemos:

$$-|QF_2| < |QF_2| - |QA| < |AF_2|.$$

Logo,

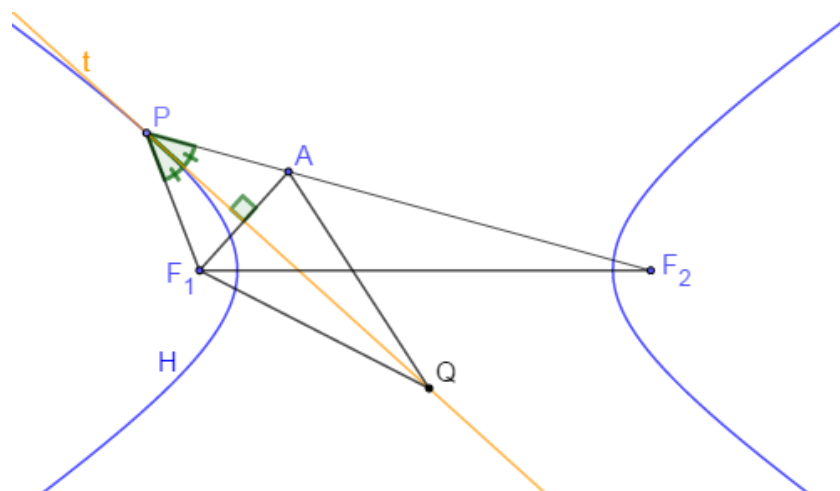
$$||QF_2| - |QA|| < |AF_2|$$

Mas, $|QA| = |QF_2|$ e, como já mostramos, $|AF_2| = 2a$, logo

$$|QF_2| - |QF_1| < 2a, \forall Q \neq P, Q \in t.$$

Logo t intersecta a hipérbole H apenas em P e, portanto, t é tangente a H .

Figura 85 – Propriedade refletora da hipérbole.



Fonte: O Autor, 2019.

4.4.6.2 O telescópio refletor

Segundo Ávila (1997) Os primeiros telescópios que foram construídos utilizavam lentes e funcionavam com base na refração da luz chamados **telescópios refratores**. Até Galileu Galilei, para fazer suas observações astronômicas, utilizou telescópios refratores.

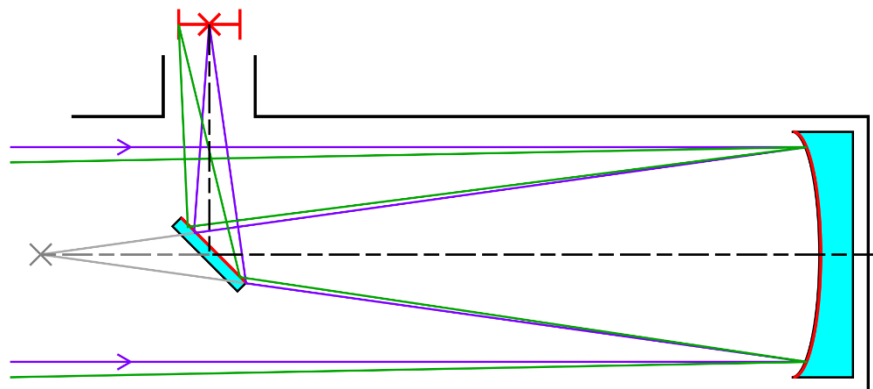
Ocorre que o uso de lentes tem vários inconvenientes como as deformações das imagens produzidas e as aberrações cromáticas – efeito produzido nas observações decorrentes do fato que a lente atua também como um prisma decompondo a luz branca em várias cores.

Os telescópios refletores não têm os inconvenientes dos telescópios refratores. Segundo Ávila (1997), **o telescópio refletor** é um espelho parabólico no fundo de um tubo. Os raios de luz proveniente de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planeta, etc.) formam um feixe praticamente paralelo, devido à sua distância ao planeta Terra, que se reflete no espelho e forma a imagem do objeto no foco F . Porém, na prática isso é impossível, visto que o observador teria que posicionar seu olho no foco da parábola.

A fim de resolver este problema Isaac Newton colocou um espelho plano entre o espelho parabólico e o seu foco em seu telescópio refletor.

Dessa maneira, os raios de luz que formariam a imagem dentro do telescópio são novamente refletidos e formarão essa imagem em um ponto fora do tubo do telescópio, onde o observador está posicionado (Figura 86).

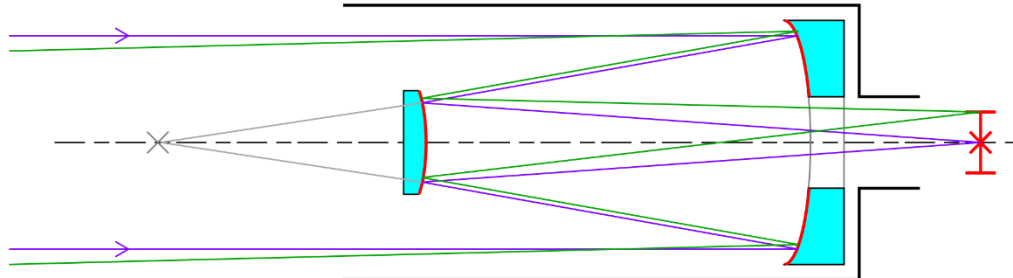
Figura 86 – Caminho da luz em um telescópio de Newton



Fonte: Krishnavedala - Own work, CC BY-SA 4.0. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newtonian_telescope2.svg. Acesso em 01/04/2019.

Em 1672, o astrônomo francês *Laurent Cassegrain* propôs a utilização de um espelho hiperbólico (Figura 87) com um dos focos da hipérbole coincidindo com o foco da parábola.

Figura 87 – Caminho da luz em m telescópio de Cassegrain



Fonte: Krishnavedala - Own work, CC BY-SA 4.0, Disponível em:

<<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=34884711>.> Acesso em 01/04/2019.

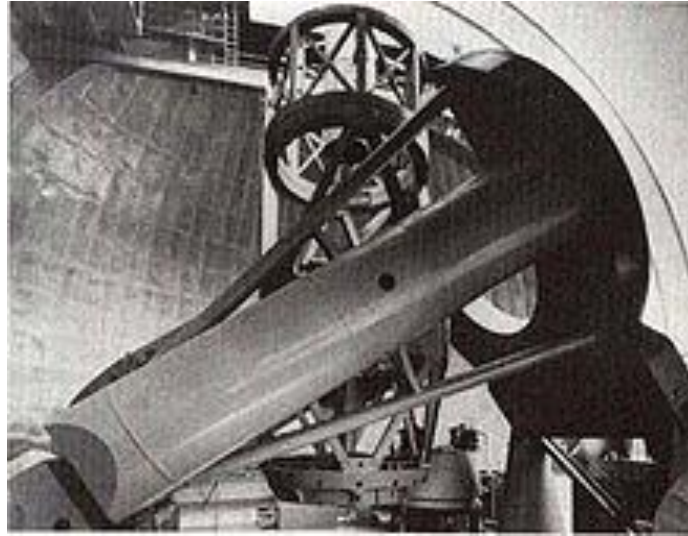
No telescópio refletor de *Cassegrain* um espelho hiperbólico é colocado no lugar do espelho plano de Newton de maneira que um dos focos do espelho hiperbólico coincida com o foco do espelho parabólico. Assim, os raios de luz incidem primeiro no espelho parabólico e, os raios que teriam sua imagem formada no foco da parábola, são refletidos pelo espelho hiperbólico de volta, através de um buraco no espelho parabólico, convergindo para o segundo foco da hipérbole onde o observador está posicionado.

Ávila (1997), explica que o espelho de Cassegrain pode ser construído mais próximo ou mais afastado do foco (onde estaria o observador), mantendo-se fixa a distância entre os focos da hipérbole. Consequentemente, o tamanho desse espelho pode ser alterado. A distância entre os focos também pode ser alterada, sem mudar a posição de um dos focos. A combinação desses fatores permite grande flexibilidade na montagem do refletor *Cassegrain* adequando-a, assim, às exigências das observações.

Apesar da sua eficiência, o esquema proposto por *Cassegrain* não foi utilizado imediatamente, demorando cerca de um século. Desde então, ele passou a ser adotado em larga escala e hoje é utilizado também nos radiotelescópios.

O telescópio ótico do observatório de Monte Palomar (Figura 88), na Califórnia, entrou em operação em 1949 e utiliza várias montagens do tipo de Cassegrain. Durante muitos anos foi o telescópio mais importante do mundo.

Figura 88– Telescópio óptico do observatório de Monte Palomar



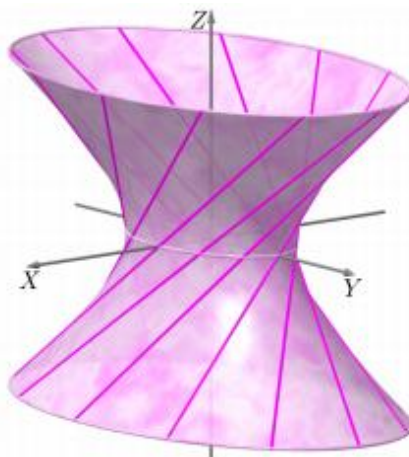
Fonte: Academic. Disponível em: <<http://www.esacademic.com/dic.nsf/eswiki/822613>>.

Acesso em: 23 Mar. 2019.

4.4.6.3 Torre de resfriamento Hiperbólicas

Um **hiperboloide de uma folha** (Figura 89) é a superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma hipérbole em torno de sua reta não focal.

Figura 89 - Hiperboloide de uma folha



Fonte: Frensel et al, 2008.

Segundo Sapunaru (2014) a torre de resfriamento hiperbólico (Figura 90) é uma torre que permite a transferência de calor através do contato de duas correntes de fluidos. Nas

usinas termonucleares esses fluidos são água e ar. A água utilizada no resfriamento do reator nuclear chega até a parte inferior da torre entrando em contato com o ar ali presente, aquecendo-o. O ar quente, menos denso que o frio, tende a subir e é liberado para a atmosfera dando espaço a entrada de ar frio, permitindo assim o resfriamento da água, que será reutilizada novamente no processo de resfriamento do reator nuclear.

O formato hiperbólico contribui para uma maior velocidade na saída de ar quente, pois o afunilamento na parte central cria uma região de compressão. O ar quente é naturalmente direcionado para cima, por ser menos denso, e a água sob ação da gravidade é direcionada para baixo. As vantagens deste formato de torre estão relacionadas também com a capacidade de resfriamento de grande volume de água e ao baixo custo de operação.

Figura 90 – Torre de resfriamento hiperbólica



Fonte: Mecânica Industrial. Disponível em: < <https://www.mecanicaindustrial.com.br/557-torre-de-resfriamento/>>. Acesso em: 21 Abr. 2019.

5 MAIS ALGUMAS CURVAS

5.1 Cicloide

5.1.1 Introdução histórica

Segundo Pedroso (2014), o primeiro relato sobre a cicloide foi em 1501, num trabalho de geometria publicado por Charles Bovells (1479 – 1566) em Paris. Neste relato, Charles refere-se à curva ligando-a a um problema da quadratura do círculo. Os primeiros estudos rigorosos que se tem conhecimento são de Giles Person de Roberval (1602 – 1675). Segundo Boyer (1996), Roberval gostava de se envolver em debates contraditórios. O mais famoso destes foi sobre a cicloide, que na época era conhecida como “Helena dos Geômetras” devido as frequentes divergências que provocou durante o século XVII.

A seguir, algumas descobertas de Roberval:

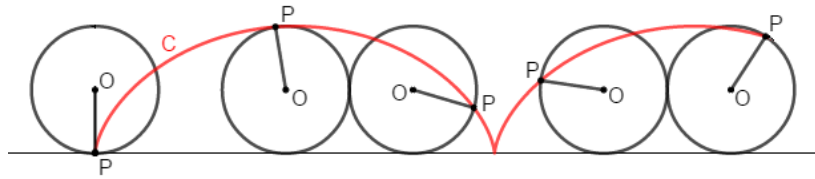
- i) Área sob o arco da cicloide é exatamente três vezes a área do círculo gerador (1634).
- ii) Como traçar uma tangente a curva em qualquer ponto da mesma (1628).
- iii) Volume gerado quando a área sob um arco gira em torno da reta da base, em torno do eixo de simetria e em torno da tangente no vértice.

Roberval não publicou suas descobertas relativas à cicloide, e isso causou grande confusão na época. Isso porque Torricelli também se interessou pela curva e ao contrário de Roberval, publicou suas descobertas em 1644 em uma obra intitulada *De parabolis*. Em 1646, Roberval escreveu uma carta acusando Torricelli de plágio. Boyer (1996) acredita que provavelmente Torricelli fez suas descobertas de maneira independente, justificando que algumas propriedades, como o problema da área, foram demonstradas de maneiras distintas.

5.1.2 Definição da cicloide

Sejam dados um círculo C' de raio R , uma reta s e um ponto P pertencente à C' . Uma cicloide C é a curva descrita pelo ponto P quando C' rola (sem deslizar) sobre a reta s (Figura 91).

Figura 91 – Esboço da curva cicloide de acordo a definição.

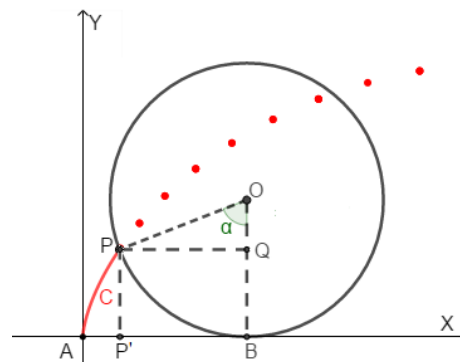


Fonte: O autor, 2019.

5.1.3 Parametrização da cicloide

Para obter a parametrização da cicloide C , toma-se a reta s coincidente com o eixo OX . No início do movimento as coordenadas do centro do círculo são $O = (0, r)$ e $P = (0, 0)$.

Figura 92 – Parametrização da cicloide



Fonte: O autor, 2019.

Após girar α radianos (Figura 92), no sentido horário, tem-se que a medida do segmento AB é igual ao arco de P a B , ou seja, $|AB| = r \cdot \alpha$. Sendo $P = (x, y)$, tem-se:

$$x = |AP'| = |AB| - |P'B| = r \cdot \alpha - r \cdot \cos(\alpha)$$

$$y = |PP'| = |OB| - |OQ| = r - r \cdot \sin(\alpha)$$

Logo, a equação paramétrica da cicloide é dada por:

$$\begin{cases} x = r(\alpha - \cos(\alpha)) \\ y = r(1 - \sin(\alpha)) \end{cases}; \alpha \in [0, 2\pi]$$

5.1.4 Aplicações

Cúpulas do Museu de Arte Kimbell

O Museu de Arte Kimbell (Figura 93) foi inaugurado oficialmente em 4 de outubro de 1972 em Fort Worth, Texas, Estados Unidos. O arquiteto responsável pela obra foi Louis Kahn, que tinha como desafio construir galerias que fossem iluminadas naturalmente de forma indireta, evitando assim danos as obras de artes.

Para possibilitar uma maior incidência de luz, foi pensada uma cúpula com uma abertura para a incidência da luz. Após vários testes, o engenheiro A. Komendant recomendou a cicloide como forma adequada para as cúpulas.

Figura 93 – Foto externa do Museu de Arte Kimbell



Fonte: Arch Daily. Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/01-117677/classicos-da-arquitetura-museu-de-arte-kimbell-slash-louis-kahn>>. Acesso em: 10 Abr. 2019

As alas laterais (Figura 93), são formadas por seis abóbadas de berço, em formato de cicloide, independentes entre elas e apoiadas cada uma em quatro pilares perimetrais. Há um distanciamento constante entre as abóbadas e a parede de concreto. Internamente, este distanciamento fica evidente com a penetração da luz natural, complementada por uma claraboia que tem sua luz direcionada por duas asas de alumínio perfurado (Figura 94), evitando uma iluminação direta nas obras de arte. A beleza dos detalhes está presente neste edifício, considerado uma obra prima da iluminação natural.

Figura 94 – Imagem interna da galeria do Museu de Arte Kimbell



Fonte: Arch Daily. Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/01-117677/classicos-da-arquitetura-museu-de-arte-kimbell-slash-louis-kahn>>. Acesso em: 10 Abr. 2019.

Braquistócrona

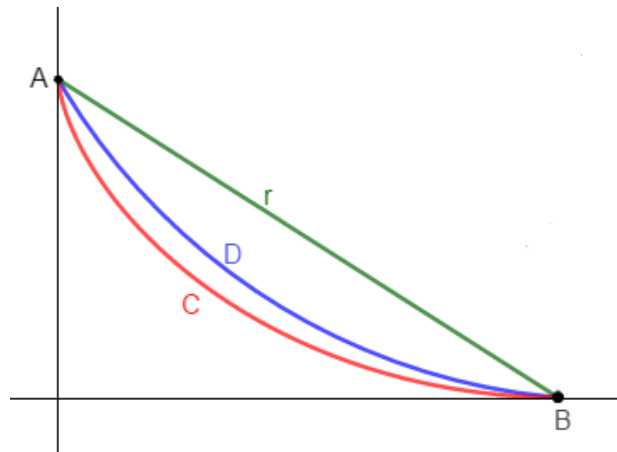
O problema da braquistócrona consiste em determinar uma curva que propicie um objeto em repouso, de massa m sujeito apenas a ação da gravidade, se deslocar de um ponto A até um ponto B no menor tempo possível.

Segundo Markushevich (1980), o astrônomo e físico italiano Galileo Galilei (1564-1642) pensou que o caminho de descida mais rápido deveria ser na forma de um arco de circunferência. Porém, dois irmãos matemáticos suíços, Jakob e Johann Bernoulli, conseguiram provar por cálculos exatos que o formato da curva era de um arco de cicloide virado de cabeça para baixo (Figura 95). Desde então, a cicloide também foi chamada de braquistócrona. A demonstração desta propriedade pode ser vista em Martins (2019).

Na Figura 95, estão representados um segmento de reta AB , um arco de circunferência D e uma cicloide invertida C .

Mesmo não sendo o caminho mais curto, a cicloide tem a característica da braquistócrona se comparada a qualquer outra curva que liga A até B .

Figura 95 – Comparação entre reta, arco de circunferência e cicloide

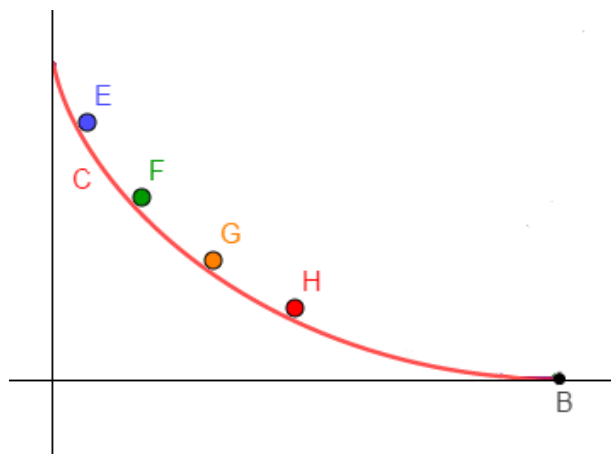


Fonte: O autor, 2019.

Tautócrona

Tautócrona é uma curva com a seguinte característica: independente do ponto de partida de um objeto (Figura 88), o tempo que ele leva para atingir o ponto mais baixo da curva será o mesmo.

Figura 96 – Objetos em diversos pontos da cicloide



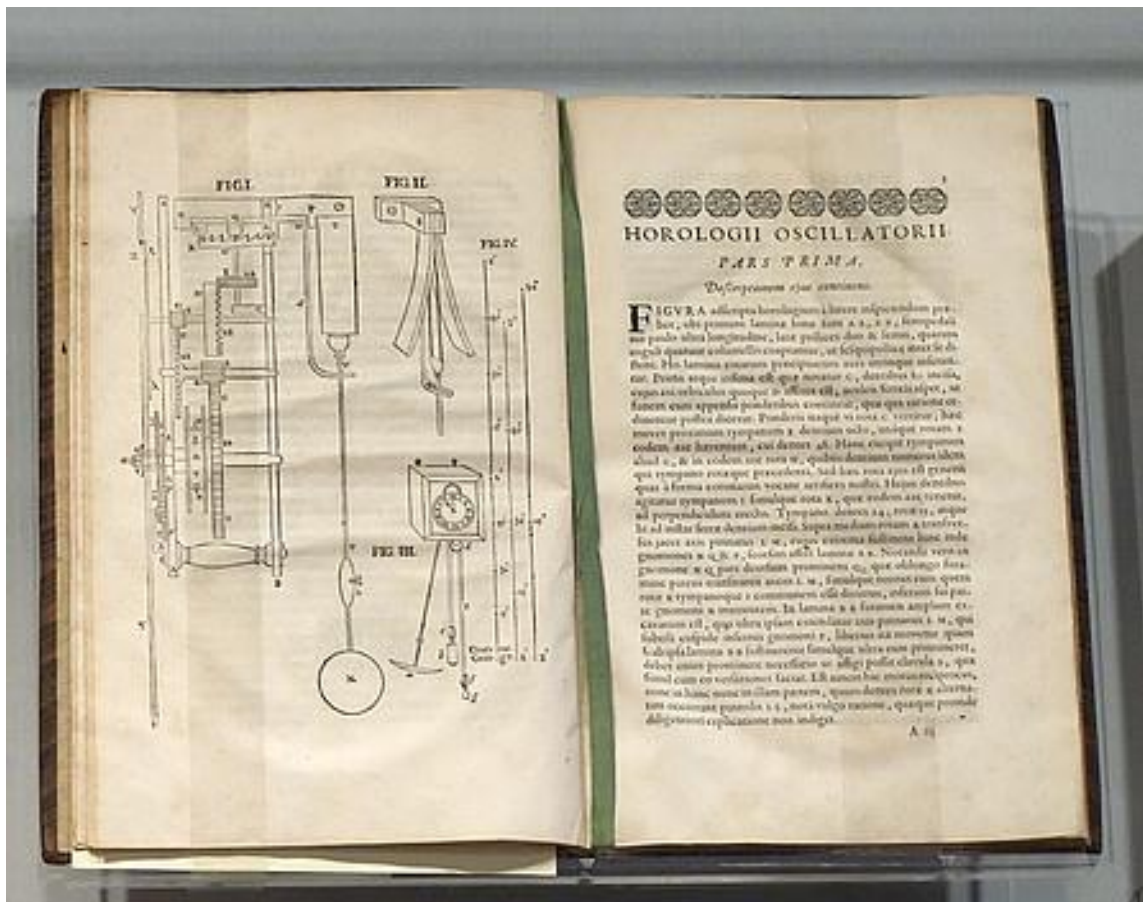
Fonte: O autor, 2019.

Se os corpos E, F, G e H partirem do repouso em um mesmo instante, sujeitos apenas à ação da gravidade, eles chegarão juntos ao ponto B.

Segundo Mendes (2014), Huygens estudou problemas relacionados à construção de relógios durante 40 anos (1656 – 1693). Em 1673, publicou *Horologium Oscillatorium – O Relógio Pendular* (Figura 97).

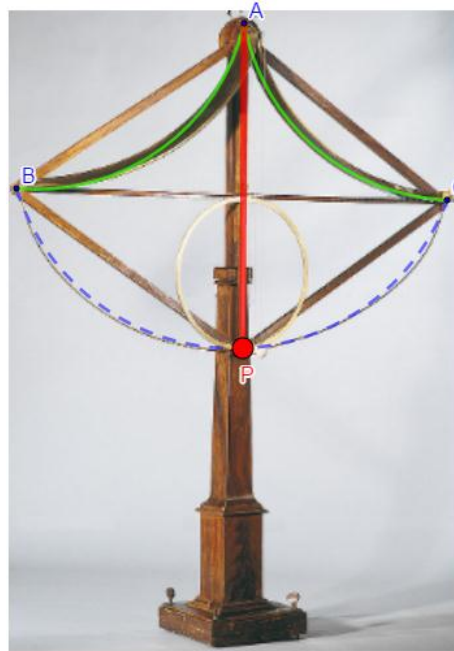
Huygens usou infinitesimais para descobrir e geometria para provar que a tautócrona era uma cicloide (COELHO, 2008). Usando essa descoberta, concluiu que se o objeto P fixado no extremo inferior de um pêndulo descrever uma trajetória \widehat{BC} cicloidal (Figura 98) (Figura 98), o período de oscilação não se altera. Intuitivamente descobriu-se que os obstáculos laterais \widehat{AB} e \widehat{AC} para que o objeto P descreve tal trajetória também era cicloidal (VENCESLAU, 2015).

Figura 97 – Horologium Oscillatorium



Fonte: Modificado de <<https://www.obaricentrodamente.com/2013/12/christiaan-huygens-e-o-relogio-de.html>>. Acesso em: 18 Abr. 2019

Figura 98 - Modelo de pêndulo cicloidal de Huygens



Fonte: O baricentro da mente. Modificado de:

<<https://www.obaricentrodamente.com/2013/12/christiaan-huygens-e-o-relogio-de.html>>

Acesso em: 18 Abr. 2019

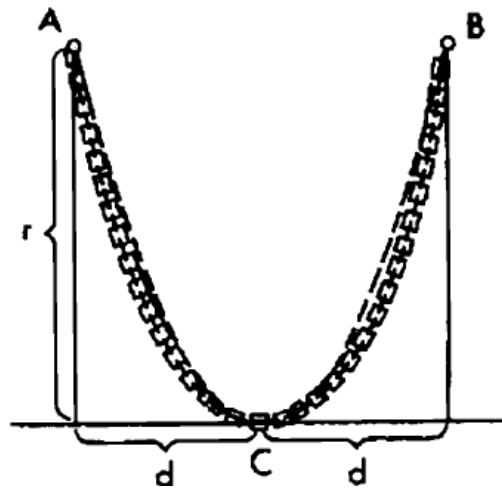
5.2 Catenária

5.2.1 O Problema da corrente suspensa

Segundo Markushevich (1980), Galileu Galilei (1564-1642) sugeriu em seu livro "Diálogos sobre duas novas ciências" o seguinte método de construção de uma parábola:

Conduza dois pregos em uma parede a uma altura conveniente e no mesmo nível; faça a distância entre eles duas vezes a largura do retângulo sobre o qual é desejado para traçar a semi parábola. Pendure entre esses dois pregos uma corrente leve de tal comprimento que a profundidade da sua inclinação é igual a altura do retângulo. A corrente então assumirá o formulário de uma parábola, de modo que se esta forma é marcada por pontos na parede, nós devmos ter descrito uma parábola completa, que pode ser dividida em duas partes iguais, desenhando uma linha vertical através de um ponto médio entre os dois pregos. (MARKUSHEVIC, 1980, p.32)

Figura 99 – Corrente suspensa



Fonte: Markshevic, 1980.

Markushevic (1980) cita que o método é simples e gráfico, mas não exato. Segundo Oliveira (2013), Galileu tratava a curva como “uma aproximação de um arco de parábola” e não precisamente uma parábola.

Talavera (2008) destaca que em 1646, Huygens, na época com dezessete anos de idade, provou que a curva em questão não poderia ter a forma de uma parábola, porém não definiu qual curva seria. Foi Huygens que chamou a curva descrita no problema da corrente suspensa de catenária (Figura 99).

Segundo Markushevic (1980), em 1660, Jacob Bernoulli demonstrou de maneira teórica qual seria a equação exata que descreveria a curva, mas não a publicou. Flora (2013), relata que em 1690, Jacob Bernoulli propõe na *Acta Eruditorum*⁴, jornal fundado por Leibniz, o problema da “curva formada por um fio pesado, flexível, inextensível, e de densidade constante em todo seu comprimento, suspenso nos seus extremos”. Em 1691, o próprio Jacob, seu irmão Johann, Gottfried Wilhelm von Leibniz e Christian Huyghens, este usando meios geométricos, publicaram suas respectivas soluções para o problema da corrente suspensa.

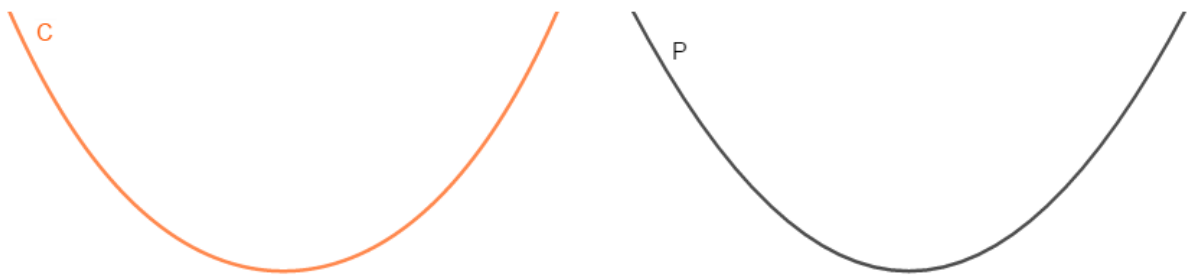
O Cálculo teve papel fundamental na elucidação deste problema, que segundo Talavera (2008) é considerado uma importante solução dos problemas desafiadores da história do cálculo. “Todos eles usaram na solução do problema as leis de mecânica e a poderosa técnica da recentemente desenvolvida análise matemática: a derivada e a integral” (MARKUSHEVIC, 1980, p. 40)”.

⁴ Revista científica alemã publicada exclusivamente em latim, entre 1682 e 1731 (num total de 50 volumes) que pretendia anunciar e resumir publicações notáveis da época, em várias áreas científicas, como medicina, matemática, direito, geografia e teologia. (RAPOSO, 2013)

5.2.2 Parábola e catenária

Os matemáticos estão frequentemente interessados em encontrar uma função que descreva uma forma ou uma situação particular, como no caso da corrente suspensa, que Galileu descreveu como uma curva com a forma muito similar à da parábola. De fato, as curvas possuem aparências muito similares, como sugere a Figura 100.

Figura 100 – Curva C (catenária) e P (parábola)



Fonte: O autor, 2019.

5.2.3 Definição da catenária

Catenária é a curva plana que representa a forma de equilíbrio de um fio homogêneo, flexível, pesado, suspenso por suas extremidades a partir de dois pontos fixos, e submetido exclusivamente à força da gravidade.

5.2.4 Equação cartesiana da catenária

Segundo Yates (1974) a curva catenária tem a seguinte equação cartesiana:

$$c(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Segundo Stewart (2013), a função hiperbólica $\cosh x$ é definida por:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

para todo x real. Desta forma, $c(x)$ também pode ser representada por:

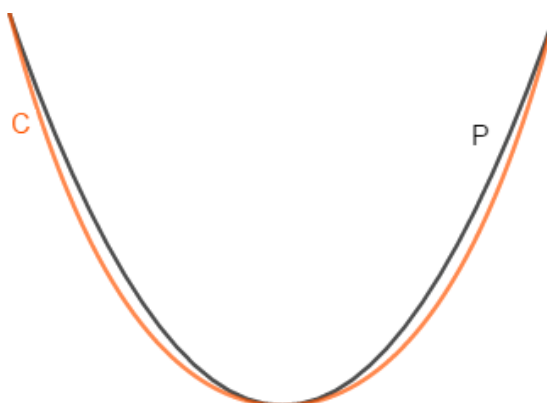
$$c(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Por outro lado, a equação básica da parábola é dada por:

$$p(x) = x^2.$$

Usando transformações simples dessas funções (Figura 101), pode-se observar a similiaridade das curvas.

Figura 101– Catenária sobreposta à parábola



Fonte: O autor, 2019.

5.2.5 Aplicações à Arquitetura e à Engenharia

Ponte pênsil

Segundo Oliveira (2012), a principal característica das pontes pênsis é a sua sustentação por meio de pendurais apoiados em cabos de aço ou barras articuladas, estendidos em curva, apoiados sobre torres ou blocos maciços de concreto. Elas existem a mais de cem anos em diversos lugares do mundo, sendo as preferidas para vãos maiores que 600 metros. No entanto também são construídas em vãos menores. A mais famosa é a Ponte Golden Gate (Figura 102), em São Francisco, EUA. Martins (2013) chama atenção de que quando esta ponte está em construção e os cabos já estão suspensos, estes formam catenárias.

Nesta fase os cabos sustentam somente a eles próprios. Após a ponte construída, estes cabos passam a sustentar toda a estrutura da ponte, deformando-se, deixando de serem curvas catenárias.

Figura 102 – Cabos suspensos em uma ponte pênsil em construção.



Fonte: MARTINS, 2013.

Pavilhão de Portugal

A cobertura que une os dois blocos do Pavilhão de Portugal (Figura 103), em Lisboa, Portugal, tem a forma de uma catenária, pois se fosse uma superfície reta, seria mais frágil, visto que a curva minimiza a energia potencial gravitacional da estrutura, além de criar um arco mais estável.

Figura 95 – Pavilhão de Portugal



Fonte: Visit Portugal. Disponível em: <<https://www.visitportugal.com/pt-pt/content/pavilhao-de-portugal>>. Acesso em: 15 Abr. 2019.

Catedral de São Paulo

Martins (2013) enfatiza que a catenária cria o melhor arco invertido em termos de estabilidade. Não é surpreendente que estes arcos sejam utilizados em arcos de construções. A primeira utilização da catenária na arquitetura é atribuída a Robert Hook (1635 – 1703), na construção da cúpula principal da Catedral de São Paulo, em Londres, Inglaterra (Figura 104). Se cortar a cúpula por um plano transversal que passa pelo centro, tem-se uma catenária.

Figura103 – Interior da cúpula principal da Catedral de São Paulo



Fonte: Martins, 2013.

Obras de Gaudí

Antoni Gaudí (1852 – 1926) usava frequentemente esse arco, às vezes com adaptações, como pendurar sacos nos fios a fim de simular as forças aplicadas à estrutura. As curvas obtidas eram utilizadas para desenhar suas bordas e torres quando viradas para cima. A Basílica da Sagrada Família (Figura 105), em Barcelona, Espanha, é considerada a grande obra prima de Gaudí. Esta construção é rica em arcos de catenárias, tanto no exterior como no interior.

O edifício de apartamentos Casa Milá (Figura 106), também em Barcelona, é outra famosa obra de Gaudí. Algumas partes desta surpreendente obra estão abertas à visitação. Rico em curvas, o interior deste prédio contém a presença significativa de catenárias invertidas.

Figura 105 – Basílica da Sagrada Família

(a) Exterior do Catedral.



Fonte: Arch Daily. Disponível em:
<https://www.archdaily.com.br/br/787647/categorias-da-arquitetura-la-sagrada-familia-antoni-gaudi>. Acesso em: 1 Mar. 2019

(b) Interior da Catedral.



Fonte: Gaudi Shopping. Disponível em:
www.gaudishopping.cat. Acesso em: 1
 Mar. 2019

Figura 106 – Interior da Casa Milá.



Fonte: Modificado de: www.123rf.com. Acesso em: 2 Mar. 2019.

Segundo Kaplan (2008), em um forno, as altas temperaturas criam problemas na integridade da estrutura. Fornos construídos em formas circulares precisam de estrutura adicional para preservar sua integridade; no entanto, fornos construídos em forma de catenária (Figura 107) não tem o mesmo problema. É interessante notar que, embora seja possível encontrar equações para construir fornos na forma de catenária, o modo mais simples e preciso é pendurar uma corrente, traçar a curva correspondente, invertê-la e depois usar o esboço para o modelo.

Figura 107 – Forno catenário.



Fonte: Greasu Creek Pottery. Disponível em:

<<http://www.greasycreekpottery.com/kiln.html>>. Acesso em: 6 Abr. 2019.

Gateway Arch

O Gateway Arch (Figura 108), localizado em St. Louis, Missouri, Estados Unidos, foi projetado pelo arquiteto Eero Saarinen, é um gigantesco arco com face de aço inoxidável com mais de 190 metros de altura. Os 190 metros também é a medida entre os “pés” do arco com a forma de uma curva catenária invertida. Conhecido como o monumento mais alto da nação, o Gateway Arch recebe visitantes há 50 anos com sua forma icônica e inspiradora.

Figura 108– Gateway Arch.



Fonte: Bi State Development. Disponível em: <<https://www.bistatedev.org/2016/03/23/tram-rides-resume-at-the-gateway-arch/>>. Acesso em: 11 Abr. 2019.

O destaque de uma visita ao Gateway Arch é ir até o topo, através de um bonde, para uma vista panorâmica da área ao redor por meio de 16 janelas com vista para o leste sobre o rio Mississippi e as comunidades e o campo de Illinois e 16 janelas com vista para o oeste sobre a cidade de St. Louis. Curiosamente, os bondes que levam os visitantes até o topo, são uma invenção única, concebidos em apenas duas semanas por Dick Bowser. Incrivelmente, ele nunca recebeu um diploma universitário.

O site oficial do Nacional Park Service disponibiliza em sua página a equação matemática (Figura 109) utilizada para gerar a curva correspondente ao arco catenário.

Figura 109 - A equação matemática por trás da construção do Gateway Arch

$$y = A \left(\cosh \frac{x}{L} C - 1 \right)$$

$$x = \frac{L}{C} \left[\cosh^{-1} \left(1 + \frac{y}{A} \right) \right]$$

onde,

$$C = \cosh^{-1} \frac{Q_b}{Q_v} = 3,0022 \quad A = \frac{h}{R - 1} = 68,7672 \quad R = \frac{Q_b}{Q_v} = 10,0899$$

$$Q_b = \text{Área transversal do triângulo da base} = 1262,6651$$

$$Q_v = \text{Área transversal do triângulo do topo} = 125,1406$$

$$h = \text{altura máxima do arco} = 625,0926$$

$$L = \text{metade da distância entre as bases do arco} = 299,2239$$

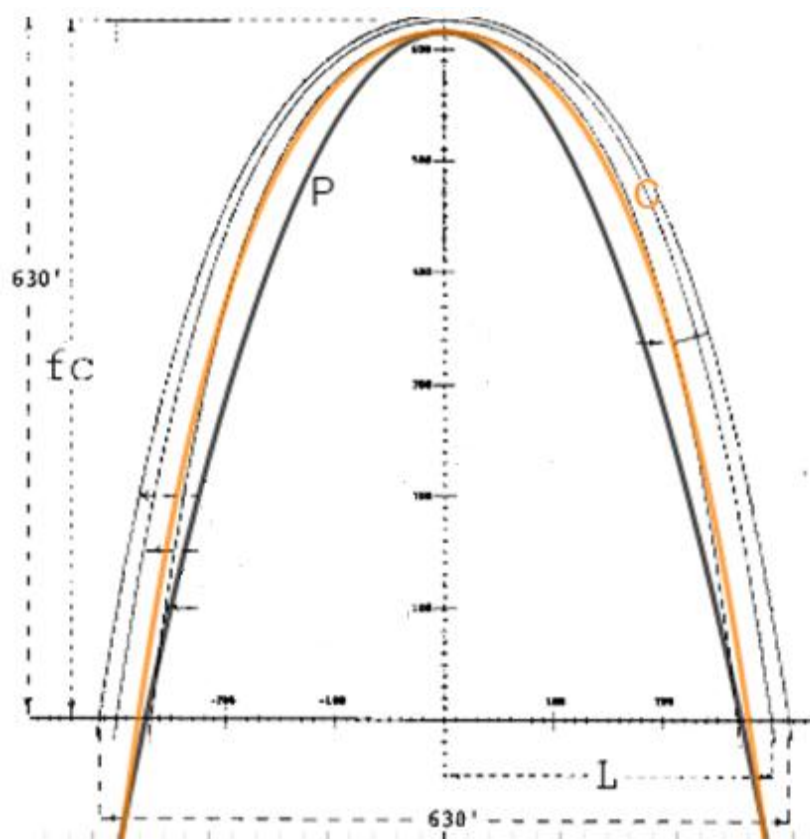


Fonte: National Park Service. Modificado de:

<<https://www.nps.gov/jeff/planyourvisit/mathematical-equation.htm>>. Acesso em: 11 Abr. 2019.

Usando o *software* GeoGebra, pode-se plotar duas curvas, parábola P (a curva com traçado mais escuro) e a catenária C (a curva em amarelo), sob a planta do Gateway Arch. A curva que mais se aproxima do arco interno da planta é a catenária.

Figura 110 – Planta do Gateway Arch



Fonte: WikiArquitetura. Modificada de:

<<https://pt.wikiarquitectura.com/constru%C3%A7%C3%A3o/gateway-arch/>>. Acesso em: 11 Abr. 2019.

5.3 Lemniscata

5.3.1 Um breve relato sobre as Ovais de Cassini

Sejam dados dois pontos do plano, F_1 e F_2 . **A Oval de Cassini** C de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cujo produto das distancias de P a F_1 e a F_2 é igual a constante $a > 0$, isto é:

$$C = \{d(P, F_1) \times d(P, F_2) = a\}.$$

A fim de simplificar, Morais Filho (2005), considerou no plano cartesiano:

$$P = (x, y), F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0) \text{ e } a = b^2.$$

Pela definição de Ovais de Cassini:

$$P = (x, y) \in C \Leftrightarrow d(P, F_1) \times d(P, F_2) = a.$$

Então,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \times \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a = b^2$$

$$((x+c)^2 + y^2) \times ((x-c)^2 + y^2) = b^4$$

$$(x+c)^2(x-c)^2 + (x+c)^2y^2 + (x-c)^2y^2 + y^4 = b^4$$

$$((x+c)(x-c))^2 + y^2((x+c)^2 + (x-c)^2) + y^4 = b^4$$

$$(x^2 - c^2)^2 + y^2(x^2 + 2xc + c^2 + x^2 - 2xc + c^2) + y^4 = b^4$$

$$x^4 - 2x^2c^2 + c^4 + y^2x^2 + y^22xc + y^2c^2 + y^2x^2 - y^22xc + y^2c^2 + y^4 = b^4$$

$$x^4 + y^4 + c^4 - 2x^2c^2 + 2y^2x^2 + 2y^2c^2 = b^4$$

$$x^4 + y^4 + c^4 - 2x^2c^2 + 2y^2x^2 + 2y^2c^2 + 4x^2c^2 - 4x^2c^2 = b^4$$

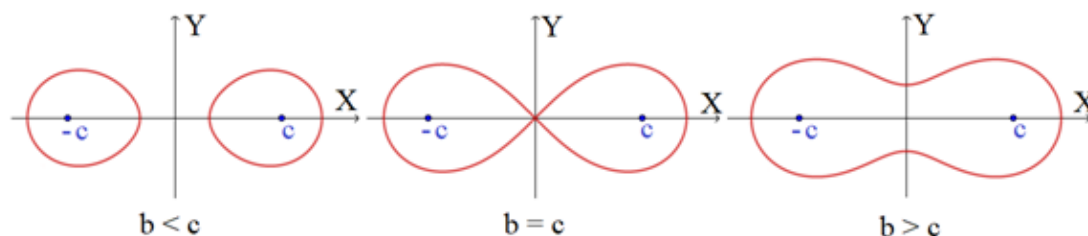
$$x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2c^2 + 2y^2x^2 + 2y^2c^2 - 4x^2c^2 = b^4$$

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 = b^4,$$

que é equação geral das Ovais de Cassini.

Morais Filho (2005) descreve que na equação geral, o formato desta curva depende dos valores de c e b (Figura 111). Se $b > c$, a curva tem uma aparência de uma elipse, às vezes meio deformada. Quando $b < c$, a curva é constituída por duas partes parecidas com dois círculos. No *caso* em que $b = c$, a curva tem aparência de um laço de fita ou de um 8 deitado (Figura 111).

Figura 111 – Formato das Ovais de Cassini de acordo com os valores de a e b



Fonte: O autor, 2019.

As Ovais de Cassini têm este nome devido ao matemático e astrônomo ítalo-francês Giovanni Domenico Cassini (1625-1712), que estudou essas curvas no ano de 1680.

Cassini acreditava que a trajetória do deslocamento do Sol em torno da Terra era descrita por uma dessas ovais, com a Terra em um dos focos. Entretanto, vimos no tópico sobre elipse que Kepler (1571-1630) comprovou que esta trajetória era elíptica. Em 1609, Kepler pôde publicar a obra **Astronomia nova**, na qual escreveu sobre suas descobertas acerca das trajetórias dos planetas.

5.3.2 Lemniscata de Bernoulli

Voltando à equação das Ovais de Cassini, o estudo se dará no caso em que $b = c$. Nesta situação, a oval recebe o nome de Lemniscata. Segundo Morais Filho (2005), este termo vem da palavra latina *lemniscus*, que significa **fita com laço**. A Lemniscata foi descrita por Jacob Bernoulli (1654 – 1705) num artigo com data de 1694. Por essa razão, a Lemniscata também é conhecida como Lemniscata de Bernoulli. Chama atenção o fato de que Jacob Bernoulli desconhecia os estudos de Cassini sobre a curva, feitos 14 anos antes. Somente no final do século XVIII a quase simultaneidade dos estudos foi percebida.

As principais propriedades dessa curva foram determinadas pelo italiano G. C. Fagnano (1682-1766). Segundo Azevedo (2000), Leonhard Euler (1707-1783), por meios analíticos, também estudou a lemniscata.

5.3.2.1 Definição da Lemniscata de Bernoulli

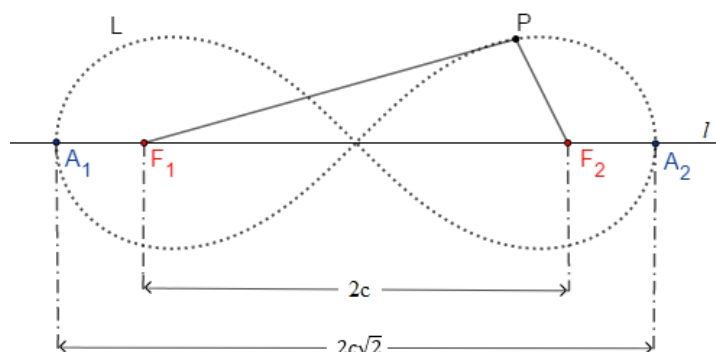
Dados dois pontos F_1 e F_2 no plano, tal que a distância entre eles seja igual a $2c > 0$. A lemniscata L de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cujo produto das distâncias a F_1 e F_2 é igual a constante $c^2 > 0$, isto é:

$$L = \{ P \mid d(P, F_1) \times d(P, F_2) = c^2 \},$$

onde $c > 0$ e $d(F_1, F_2) = 2c$.

A Figura 112, a seguir, mostra o esboço de uma lemniscata.

Figura 112– Esboço de uma lemniscata de acordo com a definição.



Fonte: O autor, 2019.

5.3.2.2 Elementos da lemniscata

1. Os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da lemniscata.
2. A reta l que contém F_1 e F_2 é chamada **reta focal** (Figura 85, acima).
3. Há, além do ponto médio de F_1F_2 , exatamente dois pontos de interseção A_1 e A_2 da lemniscata com a reta focal l , os quais são chamados **vértices** da lemniscata e $d(A_1, A_2) = 2c\sqrt{2}$.

De fato, como A_1 e A_2 pertencem a lemniscata então, pela definição, tem-se:

$$d(F_1, A_2) \times d(F_2, A_2) = c^2$$

$$\left(\underbrace{\frac{d(F_1, F_2)}{2}}_c + \frac{d(A_1, A_2)}{2} \right) \times \left(\frac{d(A_1, A_2)}{2} - \underbrace{\frac{d(F_1, F_2)}{2}}_c \right) = c^2$$

$$\left(c + \frac{d(A_1, A_2)}{2} \right) \times \left(\frac{d(A_1, A_2)}{2} - c \right) = c^2$$

$$\frac{d(A_1, A_2)^2}{4} - c^2 = c^2$$

$$d(A_1, A_2)^2 = 8c^2.$$

Assim,

$$d(A_1, A_2) = 2c\sqrt{2}.$$

4. O ponto médio M do segmento F_1F_2 é o centro da lemniscata (M também é ponto médio de A_1A_2)

5.3.2.3 Forma Canônica da Lemniscata

Pretende-se a seguir, para alguns casos especiais, obter a equação da lemniscata em relação a um sistema de ortogonais OXY .

Lemniscata com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Considerando o sistema de eixos ortogonais OXY . Para obter a equação da lemniscata com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX , deve-se ter:

$$F_1 = (-c, 0) \text{ e } F_2 = (c, 0),$$

onde $c > 0$.

Pela definição de lemniscata:

$$P = (x, y) \in L \Leftrightarrow d(P, F_1) \times d(P, F_2) = c^2.$$

Então,

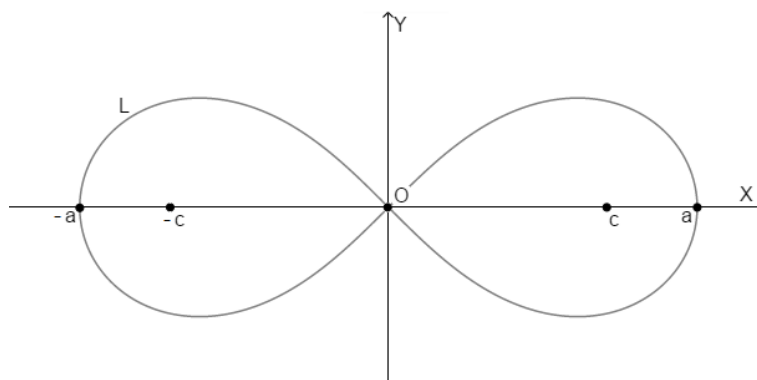
$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \times \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= c^2 \\ ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) &= c^4 \\ (x+c)^2(x-c)^2 + (x+c)^2y^2 + (x-c)^2y^2 + y^4 &= c^4 \\ (x^2 - c^2)^2 + y^2(x^2 + 2xc + c^2 + x^2 - 2xc + c^2) + y^4 &= c^4 \\ x^4 - 2x^2c^2 + c^4 + 2x^2y^2 + 2y^2c^2 + y^4 &= c^4 \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 &= 2x^2c^2 - 2y^2c^2 \end{aligned}$$

Colocando $2c^2$ em evidência, obtém-se a equação:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2),$$

que é a forma canônica da lemniscata com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

Figura 113 – Gráfico da lemniscata $L: (x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$



Fonte: O autor, 2019.

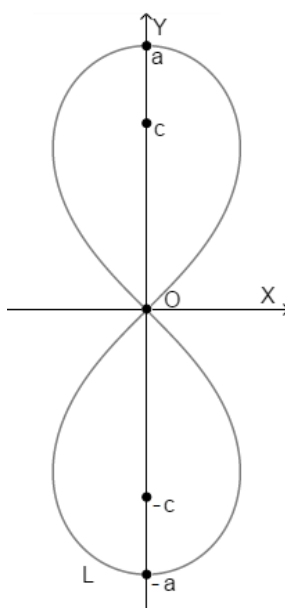
Lemniscata com centro na origem e reta focal coincidente com eixo OY

Considere o sistema de eixos ortogonais OXY . Para obter a equação da lemniscata com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY , deve-se ter:

$$F_1 = (0, -c) \text{ e } F_2 = (0, c),$$

onde $c > 0$ (Figura 114).

Figura 114 - Gráfico da lemniscata $L: (x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$



Fonte: O autor, 2019.

Procedendo-se de maneira análoga, ao caso da lemniscata com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX , obtém-se que a equação desta lemniscata é dada por:

$$L: (x^2 + y^2)^2 = 2c^2(y^2 - x^2),$$

que é a forma canônica da lemniscata com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY (Figura 106).

5.3.2.4 Equação da lemniscata dados os focos não pertencentes aos eixos.

A fim de determinar a equação de uma lemniscata L_l dados seus focos $F_1 = (x_1, y_1)$ e $F_2 = (x_2, y_2)$, aplica-se a definição:

$$P = (x, y) \in L \Leftrightarrow d(P, F_1) \times d(P, F_2) = c^2,$$

onde $d(F_1, F_2) = 2c$, então segue que:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \times \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = c^2.$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado, obtém-se a equação:

$$((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2) \times ((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2) = c^4 \quad \text{e} \quad d(F_1, F_2) = 2c,$$

que é a equação da lemniscata, dados os focos $F_1 = (x_1, y_1)$ e $F_2 = (x_2, y_2)$.

Exemplo

Aplicando o método acima, determinar a equação da lemniscata com foco nos pontos $F_1 = (1, 1)$ e $F_2 = (5, 4)$.

$$2c = d(F_1, F_2) = \sqrt{(5 - 1)^2 + (4 - 1)^2} = 5$$

Então,

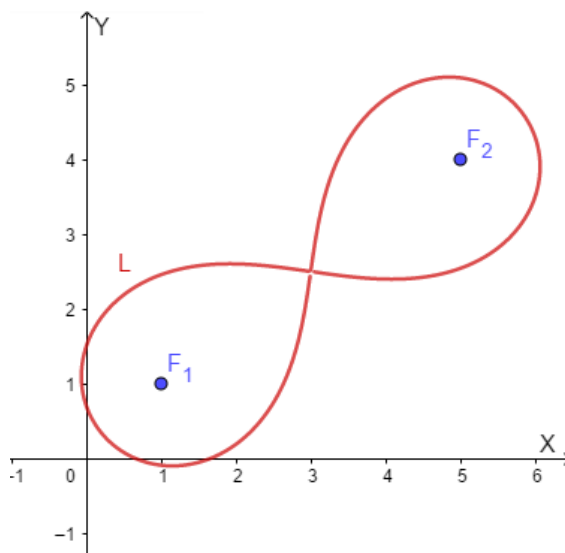
$$c = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad c^4 = \frac{625}{16}.$$

Usando a equação da lemniscata, tem-se:

$$L: ((x - 1)^2 + (y - 1)^2) \cdot ((x - 5)^2 + (y - 4)^2) = \frac{625}{16}.$$

Com o auxílio do *software* GeoGebra, constrói-se o gráfico (Figura 115) da equação acima:

Figura 115 – Gráfico da Leminiscata L.



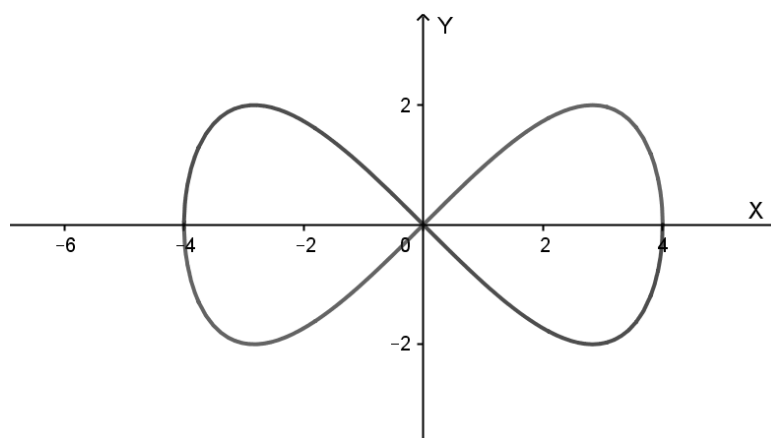
Fonte: O autor, 2019.

Observe que, embora a Lemniscata de Bernoulli (Figura 116) se pareça com um oito deitado ou com o símbolo de infinito, a curva que representa o oito é a Lemniscata de Geronu ou Curva Oito definida pela equação:

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2)$$

e cujo gráfico está representado na Figura 116 (LAWRENCE, 1972).

Figura 116 – Gráfico da Leminiscata de Geronu ou Curva Oito



Fonte: O autor, 2019.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foram apresentadas algumas curvas notáveis, desde as conhecidas cônicas até as não tão conhecidas cicloides, catenárias e lemniscatas, abordando, alguns aspectos históricos, definições e algumas propriedades e exibidas algumas aplicações. Ainda há muitas curvas interessantes que não foram abordadas nesse estudo. Neste trabalho, escolheram-se curvas cujas formas de alguma maneira são conhecidas: ou estão presentes na natureza, ou em invenções ou em obras arquitetônicas. Pretende-se com isso mostrar que há outras curvas além das cônicas que também podem ser exploradas no Ensino Médio e que podem despertar o interesse dos alunos devido as suas histórias, o conhecimento de situações onde tais curvas se aplicam ou a beleza de suas formas.

Um questionamento que algum aluno pode fazer é o porquê de determinados assuntos serem abordados em sala, ou de onde surgiu um determinado conteúdo. Assim, durante o desenvolvimento dos assuntos, faz-se, sempre que possível, uma apresentação do tema, para que a origem do conteúdo matemático a ser estudado seja conhecida, evitando-se assim, uma apresentação fria e sem significado.

Outro questionamento que se acredita ser bastante comum na sala de aula é o para que serve tal conteúdo. Deve-se tomar cuidado na hora de responder essa pergunta, pois dependendo do exemplo citado, se este não estiver ao alcance da compreensão do aluno, ao invés de despertar um interesse, pode-se gerar um afastamento.

Na busca por situações que exemplifiquem as aplicações das curvas, houve um cuidado em utilizar-se exemplos mais simples e bem ilustrados, para que as relações entre o conteúdo e tais situações, exibidas neste trabalho, fossem facilmente percebidas.

Embora nossa proposta seja para o Ensino Médio, este tema, devido a sua riqueza, pode ser explorado em vários níveis de ensino, bem como propiciar a interdisciplinaridade com as disciplinas de Física, Química, Biologia, História, Desenho e Artes. Por exemplo, podem-se elaborar projetos para se explorar o estudo de curvas:

- que descrevem trajetórias de objetos em movimento como, por exemplo, o lançamento de um projétil que origina a parábola;
- que aparecem na Natureza, nas Artes e na Arquitetura que ainda não foram exploradas neste trabalho como as espirais de Arquimedes e logarítmica;
- que estão presentes na vida diária, na sociedade e nas ciências tais como as curvas que representam o resultado de um eletrocardiograma, o acompanhamento do crescimento de uma criança, o estudo da evolução do crescimento de uma população ou a forma das

ondas sonoras emitidas por um instrumento. Assim, os objetos de estudo são os gráficos das funções exponenciais, os das funções hiperbólicas e os das funções senoidais – que são curvas associadas à eletricidade, à iluminação e ao som – dentre outras curvas.

O tema curvas é muito vasto e rico em aplicações, dessa forma, pode-se tratar do assunto em todos os níveis de educação, desde a básica até a superior, adequando o conteúdo ao nível de ensino, aprofundando ou não o conteúdo matemático de acordo com os objetivos estabelecidos.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. A hipérbole e os telescópios. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 34, p. 22 – 27, 1997.

AZEVEDO, A. I. P. **Gomes Teixeira e a lemniscata**. 2000. 192 f. Dissertação (Mestrado em ensino da matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2000.

AZEVEDO, M. B. Interferência das formas geométricas no projeto acústico das edificações. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE GEOMETRIA DESCRITIVA E DESENHO TÉCNICO, 21. 2013. Florianópolis. **Anais eletrônicos...** Florianópolis: CCE – UFSC, 2013. Disponível em: <<http://wright.ava.ufsc.br/~grupohipermedia/graphica2013/trabalhos/INTERFERENCIA%20DAS%20FORMAS%20GEOMETRICAS%20NO%20PROJETO%20ACUSTICO%20DAS%20EDIFICACOES.pdf>>. Acesso em: 18 Mar. 2019

BATISTA, E.; MOZOLEVSKI, I. **Métodos de Física-Matemática**. Universidade Federal de Santa Catarina - Consórcio ReDiSul: Florianópolis, 2010. Disponível em:

<http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/Metodos_de_Fisica-Matematica_-_28-jul-2010.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2019.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996.

CARNEIRO, L. S. Modelos e Réplicas. A arquitetura dos teatros históricos Portugueses. In: **Teatro do Mundo. O Teatro na Universidade: Ensaio e Projecto**. 1. Ed. Porto: Faculdade de Letras da Universidade do Porto, 2007. Disponível em: <<https://ler.letras.up.pt/uploads/ficheiros/10179.pdf>>, Acesso em: 24 mar. 2019.

COELHO, R. A. **A história dos problemas da tautócrona e da braquistócrona**. 2008. 105 f. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

CORREIA, M. C. L. **Diferentes Abordagens ao Estudo das Cônicas**. 2013. 130 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para professores) – Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2013.

CHUNG, K. **A Parábola, sua propriedade refletora e aplicações**. 2013, 32 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFT, L. **Geometria Analítica**. 1. ed. Rio de Janeiro: SMB, 2013.

FRENSEL, K; DELGADO, J. **Geometria Analítica II: Superfícies de Revolução**. Aula 9, p. 185 – 228. 2008a. Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/2017/08/ga2-aula9.pdf>> Acesso em: 25 Mar. 2019B.

FRENSEL, K; DELGADO, J. **Geometria Analítica II: Superfícies Regradas**. Aula 8, p. 178 – 194. 2008b. Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/2017/08/ga2-aula8.pdf>> Acesso em: 25 Mar. 2019.

GONÇALVES, V. S., **Curvas, Superfícies e Arquitetura**. Projeto de Iniciação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. Disponível em: <<https://curvasearquitetura.wordpress.com/galeria-de-arte-kimbell/>>. Acesso em: Mar. de 2019.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da Física 2**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

HELLMEISTER, A. C. P. **Geometria em Sala de Aula**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

IEZZY, G.: et al. **Matemática: ciências e aplicações – volume 3**. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

KAPLAN, G. **The Catenary: art, architecture, history, and mathematics**. Department of Mathematics – Towson University: Towson, 2008. Disponível em: <<http://archive.bridgesmathart.org/2008/bridges2008-47.pdf>>. Acesso em: 8 Abr. 2019.

LAWRENCE, J. D. **A catalog of special plane curves**. 1. ed. New York: Dover Publication, Inc, 1972.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do ensino médio – volume 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LOCKWOOD, E. H. **A book of curves**. 1. ed. London: Cambridge University Press, 1961.

MACHADO, N. J. **Educação: projetos e valores**. São Paulo: Escrituras, 2000.

MARKUSHEVICH, A. I. **Remarkable curves**. 1. ed. Moscou: Mir Publishers, 1980.

MARTINS, J. S. Solução do problema da braquistócrona. **Mecânica Clássica UFF**. Rio de Janeiro: Instituto de Física – Universidade Federal Fluminense, 2018. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=jlpgaLWGFpg>> Acesso: 21 Mar. 2019.

MARTINS, R. A Catenária. **Programa Isto é Matemática**. Portugal: SPM, 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=yBH5ezzY_-0>. Acesso: 6 Abr. 2019.

MENDES, G. H. G. I.; BATISTA, I. L. Síntese histórica da matematização do pêndulo simples. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO, 12. 2014, Campo Mourão. **Anais eletrônicos**. Campo Mourão: Universidade Estadual do Paraná, 2014. Disponível em: <<http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/COMUNICACOES/CCAutor/CCA034.PDF>>. Acesso em: 18 Mar. 2019.

MELLO, J. L. P. A rampa de skate de tempo mínimo. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 59, p. 9 – 15, 2006.

MORAIS FILHO, C. M. Sobre a bela Lemniscata e outras curvas. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 56, p. 15 – 22, 2005.

OLIVEIRA, C. H.; FLORA M. O. **Café matemático**: transformando café em teoremas. 2013. 30f. Projeto supervisionado – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

OLIVEIRA, I. L. Pênses e estaiadas. **Revista Notícias da Construção**, São Paulo, v. 9, n. 122, p. 1 – 2, jun. 2012.

PAIVA, M. **Matemática**: Paiva - volume 3. 3. Ed. São Paulo: Moderna, 2015.

PRECISO, J. C.; PEDROSO, H. A. Aspectos históricos sobre a cicloide: a curva que desafia a intuição. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 3, n. 1, p. 17 – 24, jul. 2014. Disponível em: <<http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/vfull/4edicao.pdf>>. Acesso em: 3 de Abr. 2019.

RAPOSO, C. S. C. M. **Curvas famosas e não só: teoria, história e atividades.** 2013. 249 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SALES, J.; BANYULS, F. **Courbes périlleuses: lipeses, hyperboles et autres merveilles géométriques.** 1. ed. France: RBA France, 2013.

SAMPAIO, F. S. **Torre de Resfriamento: Modelagem, simulação e testes experimentais para o apoio ao ensino de Engenharia Mecânica.** 2013. 158 f. Monografia – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

SAPUNARU, R. A. et al. As influências das torres hiperbólicas nas usinas termoelétricas: um foco termonuclear. **Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM**, Santa Maria, v. 37, ed. especial UFVJM, p. 30–34, 2014. Disponível em: <<https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/18495/pdf>>. Acesso em: 18 Mar. 2019.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo - volume 3.** 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

STEWART, J. **Calculo – volume 1.** 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TALAVERA, L. M. B. **Parábola e catenária: história e aplicações.** 2008. 96 f. Dissertação (Mestrado em educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

TEUKOLSKY, R. **Secções cônicas: um tópico interessante e enriquecedor** In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (org.). **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo: Atual, 1994. p.191 a 213.

VALLADARES, R. J. C. Elipse, sorrisos e sussurros. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 36, p. 24 – 28, 1998.

VENCESLAU, A. W. N. **Curvas Parametrizadas, Cicloides, Experimentos e Aplicações.** 2015. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Sergipe, São Cristóvão, 2015.

YATES, R. C. **Curves and their properties**. 1. ed. Washington: NCTM. 1974.

WAGNER, E. Porque as Antenas são parabólicas? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 33, p. 10 – 17, 1997.