
Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PROMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Funções Trigonométricas Matriciais

por

José Alberto de Oliveira Sousa

Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Fábio dos Santos

Maio de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

S729f Souza, José Alberto de Oliveira
Funções trigonométricas matriciais / José Alberto de Oliveira
Souza ; orientador Fábio dos Santos. - São Cristóvão, 2019.
61 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional em Matemática) –
Universidade Federal de Sergipe, 2019.

1. Matemática. 2. Funções trigonométricas. 3. Matrizes
(Matemática). 4. Sequências (Matemática). 4. Séries
(Matemática). I. Santos, Fábio dos orient. II. Título.

CDU 514.116:512.643



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Funções Trigonométricas Matriciais

por

José Alberto de Oliveira Sousa

Aprovada pela banca examinadora:

Fábio dos Santos

Prof. Fábio dos Santos - UFS
Orientador

Giovana Siracusa Gouveia

Prof. Giovana Siracusa Gouveia - UFS
Primeiro Examinador

Gastão Florencio Miranda Junior

Prof. Gastão Florencio Miranda Junior - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 24 de Maio de 2019

Dedicatória

*A toda minha família, a todos os professores, colegas de curso e ao meu orientador
Fábio dos Santos.*

Agradecimentos

- A Deus, por nunca me abandonar.
- A minha mãe.
- Ao professor Dr. Fábio dos Santos, por sua paciência e orientação.
- Aos meus colegas do grupo do terço dos homens de Nossa Senhora da Glória.
- Aos grandes amigos do profmat.
- A minha esposa que sempre esteve ao meu lado.
- Aos professores, Dr. Gastão Florencio e a Dra. Giovanna Siracusa, por comporem a banca examinadora.

Resumo

Neste trabalho abordaremos as funções trigonométricas de números reais, de números complexos e de matrizes quadradas. A forma convencional que aprendemos no ensino médio, onde são estudadas apenas as funções trigonométricas de números reais, é utilizando a função de Euler para definir o seno e o cosseno. Nesta dissertação, utilizaremos um pouco da teoria de séries para chegar a uma abordagem que possa ser utilizada para definir as funções trigonométricas de números complexos ou até mesmo de matrizes quadradas. Apresentaremos também algumas propriedades importantes destas funções e métodos para seus cálculos, que no caso matricial utilizam ferramentas da álgebra linear como a forma canônica de Jordan.

Palavras chaves: Funções Trigonométricas, Matrizes, Sequências e Série, Funções Trigonométricas Matriciais.

Abstract

In this work we will discuss the trigonometric functions of real numbers, complex numbers and square matrices. The conventional way of learning in the middle school, where only trigonometric functions of real numbers are studied, is to use the Euler function to define the sine and cosine. In this dissertation, we will use some of the series theory to arrive at a approach that can be used to define the trigonometric functions of complex numbers or even square matrices. We will present some important properties of these functions and methods for their calculations, which in the matrix case use linear algebra tools like the canonical form of Jordan.

Key words: Trigonometric Functions, Arrays, Sequences and Series, Matrix Trigonometric Functions .

Introdução

Nos livros didáticos do ensino médio encontramos diferentes maneiras de conceituar as funções trigonométricas. Em livros mais antigos tais assuntos eram abordados apenas nos livros do primeiro ano do ensino médio, sempre no último capítulo, mas atualmente esses conteúdos são apresentados no fim do primeiro ano e no início do segundo ano. No entanto, não é sempre que as conceituações tratadas em um mesmo volume são consistentes entre si, do ponto de vista matemático ou do ponto de vista pedagógico. Observa-se comumente em livros didáticos, desde o início do estudo de senos e cossenos no círculo trigonométrico, que estes são definidos como funções cuja variável é um número real de tal forma que a “volta completa” está associada ao valor 2π mesmo que, poucas páginas antes, as palavras seno e cosseno estivessem associadas a grandezas angulares, medidas em graus. Alguns autores mencionam as palavras arco e ângulo sem qualquer distinção, sem deixar claro que a unidade radiano pode expressar uma medida linear (comprimento do arco subtendido pelo ângulo).

Nesse tipo de abordagem, são omitidas algumas questões importantes, tais como: Por que o uso da unidade radiano é necessário? Como é possível que um mesmo conceito matemático possa ser definido de formas diferentes? Possivelmente, o ideal seja um tratamento segundo o qual as abordagens geométrica, trigonométrica e funcional estivessem relacionadas em lugar de divergir. Acreditamos que tal abordagem possa apresentar uma intenção de “facilitar” o trabalho dos alunos, poupando-os das dificuldades inerentes à essência do próprio conceito, embora isso possa resultar em fatores de conflito potencial.

O objetivo deste trabalho não é discutir, de um ponto de vista operacional, aquilo que é enfocado pelos livros do ensino médio, mas sim investigar e propor uma forma de apresentação do conceito de seno e cosseno utilizando sequências e séries que possa ser utilizado também para o cálculo do seno e do cosseno de números complexos e de matrizes quadradas com entradas reais ou complexas. Sabemos que essa abordagem não está diretamente relacionada aos alunos do ensino médio e muito menos possa ser aplicada por eles nas aulas de trigonometria, mas é de grande importância que os professores tenham em mente que as funções trigonométricas não se resume apenas a ângulos e números reais.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos, organizados na seguinte estrutura:

- O primeiro capítulo trata das Funções Trigonômicas em \mathbb{R} , onde definiremos o que é uma função, suas principais características, falaremos da função de Euler e de sua importância para as funções trigonométricas;
- No segundo capítulo abordaremos sequências e séries de números reais, números complexos e de matrizes quadradas, onde abordamos a noção de convergência de algumas sequências e séries, e apresentamos as funções seno e o cosseno de números reais via série de potências;
- No terceiro capítulo estudaremos as funções trigonométricas de números complexos. Utilizando o assunto do segundo capítulo, mostraremos que é possível calcular o seno e o cosseno de números complexos utilizando as mesmas séries que definem estas funções em \mathbb{R} ;
- O quarto capítulo trata das Funções Trigonômicas Matriciais, foco principal do nosso trabalho, onde usaremos as séries para estender as funções seno e cosseno às matrizes quadradas com entradas reais ou complexas. Forneceremos algumas propriedades destas funções e métodos para seu cálculo utilizando ferramentas da Álgebra Linear, em particular, a Forma Canônica de Jordan.

Sumário

Dedicatória	2
Agradecimentos	3
Resumo	4
Abstract	5
1 Funções Trigonométricas em \mathbb{R}	10
1.1 Função de Euler	10
1.2 Definição das funções trigonométricas em \mathbb{R}	13
1.3 Propriedades das funções trigonométricas	14
2 Sequências e Series	21
2.1 Sequências de números reais, complexos e matriciais	21
2.1.1 Sequência de Cauchy	23
2.2 Séries de números reais, complexos e de matrizes	25
2.3 Série de Potências em \mathbb{R}	29
2.3.1 Polinômio de Taylor	29
2.3.2 Raio de Convergência	31
2.3.3 convergência da série de Taylor	31
2.4 A série de Maclaurin da função seno	34
2.5 A série de Maclaurin da função cosseno	35
3 Funções Trigonométricas de números complexos	37
3.1 Definição das funções trigonométricas via séries	37
3.2 Propriedades das funções trigonométricas de números complexos	38
4 Funções Trigonométricas Matriciais	41
4.1 Definição das funções trigonométricas matriciais	41
4.2 Relação entre as funções trigonométricas e a exponencial	44
4.3 Propriedades das funções trigonométricas matriciais	45
4.4 Cálculo do seno e cosseno de matrizes diagonalizáveis	47
4.5 Cálculo do seno e cosseno no caso geral	49
4.6 Aplicações das funções trigonométricas matricial	55

<i>INTRODUÇÃO</i>	9
A Exponencial de Matrizes	56
A.1 Definição	56
A.2 Propriedades da exponencial	57
A.3 Métodos para obtenção da exponencial de uma matriz	58
A.3.1 Obtenção via Autovalores e Autovetores	58
A.3.2 Usando a definição	59
Bibliografia	61

Capítulo 1

Funções Trigonométricas em \mathbb{R}

Neste capítulo faremos um estudo das funções trigonométricas de números reais, o qual será pré-requisito para o nosso principal objetivo, que é tratar sobre as funções trigonométricas matriciais.

1.1 Função de Euler

Definição 1.1.1 (Função) *Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função f de A em B é uma lei de correspondência que associa cada elemento de $x \in A$ a um único elemento $f(x)$ de B , chamado o valor de f em x . O conjunto A é chamado de domínio da função de f e B de contradomínio. A função f de A em B é indicada por $f : A \rightarrow B$. Se $S \subset A$, define-se a imagem de S por f como sendo o conjunto $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$. O conjunto $f(A)$ é chamado imagem de f , também denotado por $Im(f)$.*

A função f é dita **sobrejetiva** quando $Im(f) = B$, ou seja, se para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. É denominada **injetiva** quando dados $x_1, x_2 \in A$ qualquer, com $x_1 \neq x_2$ que $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, por fim é chamada **bijetiva** quando for sobrejetiva e injetiva ao mesmo tempo. Para definir as funções trigonométricas em \mathbb{R} , utilizaremos como ponto de partida a função de Euler. Para isso, vamos considerar uma circunferência unitária C no plano cartesiano centrada na origem. Temos, portanto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Observação 1.1.2 *Note que, para todo $(x, y) \in C$ tem-se $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.*

Apartir daí, sendo α um número real qualquer, define-se a função de Euler da seguinte maneira.

Definição 1.1.3 *A função de Euler $E : \mathbb{R} \rightarrow C$ faz corresponder cada número real α o ponto $E(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ de C do seguinte modo:*

i) $E(0) = (1, 0)$;

- ii) Se $\alpha > 0$, percorremos sobre a circunferência C , a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento α , andando sempre no sentido anti-horário. O ponto final do caminho será chamado de $E(\alpha)$;
- iii) Se $\alpha < 0$, $E(\alpha)$ será a extremidade final de um caminho sobre C , de comprimento $|\alpha|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido horário.

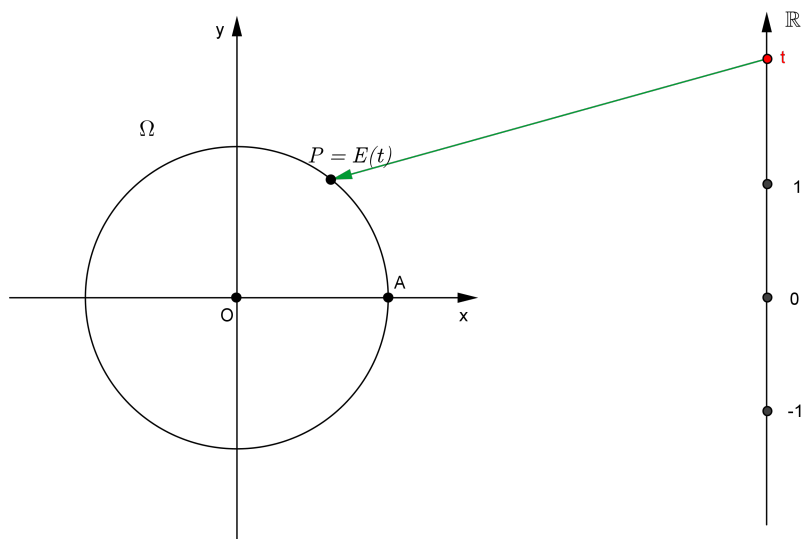


Figura 1.1: Função de Euler

É claro que essa associação é possível, pois na prática ela consiste em “enrolar” a reta \mathbb{R} sobre a circunferência C de modo que o zero da reta coincida com o ponto $A(1, 0)$, e que o sentido positivo da “reta enrolada” seja o sentido positivo do ciclo, ou seja, o anti-horário.

Proposição 1.1.4 *A função de Euler é sobrejetiva.*

Demonstração: Devemos mostrar que para todo ponto $B \in C$, existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $E(\alpha) = B$. De fato, seja $B \in C$. Assim temos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $|\alpha|$ é o comprimento do arco \widehat{AB} , onde $A = (1, 0)$. portanto segue da definição de função de Euler que $E(\alpha) = B$, ou seja, E é sobrejetora. ■

Note que, quando α descreve um intervalo de comprimento t na reta, sua imagem $E(\alpha)$ percorre um arco na circunferência de comprimento t . Em particular, como a circunferência é unitária, temos que seu comprimento é 2π . Assim, quando α descreve um intervalo de comprimento 2π na reta, sua imagem $E(\alpha)$ dá uma volta completa na circunferência voltando ao ponto de partida. Daí, podemos concluir que

$$E(\alpha + 2\pi) = E(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

e, mais geralmente, se $E(\alpha)$ realizar um número k de voltas (no sentido horário ou anti-horário), temos que, para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$E(\alpha + 2k\pi) = E(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

É válido também a recíproca deste resultado. Mostraremos com mais detalhes este fato na proposição a seguir.

Proposição 1.1.5 *Sejam $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Então $E(\alpha') = E(\alpha)$ se, e somente se, $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Vamos provar primeiro que, se $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, então $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. De fato, suponha primeiramente que $\alpha < \alpha'$. Assim, tem-se que k é inteiro positivo. Logo, quando o ponto α descreve um intervalo de comprimento $2k\pi$ na reta, até α' , sua imagem $E(\alpha)$ dá k voltas sobre C no sentido-horário, retornando ao ponto de partida. Com isso, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$E(\alpha + 2k\pi) = E(\alpha),$$

ou seja,

$$E(\alpha') = E(\alpha).$$

Se $\alpha = \alpha'$, tem-se $k = 0$. Assim, segue diretamente do conceito de função que

$$E(\alpha') = E(\alpha).$$

Agora, vamos provar que, se $E(\alpha') = E(\alpha)$ então $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Sejam $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tais que $E(\alpha') = E(\alpha)$. Se $\alpha < \alpha'$, temos que quando um ponto p da reta varia de α a α' sua imagem $E(p)$ se desloca sobre C , α no sentido anti-horário, partindo de $E(\alpha), \alpha$. Assim, a distância total percorrida por $E(p)$ é igual a $2k\pi$, logo:

$$\alpha' = \alpha + 2k\pi,$$

pois o caminho percorrido por $E(p)$ é, por definição a distância percorrida por p sobre a reta.

Se $\alpha > \alpha'$, temos que quando um ponto p da reta varia de α a α' sua imagem $E(p)$ se desloca sobre C , no sentido horário, partindo de $E(\alpha) = E(\alpha')$. Assim a distância total percorrida por $E(p)$ é igual a $2|k|\pi$. Logo

$$\alpha' = \alpha + 2k\pi,$$

pois o caminho por $E(p)$ é, por definição igual à distância percorrida por p sobre a reta.

Se $\alpha = \alpha'$ temos que $k = 0$. Assim $\alpha' = \alpha + 2 \cdot 0 \cdot \pi$. ■

Quando uma função apresenta essa propriedade dizemos que a função é periódica, mas precisamente:

Definição 1.1.6 *Seja a função $f : A \rightarrow B$. Dizemos que f é periódica se existe $p \in \mathbb{R}^*$, tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in A$. O menor valor positivo de p que satisfaz esta condição é denominado período de f .*

1.2 Definição das funções trigonométricas em \mathbb{R}

Vamos agora considerar uma circunferência C de raio 1, os pontos $A = (1, 0)$ e $B = (x, y)$ pertencentes a C e α a medida do arco \widehat{AB} . Ponhamos $B = E(\alpha)$. Definiremos o seno, o cosseno, a tangente, o cotangente, a secante e o cossecante de α respectivamente por:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha) &= y(\alpha) \text{ (ordenada de } B\text{);} \\ \operatorname{cos}(\alpha) &= x(\alpha) \text{ (abscissa de } B\text{);} \\ \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}(\alpha)}, \text{ onde } \operatorname{cos}(\alpha) \neq 0; \\ \operatorname{cotg}(\alpha) &= \frac{\operatorname{cos}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}, \text{ onde } \operatorname{sen}(\alpha) \neq 0; \\ \operatorname{sec}(\alpha) &= \frac{1}{\operatorname{cos}(\alpha)}, \text{ onde } \operatorname{cos}(\alpha) \neq 0; \\ \operatorname{cossec}(\alpha) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}, \text{ onde } \operatorname{sen}(\alpha) \neq 0.\end{aligned}$$

Observação 1.2.1 Em relação a circunferência C , os pontos A e B e o ângulo α , temos:

- i) A unidade de medida do ângulo α é dada em radianos.
- II) Pode-se ter $B = E(\alpha)$ com $\alpha < 0$. Portanto, esta forma de medida é orientada, isto é, um ângulo pode ter medida negativa, ou seja, percorrido no sentido horário.
- III) A medida do ângulo α é determinada por um múltiplo inteiro de 2π , visto que $B = E(\alpha)$ implica que $B = E(\alpha + 2k\pi)$. Assim, por exemplo, o ângulo de 1 radiano é também um ângulo de $1 - 2\pi$ radianos.

Inicialmente, as funções trigonométricas relacionam os ângulos de um triângulo com os comprimentos de seus lados. Funções trigonométricas são importantes no estudo de triângulos e na modelagem de fenômenos periódicos, entre muitas outras aplicações.

Mostraremos agora essas propriedades da trigonometria que serão utilizadas como recurso para demonstrar as proposições da seção seguinte que trata sobre funções trigonométricas em \mathbb{R} . Para isso, serão muito úteis as seguintes identidades trigonométricas, que podem ser encontradas em CARMO, MORGADO e WAGNER(2005,p.57):

Dado um triângulo ABC retângulo em A e o ângulo α em \widehat{ABC} , temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{BC} \\ \operatorname{cos}(\alpha) &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AB}{BC}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{sen}(\phi \pm \theta) = \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{cos}(\theta) \pm \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{cos}(\phi).$$

$$\operatorname{cos}(\phi \pm \theta) = \operatorname{cos}(\phi)\operatorname{cos}(\theta) \mp \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta).$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha);$$

$$\operatorname{cos}(-\alpha) = \operatorname{cos}(\alpha);$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}(\alpha);$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{cos}(\alpha);$$

$$-1 \leq \operatorname{sen}(\alpha) \leq 1;$$

$$-1 \leq \operatorname{cos}(\alpha) \leq 1.$$

Algumas definições modernas expressam funções trigonométricas como séries infinitas ou como soluções de certas equações diferenciais, permitindo a extensão dos argumentos para a linha numérica inteira, real, complexas, matrizes entre outros.

As funções trigonométricas têm uma ampla gama de usos, incluindo o cálculo de comprimentos desconhecidos e ângulos em triângulos (geralmente triângulos retângulos). Neste uso, funções trigonométricas são usadas, por exemplo, em navegação, engenharia e física. Um uso comum na física elementar é a resolução de um vetor em coordenadas cartesianas. As funções seno e cosseno também são usadas para modelar fenômenos de função periódica, como ondas sonoras e de luz, a posição e a velocidade dos osciladores harmônicos, a intensidade da luz solar e a duração do dia, e as variações médias de temperatura ao longo do ano.

1.3 Propriedades das funções trigonométricas

Vimos na seção anterior o que significa o seno de um número real x . Como para cada x real o seno está bem definido e é um número real, podemos definir a função seno como segue:

Definição 1.3.1 (Função seno) A função seno é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao seu seno, ou seja, é a função

$$f(x) = \text{sen}(x).$$

Proposição 1.3.2 A função seno possui as seguintes propriedades:

1. É uma função ímpar;
2. É uma função periódica de período 2π ;
3. Possui imagem igual a $[-1, 1]$.

Demonstração: Sendo f a função $f(x) = \text{sen}(x)$, temos:

1. Devemos mostrar que f é ímpar, ou seja, $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato isso segue diretamente da definição do seno via função de Euler, visto que $\text{sen}(x)$ é a cordenada y da função de Euler $E(x)$;
2. Devemos mostrar que f é periódica de período 2π , ou seja, que $f(x + 2\pi) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, por definição, temos que:

$$f(x + 2\pi) = \text{sen}(x + 2\pi)$$

Vimos que $\text{sen}(\alpha + 2\pi) = \text{sen}(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, temos que

$$f(x + 2\pi) = \text{sen}(x) = f(x).$$

Portanto, f é uma função periódica de período 2π ;

3. Devemos mostrar que $\text{Im}(f) = [-1, 1]$. Assim, temos:

- i) Provemos que $\text{Im}(f) \subset [-1, 1]$, onde $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. De fato, dado $y \in \text{Im}(f)$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = \text{sen}(x)$. Vimos que $-1 \leq \text{sen}(\alpha) \leq 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Assim

$$-1 \leq f(x) \leq 1,$$

ou seja,

$$-1 \leq y \leq 1.$$

logo,

$$\text{Im}(f) \subset [-1, 1].$$

- ii) Dado $y \in [-1, 1]$, onde existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sen}(x) = y$, isto é, $f(x) = y$. Daí

$$[-1, 1] \subset \text{Im}(f).$$

Portanto, de i e ii segue que

$$\text{Im}(f) = [-1, 1].$$

■

Na sequência definiremos a função cosseno.

Definição 1.3.3 (Função cosseno) A função cosseno é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao seu cosseno, ou seja, é a função $f(x) = \cos(x)$.

Proposição 1.3.4 A função cosseno possui as seguintes propriedades:

1. É uma função par;
2. É uma função periódica de período 2π ;
3. Possui imagem igual a $[-1, 1]$.

Demonstração: Sendo f a função $f(x) = \cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

1. Devemos mostrar que f é par, ou seja, $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato isso segue diretamente da definição do cosseno via função de Euler, visto que $\cos(x)$ é a coordenada x da função de Euler $E(x)$;
2. Devemos mostrar que f é periódica de período 2π , ou seja, que $f(x + 2\pi) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, por definição, temos que:

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi)$$

Vimos que $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Logo, temos que

$$f(x + 2\pi) = \cos(x) = f(x).$$

Portanto, f é uma função periódica de período 2π ;

3. Devemos mostrar que $Im(f) = [-1, 1]$. Assim, temos:

- i) provemos que $Im(f) \subset [-1, 1]$, onde $Im(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. De fato, dado $y \in Im(f)$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = \cos(x)$. Vimos que $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Assim

$$-1 \leq f(x) \leq 1,$$

ou seja,

$$-1 \leq y \leq 1.$$

logo,

$$Im(f) \subset [-1, 1].$$

- ii) Dado $y \in [-1, 1]$, onde existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = y$, isto é, $f(x) = y$. Daí

$$[-1, 1] \subset Im(f).$$

Portanto, de i e ii segue que

$$Im(f) = [-1, 1].$$

■

Definição 1.3.5 A função tangente é a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real $x \in X$ a sua tangente, ou seja, é a função $f(x) = \text{tg}(x)$.

Sabemos que não existe a tangente de todos os números reais x , pois sendo, $\text{tg}x = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$ para que a tangente esteja definida devemos ter $\text{cos}(x) \neq 0$, ou seja, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ onde $k \in \mathbb{Z}$. Assim, para definirmos a função tangente, vamos considerar o domínio da tangente o seguinte conjunto

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposição 1.3.6 A função tangente possui as seguintes propriedades:

1. É uma função ímpar;
2. É uma função sobrejetiva;
3. É periódica de período π ;

Demonstração: Pela definição de tangente, $f(x)$ pode ser escrita na forma:

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}.$$

1. Devemos mostrar que f é ímpar, ou seja, que $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in X$. De fato, segue que

$$f(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{\text{cos}(-x)},$$

como a função seno é ímpar, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$, e a função cosseno é par, $\text{cos}(-x) = \text{cos}(x)$, temos que

$$f(-x) = -\frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)} = -f(x),$$

Portanto f é ímpar.

2. Vamos mostrar que f é sobrejetiva, ou seja, mostrar que para cada $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. De fato, basta observar que dado $y \in \mathbb{R}$ existe um triângulo retângulo de lados y , 1 e $y^2 + 1$. Neste caso, se escolhermos x como sendo o ângulo entre os lados de comprimento y e 1 temos que $\text{tg}(x) = y$.
3. Devemos mostrar que f é periódica de período π , isto é, $f(x+\pi)$. De fato,

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} = \frac{-\text{sen}(\alpha + \pi)}{-\text{cos}(\alpha + \pi)} = \frac{\text{sen}(\alpha + \pi)}{\text{cos}(\alpha + \pi)} = \text{tg}(\alpha + \pi)$$

pois, para cada $x \in X$, temos

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x),$$

Logo,

$$f(x + \pi) = \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x) = f(x),$$

para todo $x \in X$. ■

Definição 1.3.7 (Função secante) A função secante é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao sua secante, ou seja, é a função $f(x) = \sec(x)$.

A função secante apresenta domínio igual ao conjunto dos números reais menos os valores para os quais o $\cos(x) = 0$. Assim, seu domínio fica definido como:

$$\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

A secante de um ângulo é o inverso do seu cosseno, isto é, a razão do comprimento da hipotenusa para o comprimento do lado adjacente, assim chamado porque representa a linha secante que corta o círculo:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$$

Definição 1.3.8 (Função cossecante) A função cossecante é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao sua cossecante, ou seja, é a função $f(x) = \operatorname{cossec}(x)$.

A função cossecante apresenta domínio igual ao conjunto dos números reais menos os valores para os quais o $\operatorname{sen}(x) = 0$. Logo, seu domínio fica definido como:

$$\{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

O cossecante de um ângulo A é o inverso do seu seno, isto é, a razão do comprimento da hipotenusa ao comprimento do lado oposto, é assim chamado porque é o secante de o complementar ou co-ângulo:

$$\operatorname{cossec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$$

Definição 1.3.9 (Função cotangente) A função cotangente é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x a sua cotangente, ou seja, é a função $f(x) = \operatorname{cotg}(x)$.

A função da cotangente apresenta uma peculiaridade, similar a função tangente. Ela não existe quando o valor de $\operatorname{tg}(x) = 0$. Assim, seu domínio fica definido como:

$$\{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Alguns estudos no campo da Educação Matemática destacam que o ensino da Trigonometria precisa estar alicerçado em um trabalho pedagógico que permita o desenvolvimento das competências almejadas para o Ensino Médio. Torna-se necessário considerar nesse trabalho diversos fatores relacionados ao planejamento, sejam eles a escolha de temas que permitem a abordagem dos conceitos, de recursos e métodos de ensino, bem como espaços para que a abordagem ocorra. Além disso, os tempos de ensino e aprendizagem precisam ser ponderados para que os alunos consigam se apropriar desse conhecimento, sendo a participação deles fundamental para a significação dos conceitos.

Explorar conceitos matemáticos através de diferentes estratégias metodológicas, contextos e aplicações e neste sentido, almejar competências que permitem ao aluno identificar a matemática além da sala de aula, são propostas ofertadas pelos documentos oficiais que conduzem o processo educativo com a Matemática no Ensino Médio. De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)

Um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das idéias e conteúdos matemáticos pode ser sistematizado nos três seguintes eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do ensino médio: 1. Álgebra: números e funções; 2. Geometria e medidas; e 3. Análise de dados (BRASIL, 2002, p.120).

Para o desenvolvimento do eixo “Álgebra: números e funções” são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria, sendo a última, objeto de estudo dessa produção. Vale lembrar que os principais objetivos elencados para este eixo referem-se a calcular, interpretar gráficos, identificar e resolver problemas de acordo com o conjunto de propriedades estabelecidas que, por sua vez, contemplam a unidade da Trigonometria.

A abordagem da Trigonometria, por vezes, é realizada com ênfase no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento das aplicações dos conceitos trigonométricos na resolução de problemas envolvendo medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos (BRASIL, 2002). Desse modo, as orientações curriculares concedidas pelo PCN+ pontuam que “(...) o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas” (BRASIL, 2002, p.122).

No entanto a proposta deste trabalho não é ajudar o aluno entender melhor sobre esses conceitos, e sim dar uma visão mais ampla sobre as funções trigonométricas aos professores do ensino médio, mostrando que esses conceitos não se resume apenas a números reais R , para isso usaremos o conceito de sequências e séries, que abordaremos nos próximos capítulos, generalizando

estes conceitos a outros conjuntos numéricos, tais como o conjunto dos números complexos \mathbb{C} e ao conjunto das matrizes quadradas M_n .

Capítulo 2

Sequências e Series

Neste capítulo abordaremos as sequências e séries de números reais, complexos e de matrizes quadradas. As funções trigonométricas reais serão apresentadas como séries de potências, as quais serão usadas nos próximos capítulos para estender estas funções aos complexos e a matrizes.

2.1 Sequências de números reais, complexos e matriciais

Neste trabalho \mathbb{N} denotará o conjunto dos números naturais e B pode ser o conjunto \mathbb{R} dos números reais, \mathbb{C} dos números complexos ou o conjunto M_n das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais ou complexas, munidos respectivamente das seguintes normas:

- se $B = \mathbb{R}$ definimos a norma de um número real a como sendo seu módulo, ou seja, $\|a\| = |a| = a$ se $a \geq 0$ ou $-a$ se $a < 0$;
- se $B = \mathbb{C}$ definimos a norma de um número complexo $z = a + bi$ como sendo seu módulo, ou seja, $\|z\| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- se $B = M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$, definimos a norma de $A \in B$ por

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Definição 2.1.1 . Uma sequência em B é uma função

$$a : \mathbb{N} \rightarrow B,$$

ou seja, uma função a que associa a cada número natural n um elemento $a(n) = a_n$ de B , o qual é denominado termo geral da sequência. Em geral, usamos a notação

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

para representar tal sequência.

É importante não confundir a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que é uma função, com sua imagem $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$.

Em geral para uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizemos que

a_1 é o primeiro elemento;
 a_2 é o segundo elemento;
 a_3 é o terceiro elemento;
 $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Essa lista também pode ser representada escrevendo-se os primeiros elementos da sequência, ou seja,

$$(a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Veremos agora alguns exemplos de sequências nos casos em que $B = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e M_n .

Exemplo 2.1.2 A sequência

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$$

é um exemplo de sequências de números reais, ou seja, uma sequência em $B = \mathbb{R}$. Neste caso, seu termo geral é dado por $a_n = 1/2^n$.

Exemplo 2.1.3 A sequência

$$\left(\frac{i}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{3}, \dots, \frac{i}{n}, \dots\right)$$

é um exemplo de sequências de números complexos, ou seja, uma sequência em $B = \mathbb{C}$. Neste caso, seu termo geral é dado por $\left\{\frac{i}{n}/n \in \mathbb{N}\right\}$.

Exemplo 2.1.4 A sequência

$$\left[\begin{array}{cc} n & n+1 \\ n+2 & n+3 \end{array}\right]_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{array}\right], \dots, \left[\begin{array}{cc} n & n+1 \\ n+2 & n+3 \end{array}\right], \dots\right)$$

é um exemplo de sequência de matriz com entradas de números reais, ou seja, uma sequência em $B = M_n(\mathbb{R})$. Neste caso, seu termo geral é dado por

$$\left\{\left[\begin{array}{cc} n & n+1 \\ n+2 & n+3 \end{array}\right]/n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Exemplo 2.1.5 A sequência

$$\left[\begin{array}{cc} in & 1-in \\ 2 & 0 \end{array}\right]_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left[\begin{array}{cc} i & 1-i \\ 2 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 2i & 1-2i \\ 2 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 3i & 1-3i \\ 2 & 0 \end{array}\right], \dots, \left[\begin{array}{cc} in & 1-ni \\ 2 & 0 \end{array}\right], \dots\right)$$

é um exemplo de sequências de matriz com entradas de números complexos, ou seja, uma sequência em $B = M_n(\mathbb{C})$. Neste caso, seu termo geral é dado por

$$\left\{\left[\begin{array}{cc} in & 1-ni \\ 2 & 0 \end{array}\right]/n \in \mathbb{N}\right\}.$$

A seguir veremos a noção de convergência de uma sequência de elementos de B .

Definição 2.1.6 Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ converge para $L \in B$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - L| < \epsilon$$

para todo $n > n_0$. Uma sequência que não converge é dita divergente. O símbolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

será usado para dizer que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para L e neste caso dizemos que L é o limite da sequência.

Exemplo 2.1.7 A sequência

$$a_n = \frac{1}{n}$$

sabendo que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ então a sequência é convergente.

Exemplo 2.1.8 Considere a sequência

$$z_n = \frac{i}{n}.$$

Temos que z_n é um número complexo com $\Re(z_n) = 0 \rightarrow 0$ e $\Im(z_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, o que mostra que z_n converge para zero.

Exemplo 2.1.9 No caso de uma sequência de matriz, basta que todos seus elementos sejam convergentes para que a matriz seja convergente. Em particular, para a sequência

$$M_n = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como seus elementos convergem, pois como vimos no primeiro exemplo $\frac{1}{n}$ converge pra zero e os demais termos são constantes, segue que a sequência é convergente M_n converge para a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.1 Sequência de Cauchy

Uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ é dita uma sequência de Cauchy se para qualquer número positivo ϵ existe um natural n_0 tal que se n, m são maiores do que n_0 então

$$\|a_n - a_m\| < \epsilon.$$

Em linguagem simbólica temos:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon \Rightarrow \|a_n - a_m\| < \epsilon$$

Proposição 2.1.10 *Se uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ converge então esta sequência é de Cauchy.*

Demonstração: Seja (a_n) uma sequência convergente, digamos que $\lim a_n = L$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m > n_0 \Rightarrow |a_m - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

e portanto (a_n) é uma sequência de Cauchy. ■

Pela proposição 2.1.10 toda sequência convergente é de Cauchy. Esse fato vale em todo espaço vetorial normado ou mais geralmente, em qualquer espaço métrico, no entanto em alguns espaços normados (métrico) existem sequências de Cauchy que não convergem.

Definição 2.1.11 *Um espaço vetorial normado (ou espaço métrico) é dito completo se toda sequência de Cauchy neste espaço é convergente.*

Neste trabalho usaremos em alguns momentos o fato, que provaremos a seguir, que uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, for de Cauchy, ou seja, que \mathbb{R} é completo.

Teorema 2.1.12 (Completeza de \mathbb{R}) *Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, for de Cauchy.*

Demonstração: Pelo que vimos na proposição 2.1.10 toda sequência de Convergente de números reais é de Cauchy. Por outro lado, se (a_n) é uma sequência de Cauchy iniciamente sabemos que ela é limitada. Consequentemente, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (a_n) possui uma subsequência que converge para um número real L . Provaremos agora que de fato $\lim a_n = L$. Com efeito, Sendo (a_n) uma seqência de Cauchy, temos que dado $\epsilon > 0$, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon$$

Seja (a_{n_i}) uma subsequência de (a_n) convergindo para L . Então existe $n_1 > n_0$ tal que $|a_{n_i} - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Protanto,

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| \leq |a_n - a_{n_i}| + |a_{n_i} - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Com isso mostramos que $\lim a_n = L$, o que completa a prova do teorema. ■

2.2 Séries de números reais, complexos e de matrizes

Nesta seção, definiremos e explicaremos, de maneira precisa, o que significa, em matemática, somar uma quantidade infinita e enumerável de números reais, complexos e matriciais. É importante ressaltar que o nosso interesse é estudar sua convergência.

Definição 2.2.1 *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em B . Defina a nova sequência (s_n) pondo*

$$s_1 = a_1 \text{ e } s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \forall n > 1.$$

Chamamos s_n de n -ésima soma parcial dos termos da sequência (a_n) . Se a sequência (s_n) converge para $s \in \mathbb{B}$, ou seja,

$$\lim s_n = s,$$

dizemos que s é a soma da série dos termos da sequência (a_n) . Neste caso, denotamos

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n.$$

Se (s_n) diverge dizemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Em geral, dizemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é a série associada a sequência (a_n) .

Observação 2.2.2 *Esta mesma definição se aplica nos casos em que $B = \mathbb{R}$, \mathbb{C} ou M_n .*

Quando não houver possibilidade de confusão de notaremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ somente por $\sum a_n$.

Exemplo 2.2.3 Segue abaixo alguns exemplos de séries de números reais, complexos e de matrizes.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \\ \sum (-1)^n &= -1 + 1 - 1 + 1 + \dots + (-1)^n + \dots, \\ \sum 2n + i &= 2 + i + 4 + i + 6 + i + \dots + 2n + i + \dots \\ \sum \begin{bmatrix} n & -n \\ 2n & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} n & -n \\ 2n & 1 \end{bmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Definição 2.2.4 (Convergência de Séries) Dizemos que uma série $\sum a_n$ é convergente se a sequência de somas parciais (s_n) é convergente. Neste caso $\sum a_n = s$, onde $s = \lim s_n$ é chamado a soma desta série. Caso contrário, dizemos que $\sum a_n$ é divergente.

Observação 2.2.5 Veja que

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Assim sendo, se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é convergente obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Exemplo 2.2.6 Vimos que a n -ésima soma parcial da série

$$\sum \frac{1}{n(n+1)}$$

é dada por

$$s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

com isso,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ s_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Souza, José Alberto de Oliveira
S729f Funções trigonométricas matriciais / José Alberto de Oliveira
Souza ; orientador Fábio dos Santos. - São Cristóvão, 2019.
61 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional em Matemática) –
Universidade Federal de Sergipe, 2019.

1. Matemática. 2. Funções trigonométricas. 3. Matrizes
(Matemática). 4. Sequências (Matemática). 4. Séries
(Matemática). I. Santos, Fábio dos orient. II. Título.

CDU 514.116:512.643

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

consequentemente,

$$\lim s_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

ou seja,

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

é uma série que converge para 1.

Teorema 2.2.7 As séries em $M_n(K)$, onde K é \mathbb{R} ou \mathbb{C} , dadas por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!} = I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \dots$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \dots$$

são convergentes para qualquer que seja a matriz $A \in M_n(K)$.

Demonstração: Para a primeira série, a k -ésima soma parcial é

$$S_k = \sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!},$$

então

$$\| S_m - S_k \| = \left\| \sum_{i=0}^m \frac{A^i}{i!} - \sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!} \right\| = \left\| \sum_{i=m+1}^k \frac{A^i}{i!} \right\|$$

sem perda de generalidade considere que $m > k$ (o outro caso é análogo). Pela desigualdade triangular e usando a propriedade da norma $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$ concluímos que

$$\| S_m - S_k \| \leq \sum_{i=m+1}^k \frac{\| A^i \|}{i!} \leq \sum_{i=m+1}^k \frac{\| A \|^i}{i!}$$

Desde que $\| A \|$ seja um número real, o lado direito é uma parte da série convergente de números reais

$$e^{\| A \|} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\| A \|^i}{i!} \tag{2.1}$$

Portanto, desde que seja convergente, para cada $\epsilon > 0$ fixado arbitrariamente, existe um N tal que, para $m, k \geq N$,

$$\sum_{i=m+1}^k \frac{\|A\|^i}{i!} < \epsilon$$

isso mostra que $\{S_k\}$ é uma sequência de Cauchy de números reais e, portanto ela converge.

Para a segunda série a n -ésima soma parcial é

$$S_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{A^{2i}}{(2i)!},$$

então

$$\|S_m - S_k\| = \left\| \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{A^{2i}}{(2i)!} - \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{A^{2i}}{(2i)!} \right\| = \left\| \sum_{i=m+1}^k (-1)^i \frac{A^{2i}}{(2i)!} \right\|$$

sem perda de generalidade considere que $m > k$ (o outro caso é análogo). Pela desigualdade triangular e usando a propriedade da norma $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ concluímos que

$$\|S_m - S_k\| \leq \sum_{i=m+1}^k \frac{\|A^{2i}\|}{2i!} \leq \sum_{i=m+1}^k \frac{\|A\|^{2i}}{2i!} \leq \sum_{i=m+1}^k \frac{\|A\|^i}{i!}$$

Desde que $\|A\|$ seja um número real, o lado direito da série convergente de números reais

$$e^{\|A\|} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A\|^i}{i!}$$

e portanto é de Cauchy, logo pela completeza de \mathbb{R} é convergente.

A prova da convergência da terceira série é análoga a prova da convergência da segunda. ■

Como as séries do Teorema 2.2.7 convergem para qualquer que seja a matriz $A \in M_n(K)$, onde K é o corpo dos números reais ou complexos, então elas convergem para matrizes de ordem 1 com entrada de números reais complexos. Fazendo a indentificação de $M_1(K)$ com K temos que estas séries convergem para números reais ou complexos. Assim, para todo $z \in \mathbb{C}$ (em particular $\in \mathbb{C}$) temos que as séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \tag{2.2}$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{2.3}$$

são convergentes. Veremos que esta séries no caso em que $z \in \mathbb{R}$ convergem para $\cos(z)$ e $\sin(z)$ respectivamente, mas como elas convergem para toda matriz $A \in M_n(K)$, usaremos estas séries para estender as funções trigonométricas.

2.3 Série de Potências em \mathbb{R}

Definição 2.3.1 Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2.4)$$

Onde c_n 's são constantes reais chamadas coeficiente da série e x é uma variável real. Se x for substituído por $x-x_0$ em 2.4, então a série resultante tem a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n + \dots \quad (2.5)$$

e é chamada de série de potências em $x-x_0$ ou série de potências centrada em x_0 ou série de potências em torno de x_0 .

Observe que para cada x fixado as séries (2.4) e (2.5) é uma série de números reais que pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros. Veja que a série de potências é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots,$$

definida para todos os x 's que tornam a série convergente. Diferente de um polinômio por poder ter infinitos termos não nulos.

2.3.1 Polinômio de Taylor

A idéia do polinômio de Taylor surgiu com o objetivo de aproximar funções por polinômios. Para obtê-lo pense no seguinte problema. Dada uma função f diferenciável n vezes em um ponto x_0 , ache um polinômio P de grau n com a propriedade de que o valor de P e suas n primeiras derivadas coincidam com aqueles de f em x_0 . Para facilitar os cálculos iremos expressar o polinômio P em potências de $x-x_0$, ao invés de potências de x , isto é

$$P(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n \quad (2.6)$$

Então, queremos encontrar um polinômio dessa forma tal que

$$f(x_0) = P(x_0), f'(x_0) = P'(x_0), f''(x_0) = P''(x_0), \dots, f^n(x_0) = P^{(n)}(x_0) \quad (2.7)$$

Mas

$$\begin{aligned} P(x) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n \\ P'(x) &= c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \dots + nc_n(x-x_0)^{n-1} \\ P''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-x_0) + \dots + n \cdot (n-1) \cdot c_n(x-x_0)^{n-2} \\ P'''(x) &= 3 \cdot 2c_3 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot c_n(x-x_0)^{n-3} \\ P^{(n)}(x) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot c_n. \end{aligned}$$

Portanto, para satisfazer (2.6) devemos ter

$$\begin{aligned} f(x_0) &= P(x_0) = c_0 \\ f'(x_0) &= P'(x_0) = c_1 \\ f''(x_0) &= P''(x_0) = 2 \cdot c_2 = 2!c_2 \\ f'''(x_0) &= P'''(x_0) = 3 \cdot 2c_3 = 3!c_3 \\ f^{(n)}(x_0) &= P^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1c_n = n!c_n. \end{aligned}$$

Logo os coeficientes de $P(x)$ são:

$$c_0 = f(x_0), c_1 = f'(x_0), c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

O polinômio que obtemos pela substituição destes coeficientes em (2.7) é chamado de n -ésimo polinômio de Taylor em torno de x_0 .

Definição 2.3.2 Se f puder ser diferenciada n vezes em x_0 , então

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

é definido como o n -ésimo polinômio de Taylor em torno de x_0 . No caso em que $x_0 = 0$ o polinômio fica

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

E neste caso, chamaremos de polinômio de Maclaurin.

Usando a convenção de que $f^0(x_0)$ denota $f(x_0)$ e a notação $f^{(k)}(x_0)$ para denotar a k -ésima derivada de f em torno de x_0 podemos definir as séries de Taylor e de Maclaurin.

Definição 2.3.3 Se f tiver derivadas de todas as ordens em x_0 então chamamos a série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \dots$$

de série de Taylor para f em torno de x_0 . Em particular, quando $x_0 = 0$, a série fica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \dots$$

e neste caso chamaremos de série de Maclaurin para f .

2.3.2 Raio de Convergência

Quando substituímos a variável x em uma série de potências por um valor numérico, então a série passa a ser numérica. Precisamos então determinar para quais valores de x a série converge. O seguinte teorema será útil.

Teorema 2.3.4 *Para uma série de potências*

$$\sum_{(k=0)}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$$

apenas uma das seguintes afirmações seguintes é verdadeira.

- a) *A série converge apenas para $x = x_0$.*
- b) *A série converge para todos os valores de x .*
- c) *Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - x_0| < R$ e diverge se $|x - x_0| > R$*

O número R no caso (c) é chamado raio de convergência da série. Com ele fica definido o intervalo de convergência de uma série de potências que consiste em todos os valores de x para os quais a série converge. Nos casos (a) e (b), por convenção, os raios de convergência são respectivamente $R = 0$ e $R = \infty$, o que acarreta num intervalo de convergência que consiste apenas num único ponto x_0 em (a) e $(-\infty, \infty)$ em (b). Já no caso (c) temos quatro intervalos de convergência possíveis:

$$(x_0 - R, x_0 + R), (x_0 - R, x_0 + R], [x_0 - R, x_0 + R) e [x_0 - R, x_0 + R].$$

2.3.3 convergência da série de Taylor

Seja uma função f que possui derivadas de todas as ordens. Para ilustrar, consideremos a função $g(x) = e^x$ que possui esta característica. Observe o gráfico da função g e os polinômios de Taylor ($T_n(x)$) para $n = 1, 2, e 3$ para esta função em torno de zero

Quando n aumenta, $T_n(x)$ parece aproximar a função g . Isso sugere que e^x é igual a soma de sua série de Taylor, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$

Mas o n -ésimo polinômio de Taylor é a n -ésima soma parcial da série de Taylor. Desta forma podemos afirmar que a série de Taylor para a função g em torno de zero converge no ponto x , e a soma é $g(x)$

Generalizando, $f(x)$ é a soma de sua série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \tag{2.8}$$

Se considerarmos a diferença entre $f(x)$ e seu n -ésimo polinômio de Taylor em torno de x_0 e chamarmos de n -ésimo resto (R_n) para f em torno de x_0 denotada por

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

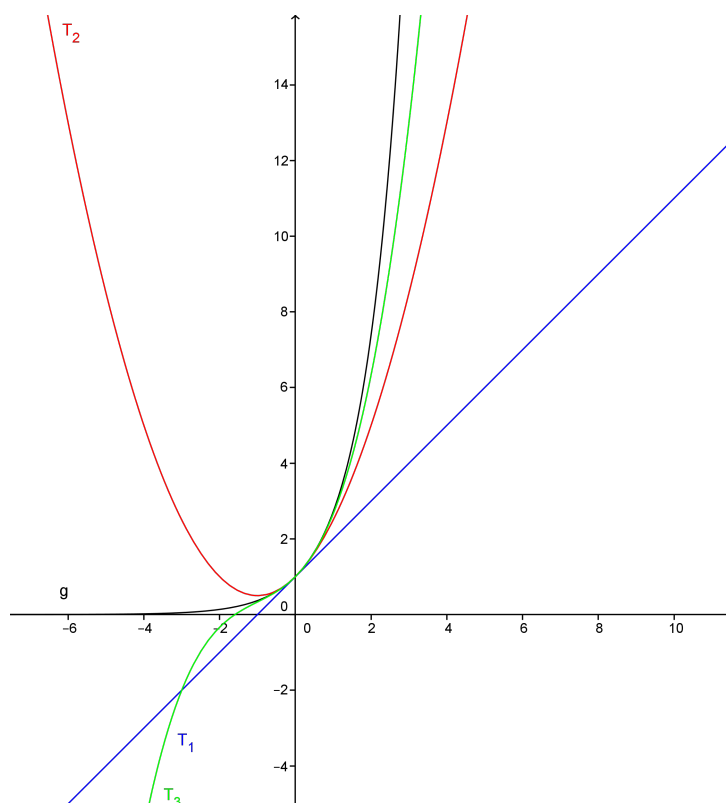


Figura 2.1:

que podemos escrever como

$$f(x) = R_n(x) + T_n(x)$$

ou ainda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [T_n(x) + R_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} R_n(x)$$

Logo, se $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ então $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ e portanto $f(x)$ é a soma de sua série de Taylor. Temos então o seguinte Teorema

Teorema 2.3.5 Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de grau n de f em x_0 , e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - x_0| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - x_0| < R$.

Geralmente para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(x) = 0$$

usamos a desigualdade de Taylor, que veremos a seguir.

Teorema 2.3.6 Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x - x_0| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

para $|x - x_0| \leq d$.

Para demonstrar esse teorema usaremos as seguintes propriedades de $R_n(x)$.

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0 \quad (2.9)$$

e

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \quad (2.10)$$

para todo $x \in I$.

Por hipótese, f pode ser diferenciada $n+1$ vezes em um intervalo I contendo o ponto x_0 e que

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad (2.11)$$

para todo x em I . Queremos mostrar que

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

para todo x em I , onde

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Consideraremos $x \geq x_0$ para simplificar. O cálculo para o outro caso é feito de maneira semelhante.

De (2.11), temos

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M$$

e usando (2.10), obtemos

$$R_n^{(n+1)}(x) \leq M$$

o que implica

$$-M \leq R_n^{(n+1)}(x) \leq M$$

integrando de x_0 a x temos

$$\int_{x_0}^x -M dt \leq \int_{x_0}^x R_n^{(n+1)}(t) dt \leq \int_{x_0}^x M dt \quad (2.12)$$

De (2.9) tem-se que $R_n^n = 0$, portanto

$$\int_{x_0}^x R_n^{(n+1)} dt = R_n^n(x) - R_n^n(x_0) = R_n^n(x)$$

Logo fazendo as integrações em (2.12), obtemos

$$-M(x - x_0) \leq R_n^n(x) \leq M(x - x_0) \quad (2.13)$$

Substituindo x por t em (2.13) e integrando de x_0 até x temos

$$\frac{-M}{2}(x - x_0)^2 \leq R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(x_0) \leq \frac{M}{2}(x - x_0)^2$$

Mas, novamente de 2.9 temos que $R_n^{(n-1)}(x_0) = 0$, logo

$$\frac{-M}{2}(x - x_0)^2 \leq R_n^{(n-1)}(x) \leq \frac{M}{2}(x - x_0)^2$$

Continuando esse processo, após $n + 1$ integrações iremos obter

$$\frac{-M}{(n + 1!)}(x - x_0)^{n+1} \leq R_n(x) \leq \frac{M}{(n + 1!)}(x - x_0)^{n+1} \quad (2.14)$$

Como por hipótese $x \geq x_0$
o que implica que

$$|x - x_0| = (x - x_0),$$

e portanto a desigualdade (2.14) pode ser escrita assim

$$\frac{-M}{(n + 1)} |x - x_0|^{n+1} \leq R_n(x) \leq \frac{M}{(n + 1)} |x - x_0|^{n+1},$$

ou ainda

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n + 1!)} |x - x_0|^{n+1}.$$

2.4 A série de Maclaurin da função seno

Como a função seno possui derivadas de todas as ordens, ela possui uma série de Maclaurin. Para obter basta calcular suas derivadas em $x = 0$. Sabemos que

$$\begin{aligned} f(x) = \text{sen}(x) &\implies f(0) = 0 \\ f'(x) = \text{cos}(x) &\implies f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\text{sen}(x) &\implies f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\text{cos}(x) &\implies f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \text{sen}(x) &\implies f^{(4)}(0) = 0 \\ \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Logo, a série de Taylor no ponto $x = 0$, ou seja a série de Maclaurin, de $\text{sen}(x)$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} + \dots \quad (2.15)$$

Agora vamos mostrar que ela representa a função $\text{sen}(x)$. Como $|\cos(x)| \leq 1$, $|\text{sen}(x)| \leq 1$ e $f^{(n+1)}(x)$ é $\pm \cos(x)$ ou $\pm \text{sen}(x)$ temos que

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$$

para todo x . Tomemos então $M = 1$ na desigualdade de Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

pelo Teorema do confronto

$$|R_n(x)| \rightarrow 0,$$

donde segue que

$$R_n(x) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

e portanto,

A sua série de Maclaurin da função seno converge para a função seno, ou seja,

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.5 A série de Maclaurin da função cosseno

Como a função cosseno possui derivadas de todas as ordens, ela possui uma série de Maclaurin. Para isso basta calcular suas derivadas de todas as ordens para $x = 0$. Sabemos que

$$\begin{aligned} f(x) = \cos(x) &\implies f(0) = 1 \\ f'(x) = \text{sen}(x) &\implies f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos(x) &\implies f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \text{sen}(x) &\implies f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos(x) &\implies f^{(4)}(0) = 1 \\ \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Logo, a série de Taylor no ponto $x = 0$, ou seja a série de Maclaurin, de $\cos(x)$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (2.16)$$

Agora vamos mostrar que ela representa a função $\cos(x)$. Como $|\cos(x)| \leq 1$, $|\sin(x)| \leq 1$ e $f^{(n+1)}(x)$ é $\pm \cos(x)$ ou $\pm \sin(x)$ temos que

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$$

para todo x . Tomemos então $M = 1$ na desigualdade de Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

pelo Teorema do confronto

$$|R_n(x)| \rightarrow 0,$$

donde segue que

$$R_n(x) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

e portanto,

a série de Maclaurin da função cosseno converge para $\cos(x)$ para todo x , ou seja

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Funções Trigonômicas de números complexos

Neste capítulo estudaremos as funções trigonométricas de números complexos e provaremos suas principais propriedades.

3.1 Definição das funções trigonométricas via séries

As funções trigonométricas de números reais foram definidas no primeiro capítulo por meio da função de Euler. Essa abordagem não permite uma extensão destas funções aos números complexos. No entanto, no capítulo anterior mostramos que a função seno e cosseno de números reais \mathbb{R} pode ser escritas na forma de uma série de potências, mais precisamente,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e

$$\operatorname{cos} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste capítulo mostraremos que as mesmas séries podem ser estendidas aos números complexos e ainda assim, são convergentes, de modo que definiremos as funções trigonométricas em \mathbb{C} como sendo o limite destas séries.

Proposição 3.1.1 *As séries*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{3.1}$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \tag{3.2}$$

convergem para todo $z \in \mathbb{C}$.

Note que as séries da Proposição 3.1.1 coincidem com as séries das funções cosseno e seno, respectivamente, no caso em que $z = x$ é um número real. No entanto, vimos como consequência do Teorema 2.2.7 que mesmo quando z é complexo (caso particular em que $k = \mathbb{C}$ e $n = 1$) essas séries continuam convergindo. Deste modo, podemos definir as funções trigonométricas em \mathbb{C} como segue.

Definição 3.1.2 Para um número complexo z definimos os seno e o cosseno de z respectivamente por:

$$\text{sen}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

e

$$\text{cos}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Essas funções estão bem definidas devido ao fato destas séries convergi-rem, conforme Teorema 3.1.1. Além disso, quando $z = x$ é real, essas funções coincidem com as funções cosseno e seno de números reais, de modo que elas estendem aos complexos dessas funções. Analogamente ao caso real definimos as funções tangente, secante, cossecante e cotangente de números complexos respectivamente por

$$\begin{aligned} \text{tg}(z) &= \frac{\text{sen}(z)}{\text{cos}(z)}, \text{ desde que } \text{cos}(z) \neq 0, \\ \text{sec}(z) &= \frac{1}{\text{cos}(z)}, \text{ desde que } \text{cos}(z) \neq 0, \\ \text{cossec}(z) &= \frac{1}{\text{sen}(z)}, \text{ desde que } \text{sen}(z) \neq 0, \\ \text{cotg}(z) &= \frac{\text{cos}(z)}{\text{sen}(z)}, \text{ desde que } \text{sen}(z) \neq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2 Propriedades das funções trigonométricas de números complexos

A primeira propriedade que provaremos é usada em muitos livros para definir as funções cosseno e seno de números complexos.

Proposição 3.2.1 Se $z = x + iy$ então

$$\text{cos}(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

e

$$\text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Demonstração: Dado um número complexo $z \neq 0$, utilizando a série de Taylor da exponencial podemos escrever

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

que é válida para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto, analogamente podemos escrever, para todo $z \in \mathbb{C}$

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n$$

e

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} z^n.$$

Somando as duas expressões obtemos

$$e^{iz} + e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{n!} z^n = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{2k!} z^{2k} = 2 \cos(z),$$

pois quando n é ímpar $i^n + (-i)^n = 0$ e quando $n = 2k$, $i^n + (-i)^n = (i^2)^k + ((-i)^2)^k = 2(-1)^k$. Assim

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{2k!} z^{2k},$$

de forma analoga, temos

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. ■

Provaremos agora a seguinte proposição, que fornece uma série de propriedades das funções seno e cosseno de números complexos.

Proposição 3.2.2 Para todo $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$, temos

- a) $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$;
- b) $\cos(-z) = \cos(z)$;
- c) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$;
- d) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \operatorname{sen}(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$;
- e) $\cos(z_1 - z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) + \operatorname{sen}(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$;
- f) $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen}(z_1)\cos(z_2) + \operatorname{sen}(z_2)\cos(z_1)$;

g) $\text{sen}(z_1 - z_2) = \text{sen}(z_1)\cos(z_2) - \text{sen}(z_2)\cos(z_1)$;

h) $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$;

i) $\text{sen}(z + 2\pi) = \text{sen}(z)$.

Demonstração: Para provar essas proposições não iremos utilizar a definição de seno e cosseno por séries, pois algumas provas ficariam muito complexas, utilizaremos a relação do seno e cosseno com a exponencial dados na proposição 3.2.1. Se $x = \Re z$ e $y = \Im z$ temos:

a) $\cos^2(z) + \text{sen}^2(z) = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4} - \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{4} = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2 - e^{2iz} - e^{-2iz} + 2}{4} = 1$;

b) $\cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos(z)$;

c) $\text{sen}(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\text{sen}(z)$;

d) $\cos(z_1)\cos(z_2) - \text{sen}(z_1)\text{sen}(z_2) = \frac{1}{4}[(e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2})]$,
 $= \frac{1}{4}[e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}]$
 $= \frac{1}{2}[e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}] = \cos(z_1 + z_2)$;

e) Basta substituir z_2 por $-z_2$ em (d) e usar (a) e (b);

f) $\text{sen}(z_1)\cos(z_2) + \text{sen}(z_2)\cos(z_1) = \frac{1}{4i}[(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + (e^{iz_2} - e^{-iz_2})(e^{iz_1} + e^{-iz_1})]$
 $= \frac{1}{4i}[e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}]$
 $= \frac{1}{2i}[e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}] = \text{sen}(z_1 + z_2)$;

g) Basta substituir z_2 por $-z_2$ em (f) e usar (a) e (b);

h) Por (d) temos que $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)\cos(2\pi) - \text{sen}(z)\text{sen}(2\pi) = \cos(z)$;

i) Por (b) temos que $\text{sen}(z + 2\pi) = \text{sen}(z)\cos(2\pi) + \text{sen}(2\pi)\cos(z) = \text{sen}(z)$. ■

Capítulo 4

Funções Trigonômicas Matriciais

Neste capítulo apresentaremos os conceitos de funções trigonométricas de matrizes quadradas com entradas reais ou complexas, provaremos suas principais propriedades e forneceremos métodos para seus respectivos cálculos usando a teoria da álgebra linear de matrizes.

4.1 Definição das funções trigonométricas matriciais

No segundo capítulo vimos que as funções seno e cosseno de números reais podem ser escritas na forma de uma série de potências. No terceiro capítulo, estendemos a definição das funções seno e cosseno aos números complexos utilizando as mesmas séries, visto que ambas são ainda convergentes em \mathbb{C} . No entanto estas séries também são convergentes para quaisquer matrizes quadradas com entradas reais ou complexas, conforme vimos no Teorema 2.2.7, o que permite estender as funções trigonométricas à matrizes quadradas, ou seja, podemos estender o conceito de seno e cosseno à matrizes quadradas utilizando as mesmas séries que definem o seno e cosseno de números reais e complexos.

Definição 4.1.1 *Dada uma matriz quadrada A com entradas reais ou complexas definimos o seno e o cosseno de A respectivamente por:*

$$\operatorname{sen} A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (4.1)$$

e

$$\operatorname{cos} A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}. \quad (4.2)$$

Quando A é uma matriz quadrada 1×1 com entradas reais ou complexas essas funções coincidem com as funções seno e cosseno de números reais ou complexas, de modo que elas estendem à matrizes as estas funções.

Exemplo 4.1.2 Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2\pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{bmatrix},$$

calcularemos $\cos(A)$ e $\sin(A)$.

Sabendo que

$$\cos(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!} = I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \dots,$$

então temos

$$\begin{aligned} \cos(A) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} (2\pi)^2 & 0 \\ 0 & (2\pi)^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4!} \begin{bmatrix} (2\pi)^4 & 0 \\ 0 & (2\pi)^4 \end{bmatrix} - \dots \\ &= \begin{bmatrix} I - \frac{1}{2!}(2\pi)^2 + \frac{1}{4!}(2\pi)^4 \dots & 0 \\ 0 & I - \frac{1}{2!}(2\pi)^2 + \frac{1}{4!}(2\pi)^4 \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\pi & 0 \\ 0 & \cos 2\pi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\sin(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \dots,$$

então temos

$$\begin{aligned} \sin(A) &= \begin{bmatrix} 2\pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{bmatrix} - \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} (2\pi)^3 & 0 \\ 0 & (2\pi)^3 \end{bmatrix} + \frac{1}{5!} \begin{bmatrix} (2\pi)^5 & 0 \\ 0 & (2\pi)^5 \end{bmatrix} - \dots \\ &= \begin{bmatrix} 2\pi - \frac{1}{3!}(2\pi)^3 + \frac{1}{5!} - \dots & 0 \\ 0 & 2\pi - \frac{1}{3!}(2\pi)^3 + \frac{1}{5!} - \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(2\pi) & 0 \\ 0 & \sin(2\pi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Forneceremos agora uma proposições importantes para o cálculo seno ou cosseno de uma matriz.

Proposição 4.1.3 Se $D \in M_n(\mathbb{K})$ é uma matriz diagonal da forma

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

então

$$\operatorname{sen} D = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \operatorname{sen} \lambda_n \end{pmatrix}$$

e

$$\operatorname{cos} D = \begin{pmatrix} \operatorname{cos} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \operatorname{cos} \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \operatorname{cos} \lambda_n \end{pmatrix}$$

obtidas calculando respectivamente o seno e o cosseno da diagonal de D .

Demonstração: Neste caso,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(D) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{D^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda_1^{2k+1}}{(2k+1)!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda_2^{2k+1}}{(2k+1)!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda_n^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \operatorname{sen} \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A demonstração para o cosseno é análoga. ■

Exemplo 4.1.4 Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{bmatrix},$$

vamos calcular $\cos(A)$ e $\sin(A)$

Como a matriz é diagonal, basta calcular o seno e o cosseno respectivamente dos elementos da sua diagonal, então temos que

$$\cos(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\sin(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 4.1.5 A demonstração da Proposição 4.1.3 pode ser adaptada para demonstrar que a seno ou cosseno de uma matriz em blocos diagonais é obtida calculando o seno ou cosseno de cada um dos blocos, ou seja, se

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_n \end{pmatrix}$$

onde D_1, D_2, \dots, D_n são matrizes quadradas, então

$$\sin D = \begin{pmatrix} \sin D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sin D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sin D_n \end{pmatrix}$$

e

$$\cos D = \begin{pmatrix} \cos D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos D_n \end{pmatrix}.$$

Analogamente ao caso real definimos as funções tangente, secante, cossecante e cotangente de números complexos respectivamente por:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(A) &= (\sin(A))(\cos(A))^{-1}, \text{ desde que } \cos(A) \text{ seja inversível;} \\ \operatorname{sec}(A) &= (\cos(A))^{-1}, \text{ desde que } \cos(A) \text{ seja inversível;} \\ \operatorname{cossec}(A) &= (\sin(A))^{-1}, \text{ desde que } \sin(A) \text{ seja inversível;} \\ \operatorname{cotg}(A) &= (\sin(A))^{-1}(\cos(A)), \text{ desde que } \sin(A) \text{ seja inversível.} \end{aligned}$$

4.2 Relação entre as funções trigonométricas e a exponencial

Definição 4.2.1 Definimos a exponencial de uma matriz $A \in M_n$ por

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad (4.3)$$

onde I é a matriz identidade.

A série a direita em A.1 converge para toda matriz $A \in M_n$ conforme vimos no Teorema 2.2.7, assim, a definição de e^A faz sentido para qualquer matriz $A \in M_n$.

No capítulo anterior vimos a definição de seno e cosseno para números complexos na forma de séries é uma relação com a exponencial. Iremos estender a mesma propriedade para matrizes quadradas com entradas complexas.

Proposição 4.2.2 *Se A é uma matriz quadrada de números reais e complexos então*

$$\cos(A) = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}$$

e

$$\operatorname{sen}(A) = \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}$$

Demonstração: A demonstração é análoga a que vimos no capítulo anterior, para o caso em que A é uma matriz 1×1 . Dada a matriz A quadrada $n \times n$ com entrada reais ou complexas

$$e^{iA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iA)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} A^n$$

e

$$e^{-iA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iA)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} A^n.$$

somando as duas expressões obtemos

$$e^{iA} + e^{-iA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{n!} A^n = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{2k!} A^{2k} = 2 \cos(A),$$

donde temos que

$$\cos(A) = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2},$$

pois quando n é ímpar, $i^n + (-i)^n = 0$ e quando $n = 2k$, $i^n + (-i)^n = (i^2)^k + ((-i)^2)^k = 2(-1)^k$.

A expressão do seno é obtida de modo análogo. ■

4.3 Propriedades das funções trigonométricas matriciais

Nesta seção provaremos algumas propriedades das funções trigonométricas matriciais, as quais estão sintetizadas na seguinte proposição.

Proposição 4.3.1 Para toda matriz $A, B \in M_n$ temos que:

a) $\cos^2(A) + \sin^2(A) = I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$;

b) $\cos(-A) = \cos(A)$;

c) $\sin(-A) = -\sin(A)$;

d) $\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$;

e) $\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$;

f) $\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A)$;

g) $\sin(A - B) = \sin(A)\cos(B) - \sin(B)\cos(A)$;

h) $\cos(A + 2\pi I) = \cos(A)$;

i) $\sin(A + 2\pi I) = \sin(A)$.

Demonstração: Para toda matriz $A, B \in M_n$ temos que:

a)

$$\cos^2(A) + \sin^2(A) = \frac{(e^{iA} + e^{-iA})^2}{4} - \frac{(e^{iA} - e^{-iA})^2}{4} = \frac{e^{2iA} + e^{-2iA} + 2 - e^{2iA} - e^{-2iA} + 2}{4} = I;$$

b)

$$\cos(-A) = \frac{e^{-iA} + e^{iA}}{2} = \cos(A);$$

c)

$$\sin(-A) = \frac{e^{-iA} - e^{iA}}{2i} = -\sin(A);$$

d)

$$\begin{aligned} \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B) &= \frac{1}{4}[(e^{iA} + e^{-iA})(e^{iB} + e^{-iB}) + (e^{iA} - e^{-iA})(e^{iB} - e^{-iB})] \\ &= \frac{1}{2}[e^{i(A+B)} + e^{-i(A+B)}] \\ &= \cos(A + B); \end{aligned}$$

e) Basta substituir B por $-B$ em (d) e usar (b) e (c);

f)

$$\begin{aligned} \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A) &= \frac{1}{4i}[(e^{iA} - e^{-iA})(e^{iB} + e^{-iB}) + (e^{iB} - e^{-iB})(e^{iA} + e^{-iA})] \\ &= \frac{1}{2i}[e^{i(A+B)} - e^{-i(A+B)}] \\ &= \sin(A + B); \end{aligned}$$

g) Basta substituir B por $-B$ em (f) e usar (b) e (c);

h) Por (e) temos

$$\cos(A + 2\pi I) = \cos(A)\cos(2\pi I) - \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(2\pi I) = \cos(A),$$

visto que $\cos(2\pi I) = I$ e $\operatorname{sen}(2\pi I) = 0$ (matriz nula);

i) Por (f) temos

$$\operatorname{sen}(A + 2\pi I) = \operatorname{sen}(A)\cos(2\pi I) + \operatorname{sen}(2\pi I)\cos(A) = \operatorname{sen}(A),$$

visto que $\cos(2\pi I) = I$ e $\operatorname{sen}(2\pi I) = 0$ (matriz nula). ■

4.4 Cálculo do seno e cosseno de matrizes diagonalizáveis

Dada uma matriz A diagonalizável, existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^{-1}$. Neste caso, as entradas da diagonal principal de D são os autovalores de A , e as colunas de P são os correspondentes autovetores de A . Neste caso, usando o fato que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$A^n = PD^nP^{-1},$$

utilizando as séries que definem o cosseno e o seno de A , obtemos

$$\cos(A) = P \cos(D) P^{-1}$$

e

$$\operatorname{sen}(A) = P \operatorname{sen}(D) P^{-1}.$$

Sendo D uma matriz diagonal, calculamos $\cos(D)$ e $\operatorname{sen}(D)$ utilizando o Teorema 4.1.3.

Exemplo 4.4.1 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para calcular o cosseno da matriz A , primeiro vamos determinar seu polinômio característico para encontrar seus autovalores, estes irão determinar a matriz D . De fato,

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\
&= -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1).
\end{aligned}$$

A partir deste polinômio característico podemos encontrar seus autovalores que são representados pelas suas raízes, os quais são $\lambda_1 = 2$ (com multiplicidade 2) e $\lambda_2 = 1$ (com multiplicidade 1). A dimensão de $\text{Ker}(A - \lambda_2 I)$ é 1, desde que λ_2 é simples e a dimensão de $\text{Ker}(A - \lambda_1 I)$ é:

$$\text{Dim}(\text{ker}(A - 2I)) = 3 - \text{rg} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

A matriz A é portanto diagonalizável com autovalores $\lambda_1 = 2$ (com multiplicidade dois) e $\lambda_2 = 1$ (com multiplicidade única), ou seja, B será uma matriz diagonal dada por

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora vamos calcular a matriz P , para isto vamos encontrar os autovetores utilizando os autovalores encontrados a partir do polinômio característico da matriz A . Estes autovetores irão determinar a base da matriz P . Se $(X_1, X_2, X_3) \in \text{Ker}(A - 2I)$, temos que

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, se $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \text{Ker}(A - I)$, segue que

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo os dois sistemas temos os seguintes autovetores $B_2 = [(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)]$, $B_1 = (2, -1, 0)$, estes por sua vez como são LI formam uma base para matriz que chamaremos de P , a qual é dada por

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora calcular a inversa de P que chamamos de P^{-1} , resolvendo o seguinte sistema,

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o qual nos conduz a seguinte solução:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como encontramos as matrizes B, P e P^{-1} e já sabemos que para determinar o cosseno de uma matriz diagonalizável usamos $\cos(A) = P(\cos(D))P^{-1}$, assim temos que:

$$\cos(A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\cos(A) = \begin{bmatrix} -\cos(2) + 2\cos(1) & -2\cos(2) + 2\cos(1) & -2\cos(2) + 2\cos(1) \\ \cos(2) - \cos(1) & 2\cos(2) - \cos(1) & \cos(2) - \cos(1) \\ 0 & 0 & \cos(2) \end{bmatrix}.$$

4.5 Cálculo do seno e cosseno no caso geral

Para o cálculo do seno e cosseno de uma matriz no caso geral, ou seja quando a matriz não é diagonalizável, precisamos usar um procedimento um pouco mais geral. Neste caso será necessário o uso da forma canônica de Jordan.

Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, segue do Teorema da Decomposição Primária que A é semelhante a uma matriz em blocos diagonais. Desta forma, para calcular o seno e o cosseno de uma matriz, é suficiente calcular os senos e cossenos dos blocos da diagonais fornecidos pelo Teorema da Decomposição Primária. Sendo as entradas da matriz A números complexos, a forma canônica de Jordan de cada um desses blocos é do tipo

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definição 4.5.1 Uma matriz quadrada A de ordem n é dita nilpotente se existir um número natural k tal que $A^k = 0$, onde 0 representa a matriz nula. O menor número natural que verifica a igualdade $A^k = 0$, designa-se por índice de nilpotência da matriz A .

A seguir vamos ver algumas propriedades das matrizes nilpotentes.

- Só faz sentido falar em matrizes nilpotentes em matrizes quadradas, pois aplicando as regras da multiplicação, a coluna da primeira matriz tem de ser igual a linha da segunda matriz, sem esta condição não se pode multiplicar.
- Se A for nilpotente então $A^n = 0$;
- Qualquer matriz triangular, na qual todos os elementos da diagonal principal são nulos é uma matriz nilpotente.

Exemplo 4.5.2 A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é nilpotente pois,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.5.3 A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é nilpotente pois,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em geral, dada uma matriz A com coeficientes complexos, A é semelhante a sua forma canônica de Jordan J_A , a qual se escreve como a soma de uma matriz diagonal com uma nilpotente, digamos $J_A = D_A + N_A$, além disso $D_A N_A = N_A D_A$. Se $A = P J_A P^{-1}$ então temos que

$$\operatorname{sen}(A) = P \operatorname{sen}(J_A) P^{-1}$$

e

$$\operatorname{cos}(A) = P \operatorname{cos}(J_A) P^{-1}.$$

Neste caso,

$$\operatorname{sen}(J_A) = \operatorname{sen}(D_A + N_A) = \operatorname{sen}(D_A) \operatorname{cos}(N_A) + \operatorname{sen}(N_A) \operatorname{cos}(D_A)$$

da mesma forma que

$$\cos(J_A) = \cos(D_A + N_A) = \cos(D_A)\cos(N_A) - \text{sen}(D_A)\text{sen}(N_A).$$

Como D_A é uma matriz diagonal, podemos calcular $\cos(D_A)$ e $\text{sen}(D_A)$ utilizando o Teorema 2.2.7. Por outro lado, sendo N_A uma matriz nilpotente, as séries que definem o seno e o cosseno de N_A são somas finitas visto que a partir do índice de nilpotência de A as potências de A são nulas, ou seja, se k é o índice de nilpotência de A então $A^n = 0$ para todo $n \geq k$.

Exemplo 4.5.4 Considere a matriz a matriz 3×3 dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de A são as soluções da equação $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, que neste caso são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$. Calculando os autoespaços associados a estes autovalores encontramos a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando a inversa desta matriz obtemos

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, A é semelhante à matriz J_A definida por

$$J_A = P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para calcular o seno de A basta calcular o seno dos blocos de jordan da Matriz J_A . Para o primeiro bloco associado ao autovalor $\lambda_1 = 4$ que é dado por

$$J_1 = [4]$$

obtemos

$$\text{sen}(J_1) = [\text{sen}(4)].$$

Para o segundo bloco associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$ que é dado por

$$J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(J_2) &= \operatorname{sen}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \operatorname{sen}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cos\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cos\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{sen}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cos\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \operatorname{sen}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cos\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2) & 0 \\ 0 & \cos(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2) & \cos(2) \\ 0 & \operatorname{sen}(2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

portanto, temos que

$$\operatorname{sen}(J_A) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(4) & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(2) & \cos(2) \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(2) \end{bmatrix}$$

Para calcular o cosseno da matriz A faremos o mesmo processo, ou seja basta calcular o cosseno dos blocos de jordan da Matriz J_A . Para o primeiro bloxo temos que

$$\cos(J_1) = [\cos(4)].$$

Para o segundo bloco temos que

$$\begin{aligned} \cos(J_2) &= \cos\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \cos\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cos\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \operatorname{sen}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2) & 0 \\ 0 & \cos(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(2) \end{bmatrix} \operatorname{sen}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2) & 0 \\ 0 & \cos(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2) & -\operatorname{sen}(2) \\ 0 & \cos(2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

portanto, temos que

$$\cos(J_A) = \begin{bmatrix} \cos(4) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2) & -\sin(2) \\ 0 & 0 & \cos(2) \end{bmatrix}.$$

Para obter $\sin(A)$ e $\cos(A)$, basta fazer os cálculos

$$\sin(A) = P \sin(J_A) P^{-1}$$

portanto temos que

$$\sin(A) = \begin{bmatrix} \frac{\sin(4)}{2} + \frac{\sin(2)}{2} - \cos(2) & -\cos(2) & \frac{\sin(4)}{2} - \frac{\sin(2)}{2} \\ -\frac{\sin(4)}{2} + \frac{\sin(2)}{2} + \cos(2) & \cos(2) + \sin(2) & -\frac{\sin(4)}{2} + \frac{\sin(2)}{2} \\ -\frac{\sin(2)}{2} + \cos(2) & \cos(2) & \frac{\sin(2)}{2} \end{bmatrix}$$

e

$$\cos(A) = P \cos(J_A) P^{-1}$$

portanto temos

$$\cos(A) = \begin{bmatrix} \frac{\cos(4)}{2} + \frac{\cos(2)}{2} + \sin(2) & \sin(2) & \frac{\cos(4)}{2} - \frac{\cos(2)}{2} \\ -\frac{\cos(4)}{2} + \frac{\cos(2)}{2} - \sin(2) & -\sin(2) + \cos(2) & -\frac{\cos(4)}{2} + \frac{\cos(2)}{2} \\ -\frac{\cos(2)}{2} - \sin(2) & -\sin(2) & \frac{\cos(2)}{2} \end{bmatrix}$$

A tangente da matriz A será dada por

$$\operatorname{tg}(A) = \sin(A) \cdot \cos(A)^{-1} = P \sin(J_A) P^{-1} (P \cos(J_A) P^{-1})^{-1} = P \operatorname{tg}(J_A) P^{-1}.$$

A inversa do $\cos(J_A)$ é dada por

$$\cos(J_A)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(4)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2)^{-1} & \cos^{-2} \sin(2) \\ 0 & 0 & \cos(2)^{-1} \end{bmatrix}$$

então temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(J_A) &= \begin{bmatrix} \sin(4) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(2) & \cos(2) \\ 0 & 0 & \sin(2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(4)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2)^{-1} & \cos^{-2} \sin(2) \\ 0 & 0 & \cos(2)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(4) \cos(4)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sin(2) \cos(2)^{-1} & \sin(2)^2 \cos(2)^{-2} + \cos(2) \cos(2)^{-1} \\ 0 & 0 & \sin(2) \cos(2)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{tg}(4) & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{tg}(2) & \operatorname{tg}(2)^2 + 1 \\ 0 & 0 & \operatorname{tg}(2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Utilizaremos o mesmo raciocínio vamos calcular a cotangente, secante e cossecante da matriz A . Sabemos que a cotangente é dada por:

$$\cotg(J_A) = \cos(J_A) \text{sen}(J_A)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \cotg(J_A) &= \begin{bmatrix} \cos(4) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2) & -\text{sen}(2) \\ 0 & 0 & \cos(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}(4)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}(2)^{-1} & -\text{sen}(2)^{-2} \cos(2) \\ 0 & 0 & \text{sen}(2)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(4) \text{sen}(4)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2) \text{sen}(2)^{-1} & -\text{sen}(2)^{-2} \cos(2) - \text{sen}(2) \text{sen}(2)^{-1} \\ 0 & 0 & \cos(2) \text{sen}(2)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cotg(4) & 0 & 0 \\ 0 & \text{cossec}(2) & -\text{cossec}(2) - 1 \\ 0 & 0 & \text{cossec}(2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sabemos que a secante é dada por:

$$\sec(J_A) = \cos(J_A)^{-1}$$

como já fizemos este cálculo para determinar a tangente, desde que

$$\cos(J_A)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(4)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2)^{-1} & \cos^{-2} \text{sen}(2) \\ 0 & 0 & \cos(2)^{-1} \end{bmatrix}$$

então

$$\sec(J_A) = \begin{bmatrix} \sec(4) & 0 & 0 \\ 0 & \sec(2) & \text{tg}(2) \cos(2)^{-1} \\ 0 & 0 & \sec(2) \end{bmatrix}$$

Sabemos que a cossecante é dada por:

$$\text{cossec}(J_A) = \text{sen}(J_A)^{-1}$$

como já fizemos este cálculo para determinar a cotangente, desde que

$$\text{sen}(J_A)^{-1} = \begin{bmatrix} \text{sen}(4)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}(2)^{-1} & -\text{sen}(2)^{-2} \cos(2) \\ 0 & 0 & \text{sen}(2)^{-1} \end{bmatrix}$$

então

$$\text{cossec}(J_A) = \begin{bmatrix} \text{cossec}(4) & 0 & 0 \\ 0 & \text{cossec}(2) & -\cotg(2) \text{sen}(2)^{-1} \\ 0 & 0 & \text{cossec}(2) \end{bmatrix}.$$

Para concluir os cálculos basta usar as relações $\cotg(A) = P \cotg(J_A) P^{-1}$, $\sec(A) = P \sec(J_A) P^{-1}$ e $\text{cossec}(A) = P \text{cossec}(J_A) P^{-1}$.

4.6 Aplicações das funções trigonométricas matricial

Sabemos que se $a > 0$ então a função $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x(t) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{a} \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{a} \cdot t)$$

resolve a equação diferencial de segunda ordem

$$x''(t) + a \cdot x(t) = 0$$

quaisquer que sejam as constantes reais c_1 e c_2 .

Esta equação diferencial e outras parecidas surgem na modelagem matemática de diversos sistemas mecânicos. Seguindo o mesmo raciocínio, dada uma matriz A de ordem n que admite raiz quadrada e dadas constantes vetoriais arbitrárias C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}^n$, a função vetorial $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$X(t) = (\cos(t\sqrt{A})C_1 + (\sin(t\sqrt{A})C_2. \tag{4.4}$$

Resolve o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem $X''(t) + A \cdot X(t) = 0$. Com isso, podemos utilizar a teoria das funções trigonométricas matriciais para resolver sistemas de equações diferenciais de segunda ordem do tipo $X''(t) + A \cdot X(t) = 0$ de forma bem elegante, para isto, basta calcular as funções matriciais $\cos(t\sqrt{A})$ e $\sin(t \cdot \sqrt{A})$ e substituir em (4.4).

Apêndice A

Exponencial de Matrizes

As matrizes podem ser utilizadas de uma forma inteiramente diferente para resolver um sistema homogêneo de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Lembre-se de que a equação diferencial linear de primeira ordem $\dot{x} = ax$, onde a é uma constante, admite a solução geral $x = ce^{at}$. Parece natural então indagar se é possível definir uma exponencial de matriz e^{At} de forma que $e^{At}C$ seja uma solução do sistema homogêneo $\dot{x} = Ax$ com condição inicial $x(0) = C$.

Agora vamos ver que é possível definir a exponencial de uma matriz e^{At} de tal forma que

$$x(t) = e^{At}C$$

seja uma solução do sistema homogêneo $\dot{x} = Ax$. Aqui, A é uma matriz $n \times n$ de constantes e C é uma matriz coluna, $n \times 1$, de constantes arbitrárias. Embora o desenvolvimento completo de uma teoria de exponencial de matrizes requeira um grande conhecimento de álgebra matricial, uma forma de definir e^{At} é inspirada na representação em série de potências da função exponencial escalar e^{at} :

$$e^{at} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a^k \frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^k}{k!}.$$

A série acima converge para todo t . Usando essa série, em que 1 é substituído pela identidade I e a constante a é substituído por uma matriz A , $n \times n$, de constantes, chegamos a uma definição para a matriz $n \times n$, e^{At} . Veremos em breve que tudo isso faz sentido.

A.1 Definição

Definição A.1.1 Definimos a exponencial de uma matriz $A \in M_n(K)$ por

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad (\text{A.1})$$

onde I é a matriz identidade.

A série a direita em (A.1) converge para toda matriz $A \in M_n(K)$, como vimos no Teorema 2.2.7. Assim, a definição de e^A faz sentido para qualquer matriz $A \in M_n(K)$.

Observação A.1.2 Se A é uma matriz nilpotente, ou seja, $A^k = 0$ para algum inteiro positivo k , então a série exponencial (A.1) torna-se um número finito de termos, de modo que a matriz exponencial e^A ou (e^{At}) .

A.2 Propriedades da exponencial

A matriz exponencial e^A satisfaz a maioria das propriedades que são familiares no caso de expoentes escalares. Vejamos um conjunto de propriedades:

Teorema A.2.1 Sejam A e B matrizes constantes $n \times n$ e s e t números reais. Então,

- (a) $e^{A0} = e^0 = I$,
- (b) $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$;
- (c) $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ se, e somente se, $AB = BA$;
- (d) $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$;
- (e) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$;

Demonstração: (a) Pela definição de multiplicação de matrizes, $0^k = 0$ para $k \geq 1$. Portanto

$$e^0 = e^{0I} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k t^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k t^k}{k!} = I + 0 = I.$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt} \left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \frac{A^4 t^4}{4!} + \dots \right) \\ &= 0 + A + \frac{2tA^2}{2!} + \frac{3t^2 A^3}{3!} + \frac{3t^3 A^4}{4!} + \dots \\ &= A + \frac{tA^2}{1!} + \frac{t^2 A^3}{2!} + \frac{t^3 A^4}{3!} + \dots \\ &= A \left(I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots \right) \\ &= Ae^{At} \end{aligned}$$

(c) Se $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ temos derivando ambos os lados que:

$$(A+B)e^{(A+B)t} = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt}$$

derivando novamente e fazendo $t = 0$, obtemos $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ que implica que $AB = BA$. Reciprocamente, se A comuta com B é fácil ver que $X(t) = e^{At}e^{Bt}$ satisfaz a equação diferencial $\dot{X} = (A+B)X(t)$, porém com a condição inicial $X(0) = I$. Então pela unicidade de solução devemos ter $X(t) = e^{(A+B)t}$.

(d) Tome $B = -A$. Como $AB = BA$ temos do item (c) que $I = e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{At}e^{-At}$, donde segue que $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.

(e) Como as matrizes At e As comutam, pois $(At)(As) = (AA)(ts) = (As)(At)$ consequentemente por (c), $e^{At}e^{As} = e^{(At+As)} = e^{A(t+s)}$.

(f) como A é diagonal temos que $\det(e^A) = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} \cdot e^{\lambda_3} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n} = e^{\text{tr}A}$ e o traço é a soma da diagonal principal

Observação A.2.2 *Vimos que se A e B são matrizes $n \times n$ que comutam então*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

É importante ressaltar que se $A, B \in K$, ou seja, são escalares, então $e^{A+B} = e^A e^B$ sempre é válida, pois quaisquer dois escalares sempre comutam.

Observação A.2.3 *Fazendo $t = 1$ no item (d) do teorema anterior concluímos que*

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Em particular, a matriz e^A é não-singular para cada matriz $A \in M_n(K)$. Segue da álgebra linear elementar que os vetores coluna de e^A são sempre linearmente independentes.

Observação A.2.4 *Pelo item (b) do teorema anterior*

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At},$$

em analogia com a fórmula $D_t(e^{kt}) = ke^{kt}$ do cálculo elementar. Assim, a matriz da função com valor de

$$X(t) = e^{At}$$

satisfaz a equação diferencial matricial

$$\dot{X} = AX.$$

A.3 Métodos para obtenção da exponencial de uma matriz

A.3.1 Obtenção via Autovalores e Autovetores

Dada uma matriz A diagonalizável, existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^{-1}$. (As entradas da diagonal de D são os

autovalores de A , e as colunas de P são os correspondentes autovetores de A). Então $e^A = Pe^D P^{-1}$, como mostra a seguinte conta:

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1})^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PD^k P^{-1}}{k!} \\ &= P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1} \\ &= Pe^D P^{-1}. \end{aligned}$$

Como D é diagonal, é muito fácil calcular e^D . Assim, temos estabelecido um método para obter a exponencial de uma matriz diagonalizável.

Se A não é diagonalizável usaremos a forma de jordan, ou seja, escrevemos A na forma

$$A = M \cdot J \cdot M^{-1},$$

sendo J a matriz de jordan (bloco diagonal) associado a matriz A e M formada por autovetores de A e outros vetores obtidos a partir destes para garantir que M seja não singular.

Analogamente,

$$e^A = e^{M \cdot J \cdot M^{-1}} = M \cdot e^J \cdot M^{-1}$$

Por exemplo, se A é uma matriz de ordem 2, não diagonalizável com autovalor λ e autovetor associados v_1 . Obtemos um v_2 a partir de v_1 de modo que (v_1, v_2) sejam linearmente independentes, logo

$$e^A = (v_1, v_2) \cdot \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2)^{-1}$$

A.3.2 Usando a definição

Algumas vezes, a definição pode ser viável na obtenção da exponencial de uma matriz. Por exemplo,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

no caso em que A é uma matriz diagonal é facilmente calculado, como vimos nos exemplos (??), (??) e (??). Mesmo em alguns casos não-diagonalizáveis, a definição pode ser útil, como vimos nos exemplos (??) e (??).

Referências Bibliográficas

- [1] ARSAC,G."L'Origine de la Demonstration: Essai d' Epistémologie Didactique", Revista Recherche en Didactique des Mathématiques (RDM), vol 8, nº 3, pp 267-312, Ed. La Pensée Sauvage, France, 1987.
- [2] BRASIL,Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- [3] BRASIL ,Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [4] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*. 1. ed. São Paulo:Editora Ática, 2008.
- [5] IEZZI, Gelson;DOLCE, Osvaldo;DEGENSZAJN ,David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA,Nilze de. *Matemática: Ciência e Aplicações*. 6.ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.
- [6] BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy. *MATEMÁTICA 2*. 2. ed. São Paulo: Editora FTD, 1992.
- [7] GENTIL, Nelson; SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GRECO, Antonio Carlos; FILHO, Antônio Bellotto;GRECO, Sérgio Emílio. *Matemática para o 2º grau - Volume 2*. 7. ed. São Paulo: Editora Ática, 1998.
- [8] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto e Aplicações*. 1. ed. São Paulo:Editora Ática, 1999.
- [9] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.. *História da Matemática* 2. ed. :Editora Edgard Blucher, 1974.
- [10] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César . *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. 9. ed. Rio de janeiro: SBM, 2006.
- [11] CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria - Números Complexos* . 3. ed. Rio de Janeiro:SBM,1992.
- [12] VIVEIRO, Tânia Cristina; CORRÊA, Marlene Lima Pires. *Matemática: Teoria e Prática*. 1. ed. São Paulo: Editora Rideel, 1999.

- [13] LIMA, Elon Lages. *Análise Real - Volume 1 - Funções de uma variável*. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [14] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise - Volume 1*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [15] LANG, Serge. *Analysis I*. 5. ed. New York: Addison-Wesley Publishing, 1976.
- [16] SIERPINSKA, A. "Obstacles épistémologiques Relatifs a la Notions de Limite - RDM vol.6.1, pag 65-67 1985.
- [17] STEWART, James. *Cálculo*. (tradução Antonio Carlos Gilli Martins e Antonio Carlos Moretti). volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- [18] COIMBRA, Maria do Carmo. *Equações Diferenciais, uma primeira abordagem*. Porto - Portugal, Faculdade de Engenharia da cidade do Porto, 2008.
- [19] LEITHOLD, Louis. *Cálculo com Geometria Analítica* 3. ed., Editora: Harbra.
- [20] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. *Equações diferenciais aplicadas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [21] LINS NETO, Alcides. *Funções de uma Variável Complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [22] FERNANDEZ, Cecília S.; BERNARDES JR., Nilson C. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008.
- [23] COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. *Funções Seno e Cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador*. São Paulo: PUC, 1997. 174 pag. Dissertação (Mestrado) - Programa de pós-graduação da Pontifícia Universidade Católica, 1997.
- [24] MENDES, Iran Abreu. *A Trigonometria e o seu Ensino: Alguns Fragmentos Dessa História*. Belém: Prog. de Pós-Grad. em Ed. em Ciências e Matemáticas – PPGECEM/UFPa.
- [25] QUINTANEIRO, Wellerson. *Representações e Definições Formais em Trigonometria no Ensino Médio*. Rio de Janeiro: UFRJ, Dissertação de Mestrado. 143 pag. , Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2010.
- [26] BRASIL.MEC.SEMT. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio*. Brasília, 2000.
- [27] VERGNAUD, G. "Epistemology and Psychology in Mathematics Education" em "Mathematics and Cognition", Nesher, P. e Kilpatrick, J., pag.14-30, Cambridge University Press, 1994.