UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JÉSSICA CRISTINA DE OLIVEIRA MARQUES

CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS UTILIZANDO A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO SCRATCH COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2019

JÉSSICA CRISTINA DE OLIVEIRA MARQUES

CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS UTILIZANDO A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO SCRATCH COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre".

Orientador: Anderson Paião dos Santos, Dr.

CORNÉLIO PROCÓPIO

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

M357 Marques, Jéssica Cristina de Oliveira

Construção de mosaicos utilizando a linguagem de programação Scratch como ferramenta para o ensino de geometria plana / Jéssica Cristina de Oliveira Marques. – 2019.
104 f. : il. color.; 31 cm.

Orientador: Anderson Paião dos Santos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Cornélio Procópio, 2019.
Bibliografia: p. 66-67.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Scratch (Linguagem de programação de computador). 3. Geometria plana. 4. Matemática – Dissertações. I. Santos, Anderson Paião dos, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca da UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio
Bibliotecário/Documentalista responsável:
Romeu Righetti de Araujo – CRB-9/1676

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação-Câmpus Cornélio Procópio
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Título da Dissertação Nº. 010

"Construção de mosaicos utilizando a Linguagem de Programação Scratch como ferramenta para o ensino de Geometria Plana."

por

Jéssica Cristina de Oliveira Maques

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio, às 10h00min do dia 14 de junho de 2019. O trabalho foi ______________ pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Anderson Paião dos Santos, Dr.
(Presidente - UTFPR/CP)

Prof. Thiago Pinguello de Andrade, Dr.
(UTFPR/CP)

Prof. Gustavo de Lima Prado, Dr.
(UFU/Uberlândia)

Visto da coordenação:

Prof. Thiago Pinguello de Andrade, Dr.
(Coordenador do PROFMAT-CP)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR-CP"

À Professora Ismenia Sargi, que me ensinou a amar a Matemática.

AGRADECIMENTOS

- À Deus, que me concedeu a dádiva da vida e me deu perseverança nos momentos de adversidades;
- Aos meus pais, Adalto de Oliveira Marques e Ivone Almeida Marques, e meus irmãos, Dhiego Thadeu de Oliveira Marques e Jamille Mariana da Oliveira Marques, que sempre me incentivaram a oferecer o melhor de mim em todas as situações;
- Ao meu companheiro Pedro Henrique de Assis, pela paciência e dedicação em todos os momentos do nosso dia-a-dia;
- Às pessoas que me ajudaram sempre que procuradas, sendo solícitas com minhas dúvidas e dificuldades: Gláucia Bressan, Roberto Molina, Fernando Moreno, Victória Rossini e Micayla Mead;
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior;
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT;
- E ao meu orientador Anderson Paião dos Santos, pelos conselhos, dicas e direcionamentos que permitiram a conclusão deste trabalho.

RESUMO

MARQUES, Jéssica Cristina de Oliveira. CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS UTILIZANDO A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO SCRATCH COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA. 105 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019.

Há anos os estudos no campo da Educação Matemática nos apontam como o saber matemático se desenvolve de maneira mais completa quando o aluno se depara com situações que exploram sua capacidade de resolver problemas. A lógica de programação, através da linguagem Scratch, que é voltada para o público infanto-juvenil, se mostra uma ferramenta versátil para o ensino e melhor compreensão de diversos conceitos matemáticos. Tal ferramenta nos permite desenvolver atividades em diversas áreas. Particularmente, no campo da Geometria Plana, uma possibilidade é a utilização do Scratch para a construção de mosaicos com polígonos regulares. Desta forma, o objetivo deste trabalho é apresentar algumas atividades, com o uso da linguagem de programação Scratch, para que os professores possam trabalhar os conceitos e propriedades dos polígonos, para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Ensino de matemática, Scratch, Geometria Plana, Programação.

ABSTRACT

MARQUES, Jéssica Cristina de Oliveira. CONSTRUCTION OF MOSAICS USING THE SCRATCH PROGRAMMING LANGUAGE AS A WAY TO TEACH PLANE GEOMETRY. 105 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019.

For years, studies in the field of Mathematics Education have shown us how mathematical knowledge develops more completely when students are faced with situations that take fullest advantage of their ability to solve problems. The logic of programming, by the Scratch language, which is aimed at children and youths, is a versatile tool for teaching and understanding various mathematical concepts. This tool allows us to develop activities in several areas. Specifically in the field of Plane Geometry, one possibility is the use of Scratch for the construction of mosaics with regular polygons. In this way, the objective of this work is to present some activities, using the Scratch programming language, so that teachers might better incorporate the concepts and properties of polygons into the studies of students in their final years of Elementary School.

Keywords: Teaching math, Scratch, Plane Geometry, Programming.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A inserção do computador no meio educacional vem acontecendo paulatinamente desde o final do último século, primeiro como uma espécie de versão eletrônica do que acontece em sala de aula para, posteriormente, adquirir aspectos próprios. Os primeiros softwares computacionais tentavam imitar atividades que já eram aplicadas anteriormente, o que era um processo natural, pois se tratava de algo completamente novo.

Entretanto, nos últimos anos, nossa visão sobre o conhecimento tem mudado. Vivemos a era da informação, onde os processos ocorrem muito rápido e de maneira quase imperceptível. Novas tecnologias têm se tornado rapidamente obsoletas e determinados conhecimentos e processos específicos ensinados na escola podem parecer pouco ou nada úteis aos alunos.

Faz-se necessária uma adequação no ensino, de forma a ajudar o aluno a aprender a procurar, a selecionar e a usar as informações disponíveis ao seu redor, possibilitando a resolução de problemas e o aprendizado com as situações, tal qual em seu meio social e cultural.

Uma possibilidade é o uso do computador como ferramenta educacional, onde o aluno não apenas utiliza os softwares disponíveis seguindo as instruções do professor de maneira quase passiva, mas desenvolve um produto.

> Estas tarefas podem ser a elaboração de textos, usando os processadores de texto; pesquisa de banco de dados já existentes ou criação de um novo banco de dados; resolução de problemas de diversos domínios do conhecimento e representação desta resolução segundo uma linguagem de programação (...). (VALENTE, 1993, p. 9)

Nos últimos anos, vem surgindo um movimento de inserção da linguagem de programação em sala de aula, defendida por alguns pesquisadores como uma nova disciplina, como Barichelo (2015, p. 26), que se justifica pelo fato de que o mercado de trabalho em áreas correlatas é grande e deve continuar aumentando, além de tratar de habilidades e conhecimentos cada vez mais presentes em todas as áreas.

Por outro lado, há quem defenda a linguagem de programação na escola como uma ferramenta para o ensino dos conteúdos, como Batista et al. (2015, p. 351), que a veem como "um Objeto de Aprendizagem no ensino básico de uma forma multidisciplinar".

Tal movimento se baseia no fato de que a programação tem se tornado cada vez mais presente em nosso cotidiano, seja nos aplicativos e funcionalidades de nossos aparelhos, ou nas atividades acadêmicas e profissionais. Para Wing (2008, p. 3717), o pensamento computacional é um tipo de pensamento analítico, tal qual o pensamento matemático. Dessa forma, compartilham das maneiras gerais com as quais podemos abordar a solução de um problema.

Começou-se a falar sobre o uso da linguagem de programação nas escolas assim que surgiram os primeiros computadores pessoais, sendo um dos precursores o Professor Seymour Papert (1980, p. 55), do Massachusetts Institute of Technology (MIT), que desenvolveu a linguagem de programação Logo.

No Brasil, temos o Superlogo, um software gratuito que utiliza uma versão da linguagem Logo em português e foi desenvolvido pelo Núcleo de Informática Aplicada à Educação (Nied) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). O objetivo do Superlogo é movimentar a figura de uma tartaruga utilizando orientações que são digitadas na janela de comandos. Os mais básicos deles se referem a movimentação no plano, mas as possibilidades são diversas.

De certa maneira, o Scratch pode ser considerado um descendente do Logo. Trata-se de uma linguagem de programação e comunidade online, que possibilita a seus usuários a criação de jogos, animações, projetos interativos, entre outros. A linguagem utiliza um sistema de blocos selecionáveis que contêm opções pré-programadas que podem ser combinadas de diversas maneiras, além de haver a possibilidade de programação de novos operadores.

Concebido e desenvolvido pelo Grupo Lifelong Kindergarten do MIT, o Scratch é bastante intuitivo e abrangente e tem se mostrado uma ferramenta interessante no contexto educacional. A lógica de programação, através dessa linguagem, que é voltada para o público infanto-juvenil, é uma possibilidade para o ensino e melhor compreensão de diversos conceitos matemáticos.

Entre suas diversas possibilidades e funcionalidades, podemos citar a construção de polígonos. Dessa maneira, podemos, inclusive, construir mosaicos ou realizar a pavimentação do plano. Segundo Alves e Dalcin (1999, p. 3), mosaico no plano é o nome dado à cobertura da superfície plana com regiões poligonais, de modo que não haja nem lacunas nem superposições.

Nesse sentido, o presente trabalho propõe a realização de atividades que explorem uma visão diferenciada dos conteúdos de Geometria Plana, por meio da construção de mosaicos compostos por padrões geométricos repetidos, permitindo enfatizar as noções de direção e sentido, de ângulo, a exploração das figuras geométricas planas, entre outras, visando incorporar a programação de computadores no cotidiano escolar e contribuir para o ensino e a aprendizagem de Geometria no contexto do Ensino Fundamental.

A intenção é, dessa maneira, auxiliar na aprendizagem dos conteúdos de Geometria Plana que compõem a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na área de Matemática, anos finais do Ensino Fundamental, em especial o 7° ano, conforme habilidade destacada:

> Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares (...) e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos. (BRASIL, 2018, p. 307).

A utilização da construção de mosaicos nos permite um diálogo com a área de Linguagens da BNCC, em particular com o componente curricular Arte. A Base Nacional propõe que a abordagem de Arte articule determinadas dimensões do conhecimento que caracterizem a singularidade da experiência artística. Dentre essas dimensões, podemos destacar a Criação, que se refere "ao fazer artístico, quando os sujeitos criam, produzem e constroem" (BRASIL, 2018, p. 192).

Na unidade temática de Artes Visuais, nos anos finais do Ensino Fundamental, temos um objeto de conhecimento denominado Processos de Criação. As habilidades desse objeto de conhecimento podem ser desenvolvidas através da produção e construção em artes visuais, de maneira individual ou coletiva, utilizando recursos convencionais, alternativos ou até mesmo digitais, como o Scratch.

Assim, a construção de mosaicos, além de perpassar por habilidades matemáticas das unidades temáticas de Geometria e Grandezas e Medidas, como a construção de polígonos, o cálculo e a soma das medidas de seus ângulos e a relação entre ângulos internos e externos, entre outras, também promove o diálogo entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, como a Arte.

Este trabalho tem como objetivo geral utilizar a linguagem Scratch como ferramenta para a construção de mosaicos, apresentando um novo olhar para o ensino de polígonos e suas propriedades, além dos seguintes objetivos específicos:

- Estudar a pavimentação através de mosaicos, explorando polígonos regulares, ângulos internos e externos, soma dos ângulos internos de um polígono e também ângulos complementares e suplementares;
- Incentivar o uso de tecnologia e linguagem de programação como ferramenta de ensino para alunos do Ensino Fundamental;

- Elaborar material voltado para professores do Ensino Fundamental, com propostas de atividades utilizando mosaicos e a linguagem de programação Scratch.

Para tal propósito, o presente trabalho está organizado conforme segue:

No Capítulo 2, traremos um pouco da história da Geometria, sua evolução ao longo do tempo e sua importância e relação com a sociedade. Além disso, falaremos sobre a arte dos mosaicos e suas conexões com a Matemática, principalmente nas obras do artista gráfico Maurits Cornelis Escher.

O Capítulo 3 trata da parte teórica de Geometria Plana, em especial, dos polígonos, tratados como base conceitual para o trabalho em sala de aula dos conteúdos abordados.

No Capítulo 4, apresentaremos uma proposta de uma série de atividades utilizando o Scratch como ferramenta de ensino dos conteúdos de Geometria Plana do terceiro ciclo do Ensino Fundamental, com enfoque na construção do conhecimento através da Programação.

E, no Capítulo 5, serão apresentadas algumas considerações finais com relação ao trabalho.

No Apêndice A, traremos um tutorial para o uso das ferramentas básicas do Scratch utilizadas nas atividades em questão. Esse tutorial contemplará também detalhes mais técnicos do site, como a criação de uma conta ou o download do programa, além de opções relacionadas às Contas de Professor e de Estudante e suas características e funcionalidades.

O Apêndice B traz o gabarito das atividades propostas, contendo respostas e sugestões de soluções.

2 UM POUCO DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA E A ARTE DOS MOSAICOS

2.1 CONTEXTO HISTÓRICO SOBRE A GEOMETRIA

O grande historiador matemático Heródoto (485 - 425 a. C.) atribui aos egípcios o desenvolvimento da Geometria. Ele acreditava que seu surgimento se dera a partir da necessidade de se fazer novas medidas de terras após cada inundação no vale do rio Nilo, que acontecia anualmente.

Daí, a origem da palavra "$\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$; geo 'terra', metria 'medida', então 'medida da terra' "(SOUZA, 2017, p. 3). Mas, de certa forma, podemos dizer que ele subestimou um pouco a idade do assunto. Segundo Boyer (2012, p. 26), os desenhos e figuras do homem neolítico sugerem um interesse que abriu caminho para a Geometria. Em seus trabalhos artísticos, como potes, vasos e cestos, por exemplo, é possível identificar simetrias e congruência.

Dos egípcios, porém, temos o documento de conteúdo matemático mais célebre, que além de outros conhecimentos, apresenta problemas de Geometria, como o cálculo de áreas e comprimentos. É ele o Papiro de Rhind, datado de 1650 a. C., um dos primeiros documentos históricos de caráter matemático que se tem notícia. Foi adquirido em 1858 pelo escocês Henry Rhind (1833 - 1863) e, desde então, passou a ser conhecido por seu nome. O Papiro de Rhind é, por vezes, chamado também de Papiro de Ahmes, por ser esse o nome do escriba responsável por sua cópia, a partir de um trabalho ainda mais antigo.

Dos 84 problemas apresentados nos três livros do Papiro de Rhind, 20 são dedicados à Geometria e medições, os quais envolvem cálculo de áreas, volumes e, inclusive, da inclinação da face de uma pirâmide.

Os séculos se passaram e a atividade intelectual das civilizações no Egito foi perdendo sua verve, cedendo lugar a vigorosas novas culturas que estavam surgindo ao longo de todo o litoral do Mediterrâneo. Passamos a ter, então, uma forte presença da cultura grega.

Além da capital Atenas, a cidade de Mileto se destaca pelas produções matemáticas ali desenvolvidas. Foi o berço de Tales de Mileto (624 - 547 a. C.), matemático de quem se sabe muito pouco. Nenhum documento escrito de sua autoria chegou a atualidade. Há apenas, segundo Souza (2017, p. 4), "referências secundárias e indiretas, escritas, em geral, séculos depois".

Uma delas, por exemplo, nos é dada por Proclus (420 - 485) no livro *Comentário sobre o primeiro livro dos Elementos de Euclides*. Segundo o filósofo, Tales de Mileto seria o responsável pela criação da geometria demonstrativa. Proclus nos informa em seu livro que "Tales primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia". Além disso, é também mérito de Tales a demonstração de que

> (...) um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto; que os ângulos opostos pelo vértice são iguais; que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; que um círculo é dividido igualmente pelo seu diâmetro; que se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então os triângulos são congruentes.(BONGIOVANNI, 2007, p. 96)

De acordo com Mol (2012, p. 32), Tales de Mileto uniu o estudo da astronomia ao da geometria e da teoria dos números, fundando a chamada Escola Ioniana. Com o passar do tempo, tal escola perdeu gradativamente sua importância e foi suplantada pela Escola Pitagórica, cujo fundador foi Pitágoras de Samos (569 - 475 a. C.).

Pitágoras foi outra figura enigmática. Assim como Tales, não deixou nenhum documento escrito, sendo, inclusive, a transmissão oral dos conhecimentos muito utilizada pelos Pitagóricos. Os membros da Escola acreditavam que "Tudo é número" e que "Números dirigem o universo", de maneira que a Matemática adquiria aspectos filosóficos e místicos. Seus ensinamentos tinham

> (...) o seu centro nas matemáticas, no estudo do número, cuja lei domina todas as coisas: nos astros, cujas distâncias, grandezas e movimentos são regulados por meio de relações matemáticas (geométricas e numéricas); nos sons, cujas relações de harmonia obedecem a leis numéricas fixas; na vida e na saúde, que são proporções numéricas e harmônicas de elementos; nos fatos morais entre os quais também a justiça é a proporção etc.(COSTA, 2008, p. 189)

Atualmente, o nome de Pitágoras remete à relação numérica existente no triângulo retângulo e por ele demonstrada, conhecida como Teorema de Pitágoras que diz que "a área do quadrado relativo à hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados relativos aos catetos".

Diversos outros nomes se destacam ao longo da história da Geometria, mas uma das maiores contribuições foi a de Euclides de Alexandria (323 - 283 a. C.) com seu livro *Os Elementos*. Nele, o autor reúne o conhecimento até então obtido na área em treze partes, chamadas de *Livros*. Ele começa por apresentar algumas definições, como "ponto é aquilo de que nada é parte" e "linha é comprimento sem largura" (EUCLIDES, 2009, p. 97).

Dessa forma, através de definições e postulados, fazendo demonstrações e aprimorando outras já existentes, Euclides desenvolveu o que é conhecido hoje como Geometria Euclidiana, que se caracteriza pelo espaço euclidiano, que é imutável, simétrico e geométrico. Esta é a Geometria ensinada hoje nas escolas, em que se define ponto, reta, plano, ângulo e objetos em três dimensões, sendo elas a altura, a largura e o comprimento.

São cinco os postulados de Euclides, conforme definidos a seguir:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p. 98)

A edição original de *Os Elementos*, escrita por volta de 300 a. C., já não existe há muito tempo. Segundo Montoito e Garnica (2014, p. 98), o exemplar mais antigo que sobreviveu até os dias atuais é datado de 888 e pertence à biblioteca do bispo Aretas de Cesareia, na Capadócia. O livro pertencente ao bispo foi baseado numa edição com comentários e acréscimos de Théon de Alexandria (335 - 405). No Brasil, em 2009 foi publicada a primeira edição traduzida diretamente do grego por Irineu Bicudo. A publicação foi feita pela Editora UNESP.

Durante séculos, muitos matemáticos aprimoraram as descobertas de Euclides, utilizando-as em seus trabalhos, como Arquimedes (287 - 212 a. C.) em seu tratado *Sobre a Medida do Círculo* e Apolônio (262 - 190 a. C.) em sua obra *Cônicas*.

A obra *Os Elementos* também teve sua importância reconhecida por matemáticos árabes. Apesar de os muçulmanos terem se sobressaído na Álgebra, o quinto postulado chamou sua atenção. Segundo Mol (2012, p. 73), Alhazen (965 - 1040) "(...) propôs a construção de um quadrilátero com três ângulos retos e achou ser possível provar que o quarto ângulo também deveria ser reto", fazendo com que, dessa construção, o quinto postulado saísse como corolário.

No final da Idade Média, que durou do século V ao XV, entre conflitos, como a Guerra dos Cem Anos (1337 - 1453), e surtos de doenças, como a Peste Negra, a Europa viveu uma grande crise, fazendo com que o continente passasse por um período de decadência econômica, no qual o misticismo ganhou espaço, resultando em um ambiente pouco fecundo para a criação científica. Porém, o decorrer do século XV trouxe mudanças significativas, período que ficou conhecido como Renascimento, também chamado de Renascença ou Renascentismo.

Nesse período, as atividades criativas, como a literatura, a arte e a ciência, redespertaram na Europa. A crença no potencial do homem foi uma marca do Renascimento, contrastando com a visão que se tinha do ser humano na Idade Média: um ser impotente perante a Providência Divina.

Desde Euclides até o Renascimento, a principal área de interesse e concentração dos matemáticos e estudiosos havia sido a Álgebra, sendo a Geometria deixada em segundo plano. Porém, foram os artistas renascentistas os responsáveis por seu retorno ao criarem a noção de perspectiva na arte, uma técnica para a representação de objetos tridimensionais no plano.

O pioneiro dessa arte foi Leon Battista Alberti (1404 - 1472), um artista, arquiteto e filófoso genovês. Em sua obra *Tratado sobre a Pintura* de 1435, ele estabeleceu os princípios matemáticos da perspectiva para pinturas bidimensionais, além de propor o seguinte problema: ”Quais são as propriedades geométricas comuns a duas perspectivas da mesma figura?”.

Mas a resposta a essa questão coube a Girard Desargues (1591 - 1661), um arquiteto, engenheiro e matemático francês. A partir da definição de cônica como a interseção de um cone de base circular com um plano, Desargues passou a interpretá-las como a projeção, centrada no vértice do cone, do círculo da base sobre o plano incidente. Tal concepção permitiu o uso de uma teoria geral, em lugar do estudo separado de cada tipo de cônica (círculo, elipse, hipérbole e parábola).

Além de crer no potencial do homem, os renascentistas tinham como característica ir contra os saberes antigos, que diziam serem permeados de demonstrações estéreis. Dessa forma, acreditavam ser necessário fundar uma nova arte da invenção. Para Roque e Carvalho (2012, p. 192),

> (...) as demonstrações matemáticas não tinham somente o papel de convencer e estabelecer uma certeza, mas deviam, sobretudo, esclarecer a natureza do problema e propor métodos de invenção direta que permitissem resolvê-los.

Assim, nos deparamos com um dos capítulos fundamentais para a construção da matemática moderna, a publicação de *A Geometria*, em 1637 por René Descartes (1596 - 1650). Nele, o autor apresenta uma nova concepção de geometria que possibilitou, com o passar do tempo, a invenção do que chamamos hoje de Geometria Analítica. Logo no início da obra, Descartes propõe a utilização de um método analítico.

> O objetivo de Descartes era utilizar na geometria, para resolver problemas de construção, uma espécie de aritmética, na qual regras simples de composição levassem dos

> objetos simples a outros mais complexos. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 196)

O título da primeira seção de *A Geometria* era "Como o cálculo aritmético se relaciona às operações de geometria", deixando claro sua proposta: traduzir as operações aritméticas para a linguagem geométrica. Conforme aponta Mol (2012, p. 96), o método de Descartes tinha dois objetivos centrais: "(...) libertar a geometria do uso de diagramas através de procedimentos algébricos e dar significado às operações algébricas através da interpretação geométrica".

Atualmente, a Geometria Analítica se baseia em duas associações: dado um lugar geométrico, encontrar a equação que seus pontos satisfazem; e dada uma equação, encontrar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem. Descartes se concentrou na primeira, mas o pioneirismo em tratar da segunda se deve a Pierre de Fermat (1601 - 1665). O advogado e político francês, em seu livro *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*, enuncia: "sempre que em uma equação final, duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um lugar geométrico e a extremidade de uma delas descreve uma linha, reta ou curva".

Diversos autores atribuem a Fermat, e não a Descartes, a criação do que se tornaria a Geometria Analítica, visto que, além da ideia de usar Álgebra como linguagem para abordar problemas geométricos, nada do que poderia se reconhecer como Geometria Analítica pode ser encontrado no ensaio de Descartes. Por outro lado, conforme Simmons (1996, p. 695) coloca, Fermat fez algo muito importante:

> (...) ele introduziu eixos perpendiculares e descobriu as equações gerais de retas e circunferências e as equações mais simples de parábolas, elipses e hipérboles, e depois mostrou de um modo bastante completo e sistemático que toda equação de 1° e 2° graus pode ser reduzida a um desses tipos.

É interessante notar, porém, que, com o tempo, o plano de eixos perpendiculares passou a ser conhecido como Plano Cartesiano, em referência a Descartes.

As metodologias analíticas de Descartes e Fermat motivaram o estudo dos métodos infinitesimais. Assim, Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), italiano e discípulo de Galileu, desenvolveu uma maneira de se operar com indivisíveis no cálculo de áreas e volumes. Ele

> (...) argumentava que uma linha é composta de pontos, assim como um cordão é composto de contas; um plano é feito de linhas, assim como uma roupa, de fios; e um sólido é composto de planos, assim como um livro, de páginas. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 213)

Como consequência, temos o conhecido princípio de Cavalieri que diz que se dois sólidos têm a mesma altura e as seções obtidas por cortes paralelos às suas bases são proporcionais, sempre na mesma razão k, então os volumes destes sólidos são proporcionais, com razão k.

A teoria de Cavalieri permitiu determinar rapidamente áreas e volumes de figuras geométricas, método posteriormente substituído pelo Cálculo Integral.

Nasceriam, ainda, novos campos da Geometria, dentre eles a Geometria Descritiva. Criada por Gaspard Monge (1746 - 1818), foi inspirada nas técnicas gráficas dos desenhistas práticos e tinha como objetivos representar em desenhos bidimensionais objetos tridimensionais e deduzir da descrição dos corpos as propriedades advindas de suas formas e de suas posições.

No final do século XIX surgem ainda as geometrias não-euclidianas, como a de Nicolai Ivanovich Lobatchevski (1792 - 1856) e János Bolyai (1802 - 1860) que, de forma independente, desenvolveram o que, anos mais tarde, seria denominado *Geometria Hiperbólica*.

O grande desenvolvimento da geometria culminou com o livro *Fundamentos da Geometria*, de David Hilbert (1862 - 1943), no qual o autor construiu um conjunto de axiomas para a Geometria Euclidiana Plana. Tratam-se de 21 axiomas divididos em cinco grupos (conexão, ordem, congruência, continuidade e o axioma das paralelas) que partem de três elementos básicos (ponto, reta e plano) e exploram as relações entre eles. Com esse trabalho, Hilbert redesenhou a identidade da geometria, fazendo com que essa área permanecesse como uma das mais férteis da Matemática.

2.2 A ARTE DOS MOSAICOS

Mosaico no plano é o nome dado à cobertura plana com regiões poligonais, de modo que não haja lacunas nem superposições, conforme dizem os autores Alves e Dalcin (1999, p. 3). As primeiras investigações, referentes à teoria da pavimentação do plano utilizando polígonos regulares, foram desenvolvidas pelo astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571 - 1630), que apontou um olhar matemático para o problema em seu livro *Harmonia do Mundo*, de 1619.

Nesse livro, ele demonstra que existem exatamente onze maneiras de se pavimentar o plano utilizando exclusivamente polígonos regulares. No Capítulo 3, são feitos alguns comentários e demonstrações acerca dessas pavimentações.

É possível encontrar mosaicos em construções arquitetônicas e artísticas desde a antiguidade. Segundo Barbosa (1993, p. 1), “estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônica, persa, egípcia, grega, chinesa e outras, empregados em padrões que não raro permaneceram até os dias atuais.”

A pioneira da arte musiva, como também é conhecida a arte da construção de mosaicos, no Brasil foi a Imperatriz Teresa Cristina (1822 - 1889), que recobriu os bancos, tronos, fontes e paredes do Jardim das Princesas, no Palácio São Cristóvão, com conchas recolhidas nas praias do Rio de Janeiro e com cacos de peças de serviço de chá da Casa Imperial.

Porém, quando se trata de unir Matemática e Arte através de mosaicos, os maiores exemplos são as obras do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972). Segundo Barth (2006, p. 78), sua obra "(...) pode contribuir como um meio de aprofundar ou conhecer conceitos geométricos e representar o mundo". O artista, que utilizava muito a simetria e os mosaicos, correspondia-se frequentemente com matemáticos e cristalógrafos para compor suas gravuras. São exemplos dessas obras as vistas nas Figuras 1 e 2.

Figura 1: Dragonfly (n° 38). ESCHER, M. C. 1941, lápis, tinta e aquarela.

Figura 2: Shells and starfish (n° 42), ESCHER, M. C., 1941, tinta indiana, lápis e aquarela.

Após frequentar a Escola de Arquitetura e Artes Decorativas, Escher viajou por vários países da Europa, em especial a Itália e a Espanha, onde teve seu primeiro contato com os mosaicos, durante uma visita ao Palácio de Alhambra, em Granada, cujas paredes são ladrilhadas com mosaicos geométricos.

Conforme citam Imenes e Lellis (1994, p. 28), "Escher dizia que a Matemática era 'um portão aberto' para muitos caminhos, que se espalhavam por um imenso jardim". Em suas obras, Escher construía mosaicos a partir de um módulo, um elemento formador que se repetia. Esse módulo era construído a partir de uma malha, em geral quadrangular ou triangular, que dividia toda a tela de maneira uniforme. Tais módulos podiam sofrer reflexões a partir de um eixo de simetria e também rotações em torno de um ponto.

Dessa forma, podemos perceber como os mosaicos aliam precisão matemática a senso estético, escondendo por trás deles um grande número de conceitos como ângulo, simetria, perímetro, composição e decomposição de figuras, por exemplo.

3 FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA PLANA

Este capítulo traz os conceitos de Geometria Plana, em especial da geometria dos polígonos tratados como base conceitual para o trabalho em sala de aula dos conteúdos abordados neste trabalho. Admitiremos que o leitor tenha familiaridade com a base axiomática da Geometria Plana: os axiomas de incidência e ordem, os axiomas sobre medição de segmentos e o axioma das paralelas, que podem ser encontrados em Barbosa (2012).

No decorrer deste capítulo adotaremos a seguinte notação:

- AB: segmento de reta determinado pelos pontos A e B;
- $\overline{AB}$: comprimento do segmento AB;
- $\overrightarrow{AB}$: semirreta de origem A contendo B;
- $\overleftrightarrow{AB}$: reta determinada pelos pontos distintos A e B.

3.1 POLÍGONOS

Definição 3.1. *Dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos desta sequência não são colineares, considerando-se também consecutivas as ternas A_{n-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2, chama-se* ***polígono*** *à reunião dos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$.*

Indicaremos o polígono por $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$. Dessa forma, $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n = A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \cdots \cup A_{n-1}A_n \cup A_nA_1$. Temos que:

- Os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ são chamados **vértices** do polígono;
- Os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ são chamados **lados** do polígono;
- Os ângulos $\widehat{A_1} = A_n\widehat{A_1}A_2, \widehat{A_2} = A_1\widehat{A_2}A_3, \ldots, \widehat{A_n} = A_{n-1}\widehat{A_n}A_1$ são chamados **ângulos internos** ou simplesmente **ângulos** do polígono;

- Um tal polígono possui n lados, n vértices e n ângulos.

Definição 3.2. *Dizemos que um polígono é* ***convexo*** *se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm seus lados. Se um polígono não é convexo, dizemos que ele é um* ***polígono côncavo****.*

Exemplo 3.3. *Na Figura abaixo temos o polígono* $A_1A_2A_3A_4A_5$*, que é convexo e o polígono* $B_1B_2B_3B_4B_5$*, que é côncavo.*

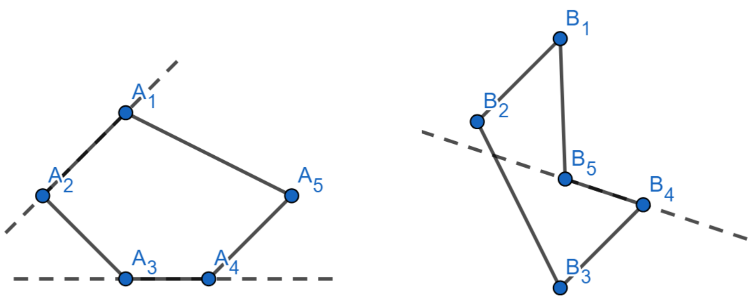


Figura 3: Polígono convexo e polígono côncavo

Polígonos convexos recebem designações especiais. A seguir algumas designações dadas a estes polígonos de acordo com seu número de lados. (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 132)

número de lados	nome do polígono convexo
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	nonágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono
15	pentadecágono
20	icoságono

Em geral, dizemos que um polígono $A_1A_2 \ldots A_n$ é um **n-ágono**, em referêcia a seu número n de lados (e de vértices).

Um polígono que possui os lados congruentes, ou seja, com as mesmas medidas, é denominado **equilátero**. Se possui os ângulos internos congruentes, é denominado **equiângulo**.

Dizemos que um polígono convexo é **regular** se tem todos os lados e todos os ângulos congruentes, ou seja, é equilátero e equiângulo.

Dentre os polígonos convexos, destacamos os triângulos que podem ser classificados de duas maneiras: em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos. Assim, dado um triângulo ABC dizemos que ele é:

- **Equilátero**, se $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$;
- **Isósceles**, se ao menos dois de seus lados forem congruentes, e neste caso chamamos o terceiro lado de **base**;
- **Escaleno**, se $\overline{AB} \neq \overline{AC}$, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ e $\overline{AB} \neq \overline{BC}$.

Notemos que todo triângulo equilátero é também isósceles. Quanto aos ângulos, os triângulos se classificam em:

- **Retângulos**, se têm um ângulo reto (ou seja, um ângulo medindo $90°$);
- **Acutângulos**, se têm os três ângulos agudos (ou seja, as medidas dos três ângulos são menores que $90°$);
- **Obtusângulos**, se têm um ângulo obtuso (ou seja, a medida de um ângulo é maior que $90°$).

No caso dos triângulos retângulos, seus lados recebem nomes especiais, sendo o lado oposto ao ângulo reto chamado de **hipotenusa** e os demais lados de **catetos**.

Definição 3.4. *Dois triângulos são **congruentes** se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes, isto é, tenham a mesma medida.*

Por exemplo, se ABC e EFG são dois triângulos congruentes, escrevemos $ABC \equiv EFG$ para indicar a correspondência $A \leftrightarrow E, B \leftrightarrow F, C \leftrightarrow G$ tal que as seis relações seguintes são válidas:

- $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$;
- $\widehat{A} = \widehat{E}$, $\widehat{B} = \widehat{F}$ e $\widehat{C} = \widehat{G}$.

Porém, existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes, as quais são chamadas *casos* ou *critérios* de congruência.

Caso 1 (Postulado LAL)**.** *Se dois triângulos têm congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então eles são congruentes.*

Caso 2 (ALA)**.** *Se dois triângulos têm congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.*

Demonstração. Considere ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

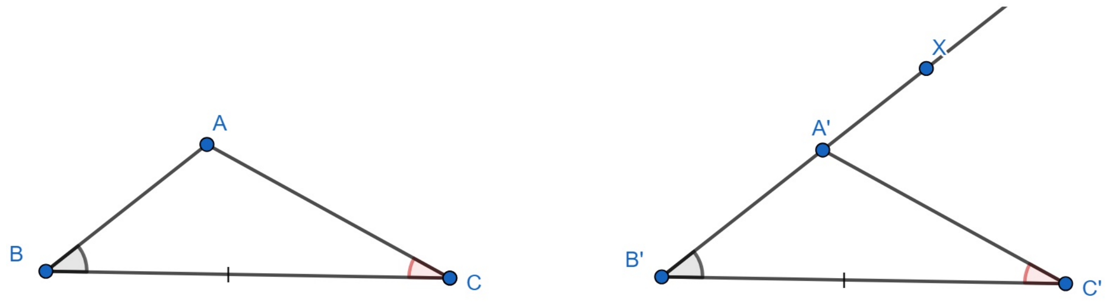


Figura 4: Caso ALA

Vamos provar que $\overline{BA} = \overline{B'A'}$, pois assim recairemos no primeiro caso. Tomemos o ponto X, pertencente à semirreta $\overrightarrow{B'A'}$, tal que $\overline{B'X} = \overline{BA}$. Teremos então que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\overline{BA} = \overline{B'X}$. Dessa forma, pelo primeiro caso (LAL), concluímos que $ABC \equiv XB'C'$, o que implica que $\widehat{C} = B'\widehat{C'}X$. Dado que $\widehat{C} = B'\widehat{C'}A'$, por hipótese, então temos que $B'\widehat{C'}X = B'\widehat{C'}A'$, donde vem que o ponto X também pertence à semirreta $\overrightarrow{C'A'}$, e daí os pontos X e A' coincidem, de maneira que $\overline{BA} = \overline{B'A'}$. Portanto, $ABC \equiv A'B'C'$. $\square$

A partir destes dois casos de congruência, obtemos uma importante propriedade a respeito dos triângulos isósceles.

Proposição 3.5. *Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.*

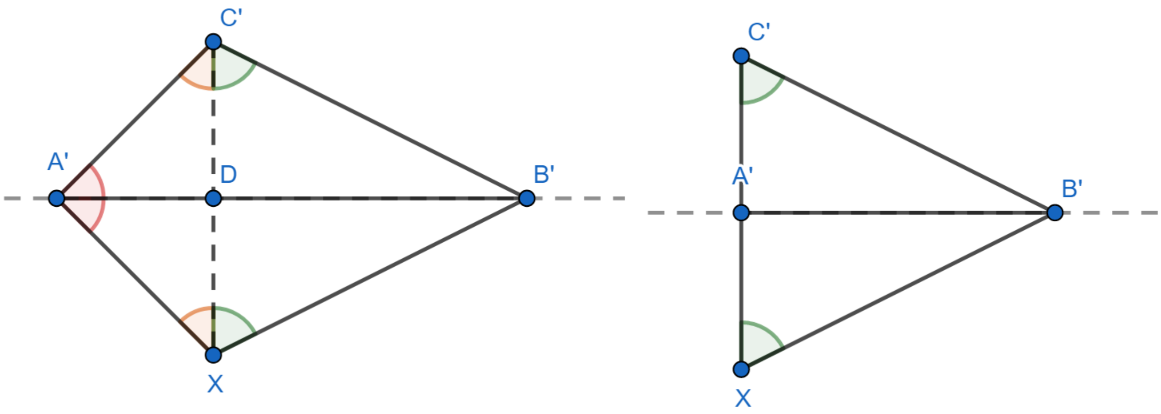
Demonstração. Consideremos um triângulo ABC, com $\overline{AB} = \overline{AC}$. Comparando ABC com ele mesmo, através da correspondência $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$, temos que $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{AC} = \overline{AB}$. Além disso, $\widehat{A} = B\widehat{A}C = C\widehat{A}B$. Dessa forma, por LAL, temos que $ABC \equiv ACB$. O que implica que $\widehat{B} = \widehat{C}$. $\square$

Corolário 3.6. *Os ângulos internos de um triângulo equilátero são todos congruentes.*

Caso 3 (LLL). *Se dois triângulos têm congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.*

Demonstração. Considere ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C'}$. Seja X o ponto no semiplano oposto ao de C', determinado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$, tal que $X\widehat{A'}B' = C\widehat{A}B$ e $\overline{A'X} = \overline{AC}$.

Figura 5: Caso LLL



(a) A', C' e X não colineares (b) A', C' e X colineares

Como por hipótese $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e por construção $\overline{A'X} = \overline{AC}$, temos que $\overline{A'X} = \overline{A'C'}$. Logo, por LAL, temos que $ABC \equiv A'B'X$, uma vez que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $C\widehat{A}B = X\widehat{A'}B'$ e $\overline{AC} = \overline{A'X}$, e consequentemente $\overline{XB'} = \overline{CB} = \overline{C'B'}$. Traçando $C'X$, temos duas possibilidades:

1. os pontos X, A' e C' são colineares (Figura 5(a));

2. X, A' e C' são não colineares (Figura 5(b)).

Se os pontos X, A' e C' são colineares, então o triângulo $C'XB'$ é isósceles de base $C'X$, donde concluímos que $B'\widehat{C'}A' = B'\widehat{X}A'$, e se X, A' e C' são não colineares temos dois triângulos $B'C'X$ e $A'C'X$, ambos isósceles de base $C'X$, de modo que $B'\widehat{C'}X = B'\widehat{X}C'$ e $A'\widehat{C'}X = A'\widehat{X}C'$, e donde podemos concluir que $B'\widehat{C'}A' = B'\widehat{X}A'$. Então, por LAL, obtemos que $A'B'C' \equiv A'B'X$. Como já tínhamos provado que $A'B'X \equiv ABC$, concluímos que $ABC \equiv A'B'C'$. □

Antes de prosseguir para o quarto caso de congruência, veremos o conceito de ângulo externo de um triângulo. Chamamos de **ângulo externo** de um triângulo ao suplemento de um dos seus ângulos internos.

Teorema 3.7 (Teorema do ângulo externo). *Um ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo e α o ângulo externo relativo ao ângulo $\widehat{C}$. Vamos demonstrar que $\alpha > \widehat{A}$. A prova de que $\alpha > \widehat{B}$ é análoga. Tomemos M, o ponto médio do lado AC e P um ponto, pertencente à semirreta $\overrightarrow{BM}$, distinto de B, de maneira que $\overline{BM} = \overline{MP}$, veja Figura 6.

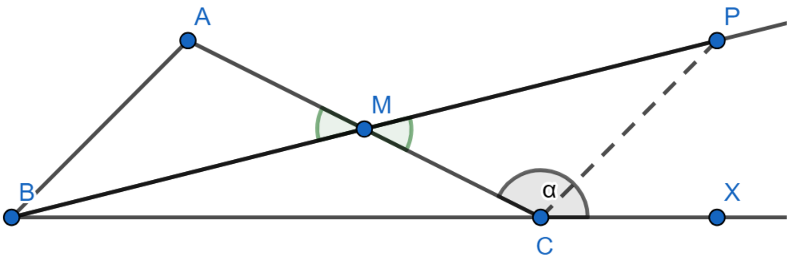


Figura 6: Teorema do ângulo externo

Assim, temos que $A\widehat{M}B = C\widehat{M}P$, pois são ângulos opostos pelo vértice, $\overline{AM} = \overline{MC}$ pois M é o ponto médio de AC e, por construção, $\overline{BM} = \overline{MP}$. Pelo caso LAL, temos que $ABM \equiv CPM$, o que implica que $B\widehat{A}M = P\widehat{C}M$. Como $\alpha = A\widehat{C}X = A\widehat{C}P + P\widehat{C}X = P\widehat{C}M + P\widehat{C}X$, com X pertencente a reta $\overleftrightarrow{BC}$, veja Figura 6, então $\alpha > P\widehat{C}M$, isto é, $\alpha > \widehat{A}$. $\square$

Caso 4 (LAA_O)**.** *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.*

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ tais que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{A} = \widehat{A'}$. Ao compararmos AB e $A'B'$, temos uma das três possibilidades: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ ou $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Suponhamos que $\overline{AB} < \overline{A'B'}$. Nesse caso, tomemos o ponto D, pertencente à semirreta $\overrightarrow{BA}$, tal que $\overline{DB} = \overline{A'B'}$, como ilustrado na Figura 7.

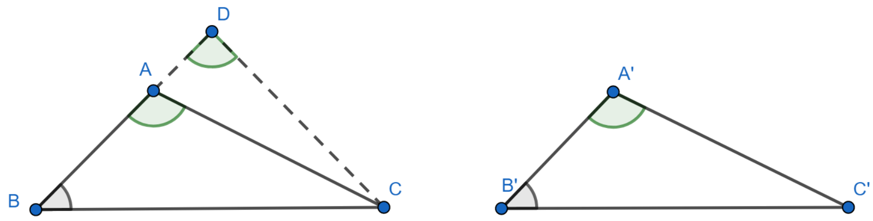


Figura 7: Caso LAA_O

Dessa forma, por LAL, temos que $DBC \equiv A'B'C'$, posto que $\overline{DB} = \overline{A'B'}$, $D\widehat{B}C = \widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$. O que implica que $\widehat{D} = \widehat{A'} = \widehat{A}$, o que é um absurdo, pois pelo Teorema 3.7, como

$\widehat{A}$ é ângulo externo do triângulo ACD teríamos $\widehat{A} > \widehat{D}$. Assim, $\overline{AB} \geq \overline{A'B'}$, ou seja, temos ainda duas possibilidades: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ou $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Ao considerarmos que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$, podemos, de maneira análoga ao caso em que $\overline{AB} < \overline{A'B'}$, concluir que tal possibilidade também não pode ocorrer. Logo, teremos que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e, por LAL, concluímos que $ABC \equiv A'B'C'$. $\square$

Caso 5 (Caso especial de congruência de triângulos retângulos)**.** *Se dois triângulos retângulos têm congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.*

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90°$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$. Tomemos o ponto D na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{A'D} = \overline{AC}$, como ilustrado na Figura 8.

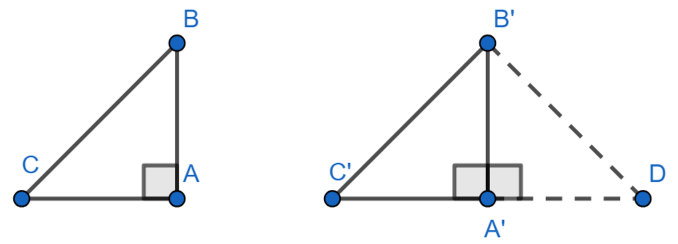


Figura 8: Caso especial de congruência de triângulos retângulos

Como $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $B'\widehat{A'}D = 90°$ (suplemento de $B'\widehat{A'}C'$) e $\overline{AC} = \overline{A'D}$, segue que $ABC \equiv A'B'D$, por LAL, o que implica que $\overline{BC} = \overline{B'D}$ e $\widehat{C} = \widehat{D}$. Mas, como $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, então temos que $\overline{B'C'} = \overline{B'D}$. Dessa forma, o triângulo $B'C'D$ é isósceles de base $C'D$. Daí, pela Proposição 3.5, vem que $\widehat{C'} = \widehat{D}$, e portanto, $\widehat{C'} = \widehat{C}$. Por fim, ao considerarmos os triângulos ABC e $A'B'C'$, teremos: $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ e $\widehat{A} = \widehat{A'}$. Logo, por LAA_O, os triângulos são congruentes. $\square$

Em todo triângulo, os comprimentos dos lados e ângulos guardam uma certa relação. Comecemos estabelecendo uma relação entre os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos a eles opostos.

Proposição 3.8. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior ângulo está oposto ao maior lado.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{BC} > \overline{AC}$. Tomemos o ponto D pertencente à BC, de maneira que $\overline{CD} = \overline{CA}$, conforme ilustrado na Figura 9.

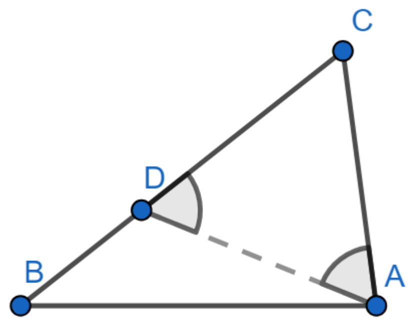


Figura 9: Ao maior lado opõe-se o maior ângulo

Assim, a semirreta $\overrightarrow{AD}$ divide o ângulo $C\widehat{A}B$, o que implica em $C\widehat{A}B > C\widehat{A}D$. Como $\overline{CD} = \overline{CA}$, então o triângulo ACD é isósceles de base AD e, pela Proposição 3.5, $C\widehat{A}D = C\widehat{D}A$, donde concluímos que, $C\widehat{A}B > C\widehat{D}A$. Como $C\widehat{D}A$ é ângulo externo do triângulo ABD, então, pelo Teorema 3.7, $C\widehat{D}A > A\widehat{B}D = A\widehat{B}C$. Logo, $C\widehat{A}B > C\widehat{D}A > A\widehat{B}C$, isto é, $C\widehat{A}B > A\widehat{B}C$. □

Proposição 3.9. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior lado está oposto ao maior ângulo.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo tal que $B\widehat{A}C > A\widehat{B}C$. Vamos verificar qual a relação entre os comprimentos dos lados BC (oposto a $B\widehat{A}C$) e AC (oposto a $A\widehat{B}C$). Há três possibilidades:

1. $\overline{BC} < \overline{AC}$, e daí, pela Proposição 3.8, $B\widehat{A}C < A\widehat{B}C$, o que é uma contradição;
2. $\overline{BC} = \overline{AC}$, o que implicaria em ABC ser isósceles de base AB e, pela Proposição 3.5, $B\widehat{A}C = A\widehat{B}C$, o que é uma contradição;
3. $\overline{BC} > \overline{AC}$.

Logo, por exclusão, temos que apenas a terceira possibilidade pode ser verdadeira, e isto conclui a prova. □

Teorema 3.10 (Desigualdade triangular)**.** *Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração. Tomemos ABC um triângulo e consideremos o ponto D pertencente à semirreta oposta a $\overrightarrow{AC}$, de maneira que $\overline{AD} = \overline{AB}$, como ilustrado pela Figura 10.

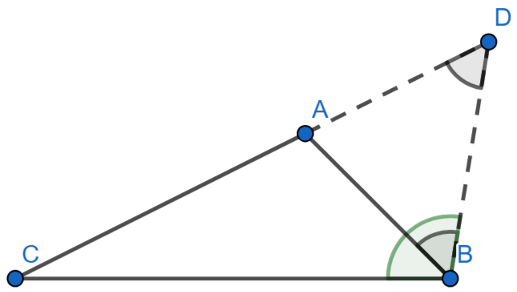


Figura 10: Desigualdade triangular

Temos que $\overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB}$. Além disso, ABD é isósceles de base BD, de modo que $A\widehat{B}D = A\widehat{D}B$. Como $\overrightarrow{BA}$ divide o ângulo $C\widehat{B}D$, temos que $C\widehat{B}D > A\widehat{B}D = A\widehat{D}B = C\widehat{D}B$. Assim, de acordo com a Proposição 3.9, no triângulo BCD temos que $\overline{BC} < \overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AB}$. Logo, $\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$. Analogamente, obtemos $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ e $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$. $\square$

Teorema 3.11. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a* $180°$.

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer e $\overleftrightarrow{XY}$ a reta paralela a BC, passando por A, conforme ilustrado na Figura 11.

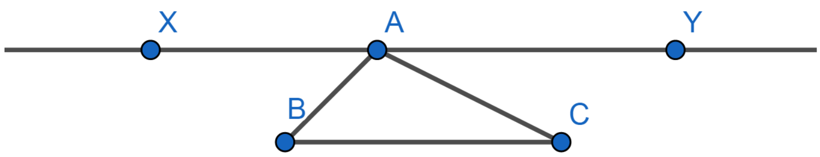


Figura 11: Soma dos ângulos internos de um triângulo

Dado que $\widehat{B}$ e $B\widehat{A}X$ são ângulos alternos internos, temos que $\widehat{B} = B\widehat{A}X$, conforme demonstrado em Barbosa (2012, p. 101). Analogamente, temos que $\widehat{C} = C\widehat{A}Y$, de sorte que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A} + B\widehat{A}X + C\widehat{A}Y = 180°$. $\square$

Corolário 3.12. *Cada ângulo de um triângulo equilátero mede* $60°$.

Na sequência falaremos um pouco a respeito de quadriláteros. Dentre os quadriláteros destacamos os chamados **quadriláteros notáveis**. São eles os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados.

Definição 3.13. *Um quadrilátero convexo é denominado **trapézio** se, e somente se, possui dois de seus lados paralelos. A esses lados, dá-se o nome de **bases do trapézio**.*

De acordo com os demais lados, que não são bases, os trapézios se classificam em:

- **Trapézio isósceles**, se estes lados são congruentes;
- **Trapézio escaleno**, se estes lado não são congruentes.

Com relação a seus ângulos, chama-se **trapézio retângulo** àquele que possui dois ângulos internos retos.

Teorema 3.14. *Em um trapézio ABCD de bases AB e CD temos:* $\widehat{A}+\widehat{D}=\widehat{B}+\widehat{C}=180°$.

Demonstração. Como $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a $\overleftrightarrow{CD}$, temos que $\overleftrightarrow{AD}$ é transversal a ambas, de maneira que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ são colaterais internos e a soma de suas medidas é $180°$. De maneira análoga, demonstra-se que $\widehat{B}+\widehat{C}=180°$.

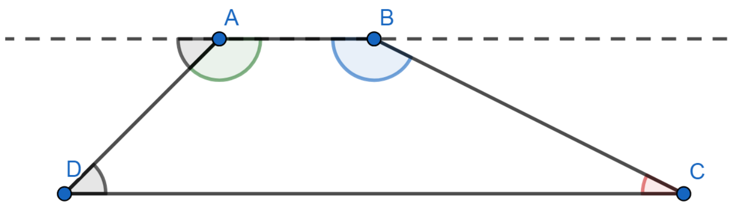


Figura 12: Ângulos de um trapézio qualquer

□

Teorema 3.15. *Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um trapézio isósceles de bases AB e CD, com $\overline{AB}<\overline{CD}$. Tracemos as perpendiculares às bases pelos vértices A e B, obtendo os pontos A' e B' em CD. Notemos que $\overline{AA'}=\overline{BB'}$ por serem distâncias entre retas paralelas. Os triângulos retângulos $AA'D$ e $BB'C$ são congruentes pelo Caso 5, visto que $\overline{AA'}=\overline{BB'}$ e $\overline{AD}=\overline{BC}$. Daí obtemos $\widehat{C}=\widehat{D}$. Como, pelo Teorema 3.14, $\widehat{A}+\widehat{D}=\widehat{B}+\widehat{C}=180°$, concluímos que $\widehat{A}=\widehat{B}$. □

Definição 3.16. *Denominaremos **paralelogramo** a um quadrilátero convexo que possui lados opostos paralelos.*

Teorema 3.17. *Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.*

Demonstração. Considere $ABCD$ um paralelogramo.

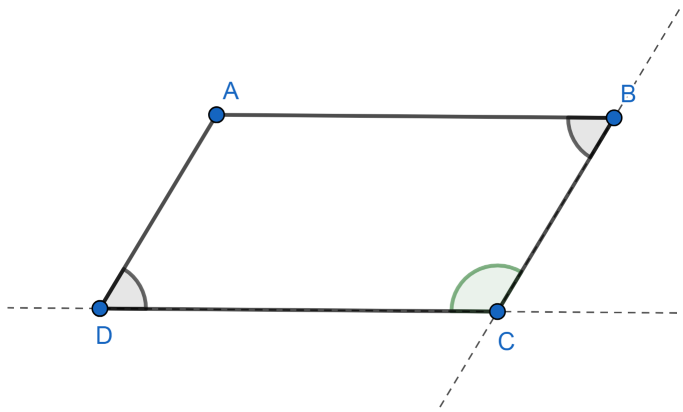


Figura 13: Paralelogramo

Note que $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, e $\overleftrightarrow{CD}$ é transversal a elas. Assim, os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ são colaterais internos, de modo que $\widehat{C}+\widehat{D}=180^\circ$. Mas também como $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas e $\overleftrightarrow{BC}$ é transversal, temos que $\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$. Logo, $\widehat{B}=\widehat{D}$. De maneira análoga podemos demonstrar que $\widehat{A}=\widehat{C}$. □

Outro quadrilátero notável é o retângulo.

Definição 3.18. *Um quadrilátero convexo é chamado de* ***retângulo*** *se possui os quatro ângulos congruentes.*

Como veremos ainda neste capítulo, a soma dos ângulos internos de um polígono depende do número de lados do polígono em questão. No caso dos quadriláteros, essa soma é de 360°, de sorte que também podemos definir os retângulos da seguinte maneira: "um quadrilátero convexo é denominado retângulo se possui os quatro ângulos retos".

O próximo quadrilátero notável de que trataremos é o losango.

Definição 3.19. *Um quadrilátero convexo é um* ***losango*** *se possui os quatro lados congruentes.*

Definição 3.20. *Um quadrilátero convexo é um* ***quadrado*** *se possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes, ou seja, se é simultaneamente um retângulo e um losango.*

Outro importante elemento dos polígonos é o conceito de diagonal. **Diagonal** de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.

Teorema 3.21. *O número de diagonais d de um polígono de n lados é dado por*

$$d=\frac{n(n-3)}{2}.$$

Demonstração. Provaremos por indução sobre n. Para $n = 3$, temos que o triângulo não possui diagonais e, como $\dfrac{3(3-3)}{2} = 0$, temos que a fórmula é válida. Suponha que vale para $n = k$, isto é, que o número de diagonais de um polígono de k lados é dado por $\dfrac{k(k-3)}{2}$. Vamos mostrar que para um polígono de $k+1$ lados a fórmula também é válida. De fato, seja $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$ um polígono de $k+1$ lados. Note que as diagonais de tal polígono são as diagonais do polígono $A_1A_2\ldots A_k$ mais as diagonais A_1A_k e $A_{k+1}A_j$ com $j \neq 1$ e $j \neq k$. Assim, temos que o número de diagonais do polígono de $k+1$ lados é dado por:

$$\begin{aligned} d &= \frac{k(k-3)}{2} + 1 + k - 2 \\ &= \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 \\ &= \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} \\ &= \frac{k^2 - k - 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k-2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}. \end{aligned}$$

Logo, por indução, a relação entre o número de diagonais d e o número de lados n de um polígono é dada por $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$, com $n \geq 3$.

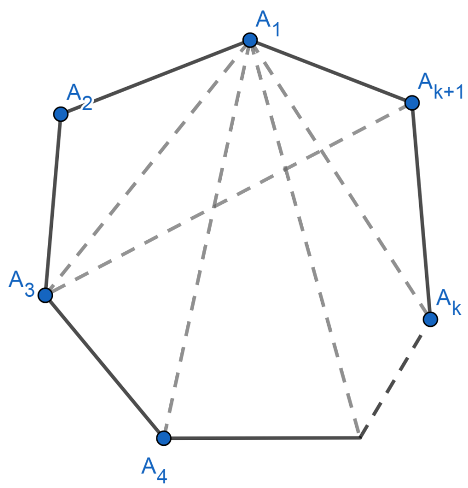


Figura 14: Diagonais de um polígono de $k+1$ lados

□

Teorema 3.22. *A soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada por*

$S_i = (n-2) \cdot 180°$.

Demonstração. Provaremos por indução sobre o número de lados do polígono. Para $n = 3$, temos que o polígono é um triângulo e, pelo Teorema 3.11, sabemos que a soma de seus ângulos internos é igual a $180°$. Como $(3-2) \cdot 180° = 180°$, temos que a fórmula é válida. Suponha que vale para $n = k$, isto é, que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de k lados é dada por $S_i = (k-2) \cdot 180°$. Vamos mostrar que para um polígono de $k+1$ lados a fórmula também é válida. De fato, seja $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ um polígono de $k+1$ lados. Traçando a diagonal A_1A_3, obtemos um polígono de k lados, a saber $A_1A_3A_4 \ldots A_{k+1}$, de modo que a soma dos ângulos internos deste polígono com a soma dos ângulos internos do triângulo $A_1A_2A_3$, é igual a soma dos ângulos internos do polígono de $k+1$ lados $A_1A_2 \ldots A_{k+1}$. Portanto, a soma S_i do polígono de $k+1$ lados será dada por:

$$\begin{aligned} S_i &= (k-2) \cdot 180° + 180° \\ &= (k-2+1) \cdot 180° \\ &= [(k+1)-2] \cdot 180° \end{aligned}$$

Logo, por indução, a soma S_i dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada por $S_i = (n-2) \cdot 180°$. □

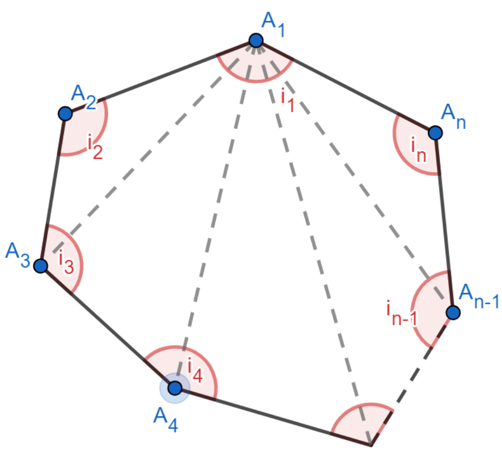


Figura 15: Ângulos internos de um polígono

Teorema 3.23. *A soma S_e dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados é dada por $S_e = 360°$.*

Demonstração. Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono convexo de n lados.

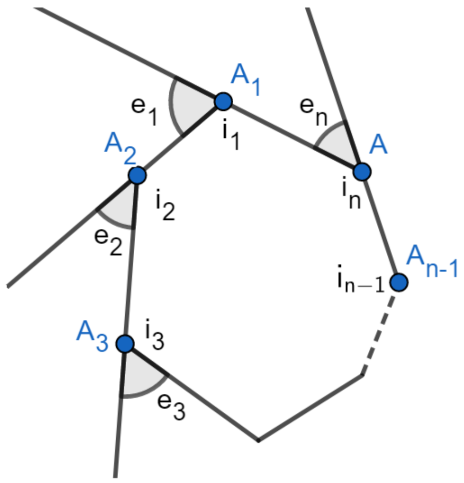


Figura 16: Ângulos externos de um polígono convexo

Considerando os ângulos externos $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ suplementos dos ângulos internos $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} e_1 + i_1 &= 180^\circ \\ e_2 + i_2 &= 180^\circ \\ e_3 + i_3 &= 180^\circ \\ \vdots &= \vdots \\ e_n + i_n &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdades, teremos $S_e + S_i = n \cdot 180^\circ$. Substituindo S_i por $(n-2) \cdot 180^\circ$, conforme Teorema 3.22, obtemos

$$S_e + (n-2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ,$$

ou seja,

$$S_e = n \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 360^\circ = 360^\circ$$

□

3.2 PAVIMENTAÇÃO DO PLANO COM POLÍGONOS

Como citado no Capítulo 2, no livro *Harmonia do Mundo*, Kepler (1997) demonstra que existem exatamente onze maneiras de se pavimentar o plano, utilizando-se exclusivamente polígonos regulares, sujeitos às seguintes condições:

- Se dois polígonos regulares se intersectam, então essa interseção é um lado ou um vértice comum;
- A distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

O ponto chave da pavimentação com polígonos é a sua distribuição ao redor de cada vértice. Ao dispormos os polígonos dessa maneira, os ângulos correspondentes a essa interseção devem formar um ângulo de uma volta, ou seja, somar 360°.

Das onze pavimentações de Kepler, três são compostas de polígonos regulares de um mesmo tipo, também chamadas de **pavimentações regulares**, sendo que cada uma delas utiliza triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares, conforme ilustrado na Figura 17.

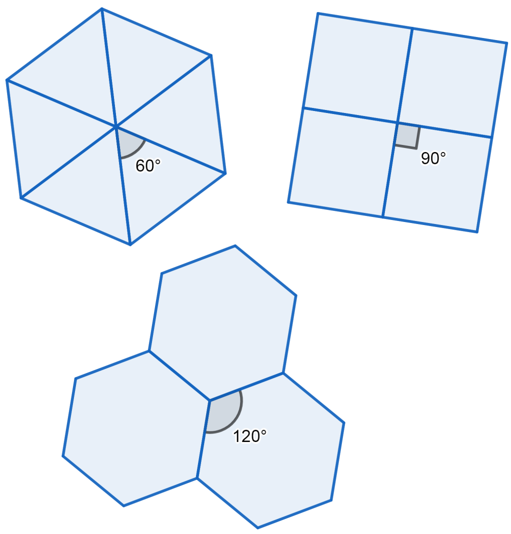


Figura 17: Pavimentações (ou mosaicos) regulares

Note que, no caso do triângulo equilátero, temos $60^\circ \cdot 6 = 360^\circ$, para o quadrado, $90^\circ \cdot 4 = 360^\circ$, e para o hexágono regular, $120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$, de maneira que as somas dos ângulos em torno de um mesmo vértice formam um ângulo de uma volta. Através de uma breve análise, podemos perceber porque somente esses três tipos de polígonos regulares permitem a pavimentação regular do plano.

Partindo dos polígonos regulares com menor número de lados, sabemos que com três (triângulo equilátero) e quatro lados (quadrado), é possível realizar a pavimentação regular. Tomemos, agora, o pentágono regular. Pelo Teorema 3.22, a soma de seus ângulos internos é dada por $S_i = (5-2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. A partir dessa soma e sabendo se tratar de um polígono equiângulo, temos que cada ângulo interno tem medida $i_n = \dfrac{540^\circ}{5} = 108^\circ$, $n = 1, \ldots, 5$. Note que $108^\circ \cdot 3 = 324^\circ < 360^\circ$ e $108^\circ \cdot 4 = 432^\circ > 360^\circ$. O que significa que não é possível dispor pentágonos em torno de um vértice sem que haja falhas ou sobreposições, como pode ser observado na Figura 18.

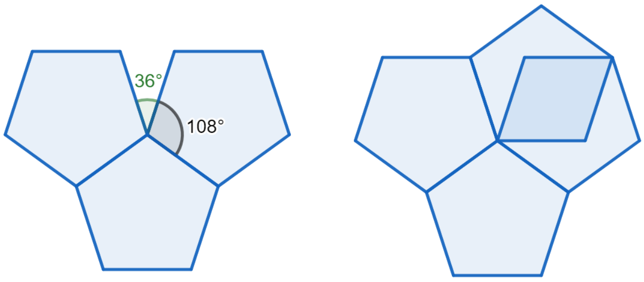


Figura 18: Pavimentando com pentágonos

Temos, então, três polígonos que pavimentam regularmente o plano (triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular) e um que não pavimenta (pentágono regular). Pode-se perceber que só é possível chegar a um ângulo de uma volta somando ângulos de mesma medida, se tal medida for um divisor natural de 360°. Em outras palavras, se α é a medida do ângulo interno de um polígono regular, é possível realizar uma pavimentação regular do plano utilizando este polígono se, e somente se, $k \cdot \alpha = 360^\circ$, com k natural.

De fato, os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°, os de um quadrado 90° e os de um hexágono 120°, sendo que 60, 90 e 120 são divisores de 360. Essa constatação explica porque não é possível realizar uma pavimentação regular com pentágonos, mas com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos sim. Porém Kepler afirma que **apenas** esses três polígonos permitem a pavimentação regular do plano.

Utilizando o Teorema 3.22, podemos definir a medida do ângulo interno de um polígono regular como sendo $i_n = \dfrac{(n-2)180^\circ}{n}$. Assim, para cada natural $n \geq 3$, podemos relacionar a medida dos ângulos internos de um polígono regular de n lados através da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por

$$f(n) = \frac{(n-2)180}{n},$$

onde n é o número de lados de um polígono regular e $f(n)$ é a medida de cada um de seus ângulos internos. Dessa forma, para valores de n cada vez maiores, descrevemos o comportamento de f por meio do seguinte limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n-2)180}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{180n - 360}{n} = \lim_{n \to +\infty} \left(180 - \frac{360}{n}\right) = 180.$$

Isto nos faz perceber que, ao aumentar o número de lados de um polígono regular, a medida de seus ângulos internos também cresce, aproximando-se cada vez mais de 180°, porém sem nunca atingir tal medida. De fato, se dois lados de um polígono possuírem entre eles um ângulo de 180°, teremos que tais lados estarão contidos em uma mesma reta, descaracterizando assim o polígono.

A saber, os divisores de 360 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 e 360. Logo, uma vez que os ângulos internos de um hexágono medem 120° e, como demonstrado, não temos polígonos regulares com ângulos internos medindo 180° ou mais, podemos concluir que apenas os três polígonos regulares indicados (com três, quatro e seis lados) pavimentam o plano.

As demais pavimentações de Kepler, utilizando apenas polígonos regulares, têm as composições ao redor de um mesmo vértice apresentadas nas figuras a seguir.

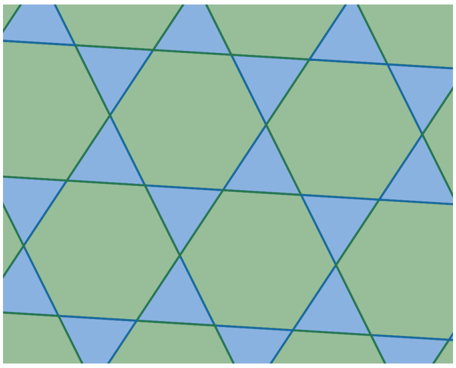


Figura 19: Triângulo - hexágono - triângulo - hexágono

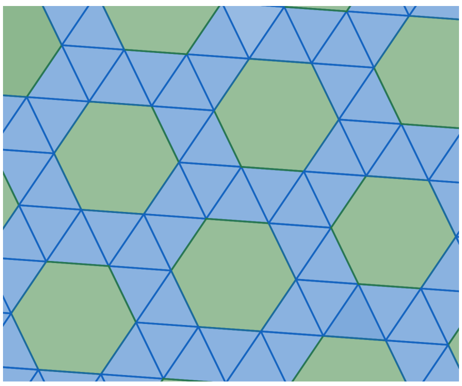


Figura 20: Triângulo - triângulo - triângulo - triângulo - hexágono

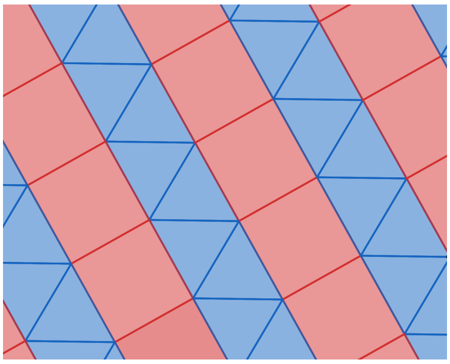


Figura 21: Triângulo - triângulo - triângulo - quadrado - quadrado

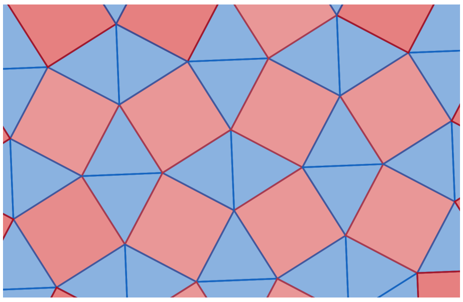


Figura 22: Triângulo - triângulo - quadrado - triângulo - quadrado

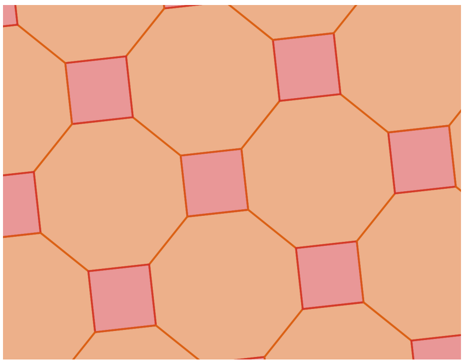


Figura 23: Quadrado - octágono - octágono

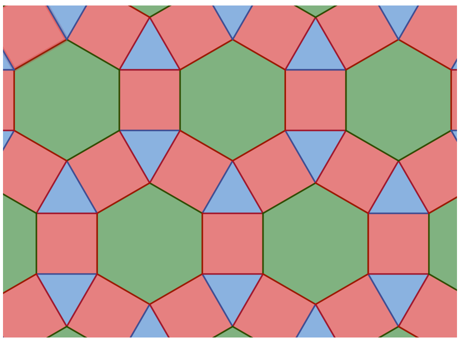


Figura 24: Triângulo - quadrado - hexágono - quadrado

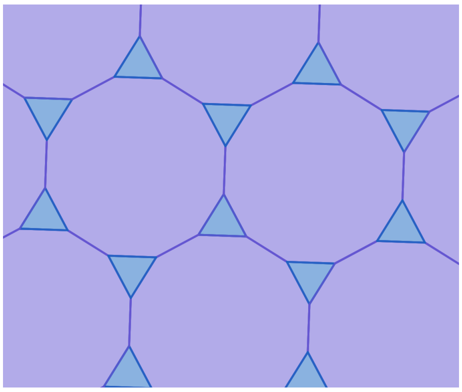


Figura 25: Triângulo - dodecágono - dodecágono

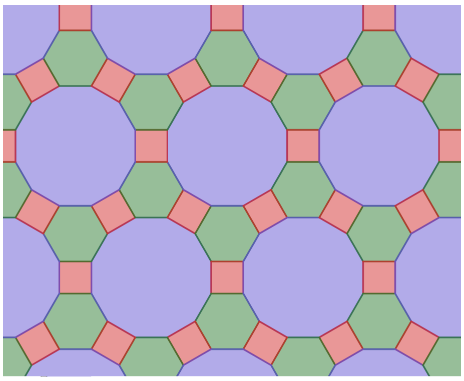


Figura 26: Quadrado - hexágono - dodecágono

4 ATIVIDADES USANDO O SCRATCH

Neste capítulo, apresentaremos um material, contendo atividades práticas utilizando a linguagem de programação Scratch para a construção de mosaicos. Tais atividades estão em uma sequência que objetiva a construção/assimilação do conhecimento de geometria dos polígonos. Inicia-se pelo trabalho envolvendo ângulo, explorando sua conceituação, medida e classificação.

Na sequência, as atividades propõem o estudo de polígonos regulares e seus ângulos internos, utilizando a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para deduzir o valor de cada ângulo de um polígono regular e, posteriormente, construir esses polígonos.

Por fim, atingimos o assunto desejado com atividades envolvendo a pavimentação do plano, inicialmente com polígonos regulares de um mesmo tipo e, posteriormente, com polígonos regulares de diferentes tipos.

Tratam-se de sugestões de atividades, havendo a possibilidade de o professor fazer adaptações conforme o nível de conhecimento da turma ou conforme necessário. Sugerimos a consulta do material constante no Apêndice A - Tutorial do programa Scratch, que apresenta o Scratch, suas formas de acesso e ferramentas básicas. É essencial que o professor tenha conhecimento de tais informações para a aplicação destas atividades.

Antes de iniciar a primeira atividade, sugerimos que o professor apresente a linguagem de programação Scratch aos alunos: forma de acesso, funcionalidades e comandos básicos. Para isto será necessário uma sala com computador e projetor.

4.1 ATIVIDADE 1: INTRODUÇÃO AO SCRATCH

- Tópico a ser trabalhado: a comunidade e a linguagem Scratch e o uso de suas ferramentas básicas.
- Série: 7º ano do Ensino Fundamental.

- Tempo estimado para a realização da atividade: 25 minutos.
- Recursos necessários: sala de informática e projetor.
- Objetivo da atividade: apresentar a comunidade Scratch aos alunos e algumas funções básicas que serão utilizadas nas atividades seguintes, como os Códigos de Movimento e a ferramenta Caneta.

4.1.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1

Seguindo as orientações do seu professor, crie uma conta no Scratch. A seguir, matricule-se na turma aberta por seu professor.

Após seu professor apresentar as funcionalidades básicas da linguagem de programação Scratch, clique em *criar*, como indicado na Figura 27, e explore tais funcionalidades tentando executar o que se pede nos seguintes itens:

1. Faça com que seu ator se mova na tela;

2. Mude a aparência do seu ator (cor, tamanho ou fantasia, por exemplo);

3. Use a caneta para fazer um segmento de reta na tela.

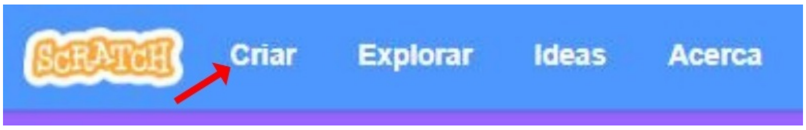


Figura 27: Criando um projeto

4.2 ATIVIDADE 2: CONSTRUINDO ÂNGULOS

- Tópico a ser trabalhado: construção de ângulos.
- Série: 7º ano do Ensino Fundamental.
- Tempo estimado para realização da atividade: 25 minutos.
- Recursos necessários: sala de informática e projetor.
- Objetivo da atividade: utilizar a ferramenta Scratch para construir um ângulo; reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas; resolver problemas que envolvam a noção de ângulo e determinar medidas de ângulos; trabalhar com os conceitos de suplemento de um ângulo e ângulos adjacentes.
- Expectativa: espera-se que o aluno seja capaz de realizar as construções dos ângulos pedidos, utilizando, para isso, a noção de ângulo complementar.

4.2.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 2

1. Utilize o que aprendeu na atividade anterior, como os comandos de Movimento e a Caneta, para construir um ângulo de 120°.

2. Quais movimentos você utilizou para construir seu ângulo?

3. Faça uma programação como a da Figura 28. Agora responda: quantos graus tem o ângulo formado pelos segmentos de reta desenhados pelo ator?

Figura 28: Programação para a atividade

4. Qual valor devemos substituir no bloco *gire* da programação da Figura 28 para que o ator construa um ângulo de 60°? Qual a relação entre esse valor e a medida do ângulo desejado?

5. Preencha a tabela a seguir, indicando o valor que devemos programar no bloco *gire* da Figura 28 se quisermos que o nosso ator forme cada um dos ângulos com as medidas apresentadas.

Medida do ângulo desejado	Valor informado no bloco *gire*
30°	
45°	
90°	
53°	

4.3 ATIVIDADE 3: CONSTRUINDO ÂNGULOS “ESPECIAIS”

- Tópico a ser trabalhado: construção de ângulos por meio do Scratch.
- Série: 7º ano do Ensino Fundamental.
- Tempo estimado para realização da atividade: 25 minutos.
- Recursos necessários: sala de informática e projetor.
- Objetivo da atividade: apresentar/fixar os conceitos de ângulos reto, agudo, obtuso, suplementares e complementares, a fim de verificar o aprendizado do aluno.
- Expectativas: espera-se, com essa atividade, que o aluno programe, a partir do que lhe foi apresentado, de forma que seu personagem represente ângulos com as características pedidas. Com esta atividade, o professor poderá verificar se houve uma compreensão, por parte do aluno, dos conceitos matemáticos e de programação apresentados.

4.3.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 3

Utilizando o Scratch, faça programações para que o ator desenhe:

1. Um ângulo reto;
2. Um ângulo agudo;
3. Ângulos adjacentes;
4. Um ângulo obtuso;
5. Ângulos complementares;
6. Ângulos suplementares.

4.4 ATIVIDADE 4: CONSTRUÇÃO DE UM POLÍGONO DADO

- Tópico a ser trabalhado: ângulos internos de um polígono.
- Série: 7º ano do Ensino Fundamental.
- Tempo estimado para realização da atividade: 25 minutos.
- Recursos necessários: sala de informática e projetor.
- Objetivo da atividade: utilizar a ferramenta Scratch para construir um polígono dado, como na Figura 29.
- Expectativa: espera-se que o aluno identifique os ângulos do polígono como sendo retos e execute os movimentos necessários para construí-lo, utilizando o suplementar de 90°, e estabeleça uma relação entre as medidas dos lados.

4.4.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 4

Construa, utilizando a ferramenta Caneta, o polígono da Figura 29. Para isso, use os comandos de Movimento.

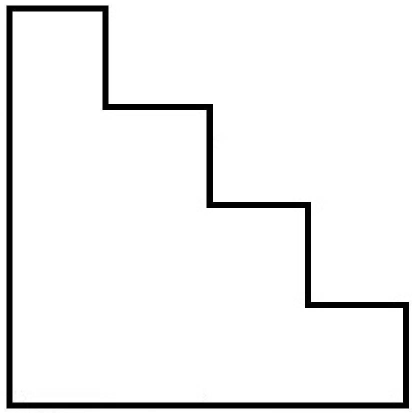


Figura 29: Polígono para construção

4.5 ATIVIDADE 5: DESCOBRINDO A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

- Tópico a ser trabalhado: soma dos ângulos internos de um triângulo.
- Série: 7º ano do Ensino Fundamental.
- Tempo estimado para realização da atividade: 25 minutos.
- Recursos necessários: diversos tipos de triângulos impressos (triângulos acutângulos, obtusângulos, retos), tesoura, cola, lousa e giz.
- Objetivo da atividade: utilizar materiais concretos, afim de se obter a soma dos ângulos internos de um triângulo.
- Expectativa: espera-se com esta atividade que os alunos deduzam o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo, que corresponde a 180°.

4.5.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 5

Esta atividade foi adaptada de Grasseschi et al. (1999).

1. Conforme figura abaixo, rasgue ou recorte as três "pontas" do triângulo que você recebeu de seu professor, separando os três ângulos internos;

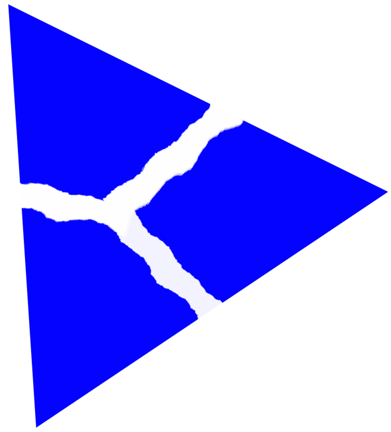


Figura 30: Como recortar o triângulo

2. Cole no caderno as três "pontas" do triângulo, de modo que os três vértices coincidam e os ângulos fiquem adjacentes. Siga as instruções do seu professor;
3. Feito isso, seu professor entregará um novo triângulo, diferente do primeiro. Repita os procedimentos 1 e 2 com esse novo triângulo.

Note que ao fazer isso você somou os ângulos do triângulo. Agora responda as seguintes questões:

1. Qual o valor de cada uma dessas somas? Justifique.

____

____

____

____

2. Comparando com as respostas dos demais colegas, o que se pode deduzir sobre a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo?

____

____

____

4.6 ATIVIDADE 6: DEDUZINDO A FÓRMULA PARA A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO

- Tópico a ser trabalhado: soma dos ângulos internos de um polígono convexo.
- Série: 7º ano do Ensino Fundamental.
- Tempo estimado para realização da atividade: 25 minutos.
- Recursos necessários: polígonos impressos (regulares e irregulares, de maneira que os alunos não recebam todos os mesmos polígonos), tesoura, lousa, giz e régua.
- Objetivo da atividade: utilizar materiais concretos, afim de facilitar a compreensão, por parte dos alunos, da fórmula utilizada para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo, dada por $S_i = (n-2)\cdot 180^\circ$; deduzir tal fórmula a partir da decomposição de polígonos em triângulos.
- Expectativas: espera-se com esta atividade que os alunos deduzam a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono dado. Trabalhar com diagonais de um polígono.

4.6.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 6

Faça o que se pede em cada item:

1. **No quadrilátero:** selecione um dos vértices do quadrilátero e trace a diagonal que parte dele, decompondo o polígono em triângulos. Agora responda: sabendo a soma dos ângulos de cada triângulo, qual a soma dos ângulos internos do quadrilátero?

2. **No pentágono (5 lados):** faça o mesmo processo com o pentágono, fazendo com que ele seja decomposto em triângulos, traçando todas as diagonais que partem de um mesmo vértice. Determine a soma dos ângulos internos do pentágono.

3. **No hexágono (6 lados):** faça o mesmo processo com o hexágono, fazendo com que ele seja decomposto em triângulos, traçando todas as diagonais que partem de um mesmo vértice. Determine a soma dos ângulos internos do hexágono.

4. Agora, seu professor irá distribuir três polígonos, regulares e irregulares, para cada aluno. Repita o mesmo processo feito no quadrilátero, pentágono e hexágono aqui representados.

5. Preencha a tabela abaixo:

Polígonos	Número de lados	Número de triângulos em que foi dividido	Soma dos ângulos internos
Triângulo			
Quadrilátero			
Pentágono			
Hexágono			

6. O que você pode deduzir sobre o cálculo da soma dos ângulos internos de um heptágono (7 lados)? De um octógono (8 lados)? De um eneágono (9 lados)? De um decágono (10 lados)?

7. Deduza uma fórmula que dê a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados.

4.7 ATIVIDADE 7: CONSTRUINDO POLÍGONOS REGULARES

- Tópico a ser trabalhado: classificações dos polígonos quanto ao número de vértices; medidas de ângulos internos de polígonos regulares.
- Série: 7º ano do Ensino Fundamental.
- Tempo estimado para realização da atividade: 40 minutos.
- Recursos necessários: sala de informática e projetor.
- Objetivo da atividade: utilizar a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo deduzida na Atividade 6, para obter o valor de cada ângulo de um polígono regular; construir polígonos regulares no Scratch; reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares.
- Expectativa: espera-se, com esta atividade, que o aluno determine a medida de cada ângulo dos polígonos regulares trabalhados, utilizando a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono.

4.7.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 7

1. Utilize a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono para determinar o valor de cada um dos ângulos internos dos polígonos indicados a seguir. Lembre-se: polígonos regulares possuem todos os lados com o mesmo comprimento e ângulos com a mesma medida.

Polígonos	Número de lados	Número de triângulos em que foi dividido	Soma dos ângulos internos	Medida de cada ângulo interno
Triângulo equilátero				
Quadrado				
Pentágono regular				
Hexágono regular				
Decágono regular				
Polígono regular qualquer				

2. Agora, utilizando o Scratch, construa os seguintes polígonos regulares.

   (a) Triângulo equilátero

   (b) Quadrado

   (c) Pentágono regular

   (d) Hexágono regular

4.8 ATIVIDADE 8: CONSTRUINDO MOSAICOS COM POLÍGONOS REGULARES DE UM MESMO TIPO

- Tópico a ser trabalhado: estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
- Série: 7º ano do Ensino Fundamental.
- Tempo estimado para realização da atividade: 50 minutos.
- Recursos necessários: sala de informática e projetor.
- Objetivo da atividade: construir mosaicos utilizando apenas um tipo de polígono regular de cada vez; compreender quais polígonos regulares permitem a construção de mosaicos utilizando apenas um tipo; estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
- Expectativa: o aluno precisa perceber com quais polígonos regulares de um mesmo tipo é possível realizar a pavimentação do plano.
- Sugestão para o professor: trabalhar com os alunos antes ou durante a atividade o conceito de mosaico e sua presença no dia-a-dia dos alunos.

4.8.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 8

Mosaico é a pavimentação ou o recobrimento de superfícies com algum material, como ladrilhos, pedras ou tacos de madeira, entre outras coisas. Uma parede com azulejos é um exemplo de mosaico.

Em um mosaico, não podem haver falhas ou sobreposições, ou seja, um polígono não pode ficar em cima do outro nem ter espaços entre eles.

Existem exatamente onze maneiras de se pavimentar o plano (fazer mosaicos) utilizando exclusivamente polígonos regulares sujeitos às seguintes condições:

- Se dois polígonos regulares se intersectam, então essa interseção é um lado ou um vértice comum;
- A distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

O ponto chave da pavimentação com polígonos é a sua distribuição ao redor de cada vértice. Ao dispormos os polígonos dessa maneira, os ângulos correspondentes a essa interseção devem formar um ângulo de uma volta, ou seja, somar 360°.

Agora é com você:

(a) Tente construir, utilizando o Scratch, mosaicos utilizando **triângulos equiláteros**. Você não precisa preencher todo o palco, mas não podem haver sobreposições ou "falhas" entre os polígonos de um mesmo tipo utilizados.

(b) Faça um mosaico utilizando somente **quadrados**. Lembre-se que não é necessário preencher todo o palco.

(c) Faça um mosaico utilizando somente **pentágonos regulares** (5 lados). Lembre-se que não é necessário preencher todo o palco.

(d) Faça um mosaico utilizando somente **hexágonos regulares** (6 lados). Lembre-se que não é necessário preencher todo o palco.

(e) Faça um mosaico utilizando somente **octógonos regulares** (8 lados). Lembre-se que não é necessário preencher todo o palco.

Agora responda:

1. Em todos os casos foi possível construir o mosaico desejado? Em quais casos foi possível e em quais não foi possível? Caso não, por que motivo?

2. Você acha que é possível construir mosaicos só com polígonos regulares com nove lados? E com mais? Por quê?

4.9 ATIVIDADE 9: CONSTRUINDO MOSAICOS COM POLÍGONOS REGULARES DE DIFERENTES TIPOS

- Tópico a ser trabalhado: relação entre ângulos internos e externos de polígonos, vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
- Sére: 7º ano do Ensino Fundamental.
- Tempo estimado para a realização da atividade: tarefa para casa.
- Recursos necessários: computador com acesso à internet.
- Objetivo da atividade: explorar as diferentes possibilidades de pavimentação; estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos, com polígonos regulares de diferentes tipos.

4.9.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 9

Em sua casa, na biblioteca ou em outro local com acesso à internet, faça a seguinte atividade:

- Utilizando sua criatividade, construa um mosaico, dessa vez tentando preencher todo o palco, utilizando dois ou mais polígonos regulares, e depois compare com os mosaicos feitos por seus colegas de classe nas próximas aulas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O crescente movimento tecnológico vem influenciando e transformando as maneiras como as pessoas se comunicam, transmitem informações e, consequentemente, suas relações sociais. Todas essas mudanças influem diretamente nas escolas. A aprendizagem por meio das tecnologias pode ser mais atraente aos alunos, mas implica em desafios para a educação, exigindo que as escolas se inovem e reorganizem seu modo de ensino.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), já previam a "necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação" (BRASIL, 1998, p. 20).

É necessário, ainda, considerar que os estudantes estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores. Tal fato se dá em decorrência do avanço e aumento das tecnologias de informação e do acesso cada vez maior a elas pela maior disponibilidade de *smartphones*, *tablets*, computadores e afins.

A BNCC chama a atenção para o fato de que

> os jovens têm se engajado cada vez mais como protagonistas da cultura digital, envolvendo-se diretamente em novas formas de interação multimidiática e multimodal e de atuação social em rede, que se realizam de modo cada vez mais ágil. (BRASIL, 2018, p. 59)

Em seu artigo, intitulado "Diferentes usos do Computador na Educação", Valente (1993, p. 2) define o que considera indispensável para a inserção do computador no ambiente escolar: "a implantação da informática na educação consiste basicamente de quatro ingredientes: o computador, o software educativo, o professor capacitado para usar o computador como ferramenta educacional e o aluno."

Dessa forma, procuramos contribuir para a capacitação do professor, por meio da elaboração de material introdutório sobre o Scratch, suas ferramentas e funcionalidades, além de elaborar uma sequência de atividades utilizando a ferramenta para realizar a pavimentação de planos com polígonos. Com o estudo da pavimentação através de mosaicos, as atividades exploram os polígonos regulares, ângulos internos e externos, soma dos ângulos internos de um polígono e também ângulos complementares e suplementares.

Infelizmente não foi possível aplicar as atividades aqui propostas, uma vez que no momento não estou atuando como professora da educação básica, mas esperamos que este trabalho sirva de estímulo para que os docentes incorporem o uso do computador, em particular da linguagem de programação Scratch, em suas aulas.

REFERÊNCIAS

ALVES, S.; DALCIN, M. Mosaicos do plano. **Revista do Professor de Matemática**, v. 40, p. 3–12, 1999.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 11ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos**. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1993.

BARICHELO, L. Programação de computadores via Scratch. **Revista do Professor de Matemática**, v. 88, p. 26–30, 2015.

BARTH, G. M. P. Arte e matemática, subsídios para uma discussão interdisciplinar por meio das obras de M.C. Escher. Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, 2006.

BATISTA, E. J. S. et al. Utilizando o Scratch como ferramenta de apoio para desenvolver o raciocínio lógico das crianças do ensino básico de uma forma multidisciplinar. **Anais do XXI Workshop de Informática na Escola**, p. 350–359, 2015.

BONGIOVANNI, V. O teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2.5, p. 94–106, 2007.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. 1998. Ministério da Educação. Secretaria do Ensino Fundamental. Brasília, DF.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Fundamental**. 2018. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Brasília, DF.

COSTA, E. A. d. A beleza pela (na) Matemática. **Estudos**, v. 35, n. 2, p. 187–199, 2008.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar**. 9ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

EUCLIDES. **Os Elementos**. 1ª ed. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

GRASSESCHI, M. C. C.; ANDRETTA, M. C.; SILVA, A. B. d. S. **PROMAT: projeto oficina de matemática**. 1ª ed. São Paulo: FTD, 1999.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Geometria dos mosaicos**. 12ª ed. São Paulo: Scipione, 1994.

KEPLER, J. **The Harmony of the World**. 1ª ed. Filadélfia: American Philosophical Society, 1997.

MOL, R. S. **Introdução à história da Matemática**. 1ª ed. Belo Horizonte: Editora CAED-UFMG, 2012.

MONTOITO, R.; GARNICA, A. V. M. Ecos de Euclides: breves notas sobre a influência d'Os Elementos a partir de algumas escolas filosóficas. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v. 16, n. 1, p. 95–123, 2014.

PAPERT, S. **Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas**. 1ª ed. New York: Basic Books, 1980.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. d. **Tópicos de História da Matemática**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. 1ª ed. São Paulo: Editora McGraw-Hill, 1996.

SOUZA, F. d. S. Prática pedagógica com auxílio tecnológico e material concreto para o ensino de geometria e fração no 6º ano do ensino fundamental. Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2017.

VALENTE, J. A. Diferentes usos do computador na educação. **Em Aberto**, v. 12, n. 57, p. 2–17, 1993.

WING, J. M. Computational thinking and thinking about computing. **Philosophical transactions of the royal society of London A**, v. 366, p. 3717–3725, 2008.

APÊNDICE A – TUTORIAL DO PROGRAMA SCRATCH

Este apêndice traz um tutorial introdutório ao Scratch, com foco nas principais ferramentas utilizadas nas atividades do Capítulo 4. Além disso, ele apresenta instruções para a criação de contas, download do programa, solicitação de uma conta de professor, entre outras funcionalidades.

O Scratch possui uma versão online e uma para download (disponível em `https://scratch.mit.edu/download`). Ambas dispõem do mesmo layout e basicamente as mesmas funcionalidades, além de serem gratuitas. O que as diferencia é que a versão para download, uma vez instalada em seu computador, não depende de conexão com a internet para ser utilizada, diferentemente da versão online.

Além disso, o Scratch online possui uma funcionalidade chamada Conta de Professor, que será detalhada posteriormente e pode ser muito útil. Outra vantagem da versão online é a possibilidade de salvar e continuar o trabalho em outro computador com acesso a internet, o que permite que o aluno acesse e realize atividades em sua casa ou em uma biblioteca pública, por exemplo. Por tais motivos, neste trabalho, optamos por utilizar a versão online.

A.1 CRIANDO UMA CONTA

Em seu navegador, acesse `https://scratch.mit.edu/`. O site disponibiliza versões em diversos idiomas. Este tutorial foi elaborado com base na versão Português Brasileiro. Caso queira alterar o idioma do site, basta ir até o final da página e selecionar o idioma desejado. Para solicitar uma conta, clique em Inscreva-se, como indicado na Figura 31.

Será solicitada a criação de um nome de usuário e senha para acessos futuros. Para isso, será necessário fornecer algumas informações como idade e endereço de email. Em seu próximo acesso, basta clicar em Entrar, no canto superior direito (ver Figura 31) e digitar suas informações.

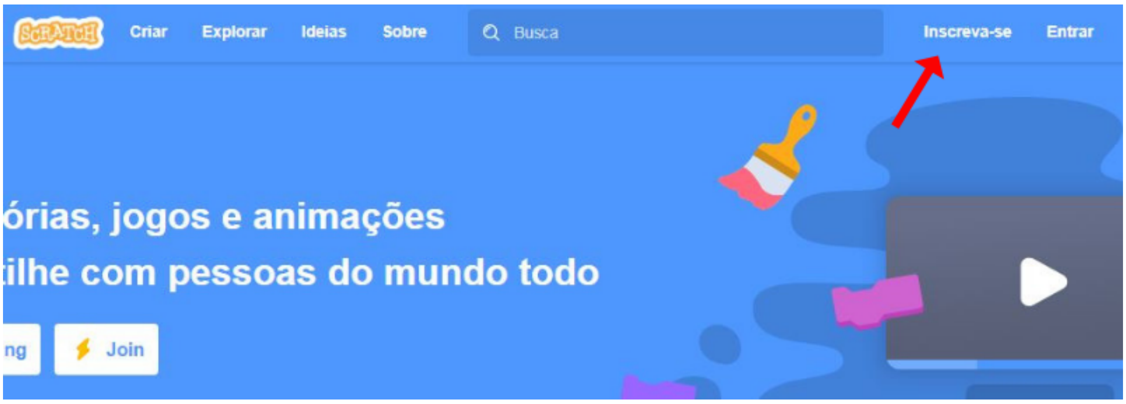


Figura 31: Página inicial do Scratch

A.2 SOLICITANDO UMA CONTA DE PROFESSOR

Uma Conta de Professor no Scratch possibilita o acesso por professores e outros educadores a algumas funções adicionais, que o permitem gerir a participação dos alunos no Scratch, podendo criar contas de estudante, organizar projetos de seus alunos em estúdios e monitorar seus comentários.

Após acessar sua conta no Scratch, role a página, até o final, e clique em Para Educadores, conforme indicado na Figura 32.

Figura 32: Seção "Para Educadores"

A seção Scratch para Educadores possui informações sobre os contextos, níveis de ensino e áreas disciplinares em que o Scratch pode ser utilizado, além de dicas e tutoriais diversos. Nela está também disponível o Guia Curricular de Computação Criativa, um guia em inglês que contém planos, atividades e estratégias para introduzir a computação criativa no âmbito escolar.

Para solicitar sua conta, clique em Contas de Educador, indicado na Figura 33. Feito isso, clique em Solicitar Conta.

Figura 33: Solicitando uma Conta de Professor

Será necessário preencher um formulário de solicitação e pode demorar até um dia para sua conta de professor ser liberada, pois a Equipe Scratch verifica manualmente cada pedido de criação de conta pelos educadores. É importante frisar que as informações fornecidas no formulário não são compartilhadas no site.

A.3 MINHAS AULAS

Ao entrar no Scratch, já com a conta de professor habilitada, uma nova barra de informações estará disponível na parte superior da tela. Nela podem ser acessados de maneira mais rápida os recursos de educador citados anteriormente, como o Guia Curricular de Computação Criativa. Também é possível consultar as perguntas frequentes sobre contas de professor.

Daremos atenção especial às funcionalidades da seção Minhas Aulas, indicada na Figura 34. Nessa seção estão presentes diversos recursos para os professores, como abrir uma turma e administrá-la, adicionar estudantes e estúdios, entre outros. Para criar uma nova turma, basta clicar em “+ Nova Turma”, indicado na Figura 35. Após nomear a turma e dar uma breve descrição, basta clicar em Adicionar turma.

Na Figura 36, indicamos algumas configurações que o Scratch oferece para personali-

Figura 34: Minhas Aulas

Figura 35: Criando uma nova turma

zar as turmas. São elas:

(1) Ícone da turma, que pode ser alterado clicando no local indicado e selecionando uma imagem em seu computador;

(2) Descrição do projeto em que a turma está trabalhando;

(3) Função Encerrar Turma: ao clicar no local indicado a turma será encerrada, ou seja, os alunos nela matriculados não conseguirão mais visualizá-la, nem acessar as contas de estudante criadas por meio dela.

Figura 36: Personalizando a turma

Para reabrir uma turma que foi encerrada, basta acessar, no menu lateral, as Turmas Terminadas e clicar em Reabrir Turma, ao lado da turma que deseja reabrir. Quanto à matrícula dos alunos, na aba Estudantes encontramos três maneiras de adicionar alunos à turma, a primeira delas é através do botão "+ Novo Estudante", indicado na Figura 37.

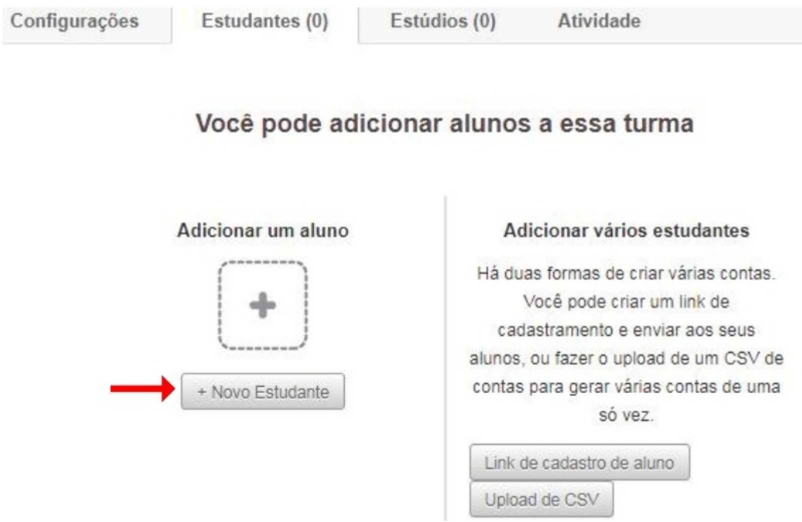


Figura 37: Adicionando estudantes à turma

Com essa função, é possível criar manualmente uma conta para o estudante. Ao clicar no botão indicado, uma janela será aberta. Nela, deve ser inserido o nome de usuário que deseja utilizar para o estudante. Estas contas serão visíveis publicamente, por isso a equipe do Scratch sugere que não sejam escolhidos nomes de usuário que contenham identificações, como nomes pessoais ou de escolas reais, por razões de segurança e privacidade. Uma vez escolhido o nome de usuário, basta clicar em Adicionar Estudante. Este procedimento deve ser repetido para cada aluno. Em seu primeiro acesso, o aluno deve usar como senha o nome de usuário do professor e, então, definir sua própria senha.

Uma outra possibilidade para criar contas é utilizar o Link de Cadastro de Aluno. Dessa forma, podem ser criadas várias contas de estudante de uma só vez. Ao clicar em Link de Cadastro de Aluno, no lado direito da Figura 37, será aberta uma janela para gerar um link de cadastro. Nela, basta clicar em Gerar. Então, envie o link gerado aos alunos da turma, através de um email ou mensagem de texto, por exemplo. Os alunos podem clicar nesse link para se registrarem em sua turma. Eles serão direcionados para uma página na qual eles criarão seu nome de usuário e senha de acesso e se matricularão na turma.

Há, ainda, uma terceira maneira de matricular os alunos, através do Upload de uma planilha CSV. CSV significa Comma Separated Values (valores separados por vírgula), e é um tipo de planilha muito utilizada para transformar grandes quantidades de dados em um arquivo único e leve. O Scratch oferece um exemplo de planilha e também mais informações sobre os arquivos CSV clicando em Upload de CSV. Até 50 alunos podem ser matriculados de uma só vez utilizando essa ferramenta. Para isso, basta fazer o download do exemplo fornecido pelo Scratch clicando em Baixar Exemplo e abrir o arquivo em um editor de planilhas em seu computador, inserindo os nomes de usuários e senhas que se deseja cadastrar nos locais indicados. Por fim, carregar o arquivo no site do Scratch, clicando em Escolher arquivo e, em seguida, em Carregar.

Uma vez que seus alunos estiverem matriculados, seus perfis poderão ser consultados na aba Estudantes. Através das Configurações da Conta, indicadas na Figura 38, o professor poderá, se achar necessário, remover o ícone do aluno. Uma outra funcionalidade é a de alteração de senha. No caso do aluno ter perdido sua senha, o professor pode, através das Configurações da Conta pedir ao aluno para mudar de senha no próximo login. A senha desse aluno será redefinida como o nome de usuário do professor. Depois que o aluno fizer o acesso, será pedido que ele escolha uma nova senha. Uma outra maneira é o professor acessar as Configurações da Conta e alterar manualmente a senha do aluno.

Figura 38: Configurações da conta do aluno

Já falamos sobre a aba Configurações e a aba Estudantes. Agora, trataremos da aba Estúdios. São nos estúdios que se encontram os projetos da turma, ou seja, tudo o que foi criado pelos estudantes matriculados nela. Para criar um novo estúdio clique em “+ Novo Estúdio de Turma”, indicado na Figura 39.

Após definir o nome e escrever uma breve descrição do estúdio, basta clicar em Adicionar Estúdio de Turma. Dentro do Estúdio, tanto alunos como professor podem adicionar projetos e comentários. O professor também pode alterar o ícone do estúdio e sua descrição a qualquer momento, assim como definir ou alterar seus Curadores, que são os alunos responsáveis pelo projeto. Caso o professor considere necessário, pode deletar comentários feitos por alunos clicando em Deletar, que aparece no lado direito de cada comentário.

Figura 39: Novo Estúdio de Turma

A.4 CRIANDO UM PROJETO

Para criar um projeto, basta clicar no botão Criar, localizado na barra azul, fixada na parte superior da tela em todo o site, e o Scratch te redirecionará para a página da Figura 40. A plataforma oferece diversas funcionalidades, porém nos ateremos somente a apresentar as ferramentas utilizadas nas atividades propostas no Capítulo 4.

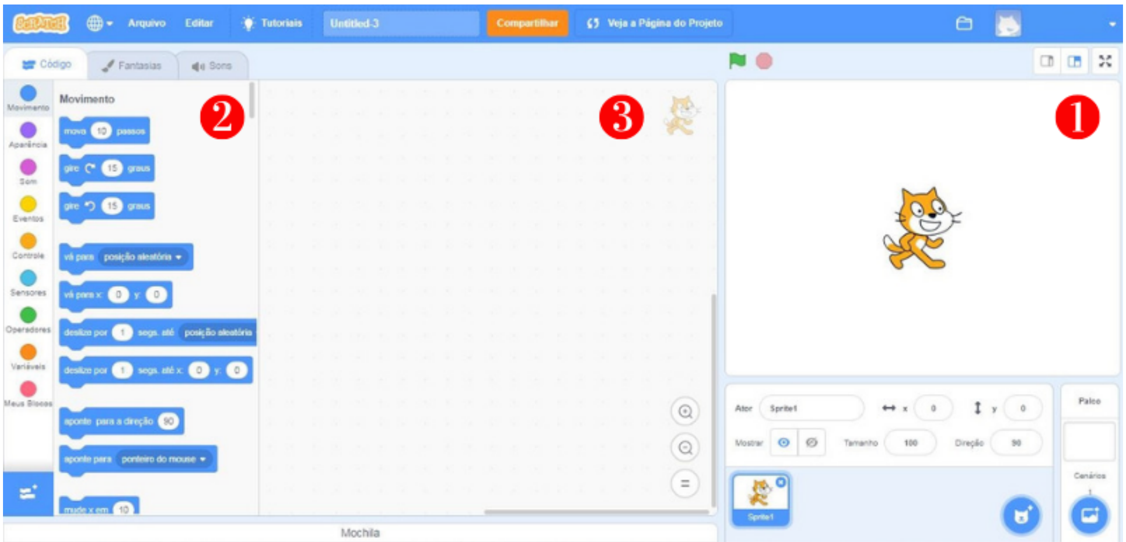


Figura 40: Interface do Scratch

A interface do Scratch é dividida em três partes: o palco (1), a paleta de blocos (2) e a área de descrição (3), esta última também chamada de área de script. O palco é onde é possível visualizar a interação dos atores e dos cenários. Neste trabalho, apenas a título de curiosidade, apresentaremos como adicionar mais atores em cena ou alterar o ator inicial, assim como os procedimentos para alterar o cenário. O palco possui um sistema de coordenadas cartesianas, gerado por dois eixos perpendiculares entre si, denominados x e y. Tais eixos não são visíveis, mas entre as opções de cenários há um plano cartesiano, conforme ilustrado na Figura 41, e posteriormente serão detalhados os passos para adicioná-lo. A origem é o centro do palco e a unidade de medida é o passo.

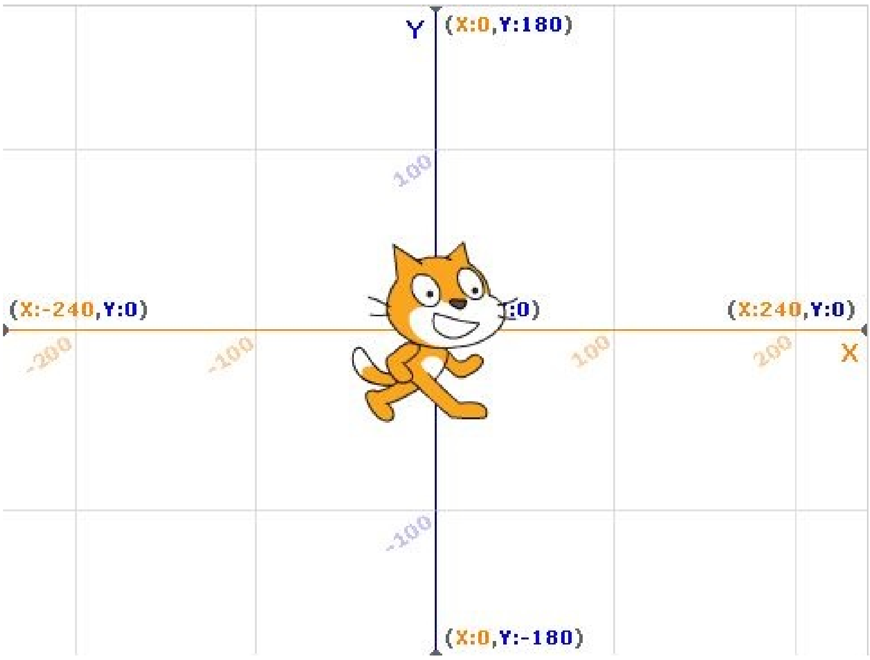


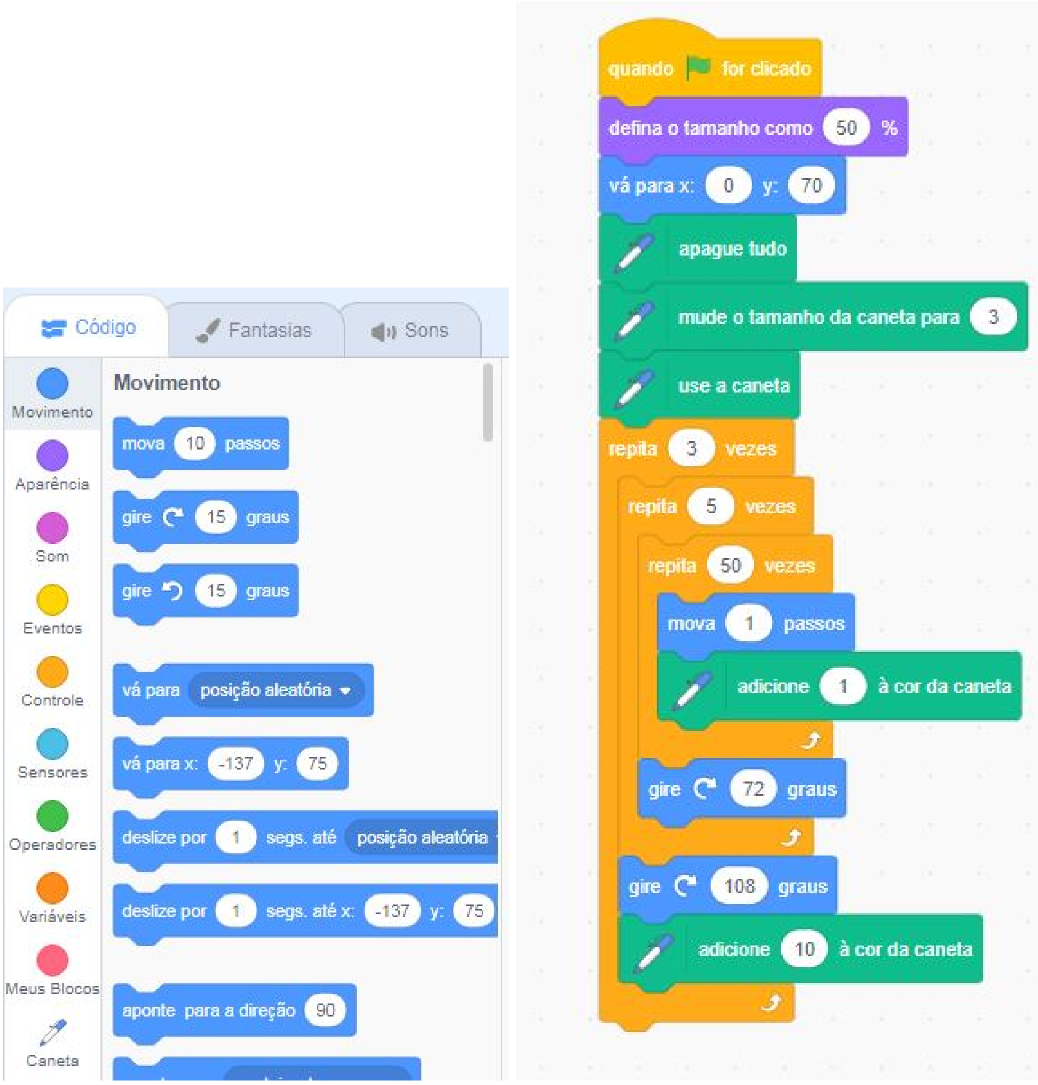
Figura 41: Palco

A paleta de blocos é organizada em categorias (movimento, aparência, som...), agrupando os blocos por tipo de funcionalidade, em que cada categoria possui blocos de uma cor diferente, da maneira como é ilustrado na Figura 42(a). Ao clicar em uma das categorias, são mostrados os blocos disponíveis da modalidade selecionada. Além disso, também é possível criar seus próprios blocos ou acessar outras categorias através do botão Adicionar uma Extensão, localizado no canto inferior esquerdo da tela. Uma das categorias que utilizaremos nas atividades será acessada através desse recurso. Neste trabalho, nos concentramos em quatro categorias: Movimento, Caneta, Controle e Eventos, essenciais para a construção e compartilhamento do projeto.

A área de descrição é o local para onde podem ser arrastados os blocos, de maneira a programar as ações do ator ou do cenário. Os blocos podem ser agrupados, conforme suas especificidades, indicadas pelos diferentes formatos de seus encaixes. A Figura 42(b) representa a área de descrição. Note que estamos utilizando na imagem blocos de Eventos, Aparência, Movimento, Caneta e Controle, representados nas cores amarelo, roxo, azul, verde e laranja, respectivamente.

A programação da Figura 42(b) se inicia com um bloco de Evento, que indica que todas as ações programadas por meio dos blocos encaixados nele terão início quando o ícone representado pela bandeira verde, acima do palco, for clicado, este será o evento inicial desta programação. Logo abaixo dele está um bloco de Aparência, que determina que a figura do ator

Figura 42: Paleta de blocos e área de descrição



(a) Paleta de blocos (b) Área de descrição

programado mudará de tamanho, passando a medir 50% de seu tamanho original.

A seguir, vemos um bloco de Movimento, indicando que o ator deve ir para a coordenada $(x, y) = (0, 70)$. Na sequência, vemos três blocos da ferramenta Caneta, o primeiro indica que tudo o que foi desenhado com a caneta anteriormente será apagado, o segundo altera o tamanho da caneta e o terceiro determina que, a partir desse momento, conforme o ator se movimentar pelo palco, deixará seu caminho traçado com a caneta.

É importante ressaltar que, ao indicar com o bloco "apague tudo" que desejamos apagar o que foi feito anteriormente, estamos falando de outra sequência de programação, posto que a sequência do exemplo se iniciou com o bloco de Evento "quando a bandeira for clicada" e até o bloco "apague tudo" nada havia sido desenhado com a caneta nesta sequência (nosso ator apenas mudou de tamanho e foi para uma determinada posição). Cada bloco de Evento (blocos amarelos) inicia uma sequência de programação, mas um mesmo projeto pode ter várias sequências, uma para cada evento diferente.

Exemplo A.1. *A programação da Figura 43 determina que o ator mova 10 passos quando a bandeira for clicada. Essa é uma sequência de programação, pois se inicia com o bloco de Evento "quando a bandeira for clicada".*

Porém, na mesma área de descrição vemos outra sequência de programação, que determina que o ator gire $15°$ *no sentido horário quando a letra P, do teclado, for pressionada. Ou seja, são duas ações, programadas separadamente, cada uma se iniciando com seu respectivo bloco de Evento, porém em um mesmo projeto.*

Dessa forma, ao compartilhar o projeto, pode-se interagir com ele através das ações de clicar sobre a bandeira e/ou pressionar a tecla P do teclado.

Figura 43: Exemplo de programação com mais de um Evento

Retornando à Figura 42(b), vemos que os próximos blocos, na cor laranja, são blocos de Controle que tem a função de repetição. Note que a maneira como eles se encaixam é diferente dos demais. Isso se dá pois esses blocos indicam que as ações representadas pelos blocos encaixados em seu interior devem se repetir uma determinada quantidade de vezes.

Exemplo A.2. *Na Figura 44, programamos o ator para que ele use a caneta e na sequência encaixamos o bloco "repita 50 vezes". Em seu interior temos uma programação indicando que o ator deve mover um passo e alterar a cor da caneta. Com a repetição, teremos que o ator moverá 50 passos e, a cada passo dado, alterará a cor da caneta. Ou seja, por 50 vezes ele repetirá a programação contida dentro do bloco repita.*

Com exceção dos blocos de Evento, qualquer dos demais blocos pode ser inserido no interior de um bloco de repetição, até mesmo outro bloco de repetição, como é possível verificar na Figura 42(b). Observe que no interior do bloco "repita 5 vezes" temos o bloco "repita 50 vezes", e consequentemente tudo o que está em seu interior, e um bloco de Movimento, que indica que o ator deve girar $72°$ no sentido horário. Ao ser executada, a programação da Figura 42(b) gera o resultado que pode ser conferido na Figura 45.

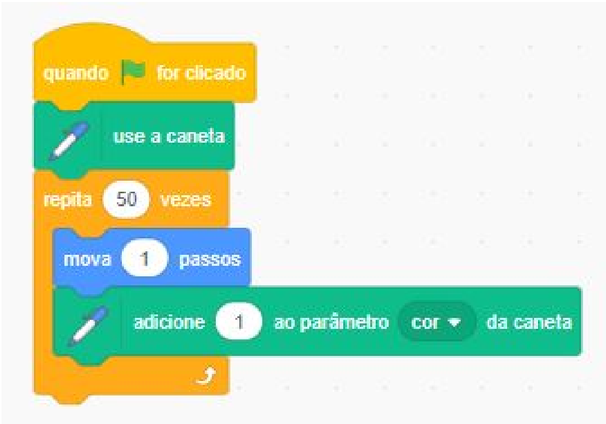


Figura 44: Exemplo usando o bloco de repetição

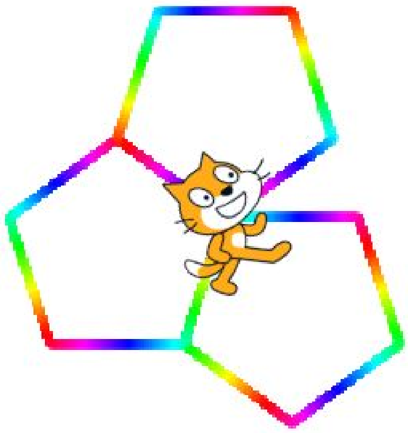


Figura 45: Exemplo de programação

O Scratch salva automaticamente cada alteração feita. É possível alterar o nome de seu projeto na parte superior da tela (Figura 46). Como padrão, inicialmente ele se chamará "Untitled". Para acessar um projeto anteriormente iniciado, basta clicar no ícone que contém uma pasta, chamado Minhas Criações, que se encontra na barra superior azul, presente em todo o site. Após finalizada a programação, existe a opção de compartilhar, ou seja, tornar o projeto visível para toda a comunidade Scratch. É importante ressaltar que para adicionar um projeto ao Estúdio de Turma, antes é necessário compartilhá-lo com a comunidade, assim o projeto pode ficar visível para qualquer usuário do Scratch. Para isso, basta clicar no botão Compartilhar, na parte superior da tela.

É possível conferir projetos feitos por outros usuários do Scratch acessando a página inicial do site. Lá estão presentes os projetos e estúdios em destaque, ou seja, aqueles que foram mais visitados nos últimos dias. Além disso, é possível também pesquisar por um tema específico sobre o qual deseja encontrar um projeto ou estúdio, como, por exemplo, Geometria ou Matemática. O site pesquisará entre os projetos do mundo todo.

Figura 46: Alterando o nome do projeto

A.5 O ATOR E O PALCO

No Scratch, denomina-se ator o personagem que executa as ações conforme a programação feita. Ao iniciar seu projeto, o ator disponibilizado será o Sprite, um gato amarelo que é uma das marcas registradas do Scratch. É possível alterar a aparência do ator na aba Fantasias, indicada na Figura 47.

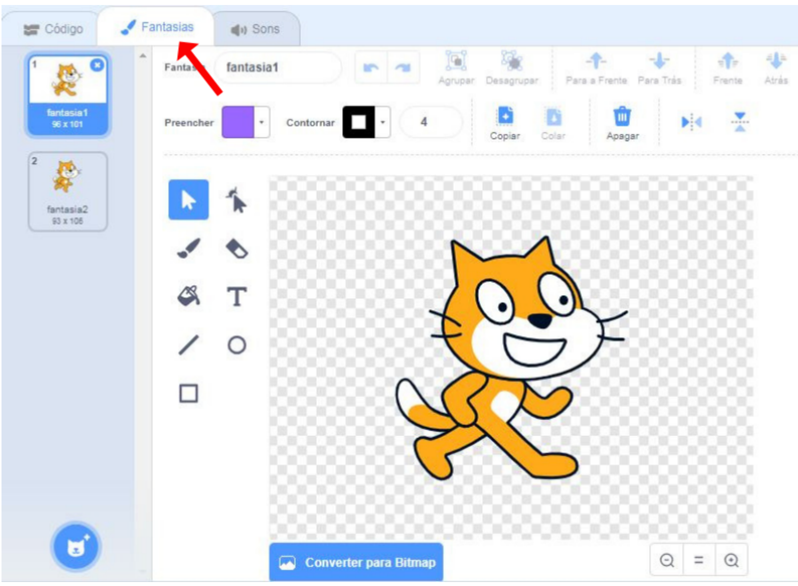


Figura 47: Aba Fantasias

No menu estão disponíveis diversas ferramentas que permitem espelhar, remodelar e colorir o ator, por exemplo. Sugerimos que o professor navegue pelos itens e explore as diversas possibilidades. Ainda é possível selecionar uma nova fantasia, substituindo seu ator por outro personagem. Para isso, clique em uma das opções no botão Escolher Fantasia, indicadas na Figura 48.

São cinco as maneiras de se adicionar uma nova fantasia, conforme mostra a Figura 48. De baixo para a cima temos:

1. **Escolher fantasia:** permite a seleção de uma das centenas de opções disponíveis, orga-

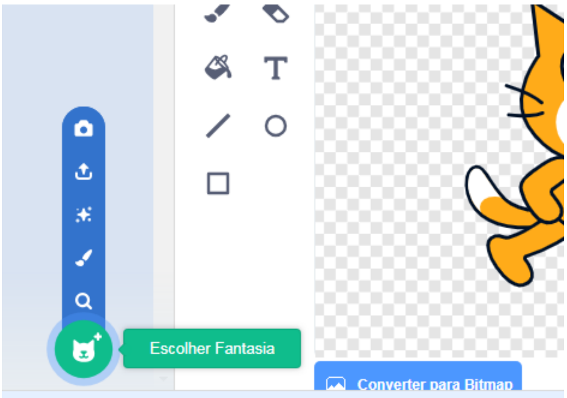


Figura 48: Escolher Fantasia

nizadas em categorias (Animais, Letras, Pessoas...);

2.**Pintar:** através de uma série de ferramentas, fornece a possibilidade de construção de uma nova fantasia;

3.**Surpresa:** escolhe automaticamente uma fantasia da galeria;

4.**Carregar fantasia:** ferramenta através da qual é possível carregar um arquivo JPEG ou PNG de seu computador, além de editá-lo, adicionando figuras ou fazendo recortes, por exemplo;

5. **Câmera:** solicita autorização para ligar a câmera do computador e permite que o usuário tire uma foto e a utilize como fantasia.

Também é possível adicionar novos atores à cena, sendo cada um deles programado separadamente. Para isso, basta selecionar uma das opções em Selecione um Ator, indicadas na Figura 49. Estas ferramentas são muito parecidas com as explicadas no parágrafo anterior, sendo possível escolher um novo ator na galeria, pintar, sortear um ator surpresa ou carregar uma imagem do computador. Ao adicionar um novo ator, ele aparecerá no centro do palco. É possível mover qualquer um dos atores clicando sobre eles e arrastando-os para outra posição no palco.

Abaixo do palco ficam indicados os atores do projeto. Ao clicar sobre um deles, um contorno azul aparecerá em volta do ícone que o representa e informações como seu nome, as coordenadas em que se encontra o ator naquele momento, sua direção, tamanho e ainda a opção Mostrar, que nos permite definir se o ator será exibido ou não. Uma vez que clicamos no ator, a área de descrição se altera, exibindo sua programação. Dessa forma, é possível programar cada ator de maneira independente. Para excluir um dos atores, basta clicar no “X” em azul, no canto superior de seu ícone.

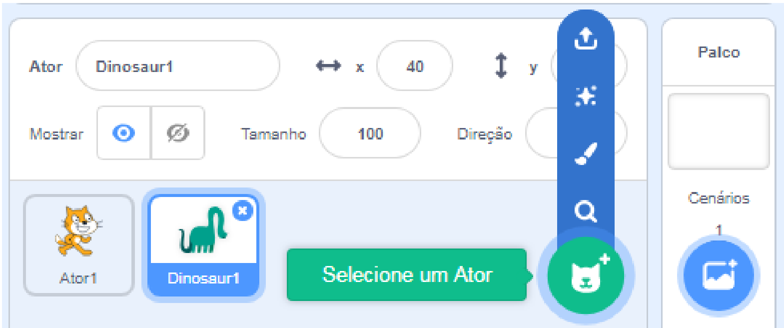


Figura 49: Novo Ator

Exemplo A.3. *Na Figura 50, vemos uma situação em que são utilizados dois atores. À esquerda, quando clicamos sobre o Ator 1, o gato Sprite, sua programação é mostrada na área de descrição. À direita, quando clicamos sobre o Ator 2, o dinossauro, podemos ver e editar sua programação.*

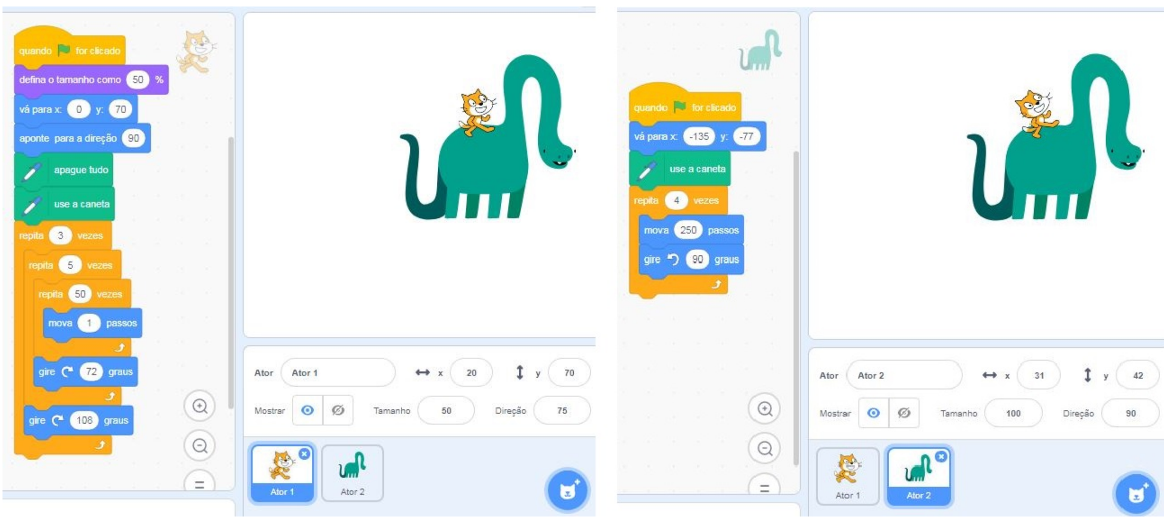


Figura 50: Programando dois atores

O palco é composto pelos panos de fundo da ação, que são imagens que representam cenários. Inicialmente, seu palco será uma tela branca. As ferramentas para customizar o palco são muito parecidas com as dos atores.

Ao lado dos ícones dos atores, é possível visualizar um outro ícone, dessa vez representando o palco, indicado na Figura 51 pelo número (1). Ao clicar no local indicado pelo número (1), será disponibilizada sua área de descrição e também a aba Cenários, destacada na Figura 51 pelo número (2). Nela, é possível construir um cenário ou customizar um já existente, assim como eleger um cenário da biblioteca, carregar a partir de um arquivo ou usar uma imagem da câmera.

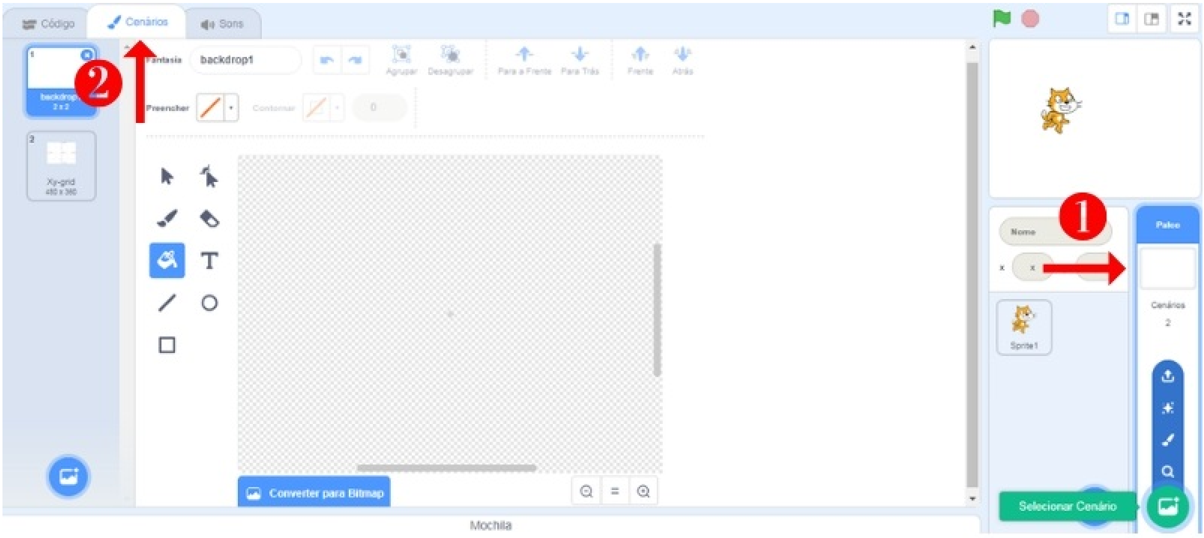


Figura 51: Palco

Exemplo A.4. *Para carregar o cenário que contém os eixos, basta clicar em Selecionar Cenário, no canto inferior direito, conforme é possível observar na Figura 51. Uma página com diversas opções de cenário será exibida. O que contém os eixos se chama Xy-grid. O resultado será um cenário como o da Figura 41.*

Ao adicionar um novo cenário, ele será exibido no palco e um ícone que o representa aparecerá na aba Cenários (número 2 da Figura 51). É possível retornar ao cenário anterior clicando sobre seu ícone na aba Cenários. Para voltar a programar o ator, basta clicar sobre seu ícone no menu lateral direito.

A.6 PRINCIPAIS BLOCOS

Ao clicar sobre os ícones de um dos atores ou do pano de fundo, a área de descrição se altera, exibindo a programação do item selecionado. A princípio, essa área estará em branco. A programação é feita utilizando a paleta de blocos, selecionando-os e arrastando-os para a área de descrição. Para removê-los, basta arrastá-los de volta para a paleta de blocos.

Como comentado anteriormente, este trabalho irá focar em quatro das categorias de blocos. São elas: Movimento, Eventos, Controle e Caneta, visto que tais categorias serão utilizadas nas atividades propostas no Capítulo 4. Inicialmente, apresentaremos os blocos de Eventos, pois tratam-se de blocos essenciais para a interação com o projeto após seu compartilhamento.

Os blocos de Eventos indicam quais comandos determinam cada ação do personagem. Sua programação sempre deve se iniciar com um bloco de Evento, do contrário, ao compartilhar o projeto, seu ator não realizará os comandos programados.

Para selecionar um bloco, basta arrastá-lo para a área de descrição. Note que os blocos de Evento possuem um encaixe apenas na parte de baixo pois, como dito, esse tipo de bloco sempre inicia uma programação.

Há blocos com a ação já determinada, que não podem ser alterados, como por exemplo o bloco “quando este ator for clicado”, que determina que o evento “clicar sobre o ator” marcará o início de uma ação. Porém, blocos como os que aparecem na Figura 52 podem ser personalizados. Caso haja uma caixa de seleção, basta clicar e escolher entre as opções (à esquerda na Figura 52). E quando o bloco contiver uma caixa de texto arredondada (à direita na Figura 52), pode-se digitar um valor exclusivamente numérico em seu interior, por isso, as chamaremos de “caixas numéricas”. Esse tipo de caixa de texto aparece em blocos de diversas categorias.

O bloco da direita da Figura 52 indica que a ação deve se iniciar quando o tempo marcado no cronômetro for maior que 10 segundos, nele o valor 10 foi digitado e pode ser alterado. O cronômetro é um bloco da categoria Sensores, que não será utilizada nas atividades do Capítulo 4, mas que pode ser explorada pelo professor em outras atividades. Suas funções não diferem muito das que serão exploradas neste tutorial.

Figura 52: Blocos de eventos

Já os blocos de Movimento são responsáveis por alterar a localização de seu ator no palco, o que pode ser feito de diversas maneiras, como demonstrado no exemplo a seguir:

Exemplo A.5. *Os blocos da Figura 53 indicam que o ator mova 10 passos para a frente, fique parado por 1 segundo, em seguida, mova 40 passos para trás, fique parado por mais 1 segundo e se desloque para o ponto de coordenadas* $x = 27$ *e* $y = 0$*.*

O bloco que faz com que o ator fique parado por alguns segundos é um bloco de Controle. Todos os valores dentro das caixas numéricas foram digitados, indicando os movimentos desejados.

Figura 53: Exemplo utilizando blocos de Movimento

Ainda na categoria Movimento temos dois blocos que serão muito utilizados nas atividades propostas, que são os blocos indicados na Figura 54. Esses blocos fazem com que o ator gire um determinado número de graus para sua direita ou esquerda (sentido horário ou anti-horário, respectivamente), detalhe que pode ser observado no sentido da seta que ilustra o bloco.

Exemplo A.6. *Na Figura 54, temos um exemplo de programação utilizando blocos de Movimento. Ela se inicia com o bloco de Eventos que indica que a ação se iniciará quando a tecla espaço do teclado (barra de espaço) for pressionada. A caracterização dessa ação vem na sequência, com os blocos azuis, de Movimento. O primeiro indica que o ator mova 100 passos, depois vá para a coordenada* $(x, y) = (12, 15)$, *então gire* 90° *no sentido horário e, por fim, mova mais 10 passos.*

Figura 54: Exemplo de programação

No Scratch, como em um quebra-cabeças, as peças que permitem encaixe têm formatos complementares. Dessa forma, podemos encaixar um bloco de Movimento abaixo de um de Eventos, por exemplo, ou, até mesmo, abaixo de outro bloco de Movimento. Temos, ainda, nessa seção, três blocos de formato arredondado, com uma caixa de seleção ao lado, indicados pelo número 1 na Figura 55. Esses blocos podem ser encaixados dentro de uma caixa numérica, conforme ilustrado na Figura 55, com o número 2, onde o bloco "posição x" foi encaixado dentro do bloco "mova". Em outras seções há, ainda, blocos hexagonais que se encaixam dentro de outros blocos, que possuem um campo nesse formato.

Por fim, ao marcarmos uma das caixas de seleção ao lado dos blocos de "posição" e "direção", seu valor será exibido em um canto do palco (número 3 da Figura 55).

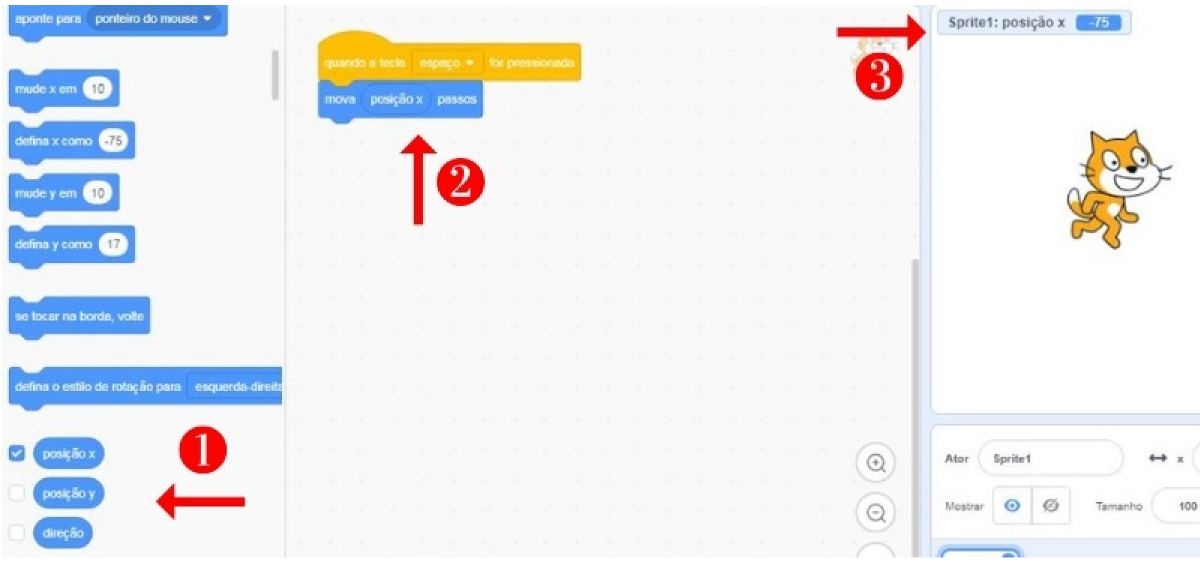


Figura 55: Blocos de posição e direção

Exemplo A.7. *Na Figura 56, vemos uma aplicação das funcionalidades descritas no parágrafo anterior. Ela se inicia, como é de se esperar, com um bloco de Eventos, indicando o marco inicial da programação (quando a tecla espaço for pressionada no teclado). A seguir, temos o bloco "mova", em cuja caixa numérica não foi digitado um valor, mas sim encaixado o bloco "posição x". Assim, o ator moverá o número de passos equivalente à posição x do ator no momento em que a tecla espaço for pressionada. Na sequência, temos um bloco de Controle, identificado pela cor laranja. Ele realiza uma ação com base em uma condição, dizendo que se o ator tocar a borda da tela, então deve ir para a posição* $(1,0)$*. Note que o bloco possui um encaixe hexagonal, no qual foi inserido outro bloco, de formato complementar.*

Entre os blocos da categoria Controle, nos concentraremos no bloco "repita", muito utilizado nas atividades propostas neste texto. Note na Figura 57 que ele possui um formato diferente dos blocos vistos até o momento. Isso porque ele deve ser encaixado ao redor de

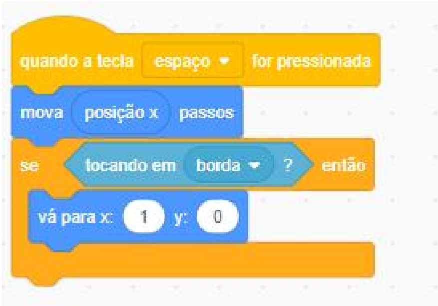


Figura 56: Exemplo

outros blocos, indicando a programação que desejamos que se repita. O número de repetições é definido pelo valor digitado na caixa numérica.

Exemplo A.8. *Na Figura 57, ambas as programações são equivalentes. Nelas, os dois primeiros blocos se repetem, indicando o evento inicial (quando a tecla espaço for pressionada no teclado) e que o ator deve utilizar a caneta. A seguir, na sequência programada à esquerda, observe que os comando pedem para que o ator mova 100 passos, depois gire* 120° *no sentido horário, então mova mais 100 passos e gire mais* 120° *no sentido horário para, por último, andar novamente 100 passos e girar novamente* 120° *no sentido horário. Não é difícil perceber que a utilização do bloco de repetição, na sequência programada à direita, simplifica a programação, além de utilizar um número menor de blocos. Nesse exemplo, o ator constrói um triângulo equilátero de lado 100.*

Por fim, a caneta é uma extensão, que deve ser adicionada aos blocos para ser utilizada. Para tal, basta clicar em Adicionar uma Extensão, como indicado na Figura 58, abaixo dos códigos dos blocos e selecionar a caneta. Essa extensão permite que os atores desenhem enquanto andam pelo palco. Ao arrastar o bloco Use a Caneta para sua programação, o ator irá utilizá-la até que o bloco Levante a Caneta seja acionado. Ainda é possível alterar a cor e a espessura do traço da caneta, por exemplo.

Exemplo A.9. *Na Figura 59, o bloco inicial indica que a ação começa quando o ator em questão for clicado. A seguir, temos o bloco "use a caneta", marcando em qual momento o ator começará a utilizar a caneta enquanto se movimenta pelo palco e um bloco que define a cor de caneta a ser utilizada. Para alterar a cor, basta clicar no campo, dentro do próprio bloco, que indica a cor atual, na Figura com a cor vermelha, e selecionar entre as diversas opções. Na sequência, temos um bloco de repetição, indicando que o ator mova 360 passos, de modo que a cada passo gire* 1° *no sentido horário. Esse é um artifício que pode ser utilizado no Scratch para construir figuras que se aproximam visualmente de uma circunferência. Para finalizar, a programação indica, com o bloco "levante a caneta", que o ator pare de usar a*

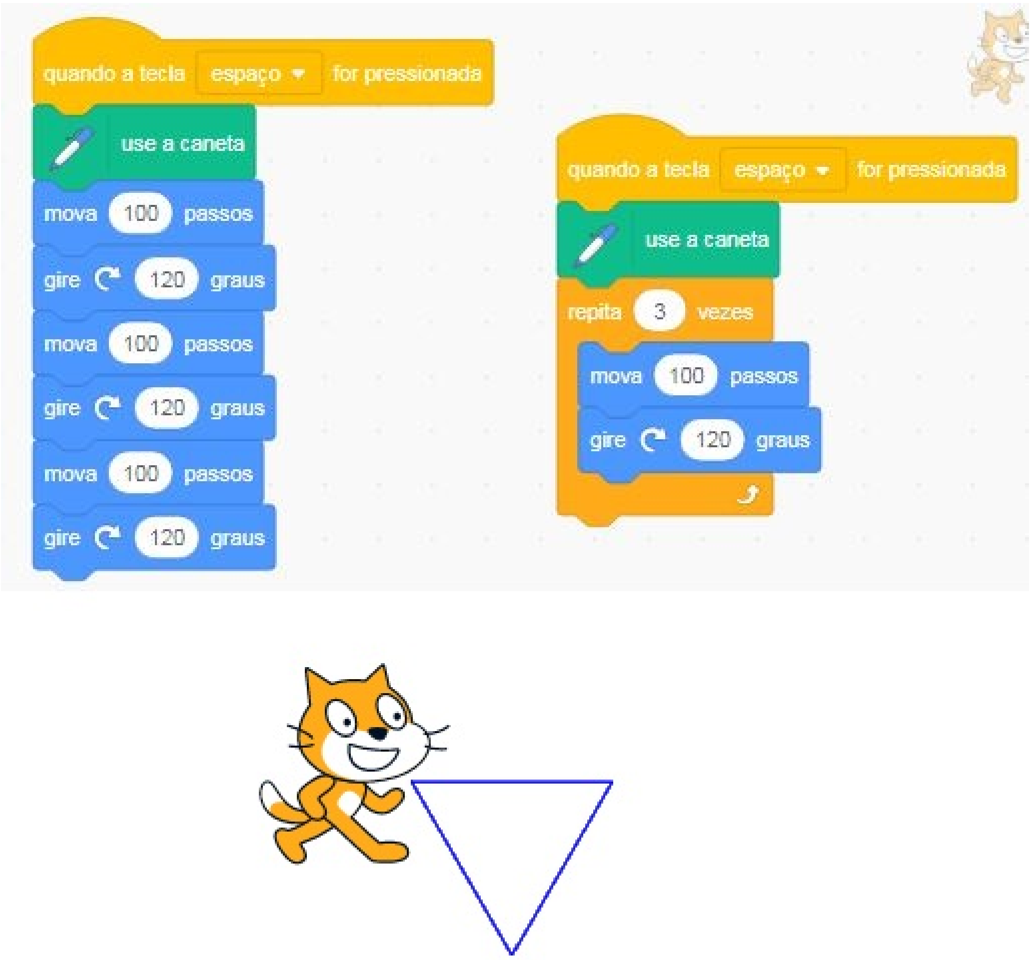


Figura 57: Utilizando o bloco repita

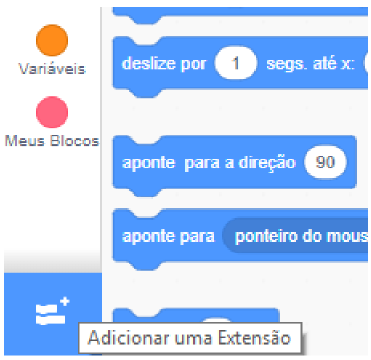


Figura 58: Adicionar uma Extensão

caneta nesse momento e vá para a coordenada $(0,0)$.

Existem ainda outros blocos interessantes e versáteis, que não serão utilizados nas atividades propostas neste trabalho. Porém, sugerimos que o professor acesse o Scratch e os explore. Dessa maneira, poderá usar sua criatividade para desenvolver suas próprias atividades, indo além do que lhe foi proposto no Capítulo 4, e que desenvolva com seus alunos outros

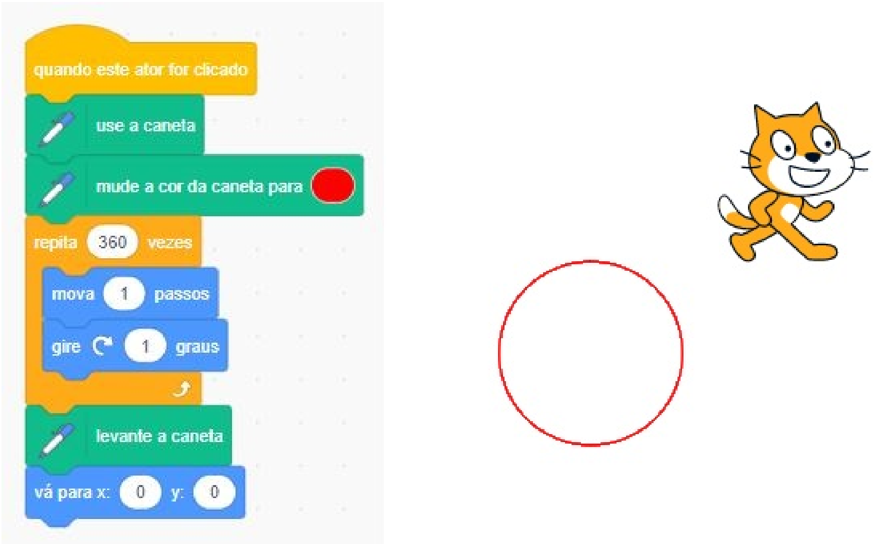


Figura 59: Exemplo de utilização da Caneta

conhecimentos além da Geometria Plana.

Uma dica para facilitar as tentativas de construções é preparar uma programação conforme a da figura 60 em um canto da área de descrição. Dessa forma, basta clicar sobre ela para que o ator volte à posição inicial, apagando o que foi desenhado utilizando a caneta. É interessante passar essa dica também aos alunos, quando forem explorar ou fazer as atividades no Scratch. Além disso, ao clicar com o botão auxiliar (botão direito do mouse) sobre os blocos, três opções são apresentadas: duplicar, que copia os blocos selecionados; comentar, que permite que um comentário seja adicionado; e apagar bloco, que apaga os blocos selecionados.

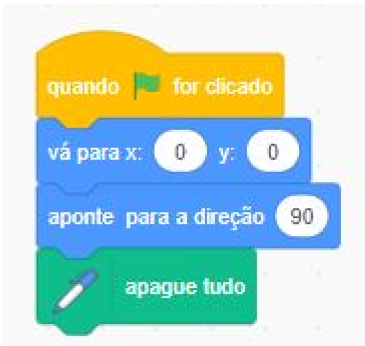


Figura 60: Voltando o ator à posição inicial

APÊNDICE B – GABARITO DAS ATIVIDADES

B.1 ATIVIDADE 1

O aluno deverá fazer o cadastro no Scratch conforme a seção A.1 - Criando uma conta, do Apêndice A - Tutorial do programa Scratch.

Em seguida, matricular-se na turma criada pelo professor. Esta matrícula pode ser feita utilizando um link de cadastro, conforme indicado na seção A.3 - As minhas turmas, do Tutorial do programa Scratch, constante no Apêndice A.

A intenção dessa atividade é familiarizar o aluno com o Scratch, portanto é interessante que ele fique livre para explorar a linguagem de programação, utilizando principalmente os Códigos de Movimento, Aparência, Caneta e Controle. O professor também deve instruir sobre os principais movimentos, como o mova e o gire, que serão muito utilizados nas atividades seguintes.

B.2 ATIVIDADE 2

1.Após programar o ângulo, sua área de Script estará conforme a Figura 61. Ao clicar sobre os blocos, seu ator irá agir conforme a programação.

Figura 61: Ator formando um ângulo

2.Conforme Figura 61, os movimentos utilizados são:

(a)Use a caneta;

(b)Mova 100 passos (pode ser outra quantidade de passos);

(c)Gire 60 graus (pode ser tanto no sentido horário, como anti-horário);

(d)Mova 100 passos (pode ser outra quantidade de passos, inclusive diferente do primeiro segmento desenhado).

3.O ângulo terá 135°.

4.Devemos inserir o valor 120°. Os valores representam ângulos suplementares.

5.Espera-se que o aluno preencha a tabela como a seguir:

Medida do ângulo desejado	Valor informado no bloco *gire*
30°	**150°**
45°	**135°**
90°	**90°**
53°	**127°**

B.3 ATIVIDADE 3

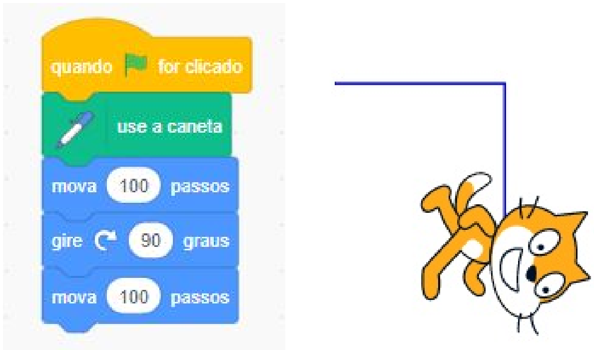


Figura 62: 1. Um ângulo reto

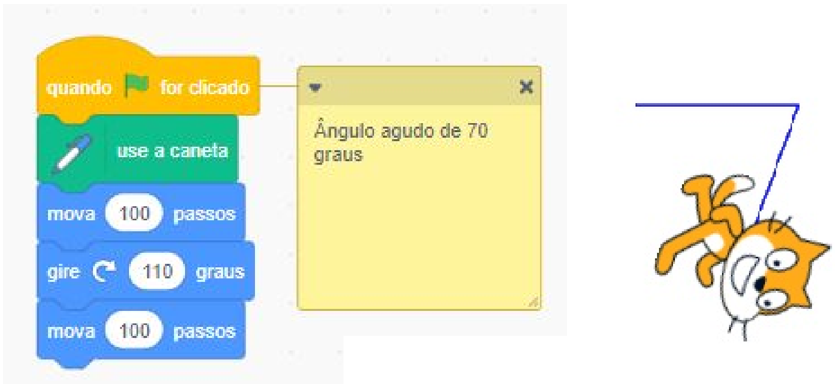


Figura 63: 2. Um ângulo agudo

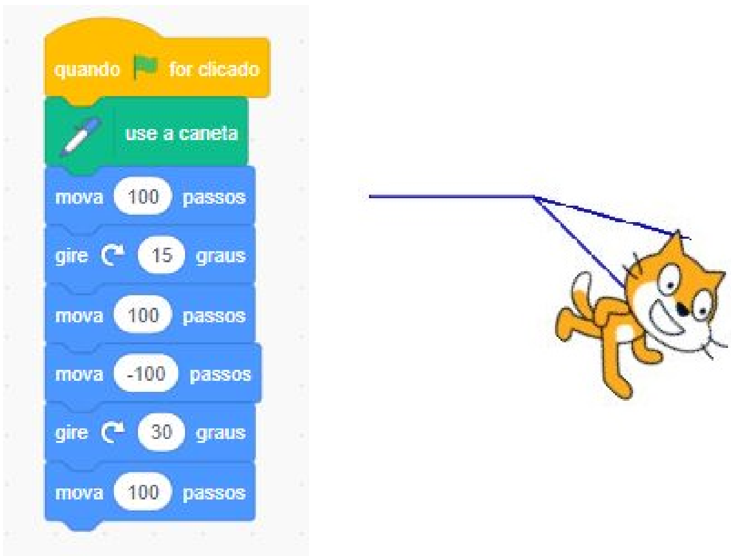


Figura 64: 3. Ângulos adjacentes

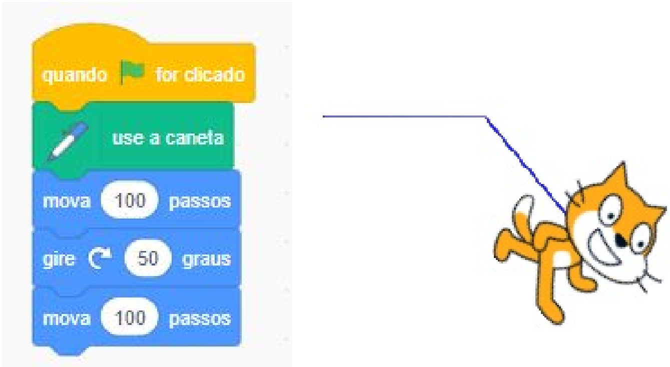


Figura 65: 4. Um ângulo obtuso

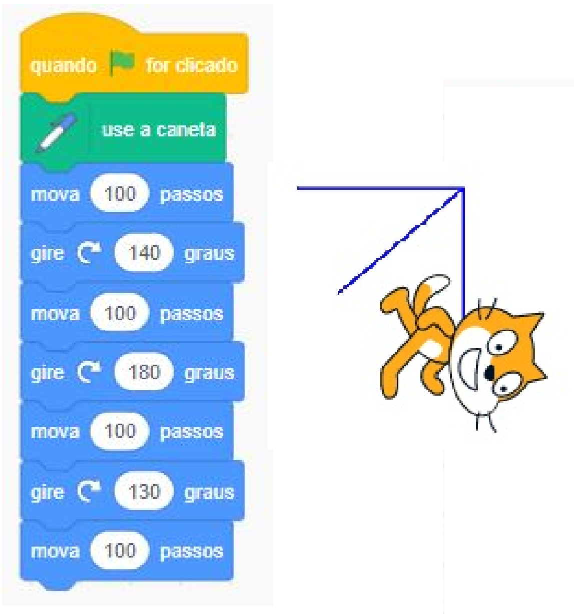


Figura 66: 5. Ângulos complementares

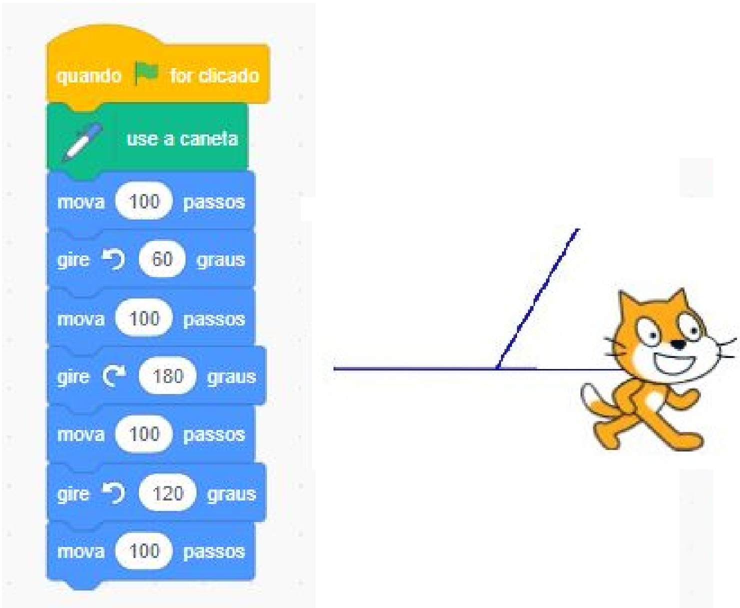


Figura 67: 6. Ângulos suplementares

B.4 ATIVIDADE 4

São várias as possibilidades, a ideia da atividade é que o aluno crie estratégias para tentar construir o polígono dado e, com isso, desenvolver habilidades e conhecimentos em Geometria de forma dedutiva. Uma possível solução está na Figura 68.

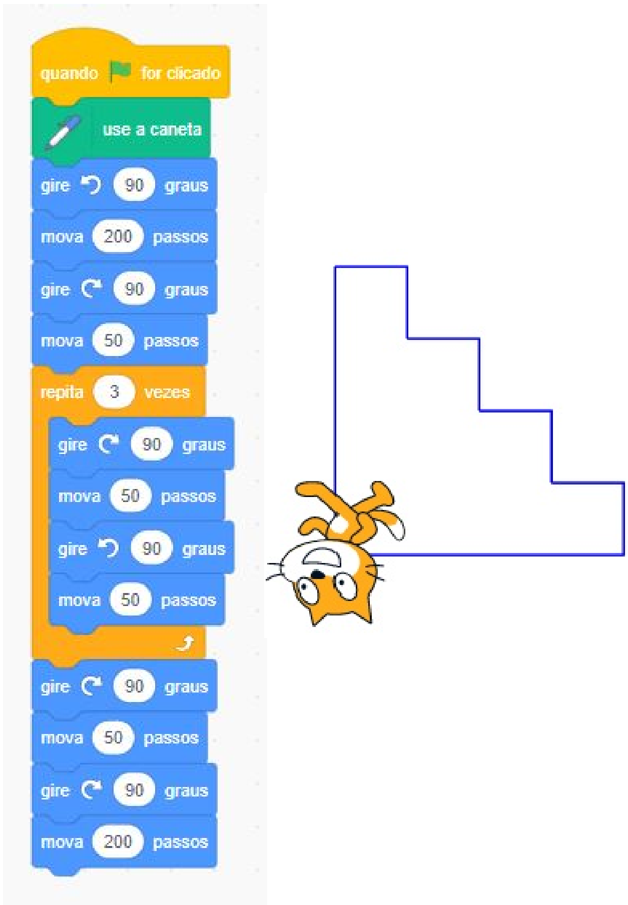


Figura 68: Construindo o polígono dado

B.5 ATIVIDADE 5

1.O valor foi de 180°, pois os três ângulos formaram um ângulo raso.

2.A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180°.

B.6 ATIVIDADE 6

O aluno deverá recortar os polígonos como indicados abaixo. Dessa forma, pode perceber quantos triângulos compõem cada um deles, de maneira que a soma dos ângulos internos do polígono será a soma dos ângulos internos dos triângulos que o compõem.

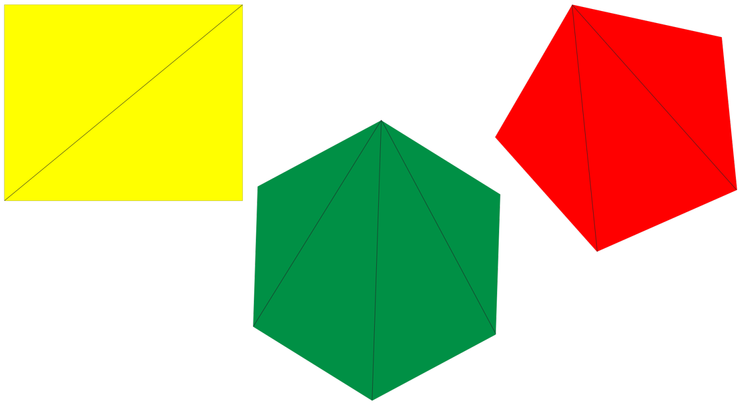


Figura 69: Decompondo os polígonos em triângulos

Após preenchida, a tabela ficará da seguinte maneira:

Polígonos	Nº de lados	Nº de triângulos em que foi dividido	Soma dos ângulos internos
Triângulo	**3**	**1**	$\mathbf{1 \cdot 180^\circ}$
Quadrilátero	**4**	**2**	$\mathbf{2 \cdot 180^\circ}$
Pentágono	**5**	**3**	$\mathbf{3 \cdot 180^\circ}$
Hexágono	**6**	**4**	$\mathbf{4 \cdot 180^\circ}$

Espera-se que o aluno siga o mesmo raciocínio para responder à questão 5, percebendo em quantos triângulos irá se decompor cada um dos polígonos em questão.

É fácil concluir que um polígono convexo de **n** lados poderá ser decomposto em $(n-2)$ triângulos, e a soma de seus ângulos internos será $S_i = (n-2) \cdot 180^\circ$.

B.7 ATIVIDADE 7

Polígonos	Número de lados	Número de triângulos em que foi dividido	Soma dos ângulos internos	Medida de cada ângulo interno
Triângulo equilátero	**3**	**1**	$\mathbf{1 \cdot 180^\circ}$	$\mathbf{60^\circ}$
Quadrado	**4**	**2**	$\mathbf{2 \cdot 180^\circ}$	$\mathbf{90^\circ}$
Pentágono regular	**5**	**3**	$\mathbf{3 \cdot 180^\circ}$	$\mathbf{108^\circ}$
Hexágono regular	**6**	**4**	$\mathbf{4 \cdot 180^\circ}$	$\mathbf{120^\circ}$
Decágono regular	**10**	**8**	$\mathbf{8 \cdot 180^\circ}$	$\mathbf{144^\circ}$
Polígono regular qualquer	$\mathbf{n}$	$\mathbf{n-2}$	$\mathbf{(n-2) \cdot 180^\circ}$	$\mathbf{\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}}$

Ao final, a programação ficará conforme indicado a seguir. Neste momento, pode-se indicar aos alunos que utilizem as ferramentas de *controle*, como a *repita*, utilizadas nas Figuras.

Figura 70: (a) Triângulo equilátero

Figura 71: (b) Quadrado

Figura 72: (c) Pentágono regular

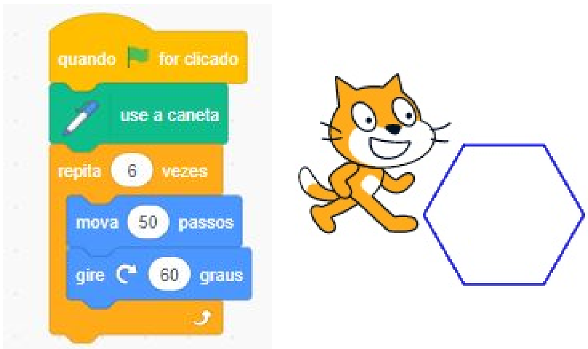


Figura 73: (d) Hexágono regular

B.8 ATIVIDADE 8

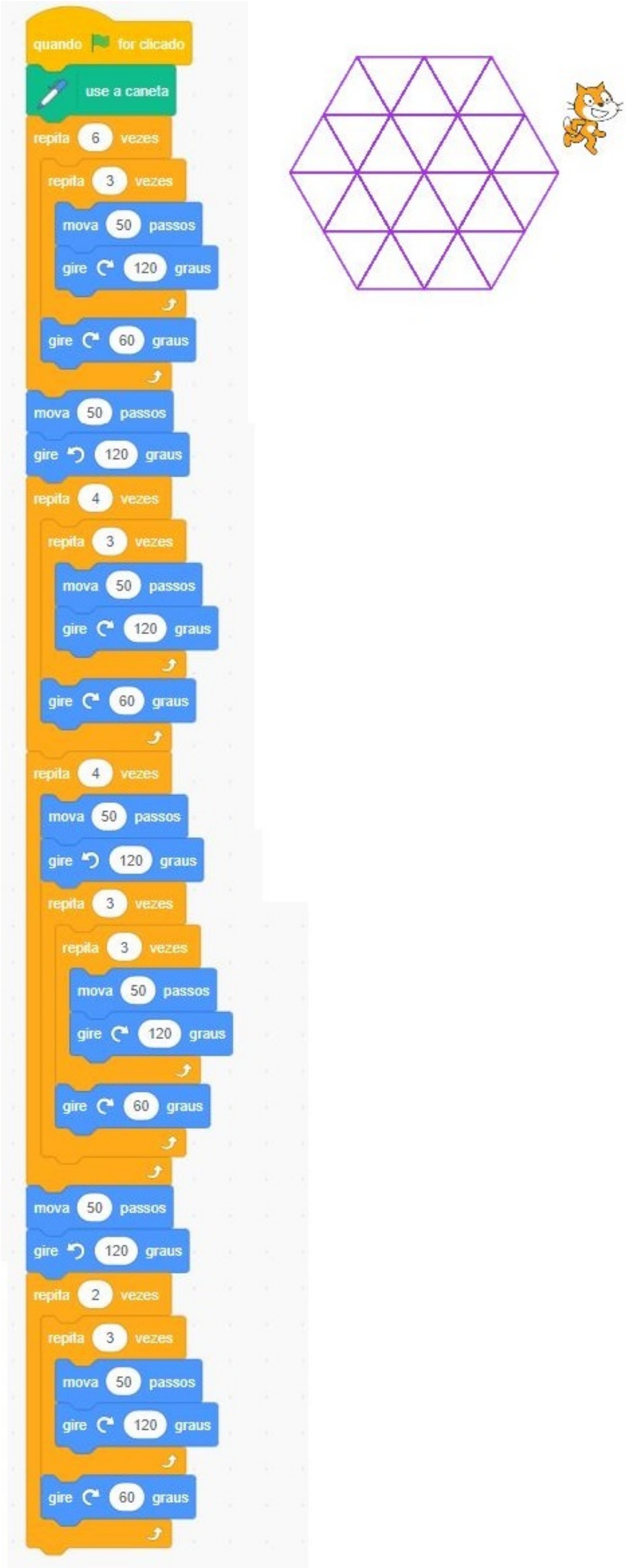


Figura 74: (a) Triângulos equiláteros

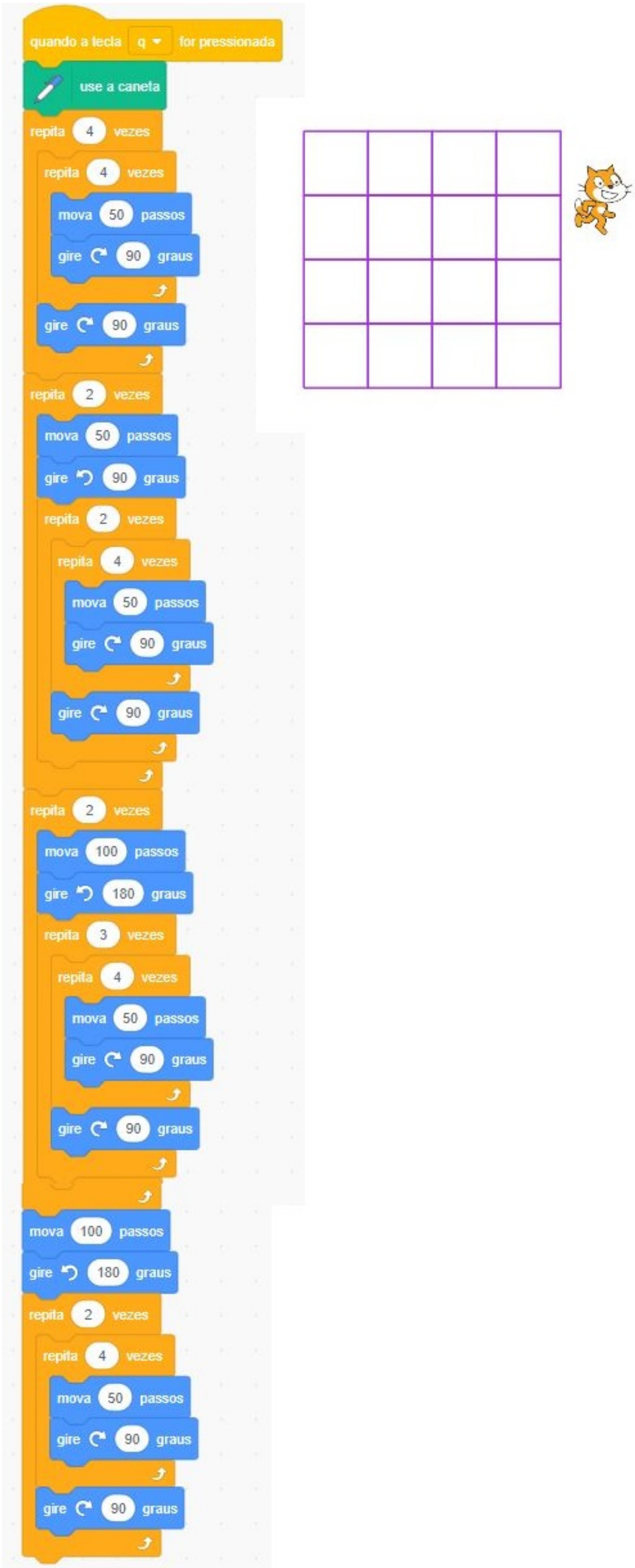


Figura 75: (b) Quadrados

No caso dos pentágonos, os alunos devem observar, conforme a Figura 76, que não é possível realizar a pavimentação desejada.

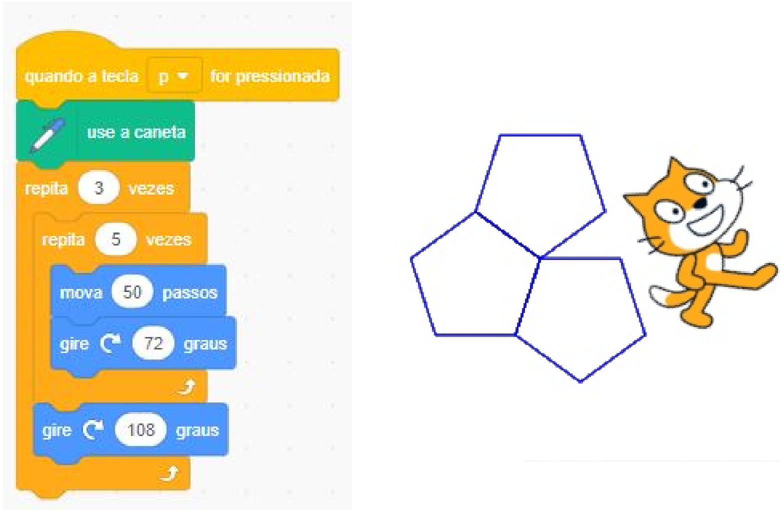


Figura 76: (c) Pentágonos regulares

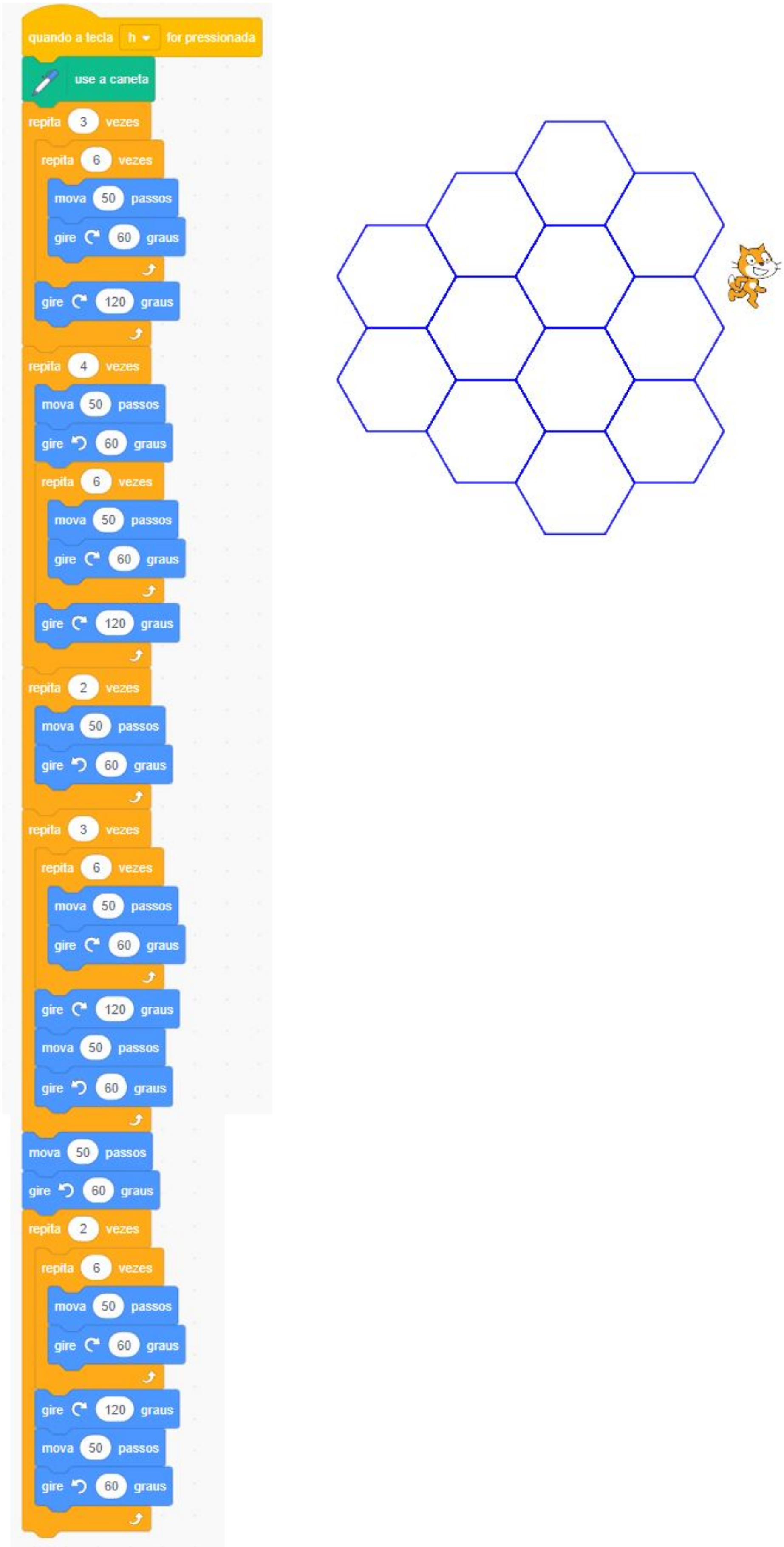


Figura 77: (d) Hexágonos regulares

Assim como no pentágono, no octógono é importante que o aluno perceba que não é possível realizar a pavimentação desejada.

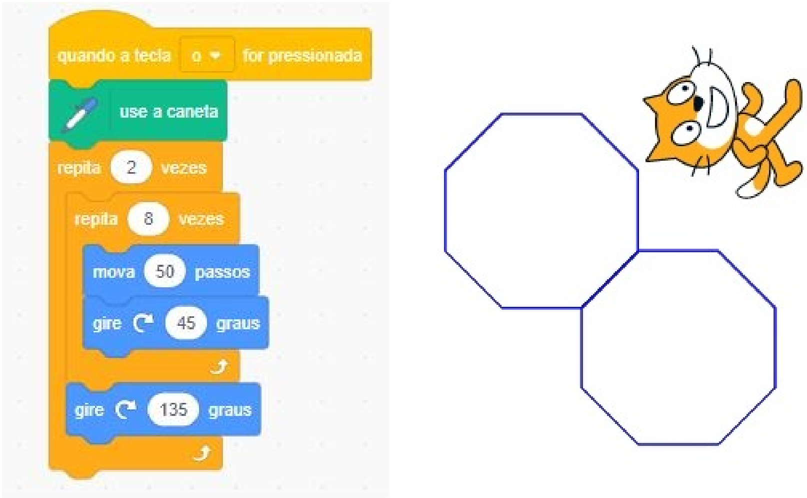


Figura 78: (e) Octógonos regulares

As sugestões de resolução acima podem ser conferidas no projeto compartilhado online através do endereço `https://scratch.mit.edu/projects/226550033`.

Respostas das questões:

1. Não foi possível no pentágono, pois ao somarmos três de seus ângulos obtemos $3 \cdot 108° = 324°$. Dessa forma, não poderíamos somar a eles um ângulo maior que $36°$, não sendo possível, assim, utilizar outro pentágono para preencher essa lacuna do mosaico.

   Da mesma maneira, não foi possível construir um mosaico apenas com octógonos, pois ao somarmos dois de seus ângulos obtemos $2 \cdot 135° = 270°$. Não podemos, assim, somar um ângulo maior que $90°$.

2. O aluno poderá responder algo como “porque não encaixa” ou “sobra espaço”. A intenção é que ele compreenda que é necessário que os ângulos dispostos em torno de um mesmo ponto tenham soma igual a $360°$.

B.9 ATIVIDADE 9

Esta atividade é livre para o aluno pensar e construir um mosaico utilizando os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores. A seguir, um exemplo de construção possível.

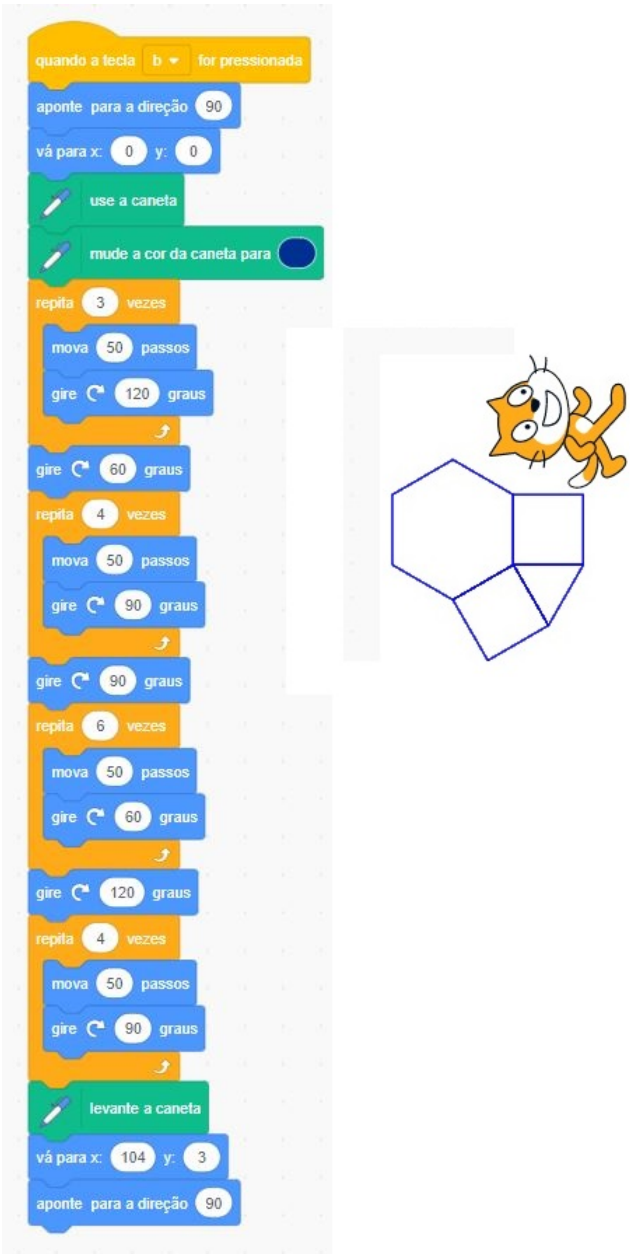


Figura 79: Possível construção

A sugestão de resolução acima pode ser conferida no projeto compartilhado online através do endereço `https://scratch.mit.edu/projects/314578585/`.