UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

# PROBABILIDADE: UMA REFLEXÃO TEÓRICO-PRÁTICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Emanuel Adriano Dantas

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Campina Grande - PB
Junho/2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG.

D192p Dantas, Emanuel Adriano.

Probabilidade: Uma reflexão teórico-prática no ensino da Matemática / Emanuel Adriano Dantas. Campina Grande, 2013.
89 f.:il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

"Orientador: Prof. Dr.Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva"
Referências.

1. Probabilidade 2. Jogos 3. Atividades
I. Silva, Diogo Diniz Pereira da Silva e. II. Título

CDU-519.2 (043)

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**

# PROBABILIDADE: UMA REFLEXÃO TEÓRICO-PRÁTICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

**por**

**Emanuel Adriano Dantas** †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

† Bolsista CAPES

# PROBABILIDADE: UMA REFLEXÃO TEÓRICO-PRÁTICA NO ENSINO NA MATEMÁTICA

**por**

**Emanuel Adriano Dantas**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira - UEPB

Prof$^{a}$. Dr$^{a}$. Rosana Marques da Silva - UFCG

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG
Orientador

**Universidade Federal de Campina Grande**
**Centro de Ciências e Tecnologia**
**Unidade Acadêmica de Matemática**
**Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**Junho/2013**

# Dedicatória

A meus pais, Josefa Diana Dantas e Luiz Cipriano Dantas, por terem me guiado sempre no bom caminho com seus ensinamentos e carinhos. Por serem a base da minha vida e estarem presentes em todas as etapas da minha formação profissional, dedico-lhes mais essa conquista.

# Agradecimentos


**A Deus**
Pelas oportunidades que foram dadas em minha vida.

**À minha esposa e filhos**
Pela compreensão nas ausências do convívio do lar.

**À Escola Terezinha Carolino de Souza**
Por disponilizar as turmas para realização das atividades desse trabalho e liberação parcial de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT.

**À SBM**
Pela criação deste Curso em Rede Nacional.

**À UFCG**
Pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

**À CAPES**
Pela concessão da bolsa de estudos.

# Resumo

Neste trabalho será explorado o conceito de probabilidade, utilizando metodologias investigativas e direcionadas por atividades que buscam mostrar, através de jogos e desafios, a importância desse conhecimento na formação cognitiva do aluno, propiciando-lhe uma reflexão teórico-prática acerca das experiências vivenciadas e estimulando o raciocínio lógico-matemático. Cada atividade vem acompanhada das metodologias, da análise dos resultados e dos questionários avaliativos. Também, serão mostrados os aspectos históricos pertinentes ao surgimento e à formalização do conceito de probabilidade, além de evidenciar a estruturação curricular na escola sobre o tema. O trabalho servirá para subsidiar a prática docente em sala de aula no ensino de probabilidade nas turmas do Ensino Médio.

**Palavras Chaves:** Probabilidade. Jogos. Atividades.

# Abstract

In this dissertation will explore the concept of probability, using investigative and directed methodologies by activities that seek to show, through games and challenges, the importance of this knowledge in the student's cognitive formation, providing him a theoretical and practical about the experiences and stimulating logical and mathematical thinking. Each activity comes with the methodologies, the analysis of the results and assessment questionnaires. Also, displays the historical aspects relevant to the emergence and formalization of the concept of probability, besides showing the structure of the school curriculum on the topic. The work will serve to subsidize the teaching practice in the classroom teaching of probability classes in high school.

**Keywords:** Probability. Games. Activities.

# Lista de Tabelas

# Lista de Abreviaturas e Siglas

PROFMAT ..................... Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
ENEM ............................................. Exame Nacional do Ensino Médio
SEEC/RN ............ Secretaria Estadual de Educação e Cultura do Rio Grande do Norte
PCN ............................................. Parâmetros Curriculares Nacionais
MEC ....................................................... Ministério da Educação
EJA ................................................. Educação de Jovens e Adultos
IDEB .................................. Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
LDB .................................. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

O ensino tradicional, muito disseminado em outros tempos e seguido por alguns docentes atualmente, prega um modelo no qual o professor é um transmissor de conteúdos e, o aluno, um mero reprodutor dos ensinamentos. Nesse sistema, o qual presenciei quando aluno secundarista, as avaliações de matemática eram do tipo: "Resolva …", "Calcule …", nos quais se avaliava, apenas, se o aluno sabia reproduzir os algoritmos ou as fórmulas nas soluções.

Com as exigências da sociedade hoje em dia, sempre em constantes mudanças, essa forma de ensinar e aprender não atende aos objetivos da escola em formar um cidadão autônomo, sendo necessário utilizar metodologias que possibilitem ao aluno refletir e tirar conclusões daquilo que lhes é transmitido. Como professor de matemática do Ensino Médio há dez anos, um dos desafios em sala de aula é introduzir atividades que proporcionem uma interação entre os alunos nas aulas, motivando-os na busca do conhecimento.

Neste trabalho, as atividades desenvolvidas visam, de maneira orientada, a proporcionar condições ao aluno para que eles consolidem conceitos e ideias através da prática em jogos e em situações desafiadoras.

## 1.1 Motivo da escolha

Ao passar a ter conhecimento do conceito de probabilidade quando ainda era aluno de Licenciatura de Matemática percebi o quanto esse tema é importante não só para o desenvolvimento cognitivo como também quanto à tomada de decisões. Hoje a maioria dos exames de matemática aborda questões com esse assunto.

Com o ingresso no PROFMAT, foi-me dada a oportunidade de solidificar ainda mais o meu conhecimento a respeito desse tema.

Tendo em vista a grande variedade de situações-problemas nas quais o conceito de probabilidade pode ser explorado, de maneira a desenvolver o raciocínio-lógico matemático, espera-se, com o desenvolvimento deste trabalho, propiciar atividades que estimulem a prática desse conhecimento em sala de aula.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

Explorar o conceito de probabilidade, nos aspectos históricos e pedagógicos, utilizando jogos e situações desafiantes através de atividades orientadas, buscando mostrar a importância desse conhecimento na formação cognitiva do aluno.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Mostrar como se desenvolveu o conhecimento de probabilidade ao longo dos tempos;
- Apresentar a estruturação curricular do tema probabilidade;
- Subsidiar a prática docente em sala de aula no ensino de probabilidade nas turmas do Ensino Médio;
- Propiciar uma reflexão teórico-prática acerca das experiências vivenciadas.

## 1.3 Organização

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) está organizado da seguinte forma: Além desta Introdução (Capítulo 1), no Capítulo 2 será feita uma abordagem epistemológica e histórica da Probabilidade além de uma abordagem pedagógica do tema. O Capítulo 3 apresenta detalhes dos procedimentos metodológicos das atividades desenvolvidas. O Capítulo 4 apresenta a descrição e a análise dos resultados das atividades aplicadas. O Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho. Para terminar temos as Referências Bibliográficas e os Apêndices.

# Capítulo 2

# Abordagem histórica, epistemológica e pedagógica no ensino da probabilidade

## 2.1 Introdução Histórica

As descrições a respeito das abordagens históricas da probabilidade se basearam em COUTINHO (2007), D'AMBRÓSIO (2009) e ROTUNNO (2007).

Compreender como se desencadeou a origem das ideias que propiciou a formação do conhecimento matemático, em especial da probabilidade, analisando os aspectos humanos e ideológicos é importante para a formação cognitiva do indivíduo, como forma de motivação na introdução de um conceito. Como diz D'AMBRÓSIO (2009):

> A história da matemática tem servido para alguns pesquisadores como motivação para o trabalho com o desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos. Esta linha de trabalho parte do princípio de que o estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior compreensão da evolução do conceito, enfatizando as dificuldades epistemológicas inerentes ao conceito que está sendo trabalhado. Essas dificuldades históricas têm se revelado as mesmas muitas vezes apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem.

### 2.1.1 Obstáculos epistemológicos

Para DAVIS e HERSH *apud* ROTUNNO (1998) o atraso na Teoria das Probabilidades é um dos enigmas da história da ciência.

- Primeiramente, a aceitação do determinismo - doutrina filosófica que se baseia no fato de que a totalidade dos fenômenos constitutivos da realidade se encontra submetida a determinadas leis e que é explicada por relações de causalidade.

- Segundo, o acaso estava relacionado com a sorte, com o destino misterioso, com a vontade divina, assim, o desconhecido era um capricho divino e não algo natural.

- A terceira razão era a dificuldade de formular essa teoria com os conhecimentos até então descobertos. Antes do século XVI, os conhecimentos existentes de Matemática eram insuficientes para aplicar na probabilidade.
- A quarta razão se refere a uma visão marxista, segundo a qual a ciência se desenvolve de acordo com as necessidades econômicas. O surgimento dos seguros somente se deu a partir do século XVII, mesmo alguns povos antigos já praticavam, empiricamente, nas perdas das cargas das embarcações, com medo de roubos ou naufrágios.

Apesar dessas razões políticas, religiosas, econômicas e de teorias matemáticas inconsistentes, para DAVIS e HERSH *apud* ROTUNNO (1998) afirmam que, na opinião de muitos historiadores da Ciência esses argumentos são insuficientes para explicar o mistério desse atraso. Para esses historiadores, em algum momento do século XVI ou XVII, a prática de observação das frequências era a base da explicação das evidências e das crenças.

### 2.1.2 O início dos cálculos de probabilidade – Até o século XVII

Os jogos de azar já eram praticados pelos povos antigos como uma forma de lazer sem preocupação com explicações do acaso. O interesse pela probabilidade surgiu graças aos estudos dos jogos de azar que começaram a ser feitos por Girolamo Cardano (1501-1576) - constantes de sua obra póstuma intitulada de *Líber De Ludo Aleae* (O Livro dos Jogos de Azar) que foi publicado no século XVI.

O mundo científico, a partir do século XVI, começa a busca por leis universais que regulassem a natureza. É nesse período que acontece a ruptura entre o poder e a vontade divina com a publicação das Leis Mecânicas de Newton, no final do século XVII. Cada fenômeno tinha que ter uma causa. Assim, o acaso é fruto de nossa ignorância que não conhece as causas e as leis que os determinam. Até o momento a probabilidade era baseada em observação, em ideias e não tinha sido formulada uma teoria.

O acaso, após o século XVI, passa a ser explicado com o advento dos cálculos de Análise Combinátoria, conceito já conhecido há séculos pelos homens e marca o início da concepção probabilística do acaso. Em meados do século XVII, o **Cavaleiro de Méré**, pseudônimo de Antoine Gombauld, pediu ao famoso matemático francês Blaise Pascal (1623 - 1662) que resolvesse algumas lides de seus jogos de azar.

Entre os problemas propostos estava o problema da divisão proporcional de ganhos de um jogo que não chegou ao seu final.

Pascal decidiu expor suas reflexões ao seu amigo Pierre de Fermat (1601 - 1665) que passaram a se corresponder por cartas. Cada um fez de maneira diferente e chegou à mesma solução. As resoluções continham a famosa fórmula:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Mas fora Cristiaan Huygens (1629 - 1695) que, após a análise das cartas de Pascal e de Fermat, publicara, em 1657, o tratado *De rariocinillis in ludo aleae* (Sobre o Raciocínio nos Jogos de Azar) exclusivo à Teoria da Probabilidade.

No final do século XVII, Jacob Bernoulli (1654 - 1705), começa a confrontar as ideias deterministas com a noção de probabilidade em sua obra póstuma *Ars Conjectandi* (A arte da Conjectura). É o início da visão frequentista da probabilidade. Ele aproxima a probabilidade de um evento pela sua frequência relativa observada quando a experiência é repetida um grande número de vezes. Depois de Bernoulli, as publicações começam a abordar a probabilidade como forma de poder prever o futuro, a partir de dados que se podem observar.

### 2.1.3 A Formalização da probabilidade – século XVIII e século XIX

No século XVIII já havia um acúmulo de informações a respeito da probabilidade, porém, foi a partir do século XIX, que o avanço na Teoria da Probabilidade ocorreu com a formulação teórica e as aplicações da probabilidade em outras áreas da ciência.

Em um dos trabalhos, *La Doutrine des Chances* (A Doutrina do acaso), de Thomas Bayes (1701? - 1761) uma nova concepção de probabilidade começa a ser introduzida, com a atribuição de uma ideia condicional no seu cálculo. Bayes mostra como alterar as probabilidades *a priori* tendo em conta novas evidências, a partir das quais foi possível obter probabilidades *a posteriori*.

Mas foi em 1812, com a publicação de *Théorie Analytique des Probabilités* (Teoria Analítica da Probabilidade) e com as cinco publicações de *Éssai philosophique sur les probabilités* (Ensaio Filosófico sobre Probabilidade), que Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827) coloca a probabilidade, finalmente, no quadro matemático com a sistematização da probabilidade e com a introdução de axiomas e conceitos básicos desenvolvidos de forma precisa.

### 2.1.4 A Consolidação dos cálculos da probabilidade- século XX

Após Laplace, a Teoria da Probabilidade passa por um processo de axiomatização com Andrei Kolmogorov (1903-1987), em 1933, com a ajuda dos trabalhos de Borel (1871 - 1956) e Lebesgue (1875 - 1941). Esse processo teve base nas frequências relativas e nas operações com conjuntos e possibilitou um grande avanço científico, pois tornou a Teoria das Probabilidades uma parte autônoma dentro da Matemática.

### 2.1.5 Abordagens da Probabilidade

Em todo esse processo histórico da formação do conceito de probabilidade, várias abordagens foram enfocadas. Segundo GUIMARÃES (1997) *apud* GONÇALVES (2004) podemos enfocar a probabilidade em 5 (cinco) abordagens.

**Abordagem Clássica ou Laplaciana**: Nessa abordagem os possíveis resultados associados a cada experimento aleatório devem ser finitos e equiprováveis, de modo que a probabilidade de ocorrer o evento $A$ é dado por:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N},$$

onde $N(A)$ é o número de resultados favoráveis e $N$ o número de casos possíveis. Essa definição nos remete às seguintes propriedades:

- Dado que, para qualquer evento $0 \leq N(A) \leq N$, então

$$0 \leq P(A) \leq 1;$$

- O evento certo (coincidente do espaço amostral $S$) inclui todos os resultados possíveis. $N(S) = N$ e consequentemente,

$$P(S) = 1.$$

  Da mesma forma o evento impossível, $\varnothing$, não inclui qualquer dos resultados de $S$. Por isso, $N(\varnothing) = 0$ e, consequentemente, $P(\varnothing) = 0$;

- Se dois eventos $A$, com $N(A)$ resultados, e $B$, com $N(B)$ resultados, forem mutuamente exclusivos (isto é, se não contiverem nenhum resultado comum) ao evento $A \cup B$, associam-se $N(A) + N(B)$ resultados e $P(A \cup B) = \frac{N(A) + N(B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N}$, isto é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

**Abordagem Geométrica**: A probabilidade de que um ponto selecionado ao acaso, a partir de $S$, localize-se na região $A$, nele incluída, é dada pela razão

$$P(A) = \frac{\text{med A}}{\text{med S}},$$

onde *med* significa uma medida de dimensão (comprimento, área, volume) de uma região qualquer incluída no espaço contínuo ($S$) de uma experiência aleatória.

**Abordagem Frequentista**: Nessa abordagem não se aplica a obrigatoriedade da simetria e a equiprobabilidade aos experimentos aleatórios, porém, é necessário que haja uma repetição de um número significativo de vezes de um experimento e que aconteça um sinal de estabilização.

Se em experimento aleatório, com $N$ realizações de uma experiência, um acontecimento $A$ ocorre $N(A)$ vezes ($0 \leq N(A) \leq N$), então a probabilidade do acontecimento define-se como o limite, quando $N$ tende para o infinito, da frequência relativa de ocorrência do acontecimento $A$.

$$P(A) = \lim_{x \to \infty} \frac{N(A)}{N}.$$

Convém destacar aqui uma diferença entre a frequência relativa e a probabilidade. Enquanto a primeira se refere a eventos passados, a segunda se refere a eventos futuros.

**Abordagem Subjetiva**: Se baseia no grau de convicção que uma pessoa atribui à ocorrência ou não de um evento. Está relacionada à ideia de verossimilhança.

Utilizando as outras abordagens, não é suficiente para determinar a probabilidade de um índice da Bolsa de Valores duplicar, nos próximos 5 anos, ou a probabilidade de resultado de um jogo de futebol, posto que alguns aspectos subjetivos são considerados na hora de efetuar o cálculo, como: o mando de campo; o histórico das partidas disputadas, entre outros.

**Abordagem Axiomática**: A probabilidade de ocorrer um evento $A$, associado ao espaço amostral $S$ deverá satisfazer os seguintes axiomas:

- Axioma 1: $0 \leq P(A) \leq 1$;
- Axioma 2: $P(S) = 1$;
- Axioma 3: Se $A \cap B \neq 0$, então,$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Essa abordagem se associa à seguinte ideia: Não é indicado como calcular a probabilidade, mas, se a probabilidade de um evento existe, ela deve atender aos três axiomas.

## 2.2 Abordagem Pedagógica

Da mesma forma pela qual os aspectos históricos da formação do conceito de probabilidade passaram por várias fases para a sua elaboração, o tema "probabilidade" no contexto escolar também passa por diversas perspectivas.

### 2.2.1 A probabilidade no contexto escolar antes dos PCNs

Sucintamente, GONÇALVES, (2004) *apud* ROTUNNO, (2007, p. 28 - 29), recorreu, em sua pesquisa, à análise de livros didáticos adotados nas décadas de 70, 80 e 90 e revela que:

> O Ensino de Probabilidade no Brasil nas décadas de 70, 80 e 90 ocorreu por meio de abordagens Clássicas e Axiomáticas. Na década de 70 as técnicas para a resolução das tarefas consistiam na Teoria de Conjuntos; na década de 90, na Análise Combinatória e na década de 80 foi encontrado um período de transição, que se apropriou de ambas as Teorias que justificam suas técnicas.

### 2.2.2 Ideias iniciais para a criação de um currículo escolar nacional

Com o advento da Constituição Federal de 1988 que prevê em seu artigo 210 “ Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais”, foi dado o pontapé para que se organizasse um parâmetro, em nível nacional, de organização dos currículos escolares.

Com a aprovação da lei 9.394/96, que instituiu a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB, consolidou a principal referência na formulação de novas propostas para o currículo escolar e de acordo com a nova Lei, o artigo 9º, inciso IV:

> "Ficará a União incumbida de estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum".

Em seu artigo 21, a educação escolar é composta pela Educação Básica, que contempla as etapas de ensino infantil, fundamental e médio, e a Educação Superior. Em seu artigo 27, mostra uma diretriz a ser observada nos conteúdos curriculares da educação básica, que são, entre outras: A orientação para o trabalho e a difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática.

### 2.2.3 A criação e consolidação dos PCNs

A partir de 1997 com a publicação dos PCNs do Ensino Fundamental, novas abordagens e metodologias foram introduzidas como um suporte para os professores, não como uma obrigação a ser seguida. Suas propostas foram influenciadas pelas teorias mais recentes de ensino e aprendizagem; priorizava-se, nos PCNs, a aquisição de competências básicas necessárias a tornar um cidadão ativo e consciente na sociedade em que vive em detrimento da ideia de preparar para etapas posteriores de conhecimento.

Os PCNs propõem, como ponto de partida, o uso da problematização para o desenvolvimento das atividades matemáticas utilizando contextualizações e a interdisciplinaridade.

Algumas das ideias novas surgidas para o ensino de matemática com os PCNs foram:

- Valorização do cálculo mental;
- Conteúdos abordados em espiral;
- Desenvolvimento de ideias, como equivalência e proporcionalidade na abordagem dos conteúdos;
- Ênfase em trabalhos de grupo e avaliação como processo contínuo.

### 2.2.4 A abordagem da Probabilidade nos PCN

Nos PCNs do Ensino Fundamental (1997) a Probabilidade vem reunida com a Estatística e a Combinatória no tema estruturador "Tratamento de Informação" e deve explorar, entre outras coisas, o desenvolvimento do raciocínio e de atitudes que possibilitam a tomada de decisões.

Na elaboração dos PCNs do Ensino Fundamental (1998, p. 52) os conteúdos foram inseridos em função do educando e estabeleceram que a principal finalidade para o estudo de probabilidade no 3º ciclo (6º e 7º Anos) é:

> "A de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis)".

No último ciclo (8º e 9º Anos), é recomendável explorar a propriedade da simetria e a utilização de processos de contagem como a árvore das possibilidades e o princípio multiplicativo. Nessa fase, de acordo com PCN do Ensino Fundamental (1998), a noção de probabilidade continua a ser explorada de maneira informal, por meio de investigações que levem os alunos a fazer algumas previsões a respeito do sucesso de um evento.

Nos PCNs do Ensino Médio (2002), a probabilidade também vem reunida com a Estatística e a Análise Combinatória no tema estruturador Análise de Dados. Os conteúdos e habilidades propostos a serem desenvolvidas na probabilidade são:

- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados;

- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolva o pensamento probabilístico;

- Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas, modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades.

### 2.2.5 A criação do ENEM

Desde a sua implantação pelo MEC, em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio– ENEM, introduziu uma nova proposta de avaliação, que avalia competências e habilidades fundamentais dos alunos ao longo do Ensino Básico.

Sua criação se baseia na nova reforma do Ensino Médio proposta pela LDB, servindo para o professor como referência em sala de aula para desenvolver conteúdos de forma contextualizada e interdisciplinar, assim como são os exames.

Criada inicialmente para avaliar os alunos do Ensino Médio, hoje é um importante meio de ingresso para as Universidades, principalmente as Instituições Federais, que utilizam suas notas em substituição aos vestibulares, como uma das fases, combinado com o vestibular ou aproveitado para vagas remanescentes.

Em 2009, o ENEM passou por uma reformulação, e suas provas que continham questões interdisciplinares sem conteúdos pré-estabelecidos, começam a ser organizadas com conteúdos e objetos do conhecimento pré-estabelecidos e subdivididas em quatro grandes áreas do conhecimento: Linguagens e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

### 2.2.6 A probabilidade no ENEM

Desde a implementação do ENEM, o tema Probabilidade é comum em seus exames. Não é por menos, que, com o novo ENEM implantado em 2009, o conhecimento de Probabilidade, associado ao de Estatística, passa a fazer parte como um dos cinco conhecimentos estruturantes da Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias.

De acordo com Matriz de Referência do ENEM na área de Matemática e suas Tecnologias, a prova avalia sete competências [1] que o aluno deve ter, sendo que uma delas está relacionada ao tema probabilidade (competência 7), daí a importância desse conteúdo a ser trabalhado no Ensino Básico.

---

[1] As Competências são:

1. Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais;
2. Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela;
3. Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;
4. Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;
5. Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas;
6. Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação;
7. Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Neste caso, a palavra competência está ligada à capacidade do estudante de dominar a norma culta da Língua Portuguesa, compreender fenômenos naturais, tomar decisões e enfrentar situações-problema, construir argumentações consistentes e elaborar propostas que atentem para as questões sociais e culturais.

A cada competência corresponde uma série de “habilidades”, que seriam a demonstração prática dessas competências. Acerca das habilidades a serem exploradas na resolução das questões do exame sobre o tema de Probabilidades temos:

- H28- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade;
- H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação;
- H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

# Capítulo 3

# Aspectos metodológicos

## 3.1 Introdução.

Neste capítulo serão abordados os aspectos relacionados com o contexto, a metodologia e a intervenção pedagógica desenvolvida.

### 3.1.1 Contexto da escola

A Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza - Jaçanã - RN, fundada em 1993, está situada no Bairro São José, na Rua Prefeito José Pereira da Silva nº 182. O educandário é o maior da cidade em número de alunos, com 675 alunos matriculados em 2012, divididos em turmas do Ensino Fundamental e Médio, sendo que é a única do município a oferecer o Ensino Médio. O bairro, em que a escola se localiza, abriga uma comunidade carente, constituída, em sua maioria, de pessoas de baixa escolaridade com alto índice de semi-analfabetismo.

Essa instituição de ensino possui sete salas de aula; um laboratório de informática e um laboratório de ciências; secretaria; sala para a direção; sala para o apoio pedagógico; biblioteca; cozinha; almoxarifado; dois banheiros para os alunos e dois para os funcionários além de um pátio coberto.

A organização técnico-administrativa é composta por um Diretor, um Vice-diretor, ambos do quadro efetivo e licenciados em Letras, um Coordenador Pedagógico licenciado em Pedagogia, um Coordenador Financeiro com o curso de Técnico em Contabilidade, um Secretário, três Auxiliares de Secretaria com Ensino Médio Completo (um por turno) e dois Supervisores escolares licenciados em Pedagogia. Ressaltamos ainda que todo o corpo docente, composto de 18 professores, tem formação em nível superior, com licenciaturas específicas para as áreas afins que atuam. Compõem ainda o seu quadro de funcionários, duas merendeiras, duas serventes e um vigia.

Em 2012, a instituição ofereceu vinte turmas de Ensino Fundamental e Médio regular e de Educação de Jovens e Adultos - EJA, divididas no período da manhã com sete turmas de Ensino Fundamental, à tarde com seis turmas de Ensino Médio e uma de Ensino Fundamental e, à noite, com três turmas de Ensino Médio Regular e três turmas de Ensino Médio da EJA.

O Calendário Escolar está organizado de modo a oferecer uma carga horária mínima de 800 (oitocentas) horas anuais, distribuídas em uma carga horária mínima de 200 (duzentos) dias letivos. As aulas são distribuídas, em cada turno, em cinco horários de aulas com duração de 50 minutos no período da manhã e da tarde e, de 40 minutos no período da noite.

A Escola realiza seus encontros administrativos e pedagógicos mensalmente com a participação da equipe técnico-pedagógica, professores e representantes dos Conselhos Escolares, com representantes dos pais e responsáveis e do Grêmio Estudantil, além de realizar reuniões bimestrais com os pais para acompanhamento dos alunos e repasse de informações.

Com o intuito de criar um ambiente discente/docente mais atrativo, a escola realiza e organiza eventos, como o Festival da Música Internacional, o projeto Empreender, Gincanas em datas comemorativas e os Jogos Escolares. Incentivam os melhores alunos com o prêmio Aluno Cinco Estrelas, além de envolver todos os alunos, professores e funcionários no Projeto Sala Limpa[1].

No ano de 2012, em um evento promovido pela SEEC/ RN - Secretaria Estadual de Educação e Cultura do Rio Grande do Norte, a Escola Terezinha Carolino de Souza foi premiada com uma menção honrosa e com uma comenda por destaques na educação estadual no ano de 2012. Entre as conquistas por parte da escola, dos alunos e professores em 2012, podemos destacar:

- Melhor IDEB de todas as escolas do Trairi (Microrregião na qual o município de Jaçanã está inserido);
- 2º lugar do Prêmio de Gestão Escolar 2012;
- Parlamentar Juvenil do Mercosul 2012 ;
- Jovem Embaixador 2012;
- Participação na Missão Pedagógica no Parlamento.

### 3.1.2 Contexto investigado

O trabalho foi realizado com os alunos de duas turmas do 2º Ano do período da tarde no ano de 2012. A escolha dessas turmas foi efetivada em função do conteúdo abordado na

[1]Projeto que começou a ser implantado em 2010 com o objetivo de conscientizar os alunos da importância de manter o ambiente escolar limpo e conservado. Para isso, foram realizados multirões de limpeza com a participação dos alunos, professores e funcionários, palestras educativas em cada sala e o comprometimento diário em manter a sala limpa ao final das aulas de cada turno. Hoje, é possível ver os resultados desse projeto, os alunos, como gesto de cidadania, não depredam o patrimônio da escola e mantém o ambiente escolar limpo e agradável.

presente pesquisa.

O grupo investigado é composto por 65 alunos. Durante o desenvolvimento das atividades pedagógicas, realizadas no 4º Bimestre de 2012 contamos com 57 alunos, em média, por atividade. As ausências dos alunos foram motivadas por razões de ordem pessoal e alguns por desinteresse.

Analisando as fichas de matrículas da escola, observa-se que todos os alunos estão na faixa etária de 15 a 18 anos e cursando pela primeira vez a referida série, são oriundos tanto da zona urbana quanto da zona rural e, na sua grande maioria, provenientes da própria escola.

### 3.1.3 A proposta de desenvolvimento das atividades

Para a aplicação das atividades propostas apresentadas neste trabalho, foi feita uma exposição para os alunos destacando o motivo da aplicação das atividades, os objetivos e a metodologia adotada. Ficou claro para os alunos que a participação nas atividades, seja de forma ativa ou passiva, serviria de base para atribuir as notas avaliativas do 4º bimestre.

Esta proposta subtende que os alunos já tenham assimilado o conceito de probabilidade. Assim, no início do 4º bimestre foram trabalhados os principais conceitos de probabilidade (experimentos aleatórios, definição de probabilidade, equiprobabilidade, eventos mutuamente exclusivos, eventos simultâneos e eventos independentes, probabilidade condicional e a probabilidade da união de dois eventos), com aulas expositivas, aplicação de exercícios com a utilização do livro-texto SOUZA (2010).

As atividades serviram como uma consolidação dos conceitos já estudados, porém, vistos de forma lúdica com propostas de desafios e situações-problema.

Procuramos elaborar as atividades com base nos PCNs do Ensino Médio (2000, p. 41), na qual o professor deve propor atividades com desafios ao aluno: "(...) Habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos (...)". Assim, as atividades valorizam o pensamento matemático em situações-problema do cotidiano ou em situações hipotéticas.

### 3.1.4 Metodologia na aplicação das atividades

As atividades propostas contemplam as principais abordagens (Clássica, Frequentista e Geométrica) do conceito de probabilidade, e foram divididas em cinco momentos.

**1º momento**: Apresentação detalhada da atividade;

**2º momento**: Aplicação do questionário preliminar;

**3º momento**: Atividade prática;

**4º momento**: Aplicação dos questionários avaliativos;

**5º momento**: Considerações das atividades.

O questionário preliminar aborda conhecimentos prévios acerca da atividade em questão e os questionários avaliativos, em algumas atividades, se subdivide em duas, um que avalia a atividade prática e outro que avalia a atividade em questão como um todo.

As considerações finais ocorriam em um momento de troca de informações acerca da atividade desenvolvida mediante a apresentação das respostas aos principais questionamentos, sendo feitas nos 10 minutos finais da aula que sucediam a aplicação do questionário avaliativo.

Como forma de motivação dos alunos nas atividades, foram oferecidos prêmios [2] para aqueles que obtivessem êxito em suas participações.

### 3.1.5 Condução das atividades

Todas as atividades desenvolvidas foram aplicadas pelo professor-autor do trabalho, procurando, em todas elas, observar cuidadosamente cada etapa desenvolvida pelos alunos.

As atividades foram conduzidas de maneira a atingir os objetivos de cada uma delas. Durante a aplicação, foi permitida a utilização de calculadoras para a obtenção das respostas dos cálculos, porém, os alunos teriam que deixar o desenvolvimento do cálculo no questionário. Além disso, na aplicação dos questionários, procurou-se não interferir nem dar sugestões para a resolução das questões, ficando restrito apenas a esclarecimento ou dúvida no enunciado das perguntas elaboradas.

### 3.1.6 Dificuldades Esperadas

Para a aplicação das atividades, era esperado que houvesse algumas dificuldades, tais como:

- Falta de comprometimento de alguns alunos;
- Conhecimento insuficiente por parte dos alunos para resolver os questionários;

[2] Bombons

## 3.2 Descrição das atividades aplicadas

Nesta seção, será apresentado uma descrição das atividades propostas com os objetivos, justificativa, conhecimentos prévios, dificuldades esperadas e metodologias.

### 3.2.1 1ª atividade: Mega Sena.

A Mega-Sena é uma das loterias que desperta o maior interesse na população. O jogo consiste em acertar 6 números dentre os 60 (1 a 60) números disponíveis no volante (quem acerta 4 ou 5 ganha um prêmio secundário), sendo possível marcar de 6 a 15 números na aposta.

Para a realização dessa atividade serão necessários:

- Uma urna contendo 10 bolas ou pedras numeradas de 01 a 10;
- Cartelas numeradas de 01 a 10.

A fim de explicar como funciona a atividade Mega Sena, subdividiu-se a apresentação em partes, quais sejam: Justificativa; Objetivos; Conhecimentos prévios; O que esperar dos alunos; Metodologia; Condução da atividade.

#### 3.2.1.1 Justificativa

A Mega Sena é um jogo que mexe com a imaginação de muita gente. Na esperança de se tornarem milionárias, algumas pessoas fazem de tudo para acertar as seis dezenas do sorteio e mudar de vida. Para isso, tentam descobrir a lógica dos resultados dos sorteios e recorrem a superstições do tipo: “quais números mais saem e quais menos saem”, “não se colocam três números seguidos”, entre outras.

Mostrar ao aluno que os resultados dos sorteios são aleatórios e não dependem dessa lógica, além de que é possível determinar a probabilidade de ganhar algum prêmio da Mega Sena com o conhecimento de probabilidade e Análise Combinatória pode ser uma maneira de integrar a matemática com a realidade.

Utilizar uma simulação da Mega Sena, através de uma Mini Sena [3], será uma forma de fazer com que os alunos percebam o quão é difícil acertar na Mini Sena, mesmo com menos possibilidades de combinações.

[3] A Mini Sena é uma loteria com menos possibilidades de combinações de sorteios em comparação com a Mega Sena, já que são sorteados 6 números dentre os 10 (01 a 10) números disponíveis na cartela

#### 3.2.1.2 Objetivos

**Objetivo Geral**: Calcular as probabilidades existentes no volante da Mega Sena.

**Objetivos Específicos:**

- Utilizar os conhecimentos de Análise Combinatória no cálculo da probabilidade de ganhar algum prêmio da Mega Sena e na determinação do valor a ser pago em uma aposta de acordo com a quantidade de números assinalados;
- Explorar o conceito de equiprobabilidade.

#### 3.2.1.3 Conhecimentos prévios

Na aplicação das atividades serão explorados conceitos de Análise Combinatória, definição de Probabilidade e Equiprobabilidade.

#### 3.2.1.4 O que esperar dos alunos

Espera-se que o aluno possa perceber que o valor a pagar pelas apostas de acordo com a quantidade de números assinalados e as probabilidades de acertar a sena, a quina e a quadra, existentes no verso de cada volante, podem ser determinados com o conhecimento de probabilidade.

#### 3.2.1.5 Metodologia

Inicialmente, na primeira aula, foi feita uma explanação das loterias em especial da Mega Sena, lendo as informações que se encontram em um volante de aposta, sem falar nas probabilidades de ganho. Em seguida, foi aplicado um questionário preliminar, tipo um diagnóstico, a respeito do conhecimento que eles possuem a respeito da Mega Sena.

Após o preenchimento do questionário preliminar foi lançado o jogo Mini Sena, fazendo uma simulação da Mega Sena com o sorteio de seis números de 01 a 10. Para essa atividade prática foram distribuídas duas cartelas para cada aluno pedindo que assinale em ambas as cartelas os mesmos números, 6 (seis) no total, sendo entregue apenas uma para posterior conferência. Os alunos concorreram a prêmios [4] de acordo com a quantidade de números acertados na cartela.

Em outra aula, foi feito um comentário rápido a respeito do jogo Mini Sena e, após o comentário, foi lançado um questionário a respeito desse jogo.

Em uma outra aula, foi respondido mais um questionário, relacionado ao jogo Mega Sena com as considerações finais.

[4] Para o acerto dos seis números sorteados ganha-se uma caixa com chocolates, caso acertem cinco números ganham dois bombons e se acertarem apenas quatro números, um bombom.

#### 3.2.1.6 Condução da atividade

O tema Mega Sena fez com que os alunos ficassem curiosos em saber como se calculam as chances de ganhar algum prêmio, pensando eles que seria dada alguma dica de como ganhar na Mega Sena.

Na aplicação da atividade prática da Mini Sena, os alunos ficaram muito eufóricos em querer ganhar o prêmio, que seria distribuído a quem acertasse a sena. Os alunos fizeram algumas indagações, tipo:

"Será muito fácil ganhar, a probabilidade é muito pequena!"

"Se ninguém acertar os seis números, ganha quem acertar mais números?"

Porém, no primeiro sorteio, não houve ganhador, poucos acertaram cinco números e uma boa parte acertou quatro números. Assim, foi necessário realizar outro sorteio já que o prêmio era para quem acertasse seis números, só que agora seriam assinalados sete números.

Muitos ficaram animados, pois, teriam mais uma chance de ganhar o prêmio. E, desta vez houve vencedor, aliás, não só um vencedor, mas dois vencedores. O interessante é que em ambas as turmas aconteceu a mesma coisa, foi preciso mais de um sorteio para definir o vencedor.

No final da atividade, foram deixadas para os alunos algumas perguntas no ar:

"Será que é mesmo difícil acertar os seis números na Mini Sena, ou foi sorte?"

"A chance de ganhar apostando sete números aumenta quantas vezes?"

A aplicação dos questionários transcorreu normalmente, com os alunos em dúvida sobre qual conhecimento utilizar para responder, porém, apenas foi dito que utilizasse os conhecimentos de Análise Combinatória e a definição de Probabilidade que já haviam estudado.

A atividade não fluiu conforme o esperado. Foram necessárias quatro aulas (e não três) para a realização das atividades. Na terceira aula, os alunos demoraram muito tempo para responder às questões, alegando que tinham muitos cálculos trabalhosos e difíceis.

### 3.2.2 2ª Atividade: A Urna da Liberdade

A Urna da Liberdade é um jogo que faz uma referência a uma situação hipotética a uma questão baseada em LIMA (2006):

*Um prisioneiro, pelo seu bom comportamento, teve uma chance de obter sua liberdade. Ele iria receber o mesmo número de bolas pretas e brancas e devia repartí-las entre duas urnas. O "carcereiro" devia escolher uma destas urnas e da urna escolhida retirar apenas uma bola: Se a bola fosse branca ele estaria solto, caso contrário, continuaria preso.*

Para realizar essa atividade são necessários:

- Duas urnas de pano ou de papelão;
- Seis bolas de pingue-pongue, sendo três brancas e três pretas ou de outra cor.

A fim de explicar como funciona a Urna da Liberdade, subdividiu-se a apresentação em partes, quais sejam: Justificativa; Objetivos; Conhecimentos prévios; O que esperar dos alunos; Metodologia; Condução da atividade.

#### 3.2.2.1 Justificativa

Ultimamente, conseguir que os alunos participem ativamente das aulas e interajam com o que é exposto se constitui um dos grandes desafios para o professor ao ministrar as suas aulas.

Levando em conta esse desafio, acreditamos que aplicar uma atividade que faça com que os alunos participem e sejam os personagens ativos no processo, faz com que haja uma maior aprendizagem.

O jogo em comento faz com que o aluno, de maneira intuitiva, possa obter vantagem, utilizando os conhecimentos de probabilidade, diante de uma situação desafiadora.

#### 3.2.2.2 Objetivos

**Objetivo Geral**: Fazer com que o aluno perceba que a distribuição simétrica, isto é, com o mesmo número de bolas em cada urna, nem sempre é a mais favorável.

**Objetivos Específicos:**

- Trabalhar o lado intuitivo da probabilidade;
- Utilizar os conhecimentos de Probabilidade Condicional para as situações de casos particulares;
- Usar casos particulares para fazer entender um caso geral.

#### 3.2.2.3 Conhecimentos prévios

Na aplicação das atividades serão explorados os conceitos de Probabilidade Condicional.

#### 3.2.2.4 O que esperar dos alunos

Espera-se que o aluno perceba, e depois consiga justificar com base no cálculo de probabilidade, utilizando o conceito de probabilidade condicional, que uma determinada maneira de distribuir as bolas possibilita uma maior probabilidade de libertação.

#### 3.2.2.5 Metodologia

Foi previsto, para a realização, duas aulas com duração de 50 minutos cada uma.

Inicialmente, na primeira aula, foi feita uma explanação da atividade a ser desenvolvida, a Urna da Liberdade, com a leitura da estória da situação hipotética. Em seguida, os alunos responderam um questionário preliminar referente ao jogo Urna da Liberdade e, depois, participaram de forma lúdica da atividade.

Para a realização da atividade prática, seguiu-se a seguinte dinâmica:

- Foram escolhidos dois alunos, um para ser o carcereiro e outro para ser o prisioneiro;
- O aluno, no papel de prisioneiro, escolheu quantas bolas desejava distribuir na urna, se um, dois ou três pares de bolas;
- O aluno, no papel de carcereiro, escolheu uma das urnas e em seguida, retirava uma das bolas, caso houver, da urna;
- Se a bola retirada for branca, o prisioneiro consegue a liberdade e o aluno que foi escolhido para representar o prisioneiro ganhava um prêmio[5];
- Se a bola retirada for preta, o prisioneiro não consegue a liberdade e o aluno que foi escolhido para representar o carcereiro ganhava um prêmio.

Em outra aula, foi preenchido um questionário a respeito desse jogo e finalizado com os questionamentos finais da atividade.

#### 3.2.2.6 Condução das atividades

A urna da liberdade foi uma atividade em que os alunos participaram bastante, foram poucos os alunos que não quiseram participar, talvez por timidez em se apresentar na frente dos colegas.

Os alunos que ficavam no papel de carcereiro eram convidados a se retirarem da sala por um tempo suficiente para que o aluno, no papel de prisioneiro, fizesse a distribuição das bolas na urna.

O papel do professor na condução da atividade se restringiu apenas à dinamização da situação.

Os próprios alunos, que estavam no papel de prisioneiros, não pediram orientação na distribuição das bolas de modo a obter uma maior probabilidade da libertação. A maioria preferiu fazer a distribuição com a mesma quantidade de bolas nas urnas e uma minoria distribui todas as bolas em uma única urna. Os alunos, na função de prisioneiro, preferiam usar o máximo de bolas na distribuição, achando assim, que teriam mais chances de libertação.

[5]Um bombom.

Após o término do rodízio com as duplas que participavam, foi feita uma troca de função para uma nova rodada de jogos, isto é, quem participou na função de prisioneiro ficou agora na função de carcereiro e, vice-versa. O que se percebeu foi que, independentemente da função que assumia, elas tinham a impressão que ambos tinham a mesma probabilidade de ganhar o prêmio.

No final da atividade, foi deixada para os alunos uma pergunta no ar:

"A chance de libertação do prisioneiro é igual a 50% independentemente do número de bolas a distribuir?"

A aplicação dos questionários transcorreu normalmente, com os alunos em dúvida sobre qual modo de distribuição das bolas daria uma maior probabilidade de libertação. Porém, apenas foi dito que analisassem todas as situações possíveis.

A atividade fluiu conforme o esperado. Foram necessárias duas aulas para a realização da atividade. Nas considerações finais, foi visto, de forma intuitiva, que a distribuição com o mesmo número de bolas em cada urna não é a distribuição que maximiza as chances de libertação do prisioneiro.

### 3.2.3 3ª Atividade: O Jogo dos Discos

O jogo dos discos era um jogo bastante difundido pelas crianças europeias, principalmente as francesas, no século XVIII; nesse jogo elas utilizavam moedas e as lançavam em ladrilhos. As crianças apostavam que a moeda cairia inteiramente dentro de um ladrilho ou que a moeda cairia atravessando o lado de algum ladrilho.

O Jogo dos Discos é uma atividade que faz uma referência a uma situação hipotética apresentada por PATERLLINI (2002):

*Uma escola estava preparando uma Feira de Ciências e foi pedido aos estudantes que bolassem um jogo que servisse para arrecadar fundos. Os estudantes observaram que no salão da Feira o piso era feito com quadrados de 30 cm de lado. Pensaram então em construir discos de papelão de diâmetro 10 cm, 15 cm e 20 cm que seriam comprados pelos visitantes por R$ 1,00 cada um. O visitante jogaria o disco aleatoriamente no piso. Se o disco, depois de pousar no piso, tocasse um lado de um quadrado, ele perderia para a escola o que tinha pagado. Se, ao contrário, acertasse o disco inteiramente dentro de um quadrado, ele receberia um valor proporcional a probabilidade de acerto dos discos .*

*Observaram que quanto menor fosse o diâmetro, menor seria esse valor, e quanto maior o diâmetro, maior seria esse valor. O favorecimento para a escola não deveria ser exagerado, pois, se o jogo fosse muito desfavorável para o jogador, ninguém iria querer jogar. Resolveram, então, que os preços a serem pagos ao jogador seriam: R$ 2,00 para o disco de 10 cm de diâmetro, R$ 3,00 para o disco de 15 cm de diâmetro, R$ 4,00 para o disco de 20 cm de diâmetro.*

Para essa atividade serão necessários:

- Um tablado de $2m \times 2m$ feito de duratex subdivididos em quadradinhos de lado 30 cm;
- Três discos de compensado com diâmetros de 10 cm, 15 cm e 20 cm, respectivamente.

**Observação**: Os quadradinhos são justapostos e deixados uma área de escape no tablado, em cada lado, de 10 cm.

A fim de explicar como funciona o Jogo dos Discos, subdividiu-se a apresentação em partes, quais sejam: Justificativa; Objetivos; Conhecimentos prévios; O que esperar dos alunos; Metodologia; Condução da atividade.

#### 3.2.3.1 Justificativa

Mesmo sendo um jogo aparentemente simples, o Jogo dos Discos explora diversos conceitos dentro do cálculo da probabilidade, tais como a probabilidade geométrica ou a determinação da probabilidade, por meio da frequência, do acerto dos discos, assim como a determinação do valor a ser pago pelo acerto dos discos proporcionalmente a probabilidade de acerto.

O Jogo dos Discos desempenha um papel importante no aprendizado do conceito de probabilidade, pois possibilita, através de uma atividade lúdica e investigativa, uma comparação de mais de uma maneira de se calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento.

#### 3.2.3.2 Objetivos

**Objetivo Geral**: Determinar a probabilidade de acerto dos discos utilizando a frequência de acertos dos alunos e comparar com a probabilidade geométrica.

**Objetivos Específicos:**

- Utilizar a frequência de acertos dos alunos e calcular a probabilidade de acerto para cada disco;
- Determinar se valores atribuídos a um resultado são adequados ou não;
- Fazer cálculos utilizando a probabilidade geométrica e comparar com os resultados da frequência de acertos dos alunos.

#### 3.2.3.3 Conhecimentos prévios

Na aplicação das atividades, é explorada a definição de Probabilidade.

#### 3.2.3.4 O que esperar dos alunos

Espera-se que o aluno possa perceber que a probabilidade de se acertar o alvo é pequena e que os valores propostos não são adequados.

#### 3.2.3.5 Metodologia

Inicialmente, na primeira aula, foi feita uma explanação da atividade a ser desenvolvida, o Jogo dos Discos, sendo distribuído para cada aluno o texto referente à situação hipotética. Em seguida, os alunos responderam a um questionário preliminar referente ao Jogo dos Discos e, depois, participaram, de forma lúdica, da atividade.

Para realização da atividade prática, foi seguida a seguinte dinâmica:

- Cada aluno, em ordem alfabética, terá a disposição três arremessos, um para cada disco;
- O aluno lançará os discos na ordem de sua preferência;
- O aluno receberá um prêmio[6] pelo acerto dos discos de acordo com o diâmetro do disco;
- Após todos lançarem, será feita uma nova rodada, porém, com os alunos que não conseguiram acertar nenhum dos discos;
- Ao todo, devem ser lançados 50 (cinquenta) discos de cada diâmetro;
- Será feita, por cada um, a anotação do número de acertos dos alunos que lançaram os discos.

Em outra aula, foram respondidos um questionário prático e um questionário avaliativo a respeito desse jogo e finalizado com os questionamentos finais da atividade.

#### 3.2.3.6 Condução das atividades

O Jogo dos Discos foi uma atividade, assim como a Urna da Liberdade, em que os alunos participaram bastante, foram poucos os alunos que não quiseram participar, talvez por timidez em errar os lançamentos e ser constrangido pelos colegas.

Antes de iniciar a atividade foi feita uma alteração do *layout* da sala de maneira que o meio dela ficasse vago e concentrasse as carteiras ao redor da sala. Com isso, uma das

[6]Se o aluno acertar um disco de diâmetro de 10 cm, ele ganha um bombom, se acertar o de 15 cm, dois bombons e o de 20 cm, três bombons

bordas do tablado foi colocada ao lado da parede e, a partir da borda oposta, foi estabelecida uma distância de 2 metros para o lançamento dos discos.

Antes de começar os lançamentos foi pedido que cada um fizesse a anotação dos acertos dos alunos que lançaram os discos, já que eles iriam utilizar esses dados para realizar cálculos posteriores.

O rodízio no lançamento é uma forma de garantir que este seja um experimento aleatório, com isso, evitou-se que todos os lançamentos fossem feitos pelo mesmo aluno e este adquirisse a prática no lançamento e a habilidade para controlar melhor a intensidade da força necessária, entre outros fatores.

Após a primeira rodada de lançamentos, para completar os 50 lançamentos previstos, foram contemplados aqueles alunos que não conseguiram acertar seus três lançamentos.

Os alunos perceberam, na prática, o quão difícil é acertar os discos e cada acerto era um motivo de muita empolgação por parte dos alunos.

A aplicação dos questionários transcorreu normalmente, sem nenhum questionamento.

A atividade fluiu conforme o esperado. Foram necessárias duas aulas para a sua realização. Nas considerações foram feitos alguns questionamentos a respeito das comparações na probabilidade de acerto dos discos feito de forma prática (Frequentista) com a formal (Geométrica).

### 3.2.4 4ª Atividade: O Relógio das Probabilidades

O Relógio das Probabilidades foi uma adaptação de RIFO (2009) e consiste num disco em forma de relógio com 60 subdivisões igualmente espaçadas, numeradas de 01 a 60, que será usado para fazer a marcação dos números sorteados em uma disputa.

Após o sorteio simultâneo de dois números de uma urna, a qual contém os 60 números marcados no relógio, os números são marcados no Relógio das Probabilidades.

Vence uma disputa aquele sentido que apresentar o maior comprimento do arco delimitado pelos dois números no Relógio das Probabilidades.

A ilustração 3.1 mostra a marcação de dois números sorteados, 10 e 45.

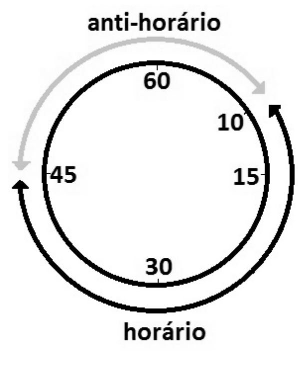



Figura 3.1: Marcação de uma disputa no Relógio das Probabilidades.

Observa-se que, nessa competição, o sentido horário ganha a disputa, visto que o arco compreendido entre os números 10 e 45 é maior no sentido horário que no sentido anti-horário.

Na marcação dos sentidos de disputa no Relógio das Probabilidades não é considerada a ordem do sorteio dos números, isto é, a marcação de um sorteio com os números 45 e 10 é equivalente a de um sorteio com os números 10 e 45.

Para essa atividade serão necessários:

- Um disco de isopor com diâmetro aproximado de 40 cm numerado de 01 a 60;
- Duas tachinhas para fazer a marcação;
- Uma urna com 60 papeizinhos, numerados de 01 a 60. (poderia ser qualquer coisa que simulasse o sorteio aleatório de dois números de 01 a 60)

A fim de explicar como funciona o Relógio das Probabilidades, subdividiu-se a apresentação em partes, quais sejam: Justificativa; Objetivos; Conhecimentos prévios; O que esperar dos alunos; Metodologia; Condução da atividade.

#### 3.2.4.1 Justificativa

Determinadas situações, aparentemente simples, podem esconder mistérios que passam despercebidos da nossa imaginação.

Por isso, é importante aplicar uma atividade que faça com que os alunos reflitam, a partir da prática, os resultados encontrados.

O jogo Relógio das Probabilidades faz com que o aluno, através de análises de situações, de maneira investigativa e utilizando os conhecimentos de probabilidade, possa perceber a aplicabilidade desses conhecimentos em situações práticas para que, assim, entenda a importância dessa teoria no seu cotidiano.

#### 3.2.4.2 Objetivos

**Objetivo Geral**: Determinar a probabilidade de vitória de uma disputa utilizando cálculos geométricos com análise de casos particulares.

**Objetivos Específicos**

- Aplicar o cálculo de probabilidade em jogos de azar;
- Analisar casos particulares para determinar resultados de um caso mais geral.

#### 3.2.4.3 Conhecimentos prévios

Na aplicação das atividades será explorado o conceito da Probabilidade, Módulo de um número e Área de quadrado e de triângulo.

#### 3.2.4.4 O que esperar dos alunos

Espera-se que o aluno possa perceber que o sentido anti-horário apresenta uma probabilidade de ganho de uma disputa bem maior que o sentido horário.

#### 3.2.4.5 Metodologia

Inicialmente, na primeira aula, foi feita uma explanação da atividade a ser desenvolvida, o Relógio das Probabilidades. Em seguida, os alunos responderam a um questionário preliminar referente ao Relógio das Probabilidades e, depois, participaram de forma lúdica da atividade.

Para a realização da atividade prática, foi seguida a seguinte dinâmica:

- Cada aluno escolhe um sentido para a disputa;
- Para cada disputa são sorteados simultaneamente dois números da urna, retornando-os à urna após a marcação deles no Relógio da Probabilidade;
- Ganha uma partida quem vencer 5 (cinco) disputas;
- Após o término de uma partida, os alunos que escolheram o sentido vencedor ganharam um prêmio[7];
- Será realizada uma nova partida, podendo o aluno trocar a opção de sentido na disputa.

Em outra aula, foram respondidos um questionário prático e um questionário avaliativo a respeito desse jogo e finalizado com os questionamentos finais da atividade.

#### 3.2.4.6 Condução das atividades

O Relógio das Probabilidades foi uma atividade tão surpreendente nos resultados quanto as outras atividades.

Os alunos demoraram a entender o funcionamento do Relógio das Probabilidades, foi necessário fazer três exemplos de situações propostas, sem ainda ter feito o sorteio, para que eles percebessem como é o funcionamento.

Após o entendimento do mecanismo, foi preenchido um questionário preliminar e, em seguida, na atividade prática, foi proposto que eles fizessem a escolha de qual sentido pretende concorrer para a disputa. No final das escolhas, houve um equilíbrio para ambos os sentidos. Aqui, ainda, para a grande maioria, ambos os sentidos tinham a mesma chance de vitória.

No final das disputas, o sentido anti-horário vence a partida. Para o início da segunda partida, ninguém trocou de sentido na aposta, achando que foi por mera sorte.

[7] Um bombom

Novamente, no final das disputas, o sentido anti-horário vence as disputas. Para surpresa e indignações de muitos:

“Como pode acontecer isso, só um sentido é que ganha!”

Ao final da aplicação da atividade prática ficou a indagação:

“ Será que o sentido anti-horário tem mesmo uma maior probabilidade de vencer uma disputa?”

A aplicação dos questionários transcorreu normalmente sem nenhum questionamento. A atividade fluiu conforme o esperado. Foram necessárias três aulas para a realização das atividades. E, nas considerações finais, foi comentado que um dos porquês para o desequilíbrio nos resultados em favor de um dos sentidos estaria no fato de não considerar a ordem de retirada dos números, que, se tomássemos como referência a orientação do sentido pela ordem das retiradas sucessivas dos números no sorteio, a probabilidade de vitória para cada sentido seria igual.

# Capítulo 4

# Descrição e Análise de Resultados

## 4.1 Introdução

Neste Capítulo, serão feitas a análise e as observações a respeito das atividades realizadas pelos alunos em sala de aula.

## 4.2 Análise preliminar

Como as atividades foram realizadas no 4º bimestre escolar, mais precisamente no mês de novembro, algumas considerações, como o conhecimento prévio, a motivação dos alunos e a duração de cada atividade, foram importantes para a análise dos resultados.

Inicialmente, antes da realização das atividades, foram trabalhados, com os alunos, através de aulas expositivas, os conceitos necessários de Probabilidade, como já citados anteriormente, para a resolução dos questionários avaliativos, assim como os conceitos e resultados da Análise Combinatória.

As atividades desenvolvidas serviram para atribuir as notas bimestrais na referida escola, na qual foi utilizado o critério de participação nas atividades práticas, já que uma das três notas a ser atribuída no bimestre é uma nota conceitual e, também, as resoluções dos questionários, onde foi analisado se houve coerência das respostas com o enunciado e se os cálculos foram desenvolvidos corretamente. Assim, para cada um dos critérios (participação, coerência das respostas e desenvolvimento dos cálculos) foi atribuída uma nota, obtida através de uma média aritmética, gerada a partir de todas as atividades realizadas pelo aluno.

Como em cada atividade foi preciso mais de uma aula, sendo necessários dois ou mais dias, para concluir as atividades, só foram considerados os questionários para avaliação dos alunos que participaram de todas as etapas.

Por fim, um aspecto também importante na análise é a motivação. Uma situação encontrada foi que a maioria dos alunos já estava aprovada ou que estariam precisando de poucos pontos para obter a aprovação, visto que a média de aprovação na rede estadual do

Rio Grande do Norte é 6,0.

Assim, uma forma encontrada para fazer com que eles se motivassem (já que eles iriam responder uma gama de questionários) foi bonificá-los com prêmios[1] nas participações das atividades práticas nas quais tivessem logrado êxito.

## 4.3 Análise da atividade 1: Mega Sena

Para essa atividade, 60 alunos cooperaram e responderam os questionários em quatro aulas de 50 minutos.

Foram analisados alguns aspectos como: O conhecimento prévio sobre a Mega Sena, fatores que podem influenciar uma aposta na Mega Sena, a probabilidade de se ganhar algum prêmio na Mega Sena com uma aposta simples e a relação entre a quantidade de números apostados $\times$ valor a ser pago pela aposta.

### 4.3.1 O conhecimento prévio sobre a Mega Sena

Nesta seção, foram analisados os conhecimentos iniciais dos alunos sobre a Mega Sena antes da realização das atividades. Para isto, foram utilizados os comentários em sala e as respostas colhidas na questão 1 do questionário preliminar, que se encontra no Apêndice A.

Inicialmente, o que os alunos sabiam sobre a Mega Sena é que é um jogo que paga um alto valor ao ganhador e que é preciso muita sorte para ganhar, sendo que alguns acham muito difícil ou quase impossível ganhar na Mega Sena, conforme Tabela 4.1.

| O que sabem | % |
|---|---|
| Não sabem nada | 21,7% |
| É questão de sorte, quase impossível | 38,3% |
| É muito difícil, pouca chance | 26,7% |
| É preciso muitos cartões para ganhar | 3,3% |
| Atribuíram quantificação à probabilidade | 5,0% |

Tabela 4.1: Conhecimento prévio da Mega Sena

A respeito da probabilidade de acertar na Mega Sena, eles ainda não tinham uma noção de quanto era esse valor. O aluno B7 atribuiu uma probabilidade de $1/1.000.000.000$, já o aluno B20 afirmou que a probabilidade era inferior a 1%, enquanto o aluno A14 concluiu que a probabilidade era de $1/1.000.000$.

O aluno B1, mencionou: *Analisando que no planeta existe, em média, 6 bilhões de pessoas, considerando mais ou menos umas 3 bilhões de pessoas, as chances se resumem*

[1]Bombons

*em 1 em 3.000.000.000*. Observe que o aluno fez uma referência equivocada ao associar o espaço amostral de acertar na Mega Sena como sendo a quantidade de pessoas do "mundo" que jogam, quando, na verdade, o espaço amostral não é a quantidade de pessoas que jogam ou cartões que são jogados e sim, o número de possibilidades de cartões distintos que podem ser formados contendo 6 números dos 60 números disponíveis. Erros como esses refletem a falta de noção que alguns alunos tinham a respeito da Mega Sena.

A falta de motivação para o estudo de Probabilidade, que resulta em um conhecimento deficiente do assunto reside, talvez, no fato de que há pouco interesse dos alunos em apostar nos jogos de azar, conforme eles expuseram nos comentários e nas discussões em sala.

### 4.3.2 Fatores que podem influenciar uma aposta na Mega Sena

Nesta seção, serão analisados os principais fatores que podem influenciar uma aposta da Mega Sena, tais como: Repetir os números de uma aposta que já saiu, ou apostar números consecutivos em um sorteio. Para isto, serão utilizadas as respostas colhidas nas questões 2 e 3 do questionário preliminar, 3 do questionário avaliativo-prático e as questões 3 e 10 do questionário avaliativo que se encontram no Apêndice A.

Para uma pessoa que aposta com frequência, não fazer apostas que já saíram, não colocar números consecutivos, saber dos números que mais saem ou que saem menos, entre outras "superstições", são informações importantes utilizadas para tentar maximizar suas chances de acertar na Mega Sena, tais cálculos de "combinações favoráveis" são feitos em questão de minutos pelos softwares mais modernos.

Sabemos que, em um sorteio da Mega Sena, cada número é escolhido de modo aleatório e equiprovável, assim como o espaço amostral também é equiprovável.

Para 50% dos avaliados, o fato de saber quais números foram sorteados mais vezes, não influencia no resultado dos sorteios, porém 61,7% dos avaliados acham importante saber esses números na hora de apostar.

Com relação às apostas contendo os seis primeiros números consecutivos, mais da metade dos alunos avaliados afirmaram, em cada questionário, que eles têm a mesma probabilidade de sair do que qualquer outra combinação, conforme dados constantes da Tabela 4.2.

| Probabilidade | São equiprováveis | Não são equiprováveis |
|---|---|---|
| Questionário Preliminar | 63,3% | 36,7% |
| Questionário Avaliativo-prático | 66,7% | 33,3% |
| Questionário Avaliativo-prático | 58,3% | 41,7% |

Tabela 4.2: Influência dos seis primeiros números consecutivos em sorteios

Analisando os questionários, apenas 33,3% dos avaliados mantiveram, em todos os três questionários, a posição de equiprobabilidade nos sorteios com uma aposta contendo os seis primeiros números consecutivos, e que 11,7% dos avaliados, em todos os três questionários, mantiveram a posição de não-equiprobabilidade nos sorteios com uma aposta que continha os seis primeiros números consecutivos.

Cabe ressaltar, ainda, a influência da Mini Sena na avaliação, visto que, nesta etapa da atividade, houve o maior índice de aceitação da equiprobabilidade nos sorteios com uma aposta contendo os seis primeiros números consecutivos. Talvez pelo fato que, em um sorteio de seis números na Mini Sena, que possui 10 números ao todo, é mais provável sair os seis primeiros números consecutivos em relação à Mega Sena, que possui 60 números.

O mais interessante foi analisar a questão de repetir sorteios já realizados, isto é, fazer um jogo da Mega Sena que já saiu.

Mais da metade dos alunos afirmaram que não fariam uma aposta de sorteios que já se repetiram, conforme tabela 4.3.

| Aposta em sorteio repetido | % |
|---|---|
| Apostaria | 45% |
| Não apostaria | 55% |

Tabela 4.3: Repetição de sorteios

Para 25% dos avaliados dificilmente um mesmo sorteio sairia novamente, já 13,3% dos avaliados apostaria em um sorteio que já saiu, pois, teriam "mais chances" de sair.

É importante ressaltar que, como ao todo tem mais de 50 milhões de possibilidades e que já foram realizados menos de 1.500 jogos da Mega Sena até o presente momento, é óbvio que é muito mais provável sair um jogo inédito, porém, sabemos que cada volante apostado com seis números tem a mesma chance de sair.

Apenas 6,7% dos avaliados relacionaram a noção da equiprobabilidade em suas respostas, dando a transparecer que os alunos, na grande maioria, se deixam levar pela intuição.

### 4.3.3 Probabilidade de se ganhar algum prêmio na Mega Sena com uma aposta simples

Nesta seção, será analisado o desenvolvimento dos cálculos para a determinação da probabilidade de se ganhar, com uma aposta contendo seis números, algum prêmio da Mega Sena. Serão utilizados, para essa análise, as respostas colhidas nas questões 1, 2 e 4 do questionário avaliativo-prático e as questões 1, 2 e 4 do questionário avaliativo que se encontram no Apêndice A.

Para determinar a probabilidade de se ganhar algum prêmio na Mega Sena, é preciso utilizar os conhecimentos da Análise Combinatória. Efetuar os cálculos não foi uma tarefa difícil para os alunos, visto que, 85% dos avaliados o fizeram corretamente.

Com relação aos cálculos da Mini Sena, os alunos ficaram surpreendidos com os resultados alcançados, pois a maioria imaginava que acertar 6 números em um sorteio com 10 números seria muito fácil. Ao realizarem os cálculos, 86,7% dos avaliados constataram que tal probabilidade de acerto seria inferior a 1%. No final da resolução do questionário da atividade prática, o aluno B16 comentou: "Mesmo com poucos números, a probabilidade de ganhar é tão pequena, por isso ninguém havia ganhado de primeira".

Com relação ao acerto da quadra e da quina, cabe ressaltar que, inicialmente, 91,7% diziam não saber como calcular as chances de acertar a quadra ou a quina na Mega Sena, ao passo em que apenas 8,3% dos avaliados afirmavam que utilizavam a Análise Combinatória para calcular essa probabilidade, sem explicar como.

Entretanto, com a ajuda na resolução da questão, alguns alunos conseguiram resolver, tanto na atividade da Mini Sena, quanto na atividade da Mega Sena, conforme a Tabela 4.4.

| Resultados | Questionário Prático-avaliativo | Questionário Avaliativo |
|---|---|---|
| Cálculos corretos | 28,3% | 8,3 % |
| Cálculos errados | 26,7% | 12,7% |
| Cálculos incompletos | 30,0% | 33,3% |
| Cálculos em branco | 15,0% | 46,7% |

Tabela 4.4: Cálculo da Probabilidade de acerto da quadra e da quina na Mega Sena.

Constata-se um número muito alto de alunos que não responderam a questão no questionário avaliativo. O fato de ele ser muito extenso e apresentar muitos cálculos pode ter interferido nessa resistência dos alunos em resolver a questão.

### 4.3.4 A relação entre a quantidade de números apostados $\times$ valor a ser pago pela aposta

Nesta seção, serão analisadas as ideias que os alunos tiveram a respeito da maneira de como é feita a atribuição do valor a ser pago em uma aposta em relação à quantidade de números apostados. Foram utilizados, para essa análise, as respostas colhidas na questão 4 do questionário preliminar, 7 do questionário prático-avaliativo e as questões 7, 8 e 9 do questionário avaliativo que se encontram no Apêndice A.

Na Mega Sena, é possível que o jogador assinale entre 6 e 15 números. Claro que quanto mais números assinalados maior a chance de ganhar o prêmio, porém, maior será o valor da aposta a ser paga.

Analisando, preliminarmente, o porquê de uma aposta contendo 7 números custar R$ 14,00, sabendo que uma aposta contendo 6 números custa R$ 2,00, chegam a respostas diversas e com muitos alunos sem saber dar explicação, conforme a Tabela 4.5.

| Justificativa | % |
|---|---|
| Não souberam explicar | 36,7% |
| Aumento da chance de acerto | 43,3% |
| Proporcionalidade | 3,3% |
| Outras justificativas | 16,7% |

Tabela 4.5: Justificativa da relação valor pago e quantidade de números apostados.

A maioria dos alunos, que expuseram uma opinião, associou ao fato de ter mais chances implicar em um valor a ser pago maior, porém não explicaram o porquê dos R$ 14,00 e apenas 3,3% dos avaliados relacionaram a um aumento de $7\times$ na chance, já que com 7 números daria para formar 7 cartões distintos com 6 números.

A proporcionalidade em questão foi associar cada número apostado ao valor de R$ 2,00. Entre as outras justificativas, expostas para o fato de o valor da aposta custar R$ 14,00, estava o fato de que:

- 14 é o dobro de 7;
- Haverá "outro prêmio" para quem paga R$ 14,00, e esse prêmio é maior.

Após a resolução dos três questionários, o número de alunos que não expuseram opinião a respeito do porquê de o valor da aposta com 7 números ser R$ 14,00 aumentou para 65% dos avaliados. Esse valor tão alto talvez seja justificado pelos motivos já expostos, questionário longo e, também, por:

- O fato de diversos alunos deixarem as questões abertas em branco;
- Falta de tempo.

Porém, foram poucos que ficaram sem terminar a tarefa no prazo programado e que a maioria entregou as atividades antes do término do horário.

Com relação à análise do preço a pagar para apostas com 8, 9 e 10 números também tivemos resultados surpreendentes, conforme a Tabela 4.6.

| Justificativa | % |
|---|---|
| Não souberam explicar | 36,7% |
| Comparação do número de cartões | 38,3% |
| Aumento da chance de acerto | 15,0% |
| Proporcionalidade | 3,3% |
| Outras justificativas | 6,7% |

Tabela 4.6: Análise do preço a pagar para apostas com 8, 9 e 10 números

Para 38,3% dos avaliados que conseguiram relacionar o preço a pagar pela aposta em relação a quantidade de números apostados, 26,1% deles não associaram à quantidade de cartões que é possível formar com o valor de cada cartão (R$ 2,00).

Os mesmos alunos que associaram a proporcionalidade como justificativa para relacionar o valor a ser pago numa aposta com 7 números utilizaram para as apostas com 8, 9 e 10 números.

Outros alunos, tentando justificar o valor a ser pago quando se aumenta a quantidade de números a apostar, obtiveram sequências de valores aleatórias. Outros utilizaram a ideia de uma Progressão Aritmética de razão 12 (R$ 26,00, R$ 38,00 e R$ 50,00 para apostas com 8, 9 e 10 números, respectivamente). Outro aluno teve uma ideia um pouco inusitada (R$ 112,00, R$ 1.008,00 e R$ 10.080,00 para apostas com 8, 9 e 10 números, respectivamente). A partir da análise de sua resposta, o aluno deveria ter pensado: Se com 6 números paga-se R$ 2,00 e com 7 números paga-se R$ 14,00, que é 7 $\times$ maior que o valor da aposta de 6 números, então com 8 números paga-se 8 $\times$ mais que a aposta de 7 números, com 9 números paga-se 9 $\times$ mais que a aposta de 8 números e com 10 números paga-se 10 $\times$ mais que a aposta de 9 números.

A ideia comparativa de associar o valor a ser pago em uma aposta de acordo com a quantidade de números apostados não foi bem assimilada pelos alunos, talvez, por não ter explorado os conhecimentos de base na atividade prática da Mini Sena. Poderia ter adicionado uma nova questão nos questionários onde o aluno representasse as possibilidades de cartões diferentes, com 6 números, em apostas contendo 7, 8 ou 9 números e comparasse com a combinatória correspondente. Assim, dessa maneira, poderia obter resultados mais satisfatórios.

### 4.3.5 A opinião dos alunos

Acerca do desenvolvimento e da dinâmica de condução das atividades, desde a aplicação dos questionários até o envolvimento nas atividades, os alunos expuseram as suas opiniões e, em princípio, consideraram a atividade interessante.

A chance de ganhar um prêmio, a relação de conteúdos já estudados (Análise Combinatória) e a quantidade de cálculos foram os fatores que mais chamaram a atenção dos alunos.

O aluno B7 constatou: *Foi surpreendente, achei que acertar a Mini Sena era muito fácil, mas, vi que não é tão fácil assim, imagine a Mega Sena.* O aluno A31 frisou: *As atividades me ajudaram a entender aquilo que eu via no volante da Mega Sena e na TV e não sabia como calcular.*

Alguns alunos fizeram críticas à dinâmica das atividades. O aluno A30 disse: *Não gostei das atividades porque teve muitos cálculos, (...) precisa ser mais objetivo.* A maioria achou que não deveria mudar nada, apenas ter menos cálculos.

Para calcular as probabilidades existentes no volante da Mega Sena faz necessário a utilização dos cálculos propostos, não sendo possível diminuir a quantidade de cálculos nessa atividade para atingir os objetivos. Poderia ser feita uma mudança na elaboração dos questionário preliminar, com questões que seriam cobradas, de maneira análoga, em outros questionários, já que o aluno tem dificuldade em empregar os conceitos aprendidos, teoricamente, diante de uma situação prática.

## 4.4 Análise da atividade 2: Urna da Liberdade

Para essa atividade, 57 alunos cooperaram e responderam os questionários em duas aulas de 50 minutos cada.

Serão analisados alguns aspectos como: Distribuição das bolas $\times$ Maximização das chances de libertação e a Contribuição do cálculo de probabilidade.

### 4.4.1 Distribuição das bolas $\times$ Maximização das chances de libertação

Considerando os dois fatores preponderantes que influenciam a chance de libertação: A forma de distribuir as bolas e a quantidade de bolas a ser usadas na distribuição.

#### 4.4.1.1 A forma de distribuir as bolas nas urnas

Nesta seção, serão analisadas as formas pelas quais foram distribuídas as bolas na urna, se em quantidades iguais ou não, que possibilita uma maior probabilidade de libertação. Foram utilizadas, para essa análise, as observações feitas na aplicação da atividade prática e nas respostas colhidas nas questões 1, 2, 3 e 4 do questionário avaliativo que se encontra no Apêndice A.

A situação-problema da atividade faz referência à distribuição de bolas em duas urnas existentes. Na aplicação da atividade prática, foi preponderante a preferência dos alunos pela distribuição das bolas em quantidades iguais nas urnas, fato este que prevaleceu também no preenchimento dos questionários, como podemos observar na Tabela 4.7.

| Quantidade de bolas de cada cor | % |
|---|---|
| 1 bola | 52,6% |
| 2 bolas | 82,4% |
| 3 bolas | 75,4% |
| n bolas | 77,2% |

Tabela 4.7: Distribuição das bolas em quantidades iguais nas urnas.

Vale ressaltar que apenas 5,3% dos alunos escolheram, na resolução dos questionários, a distribuição assimétrica, em que o número de bolas em cada urna é diferente, como a maneira que possibilita a maior probabilidade de libertação, porém, esse fato só foi notado com apenas duas bolas de cada cor para distribuir e não se repetiu para as demais quantidades.

#### 4.4.1.2 A quantidade de bolas usadas na distribuição

Nessa seção será analisado o fato de se ter mais bolas para distribuir na urna aumenta ou não a probabilidade de libertação. Foram utilizadas, para essa análise, as respostas colhidas na questão 2 do questionário preliminar e da questão 5 do questionário avaliativo, que se encontram no Apêndice A.

Ter mais bolas à disposição na hora da distribuição é a preferência da maioria dos alunos, conforme observamos na Tabela 4.8.

| Avaliação | Questionário Preliminar | Questionário Avaliativo |
|---|---|---|
| Diminui as chances | 14,0% | 8,8% |
| Aumenta as chances | 28,1% | 52,6% |
| 50% de chances | 57,9% | 38,6% |

Tabela 4.8: Aumento na quantidade de bolas.

Ter mais bolas à disposição, associada à maneira de distribuição assimétrica, possibilita uma maximização da probabilidade de libertação, porém, esses dois fatores não foram levados em consideração pelos alunos na hora da distribuição.

Esses números podem ser atribuídos ao fato de que todos os alunos, na atividade prática, preferiram distribuir quantidades iguais de bolas em cada urna. Se tivesse feito uma nova abordagem, isto é, se o aluno analisasse a situação em que fossem distribuídas as bolas brancas nas duas urnas e as pretas em apenas uma urna e percebido que esta situação seria mais vantajosa, talvez os resultados tivessem sido outros.

### 4.4.2 Contribuição do cálculo de probabilidade

Nesta seção será analisada a importância do conhecimento de probabilidade na distribuição de bolas mais favorável à libertação. Foram utilizados, para essa análise, as respostas colhidas na questão 3 do questionário preliminar e da questão 6 do questionário avaliativo, que se encontram no Apêndice A.

No desenvolvimento dos cálculos existentes na atividade, o aluno mesmo sem um conhecimento aprofundado de Probabilidade Condicional, poderia, usando a intuição, determinar que a distribuição das bolas em quantidades iguais nas urnas resultaria em 50% de probabilidade de libertação e, que a distribuição assimétrica resultaria em um valor diferente de 50%.

Assim, se os alunos imaginassem que, colocando apenas uma bola branca em uma das urnas, independentemente da quantidade de bolas, sua chance de libertação já seria igual (se houvesse apenas uma bola de cada cor) ou superior (se houvesse mais de uma bola de cada cor) a 50%.

Porém, para a maioria dos alunos, de acordo com a Tabela 4.9, o conhecimento de probabilidade, mesmo não utilizado de maneira correta, é importante para obter vantagens na escolha de uma distribuição mais favorável.

| Avaliação | Questionário Preliminar | Questionário Avaliativo |
|---|---|---|
| Ajudaria | 79,0% | 87,7% |
| Não ajudaria | 21,0% | 12,3% |

Tabela 4.9: Contribuição do cálculo de Probabilidade.

É importante ressaltar que 47,3% dos avaliados no segundo questionário associaram o fato de a probabilidade ajudar na determinação da chance de libertação do prisioneiro, que é de 50%, independentemente da maneira de distribuir; e que 33,3% dos avaliados consideram importante os conhecimentos de probabilidade e os utilizaram no desenvolvimento da atividade.

O cálculo da probabilidade foi prejudicado pelo fato de que **todos** os alunos não conseguiram associar a ideia de que a assimetria na distribuição de bolas possibilitaria uma maior chance de libertação do prisioneiro.

### 4.4.3 Opinião dos alunos

A cerca do desenvolvimento e da dinâmica de condução das atividades, desde a aplicação dos questionários até o envolvimento nas atividades, os alunos consideraram o jogo bastante atrativo. Para os alunos, a interação, a facilidade de entender e ganhar, a estória e o mistério envolvido foram os fatores que mais chamaram a atenção.

O aluno A28 mencionou: *Foi um dos mais legais, (...) e interessante a forma de divisões de bolas que facilmente alteram as probabilidades de libertação.* O aluno A36 destacou: *O jogo Urna da Liberdade foi o que eu achei mais interessante e (...) o que eu mais empolguei. Foi boa essa ideia de aprender se divertindo, pois, pelo que eu observei a maioria dos alunos estavam bem atentos e (...).*

Porém, alguns alunos fizeram críticas a respeito da dinâmica do jogo. O aluno A26 disse: *Não gostei porque é sem graça, precisa de animação como nos outros jogos.* A maioria achou que não deveria mudar nada.

## 4.5 Análise da atividade 3: Jogo dos Discos

Para essa atividade, 55 alunos cooperaram e responderam os questionários em duas aulas com duração de 50 minutos cada uma.

Serão analisados alguns aspectos como: Previsão de acerto dos discos, Cálculo da Probabilidade de acerto dos discos, Valores a serem pagos pelo acerto dos discos e Relação da abordagem Frequentista e Geométrica.

### 4.5.1 Previsão de acerto dos discos

Nesta seção, será analisado o grau de dificuldade de acerto dos discos a partir da intuição dos alunos através de uma previsão inicial dos acertos de cada disco. Foram utilizadas, para essa análise, as respostas colhidas na questão 1 do questionário preliminar e da questão 6 do questionário avaliativo nos resultados obtidos pelos alunos no arremesso dos discos na atividade prática.

Inicialmente, a primeira impressão dos alunos acerca do Jogo dos Discos é que é muito fácil acertá-los, conforme o resultado mostrado na Tabela 4.10, que apresenta uma previsão de acertos em 50 lançamentos de cada um dos discos.

| Disco (diâmetro (cm)) | De 0 a 10 acertos | De 11 a 20 acertos | De 21 a 50 acertos |
|---|---|---|---|
| Disco de 10 cm | 21,8% | 12,7% | 65,5% |
| Disco de 15 cm | 32,7% | 21,8% | 45,5% |
| Disco de 20 cm | 47,3% | 36,4% | 16,4% |

Tabela 4.10: Previsão de acertos em 50 lançamentos.

Em ambas as salas, a quantidade de acertos foi de, no máximo, 10 acertos para cada disco, de modo que o disco de diâmetro 10 cm foi o mais acertado e o de 20 cm o menos acertado.

É importante ressaltar que, para 14,5% dos avaliados, o grau de dificuldade de acerto foi o contrário do que é na realidade, o disco de diâmetro 20 cm mais fácil de acertar que o de 10 cm. Ideia essa justificada pelo fato de que “quanto maior o diâmetro do disco mais fácil de acertar o alvo”.

Assim, os alunos perceberam que as ideias que tinham da dificuldade em acertar os discos foram contornadas, pois, puderam perceber na prática.

### 4.5.2 Cálculo da probabilidade de acerto dos discos

Nesta seção, serão analisados os erros encontrados na determinação da probabilidade de acerto dos discos. Foram utilizados, para essa análise, as respostas colhidas nas questões

1, 2 e 3 do questionário avaliativo (prático) e da questão 1 do questionário avaliativo, que se encontram no Apêndice A.

Preencher corretamente as tabelas é um grande passo para determinar a probabilidade de acerto dos discos, conforme visto na Tabela 4.11.

| Resultados | Questionário Avaliativo (Prático) | Questionário Avaliativo |
|---|---|---|
| Cálculos corretos | 54,5% | 80,0% |
| Cálculos errados ou em branco | 45,5% | 20,0% |

Tabela 4.11: Cálculos corretos da probabilidade

Os principais erros encontrados foram relacionados, no primeiro questionário, à representação da probabilidade errada na forma percentual (0,1 = 1%) e, no segundo questionário, à atribuição equivocada do espaço amostral (Foi considerado o diâmetro do quadrado, e não a área dele, como vem especificado).

Esses erros são comuns de encontrar, seja por descuido ou por falta de atenção, seja por dificuldades encontradas pelos alunos, mas que podem ser sanadas se detectadas a tempo.

### 4.5.3 Valores a serem pagos pelo acerto dos discos

Nesta seção, será analisada a relação entre o valor a ser pago pelo acerto dos discos e o valor cobrado pelo disco a ser lançado em função da probabilidade de acerto de cada disco. Foram utilizadas, para essa análise, as respostas colhidas nas questões 3 e 4 do questionário preliminar, nas questões 2 e 3 do questionário avaliativo (prático) e das questões 3 e 4 do questionário avaliativo, que se encontram no Apêndice A.

Os valores propostos na situação-problema (R$ 2,00 para o disco de diâmetro 10 cm, R$ 3,00 para o de 15 cm e R$ 4,00 para o de 20 cm) influenciaram a maioria dos alunos, conforme visto na Tabela 4.12.

O preço estipulado pela situação-problema (R$ 2,00 para o disco de diâmetro de 10 cm, R$ 3,00 para o disco de diâmetro de 15 cm e R$ 4,00 para o disco de diâmetro de 20 cm) teve influência no resultado, pois, para 50,9 % dos avaliados do questionário preliminar, 67,3% dos avaliados do questionário avaliativo-prático e 41,8% dos avaliados do questionário avaliativo, esses valores foram mencionados, sendo que 20,0% dos avaliados utilizaram esses valores em todos os questionários.

Da mesma forma, tomando base na questão 3 do questionário avaliativo, os valores proporcionais à probabilidade geométrica de acerto, encontrados corretamente por 60% dos avaliados, foram R$ 2,25, R$ 4,00 e R$ 9,00, para os discos de diâmetro 10 cm, 15 cm e 20 cm, respectivamente. Com isso, esses resultados tiveram influência nos resultados, já que 25,5% utilizaram esses valores em sua resposta.

Porém, baseado na dificuldade encontrada na atividade prática, onde acertaram, em

| Discos (diâmetro) | Preço | Questionário Preliminar | Questionário Avaliativo - prático | Questionário Avaliativo |
|---|---|---|---|---|
| 10 cm | $< R\$2,00$ | 14,0% | 12,7% | 12,7% |
| | $R\$2,00$ | 56,4% | 69,1% | 50,9% |
| | $> R\$2,00$ | 29,1% | 18,2% | 36,4% |
| 15 cm | $< R\$3,00$ | 14,0% | 10,9% | 9,1% |
| | $R\$3,00$ | 56,4% | 69,1% | 52,7% |
| | $> R\$3,00$ | 29,1% | 20,0% | 38,2% |
| 20 cm | $< R\$4,00$ | 16,4% | 10,9% | 12,7% |
| | $R\$4,00$ | 50,9% | 67,3% | 41,8% |
| | $> R\$4,00$ | 32,8% | 21,8% | 45,5% |

Tabela 4.12: Valores a serem pagos pelo acerto dos discos.

média, 20%, 15% e 8% dos arremessos dos discos com diâmetros, respectivamente, de 10 cm, 15 cm e 20 cm, os valores a serem pagos deveriam estar, respectivamente, próximos de R$ 5,00, R$ 6,50 e R$ 12,00.

Entretanto, nem os valores estimados na situação-problema e nem os encontrados na atividade prática, estariam adequados para aferir os valores, pois, se for baseado na probabilidade geométrica, o valor a ser pago pelo acerto do disco com 20 cm de diâmetro deveria ser 4 vezes maior que o valor a ser pago pelo disco com 10 cm de diâmetro. Para não haver um desfavorecimento para o jogador, são sugeridos, como valores estimados, por exemplo, R$ 2,00, R$ 3,50 e R$ 8,00, para os discos de diâmetro 10 cm, 15 cm e 20 cm, respectivamente.

A partir dessa sugestão, verificou-se que apenas 3,6% dos avaliados chegaram a valores razoáveis, onde um deles, o aluno A14, atribui os valores de R$ 2,00, R$ 3,00 e R$ 8,00. Porém, a maioria dos alunos, por falta de conhecimento ou de raciocínio, não conseguiram fazer essa comparação adequadamente.

### 4.5.4 Relação da abordagem Frequentista e Geométrica

Nesta seção, será analisada a relação entre a probabilidade de acerto dos discos utilizando a abordagem frequentista e a abordagem geométrica. Foram utilizadas, para essa análise, as respostas colhidas na questão 2 do questionário avaliativo.

Mais da metade dos avaliados consideraram não haver relação entre as duas abordagens, conforme visto na Tabela 4.13.

Observando os valores encontrados da probabilidade de acerto nos dois questionários, não foi encontrada uma relação entre as duas abordagens, principalmente se for considerado a probabilidade de acertar o disco com diâmetro de 10 cm, onde pela abordagem geométrica,

| Relação entre as Abordagens | % |
|---|---|
| Houve relação | 45,5% |
| Não houve relação | 55,5% |

Tabela 4.13: Relação da Abordagem Frequentista e Geométrica.

o valor é de 44,4% ante 20,0% encontrado na abordagem frequentista.

Percebe-se que, na prática, acertar o alvo é muito mais difícil do que é mostrado na teoria.

### 4.5.5 Opinião dos alunos

A respeito do desenvolvimento e da dinâmica de condução das atividades, desde a aplicação dos questionários até o envolvimento nas atividades, os alunos consideraram o jogo mais divertido dos que participaram. Para os alunos, a animação da sala, a expectativa e a dificuldade em acertar foram os fatores que chamaram mais a atenção.

O aluno A12 mencionou: *Foi o mais interessante, pois só em olhar os discos e o quadrado você achava fácil acertar. Só que as dificuldades começaram a surgir com a prática*. O aluno A27 destacou: *Foi um dos mais legais, não só pela grande participação dos alunos, mas também pela grande dificuldade em acertar o alvo. (...)*.

Porém, para alguns alunos o que não foi legal foi o tamanho dos quadrados, que deveriam ser maiores, o tamanho dos discos, que deveriam ser menores, assim como a distância do arremesso, que deveria ser menor.

## 4.6 Análise da atividade 4: Relógio das Probabilidades

Para essa atividade, 59 alunos cooperaram e responderam os questionários em três aulas com duração de 50 minutos cada uma.

Foram analisados alguns aspectos como: A expectativa de vitória de cada um dos sentidos em uma disputa, cálculo da probabilidade de vitória de cada sentido em uma disputa utilizando casos particulares e a percepção geométrica.

### 4.6.1 A expectativa de vitória de cada um dos sentidos

Os fatores preponderantes na análise desse aspecto foram a probabilidade de vitória em uma disputa e a previsão de empate em uma disputa.

#### 4.6.1.1 A probabilidade de vitória em uma disputa

Nesta seção, será analisada, de maneira intuitiva e formal, a probabilidade de vitória de cada um dos sentidos em uma disputa do Relógio das Probabilidades. Foram utilizados para essa análise as respostas colhidas na questão 1 do questionário preliminar, da questão 5 do questionário prático e da questão 1 do questionário avaliativo além dos resultados obtidos nas partidas realizadas.

Em princípio, a maioria dos alunos atribuía a probabilidade de ambos os sentidos vencer uma disputa em 50%, conforme visto na Tabela 4.14.

| Sentido Vitorioso | Questionário Preliminar | Questionário Prático | Questionário Avaliativo |
|---|---|---|---|
| Horário | 6,8% | 1,7% | 1,7% |
| Anti-Horário | 3,4% | 78,0% | 81,3% |
| Equiprovável | 89,8% | 20,3% | 17,0% |

Tabela 4.14: A probabilidade de vitória em uma disputa.

Observa-se que, com o desenvolvimento da atividade prática, houve uma percepção dos alunos que o sentido anti-horário tinha uma maior probabilidade de vitória. Fato verificado na resolução dos questionários e no resultado das partidas realizadas.

Foi significante a mudança de opção com relação à expectativa de vitória de cada um dos sentidos, visto que puderam perceber, na prática e na resolução dos questionários, a tendência de vitória de um dos sentidos.

#### 4.6.1.2 A previsão de empate em uma disputa

Nesta seção, será analisada a situação em que acontece um empate em uma disputa, isto é, quando o comprimento do arco delimitado pelos dois números no Relógio das Probabilidades é igual em ambos os sentidos. Foram utilizadas, para essa análise, as respostas colhidas na questão 3 do questionário preliminar e a questão 7 do questionário prático.

A previsão de empate em uma disputa é fácil perceber, pois, só aparece no caso de o número de subdivisões ser par. Porém, inicialmente, a maioria acreditava que essa relação não acontecia, conforme dados da Tabela 4.15.

| Situação em que acontece | Questionário Preliminar | Questionário Prático |
|---|---|---|
| Nunca acontece | 40,7% | 13,6% |
| Sempre acontece | 13,6% | 11,9% |
| Com o $n^o$ de subdivisões sendo par | 25,4% | 66,1% |
| Com o $n^o$ de subdivisões sendo ímpar | 20,3% | 8,5% |

Tabela 4.15: A previsão de empate em uma disputa.

É considerável, com o desenvolvimento da atividade prática, o aumento da concepção de que o empate em uma disputa só pode acontecer no caso do número de subdivisões serem par. Isso é importante, pois, leva o aluno a questionar o porquê de certos fenômenos só acontecer em determinada situação.

### 4.6.2 Cálculo das probabilidades de vitória de cada sentido utilizando casos particulares

Para determinar a probabilidade de vitória de cada sentido em uma disputa no Relógio das Probabilidades, o fator preponderante na análise desse aspecto foi a determinação correta do resultado de cada possibilidade em uma disputa. Para esta análise foram utilizadas as respostas colhidas nas questões 1, 2, 3 e 4 do questionário prático e da questão 1 do questionário avaliativo.

#### 4.6.2.1 Determinação correta do resultado de cada possibilidade em uma disputa

Para o cálculo das probabilidades utilizando casos particulares, isto é, para determinar a probabilidade de vitória em uma disputa no Relógio das Probabilidades com 60 subdivisões, foram utilizadas situações particulares do Relógio com 3, 4, 5 e 6 subdivisões; é necessário que haja a determinação correta do resultado de cada possibilidade em uma disputa. Para isso, foi verificado se houve um preenchimento adequado das tabelas do questionário, analisando os erros encontrados nesse preenchimento. Os resultados seguem na Tabela 4.16.

| Número de subdivisões | % |
|---|---|
| 3 | 69,5% |
| 4 | 28,8% |
| 5 | 20,3% |
| 6 | 32,2% |

Tabela 4.16: Determinação correta do resultado de cada possibilidade em uma disputa.

É importante ressaltar que 18,6% dos avaliados determinaram corretamente o resultado de cada possibilidade em uma disputa.

Esses valores baixos talvez estejam associados à falta de uma ilustração com os relógios subdivididos em 3, 4, 5 e 6 partes, respectivamente, porém, não era um empecilho à determinação dos resultados de cada possibilidade.

Nem sempre a determinação correta do resultado de cada possibilidade em uma disputa é suficiente para o cálculo correto da probabilidade de vitória de cada sentido em uma disputa, pois, muitas vezes, não se conseguem relacionar as possibilidades com a probabilidade. Os resultados seguem na Tabela 4.17.

| Número de subdivisões | % |
|---|---|
| 3 | 66,1% |
| 4 | 13,6% |
| 5 | 8,6% |
| 6 | 13,6% |

Tabela 4.17: Cálculo correto da Probabilidade.

O baixo número de acertos no cálculo da probabilidade esteve relacionado, principalmente à determinação equivocada dos resultados das possibilidades nas disputas e à identificação incorreta do espaço amostral conforme Tabela 4.18.

| Número de subdivisões | Determinação dos resultados | Espaço Amostral | Outros erros |
|---|---|---|---|
| 3 | 18,6% | 0,0% | 15,3% |
| 4 | 22,0% | 13,6% | 50,9% |
| 5 | 23,7% | 10,2% | 57,5% |
| 6 | 20,3% | 15,2% | 50,9% |

Tabela 4.18: Erros cometidos no cálculo da Probabilidade.

Como, para o caso em que o Relógio das Probabilidades tem 3 subdivisões temos 3 possibilidades: muitos alunos associaram que, para 4 subdivisões, haveria 4 possibilidades quando, na verdade, são 6 possibilidades; para 5 subdivisões haveria 5 possibilidades quando, na verdade, são 10 possibilidades e, para 6 subdivisões haveria 6 possibilidades quando, na verdade, são 15 possibilidades.

Esse foi o principal erro quando determinaram, erradamente, o espaço amostral. Esso erro é preocupante, pois, uma das ideias básicas da probabilidade, a ideia de que ela, associada a um determinado evento, é um número entre 0 e 1, ficaria comprometida com esse pensamento. Nesse caso, faltou o aluno analisar essa situação na hora de efetuar os cálculos.

Também podemos considerar que os outros erros encontrados estavam relacionados à determinação incorreta do espaço amostral ligados ao preenchimento equivocado das tabelas.

### 4.6.3 A Percepção geométrica

Os fatores preponderantes na análise desse aspecto foram a contribuição da ilustração A.1, que consta no Apêndice A, para o cálculo da probabilidade de vitória de cada sentido em uma disputa, obtida através da relação entre a área de cada região na ilustração com as possibilidades de vitória de cada sentido do Relógio das Probabilidades. Foram utilizadas, para essa análise, as respostas colhidas na questão 4 do questionário avaliativo.

Para 45,8% dos avaliados, a ilustração mencionada é importante para a resolução do cálculo da probabilidade da vitória em uma disputa no Relógio das Probabilidades com 60 subdivisões.

Mesmo com 74,6% dos avaliados associando corretamente as regiões representadas na ilustração citada com a probabilidade de ganho de cada sentido, apenas 8,6% dos avaliados conseguiram relacionar a região e suas respectivas áreas.

O mais intrigante é que, para 40,7% dos avaliados, a probabilidade de vitória de ambos os sentidos em uma disputa é de 50%, onde em questionamentos anteriores esse número era bem menor.

Apenas 8,6% dos avaliados conseguiram determinar, corretamente, a probabilidade de vitória em uma disputa, do sentido anti-horário, em 75% e a maioria, 42,3%, atribuíram esse valor a 65%.

A dificuldade em assimilar o conceito de área, que não foi trabalhado anteriormente a aplicação da atividade, foi o fator preponderante no baixo índice de acertos da probabilidade de vitória em uma disputa no Relógio das Probabilidades.

### 4.6.4 Opinião dos alunos

Considerando o desenvolvimento e a dinâmica na condução das atividades, desde a aplicação dos questionários até o envolvimento nas atividades, os alunos consideraram o jogo com o entendimento mais complicado. A competição entre os alunos e a surpresa em saber que um dos sentidos tem maior probabilidade em ser sorteado foram os fatores que mais chamaram a atenção.

O aluno A33 mencionou: *Foi um jogo legal, algumas pessoas não entenderam, mas eu achava que as chances de ganhar eram de 50% do sentido horário e 50% do sentido anti-horário, mas, na prática, vimos que o sentido anti-horário tem mais chances*. O aluno A11 relatou: *Adorei esse jogo, precisa-se de sorte como todos os outros, mas analisando e estudando se vê que o sentido que tem mais chances de vencer é o sentido anti-horário*.

Porém, para a maioria dos alunos, as regras deveriam ser mudadas para que cada sentido tivesse 50% de chances de vitória. Uma pequena minoria reclamou dos cálculos existentes, que eram muito complicados.

# Capítulo 5

# Conclusões

Conhecer o processo histórico de como se desenvolveu a Teoria das Probabilidades é importante para introduzir o conceito em sala de aula, assim como destacar a importância desse conteúdo em exames como o ENEM.

Vale ressaltar, ainda, que não foi possível analisar alguns aspectos devido a incoerências nas respostas do aluno nos questionários. Compreensível, pois ainda falta, para muitos, o amadurecimento de conceitos na Matemática.

Quando estamos propondo atividades para os alunos, os resultados obtidos podem ser satisfatórios ou não, podendo aparecer ideias novas ou que passem despercebidas. Com isso, uma parte dos objetivos das atividades desenvolvidas não foram alcançados.

Na atividade da Mega Sena mais de 80% dos alunos conseguiu calcular a probabilidade de ganhar a Mini Sena e a probabilidade de ganhar a Mega Sena apostando com seis números. Porém, os alunos não conseguiram aplicar os conceitos de Análise Combinatória no cálculo da probabilidade de acertar a quina ou da probabilidade de acertar a quadra, isto fica evidenciado na Tabela 4.4, na página 37 deste trabalho, a qual mostra que menos de 10% dos alunos conseguiu calcular corretamente estas probabilidades e 46,7% dos alunos deixaram a questão correspondente do Questionário Avaliativo em branco. Os alunos também não conseguiram aplicar os conceitos de Probabilidade, abordados nas aulas, para explicar o porquê de uma aposta na Mega Sena contendo 6 números custar R$ 2,00 e, uma aposta com 7 números custar R$ 14,00 (questão 8 do Questionário Avaliativo). De fato na Tabela 4.5, na página 38 deste trabalho, observamos que 43,3% dos alunos entenderam que o aumento do preço era relacionado ao aumento da probabilidade de ganhar, entretanto apenas 3,3% dos alunos foram capazes de realizar os cálculos e justificar que o preço cobrado é diretamente proporcional à probabilidade de ganhar. Este obstáculo pode ser superado adicionando questões no Questionário Preliminar que facilitem os cálculos das probabilidades no Questionário Prático, relacionado, sempre que possível, com questões já trabalhadas em sala. Por exemplo, em uma das aulas de Análise Combinatória foi resolvida a seguinte questão:

Em um grupo com 6 homens e 3 mulheres quantos grupos diferentes podem ser formados que tenham 2 homens e 1 mulher?

No cálculo da probabilidade de acerto da quina no jogo da Mini Sena os casos favoráveis consistem justamente dos conjuntos de 6 números nos quais exatamente 5 números estão no conjunto dos 6 números apostados e 1 um está no conjunto dos 4 números que não foram apostados. Portanto o cálculo da probabilidade de acerto da quina é uma adaptação da solução da questão acima. Poderia ser colocada no Questionário Preliminar a seguinte pergunta:

Considere a seguinte questão (resolvida nas aulas de Análise Combinatória) "Em um grupo com 6 homens e 3 mulheres quantos grupos diferentes podem ser formados que tenham 2 homens e 1 mulher?" Você consegue perceber a relação entre a solução deste exercício e o cálculo do número de casos favoráveis para o acerto da quina?

O professor pode ainda pedir ao aluno que liste alguns sorteios onde a aposta dos números $\{1,2,3,4,5,6\}$ na Mini Sena ganha a quina, o que pode ajudar o aluno a perceber a relação evidenciada na questão acima.

Na atividade da Urna da Liberdade, os objetivos, de acordo com a metodologia utilizada, não foram alcançados, devido à resistência dos alunos quanto à ideia de que a simetria na distribuição de bolas é a mais vantajosa, fato este evidenciado na Tabela 4.7, na página 40 deste trabalho, a qual mostra a preferência, de mais de 50% dos alunos, pela distribuição das bolas em quantidades iguais nas urnas, como a maneira que possibilita a maior probabilidade de libertação. Para isso, é sugerida a utilização de novas metodologias, como induzir a distribuição assimétrica nas bolas ou simular uma situação na qual as quantidades de bolas de cada cor não sejam iguais.

Na atividade Jogo dos Discos apenas 3,6% dos avaliados chegaram a valores razoáveis na determinação dos valores atribuídos a cada disco de acordo com a probabilidade de acerto. A maioria dos alunos não conseguiu perceber essa relação, como mostra a tabela 4.12, na página 45 deste trabalho, a qual mostra a preferência de mais de 50% dos alunos pelos valores propostos (R$ 2,00, R$ 3,00 e R$ 4,00), valores estes utilizados por 20% dos alunos em todos os questionários, mesmo 80% dos alunos efetuando corretamente os cálculos da probabilidade formal de acerto dos discos, conforme dados mostrados na Tabela 4.11, na página 44 deste trabalho. Dificuldade esta, que poderia ser sanada fazendo uma simulação financeira com a distribuição de cédulas representativas do nosso sistema monetário. Aliado a uma mudança na metodologia, com a distribuição de uma quantia igual e suficiente para que cada aluno pudesse, em sua oportunidade, "comprar" os três discos, a seu critério, não necessariamente um de cada; com isso, iria perceber na prática se os valores propostos a serem pagos pelo acerto dos discos estão adequados ou não. Entretanto, perceber que por trás de um jogo, é possível calcular a probabilidade de acerto dos discos de dois modos, usando a abordagem frequentista e a geométrica, pode motivar o aluno na busca por novos conhecimentos. A atividade do Jogo dos Discos possibilitou essa comparação, mesmo com a maioria dos alunos, 55,5% dos avaliados, não encontrando essa relação, conforme dados da Tabela 4.13, na página 46 deste trabalho.

Na atividade do Relógio das Probabilidades mais de 70% dos alunos, de acordo com os dados coletados da questão 4 do Questionário Avaliativo, conseguiram relacionar as regiões presentes na ilustração A.1 com as possibilidades de vitória de cada um sentido de disputa do Relógio das Probabilidades. Entretanto, 8,6% dos alunos conseguiram relacionar a área de cada uma região com a probabilidade de vitória de cada um sentido de disputa do Relógio das Probabilidades. Assim, para um melhor aproveitamento desta atividade é aconselhado trabalhar o cálculo de área de figuras planas anteriormente à aplicação desta atividade, já que não foi um tema explorado durante o respectivo ano letivo, ou adicionando questões no Questionário Preliminar que facilitem os cálculos das áreas de figuras planas no Questionário Avaliativo. Da mesma forma, o cálculo da probabilidade de vitória de cada um sentido de disputa do Relógio das Probabilidades, determinado ao analisar casos particulares, também não teve um resultado satisfatório. Com a exceção do caso do relógio apresentar 3 subdivisões, os resultados para os demais, com 4, 5 e 6 subdivisões, apresentou valores inferiores a 15% na determinação correta da probabilidade de cada um dos sentidos, conforme dados da Tabela 4.17, na página 49 deste trabalho. Vale ressaltar que 18,6% dos alunos determinaram corretamente os resultados de cada possibilidade, assim, erros foram cometidos na determinação da probabilidade, já que mais de 10% dos alunos associaram, equivocadamente, o espaço amostral como sendo o número de subdivisões do relógio, e não a quantidade de possibilidades formadas, conforme dados da Tabela 4.18, na página 49 deste trabalho. Essas dificuldades poderiam ser resolvidas se, na elaboração das questões, fossem usadas ilustrações com os relógios subdivididos em 3, 4, 5 e 6 partes, respectivamente e enfatizar que a probabilidade de um determinado evento é um número entre 0 e 1. Mesmo assim, a atividade serviu, na prática, para que ideias inicialmente estabelecidas pudessem ser confrontadas e que, com as aplicações das atividades, puderam tirar suas conclusões a respeito de que um dos sentidos na disputa tinha uma maior probabilidade de ganho, conforme dados apresentados na Tabela 4.14, na página 47 desse trabalho, onde, preliminarmente apenas 3,9% creditavam ao sentido anti-horário uma maior probabilidade de vitória em uma disputa e, com a prática, essa percepção passou a ser creditada por, aproximadamente, 80% dos alunos.

As atividades poderiam ser usadas, também, como forma de motivar a introdução do tema Probabilidade. A atividade Jogo dos Discos seria a mais adequada (as outras também poderiam ser utilizadas), onde o professor trabalharia a parte prática, com a utilização das frequências relativas, como ideia inicial na determinação da probabilidade de um evento (acerto dos discos) e, com a consolidação do conteúdo, determinar formalmente esta probabilidade.

Como subsídio, para o trabalho dos professores em sala de aula, recomendamos a utilização dessas atividades, não necessariamente todas, ou outras atividades semelhantes, já que introduzir diferentes metodologias, como os jogos, no processo de ensino-aprendizagem e avaliação, além de dinamizar as aulas, possibilita aos alunos fazer novas descobertas e confrontar ideias pré-estabelecidas que contribuam para o ensino-aprendizagem. Para isso, é sugerido aplicá-los, em turmas de ensino médio, com as devidas modificações metodológicas, seja como motivação inicial na introdução do tema ou como avaliação, desde que o aluno já tenha conhecimento dos conceitos básicos necessários a aplicação.

Ao introduzir as atividades, percebemos que algumas dificuldades ou deficiências em conceitos matemáticos contribuíram para que ficasse difícil aprofundar os conceitos abordados. Por exemplo, na atividade da Urna da Liberdade, se o aluno já tivesse a noção de que a distribuição assimétrica das bolas fosse a forma de distribuição que maximizava a chance de libertação, poderia ser explorada a ideia de limite, onde levaria o aluno a pensar: Será que existe um valor máximo da probabilidade de libertação?

De um modo geral, o presente trabalho procurou apresentar atividades que possibilitassem a consolidação de conceitos, abordadas de maneira investigativa e direcionada, contribuindo para a formação cognitiva do aluno.

# Referências Bibliográficas


[1] BRASIL. Constituição (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil*. Brasília, DF: Senado, 1988.

[2] BRASIL. Lei N$^o$ 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Lex**: Lei de Diretrizes e Bases da educação Brasileira (LDB), Brasília, 1996.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de referência para o ENEM 2009*. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz _referencia _enem.pdf>. Acesso em: 05 jan 2013.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática.(1$^o$ e 2$^o$ ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1997.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática.(3$^o$ e 4$^o$ ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

[6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN +) - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC, 2002.

[7] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.*Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

[8] COUTINHO, C. Q. S.; *Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?*. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.3, p.50-67, UFSC: 2007.

[9] DAVIS, P. J.; HERSH, R. *O Sonho de Descartes: o mundo de acordo com a Matemática*, 2. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, (1998).

[10] D'AMBROSIO, B. C.; *Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates*, Ano II. N2. Brasília - DF: SBEM, (1989), pp. 15-19.

[11] GONÇALVES, C. M.*Concepções de professores e o ensino de probabilidades na escola básica*. 2004. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação)  Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

[12] LIMA, Elon Lages, et al: *Matemática no Ensino Médio*, vol. 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[13] PATERLINI, R. R.; *O Problema do Jogo dos Discos*. Revista do Professor de Matemática nº 48, 1º quadrimestre de 2002, p. 13-20.

[14] RIFO, Laura L.R.; *Probabilidade e decisões*. São Paulo, Revista do Professor de Matemática, n.68, 1ª quadrimestre de 2009, p.30-32.

[15] ROTUNNO, Sandra A.; *Estatística e probabilidade: um estudo sobre a inserção desses conteúdos no ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Disponível em <http://dspace.c3sl.ufpr.br:8080/dspace/bitstream/1884/12350/1/DISSERTA_17102007.pdf>. Acesso em 05 jan 2013.

[16] SOUZA, Joamir; *Novo Olhar: Matemática*. Ensino Médio. São Paulo, FTD, 2010.

# Apêndice A

# Questionários Aplicados

Neste Apêndice constarão os questionários aplicados em sala de aula.

## A.1 Questionários aplicados da primeira atividade: Mega Sena

Foram aplicados três questionários:

- Questionário Preliminar
- Questionário Avaliativo-Prático
- Questionário Prático

**Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza**
**Aluno:__________________________________________ n°_____ Turma: 2°_____**

**Questionário Preliminar**

1. O que você sabe a respeito da probabilidade de ganhar na Mega Sena?

2. Apesar de haver números que tenham sido sorteados mais vezes do que outros, para você, a probabilidade de cada um dos sessenta números ser sorteado é a mesma?

3. A aposta 01-02-03-04-05-06 tem a mesma probabilidade de sair que a aposta 03-10-21-28-39-50?

( ) Sim ( ) Não

4. Se uma aposta contendo 6 números (mínima) custa R$ 2,00, então, por que uma aposta contendo 7 números custa R$ 14,00?

5. Na Mega Sena, também são pagos prêmios para quem acerta a quina ou a quadra, isto é, acertar 5 números e 4 números, respectivamente. Você tem ideia de como é calculado a probabilidade de acertar a quina, ou a quadra?

( ) Não ( ) Sim.

Como?______________________________________________________

**Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza**

**Aluno:_________________________________________ n°_____ Turma: 2°_____**

**Questionário Avaliativo-Prático**

1. De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Mini Sena?

2. Qual a probabilidade de se acertar os 6 números, com aposta contendo 6 números, na Mini Sena?

3. A aposta 01-02-03-04-05-06 tem a mesma chance de sair que a aposta 01-03-04-06-07-09?

   (    ) Sim    (    ) Não

   *Para acertar a quina, a aposta deve conter 5 números entre os 6 sorteados e 1 número entre os 4 não sorteados.*

4. Com uma aposta contendo 6 números (mínima), qual a probabilidade de se fazer uma quina? E uma quadra?

   Se um aluno apostar 7 números ele terá mais chances de acertar os 6 números.

5. Com 7 números daria para formar quantas apostas distintas contendo 6 desses números?

6. Qual a probabilidade de acertar os 6 números apostando os 7 números?

7. A probabilidade de acertar os 6 números, com uma aposta contendo 7 números, aumenta em quantas vezes em comparação com a aposta mínima?

**Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza**
**Aluno:__________________________________________ n°_____ Turma: 2°_____**

**Questionário Avaliativo**

1. De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Mega Sena?

2. Qual a probabilidade de se acertar os 6 números com aposta contendo 6 números na Mega Sena?

3. A aposta 01-02-03-04-05-06 tem a mesma chance de sair que a aposta 03-10-21-28-39-50?

( ) Sim ( ) Não

*Para acertar a quina, a aposta deve conter 5 números entre os 6 sorteados e 1 número entre os 54 .*

4. Com a aposta mínima, qual a probabilidade de se fazer uma quina? E uma quadra?

*Se uma pessoa aposta 7 números ele terá mais chances de acertar os 6 números. Porém deve pagar um valor maior que o da aposta mínima e proporcional a chance que tem de ganhar.*

5. Com 7 números daria para formar quantas apostas distintas contendo 6 desses números?

6. Qual a probabilidade de acertar os 6 números apostando os 7 números?

7. A probabilidade de acertar os 6 números, com uma aposta contendo 7 números, aumenta em quantas vezes em comparação com a aposta mínima?

8. Se uma aposta contendo 6 números (mínima) custa R$ 2,00, então, por que uma aposta contendo 7 números custa R$ 14,00?

9. Determine o valor a ser cobrado por uma aposta contendo 8 números? Com 9 números? E com 10 números?

10. A Mega Sena é um dos jogos da loteria mais procurado no Brasil, devido aos altos valores pagos aos ganhadores. Em sua opinião:

    I) A maioria dos apostadores sabe da probabilidade que tem de acertar na Mega Sena?

    (    ) Sim    (    ) Não

    II) Você apostaria os 6 números que já saíram em algum sorteio da Mega Sena?

    (    ) Sim    (    ) Não. Por quê? ____________________________________________

    III) Existem números que saem com mais frequência e outros com menos frequência nos sorteios da Mega Sena. Você acha que essas informações:

    (    ) São importantes na hora de fazer uma aposta

    (    ) Não são importantes na hora de se fazer uma aposta, pois, a probabilidade de cada número sair num sorteio é igual.

## A.2 Questionários aplicados da segunda atividade: Urna da Liberdade

Foram aplicados dois questionários:

- Questionário Preliminar
- Questionário Avaliativo

**Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza**
**Aluno:___________________________________________ n°_____ Turma: 2°_____**

## Questionário Preliminar

## Atividade Urna da Liberdade

1. Existe um modo de distribuir as bolas que propicia ao prisioneiro uma maior probabilidade de ser libertado?

   (     ) Sim, independente do número de bolas.

   (     ) Não, depende da quantidade de bolas.

2. O fato do prisioneiro ter mais bolas (brancas e pretas em quantidades iguais) a sua disposição:

   (     ) Aumenta a probabilidade de o prisioneiro conseguir a liberdade;

   (     ) Diminui a probabilidade de o prisioneiro conseguir a liberdade;

   (     ) Não influencia a probabilidade de o prisioneiro conseguir a liberdade, pois, será sempre de 50%.

3. O conhecimento de probabilidade é importante quando precisamos tomar certas decisões na qual queremos obter vantagens. Considerando esta atividade, em sua opinião, utilizar o conhecimento de probabilidade:

   (     ) Não vai ajudar, pois, a sorte independe de probabilidade.

   (     ) Vai ajudar, pois, conhecendo a probabilidade de se obter a liberdade, podemos escolher a situação que é mais favorável.

**Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza**
**Aluno:__________________________________________ n°_____ Turma: 2°_____**

**Questionário Avaliativo**

**Atividade Urna da Liberdade**

1. O prisioneiro possui uma bola branca e uma bola preta. Dos modos abaixo:

   **Modo 1** : O prisioneiro distribuiu as duas bolas numa mesma urna;

   **Modo 2** O prisioneiro distribuiu uma bola em cada urna.

   Determine:

   I): Em qual(is) dos modos o prisioneiro tem maior probabilidade de ser libertado?

   (     ) Modo 1     (     ) Modo 2

   II) A probabilidade de ser libertado que o prisioneiro possui, que propicia a maior chance de libertação:

   (     ) Menor que 50%     (     ) 50%     (     ) Maior que 50%

2. O prisioneiro possui duas bolas brancas e duas bolas pretas. Dos modos abaixo:

   **Modo 1** : O prisioneiro distribuiu as quatro bolas numa mesma urna;

   **Modo 2** : O prisioneiro distribuiu duas bolas brancas em uma urna e duas bolas pretas na outra urna;

   **Modo 3** : O prisioneiro distribuiu duas bolas de cores diferentes em cada urna.

   Determine:

   I): Em qual (is) dos modos o prisioneiro tem maior probabilidade de ser libertado?

   (     ) Modo 1     (     ) Modo 2     (     ) Modo 3

   II) Existe outro modo de distribuir as bolas de modo que o prisioneiro obtenha uma maior chance de libertação?

   (     ) Não     (     ) Sim. Qual? ____________________________________________________

   III) A probabilidade de ser libertado que o prisioneiro possui, que propicia a maior chance de libertação:

   (     ) Menor que 50%. Quanto? _______________

   (     ) 50%

   (     ) Maior que 50%. Quanto? _______________

3. O prisioneiro possui três bolas brancas e três bolas pretas. Dos modos abaixo:

**Modo 1** : O prisioneiro distribuiu as seis bolas numa mesma urna;

**Modo 2** : O prisioneiro distribuiu três bolas brancas em uma urna e três bolas pretas na outra urna;

**Modo 3** : O prisioneiro distribuiu duas bolas brancas e uma preta em uma urna e uma branca e duas pretas na outra urna.

Determine:

I): Em qual (is) dos modos o prisioneiro tem maior probabilidade de ser libertado?

( ) Modo 1 ( ) Modo 2 ( ) Modo 3

II) Existe outro modo de distribuir as bolas de modo que o prisioneiro obtenha uma maior chance de libertação?

( ) Não ( ) Sim. Qual? ____________________________________________________

III) A probabilidade de ser libertado que o prisioneiro possui, que propicia a maior chance de libertação:

( ) Menor que 50%. Quanto? _______________

( ) 50%

( ) Maior que 50%. Quanto? _______________

4. O prisioneiro possui $n$ bolas brancas e $n$ bolas pretas. Dos modos abaixo:

**Modo 1** : O prisioneiro distribuiu as $2n$ bolas numa mesma urna;

**Modo 1** : O prisioneiro distribuiu $n$ bolas brancas em uma urna e $n$ bolas pretas na outra urna;

**Modo 1** : O prisioneiro distribuiu $n$ bolas, misturadas, em cada urna.

Determine:

I): Em qual (is) dos modos o prisioneiro tem maior probabilidade de ser libertado?

( ) Modo 1 ( ) Modo 2 ( ) Modo 3

II) Existe outro modo de distribuir as bolas de modo que o prisioneiro obtenha uma maior chance de libertação?

( ) Não ( ) Sim. Qual? ________________________________________

III) A probabilidade de ser libertado que o prisioneiro possui, que propicia a maior chance de libertação:

( ) Menor que 50%. ( ) 50% ( ) Acima de 50% e menor que 60%

( ) 60% ( ) Acima de 60% e menor que 70% ( ) 70%

( ) Acima de 70%

5. O fato do prisioneiro ter mais bolas (brancas e pretas em quantidades iguais) a sua disposição:

   ( ) Aumenta a probabilidade de o prisioneiro conseguir a liberdade;

   ( ) Diminui a probabilidade de o prisioneiro conseguir a liberdade;

   ( ) Não influencia a probabilidade de o prisioneiro conseguir a liberdade.

6. Na sua opinião, em que contribuiu, para o desenvolvimento desta atividade, a utilização do conhecimento de probabilidade?

   ( ) Em nada, pois, sorte não depende de probabilidade.

   ( ) Apenas para ter certeza que, independente da forma de distribuição e do número de bolas, o prisioneiro possui no máximo 50% de probabilidade para ser libertado.

   ( ) Em tomada de decisões, pois, com o seu conhecimento é possível determinar a situação que é mais favorável, porém, eu não consegui utilizar esse conhecimento.

   ( ) Em tomada de decisões, pois, consegui utilizando esse conhecimento, determinar a situação que é mais favorável para a libertação do prisioneiro de acordo com o número de bolas.

## A.3 Questionários aplicados da terceira atividade:Jogo dos Discos

Foram aplicados três questionários:

- Questionário Preliminar
- Questionário Avaliativo - Prático
- Questionário Avaliativo

**Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza**
**Aluno:________________________________________ n°____ Turma: 2°____**

## Questionário Preliminar

## Atividade Jogo dos Discos

1. Se uma pessoa normal(você) jogasse 50 vezes cada disco, então, você acha que acertaria quantas vezes utilizando um disco com:

   a) 20 cm? _____________ b) 15 cm? _____________ c) 10 cm? _____________

2. A probabilidade de um jogador acertar com um disco de 10 cm de diâmetro é o dobro da probabilidade dele acertar com um disco de 20 cm de diâmetro?

   (      ) Sim (      ) Não. São quantas vezes maiores? _____________

3. Os valores pagos ao jogador que ganha, em relação aos valores que são cobrados , para cada disco, estão proporcionais as suas probabilidades que tem de acertar?

   (      ) Não (      ) Sim

4. Em sua opinião, você alteraria o preço, para cada disco, a ser pago ao jogador que ganha?

   (      ) Não

   (      ) Sim      Como seria:

| Disco (Diâmetro) | Preço a ser pago (R$) |
|---|---|
| 10 cm | |
| 15 cm | |
| 20 cm | |

**Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza**
**Aluno:____________________________________________ n°_____ Turma: 2°_____**

**Questionário Avaliativo - Prático**

1. Preencha a tabela com os dados coletados e determine a probabilidade de ganho do jogador para cada disco.

| Disco (Diâmetro) | Número de jogadas | Número de acertos | Probabilidade de acerto |
|---|---|---|---|
| 10 cm | | | |
| 15 cm | | | |
| 20 cm | | | |

2. Utilizando os valores estipulados (R$ 2,00 para o disco de 10 cm de diâmetro, R$ 3,00 para o disco de 15 cm de diâmetro, R$ 4,00 para o disco de 20 cm de diâmetro), preencha a tabela abaixo.

| Disco (Diâmetro) | 10 cm | 15 cm | 20 cm |
|---|---|---|---|
| Número de jogadas | | | |
| Número de acertos | | | |
| Valor cobrado | R$ 1,00 | R$ 1,00 | R$ 1,00 |
| Valor pago | R$ 2,00 | R$ 3,00 | R$ 4,00 |
| Arrecadação do valor cobrado | | | |
| Arrecadação do valor pago | | | |
| Receita | | | |

3. Em sua opinião, você alteraria o preço, para cada disco, a ser pago ao jogador que ganha?

( ) Não

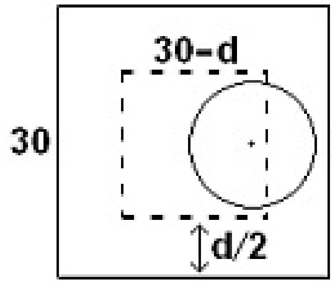
( ) Sim Como seria:

| Disco (Diâmetro) | Preço a ser pago (R$) |
|---|---|
| 10 cm | |
| 15 cm | |
| 20 cm | |

**Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza**
**Aluno:__________________________________________ n°_____ Turma: 2°_____**

**Questionário Avaliativo**

Sob condições ideais podemos supor que lançar o disco aleatoriamente no piso é o mesmo que lançar seu centro aleatoriamente. Assim, a probabilidade $p$ de o jogador ganhar é a mesma probabilidade de um ponto, lançado aleatoriamente dentro do quadrado de lado $30cm$ , cair dentro do quadrado de lado $(30-d)cm$ , onde $d$ é o diâmetro do disco.




Da definição de probabilidade geométrica temos:

$$p = \frac{\text{área do quadrado menor}}{\text{área do quadrado maior}}$$

1. Preencha a tabela com os dados coletados e determine a probabilidade de ganho do jogador para cada disco.

| Disco (Diâmetro) | Área do quadrado menor | Área do quadrado maior | Probabilidade de acerto |
|---|---|---|---|
| 10 cm | | | |
| 15 cm | | | |
| 20 cm | | | |

2. Houve alguma semelhança, nos valores da probabilidade de acerto, entre os valores encontrados experimentalmente e os valores encontrados formalmente?

( ) Não ( ) Sim

3. Se o preço a ser pago de forma proporcional é calculado com a seguinte relação:

$$\text{Preço a ser pago} = \frac{\text{Preço cobrado}}{\text{Probabilidade de ganho}}$$

Então, qual o valor pago ao jogador de forma proporcional a probabilidade de ganho dos discos de:

(a) diâmetro 10 cm _____

(b) diâmetro 15 cm_____

(c) diâmetro 20 cm _____

4. Em sua opinião, você alteraria o preço, para cada disco, a ser pago ao jogador que ganha?

   (   ) Não

   (   ) Sim   Como seria:

| Disco (Diâmetro) | Preço a ser pago (R$) |
|---|---|
| 10 cm | |
| 15 cm | |
| 20 cm | |

### A.3.1 Questionários aplicados da quarta atividade:Relógio das Probabilidades

Foram aplicados três questionários:

- Questionário Preliminar
- Questionário Avaliativo - Prático
- Questionário Avaliativo

**Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza**

**Aluno:__________________________________________ n°_____ Turma: 2°_____**

**Questionário Preliminar**

**Atividade Relógio das Probabilidades**

1. Tem algum sentido de orientação do relógio das probabilidades que apresenta a maior probabilidade de ganho?

   (      ) Não, tanto o sentido horário, quanto o sentido anti-horário possui 50% de probabilidade de ganhar.

   (      ) Sim, pois, escolhendo o sentido anti-horário há uma maior probabilidade de ganho.

   (      ) Sim, pois, escolhendo o sentido horário há uma maior probabilidade de ganho.

2. O fato de termos menos subdivisões no relógio das probabilidade:

   (      ) Não altera a probabilidade de ganho, pois, continua sendo 50% de probabilidade de ganho para o sentido horário e 50% para o sentido anti-horário.

   (      ) Independente do número de subdivisões, a probabilidade de ganho do evento sentido horário será igual ou superior a 50%.

   (      ) Independente do número de subdivisões, a probabilidade de ganho do evento sentido anti-horário será igual ou superior a 50%.

3. Quando o comprimento do arco delimitado pelos dois números no relógio das probabilidadesforem iguais em ambos os sentidos, dizemos que a disputa termina empatada. Essa situação:

   (      ) Não acontece.

   (      ) Acontece sempre, independente se o número de subdivisões for par ou ímpar.

   (      ) Acontece apenas em situações onde o número de subdivisões for ímpar.

   (      ) Acontece apenas em situações onde o número de subdivisões for par.

**Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza**
**Aluno:___________________________________________ n°_____ Turma: 2°_____**

## Questionário Avaliativo - Prático

## Atividade Relógio das Probabilidades

1. O relógio possui apenas 3 subdivisões igualmente espaçadas.

   I) Preencha a tabela com o resultado da disputa

| Possibilidades | Resultado da disputa | | |
|---|---|---|---|
| | Anti-horário | Empate | Horário |
| 1 e 2 | | | |
| 1 e 3 | | | |
| 2 e 3 | | | |

   II) Determine a probabilidade de cada evento ganhar em uma disputa:

   (a) Anti-horário _______________

   (b) Empate _______________

   (c) Horário _______________

2. O relógio possui apenas 4 subdivisões igualmente espaçadas.

   I) Preencha a tabela com o resultado da disputa

| Possibilidades | Resultado da disputa | | |
|---|---|---|---|
| | Anti-horário | Empate | Horário |
| 1 e 2 | | | |
| 1 e 3 | | | |
| 1 e 4 | | | |
| 2 e 3 | | | |
| 2 e 4 | | | |
| 3 e 4 | | | |

   II) Determine a probabilidade de cada evento ganhar em uma disputa:

   (a) Anti-horário _______________

   (b) Empate _______________

   (c) Horário _______________

3. O relógio possui apenas 5 subdivisões igualmente espaçadas.

I) Preencha a tabela com o resultado da disputa

| Possibilidades | Resultado da disputa | | |
|---|---|---|---|
| | Anti-horário | Empate | Horário |
| 1 e 2 | | | |
| 1 e 3 | | | |
| 1 e 4 | | | |
| 1 e 5 | | | |
| 2 e 3 | | | |
| 2 e 4 | | | |
| 2 e 5 | | | |
| 3 e 4 | | | |
| 3 e 5 | | | |
| 4 e 5 | | | |

II) Determine a probabilidade de cada evento ganhar em uma disputa:

(a) Anti-horário _______________

(b) Empate _______________

(c) Horário _______________

4. O relógio possui apenas 6 subdivisões igualmente espaçadas.

I) Preencha a tabela com o resultado da disputa

| Possibilidades | Resultado da disputa | | |
|---|---|---|---|
| | Anti-horário | Empate | Horário |
| 1 e 2 | | | |
| 1 e 3 | | | |
| 1 e 4 | | | |
| 1 e 5 | | | |
| 1 e 6 | | | |
| 2 e 3 | | | |
| 2 e 4 | | | |
| 2 e 5 | | | |
| 2 e 6 | | | |
| 3 e 4 | | | |
| 3 e 5 | | | |
| 3 e 6 | | | |
| 4 e 5 | | | |
| 4 e 6 | | | |
| 5 e 6 | | | |

II) Determine a probabilidade de cada evento ganhar em uma disputa:

(a) Anti-horário ______________

(b) Empate ______________

(c) Horário ______________

5. Tem algum sentido de orientação do relógio das probabilidades que apresenta a maior probabilidade de ganho?

   (    ) Não, tanto o sentido horário, quanto o sentido anti-horário possui 50% de probabilidade de ganhar.

   (    ) Sim, pois, escolhendo o sentido anti-horário há uma maior probabilidade de ganho.

   (    ) Sim, pois, escolhendo o sentido horário há uma maior probabilidade de ganho.

6. O fato de termos mais subdivisões no relógio das probabilidade:

   (    ) Não altera a probabilidade de ganho, pois, continua sendo 50% de probabilidade de ganho para o sentido horário e 50% para o sentido anti-horário.

   (    ) Independente do número de subdivisões, a probabilidade de ganho do evento sentido horário será igual ou superior a 50%.

   (    ) Independente do número de subdivisões, a probabilidade de ganho do evento sentido anti-horário será igual ou superior a 50%.

7. Quando o comprimento do arco delimitado pelos dois números no relógio das probabilidadesforem iguais em ambos os sentidos, dizemos que a disputa termina empatada. Essa situação:

   (    ) Não acontece.

   (    ) Acontece sempre, independente se o número de subdivisões for par ou ímpar.

   (    ) Acontece apenas em situações onde o número de subdivisões for ímpar.

   (    ) Acontece apenas em situações onde o número de subdivisões for par.

**Escola Estadual Professora Terezinha Carolino de Souza**

**Aluno:**________________________________________ **n°**_____ **Turma: 2°**_____

**Questionário Avaliativo**

**Atividade Relógio das Probabilidades**

1. Utilizando os casos particulares (com 3, 4, 5 e 6 subdivisões) é possível imaginar que no Relógio das Probabilidades com 60 subdivisões:

   (a) Escolhendo algum sentido há uma maior probabilidade de ganho em uma disputa?

   (   ) Não   (   ) Sim. Qual? ____________________

   (b) Há 50% de probabilidade de ganho, para cada sentido (horário e anti-horário), em uma disputa?

   (   ) Sim   (   ) Não .

2. No relógio das probabilidades com 60 subdivisões, pelas regras do jogo, sorteando dois números $N_1$ e $N_2$ ao acaso, o sentido horário ganha uma disputa quando $|N_1 - N_2| > 30$, já o sentido anti-horário ganha uma disputa quando $|N_1 - N_2| < 30$, acontece o empate quando $|N_1 - N_2| = 30$.

   Por exemplo,

   Se $N_1 = 10$ e $N_2 = 47$, temos: $|10-47| = |-37| = 37 > 30$ sentido horário ganha a disputa;

   Se $N_1 = 25$ e $N_2 = 3$, temos: $|5-3| = |22| = 22 < 30$ sentido anti-horário ganha a disputa;

   Se $N_1 = 25$ e $N_2 = 55$, temos: $|25-55| = |-30| = 30$ acontece um empate.

   Determine em cada situação, a partir dos números $N_1$ e $N_2$ sorteados, quem venceria a disputa.

   (a) $N_1 = 1$ e $N_2 = 29$   (   ) Horário   (   )   Empate (   ) Anti-horário

   (b) $N_1 = 14$ e $N_2 = 15$   (   ) Horário   (   )   Empate (   ) Anti-horário

   (c) $N_1 = 51$ e $N_2 = 17$   (   ) Horário   (   )   Empate (   ) Anti-horário

   (d) $N_1 = 21$ e $N_2 = 51$   (   ) Horário   (   )   Empate (   ) Anti-horário

   (e) $N_1 = 37$ e $N_2 = 8$   (   ) Horário   (   )   Empate (   ) Anti-horário

   (f) $N_1 = 41$ e $N_2 = 10$   (   ) Horário   (   )   Empate (   ) Anti-horário

3. Considerando uma disputa no relógio das probabilidades com 60 subdivisões, onde foram sorteados dois números. Se um dos números sorteados foi o 15, então, que opções têm para o outro número sorteado de modo que:

(a) Quem escolheu o sentido horário vença a disputa?

___

(b) Quem escolheu o sentido anti-horário vença a disputa?

___

(c) Aconteça um empate?

___

4. A ilustração abaixo , que faz referência ao Relógio das Probabilidades com 60 subdivisões, destaca duas regiões importantes, a região 1 e a região 2.

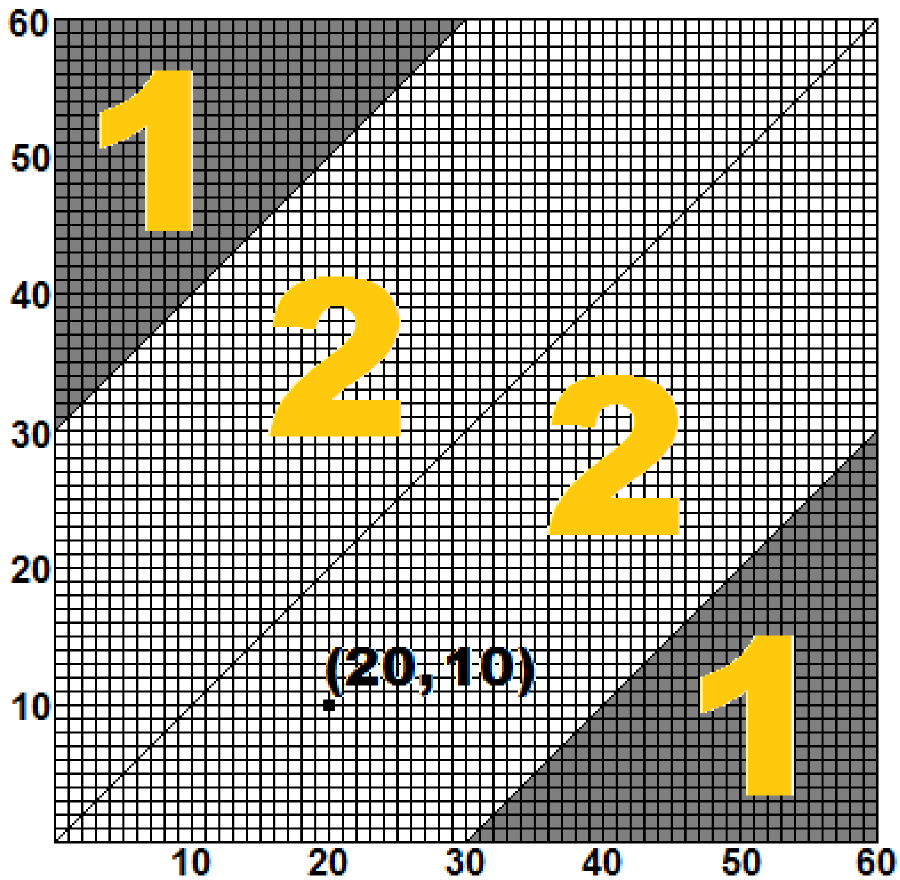



Figura A.1: Representação da marcação de um disputa no Relógio das Probabilidades

Observe que na região 2 foi marcado um ponto (20, 10) na qual configura a representação de dois números que saíram em uma disputa.

A respeito dessa ilustração:

(a) A região 2, na ilustração, está representando qual dos sentidos de disputa?

( ) Horário ( ) Anti-horário

(b) Em sua opinião, a ilustração lhe ajuda no cálculo da probabilidade de ganho de uma disputa no Relógio das Probabilidades com 60 subdivisões?

( ) Não ( ) Sim.

(c) A área da região 2, é, aproximadamente, quantas vezes maior que a área da região 1?

( ) 2 vezes ( ) 3 vezes ( ) 4 vezes

(d) A área da região 2, equivale, aproximadamente, quantos % da ilustração?_____

(e) Aproximadamente, qual é a probabilidade de ganhar uma disputa para quem:

   i. Escolher o sentido horário? _______________________________________

   ii. Escolher o sentido anti-horário?__________________________________

# Apêndice B

# Repostas esperadas dos questionários aplicados

Neste Apêndice constarão os gabaritos e/ou respostas esperadas das atividades aplicadas

## B.1 Atividade Mega Sena

### B.1.1 Questionário Preliminar

1. Resposta pessoal

2. sim

3. sim

4. Porque, com uma aposta contendo sete números, dá para formar sete cartões diferentes contendo seis números. Com isso, o valor a ser pago deve ser 7 vezes maior que uma aposta contendo seis números, além do que, a chance de ganhar, com uma aposta contendo sete números, aumenta 7 vezes em relação a uma aposta contendo seis números.

5. Utiliza os conceitos da Análise Combinatória para determinar o número de combinações possíveis.

### B.1.2 Questionário Avaliativo-Prático

1. $C_{10}^{6} = 210$ modos

2. Considerando o evento $A$, "acertar a sena com uma aposta contendo 6 números"e $\Omega$ o espaço amostral correspondente, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_6^6}{C_{10}^{6}} = \frac{1}{210}$$

3. sim

4. Considerando o evento $B$, "acertar a quina", o evento $C$, "acertar a quadra"e $\Omega$ o espaço amostral correspondente, temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{C_6^5 \cdot C_5^1}{C_{10}^6} = \frac{1}{7}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{C_6^4 \cdot C_4^2}{C_{10}^6} = \frac{3}{7}$$

5. $C_7^6 = 7$ apostas

6. Considerando o evento $D$, "acertar a sena com uma aposta contendo 7 números"e $\Omega$ o espaço amostral correspondente, temos:

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{C_7^6}{C_{10}^6} = \frac{7}{210}$$

7. 7 vezes

### B.1.3 Questionário Avaliativo

1. $C_{60}^6 = 50.063.860$ modos

2. Considerando o evento $A$, "acertar a sena com uma aposta contendo 6 números"e $\Omega$ o espaço amostral correspondente, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_6^6}{C_{60}^6} = \frac{1}{50.063.860}$$

3. sim

4. Considerando o evento $B$, "acertar a quina", o evento $C$, "acertar a quadra"e $\Omega$ o espaço amostral correspondente, temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{C_6^5 \cdot C_{54}^1}{C_{10}^6} = \frac{324}{50.063.860} \cong \frac{1}{154.518}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{C_6^4 \cdot C_{54}^2}{C_{10}^6} = \frac{21.465}{50.063.860} \cong \frac{1}{2.332}$$

5. $C_7^6 = 7$ apostas

6. Considerando o evento $D$, "acertar a sena com uma aposta contendo 7 números"e $\Omega$ o espaço amostral correspondente, temos:

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{C_7^6}{C_{60}^6} = \frac{7}{50.063.860} = \frac{1}{7.151.980}$$

7. 7 vezes

8. Porque, com uma aposta contendo sete números, dá para formar sete cartões diferentes contendo seis números. Com isso, o valor a ser pago deve ser 7 vezes maior que uma aposta contendo seis números, além do que, a chance de ganhar, com uma aposta contendo sete números, aumenta 7 vezes em relação a uma aposta contendo seis números.

9. Com 8 números o preço a pagar será $2 \cdot C_8^6 = 2 \cdot 28 = R\$56,00$. Com 9 números o preço a pagar será $2 \cdot C_9^6 = 2 \cdot 84 = R\$168,00$ Com 10 números o preço a pagar será $2 \cdot C_{10}^6 = 2 \cdot 210 = R\$420,00$

10. Resposta pessoal

## B.2 Atividade Urna da Liberdade

### B.2.1 Questionário Preliminar

1. sim, independente do número de bolas.

2. aumenta a probabilidade do prisioneiro conseguir a probabilidade.

3. vai ajudar, pois, conhecendo a probabilidade de se obter a liberdade, podemos escolher a situação que é mais favorável.

### B.2.2 Questionário Avaliativo

1. I) modo2

   II) 50%

2. I) modo 2 e modo 3

   II) sim, colocar uma bola branca em cada urna e as duas bolas pretas em uma mesma urna.

   III) maior que 50%

   Como a maneira de distribuir as bolas na urna que possibilita a maior probabilidade de libertação do prisioneiro é colocar uma bola branca em uma urna (urna 1) e as demais na outra urna (urna 2), então, com 4 bolas, sendo 2 bolas brancas e 2 bolas pretas, a probabilidade de libertação é obtida calculando a probabilidade de se obter a bola branca em cada urna.

   A probabilidade de escolher a bola branca na urna 1 será igual a probabilidade de escolher a urna 1 $\left(\frac{1}{2}\right)$ e na urna 1 escolher a bola branca $\left(\frac{1}{1}\right)$. Logo:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2} = 50\%$$

A probabilidade de escolher a bola branca na urna 2 será igual a probabilidade de escolher a urna 2 $\left(\frac{1}{2}\right)$ e na urna 2 escolher a bola branca $\left(\frac{1}{3}\right)$. Logo:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\cong 16,7\%$$

Assim, a maximização da probabilidade de libertação com 2 bolas de cada cor será:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\cong 66,7\%$$

3. I) modo 2 e modo 3

   II) sim, colocar uma bola branca em uma urna e as outras 5 bolas na outra urna.

   III) maior que 50%

   Como a maneira de distribuir as bolas na urna que possibilita a maior probabilidade de libertação do prisioneiro é colocar uma bola branca em uma urna (urna 1) e as demais na outra urna (urna 2), então, com 6 bolas, sendo 3 bolas brancas e 3 bolas pretas, a probabilidade de libertação é obtida calculando a probabilidade de se obter a bola branca em cada urna.

   A probabilidade de escolher a bola branca na urna 1 será igual a probabilidade de escolher a urna 1 $\left(\frac{1}{2}\right)$ e na urna 1 escolher a bola branca $\left(\frac{1}{1}\right)$. Logo:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}=50\%$$

   A probabilidade de escolher a bola branca na urna 2 será igual a probabilidade de escolher a urna 2$\left(\frac{1}{2}\right)$ e na urna 2 escolher a bola branca $\left(\frac{2}{5}\right)$. Logo:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}=20\%$$

   Assim, a maximização da probabilidade de libertação com 3 bolas de cada cor será:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}=70\%$$

4. I) modo 2 e modo 3

   II) sim, colocar uma bola branca em uma urna e as outras 5 bolas na outra urna.

   III) acima de 70%

   Como a maneira de distribuir as bolas na urna que possibilita a maior probabilidade de libertação do prisioneiro é colocar uma bola branca em uma urna (urna 1) e as demais na outra urna (urna 2), então, com $2n$ bolas, sendo $n$ bolas brancas e $n$ bolas pretas, a probabilidade de libertação é obtida calculando a probabilidade de se obter a bola branca em cada urna.

A probabilidade de escolher a bola branca na urna 1 será igual a probabilidade de escolher a urna 1 $\left(\frac{1}{2}\right)$ e na urna 1 escolher a bola branca $\left(\frac{1}{1}\right)$. Logo:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de escolher a bola branca na urna 2 será igual a probabilidade de escolher a urna 2 $\left(\frac{1}{2}\right)$ e na urna 2 escolher a bola branca $\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)$. Logo:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} = \frac{n-1}{4n-2}$$

Assim, a maximização da probabilidade de libertação com 3 bolas de cada cor será:

$$\frac{1}{2} + \frac{n-1}{4n-2} = \frac{3n-2}{4n-2}$$

Mas,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n-2}{4n-2} = \frac{3}{4} = 75\%$$

5. Aumenta a probabilidade de o prisioneiro conseguir a liberdade

6. Em tomada de decisões, pois, consegui utilizando esse conhecimento, determinar a situação que é mais favorável para a libertação do prisioneiro de acordo com o número de bolas.

## B.3 Atividade Jogo dos Discos

### B.3.1 Questionário Preliminar

1. Resposta pessoal

2. não, 4 vezes maior

3. não

4. Não

   Mesmo não sendo os valores adequados, a princípio, espera-se que os valores sugeridos sejam os mais considerados.

### B.3.2 Questionário Avaliativo Prático

1. Para o preenchimento do número de jogadas, foi considerado 50 lançamentos para cada disco e o número de acertos será o obtido na atividade prática. Já a probabilidade de acerto será a razão entre o número de acertos e o número de jogadas, que no caso foi 50.

2. O número de jogadas e o número de acertos são os mesmos valores considerados no item anterior. A arrecadação do valor cobrado será o produto do número de jogadas e o valor cobrado, que no caso será R$ 50,00 para cada disco. A arrecadação do valor pago será o produto do número de acertos pelo valor pago para cada disco. A receita será a diferença entre a arrecadação do valor cobrado e a arrecadação do valor pago.

3. Sim

   Mesmo não sendo os valores adequados, a princípio, espera-se que os valores sugeridos sejam os mais considerados.

### B.3.3 Questionário Avaliativo

1. Efetuando o cálculo das áreas dos quadrados obtemos:

| Disco (Diâmetro) | Área do quadrado menor | Área do quadrado maior | Probabilidade de acerto |
|---|---|---|---|
| 10 cm | 400 $cm^2$ | 900 $cm^2$ | $4/9$ |
| 15 cm | 225 $cm^2$ | 900 $cm^2$ | $1/4$ |
| 20 cm | 100 $cm^2$ | 900 $cm^2$ | $1/9$ |

2. Resposta pessoal

3. (a) $\frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = R\$2,25$

   (b) $\frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{1} = R\$4,00$

   (c) $\frac{1}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{1} = R\$9,00$

4. Sim

   O disco de 10 cm seria R$ 2,00, o de 15 cm R$ 3,50 e o de 20 cm R$ 8,00

## B.4 Atividade Relógio das Probabilidades

### B.4.1 Questionário Preliminar

1. Sim, pois, escolhendo o sentido anti-horário há uma maior probabilidade de ganho.
2. Independente do número de subdivisões, a probabilidade de ganho do evento sentido anti-horário será igual ou superior a 50%.
3. Acontece apenas em situações onde o número de subdivisões for par.

### B.4.2 Questionário Avaliativo-Prático

1. I)

| Possibilidades | Resultado da disputa | | |
|---|---|---|---|
| | Anti-horário | Empate | Horário |
| 1 e 2 | X | | |
| 1 e 3 | | | X |
| 2 e 3 | X | | |

II)

(a) $\frac{2}{3}$

(b) 0

(c) $\frac{1}{3}$

2. I)

| Possibilidades | Resultado da disputa | | |
|---|---|---|---|
| | Anti-horário | Empate | Horário |
| 1 e 2 | X | | |
| 1 e 3 | | X | |
| 1 e 4 | | | X |
| 2 e 3 | X | | |
| 2 e 4 | | X | |
| 3 e 4 | X | | |

II)

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{6}$

3. I)

| Possibilidades | Resultado da disputa | | |
|---|---|---|---|
| | Anti-horário | Empate | Horário |
| 1 e 2 | X | | |
| 1 e 3 | X | | |
| 1 e 4 | | | X |
| 1 e 5 | | | X |
| 2 e 3 | X | | |
| 2 e 4 | X | | |
| 2 e 5 | | | X |
| 3 e 4 | X | | |
| 3 e 5 | X | | |
| 4 e 5 | X | | |

II)

(a) $\frac{7}{10}$

(b) 0

(c) $\frac{3}{10}$

4. I)

| Possibilidades | Resultado da disputa | | |
|---|---|---|---|
| | Anti-horário | Empate | Horário |
| 1 e 2 | X | | |
| 1 e 3 | X | | |
| 1 e 4 | | X | |
| 1 e 5 | | | X |
| 1 e 6 | | | X |
| 2 e 3 | X | | |
| 2 e 4 | X | | |
| 2 e 5 | | X | |
| 2 e 6 | | | X |
| 3 e 4 | X | | |
| 3 e 5 | X | | |
| 3 e 6 | | X | |
| 4 e 5 | X | | |
| 4 e 6 | X | | |
| 5 e 6 | X | | |

II)

(a) $\frac{3}{5}$

(b) $\frac{1}{5}$

(c) $\frac{1}{5}$

5. Sim, pois, escolhendo o sentido anti-horário há uma maior probabilidade de ganho.

6. Independente do número de subdivisões, a probabilidade de ganho do evento sentido anti-horário será igual ou superior a 50%.

7. Acontece apenas em situações onde o número de subdivisões for par.

### B.4.3 Questionário Avaliativo

1. (a) sim, anti-horário

   (b) não

2. (a) anti-horário

   (b) anti-horário

   (c) horário

   (d) empate

(e) anti-horário

(f) horário

3. (a) todos os números naturais maiores que 45 e menores ou igual a 60.

   (b) todos os números naturais ositivos menores que 45 e diferente de 15.

   (c) 45

4. (a) anti-horário

   (b) sim

   (c) A área da região 1 representa, aproximadamente, $\frac{1}{4}$ da ilustração e a área da região 2 representa, aproximadamente, $\frac{3}{4}$ da ilustração, logo, a área da região 2 é 3 vezes maior que a área da região 1.

   (d) 75%

   (e) i. 25%

       ii. 75%