UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS - GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

A Representação de um Número Real numa Base qualquer

Francisco Andrelino da Silva

Teresina
2019

Francisco Andrelino da Silva

A Representação de um Número Real numa Base qualquer

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura.

Teresina
2019

À minha amada esposa e eterna companheira,
por me apoiar e me dar forças para ser um homem melhor.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela vida, por me proporcionar todas as coisas e sempre me mostrar o caminho correto.

À minha mãe, Dona Irene que enfrentou muitas lutas para me dar a oportunidade de crescer e estudar.

À minha querida avó Regina que sempre me incentivou a estudar e a acreditar em mim mesmo *(in Memoriam).*

À minha amada esposa Gislane Hellen, minha fiel amiga e eterna namorada, pelo companheirismo, carinho, por cuidar de mim e me fazer uma pessoa melhor, me mostrando que o mundo pode ser colorido e cheio de vida.

Aos meus sogros, que são como verdadeiros pais para mim e sempre me acolhem.

Aos amigos de jornada acadêmica, que contribuíram para eu ser o que sou hoje e fortaleceram grandemente minha matemática, velhos colegas de estudo Alberone, Lucas Vidal, Victor, Quaresma, Samara.

Aos amigos de longa data, André, Ranieri, Giovane, Alan, Lia e Larissa, que muito me ajudaram na juventude, com seu companheirismo e amizade, e pelas muitas e muitas horas de risos.

Aos professores Pitágoras e Neto Ceará que ainda no ensino médio me inspiram e me ensinaram o quão valioso e divertido é o conhecimento da matemática.

Ao trabalho de quatro homens que muito fizeram pelos alunos da OBMEP, jamais esquecerei as aulas aos sábados, quando ainda criança e fazia o treinamento com os professores Gilvan, Benício, Mario e Paulinho.

Ao professor e amigo Dom Josinaldo por seu apoio, conversas e amizades em diversos momentos.

Aos meus mentores da graduação, em especial aos professores Paulo Alexandre, Carlos Humberto, Newton, Jurandir, Xavier.

Ao meu orientador professor Roger que certamente foi uma das pessoas que mais me desafiou e me levou a resultados melhores. Sou muito grato por tudo que aprendi com ele.

Aos mentores destes dois anos de mestrado. Foram longas viagens e grandes aprendizados ao lado dos professores Roger, Benício, Liane, Manoel, Gilvan, Valmaria e Cledinaldo.

Aos companheiros do curso PROFMAT, André, Erivelton, Fernando, Irismar, Jackeline, Lucas, Marina e Raphaell pelo companheirismo e apoio nessa jornada que trilhamos juntos.

Agradeço grandemente aos membros da banca, os professores Gleison, Ailton, Alberone e ao meu orientador Roger, que dedicaram seu tempo para avaliar minunciosamente este trabalho, de forma a enriquecer significativamente o presente texto, em todos os aspectos.

Resumo

O presente trabalho aborda a teoria fundamental de representação de números reais numa base qualquer, evidenciando as diferentes bases e maneiras como essa representação pode ser feita. Em nossa teoria daremos ênfase à representação de números reais numa base arbitrária, porém enriquecida com um grande número de exemplos em bases específicas (decimal, binária, octal, etc), de modo a deixar o texto ao mesmo tempo matematicamente rigoroso e acessível tanto a professores como a estudantes curiosos do ensino médio.

Palavras-chave: Representação b-ádica; Representação numérica; Representação decimal; Mudança de base, Sistemas de numeração.

Abstract

The present work deals with the foundamental theory of representation of real numbers on arbitrary basis, showing the different bases and maners how the representation of a real number happen. In our theory we emphasize the representation of real numbers on arbitrary bases, but enriched with large number of exemples on specific bases, such as decimal, binary, octal, etc, so as to make the text to be both mathematically rigorous and accessible to teaches as well as to high school studants.

Key-words: b-adic representation; Numeric representation; Decimal representation: basis change; Numerical systems.

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

O presente trabalho tem como objetivo realizar uma abordagem rigorosa e atraente, porém não completa, da teoria fundamental de representação de um numero real numa base arbitrária, evidenciando as diferentes bases e maneiras como essa representação pode ser feita. Pretendemos mostrar através de um texto leve e acessível a professores e estudantes do ensino médio, mas sem abrir mão do rigor matemático, como essa teoria se desenvolve, de modo a despertar o interesse do leitor no aprofundamento do tema.

O trabalho encontra-se organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados básicos indispensáveis ao desenvolvimento do nosso trabalho. Nele estão alguns teoremas fundamentais de aritmética, os quais usaremos para estudar a forma b-ádica de representar os números inteiros, com destaque para o algoritmo da divisão euclidiana. Depois definimos séries e séries geométricas. O capítulo finaliza com a definição da função máximo inteiro e o enunciado de suas principais propriedades. Nossas principais referências nesta parte foram H. DOMINGUES [4], L. H. JACY MONTEIRO [7] e R. MOURA [9].

No Capítulo 2 estudamos os sistemas de numeração. Começamos conceituando senso numérico, números e numerais. Em seguida tratamos de sistemas de numeração posicionais e não posicionais. Também abordamos, de forma breve, o sistema de numeração decimal, para daí concentrar nossos esforços na estruturação da teoria de um sistema de numeração posicional numa base b arbitrária. As referências consultadas foram H. DOMINGUES [4], L. H. JACY MONTEIRO [7], R. MOURA [9] e as dissertações de V. CIRPIANO [2], A. RODRIGUES [10], A. P. CLAUDIONOR [3]. O principal resultado do capítulo é o seguinte teorema:

"Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $a > 0$ e $b > 1$. Então existe uma única n-upla (família finita)

$(a_i)_{i=1}^n$ de números naturais tal que,

$$a = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0, \tag{1}$$

com $a_n \neq 0$ e $0 \leq a_i < b$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Ou seja, todo número natural não nulo, admite uma, e apenas uma, representação b-ádica (na base b)."

No Capítulo 3 temos como meta ensinar como se faz adição, subtração e multiplicação de números naturais num sistema de numeração posicional de base $b > 1$ arbitrária. Além disso, fazemos algumas considerações sobre a divisibilidade, tais como critérios de divisibilidade numa base qualquer. Também apresentamos alguns exemplos de tábuas de operações. Destacamos o seguinte critério de divisibilidade, do qual derivam alguns outros muito usuais e difundidos:

"Sejam $a = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b$ um número natural não nulo numa base b arbitraria e $d \in \mathbb{N}$ um divisor de b. Então d^k divide a se, e somente se, d divide $a_k \cdot b^k + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0$."

No último capítulo estendemos ao conjunto dos números reais a teoria de representação numa base qualquer, com ênfase na representação dos números racionais. Começamos abordando a representação dos inteiros, através de um apanhado do que foi feito nos capítulos 2 e 3. Em seguida passamos aos números não inteiros. O resultado fundamental foi o seguinte teorema:

"Seja $\alpha \in (0; 1)$, um número real e seja $b > 1$ um número natural. Então existe uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ com $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_n \leq b - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} := (0, a_1 a_2 ... a_n ...)_b."$$

Depois estendemos o mesmo para todos os números reais. Também ensinamos como realizar mudança de base de números não inteiros. Finalizamos o capítulo com o estudo das dízimas periódicas numa base arbitraria. Exibimos a importante caracterização do conjunto dos racionais que diz que um número é racional se, e somente se, possui uma representação decimal (ou em qualquer base) finita ou é uma dízima periódica. Finalizamos o capítulo provando que para cada número racional positivo existe uma base b na qual esse número possui uma representação finita e também indicamos qual a menor base na qual isso acontece.

Por fim, gostaríamos de enfatizar que o objetivo deste trabalho não é realizar uma abordagem completa do assunto, não é esgotar o mesmo. Esperamos no entanto que essa dissertação possa chamar a atenção do leitor de modo a ser um convite ao aprofundamento nesse interessante conteúdo.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados básicos indispensáveis ao desenvolvimento do nosso trabalho. Nele estão alguns resultados fundamentais de aritmética, os quais usaremos para estudar a forma b-ádica de representar os números inteiros. Depois definimos séries e séries geométricas. O capítulo finaliza com a definição da função máximo inteiro e o enunciado de suas principais propriedades. Nossas principais referências nesta parte foram H. DOMINGUES [4], L. H. JACY MONTEIRO [7] e R. MOURA [9].

1.1 Alguns conceitos fundamentais da aritmética

Primeiramente enunciamos o Principio de Indução Finita, que na aritmética pode vir como um dos axiomas de Peano usado na construção do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais (veja H. DOMINGUES [4]) ou como uma consequência do princípio do menor natural, quando este último o substitui nos axiomas da construção de $\mathbb{N}$ (ver L. H. JACY MONTEIRO [7] ou R. MOURA [9]).

Teorema 1.1.1 (Princípio de Indução Finita - PIF) *Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto satisfazendo as duas seguintes condições:*

P1. $1 \in A$.

P2. para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se $n \in A$, então $n + 1 \in A$

Então $A = \mathbb{N}$.

Como corolário do principio de indução finita, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.1.1 *Seja $S \subset \mathbb{N}$ satisfazendo as duas seguintes condições:*

(i) $1 \in S$;

(ii) dado $n \in \mathbb{N}$, se $m \in S$ para todo $m \leq n$ então $n + 1 \in S$.

Então $S = \mathbb{N}$.

O segundo resultado é o Princípio do Menor Natural, que garante existência do menor número natural, antes porém precisamos da definição.

Teorema 1.1.2 (Princípio do Menor Natural) *Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto não-vazio. Então existe $m = minA$ e este m é único.*

É um fato muito conhecido a equivalência entre o princípio de indução finita e o princípio do menor natural.

Vejamos um pouco da teoria básica de divisibilidade e Congruência de números inteiros.

Começamos enunciando o teorema fundamental na construção do nosso trabalho. Sua demonstração pode ser encontrada em qualquer livro de aritmética básica ou de teoria dos números.

Teorema 1.1.3 (Algorítimo da Divisão Euclidiana) *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$, existe um único par de inteiros q, r chamados respectivamente de quociente e resto, tais que*

$$a = b \cdot q + r; \;\; 0 \leq r < \; |b|. \tag{1.1}$$

Demonstração. Veja, por exemplo, a referência [4] ou [7], ou qualquer livro de aritmética básica. ■

Quando $r = 0$ dizemos que b divide a e representamos pela notação $b|a$. Caso contrario, usamos a notação $b \nmid a$ para indicar que b não divide a.

Vejamos algumas propriedades fundamentais da relação de divisibilidade no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

Teorema 1.1.4 *Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, valem as seguintes propriedades:*

1. *$a|a$ (reflexiva).*
2. *Se $a|b$ e $b|a$, então $a = +b$ ou $a = -b$.*
3. *Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$ (transitiva).*
4. *Se $a|b$ e $a|c$, então $a|b + c$ e $a|b - c$.*
5. *Suponha que $a|b \pm c$. Então $a|b$ se, e somente se, $a|c$.*

Demonstração. As propriedades listadas seguem quase que imediatamente da definição de divisibilidade e do fato de a divisibilidade ser uma relação de ordem em $\mathbb{N}$. Por isso deixaremos como exercício. ■

Definição 1.1.1 *Dados dois ou mais números inteiros, chamamos de máximo divisor comum ao elemento máximo do conjunto dos divisores comuns dos números em questão. Usamos a abreviação $mdc(a, b)$ para representar o maior divisor comum entre a e b.*

O a teoria básica do máximo divisor comum e suas propriedades pode ser consultada em qualquer livro de aritmética elementar. Para mais detlhes, sugerimos consultar a referência H. DOMINGUES [4].

Definição 1.1.2 *Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m \neq 0$. Dizemos que a é congruente a b módulo m se, e somente se, $m|(a - b)$.*

É padrão o uso das notações $a \equiv b\, mod\, m$ para indicar que a é congruente a b módulo m e $a \not\equiv b\, mod\, m$ para indicar que a não é congruente a b módulo m.

Listemos as propriedades fundamentais da relação de congruência módulo m:

Teorema 1.1.5 *A congruência módulo m é uma relação de equivalência.*

Demonstração. De fato, a relação de congruência:

1. É reflexiva, pois para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos $m|a - a$.

2. É simétrica, poi dados $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \mod m$, então $a - b = c \cdot m$ e portanto $b - a = -c \cdot n$, implicando que $b \equiv a \mod m$.

3. É transitiva, pois isto segue da transitividade da relação de divisibilidade. ■

Vejamos mais algumas propriedades:

Teorema 1.1.6 *Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, com $n > 1$. Então:*

1. $a \equiv b \mod m$ se, e somente se, $a + c \equiv b + c \mod m$.

2. Se $a \equiv b \mod m$, então $a \cdot c \equiv b \cdot c \mod m$. E se, $mdc(n, c) = 1$ vale a equivalência;

3. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \, mod \, m$ se, e somente se, a e b têm o mesmo resto quando divididos por m.

Demonstração. Veja, por exemplo, H. DOMINGUES [4] ou JACY MONTEIRO [7]. Nestas referências também podem ser encontradas outras importantes propriedades e aplicações da relação de congruência. ■

1.2 Séries geométricas

Para entender representação decimal (e b-ádica) é essencial uma compreensão de alguns resultados sobre séries, em particular séries geométricas.

Definição 1.2.1 *Seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais. Chamamos de série determinada pela sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ à sequência $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, onde cada termo s_n é definido por:*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

A sequência $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, e seu limite é indicado pelo mesmo símbolo: $\sum\limits_{n=1}^{n} a_n$.

Cada a_n é chamado de n-ésimo termo da sequência e cada s_n chama-se n-ésima soma parcial (ou reduzida) da série.

Definição 1.2.2 *Dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, quando a sequência de suas reduzidas, $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, converge para algum $s \in \mathbb{R}$, ou seja, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$. Caso contrário, dizemos que a série diverge.*

Um exemplo muito importante de série é $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$, devido ao fato dela convergir para o número $s = 1$ e ter como principal característica o quociente entre um termo e seu sucessor ser constante igual a $\dfrac{1}{2}$. Este é um exemplo de série cujos termos diferem uns dos outros por potências de uma constante positiva fixa, definida a seguir:

Definição 1.2.3 *Uma série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *para a qual existe um único* $r \in \mathbb{R}^*$ *tal que* $a_{n+1} = r \cdot a_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, é denominada série geométrica. Portanto, chamamos de série geométrica qualquer série do tipo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + \cdots + a \cdot r^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^n. \tag{1.3}$$

Teorema 1.2.1 *Sejam* $a \neq 0$*,* $r \in \mathbb{R}$ *e seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot r^n$ *uma série geométrica.*

1. *Se* $|r| < 1$*, a série converge e seu limite é* $\dfrac{a}{1-r}$*.*

2. *Se* $|r| \geq 1$*, a série diverge.*

Demonstração. Considere a soma parcial s_n e seu produto por r :

$$\begin{aligned} s_n &= a + a \cdot r + a \cdot r^2 + ... + a \cdot r^n, \\ r \cdot s_n &= \quad\; a \cdot r + a \cdot r^2 + ... + a \cdot r^n + a \cdot r^{n+1}. \end{aligned}$$

Subtraindo da primeira a segunda equação e dividindo ambos os lados da equação resultante por $1 - r$, obtemos:

$$s_n = \frac{a - a \cdot r^{n+1}}{1 - r}.$$

Passando o limite com $n \to \infty$, chagamos ao resultado. ■

1.3 Função maior inteiro

Definição 1.3.1 *Seja* $x \in \mathbb{R}$*. Denotamos por* $[x]$ *o maior inteiro menor ou igual a* x *(também chamado de máximo inteiro menor ou igual a* x*), ou seja,*

$$[x] = \max\{\, m \in \mathbb{Z} \,|\, m \leq x \,\}.$$

A função de $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{Z}$ *definida por* $x \longmapsto [x]$ *chama-se função maior (ou máximo) inteiro sobre* $\mathbb{R}$*.*

Listamos abaixo as propriedades fundamentais da função máximo inteiro.

Teorema 1.3.1 *A função máximo inteiro satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $[x] \leq x < x + 1$.

(b) *Se* $x \in \mathbb{R}$ *e* m *é um inteiro tal que* $m \leq x < m + 1$, *então* $m = [x]$.

(c) Se $x \leq y$ *então* $[x] \leq [y]$ *(a função maior inteiro é crescente).*

(d) $[x + m] = [x] + m$, *para todo* $m \in \mathbb{Z}$.

(e) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

(f) Sejam m *e* n *inteiros,* $n > 0$. *Se* q *é o quociente da divisão euclidiana de* m *por* n, *então* $q = \left[\frac{m}{n}\right]$.

(g) $\left[\dfrac{x}{n}\right] = \left[\dfrac{[x]}{n}\right]$, *para todo número natural* $n > 0$.

Demonstração. Veja as seções 4.5 e 5.6 de H. DOMINGUES [4]. ■

Exemplo 1.3.1 $[4,21] = 4$; $[0,1] = 0$; $[7,91] = 7$; $[\pi] = 3$; $\left[\sqrt{2}\right] = 1$.

Capítulo 2

Sistemas de numeração

Neste capítulo temos como principal objetivo o estudo dos sistemas de numeração. Começaremos falando sobre senso numérico, números e numerais. Em seguida trataremos de sistemas de numeração posicionais e não posicionais. Abordaremos, de forma breve, o sistema de numeração decimal e focaremos na estrutura de um sistema com uma base b arbitrária. Nossas principais referências foram H. DOMINGUES [4] e L. H. JACY MONTEIRO [7].

2.1 Senso Numérico, número e numeral

A contagem é algo que é feito através de uma correspondência um a um do que se deseja quantificar com um conjunto numérico abstrato. Para organizar e construir um sistema de numeração se faz necessário o desenvolvimento, na ordem abaixo, das ideias de senso numérico, de número (contagem) e de numeral. Vejamos suas definições:

Chamamos de senso numérico à habilidade de comparar grandezas, relacionando conjuntos, sabendo inferir qual está em maior ou menor quantidade.

Número é a ideia de quantidade que nos vem à mente quando contamos, ordenamos e medimos. Enquanto numeral é o modo como o número é representado. É importante frisar que existem diferentes formas de representar um número.

A partir das ideias supracitadas vem a elaboração de sistemas de numeração, que traz consigo a necessidade de se estabelecer os conceitos de algarismo e numeral.

Um sistema de numeração (ou sistema numeral) é um sistema em que um conjunto de números é representado por numerais de uma forma consistente, ou seja, de forma unívoca, sem ambiguidades.

Algarismos (também chamados de dígitos) são os símbolos usados para escrever os numerais. O conjunto de algarismos de um sistema de numeração é (e deve ser sempre) finito.

A contagem dos elementos de um conjunto (finito) é determinada por meio de uma correspondência 1-1 (bijeção) dos elementos desse conjunto com o conjunto de números $\{1, 2, 3, ..., n\}$, onde n é chamada de número de elementos do conjunto.

Segundo IFRAH [6], os conceitos acima foram surgindo lentamente à medida que o homem era confrontado por suas necessidades, com o desenvolvimento das civilizações:

> Erigida sem dúvida sobre bases empíricas, a invenção dos números deve ter correspondido a preocupações de ordem prática e utilitária. Aqueles que guardavam rebanhos de carneiros ou de cabras, por exemplo, precisavam ter certeza de que, ao voltar do pasto, todos os animais tinham entrado no curral. Os que estocavam ferramentas ou armas, ou que armazenavam reservas alimentares para atender a uma vida comunitária, deviam estar aptos a verificar se a disposição dos víveres, armas ou instrumentos era idêntica a que eles haviam deixado anteriormente. Aqueles, afinal, que mantinham relações de inimizade com grupos vizinhos necessitavam saber, ao final de cada expedição militar, se o efetivo de seus soldados estava completo ou não. Os que praticavam uma economia de troca direta deviam estar aptos a "avaliar" para poder trocar um gênero ou mercadoria por outro... (pag.25)

Muitas vezes utilizamos as palavras número e numeral como sinônimos, mas perceba que são conceitos distintos. As representações dez, diez, ten, dix , 10, X, 1010, ∩ são numerais, ou seja, são formas de representar um mesmo número. Note porém que número, por se tratar de uma ideia, é algo abstrato e portanto não pode ser visualizado, mas apenas representado. Por exemplo, o dez pode quantificar dez canetas, dez maçãs, etc. No entanto, o dez em si não é algo concreto.

Para deixar mais claros a distinção entre numeral e algarismo, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1.1 *O numeral* 275 *é composto de três algarismos: o* 2*, o* 7 *e o* 5*. O que é equivalente a dizer que a palavra BASE é composta das letras B, A, S e E. Por conseguinte,* *podemos dizer que os algarismos são as letras com as quais escrevemos os numerais, e estes por sua vez, são as palavras.*

2.2 Sistemas não posicionais e posicionais

De posse das ideias de senso numérico, números e numerais, estamos aptos para estudar de modo rigoroso a construção matemática de sistemas de numeração. Basicamente temos dois tipos de sistemas de numeração: o não posicional e o posicional. Porém lembramos que o foco de nosso trabalho são os sistema de numeração posicionais.

Os sistemas não posicionais são aqueles que utilizam apenas a adição das quantidades pelo processo de justaposição, onde cada um de seus símbolos representa um valor prefixado; ou seja, temos um conjunto finito de símbolos bem definido, cada qual representando uma quantidade e os demais números são compostos pela adição dos elementos desse conjunto.

O exemplo mais importante de sistema não posicional, que fazemos uso até os dias atuais, é o sistema de numeração romano. Ele consiste de um sistema aditivo formado pelas sete seguintes letras do alfabeto latino: I, V, X, L, C, D e M. Na tabela abaixo listamos seus respectivos valores no sistema decimal.

I	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
1	5	10	50	100	500	1000

Tabela 2.1: Algarismos básicos do sistema de numeração romano.

Para um estudo detalhado do sistema de numeração romano, sugerimos CLAUDIONOR [3] e as referências lá contidas.

Os sistemas de numeração não posicionais são limitados do ponto de vista operacional. Isto porque, conforme ilustra o exemplo abaixo, mesmo as operações elementares são de difícil realização.

Exemplo 2.2.1 *Façamos a adição dos números CLXXII e LI. Como os algarismos não possuem valor relativo, ou seja, não alteram de valor mudando sua posição, nenhuma tentativa de alinhar os números para somá-los é possível, de forma imediata: CLXXII +*

LI = CLLXXIII. No entanto temos que L + L = C, ou seja, substituímos LL por C e reescrevemos como CCXXII.

Operações de multiplicação e divisão são bem mais complicadas. Números não inteiros não possuem representação em algarismos romanos.

Tais limitações dos sistemas não posicionais bem como o desenvolvimento das civilizações, fizeram surgir os sistemas de numeração posicionais, que são aqueles nos quais se estabelece o conceito de ordem, onde cada algarismo possui um valor a depender de sua posição. A construção do sistema posicional é feita escolhendo-se um número natural $b > 1$, denominado base do sistema e um conjunto de b dígitos com os quais todos os demais números são escritos, conforme a definição ainda neste capítulo. Antes porém, vejamos o exemplo do sistema decimal, do modo como é abordado no ensino básico.

2.3 O sistema de numeração decimal

O sistema de numeração decimal, também conhecido como sistema de numeração indo-arábico, recebe esse nome porque é formado pelos (tem com base) dez dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, que são utilizados para representar todos os demais números. Para tanto usamos a justaposição destes, levando em consideração a posição relativa de cada um. Portanto, cada algarismo possui um valor posicional, em que cada posição à esquerda, que é chamada de ordem, corresponde multiplicar seu valor por 10.

Como sabemos do ensino básico, usa-se uma decomposição com agrupamentos de 10 em 10, e cada agrupamento recebe um novo nome: 10 unidades formam uma dezena, 10 dezenas formam uma centena, 10 centenas formam uma unidade de milhar, 10 unidades de milhar formam uma dezena de milhar e assim sucessivamente. Cada um deses agrupamentos recebe o nome de ordem.

- A ordem das **unidades** é composta pelos algarismos simples 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

- A ordem das **dezenas** é formada pelos numerais duplos 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 e 90;

- A ordem das **centenas** é formada pelos numerais triplos 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 e 900.

Cada agrupamento de três ordens forma um novo grupo, denominado classe.

A classe das **unidades simples:** formada pelas ordens das unidades, das dezenas e das centenas.

A classe dos **milhares:** formada pelas ordens unidades de milhar, dezenas de milhar, centenas de milhar.

De forma análoga temos as classes dos **milhões**, dos **bilhões**, dos **trilhões**, etc.

Exemplo 2.3.1 *No numeral* 123.456*, temos* 6 *unidades,* 5 *dezenas,* 4 *centenas,* 3 *unidades de milhar,* 2 *dezenas de milhar e* 1 *centena de milhar.*

Exemplo 2.3.2 *Vejamos na tabela a seguir, alguns numerais e suas distribuições em ordens e classes.*

Classes	Milhões			Milhares			Unidades		
Ordens	9ª	8ª	7ª	6ª	5ª	4ª	3ª	2ª	1ª
	7	2	0	3	1	9	4	6	0
		6	1	0	3	2	8	2	6
			7	5	1	4	5	3	0
				3	0	1	9	0	1
				3	0	1	9	0	1
					6	8	9	1	7
							6	8	2

Tabela 2.2: Exemplo da distribuição de algarismos em ordens e classes

Note que a estrutura dos números como a conhecemos não é imutável ou única: a escolha do 10 como padrão, segundo Aristóteles, foi devido aos 10 dedos das mãos, mas poderia ser substituído por outro valor natural b arbitrário. Exploraremos tal fato a seguir, mostrando que qualquer número natural possui uma única representação para cada valor $b > 1$ fixado como padrão.

2.4 Sistemas de numeração b-ádicos

Abordaremos a construção de um sistema de numeração posicional com uma base natural $b > 1$. Para tanto precisamos de uma definição precisa de base de um sistema numérico.

Definição 2.4.1 *A base de um sistema de numeração é um conjunto formado por* $b > 1$ *unidades simples* $0, 1, ..., b - 1$ *a partir do qual são formadas as ordens. Assim, cada agrupamento de* b *elementos de uma dada ordem forma a próxima ordem.*

Definição 2.4.2 *Um sistema de numeração de base* b*, denominado de sistema b-ádico, é uma representação dos números naturais na forma:*

$$a = (a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0)_b, \text{ com } a_j \in \{0, 1, 2, ..., b-2, b-1\}. \tag{2.1}$$

O nome de um sistema de numeração posicional de base b é derivado do valor de b. Por exemplo, quando $b = 2$ chamamos de sistema de numeração binário, o qual é de muita utilidade no mundo computacional.O sistema binário é formado apenas pelos algarismos 0 e 1.

O teorema a seguir mostra que, fixado um natural $b > 1$, para cada natural a não nulo existe uma única representação b-ádica de a, justificando de forma precisa a definição (2.4.2).

Teorema 2.4.1 *Sejam* $a, b \in \mathbb{N}$*, com* $a > 0$ *e* $b > 1$*. Então existe uma única n-upla (família finita)* $(a_i)_{i=1}^n$ *de números naturais tal que,*

$$a = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0, \tag{2.2}$$

com $a_n \neq 0$ *e* $0 \leq a_i < b$*, para todo* $i = 1, 2, ..., n$*. Ou seja, todo número natural não nulo, admite uma, e apenas uma, representação b-ádica (na base* b*).*

Demonstração. Faremos uso do Corolário 1.1.1. Fixado $b > 1$, seja

$$S = \{a \in \mathbb{N}; a \text{ admite uma representação do tipo (2.2)}\}.$$

(i) $1 \in S$, pois basta escolher $n = 0$ e $a_0 = 1$ para que a equação (2.2) seja satisfeita.

(ii) Dado $a > 1$, suponhamos que $a' \in S$, sempre que $1 < a' \leq a$. Provemos que $a + 1 \in S$. Pelo algoritmo da divisão euclidiana, existem únicos $q, r \in \mathbb{N}^*$ tal que $a + 1 = b \cdot q + r$, com $0 \leq r < b$. Se $q = 0$, então $a + 1 \in S$, pois $a + 1 = r < b$, bastando neste caso escolher $n = 0$ e $a_0 = a + 1$. Suponhamos $q > 0$. Como $b > 1$ segue que $a = b \cdot q + r > q + r > q$. Logo $1 \leq q < a$. Segue por hipótese que $q \in S$. Portanto existem $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, ..., a_n \in \{1, 2, ..., b - 1\}$ tal que

$$q = a_n \cdot b^{n-1} + ... + a_2 \cdot b^1 + a_1.$$

Logo, podemos escrever

$$a + 1 = b \cdot q + r = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_1 \cdot b^1 + r,$$

onde $0 \leq r < b$. Logo, $a + 1 \in S$. Pelo Corolário 1.1.1, $S = \mathbb{N}$.

Para a unicidade, suponha a existência de duas representações do tipo (2.2) para o mesmo a. Provaremos que $a_j = c_j$ para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Sejam

$$a = a_n \cdot b^n + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0 \quad \text{e} \quad a = c_n \cdot b^n + ... + c_1 \cdot b^1 + c_0. \tag{2.3}$$

tais que

$$a = a_n \cdot b^n + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0 = c_n \cdot b^n + ... + c_1 \cdot b^1 + c_0. \tag{2.4}$$

Neste caso, tem-se que

$$a = b \cdot \left[a_n \cdot b^{n-1} + ... + a_1\right] + a_0 = b \cdot \left[c_n \cdot b^{n-1} + ... + c_1\right] + c_0. \tag{2.5}$$

Como $1 \leq a_0, c_0 < b$, a unicidade do algoritmo da divisão euclidiana nos garante $a_0 = c_0$ e $a_n \cdot b^{n-1} + ... + a_1 = c_n \cdot b^{n-1} + ... + c_1$. Aplicando novamente o processo concluí-se $a_1 = c_1$ e assim por diante. Repetindo o processo uma quantidade $n + 1$ de vezes, chegamos à conclusão de que $a_n = c_n$. Portanto a representação de a na base b é única. ■

No Teorema 2.4.1 fica evidente o valor posicional de cada algarismo e suas respectivas ordens, onde a_0 é a primeira ordem, a_1 a segunda, a_2 a terceira, e assim por diante, de modo que o algarismo a_j tem ordem $j+1$.

Exemplo 2.4.1 *Quando* $b = 10$, *a expressão* (2.2) *chama-se representação decimal de* a, *cujos algarismos da base são* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. *Neste caso,*

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10^1 + a_0,$$

com $a_n \neq 0$ *e* $0 \leq a_i < 10$, *para todo* $i = 1, 2, 3, ..., n$ *que é representado simplesmente como*

$$a = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0,$$

sem indicar a base.

Observação 2.4.1 *Para sistemas de numeração com base* $b > 10$ *é usual utilizar as letras* $A, B, C, D, E, F...$ *para indicar os valores* $10, 11, 12, 13, 14, 15, ...$, *respectivamente evitando interpretações errôneas ao usar dois algarismos do sistema decimal.*

Exemplo 2.4.2 *O numeral* $(E2AC)_{16}$ *representa o numeral (na base* 10*)* $14 \cdot 16^3 + 2 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 58028$. *Assim,* $(E2AC)_{16} = 58028$.

Exemplo 2.4.3 *O sistema binário* (*base 2*) *é constituído apenas por duas unidades simples, o* 0 *e o* 1, *chamados de bits, com os quais podemos representar qualquer* $a \in \mathbb{N}$, *conforme o Teorema* (2.4.1)*:*

$$a = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + ... + a_1 \cdot 2^1 + a_0 := (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_2.$$

Este sistema é o mais prático e simples para realizar operações básicas por utilizar apenas dois símbolos, por isso é o mais utilizado no ramo computacional. Porém sua grande desvantagem é possuir uma representação muito extensa. O numeral 2019, *por exemplo, se transforma em* $(11111100011)_2$.

Exemplo 2.4.4 *O numeral* $(101101)_2$ *é a representação binária do numeral decimal* 45*; de fato,* $(101101)_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 45$.

2.5 Conversão entre bases

Dado um número natural qualquer, vejamos como fazer a representação do mesmo em bases distintas. Faremos as conversões em etapas.

Conversão de um número na base $b \neq 10$ para a base decimal: Seja $a \in \mathbb{N}$ representado na base 10. Então existe uma família $(a_i)_{i=1}^{n}$ de números naturais tal que,

$$(a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0 = a.$$

Assim o numeral $(a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b$ na base b é transformado em a, um numeral no sistema decimal.

Exemplo 2.5.1 *Pelo Teorema* (2.4.1) *temos* $(253)_7 = 2 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 3 = 136$. *Portanto o* $(253)_7$ *é a representação na base* 7 *do* 136.

Exemplo 2.5.2 $(ABC)_{12} = 10 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 + 12 = 1584$. *Portanto, o* $(ABC)_{12}$ *é a representação na base* 12 *do* 1584.

Conversão de um número na base decimal para uma base $b \neq 10$: O método consiste em aplicar o algoritmo da divisão euclidiana sucessivas vezes, conforme explicado a seguir. Dado um $a \in \mathbb{N}$, pelo algoritmo da divisão (Teorema (1.1.3)) existem $a_0, q_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$a = b \cdot q_0 + a_0.$$

Se $q_0 = 0$, o processo pára e temos $a = a_0$ e escrevemos $a = (a_0)_b$. Isto ocorrerá quando $a < b$.

Se $q_o > 0$, aplicamos novamente o algoritmo da divisão euclidiana em q_0. Pelo Teorema (1.1.3), existem $a_1, q_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$q_0 = b \cdot q_1 + a_1.$$

Se $q_1 = 0$, o processo pára e temos

$$a = b \cdot q_0 + a_0 = b \cdot (b \cdot q_1 + a_1) + a_0 = b \cdot (0 + a_1) + a_0 = b \cdot a_1 + a_0$$

e portanto, escrevemos $a = (a_1 a_0)_b$.

Prosseguindo assim, aplicando sucessivamente o algoritmo da divisão euclidiana em cada quociente não nulo, chegaremos após um número finito de etapas a um quociente $q_n = 0$. De fato, quando um dado quociente for menor que a base b, o próximo será nulo, como evidencia o esquema abaixo:

$$\begin{aligned}
a &= b \cdot q_0 + a_0, \\
q_0 &= b \cdot q_1 + a_1, \\
q_1 &= b \cdot q_2 + a_2, \\
&\vdots \\
q_{n-1} &= b \cdot 0 + a_n.
\end{aligned}$$

Quando conseguimos o $q_n = 0$, obtemos uma quantidade n de b's e uma família $(a_i)_{i=1}^{n}$, que são os n algarismos de a na base b e portanto, podemos escrever:

$$a = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b.$$

Exemplo 2.5.3 *Vamos usar o algoritmo acima para escrever o número* 9.258 *na base* 7*:*

$$\begin{aligned}
9258 &= 1322 \cdot 7 + 4 \\
&= (188 \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 4 \\
&= ((26 \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 4 \\
&= (((3 \cdot 7 + 5) \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 4 \\
&= 3 \cdot 7^4 + 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 4 \\
&= (35664)_7.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.5.4 *Vejamos a conversão do número 53 na base dez para a base* $b = 2$,

$$\begin{aligned}
53 &= 2 \cdot 26 + 1 \text{ e assim, } q_0 = 26 \text{ e } a_0 = 1.\\
26 &= 2 \cdot 13 + 1 \text{ e assim, } q_1 = 13 \text{ e } a_1 = 0.\\
13 &= 2 \cdot 6 + 1 \text{ e assim, } q_2 = 6 \text{ e } a_2 = 1.\\
6 &= 2 \cdot 3 + 0 \text{ e assim, } q_3 = 3 \text{ e } a_3 = 0.\\
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \text{ e assim, } q_4 = 1 \text{ e } a_4 = 1.\\
1 &= 2 \cdot 0 + 1 \text{ e assim, } q_5 = 0 \text{ e } a_5 = 1.
\end{aligned}$$

Logo, $n = 5$ *e* $53 = (110101)_2$.

Exemplo 2.5.5 *Vamos representar* $(201)_3$ *na base* 5.

$$(201)_3 = 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 = 18 + 0 + 1 = 19 = 3 \cdot 5 + 4 = (34)_5.$$

Observemos que primeiramente convertemos o $(201)_3$ *para o sistema decimal, para só então transformá-lo em* $(34)_5$.

Capítulo 3

Operações básicas num sistema b-ádico

Vamos aprender como se faz adição e multiplicação de números naturais num sistema de numeração de base $b > 1$ arbitrária. Além disso, faremos algumas considerações sobre a divisibilidade.

3.1 Adição

Considere dois números $a, c \in \mathbb{N}$, com suas representações numa mesma base $b > 1$, ou seja, $a = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b$ e $c = (c_k c_{k-1} ... c_1 c_0)_b$. Neste caso,

$$\begin{aligned} a &= a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0, \\ c &= c_k \cdot b^k + c_{k-1} \cdot b^{k-1} + ... + c_1 \cdot b^1 + c_0. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, suponha $n > k$. Desta forma, ao número c, acrescentamos uma quantidade $r = n - k$ de zeros nos algarismos, da ordem $k + 1$ até n. Assim, reescrevemos:

$$\begin{aligned} a &= a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_{k+1} \cdot b^{k+1} + a_k \cdot b^k + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0, \\ c &= 0 \cdot b^n + 0 \cdot b^{n-1} + ... + 0 \cdot b^{k+1} + c_k \cdot b^k + ... + c_1 \cdot b^1 + c_0. \end{aligned}$$

Agora com a mesma quantidade de ordens, para adicionar a e c, basta fazer a adição de seus algarismos de mesma ordem, de modo semelhante à soma de polinômios:

$$a+c = (a_n+0)\cdot b^n + \cdots + (a_{k+1}+0)\cdot b^{k+1} + (a_k+c_k)\cdot b^k + \cdots + (a_1+c_1)\cdot b^1 + (a_0+c_0).$$

Assim, a soma resulta no numeral de algarismo: $(a_n a_{n-1} ... a_{k+1}(a_k+c_k)...(a_1+c_1)(a_0+c_0))_b$

Se para algum índice j tivermos $a_j + c_j \geq b$, então escrevemos $a_j + c_j = b + x$, com $0 \leq x < b$, acrescentando uma nova unidade a próxima ordem: $(a_j+c_j)\cdot b^j = (b+x)\cdot b^j = 1\cdot b^{j+1} + x\cdot b^j$. Vejamos esse fato na prática, através de exemplos.

Exemplo 3.1.1 *Para realizar a adição de* $(1012)_4$ *e* $(21)_4$*, basta somar os algarismos de mesma ordem. De fato,*

$$(1012)_4 + (21)_4 = (1012)_4 + (0021)_4 = (1033)_4.$$

Exemplo 3.1.2 *Realizemos à adição* $(1012)_3 + (102)_3$.

$$\begin{aligned}(1012)_3 + (102)_3 &= \left(1\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 1\cdot 3 + 2\right) + \left(1\cdot 3^2 + 0\cdot 3 + 2\right)\\ &= 1\cdot 3^3 + (0+1)\cdot 3^2 + (1+0)\cdot 3 + (2+2)\,.\end{aligned}$$

Substituindo $2+2$ *por* $3+1$*, temos:*

$$\begin{aligned}(1012)_3 + (102)_3 &= 1\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 1\cdot 3 + (3+1)\\ &= 1\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + (1+1)\cdot 3 + 1\\ &= 1\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 1.\end{aligned}$$

Logo, $(1012)_3 + (102)_3 + (1121)_3$.

Quando as bases são distintas, escolhemos uma delas, realizamos a conversão do outro numeral para a base escolhida e efetuamos a adição como antes. Vejamos um exemplo:

Exemplo 3.1.3 *Efetuemos a adição* $(3102)_5 + (3460)_7$ *na base* 5. *Primeiro devemos fazer* *a conversão* $(3460)_7 = (20032)_5$ *e então efetuamos a adição.*

$$
\begin{aligned}
(3102)_5 + (20032)_5 &= \Big(3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2\Big) + \Big(2 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2\Big) \\
&= 2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \\
&= (23134)_5
\end{aligned}
$$

.

Consideremos agora a subtração de a e c naturais representados numa base $b > 1$ arbitrária, ou seja, $a = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b$ e $c = (c_k c_{k-1} ... c_1 c_0)_b$. Para subtrair c de a, a exemplo da adição, basta efetuar as subtrações dos algarismos de mesma ordem:

$$
\begin{aligned}
a - c &= \Big(a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0\Big) \\
&\quad - \Big(c_k \cdot b^k + c_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + c_1 \cdot b^1 + c_0\Big) \\
&= (a_n - 0) \cdot b^n + \cdots + (a_{k+1} - 0) \cdot b^{k+1} + (a_k - c_k) \cdot b^k + \cdots \\
&\quad \cdots + (a_1 - c_1) \cdot b^1 + (a_0 - c_0).
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.1.4 *Veja que na subtração* $(35)_6 - (12)_6$ *basta efetuar diretamente as subtrações dos algarismos de mesma ordem:*

$$(35)_6 - (12)_6 = (3 - 1) \cdot 6 + (5 - 2) = 2 \cdot 6 + 3 = (23)_b.$$

Quando para algum índice j, $a_j - c_j < 0$, retiramos uma unidade da ordem $j + 1$, que são b unidades na ordem j, somamos essas b unidades ao a_j e procedemos com a subtração normalmente. (Lembremos que cada algarismo de ordem a_{j+1} possui um valor posicional b unidades do valor posicional do algarismo de ordem imediatamente anterior a_j. Esse principio é conhecido no ensino básico, como "pegar emprestado").

Exemplo 3.1.5 *Efetuemos a subtração* $(31)_4 - (13)_4$.

$$\begin{aligned}(31)_4 - (13)_4 &= (3 \cdot 4 + 1) - (1 \cdot 4 + 3)\\ &= (3 - 1) \cdot 4 + (1 - 3)\\ &= 2 \cdot 4 + (-2).\end{aligned}$$

Retirando uma unidade de $a_1 = 2$ *e acrescentando as* 4 *unidades correspondentes em* $a_0 = -2$*, obtemos:*

$$(31)_4 - (13)_4 = 1 \cdot 4 + 2 = (12)_4.$$

Finalizamos a seção com as tábuas de adição nas bases 2, 3, 4 e 8. Para certificar-se que a aprendeu a teoria, recomendamos ao leitor fazer a construção de mais tabuas de adição em outras bases.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabela 3.1: Adição na Base 2

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Tabela 3.2: Adição na base 3

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

Tabela 3.3: Adição na base 4

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Tabela 3.4: Adição na base 8

Para expandir por completo a todo o conjunto $\mathbb{N}$, falta apenas uma representação para o zero. Certamente pelo exposto, o zero é o elemento neutro da adição em qualquer base, e por isso é obvio a representação do zero ser $0 = (0)_b$, para qualquer base $b > 1$.

3.2 Multiplicação

Consideremos $a, c \in \mathbb{N}$ com a mesma notação da seção anterior. O produto $a \cdot c$ é feito de modo análogo ao produto de polinômios, bastando considerar as potencias da base b^j como as variáveis e os a_j como os coeficientes. Ilustremos com exemplos.

Exemplo 3.2.1 *Façamos a multiplicação de* $(10)_3$ *por* $(10)_3$*:*

$$\begin{aligned}
(10)_3 \cdot (21)_3 &= (1 \cdot 3^1 + 0) \cdot (2 \cdot 3^1 + 1) \\
&= 1 \cdot 3^1 \cdot (2 \cdot 3^1 + 1) + 0 \cdot (2 \cdot 3^1 + 1) \\
&= (1 \cdot 2 \cdot 3^{1+1} + 1 \cdot 1 \cdot 3^1) + 0 \\
&= 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 \\
&= (210)_3.
\end{aligned}$$

Se para algum par de índices i, j, $a_i \cdot c_j \geq b$, escrevemos $a_i \cdot c_j = b + x$, com $0 \leq x < b$.

Exemplo 3.2.2

$$\begin{aligned}
(30)_4 \cdot (21)_4 &= (3 \cdot 4^1 + 0) \cdot (2 \cdot 4^1 + 1) \\
&= 6 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 0 \\
&= (4 + 2) \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 0 \\
&= 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 0 = (1230)_4.
\end{aligned}$$

Finalizamos a seção com as tábuas de multiplicação nas bases 2, 3, 4 e 8. Também recomendamos ao leitor a construção de tabelas em outras bases.

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela 3.5: Multiplicação na Base 2

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Tabela 3.6: Multiplicação na Base 3

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Tabela 3.7: Multiplicação na base 4

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Tabela 3.8: Multiplicação na Base 8

3.3 Divisibilidade

O algoritmo da divisão euclidiana independe do sistema de numeração posicional considerado, ou seja, ele é válido e tem o mesmo enunciado em qualquer base.

Apresentaremos alguns resultados sobre divisibilidade num sistema b-ádico, de modo que possamos melhor compreender a divisibilidade de forma genérica e até deduzir alguns critérios de divisibilidade conhecidos do sistema decimal.

Teorema 3.3.1 *Dado um número natural não nulo $a = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b$ numa base b arbitraria, b divide a se, e somente se, o algarismo da unidade de a vale zero.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.4.1 escrevemos $a = a_n \cdot b^n + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0$, onde a_0 é o algarismo da unidade.

($\Longrightarrow$) Supondo que $b|a$, existe q tal que $a = b \cdot q$, ou seja,

$$a_n \cdot b^n + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0 = b \cdot q.$$

Daí, isolando o a_0 temos

$$\begin{aligned} a_0 &= b \cdot q - \left(a_n \cdot b^n + ... + a_1 \cdot b^1\right) \\ &= b \cdot \left[q - \left(a_n \cdot b^{n-1} + ... + a_1\right)\right], \end{aligned}$$

donde concluímos que $b|a_0$. Por outro lado, como $a_0 \in \{0, 1, ..., b-1\}$ (e portanto, $a_0 < b$), segue obrigatoriamente que $a_0 = 0$.

($\Longleftarrow$) Agora suponhamos $b|a_0$, isto é, $a_0 = q \cdot b$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} a_n \cdot b^n + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0 &= a_n \cdot b^n + ... + a_1 \cdot b^1 + q \cdot b \\ &= b \cdot \left(a_n \cdot b^{n-1} + ... + a_1 + q \right), \end{aligned}$$

ou seja, $a = b \cdot (a_n \cdot b^{n-1} + ... + a_1 + q)$. Logo $b|a$. ■

Corolário 3.3.1 *No sistema decimal, um numero é divisível por* 10 *se, e somente se termina em zero.*

Demonstração. Basta tomar $b = 10$ no teorema anterior. ■

O teoremas a seguir é tanto uma generalização como um corolário do Teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.2 *Dados um número natural não nulo* $a = (a_n \ldots a_1 a_0)_b = a_n \cdot b^n + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0$ *numa base* b *arbitraria e* $k \in \{1, 2, ..., n\}$, b^k *divide* a *se, e somente se, os algarismos* $a_{k-1}, a_{k-2}, ..., a_1, a_0$ *são todos nulos.*

Demonstração.($\Longrightarrow$) Já que por hipótese $b^k|a$, segue que $b|a$. Logo, pelo Teorema 3.3.1 $a_0 = 0$. Assim,

$$a = a_n \cdot b^n + ... + a_1 \cdot b. \tag{3.1}$$

Como $b|a$, segue que existe q_1 tal que $a = b \cdot q_1$ e daí,

$$q_1 = a_n \cdot b^{n-1} + ... + a_1. \tag{3.2}$$

Se $k \geq 2$, então em particular $b^2|a$, ou seja, $a = b^2 q_2$, para algum $q_2 \in \mathbb{N}$. Já que $a = bq_1$, temos $bq_1 = b^2 q_2$ e consequentemente, $q_1 = bq_2$. Logo, $b|q_1$, e daí, pelo Teorema 3.3.1, $a_1 = 0$. Como $k \in \{1, 2, ..., n\}$, aplicando sucessivamente o argumento k vezes, concluímos que $a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 0$.

($\Longleftarrow$) Obviamente se $a_0 = a_1 = ... = a_{k-1} = 0$, teremos

$$a = a_n \cdot b^n + ... + a_k \cdot b^k = b^k \cdot \left(a_n \cdot b^{n-k} + ... + a_k \right).$$

Logo $b^k|a$. ■

Corolário 3.3.2 *No sistema decimal, um numero é divisível por* $10^2, 10^3, ..., 10^k$ *se, e somente se, terminar em* 2 *zeros,* 3 *zeros, ...,* k *zeros, respectivamente.*

Demonstração. Basta tomar $b = 10$ no teorema anterior. ■

Teorema 3.3.3 *Sejam* $a = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b$ *um número natural não nulo numa base* b *arbitraria e* $d \in \mathbb{N}$ *um divisor* b*. Então* d *divide* a *se, e somente se,* d *divide* a_0*.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Como $d|b$ e por hipótese $d|a$, segue que existem $q, q_1 \in \mathbb{N}$ tais que $a = d \cdot q$ e $b = d \cdot q_1$. Assim escrevemos

$$\begin{aligned} d \cdot q &= a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0, \\ &= a_n \cdot (d \cdot q_1)^n + a_{n-1} \cdot (d \cdot q_1)^{n-1} + ... + a_1 \cdot (d \cdot q_1)^1 + a_0. \end{aligned}$$

Daí, isolando a_0, obtemos

$$\begin{aligned} a_0 &= (d \cdot q) - \Big(a_n \cdot (d \cdot q_1)^n + a_{n-1} \cdot (d \cdot q_1)^{n-1} + ... + a_1 \cdot (d \cdot q_1)^1\Big) \\ &= d\Big[q - \Big(a_n \cdot d^{n-1} \cdot q_1^n + a_{n-1} \cdot d^{n-2} \cdot q_1^{n-1} + ... + a_1 \cdot q_1^1\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Logo $d|a_0$.

($\Longleftarrow$) Agora estamos supondo $d|a_0$. Como $d|b$, segue o resultado, pois:

$$\begin{aligned} a &= a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0 \\ &= a_n \cdot (d \cdot q_1)^n + a_{n-1} \cdot (d \cdot q_1)^{n-1} + ... + a_1 \cdot (d \cdot q_1)^1 + d \cdot q \\ &= d \cdot \Big[a_n \cdot d^{n-1} \cdot q_1^n + a_{n-1} \cdot d^{n-2} \cdot q_1^{n-1} + ... + a_1 \cdot q_1^1 + q)\Big]. \end{aligned}$$

Logo $d|a$. ■

Corolário 3.3.3 *No sistema decimal, são válidos os dois seguintes critérios de divisibilidade:*

(I) *Um numero é divisível por* 2 *se, e somente se, termina em* $0, 2, 4, 6$ *ou* 8.

(II) *Um numero é divisível por* 5 *se, e somente se, termina em* 0 *ou* 5.

Demonstração. É suficiente tomar $b = 10$ no teorema anterior. ∎

Teorema 3.3.4 *Sejam* $a = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b$ *um número natural não nulo numa base* b *arbitraria e* $d \in \mathbb{N}$ *um divisor de* b. *Então* d^k *divide* a *se, e somente se,* d *divide* $a_k \cdot b^k + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0$.

Demonstração.($\Longrightarrow$) Suponhamos que $d^k | a$. Como $d|b$, existem q, q_1 naturais tais que $a = q_1 \cdot d^k$ e $b = q \cdot d$. Substituindo a por $q_1 \cdot d^k$ e b por $q \cdot d$ de $k+1$ até n, obtemos:

$$d^k \cdot q_1 \quad = \quad a_n \cdot (d \cdot q)^n + ... + a_{k+1} \cdot (d \cdot q)^{k+1} + a_k \cdot b^k + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0.$$

Daí, isolando o $a_k \cdot b^k + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0$ na expressão acima, temos:

$$\begin{aligned} a_k \cdot b^k + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0 &= d^k \cdot q - \left(a_n \cdot (d \cdot q)^n + ... + a_{k+1} \cdot (d \cdot q)^{k+1}\right) \\ &= d^k \left[q - \left(a_n \cdot d^{n-k} \cdot q^n + ... + a_{k+1} \cdot d \cdot q^{k+1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Logo $d^k | a_k \cdot b^k + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0$.

($\Longleftarrow$) Agora estamos supondo $d^k | a_k \cdot b^k + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0$ e $d|b$. Então existem $q, q_1 \in \mathbb{N}$ tais que, $a_k \cdot b^k + ... + a_1 \cdot b^1 + a_= q_1 \cdot d^k$ e $b = q \cdot d$. Daí,

$$\begin{aligned} a &= a_n \cdot (d \cdot q)^n + ... + a_{k+1} \cdot (d \cdot q)^{k+1} + a_k \cdot b^k + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0 \\ &= a_n \cdot (d \cdot q)^n + ... + a_{k+1} \cdot (d \cdot q)^{k+1} + q_1 \cdot d^k \\ &= d^k \left[\left(a_n \cdot d^{n-k} \cdot q^n + ... + a_{k+1} \cdot d \cdot q^{k+1}\right) + q_1\right]. \end{aligned}$$

Logo $d^k | a$. ∎

Corolário 3.3.4 *No sistema decimal, são válidos os dois seguintes critérios de divisibilidade:*

(I) *Um numero é divisível por* 2^k *se, e somente se,* 2^k *divide o numeral formado pelos* k

últimos algarismos desse número.

(II) *Um numero é divisível por* 5^k *se, e somente se,* 5^k *divide o numeral formado pelos* k *últimos algarismos desse número.*

Demonstração. Basta tomar $b = 10$ no teorema anterior. ■

Observação 3.3.1 *Derivam desse corolário, por exemplo, os critérios de divisibilidade por* 4 *e por* 8*, bastando verificar a divisibilidade dos dois e três últimos algarismos, respectivamente. Assim como também os critérios de divisibilidade por* 25 *e por* 125*.*

Capítulo 4

Representação de um número real

Neste capítulo vamos estender a representação numa base qualquer para números reais, com maior ênfase na representação dos números racionais. Nosso resultado fundamental diz que, dada uma base $b > 1$, para cada número real no intervalo aberto $(0, 1)$ existe um sequência de números naturais entre 0 e b, cuja série de seus termos converge para o número dado. Esse resultado é estendido a todos os números reais. Finalizamos o capítulo com o estudo das dízimas periódicas numa base arbitraria.

4.1 Representação dos números inteiros

Dado $b \in \mathbb{N}$ com $b > 1$, o Teorema 2.4.1 garante que todo número natural a não nulo possui uma, e apenas uma, representação b-ádica, ou seja,

$$a = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0 := (a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0)_b.$$

No caso em que $a \in \mathbb{Z}$ com $a < 0$, tem-se que $|a| = -a > 0$ e consequentemente podemos representá-lo na base b na forma

$$a = -|a| = -(a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + ... + a_1 \cdot b^1 + a_0) = -(a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0)_b.$$

com $0 \leq a_j < b$, para todo $j = 1, 2, ..., n$, e $a_n > 0$.

Desta forma, os resultados e operações dos capítulos anteriores se estendem automaticamente aos números inteiros negativos.

Com isso, podemos fazer subtrações de forma mais consistente, ou seja, sem a limitação dos naturais, onde sempre precisamos supor o minuendo maior que o subtraendo (evitando resultados negativos).

Exemplo 4.1.1 *Façamos a subtração entre* $(110)_2$ *e* $(1111)_2$.

$$\begin{aligned}(110)_2 - (1111)_2 &= \left(1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0\right) - \left(1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1\right)\\ &= -\left[\left(1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1\right) - \left(1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0\right)\right]\\ &= -1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1\\ &= -(1001)_2.\end{aligned}$$

No exemplo anterior ocorre exatamente o mesmo processo que fazemos no sistema decimal. É como efetuar, por exemplo, $5 - 7 = -(7 - 5) = -2$.

Note ainda, que em um sistema b-ádico arbitrário, são válidas as regras usuais do jogo de sinais utilizadas na adição e multiplicação de inteiros. A título de ilustração, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1.2 *Vejamos como fica o número* $-\{(31)_4 - (12)_4 \cdot [-(23)_4]\}$ *em sua forma simplificada:*

$$\begin{aligned}-\{(31)_4 - (12)_4 \cdot [-(23)_4]\} &= -\{(31)_4 + (12)_4 \cdot (23)_4\}\\ &= -\{(31)_4 + (1002)_4\}\\ &= -\{(1033)_4\}\\ &= -(1033)_4.\end{aligned}$$

4.2 Representação de números reais não inteiros

Finalmente chegamos à parte central de nosso trabalho. Começamos com a apresentação de um resultado de convergência de um tipo muito especial de séries, que são aquelas cujos termos são da forma $\dfrac{a_n}{b^n}$, com $0 \leq a_n \leq b - 1$, $a_n \in \mathbb{N}$.

Lema 4.2.1 *Seja $b > 1$ e seja $(a)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números naturais com termos $0 \leq a_n \leq b-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{b^n}$ é convergente.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_n}{b^n} \leq \dfrac{b-1}{b^n}$ Daí, pelo teste da comparação, a série converge, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = (b-1) \lim_{k\to\infty} \frac{b}{b-1} \cdot \frac{b^k - 1}{b^{k+1}} = b \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b^{k+1}} \right) = 1.$$

■

Tomando $b = 10$ no Lema 4.2.1 segue que, dado qualquer $a \in \mathbb{N}$, a série

$$a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, \quad 0 \leq a_n < 10,$$

converge para um $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Usando a notação

$$\frac{a_1}{10} = 0, a_1\,, \quad \frac{a_2}{10^2} = 0, 0a_2\,,\ ...,\quad \frac{a_n}{10^n} = 0, \underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ zeros}} a_n,$$

onde cada n-ésima posição à direita da vírgula é chamada de n-ésima casa decimal, podemos escrever

$$\alpha = a, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots . \tag{4.1}$$

Exemplo 4.2.1 *Usando a notação acima, a série* $3 + \dfrac{5}{10} + 0 + 0 + \cdots$ *fica escrita como* $3,5$, *ou seja, na forma decimal, a fração* $\dfrac{7}{2}$ *pode ser escrita como* $\dfrac{7}{2} = 3 + \dfrac{5}{10} + 0 + 0 + \cdots = 3,5$.

Exemplo 4.2.2 *O valor da série* $4 + 0,7 + 0,02 + 0,001$ *é a representação decimal da fração* $\dfrac{4721}{1000}$. *Logo,* $\dfrac{4721}{1000} = 4,721$.

Exemplo 4.2.3 *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{10^n} = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots = 0,3333...$ *é a representação decimal da fração* $\dfrac{1}{3}$. *De fato,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{10^n}$ *é uma série geométrica de razão* $\dfrac{1}{10} < 1$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{10^n} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$. *Portanto é uma representação decimal da fração* $\dfrac{1}{3}$.

Definição 4.2.1 *O número $\alpha = a, a_1 a_2 ... a_n ...$ é o que chamamos de representação (forma ou expansão) decimal de $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Quando existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq k$ $a_n = 0$, dizemos que a representação (4.1) decimal de α é finita. Caso contrário, estaremos diante de uma representação decimal infinita.*

Exemplo 4.2.4 *O numeral* $3,25$ *é uma representação decimal finita da fração* $\dfrac{13}{4}$*. De fato, a parte inteira vale* $a = 3$ *e as casas decimais são* $a_1 = 2, a_2 = 5$ *e para todo* $j \geq 3$ *temos* $a_j = 0$*. Portanto* $3,25$ *representa a fração* $\dfrac{13}{4}$*.*

Exemplo 4.2.5 *Na notação de representação decimal, a série* $1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{10^2} + \sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3}{10^n}$*, pode ser escrita como* $1 + 0,1 + 0,02 + 0,003 + 0,0003 + 0,00003 + ...$*, onde para todo* $j \geq 3$ $a_j = 3$*; por* $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3}{10^n}$ *ser uma série geométrica de razão* $\dfrac{1}{10}$*, converge para* $\dfrac{1}{300}$*. Logo, o numeral* $1,1233333\ldots$ *é uma representação decimal infinita da soma de frações* $1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{100} + \dfrac{1}{300} = \dfrac{337}{300}$*, ou seja,* $1,1233333\cdots = \dfrac{337}{300}$*.*

Também pelo Lema 4.2.1 segue que, dado qualquer $a \in \mathbb{N}$, a série

$$(a)_b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}, \;\; 0 \leq a_n < b,$$

converge para um $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Usando a notação

$$\frac{a_1}{b} = 0, a_1\,; \quad \frac{a_2}{b^2} = 0, 0a_2\,; \;\; ...; \quad \frac{a_n}{b^n} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ zeros}}a_n,$$

onde cada n-ésima posição à direita da vírgula é chamada de n-ésima casa b-ádica, podemos escrever

$$\alpha = (a, a_1a_2 \ldots a_n \ldots)_b. \tag{4.2}$$

Definição 4.2.2 *O número* $\alpha = (a, a_1a_2...a_n...)_b$ *é o que chamamos de representação (ou forma ou expansão) de* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *na base b ou forma b-ádica de* α*. Quando existe um* $k \in \mathbb{N}$ *tal que, para todo* $n \geq k$ $a_n = 0$*, dizemos que a representação* (4.2) *na base b é finita. Caso contrário, estaremos diante de uma representação b-ádica infinita.*

Assim como no caso da forma decimal, a representação b-ádica de um número real fracionário pode ser feita usando séries.

Exemplo 4.2.6 *A série* $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^n}$ *converge para a fração* $\dfrac{1}{3}$*. Logo, na base* 4*, temos* $\dfrac{1}{3} = (0,111...)_4$*.*

Exemplo 4.2.7 *Seja $b > 1$ um natural. Fixando x natural com $0 < x \leq b-1$, a série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{b^n}$ (de razão de razão $\frac{1}{b}$) converge para a fração $\frac{x}{b-1}$. De fato,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{b^n} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} = x \cdot \frac{\frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{b}} = x \cdot \frac{\frac{1}{b}}{\frac{b-1}{b}} = x \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{b}{b-1} = \frac{x}{b-1}.$$

Logo, sempre que $0 < x \leq b-1$, o numeral $(0, xxx...)_b$ representa a fração $\frac{x}{b-1}$ na base b.

Sabemos do lema 4.2.1 que toda série da forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, com $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_n \leq b-1$ converge para um $\alpha \in [0;1)$, e chamamos seu limite de $(0, a_1a_2...a_n...)_b$ .Diante dos exemplos abordados, podemos nos questionar se a recíproca é verdadeira, ou seja, fixado um número natural $b > 1$ e dado $\alpha \in [0;1)$, podemos encontrar uma série do tipo $\frac{a_n}{b^n}$ (onde $0 \leq a_n \leq b-1$) convergente para α? O Teorema a seguir nos dar uma resposta positiva sobre tal indagação.

Teorema 4.2.1 *Seja $\alpha \in (0;1)$, um número real e seja $b > 1$ um número natural. Então existe uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ com $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_n \leq b-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} := (0, a_1a_2...a_n...)_b.$$

Demonstração. Seja

$$\alpha_1 := \frac{a_1}{b} = \max\left\{ \frac{i}{b} \mid \frac{i}{b} \leq \alpha, \quad 0 \leq i \leq b-1 \right\}.$$

Então

$$\alpha_1 := \frac{a_1}{b} \leq \alpha < \beta_1, \quad \text{onde} \quad \beta_1 := \frac{a_1+1}{b}.$$

Se $\alpha = \alpha_1$, então $\alpha = 0{,}a_1$ e o processo finaliza. Caso contrário, tomemos

$$\alpha_2 = \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2}, \quad \text{onde} \quad \frac{a_2}{b^2} := \max\left\{ \frac{i}{b^2} \mid \frac{a_1}{b} + \frac{i}{b^2} \leq \alpha, \quad 1 \leq i \leq b-1 \right\}.$$

Então,

$$\alpha_2 \leq \alpha < \beta_2, \quad \text{onde} \ \ \beta_2 := \frac{a_1}{b} + \frac{a_2+1}{b^2}.$$

Se $\alpha = \alpha_2$, então $\alpha = 0, a_1a_2$ e o processo finaliza. Caso contrário, repetimos o procedimento.

Se existir um $n \in \mathbb{N}$ para o qual $\alpha = \alpha_n = 0, a_1a_2...a_n$, então a prova finaliza nesse passo. Caso contrário, consideremos as sequências $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ definidas recursivamente como nos processos anteriores, ou seja,

$$\alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b^j} \quad \text{e} \quad \beta_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{b^j} + \frac{a_n+1}{b^n}.$$

Por construção, $\alpha_n < \beta_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado um $\varepsilon > 0$, sabemos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/b^n < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Daí,

$$\beta_n - \alpha_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{b^j} + \frac{a_n+1}{b^n} - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b^j} = \frac{a_n+1}{b^n} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{b^n} < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{4.3}$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\alpha_n < \alpha < \beta_n$, segue disso e de (4.3) que $\alpha - \alpha_n < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Portanto,

$$|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Com isso, concluímos que

$$\lim_{x\to\infty} \alpha_n = \alpha, \ \text{ou seja,} \ \alpha = (0, a_1a_2...a_n...)_b$$

e isso finaliza a demonstração. ■

Quando $b = 10$, temos do teorema acima que existe uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ com $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_n \leq 9$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} := 0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots.$$

Corolário 4.2.1 *Seja $x \in \mathbb{R}$ e seja $b > 1$ um número natural. Então existem um $a \in \mathbb{N}$ e uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ com $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 < a_n \leq b-1$, tal que,*

$(i) \quad x = a + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{b^n} = (a, a_1a_2..., a_n...)_b, \quad se \quad x \geq 0;$

$(ii) \quad x = -\left(a + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{b^n}\right) = -(a, a_1a_2...a_n...)_b, \quad se \quad x < 0.$

Demonstração. (i) Dado $x \geq 0$, tomando $a = [x]$ (definição 1.3.1) tem-se $x = a + \alpha$, para algum $\alpha \in (0, 1)$. Daí, pelo Teorema 4.2.1 existe uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ com cada $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 < a_n < b - 1$, tal que,

$$\alpha = (0, a_1a_2....a_n...)_b.$$

Logo, escrevendo a na base b, digamos $a = (c_1c_2 \dots c_k)_b$, temos:

$$x = a + \alpha = (c_1c_2 \dots c_k, a_1a_2....a_n...)_b.$$

(ii) Se $x < 0$, pelo item (i), existem $a \in \mathbb{N}$ e uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ com $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_n \leq b - 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que,

$$|x| = a + \alpha = a, a_1a_2...a_n....$$

Logo, escrevendo $a = (c_1c_2 \dots c_k)_b$ temos: $\quad x = -(c_1c_2 \dots c_k, a_1a_2...a_n...)_b$. ■

Segue do corolário acima que cada número $x \in \mathbb{R}$ possui uma representação (expansão, o forma) decimal, ou seja, existe uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ com $a_n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_n \leq 9$, tal que:

1. $x = a + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = a, a_1a_2 \dots a_n \dots,$ se $x \geq 0$;

2. $x = -(a + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}) = -a, a_1a_2 \dots a_n \dots,$ se $x < 0$.

Exemplo 4.2.8 *Vamos utilizar o método de demonstração do Teorema 4.2.1 para determinemos a representação de $\sqrt{3}$ na base 7 até a terceira casa.*

Se $a \in \mathbb{N}$ e $a^2 \leq 3$, então $a = 1$, pois $2^2 = 4$. Logo $\left[\sqrt{3}\right] = 1$ e $1 < \sqrt{3} < 2$. Particionando o intervalo $[1, 2]$ em 7 subintervalos de mesmo comprimento, obtemos a partição:

$$P = \left\{ 1,\ 1 + \frac{1}{7},\ 1 + \frac{2}{7},\ 1 + \frac{3}{7},\ 1 + \frac{4}{7},\ 1 + \frac{5}{7},\ 1 + \frac{6}{7} \right\}.$$

Observemos que $(1,5)_7^2 = (2,64)_7 \quad e \quad (1,6)_7^2 = (3,31)_7$. *Logo,*

$$(1,5)_7 < \sqrt{3} < (1,6)_7 \text{ e assim } a_1 = 5.$$

Particionando o intervalo $[(1,5)_7; (1,6)_7]$ *em* 7 *subintervalos de mesmo comprimento, obtemos a partição*
$P = \left\{ 1 + \frac{5}{7}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{1}{7^2}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{2}{7^2}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{3}{7^2}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{4}{7^2}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7^2}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{6}{7^2} \right\}.$

Como $(1,51)_7^2 = (3,0031)_7 > 3$, *tem-se que*

$$(1,50)_7 < \sqrt{3} < (1,51)_7 \quad e \quad a_2 = 0.$$

Particionando o intervalo $[(1,50)_7; (1,51)_7]$ *em* 7 *subintervalos de mesmo comprimento, obtemos a partição*
$P = \left\{ 1 + \frac{5}{7}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{1}{7^3}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{2}{7^3}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{3}{7^3}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{4}{7^3}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7^3}, 1 + \frac{5}{7} + \frac{6}{7^3} \right\}.$
Observemos que $(1,506)_7^2 = (2,666451)_7 < 3$ *e como* $(1,506)_7 > (1,505)_7 > ... > (1,501)_7 >$, $a_3 = 6$. *Portanto, uma aproximação em três casas* 7*-ádicas para* $\sqrt{3}$ *é* $(1,506)_7$.

Exemplo 4.2.9 *Determinemos a representação decimal de* $\sqrt{5}$ *até a terceira casa decimal.*

Se $a \in \mathbb{N}$ *e* $a^2 \leq 5$, *então* $a = 2$, *pois* $2^2 = 4$ *e* $3^2 = 9$. *Logo* $\left[\sqrt{5}\right] = 2$ *e* $2 < \sqrt{5} < 3$. *Particionando o intervalo* $[2,3]$ *em* 10 *subintervalos de mesmo comprimento, obtemos a partição*

$$P = \left\{ 2,\ 2 + \frac{1}{10},\ 2 + \frac{2}{10}, ...,\ 2 + \frac{9}{10} \right\}.$$

Observemos que $(2,2)^2 = 4,84$ *e* $(2,3)^2 = 5,29$. *Logo,*

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3 \quad \text{e assim, } a_1 = 2.$$

Particionando o intervalo $[2,2; 2,3]$ *em 10 subintervalos de mesmo comprimento, obtemos a partição:*

$$P = \left\{2 + \frac{2}{10}, 2 + \frac{2}{10} + \frac{1}{10^2}, 1 + \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2}, ..., 1 + \frac{2}{10} + \frac{9}{10^2}\right\}.$$

Observemos que $(2,23)^2 = 4,9729$ *e* $(2,24)^2 = 5,0176$. *Logo,*

$$2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \text{ e consequentemente } a_2 = 3.$$

Particionando o intervalo $[2,23; 2,24]$ *em 10 subintervalos de mesmo comprimento, obtemos a partição*

$$P = \left\{2 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2}, 2 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3}, ..., 2 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{9}{10^3}\right\}.$$

Observemos que $(2,236)^2 = 4,999696$ *e* $(2,237)^2 = 5,004169$. *Logo,*

$$2,236 < \sqrt{5} < 2,237 \text{ e consequentemente, } a_3 = 6.$$

Portanto, uma aproximação em três casas decimais para $\sqrt{5}$ *é* $2,236$. *Logo,* $\sqrt{5} = 2,236....$

4.3 Mudança de base para números não inteiros

Para converter para o sistema decimal um número não inteiro $(a, a_1a_2...a_n...)_b$ representado numa base $b \neq 10$, basta converter $(a)_b$ para a base 10 e somar o numeral resultante com as frações da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$ representadas na base 10. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.3.1 *O numeral* $(0,321)_4$ *é a representação* 4*-ádica da fração* $\frac{57}{64}$*, cuja forma decimal é* $0,890625$. *De fato,*

$$(0,321)_4 = \frac{3}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{1}{4^3} = \frac{57}{64} \quad e \quad \frac{3}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{1}{4^3} = 0,75 + 0,125 + 0,015625 = 0,890625.$$

Exemplo 4.3.2 *Para converter o número* $(21,11)_3$ *para o sistema decimal procedemos do seguinte modo:*

$$(21,11)_3 = 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} = 6 + 1 + 0,333... + 0,111... = 7,444...$$

Agora vamos ver como se faz o processo inverso, ou seja, mudar um número decimal $x \in (0,1)$ para uma base $b \neq 10$. O Teorema 4.2.1 garante que existe uma série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$,

$0 \leq a_n \leq b-1$ ($a_n \in \mathbb{N}$) que converge para x. Neste caso, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$ e daí, multiplicando por b em ambos os lados temos, $b \cdot x = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{b^{n-1}}$. Então $[b \cdot x] = a_1$ e $b \cdot x - a_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{b^{n-1}}$, que multiplicando por b conduz à expressão $b^2x - ba_1 = a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{b^{n-2}}$. Assim, $[b^2x - ba_1] = a_2$ e $b^2x - ba_1 - a_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{b^{n-2}}$, que multiplicando por b leva à expressão $b^3x - b^2a_1 - ba_2 = a_3 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{a_n}{b^{n-3}}$. Daí, $[b^3x - b^2a_1 - ba_2] = a_3$. Prosseguindo desse modo, vemos que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$b^kx - b^{k-1}a_1 - b^{k-2}a_2 - \cdots - ba_{k-1} = a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}.$$

Logo, $[b^kx - b^{k-1}a_1 - b^{k-2}a_2 - \cdots - ba_{k-1}] = a_k$. Consequentemente, a representação b-ádica de x é

$$(0, [bx][b^2 - ba_1][b^3x - b^2a_1 - ba_2]...[b^kx - b^{k-1}a_1 - b^{k-2}a_2 - \cdots - ba_{k-1}]...)_b, \qquad (4.4)$$

onde $[\cdot]$ é a função máximo inteiro (ver Definição 1.3.1).

Exemplo 4.3.3 *Vamos converter o número decimal* $3,25$ *para o sistema binário. Para isso convertemos separadamente o* 3 *e o* $0,25$:

$$3 = 1 \cdot 2 + 1 = (11)_2,$$

e para a parte decimal temos:

$$0,25 \cdot 2 = 0,5 \quad \textit{e daí,} \quad [0,25 \cdot 2] = 0;$$

$$0,5 \cdot 2 = 1; \quad \textit{e daí,} \quad [0,5 \cdot 2] = 1.$$

Logo, a representação binária de $3,25$ *é* $(11,01)_2$.

Exemplo 4.3.4 *No Exemplo 4.2.9 obtivemos uma aproximação até a terceira casa decimal para o* $\sqrt{5}$, *a saber,* $\sqrt{5} \approx 2,236$. *Vamos usar esse valor para obter uma aproximação* *para* $\sqrt{5}$ *na base* 3 *até a quarta casa. A parte inteira* $[2,236] = 2$*, que já está na base* 3*. Para a parte não inteira temos:*

$$0,236 \cdot 3 = 0,708 \quad \textit{e daí,} \quad [0,236 \cdot 3] = 0;$$
$$0,708 \cdot 3 = 2,124 \quad \textit{e daí,} \quad [0,708 \cdot 3] = 2;$$
$$0,124 \cdot 3 = 0,372 \quad \textit{e daí,} \quad [0,124 \cdot 3] = 0;$$
$$0,372 \cdot 3 = 1,116 \quad \textit{e daí,} \quad [0,372 \cdot 3] = 1.$$

Logo, uma aproximação de $\sqrt{5}$ *até a quarta casa ternária é* $(0,0201)_3$*, ou seja,* $\sqrt{5} \approx (0,0201)_3$.

Exemplo 4.3.5 *Converter* $6,85$ *para a base* 4*. Primeiramente convertemos a parte inteira:* $6 = 1 \cdot 4 + 2 = (12)_4$*. Para parte fracionária temos:*

$$0,85 \cdot 4 = 3,4 \quad \textit{e assim temos } a_1 = [0,85 \cdot 4] = 3; \tag{4.5}$$
$$0,4 \cdot 4 = 1,6; \quad \textit{e assim temos } a_2 = [0,6 \cdot 4] = 1; \tag{4.6}$$
$$0,6 \cdot 4 = 2,4; \quad \textit{e assim temos } a_3 = [0,4 \cdot 4] = 2, \tag{4.7}$$
$$0,4 \cdot 4 = 1,6; \quad \textit{e assim temos } a_4 = [0,6 \cdot 4] = 1. \tag{4.8}$$

Notemos que na linha (4.8) *reaparece o valor* $0,4$ *da linha* (4.6)*. Consequentemente, teremos um número infinito de casas quaternárias com o par de algarismos* 12 *a partir da segunda casa, repetindo-se infinitamente. Neste caso,* $6,85 = (12,312121212...)_4$.

4.4 Dízimas Periódicas

Definição 4.4.1 *Uma representação decimal de um número real* $r > 0$ *é uma* ***dízima periódica*** *quando, e somente quando, apresenta um número infinito de algarismos nas casas decimais e possui uma das seguintes formas:*

$$r = a, \underbrace{a_1 a_2 ... a_p}_{\textit{período}} a_1 a_2 ... a_p ...,$$

ou

$$r = a,\underbrace{b_1b_2...b_q}_{\textit{pré-período}}\underbrace{a_1a_2...a_p}_{\textit{peroído}}a_1a_2...a_p...,$$

onde $a \geq 0$, $0 \leq a_i, b_i \leq 9$, *com pelo menos um dos* $a_i \neq 0$.

Observemos que, a partir de uma certa casa decimal um grupo de (um ou mais) algarismos se repete infinitamente. Esse grupo de algarismos $a_1a_2...a_p$ que se repetem é chamado de **período** e o grupo de algarismos nas casas decimais que os antecedem, $b_1b_2...b_q$, tem o nome de **pré-período**. Os números p e q são, respectivamente, o tamanho do período e o tamanho do pré-período.

Exemplo 4.4.1 *A dízima periódica* $0,23112121212...$ *tem pré-período* 231 *e período* 12. *Enquanto que* $2,685252....$ *tem pré-período* 68 *e período* 52.

Convenciona-se sempre chamar de período o menor período possível, e que o pré-período se encerra onde se inicia o período. Notações usuais de dízimas periódicas:

$$a, a_1a_2...a_pa_1a_2...a_p... := a, \overline{a_1a_2...a_p},$$

e

$$a, b_1, b_2...b_qa_1a_2...a_pa_1a_2...a_p... := a, b_1b_2...b_q\overline{a_1a_2...a_p}.$$

Na notação acima as dízimas periódicas do Exemplo 4.4.1 ficam escritas como $0,231\overline{12}$ e $2,68\overline{52}$.

Definição 4.4.2 *Dizemos que uma representação numa base* b *de um número real* $r > 0$ *é uma **dízima periódica*** b*-ádica (ou seja, na base* b*) quando tal representação apresenta um número infinito de algarismos e possui uma das seguintes formas:*

$$r = (a,\underbrace{\overline{a_1a_2...a_p}}_{\textit{período}})_b, \qquad ou \qquad r = (a,\underbrace{b_1b_2...b_q}_{\textit{pré-período}}\underbrace{\overline{a_1a_2...a_p}}_{\textit{período}})_b,$$

onde $a \geq 0$, $0 \leq a_i, b_i \leq b-1$, *com pelo menos um dos* $a_i \neq 0$.

Exemplo 4.4.2 *A fração* $\dfrac{17}{20}$ *na forma decimal fica* $0,85$, *enquanto que representada na base* 4 *se escreve como* $(0,312121212...)_4$ *(ver o Exemplo 4.3.5), ou seja,* $\dfrac{17}{20} = (0,3\overline{12})_4$ *e portanto, na base* 4 *essa fração é uma dízima periódica com pré-período* 3 *e período* 12.

Observemos que até o momento todos os exemplos desta seção são de números racionais. Isto nos motiva a indagar se todo racional tem representação b-ádica finita ou como dízima periódica e se a recíproca também é válida, ou seja, se toda dízima periódica b-ádica é um número racional. A resposta vem no teorema a seguir.

Teorema 4.4.1 *Um numero $x \in \mathbb{Q}^+$ se, e somente se, sua representação decimal (e qualquer b-ádica) é finita ou uma dizima periódica.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Esta parte da demonstração tem como base a prova do Teorema 2 da Seção 5.11 de H. Domingues [4]. Seja $x \in \mathbb{Q}$ escrito como fração irredutível, isto é, $x = \dfrac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$ e $\mathrm{mdc}\,(m, n) = 1$. Consideremos os restos das divisões de $m, 10m, 10^2m, 10^3m, ..., 10^km, ...$ como sendo $r_1,\ r_2,\ r_3,\ ....,\ r_{k+1}, ...$, respectivamente.

Se $r_1 = 0$, então $n|m$. Como $\mathrm{mdc}\,(m, n) = 1$, temos neste caso $n = 1$ e portanto, $x = m \in \mathbb{Z}$ possui representação b-ádica (em particular, decimal) finita.

Se para algum $k \geq 0$ tivermos $r_{k+1} = 0$ (ou seja, $n|10^km$), como $\mathrm{mdc}\,(m, n) = 1$, segue que $n|10^k$, isto é, existe um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $10^k = nq$ e daí, $10^{k+1} = n10q$. Logo $n|10^{k+2}$, e consequentemente $r_{k+2} = 0$. Neste caso $x = \dfrac{mq}{10^k}$ e possui uma representação decimal finita.

Agora suponhamos $r_k \neq 0$ para todo $k \geq 0$. Então pelo algorítimo da divisão euclidiana, para cada k existe um único $q_k \in \mathbb{Z}$ tal que $10^km = nq_k + r_{k+1}$, com $r_{k+1} \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Logo os r_{k+1}, $k \geq 0$, podem assumir uma quantidade finita de valores e como os índices percorrem todos os naturais, em algum momento existirá um menor índice p de modo que $r_{p+1} = r_{k+1}$, para algum $k < p$.

Sem perda de generalidade, suponhamos $r_{p+1} = r_1$. Então $10^pm \equiv r_1 \mod n$ e consequentemente $10^{p+1}m \equiv 10r_1 \mod n$; além disso, $10r_1 \equiv 10m \mod n$ e assim, por transitividade, $10^{p+1}m \equiv 10m \mod n$. O fato de $10m \equiv r_2 \mod n$ implica que $10^{p+1}m \equiv r_2 \mod n$. Pela unicidade da divisão euclidiana tem-se que $r_{p+2} = r_2$. Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$r_{p+1} = r_1, r_{p+2} = r_2, r_{p+3} = r_3, ..., r_{p+(p-1)} = r_{p-1}, r_{2p} = r_p, r_{2p+1} = r_{p+1} = r_1 ...$$

Portanto, denotando por a_j o algarismos da j-ésima casa decimal de x, temos:

$$\begin{aligned}
a_{p+1} &= \left[\frac{10r_{p+1}}{n}\right] = \left[\frac{10r_1}{n}\right] = a_1,\\
a_{p+2} &= \left[\frac{10r_{p+2}}{n}\right] = \left[\frac{10r_2}{n}\right] = a_2,\\
&\vdots\\
a_{p+(p-1)} &= \left[\frac{10r_{p+(p-1)}}{n}\right] = \left[\frac{10r_{p-1}}{n}\right] = a_{p-1},\\
a_{2p+1} &= \left[\frac{10r_{2p+1}}{n}\right] = \left[\frac{10r_1}{n}\right] = a_1,\\
&\vdots\\
a_{2p)} &= \left[\frac{10r_{2p}}{n}\right] = \left[\frac{10r_{r_p}}{n}\right] = a_p.
\end{aligned}$$

Neste caso, $x = a, a_1a_2a...a_pa_1a_2a...a_p....$, onde $a = \left[\dfrac{m}{n}\right]$, ou seja, $x = a, \overline{a_1a_2...a_p}$.

Se $r_{k+1} = r_{p+1}$, com $1 \leq p \leq k-1$, então fazendo $k = p+j$ e argumentando como no caso anterior, concluiremos que

$$x = a, \underbrace{b_1b_2...b_q}_{\text{pré-período}}\, \overline{a_1a_2...a_p} = a, b_1b_2...b_q + 0, \underbrace{00...0}_{\text{q zeros}}\, \overline{a_1a_2...a_p},$$

pois neste caso, basta aplicar o processo anterior começando com $k = p - j$. (Em caso de dúvida, sugerimos consultar o Teorema 2 da referência supracitada).

($\Longleftarrow$) Se $x = a, a_1a_2...a_n$ então

$$x = a + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + ... + a_n 10^{-n} = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} \in \mathbb{Q}.$$

Agora, se $x = a,\overline{a_1 a_2 ... a_p}$ então

$$\begin{aligned}
x &= a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_p}{10^p} \\
&\quad + \frac{a_1}{10^{p+1}} + \frac{a_2}{10^{p+2}} + \cdots + \frac{a_p}{10^{2p}} \\
&\quad + \frac{a_1}{10^{2p+1}} + \frac{a_2}{10^{2p+2}} + \cdots + \frac{a_p}{10^{3p}} \; + \cdots \\
&= a + \frac{a_1}{10}\left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{3p}} + \cdots\right) \\
&\quad + \frac{a_2}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{3p}} + \cdots\right) + \cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \frac{a_p}{10^p}\left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{3p}} + \cdots\right) \\
&= a + \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{10^j}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^p}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Daí, aplicando o Teorema 1.2.1 com $r = \dfrac{1}{10^p}$ obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^p}\right)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{10^p}} = \frac{10^p}{10^p - 1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
x &= a + \frac{1}{10^p - 1}\sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{10^j} \\
&= a + \frac{1}{10^p} \cdot \frac{10^p}{10^p - 1}\sum_{j=1}^{p} a_j 10^{p-j} \\
&= a + \frac{1}{10^p - 1}\sum_{j=1}^{p} a_j 10^{p-j} \in \mathbb{Q}. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Para uma demonstração do caso $b \neq 10$, basta substituir 10 por b que o resultado segue. De fato, chega-se à seguinte fórmula para $(a,\overline{a_1 a_2 \cdots a_p})_b$, onde $0 \leq a_j \leq b-1$:

$$\begin{aligned}
(a,\overline{a_1 a_2 \cdots a_p})_b &= (a)_b + \frac{1}{b^p - 1}\sum_{j=1}^{p} a_j b^{p-j} \\
&= (a)_b + \frac{(a_1 a_2 \ldots a_p)_b}{\underbrace{(b-1)(b-1)\ldots(b-1)}_{p\ (b-1)'s}} \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Deixamos os casos

$$x = a, b_1 b_2 \dots b_q a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{e} \quad x = a, b_1 b_2 \dots b_q \overline{a_1 a_2 \dots a_p}$$

como exercício. Com isso finalizamos a demonstração. ■

Veja que a fórmula (4.9) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{a_1 10^{p-1} + a_2 10^{p-2} + \cdots a_{p-1} 10 + a_p}{\underbrace{99\dots999}_{p \text{ noves}}} \\ &= a + \frac{a_1 a_2 \dots a_{p-1} a_p}{\underbrace{99\dots999}_{p \text{ noves}}}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

que é comumente chamada de **fração geratriz** da dízima periódica $a, \overline{a_1 a_2 \dots a_p}$.

Exemplo 4.4.3 *Vamos determinar a fração geratriz dos seguintes números racionais:*

(a) $1,\overline{245}$; (b) $(21,\overline{2453})_8$.

(a) Nesse item $p = 3$, e assim, pela equação (4.11):

$$\begin{aligned} 1,\overline{245} &= 1 + 0,\overline{245} \\ &= 1 + \frac{2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5}{10^3 - 1} \\ &= 1 + \frac{245}{999}. \end{aligned}$$

(b) Nesse item, $p = 4$ e assim, por (4.10):

$$\begin{aligned} (21,\overline{245})_8 &= (21)_8 + (0,\overline{2453})_8 \\ &= (21)_8 + \frac{2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 3}{8^3 - 1} \\ &= (21)_8 + \frac{(2453)_8}{4095} \\ &= (21)_8 + \frac{(2453)_8}{(7777)_8}. \end{aligned}$$

O Exemplo 4.4.2 e o Exemplo 4.4.3 ilustram que, em algumas situações um mesmo número pode possuir uma representação finita em uma base e infinita em outra, o que nos motiva a fazer a seguinte pergunta: Dada uma fracão $r = \frac{p}{q}$ irredutıvel cuja forma decimal é infinita, será que existe uma base $b > 1$ na qual r possui uma representação finita? Veremos nos dois próximos teoremas a solução para esta questão.

Teorema 4.4.2 *Se $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, com $mdc(m, n) = 1$, então existe um natural $b > 1$ tal que a representação b-ádica de x é finita.*

Demonstração. Se $x = 1$ ou $n = 1$, basta tomar $b = 10$.

Se $n > 1$, temos duas possibilidades:

$1^{\underline{a}}$: $m < n$. Neste caso, tomando $b = n$ obtemos uma representação b-ádica finita de x:

$$x = m \cdot n^{-1} = (0, m)_b.$$

$2^{\underline{a}}$: $m > n$. Neste caso, pelo algoritmo da divisão podemos escrever:

$$m = n \cdot q + r, \ \text{ com } 0 \leq r \leq n - 1.$$

Daí,

$$x = \frac{n \cdot q + r}{n} = q + r \cdot n^{-1} = (q, r)_b,$$

que é a forma b-ádica finita de x. ■

Exemplo 4.4.4 *A forma decimal da fração $\frac{28}{15}$ é a dizima periódica $1,8\overline{6}$, enquanto que na base 15 podemos escrevê-la como*

$$\frac{28}{15} = \frac{15 + 13}{15} = 1 + \frac{13}{15} = (1, D)_{15},$$

onde D representa o 13 como algarismo da base 15.

Nosso último teorema estabelece a menor base na qual um número racional $r > 0$ qualquer tem uma representação finita.

Teorema 4.4.3 *Seja $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ uma fração irredutível, com $n = p_1^{\alpha_1} \cdot {}_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ a decomposição de n em fatores primos. Então r tem uma representação finita na base $b = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$.*

Demonstração. Seja $b = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$. Observemos que é suficiente considerarmos o caso em que $m = 1$. Tomando $\alpha = \max\{\, \alpha_j \mid 1 \leq j \leq k \,\}$ temos:

$$r = \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}} = \frac{p_1^{\alpha-\alpha_1}}{p_1^{\alpha}} \cdot \frac{p_1^{\alpha-\alpha_2}}{p_2^{\alpha}} \cdots \frac{p_k^{\alpha-\alpha_k}}{p_k^{\alpha}} = \frac{p_1^{\alpha-\alpha_1} \cdot_2^{\alpha-\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha-\alpha_k}}{b^{\alpha}}$$

e portanto, r tem uma representação b-ádica finita. De fato, sabemos que um número $r > 0$ possui representação finita no sistema de numeração posicional de base b se, e somente se, existe um expoente $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $b^{\alpha} \cdot r \in \mathbb{N}$. ■

Exemplo 4.4.5 *Toda fração irredutível* $\dfrac{m}{72}$ *admite uma representação finita na base* 6.

De fato, a decomposição do 72 em fatores primos é $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Portanto tomando $b = 2 \cdot 3 = 6$, o Teorema 4.4.3 garante o resultado.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, C. B. *História da matemática; tradução: Elza F. Gomide*, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[2] CIPRIANO, V. *A Construção dos Números Inteiros e Racionais pelo Método da Simetrização e Aplicações*. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal do Piauí, CCN – UFPI, 2016.

[3] CLAUDIONOR, A. P *Algarismos Romanos: Nobres Incompreendidos.* Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística – UFBA, 2017.

[4] DOMINGUES, H. *Fundamentos de aritmética*, Editora UFSC, Florianópolis, 2013.

[5] IFRAH, G. *História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo vol 1.* Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1995.

[6] IFRAH, G. *Os números: a história de uma grande invenção.* 4. ed. São Paulo: Globo, 2005.

[7] JACY MONTEIRO, L. H. *Elementos de álgebra.* IMPA, ao Livro Técnico S.A., 1969.

[8] LIMA, E. L. *Curso de análise vol. 1*, 12ª ed., Coleção Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[9] MOURA, R. *Notas de aula do curso de fundamentos de matemática elementar*, CCN, UFPI, 2018.

[10] RODRIGUES, A. E. A. *Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino*. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, 2013.