Universidade Federal de Sergipe

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Departamento de Matemática

Pós-Graduação em Matemática

Equações Diferenciais Ordinárias: Aplicações e uma proposta de intervenção no ensino básico

São Cristóvão – SE
Julho de 2019

Universidade Federal de Sergipe

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Departamento de Matemática

Pós-Graduação em Matemática

Equações Diferenciais Ordinárias: Aplicações e uma proposta de intervenção no ensino básico

por

MARCOS SANTOS DE SÁ

sob a orientação do

Prof. Dr. Gerson Cruz Araujo

São Cristovão – SE
Julho de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Sá, Marcos Santos de

S111e Equações diferenciais ordinárias: aplicações e uma proposta de intervenção no ensino básico / Marcos Santos de Sá ; orientador Gerson Cruz Araujo. - São Cristóvão, 2019.

133 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2019.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3.Modelos matemáticos . 4. Ensino médio. I. Araujo, Gerson Cruz orient. II. Título.

CDU 517.91

UFS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Equações Diferenciais Ordinárias: Aplicações e uma proposta de intervenção no ensino básico

por

Marcos Santos de Sá

Aprovada pela banca examinadora:

Gerson Cruz Araujo.

Prof. Gerson Cruz Araújo - UFS
Orientador

Gastão Florencio Miranda Junior

Prof. Gastão Florencio Miranda Junior - UFS
Primeiro Examinador

Lucas Rezende Valeriano

Prof. Lucas Rezende Valeriano - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 04 de Julho de 2019

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por estar comigo em todos os momentos dessa longa caminhada. Ao meu orientador, Prof. Dr. Gerson Cruz, pelo profissionalismo, apoio e por ter me guiado na construção desse trabalho. Ao meu filho Gustavo e a minha esposa Rosely, por terem compreendido a importância do meu sonho, pelo incentivo e por estarem presentes nas minhas conquistas. Aos meus pais, Luiz e Ilza, aos meus irmãos: Eliana, Márcio e Michel que além de serem minha base, sempre acreditaram em mim. Aos colegas de turma, pela união e por tornar a missão menos árdua nos encontros. Enfim, a todos que de forma direta ou indireta participaram dessa realização.

Resumo

As Equações Diferenciais Ordinárias são de grande importância para a modelagem de vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e problemas voltados a engenharia. No entanto, elas não fazem parte da grade curricular do ensino básico, por exigirem conceitos prévios da disciplina de Cálculo. Levando isso em consideração, o presente trabalho teve como objetivo estudar essas equações, sobretudo a parte quantitativa. Para tanto, fizemos o estudo dos modelos populacionais de Malthus e Verhust aplicados à população de Aracaju, através de dados oficiais. Além disso, abordamos a Lei de Resfriamento de Newton, muito usado pela perícia criminal, e a modelagem do Decaimento Radioativo . Em seguida, após a construção da teoria, realizamos aplicações no sistema massa-mola, com e sem amortecimento, no circuito elétrico em série L-R-C e no pêndulo simples de Galileu. Por fim, apresentamos uma proposta de intervenção a alunos da educação básica de ensino, em que, através de conceitos próprios dessa modalidade, eles poderão não só compreender, como também resolver problemas específicos, relacionados a modelagem de alguns fenômenos naturais. Esperamos com este trabalho, contribuir para a melhoria e o enriquecimento da grade curricular dos alunos da educação básica, e consequentemente, para a ampliação do conhecimento destes.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias; Modelagem Matemática; Teoria Quantitativa de Equações Diferenciais Ordinárias; Proposta de Intervenção no Ensino Médio.

Abstract

The Ordinary Differential Equations are extremely important to mold the several physical, chemical and biological phenomena and problems towards engeneering. However, they are not part of the Elementary School curriculum because they demand previous concepts of the subject Calculus. Taking that into consideration, this paper work aims the study of these equations, specially the quantitative part. In order to do so, we studied the models of Malthus and Verhust applied to the population of Aracaju, through oficial data. Furthermore, we approached Newton's Law of Cooling, used by the forensic expertise, and the modeling of Radioactive Decay. After the construction of this theory, we applied the the knowledge on the Spring-Mole system, with and without damping, in the electric circuit in series R-L-C and on the simple pendulum of Galileo. Finally, we present a proposal of intervention to students of Elementary School, in which, through inherents concepts of the modality, they will be able not only to understand, but also to solve specific problems related to the modeling of some natural phenomena. We hope to contribute to the improvement and the enrichment of the curriculum of the Elementary School students and, consequently, to the enlargement of their knowledge.

Keywords: Ordinary Differential Equations; Mathematical Modeling; Quantitative Theory of Ordinary Differential Equations; Proposed Intervention in High School.

Conteúdo

Introdução

As equações diferenciais surgiram a partir do Cálculo Diferencial e Integral, desenvolvido pelo notável físico inglês Issac Newton(1642 - 1727) e o filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Inicialmente a motivação era resolver problemas físicos e geométricos, no entanto, diante da complexidade de encontrar soluções, as equações diferenciais tomaram um novo rumo e tornou-se um ramo da matemática extremamente relevante para o estudo dos fenômenos naturais e sociais analisados na época. Neste estágio, a procura e análise de soluções tornou-se uma finalidade crucial. Também nesta época, ficaram conhecidos os métodos elementares de resolução, via integração, de vários tipos especiais de equações diferenciais, desenvolvidos por vários matemáticos e cientistas influentes da época como Bernoulli, Clairaut, Euller,Riccati, entre outros.

A natureza daquilo que era considerado solução foi mudando gradualmente, num processo que acompanhou e, às vezes, propiciou o desenvolvimento do próprio conceito de função. Inicialmente buscavam-se soluções expressas em termos de funções elementares, isto é, polinomiais, racionais, trigonométricas e exponenciais. Posteriormente, passou-se a considerar satisfatório expressar a solução na forma de uma integral (quadratura) contendo operações elementares envolvendo essas funções, ainda que a mesma não admitisse uma expressão em termos destas. Quando esses dois caminhos deixaram de resolver os problemas focalizados, surgiram as soluções expressas por meio de séries infinitas (ainda sem a preocupação com a análise da convergência das mesmas).

Em fins do século XVIII, com o apogeu da revolução industrial, a Teoria das Equações Diferenciais tornou-se uma das mais relevantes áreas de pesquisa científica, tendo o papel de explicar inúmeros fenômenos sociais e naturais da época. Muitos matemáticos contribuiram para o desenvolvimento desta área como os notáveis Euler, Lagrange, Laplace e outros. Com estes, houve uma extraordinária expansão de sub-áreas da matemática e áreas afins, como o Cálculo Variacional, a teoria das oscilações, teoria da elasticidade, dinâmica dos fluidos e da Mecânica Celeste. Esta última, teve grande avanços com Lagrange a Laplace através dos estudos do cosmo, advindos da teoria desenvolvida por Copérnico e Newton, estudando pontos materiais como, por exemplo, os satélites, que estavam sendo desenvolvidos nessa época. Foi também nesse período, que iniciou-se a descoberta das relações das equações diferenciais com as funções de variável complexa, séries de potências e trigonométricas. No século XIX, com o aperfeiçoamento dos fundamentos da matemática, percebeu-se que era necessário dar maior exatidão as soluções das equações diferenciais não apenas procurando soluções gerais, mas considerando como questão prévia em cada problema a existência e a unicidade de soluções satisfazendo dados iniciais. Nesse contexto, com a contribuição de Cauchy, tomava-se então uma classe ampla de equações diferenciais, como as lineares, por exemplo, que são de suma importância nas ciências exatas, pois grande parte dos fenômenos são modelados de tal forma a linearizar um dado problema.

Um marco de referência fundamental na evolução das equações diferenciais foi o minucioso trabalho do ilustre Henry Poincaré, na sua obra, *"Memoire sur les courbes définies par une équation differentielle"em (1881)*, no qual são lançadas as bases da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Essa teoria visa a descrição da configuração global das soluções, o efeito de pequenas pertubações das condições iniciais e o estudo da teoria da estabilidade em inúmeros efeitos sociais. No cenário globalizado que temos, com a aceleração contínua da tecnologia, o estudo de estabilidade em inúmeros efeitos sociais, como na medicina, na economia, na engenharia, nos efeitos climáticos, são alvos de pesquisas profundas desde o fim da segunda guerra mundial, para que o maquinário construído execute suas atividades com a maior exatidão possível.

Como vimos, o estudo das equações diferenciais ordinárias é alvo da curiosidade de muitos matemáticos, quer seja por modelar fenômenos naturais em geral, quer seja pela análise puramente matemática de suas equações. No entanto, mesmo com tamanha aplicabilidade, o estudo das equações diferenciais ordinárias são, geralmente, restritos a jovens que têm o privilégio de enveredar em cursos de graduação direcionados às ciências exatas, e em muitas vezes, vistos apenas em um ramo de pesquisa o qual possui foco de especialização profissional.

Diante disso, como motivação, neste trabalho de conclusão de curso, iremos apresentar algumas aplicações de equações diferenciais ordinárias que, de certo modo, podem ser resolvidas na educação básica, com conhecimentos simples dessa modalidade de ensino. Nesse sentido, iremos abordar as equações diferenciais ordinárias, quase em sua totalidade a parte quantitativa, onde no primeiro capítulo desta dissertação, estudaremos as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, na qual usaremos os modelos populacionais de Malthus e Verhust para verificar a população aracajuana através de dados oficiais do IBGE. Verificaremos também, a lei de resfriamento de Newton, onde poderemos estimar o tempo de morte de um certo indivíduo, através de pequenos dados coletados (feitos pela perícia criminal) no local do incidente. Nesta seção ainda, veremos a lei do decaimento radioativo, onde faremos um estudo da meia-vida da glicose marcada com nuclídeos de $carbono-11$. Em seguida, aprofundaremos nossos estudos com as equações diferenciais ordinárias de segunda e suas aplicações, a exemplo do oscilador harmônico simples, o circuito elétrico em série L-R-C e o pêndulo simples de Galileu. Por fim, no último capítulo dessa dissertação, traremos uma proposta de intervenção para o ensino médio. Na ocasião, tentaremos mostrar que um problema de equação diferencial ordinária pode ser entendido e resolvido ainda na educação básica, sem conceitos prévios de cálculo. Aqui teceremos um problema químico proposto pelo Exame Nacional do Ensino Médio, em 2013, e a dedução de equações do pêndulos simples com estudo no círculo trigonométrico e no triângulo retângulo.

Capítulo 1

Definição de uma equação diferencial ordinária

1.1 Visão intuitiva da teoria

Primeiramente, é importante fazer uma distinção entre dois tipos de problemas: os estáticos e os que variam em função do tempo t. Para isso, vamos considerar dois cenários, os quais faremos em dois problemas. O cenário estático seria por exemplo, um indivíduo pegar um táxi que cobra $R\$$ 4 reais fixo e mais $R\$$ 3 reais por quilômetro rodado. O preço P a ser pago ao taxista pela quantidade x de quilômetros rodados, pode ser modelado pela seguinte equação da reta:

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & P(x) = 4 + 3x \end{array}$$

Esse problema é um típico caso de problema estático, pois o preço P não está variando com os quilômetros rodados, ou seja, é fixo. Tanto é, que se tivermos apenas $R\$$ 25 reais, poderemos encontrar a quantidade de quilômetros que poderemos percorrer com uma simples substituição

$$25 = 4 + 3x \Rightarrow x = 7$$

Já em uma visão temporal com a variação do tempo, considere o problema, por exemplo, do Modelo Populacional de Thomas Malthus, utilizado para descrever populações simples, que pressupõe que a taxa de crescimento de uma determinada população P em função do tempo t é proporcional ao seu tamanho. A modelagem do modelo de Malthus, é dada pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$P^{'}(t) = P(t) \cdot k$$

onde $k = k_n - k_m$, sendo k_n a taxa de natalidade e k_m a taxa de mortalidade.

Nesse problema, diferentemente do anterior, a população P varia em função do tempo t e a solução, como veremos, não é um número real e sim funções. Desta forma, iremos estudar taxas de variação a qual foram estudadas no curso de Cálculo I, onde matematicamente, dado um intervalo aberto e uma função $g(t)$ definida nesse intervalo, a taxa de variação de g em um tempo t_0, conhecida na literatura como derivada de g e representada por $g^{'}(t_0)$, é dada pela seguinte expressão:

$$g^{'}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t_0 - h) - g(t_0)}{h}$$

Geometricamente, a derivada pode ser interpretada como a reta secante que passa pelo ponto $(t_0, g(t_0))$ e $(t_0 + h, g(t_0 + h))$. A medida que h tende a 0, a reta secante se aproxima da reta tangente em t_0, logo $g^{'}(t_0)$ é a inclinação da reta tangente em t_0.

Essa noção de derivada também esta ligado a outro assunto do Cálculo I, chamado de integral, onde dado uma função $g(t)$, a integral de g é dada por:

$$\int g(t) = G(t) + c$$

onde $G(t)$ é dita função primitiva ou antiderivada de $g(t)$ de tal forma que $G^{'}(t) = g(t)$.

Por fim, o Teorema Fundamental do Cálculo, conecta essa duas noções do seguinte modo:

$$\int_a^b g(t)dt = G(a) - G(b)$$

Nas seções que seguem, iremos definir as equações diferenciais ordinárias e classifica-la, para que seus estudos possam nos nortear a sugerir métodos para a aplicação no ensino médio.

1.2 Formalismo da teoria

As Equações Diferenciais Ordinárias surgem pela necessidade de interpretar fenômenos naturais, principalmente os que variam de acordo com o tempo, ou seja, taxas de variação ou também interpretadas matematicamente por derivadas. Nesta seção iremos formalizar o conceito de uma Equação Diferencial Ordinária, que por sua vez, serão a base para a construção da nossa teoria. Em seguida faremos algumas classificações para entender melhor as peculiaridades de tais equações.

Definição 1.1. *Chamamos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), as equações que envolvem funções de uma única variável e suas derivadas. De forma generalizada, se y é uma função de t*

então a EDO pode ser escrita na forma $F(t, y', y'', ..., y^{n-1}, y^n) = 0$. *As funções que envolvem mais de uma variável e suas derivadas parciais são chamadas de Equações Diferenciais Parciais (EDP)*

São exemplos de Equações Diferenciais Ordinárias:

Exemplo 1.1. *Modelo populacional de Verhult:* $N'(t) = N(t) \cdot k - aN^2(t)$.

Exemplo 1.2. *Sistema elétrico RLC:* $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = E(t)$.

Exemplo 1.3. *Decaimento radioativo:* $\dfrac{M'(t)}{M(t)} = k$.

São exemplos de Equações Diferenciais Parciais:

Exemplo 1.4. *Equação bidimensional da onda:* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

Exemplo 1.5. *Equação de Hamilton-Jacobi para um sistema conservativo não relativístico unidimensional:* $a(x)\dfrac{\partial S}{\partial x} + V(x) - \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$

Observação 1.2.1. *Neste trabalho de conclusão de curso daremos ênfase apenas as equações diferenciais ordinárias.*

1.3 Classificação de uma Equação Diferencial Ordinária

Para ajudar a compreender melhor as equações diferenciais ordinárias, nesta seção iremos classificá-las quanto a ordem, grau e linearidade.

- Quanto à ordem: A ordem de uma equação diferencial ordinária está sujeita a ordenação da maior derivada:

Exemplo 1.6. *A equação* $y'' + y' = 0$ *é uma equação diferencial ordinária de 2ª Ordem.*

Exemplo 1.7. *A equação* $2y' + e^x = y$ *é uma equação diferencial ordinária de 1ª Ordem.*

- Quanto ao grau: O grau de uma equação diferencial ordinária é a maior potência no qual está sendo elevada certa derivada da equação.

Exemplo 1.8. *A equação* $(y'')^2 + e^x = 3x$ *é uma equação diferencial ordinária de 2º Grau.*

Exemplo 1.9. *A equação* $ty''' + \left(y''\right)^4 + t^2 \operatorname{sen} y' + y = \operatorname{sen} t$ *é uma equação diferencial ordinária de 4º Grau.*

- Quanto a linearidade: Uma equação diferencial ordinária é dita linear se todos os seus coeficientes são lineares em relação à $y, y', y", ..., y^{n-1}, y^n$, ou seja, $a_n(x)y^n + a_{n-1}y^{n-1} + ... + a_1 y = g(x)$ é linear se os coeficientes $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ são funções somente de x . Uma EDO que não é linear é dita **não-linear**.

Exemplo 1.10. *as equações diferenciais ordinárias*

$$y" + y' + y = \tan x^2 \quad e \quad y' + 2y = e^{2x}$$

são exemplos de equações diferenciais ordinárias lineares.

Exemplo 1.11. *A equação diferencial ordinária do modelo de Verhust não é linear, do mesmo modo que* $y'' + yy' - 2e^x = 0$ ***não é linear****, pois envolve o produto y por* y'.

1.4 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem possuem característícas e classificações importantes que serão abordadas nesse capítulo. A compreensão de cada uma nos ajudará a resolvelas. Considere uma equação diferencial Ordinária de primeira Ordem

$$a_1(t)y' + a_2(t)y = a_3(t)$$

com $a_1(t) \neq 0$. Dividindo tal equação por $a_1(t)$, obtemos:

$$\frac{a_1(t)y'}{a_1(t)} + \frac{a_2(t)y}{a_1(t)} = \frac{a_3(t)}{a_1(t)},$$

$$y' + \frac{a_2(t)y}{a_1(t)} = \frac{a_3(t)}{a_1(t)}.$$

Fazendo $p(t) = \dfrac{a_2(t)}{a_1(t)}$ e $q(t) = \dfrac{a_3(t)}{a_1(t)}$, temos:

$$y' + p(t)y = q(t). \tag{1.1}$$

Podemos ainda generalizar tal equação na forma $y' = f(t, y)$, onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, que será chamada de **forma normal de uma equação diferencial**

de primeira ordem. Se $q(t) = 0$ a equação $y' + p(t)y = 0$ é chamada de **equação diferencial linear homogênea de primeira ordem**. Caso contrário a equação (1.1) será chamada de **equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem.** Qualquer função diferencial $y = \psi(t)$ que satisfaça $y' = f(t, y(t))$, para todo t em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é chamada de **solução** da equação (1.1) definida em I.

Nosso objetivo nesse momento consiste em verificar se existe uma função $y = \psi(t)$ que satisfaça a equação diferencial dada, ou seja, se existe uma solução para tal equação. Deste modo, iremos mostrar alguns métodos, haja vista que, não podemos obter uma forma geral para resolver as equações diferenciais ordinárias. A seguir, apresentaremos alguns métodos de resolução de uma equação diferencial ordinária. Para isso, iremos dividir os métodos a partir de sua linearidade.

1.4.1 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem

Buscaremos soluções da equação diferencial $y' = f(t, y)$ que se apresentam na forma da equação (1.1). Alguns casos particulares dessa equação podem ser resolvidos com integração. Vamos agora apresentar tais casos e em seguida mostrar uma solução para um caso geral de (1.1)

Caso especial

- Caso 1: Quando $q(t) = 0$ na equação (1.1) a equação diferencial ordinária toma a forma:

$$y' + p(t)y = 0 \tag{1.2}$$

Note agora que $y(t) \equiv 0$ é uma solução trivial da igualdade acima. Vamos procurar uma solução $y \neq 0$ não-nula para essa equação. Para isto, divida a equação (1.2) por y, ou seja:

$$\frac{y'}{y} = -p(t),$$

perceba que:

$$(\ln |y|)' = -p(t) \tag{1.3}$$

A integral indefinida de (1.3), será decorrente do cálculo abaixo integrando ambos os lados em relação à t, assim:

$$\int (\ln |y|)' dt = \int -p(t)dt \Rightarrow ln|y| = -\int p(t)dt + C,$$

com $C \in \mathbb{R}$. Aplicando a exponencial em ambos os lados, segue que:

$$y = e^{-\int p(t)dt + C} \Rightarrow y = e^{-\int p(t)dt} e^C,$$

fazendo $e^C = k$ com $k \in \mathbb{R}$, temos que a solução do caso particular é:

$$y = ke^{-\int p(t)dt} \tag{1.4}$$

Exemplo 1.12. *Para exemplificar tal procedimento, vamos resolver a equação diferencial* $y^{'} - 2ty = 0$.

Notamos que $p(t) = -2t$ e $q(t) = 0$ e pelo exposto acima, a solução da equação é dada por:

$$y = ke^{-\int(-2t)dt} \Rightarrow$$

$$y = ke^{2\int tdt} \Rightarrow$$

$$y = ke^{2(\frac{t^2}{2}+c)} \Rightarrow$$

$$y = ke^{t^2}e^{2c}.$$

- Caso 2: Quando $p(t) = 0$ a equação (1.1) toma a forma:

$$y^{'} = q(t),$$

daí, integrando em relação a t em ambos os lados da igualdade,

$$\int y^{'}dt = \int q(t)dt \Rightarrow y = \int q(t)dt + c$$

que será a solução geral de tal equação.

Exemplo 1.13. *Vamos resolver a equação diferencial ordinária* $y^{'} = \operatorname{sen}(t)$

Notamos que a equação tem a forma da equação (1.1) com $p(t) = 0$ e $q(t) = \operatorname{sen}(t)$. Fazendo a integração de ambos os lados em relação a t, temos:

$$\int y^{'}dt = \int \operatorname{sen}(t)dt$$

cuja solução é dada por:

$$y = -\cos(t) + c$$

Logo, a solução da equação diferencial ordinária dada é $y = -\cos(t) + c$ com $c \in \mathbb{R}$.

Observação 1.4.1. *Note que, o método utilizado para resolver a equação diferencial acima é um caso particular e não nos garante resolver todas as equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem. Apresentaremos a seguir um método para a obtenção de solução de uma equação na forma* (1.1) *com* $p(t)$ *e* $q(t)$ *não necessariamente nulos.*

Método de Resolução de uma equação diferencial ordinária por fator integrante

Considere uma equação diferencial ordinária na forma $y^{'} = f(t, y)$ escrita na forma da equação (1.1), ou seja, na forma:

$$y^{'} + p(t)y = q(t)$$

com $q(t) \neq 0$. Seja $\mu = \mu(t)$ uma função não nula, que dependa apenas de t. Multiplicando a equação (1.1) por $\mu = \mu(t)$ e fazendo $y^{'} = \dfrac{dy}{dt}$ [1], encontramos:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t). \tag{1.5}$$

Pela regra da cadeia temos,

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y \tag{1.6}$$

e assim $\dfrac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)q(t)$. De (1.5) e (1.6),

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)p(t), \tag{1.7}$$

multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $\dfrac{1}{\mu(t)}$, sendo $\mu(t) \neq 0$ para todo t no domínio de y, teremos,

$$\frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu}{dt} = p(t)$$

que pode ser escrita como,

$$\frac{d}{dt}\left[ln|\mu(t)|\right] = \int p(t)dt + c$$

aplicando a exponencial obtemos,

$$| \mu(t) |= e^{\int p(t)dt + c_1} \Rightarrow | \mu(t) |= e^{\int p(t)dt} \cdot e^{c_1}$$

fazendo $e^{c_1} = \widetilde{k}$,

$$| \mu(t) |= \widetilde{k} \cdot e^{\int p(t)dt} \Rightarrow$$

$$\mu(t) = k \cdot e^{\int p(t)dt}. \tag{1.8}$$

[1] Quando conveniente utilizaremos $y^{'}$ ou $\dfrac{dy}{dt}$.

com $k = \pm\tilde{k}$. A função μ encontrada em (1.8) é fator integrante. Por sua vez de (1.7), como $\frac{d}{dt}\mu(t)y = \mu(t)q(t)$, integramos ambos os lados em relação a t, obtemos:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)q(t)dt + b$$

dividindo ambos os membros por $\mu(t)$, temos:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t)q(t)dt + c,$$

substituindo $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$, teremos,

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[\int \mu(t)q(t)dt + c\right]. \tag{1.9}$$

A igualdade (1.9) acima é dita **solução geral da equação diferencial ordinária linear.**

1.4.2 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Não-Lineares

Vimos que as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são escritas em geral na forma $y^{'} = f(t,y)$. Se a função $f = f(t,y)$ puder ser escrita como um quociente de duas funções $M = M(t,y)$ e $N = N(t,y)$ a forma normal será vista como $y^{'} = \frac{M(t,y)}{N(t,y)}$, com $N(t,y) \neq 0$, e para simplificar nossa teoria, façamos:

$$y^{'} = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}$$

ou equivalentemente,

$$M(t,y) + N(t,y)y^{'} = 0 \tag{1.10}$$

Nas subseções que seguem, apresentaremos algumas equações diferenciais não-lineares na forma da equação (1.10) e seus respectivos métodos de resolução. Vamos analisar a priori, as equações diferenciais ordinárias não-lineares separáveis e em seguida as equações diferenciais ordinárias exatas.

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Separável

Sejam M e N funções de uma única variável t e y, respectivamente. Na equação (1.10) que toma a forma,

$$M(t) + N(y)y^{'} = 0 \tag{1.11}$$

Essas equações serão chamadas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem Separáveis.

Exemplo 1.14. *O modelo de Crescimento de Malthus representado pela equação*

$$P'(t) = P(t) \cdot k$$

é uma equação diferencial ordinária separável pois:

$$P'(t) - P(t) \cdot k = 0$$

Com $M(t) = -P(t) \cdot k$ *e* $N(y) = 1$.

A seguir, vamos direcionar nossos estudos para encontrar soluções de (1.10).

Método de resolução da equação diferencial separável

Precisamos agora nos questionar sobre qual é o método para solucionar uma equação diferencial ordinária separável. Considere,

$$h(y) = -\int N(y)dy$$

onde $-h^{'}(y) \cdot y^{'} = -N(y)$. Substituindo em (1.11), temos:

$$-h^{'}(y) \cdot y^{'} + M(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{dh}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = M(t).$$

Segue que,

$$\frac{d}{dt}[h(y(t))] = M(t) \Leftrightarrow \frac{dg}{dt} = M(t)$$

onde $g = h(y(t))$. Perceba que tal equação possui a forma da equação (1.1) com $p(t) = 0$ e sua solução é dada por

$$g = h(y(t)) = \int M(t)dt + c$$

Exemplo 1.15. *Vamos resolver a Equação Diferencial Ordinária* $3yy' - 9t = 0$

Solução: Notamos que a equação diferencial ordinária é separável com $M(t) = -9t$ e $N(y) = 3y$. Dividindo a equação por $3y$, e isolando $y^{'}$ obtemos:

$$y^{'} = \frac{3t}{y}.$$

A solução da equação diferencial ordinária é dada por:

$$y = \int \frac{3t}{y}dt \Rightarrow y = \frac{3}{y} \cdot \int tdt \Rightarrow$$

$$y = \frac{3}{y}\left(\frac{t^2}{2} + c\right) \Rightarrow 2y^2 = 3t^2 + k,$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Em seguida, vamos exibir um método de resolver equações diferenciais ordinárias de maneira quantitativa extremamente relevante na teoria de equações diferenciais.

Equação Diferencial Ordinária Exata

Considere uma equação diferencial ordinária na forma $y' = f(y,t)$ conforme a equação (1.10).

Definição 1.2. *Dizemos que a equação*

$$M(t,y) + N(t,y)y' = 0 \tag{1.12}$$

é uma equação diferencial exata, se existe uma função $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que a expressão do lado esquerdo de* (1.10) *satisfaz a seguinte condição:*

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = \frac{d}{dt}[\varphi(t,y)] = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

onde $M(t,y) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ *e* $N(t,y) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Exemplo 1.16. *Vamos verificar se a equação diferencial ordinária* $(2t + y^2) + 2tyy' = 0$ *é exata.*

Solução: Observamos primeiramente que a equação não é separável, pois a função $M(t,y) = 2t + y^2$ não depende apenas de t e não é linear, haja vista que a função $N(t,y) = 2ty$ não é uma função apenas de t. Definimos $\varphi(t,y) = t^2 + ty^2$. Desta forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2t + y^2 = M(t,y) \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2ty = N(t,y)$$

Logo,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi(t,y)}{dt} = 0 \Rightarrow \varphi(t,y) = c \Rightarrow t^2 + ty^2 = c$$

Notamos que $\dfrac{d}{dt}[\varphi(t,y)] = 0$ nos diz que $\varphi[t, y(t)] = c$, isto define y implicitamente. A medida que variamos o valor da constante c, obtemos diferentes gráficos como solução da equação diferencial ordinária dada.

Definição 1.3. *Chama-se de curva integral de uma equação diferencial ordinária*

$$F(t,y,y') = 0$$

o gráfico de uma solução $y = \varphi(t)$ *dessa equação diferencial.*

No exemplo anterior, $t^2 + ty^2 = c$ definem uma família de curvas, em particular para $c = 5$ o conjunto $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / t^2 + ty^2 = 5\}$ é uma curva integral.

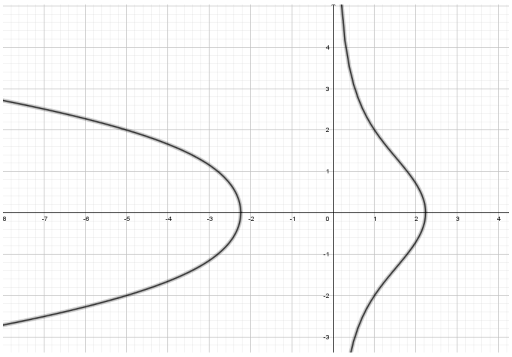


Figura 1.1: Gráfico da curva $t^2 + ty^2 = 5$.

Como percebemos, a tarefa de encontrar uma função $\varphi[t, y(t)]$ que satisfaça a definição acima é muitas vezes árdua.

A seguir, para dirimir esta dificuldade, exibiremos uma caracterização que nos ajudará a encontrar a solução desejada da equação diferencial ordinária (1.12).

Teorema 1.4.1. *Sejam* $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial t}$ *funções contínuas no retângulo* $\Omega = \{(x, y)/x \in (a, b), y \in (c, d)\}$. *Então,* $M(t, y) + N(t, y)y^{'} = 0$ *é uma equação diferencial ordinária exata em* Ω *se, e somente se,*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t},$$

isto é, existe uma função,

$$\begin{array}{llcl} \varphi: & (a, b) \times (c, d) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, y) & \mapsto & \varphi(t, y) \end{array}$$

satisfazendo,
$\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = M(t, y)$ *e* $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = N(t, y)$ *em* $(a, b) \times (c, d) \Leftrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$.

para todo $(t, y) \in \Omega$

Demonstração. Suponhamos que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = M(t, y)$ e $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = N(t, y)$. Com isso,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (\frac{\partial \varphi}{\partial t})}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \text{ e } \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial (\frac{\partial \varphi}{\partial y})}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y}$$

Como $M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial t}$ são contínuas, então, pelo **Teorema de Schwarz** [2], temos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

por outro lado, admita que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$ em Ω. Vamos procurar uma função φ tal que,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = M \quad e \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N \quad em \quad (a,b) \times (c,d) \tag{1.13}$$

integrando a primeira equação em relação a t, temos:

$$\varphi(t,y) = \int M(t,y)dx + h(y)$$

e por 1.13, segue:

$$\frac{\partial \varphi(t,y)}{\partial y} = \frac{\partial [\int M(t,y)dt + h(y)]}{\partial y} = \int \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} dt + h^{'}(y) = \int \frac{\partial N}{\partial t} dt + h^{'}(y)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(t,y) = \int M(t,y)dt + h(y) \quad e \quad h(y) = N(t,y) - \int \frac{\partial N}{\partial t} dt$$

$$\Leftrightarrow \varphi(t,y) = \int M(t,y)dt + h(y) \quad ; \quad h(y) = \int [N(t,y) - \int \frac{\partial N}{\partial t} dt] dy$$

□

Exemplo 1.17. *Verifique se a equação diferencial ordinária* $2ty + (1+t^2)\dfrac{dy}{dt} = 0$ *é exata.*

Solução: Primeiramente notamos que a equação não é separável. Para verificar se esta é exata, façamos as suas derivadas parciais:

$$\frac{\partial 2ty}{\partial y} = \frac{\partial (1+t^2)}{dt} = 2t$$

logo a equação diferencial ordinária é exata.

Observação 1.4.2. *: É importante perceber que toda equação diferencial ordinária separável é uma equação diferencial ordinária exata, pois como a característica de uma equação diferencial ordinária separável é ser da forma* $M(t) + N(y)y^{'} = 0$*, consequentemente,*

$$\frac{\partial M(t,y)}{dy} = \frac{\partial M(t)}{\partial y} = 0 \quad e \quad \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial N(y)}{\partial t} = 0$$

[2]Teorema de Schwarz: Se D um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em D então: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$, *para* $j, k = 1, 2, 3, ..., n$.

A solução de uma equação diferencial ordinária exata é feita mediante integração direta, vejamos no exemplo anterior que,

$$2tydt + (1+t^2)dy = 0,$$

integrando a equação acima, temos,

$$\int 2tydt + \int (1+t^2)dy = c \Rightarrow 2y\int tdt + (1+t^2)\int dy = c \Rightarrow$$

$$2y \cdot \frac{t^2}{2} + (1+t^2)\cdot y = k \Rightarrow yt^2 + y + yt^2 = k \Rightarrow$$

$$y(1+2t^2) = k \Rightarrow$$

$$y = \frac{k}{1+2t^2},$$

com $c \in \mathbb{R}$ e $k = c - c_1 - c_2 \in \mathbb{R}$.

Agora exibiremos um método que podemos resolver equações diferenciais exatas usando fator integrante. Para isso precisaremos organizar adequadamente as funções.

Método de obtenção de soluções para Equações Diferenciais Exatas por Fator Integrante

Vimos na seção anterior que uma caracterização de uma equação diferencial ordinária $y^{'} + p(t)y = q(t)$ escrita na forma da equação (1.10) é Exata quando $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$. Em algumas situações, podemos converter uma equação diferencial ordinária não-exata em uma equação exata, através de um fator integrante, já visto nas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares. Considere uma equação diferencial não exata

$$M(t,y) + N(t,y)y^{'} = 0 \tag{1.14}$$

Vamos transformar esta equação não-exata através de um fator integrante $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pelos seguintes passos.

i: Multiplicamos a equação (1.14) por $\mu(t) \neq 0$, ou seja,

$$\mu(t)M(t,y) + \mu(t)N(t,y)y^{'} = 0 \tag{1.15}$$

ii: Para que (1.15) seja exata, devemos ter,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(t)M(t,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu(t)N(t,y)) \tag{1.16}$$

da expressão (1.16), temos:

$$\mu(t) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(M(t,y)) = \mu^{'}(t)N(t,y) + \mu(t)\frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow$$

$$\mu^{'}(t)N(t,y) = \mu(t)\left[\frac{\partial}{\partial y}(M(t,y)) - \frac{\partial}{\partial t}N(t,y)\right]$$

dividindo a equação acima por $N(t,y) \neq 0$ podemos obter:

$$\frac{\mu^{'}(t)}{\mu(t)} = \frac{\left[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)\right]}{N(t,y)}$$

integrando indefinidamente, segue que:

$$\int \frac{\mu^{'}(t)}{\mu(t)}dt = \int \frac{\left[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)\right]}{N(t,y)}dt \Rightarrow$$

$$\ln|\mu(t)| = \int \frac{\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right]}{N(t,y)}dt \Rightarrow$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right]}{N(t,y)}dt}. \tag{1.17}$$

Exemplo 1.18. ***(Circuitos elétricos em série R-C)*** *Em estudos de fenômenos de circuito elétrico lineares, o formato em série R-C é um dos mais básicos para o entendimento de um comportamento da propagação de corrente elétrica. Considere o circuito com um gerador, com potencial elétrico $E(t)$, resistência $R(t)$ e capacitor $C(t)$, todos estes dependendo do tempo. Sabendo que em circuitos elétricos existindo um potencial, haverá uma corrente $i(t)$ no circuito,*

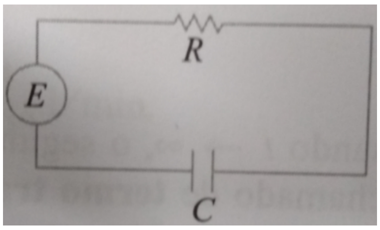


Figura 1.2: Circuito elétrico em série R-C.

pela Lei de Ohm, na teoria da elericidade, temos que:

$$E_r(t) = R.i(t).$$

Já pela Lei de Faraday,

$$E_c(t) = \frac{q(t)}{C(t)},$$

onde $C(t)$ é a capacitância do capacitor C e $q(t)$ é a carga elétrica do capacitor dado em Coulomb. Portanto, o potencial total $E(t)$ do circuito pela lei de Kirchoff, é dada por:

$$E(t) = E_c(t) + E_r(t),$$

assim,

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t)$$

por outro lado, a carga $q(t)$ no capacitor está relacionada com a corrente $i(t)$ e como $i = \frac{dq}{dt}$, a equação acima se torna:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{1.18}$$

Considere que em um determinado circuito elétrico R-C em série ocorra $R = (t^2 - 1)$, $\dfrac{1}{C} = 2$ e $E(t) = (t+1)^2$ para $t \in I = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Encontre o valor de $q(t)$.

Solução: Pelo enunciado, a equação diferencial ordinária do problema é:

$$(t^2 - 1)q^{'} + 2y = (t+1)^2$$

dividindo a equação acima por $(t^2 - 1)$, temos:

$$q^{'} + \left(\frac{2}{t^2 - 1}\right)q = \frac{t+1}{t-1} \tag{1.19}$$

como $p(t) = \left(\dfrac{2}{t^2 - 1}\right)$, pela equação (1.17), temos que o fator integrante $\mu(t)$ é dada por:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t^2-1}dt} \tag{1.20}$$

temos por frações parciais,

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + B(t-1)}{t^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

portanto,

$$\int \frac{1}{t^2 - 1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|^{\frac{1}{2}}$$

desta forma (1.20), fica:

$$\mu(t) = e^{2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|^{\frac{1}{2}}} = \left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \frac{t-1}{t+1}$$

multiplicando (1.19) por $\mu(t)$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{t-1}{t+1}q^{'} + \left(\frac{2}{t^2-1}\right)\left(\frac{t-1}{t+1}\right)q = 1 \Rightarrow \\
\frac{t-1}{t+1}q^{'} + \frac{2}{(t+1)^2}q = 1 \Rightarrow \\
\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{t-1}{t+1}\right)q\right] = 1 \Rightarrow \\
\frac{t-1}{t+1}q = t + c \Rightarrow \\
q(t) = \frac{(t+c)(t-1)}{t+1}
\end{aligned}$$

com $c \in \mathbb{R}$.

1.5 Casos especiais de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Nesta seção, abordaremos algumas equações diferenciais ordinárias especiais, que são cruciais para o desenvolvimento de soluções particulares. Dentre inúmeras, descreveremos sobre as equações diferenciais homogêneas, de Bernoulli, Riccati e Clairaut.

1.5.1 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Homogênea

Entre os principais tipos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem encontramos as equações diferenciais homogêneas. O termo homogênea provém do fato que o lado direito da equação diferencial é, nesse caso, uma função homogênea de grau qualquer. Nesse sentido, vejamos a seguinte definição:

Definição 1.4. *Dada uma equação diferencial ordinária de primeira ordem $y' = f(t, y)$, dizemos que esta é homogênea se:*

$$f(t, y) = f(wt, wy),$$

$\forall\ w \in \mathbb{R}$, *com* $t \neq y$.

Exemplo 1.19. *A equação diferencial ordinária* $y^{'}(t+y) = t - y$ *é homogênea pois reescrevendo, temos:* $y' = \dfrac{t-y}{t+y}$ *e dado* $w \in \mathbb{R}$,

$$f(wt, wy) = \frac{wt - ty}{wt + wy} = \frac{w(t-y)}{w(t+y)} = \frac{t-y}{t+y} = f(t,y)$$

Novamente, devemos nos perguntar qual é a função que satisfaz a igualdade, ou seja, qual é a método que nos permite encontrar uma solução para a equação diferencial ordinária homogênea? Para tal, usaremos uma mudança de variável $y = tz \Rightarrow y' = tz^{'} + z$. Com essa mudança de variável, recairemos em uma equação diferencial ordinária separável, cuja resolução já foi vista anteriormente.

Exemplo 1.20. *Resolva a equação diferencial ordinária* $y' = \dfrac{t+y}{t}$

Solução: Façamos primeiro a verificação da homogeneidade da equação. Assim:

$$f(wt, wy) = \frac{wt + wy}{wt} = \frac{w(t+y)}{wt} = \frac{t+y}{t}.$$

Seja então $y = tz \Rightarrow y^{'} = tz^{'} + z$, substituindo, temos:

$$\begin{aligned} tz^{'} + z &= \frac{t + tz}{t} \\ \Rightarrow tz^{'} &= \frac{t + tz - tz}{t} \\ \Rightarrow tz^{'} &= \frac{t}{t} \\ \Rightarrow z^{'} &= \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

A última igualdade é uma equação diferencial separável com $N(y) = 1$ e $M(x) = \dfrac{1}{t}$ e como já vimos, sua solução é dada por:

$$z = \int \frac{1}{t} dt \Rightarrow z = \ln|t| + c$$

como $y = tz$, temos:

$$\frac{y}{t} = ln|t| + c \Rightarrow y = t \cdot (\ln|t| + c)$$

com c $\in \mathbb{R}$.

1.5.2 Equação de Bernoulli

Vamos apresentar agora, a famosa equação de Bernoulli[3], cuja definição é:

Definição 1.5. *Uma equação de Bernoulli é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem na forma:*

$$y' + f(t)y = g(t)y^n \tag{1.21}$$

com $n \in \mathbb{R}$.

Note que, se $n = 0$ ou $n = 1$, a equação de Bernoulli toma a forma ja vista nas seções anteriores. Notoriamente, devemos nos perguntar qual é a função $\varphi(t)$ que satisfaz a equação de Bernoulli afim de solucioná-la. Observe também que, a equação de Bernoulli se diferencia da equação (1.1) pela expressão y^n, assim devemos fazer uma substituição na equação (1.21) para recairmos em uma equação linear na forma (1.1). A priori faça a mudança de variável,

$$z = y^{1-n} \Rightarrow y = z^{\frac{1}{1-n}},$$

para todo $n \neq 1$, e assim,

$$y' = \frac{1}{1-n} \cdot z^{\frac{1}{1-n}-1} \cdot z'.$$

Substituindo na equação (1.21), temos:

$$\frac{1}{1-n} \cdot z^{\frac{1}{1-n}-1} \cdot z' + f(t)z^{\frac{1}{1-n}} = g(t)z^{\frac{n}{1-n}}$$

multiplicando a equação por $z^{-\frac{n}{1-n}}$, obtemos:

$$\frac{1}{1-n}z' + f(t)z = g(t) \tag{1.22}$$

que é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem.

Observação 1.5.1. *Embora o resultado nos pareça convincente, devemos tomar cuidado com o expoente* $1-n$ *na substituição* $z = y^{1-n}$*, pois se este for negativo estaremos eliminando a possibilidade de* $y = 0$.

Exemplo 1.21. ***(Crescimento bacteriano)*** *Considere o crescimento de uma bactéria, que possua formato esférico (por simplicidade). Para cada instante* t*, indicaremos por* $M = M(t)$*,*

[3] Jakob Bernoulli(1654-1705) foi um matemático suíço. Ele e seu irmão, Jean Bernoulli, foram discípulos de Leibniz. Nenhuma família na história da humanidade produziu tantos matemáticos quanto a família Bernoulli, doze ao todo, que contribuíram de modo inigualável na criação e desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

$V = V(t)$, $S = S(t)$ e $r = r(t)$ a massa, o volume, a área e o raio da bactéria, respectivamente. Supondo que a densidade ρ da bactéria seja constante, daí teremos $M = \rho V$. Objetivamos construir um modelo matemático que leve em consideração que a taxa de crescimento da bactéria é influenciada por dois fatores:
a) Devido a alimentação a massa M tende a aumentar, e como este entra através da membrana superficial, é razoável supor que este efeito seja diretamente proporcional à área S da superfície da bactéria.
b) Existe uma "queima"da massa da bactéria devida ao metabolismo. Como essa perda é razoavelmente uniforme ao longo de todas as partes da bactéria, iremos supor que este efeito seja diretamente proporcional à massa M da bactéria.

Consideremos inicialmente o problema de determinar de que maneira a massa M varia de acordo com o tempo t. As duas suposições feitas, implicam que existem duas constantes α e β, ambas positivas, tais que:

$$M'(t) = \alpha S - \beta M, \tag{1.23}$$

note que as duas quantidades M e S ainda dependem do tempo t. Vamos exibir (1.23) em função de M. Para isto, vejamos que,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad e \quad S = 4\pi r^2,$$

e segue que $S = (4\pi)^{\frac{1}{3}} (3V)^{\frac{2}{3}}$. Por outro lado, $V = \dfrac{M}{\rho}$ e substituindo na equação (1.23), segue que:

$$M'(t) = \alpha \frac{(4\pi)^{\frac{1}{3}} (3M)^{\frac{2}{3}}}{\rho^{\frac{2}{3}}} - \beta M.$$

Veja que a equação diferencial que modela o crescimento da bactéria é dada pela lei de formação:

$$M'(t) = \lambda M^{\frac{2}{3}} - \beta M, \tag{1.24}$$

onde $\lambda = \dfrac{\alpha \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot (4\pi)^{\frac{1}{3}}}{\rho^{\frac{2}{3}}}$ e α, β são constantes positivas. A equação (1.24) é uma equação de Bernoulli com $n = \frac{2}{3}$. Sendo assim, fazendo a substituição $z = M^{1-n} = M^{\frac{1}{3}}$, temos $M = z^3$ e $M' = 3z^2 z'$ que transforma a equação (1.24) em:

$$3z^2 z' = \lambda z^2 - \beta z^3,$$

dividindo a equação por $3z^2$, obtemos:

$$z' + \frac{\beta}{3} z = \frac{\lambda}{3}, \tag{1.25}$$

Um fator integrante para a equação (1.25) é

$$\mu = e^{\int \frac{\beta}{3} dt} = e^{\frac{\beta t}{3}},$$

Multiplicando a equação (1.25) por esse fator integrante, temos:

$$e^{\frac{\beta t}{3}} z' + \frac{\beta}{3} e^{\frac{\beta t}{3}} z = \frac{\lambda}{3} e^{\frac{\beta t}{3}},$$

o lado esquerdo desta última equação equação diferencial ordinária é a derivada do produto, assim:

$$\left(e^{\frac{\beta t}{3}} z\right)' = \frac{\lambda}{3} e^{\frac{\beta t}{3}}$$

integrando ambos os lados, obtemos:

$$e^{\frac{\beta t}{3}} z = \frac{\lambda}{3} \int e^{\frac{\beta t}{3}} dt$$

calculando a integral, obtemos:

$$e^{\frac{\beta t}{3}} z = \frac{\lambda}{\beta} \int e^{\frac{\beta t}{3}} + C \Rightarrow z = \frac{\lambda}{\beta} + Ce^{-\frac{\beta t}{3}}$$

concluímos que:

$$M(t) = \left(\frac{\lambda}{\beta} + Ce^{-\frac{\beta t}{3}}\right)^3.$$

Observação 1.5.2. *A constante C depende da condição inicial. Existe um tamanho limite para a célula que não depende do tamanho inicial, isto é, qualquer que seja C*

$$\lim_{t \to \infty} M(t) = \frac{\lambda^3}{\beta^3} = M_{eq}$$

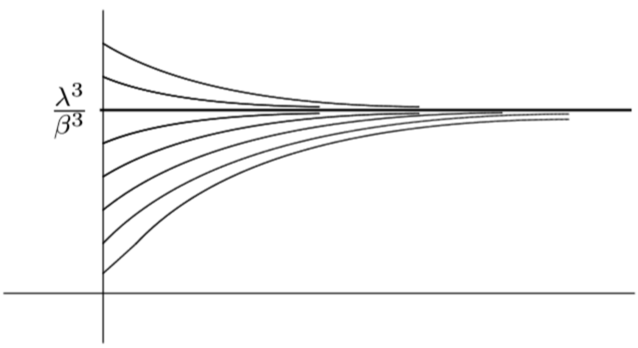


Figura 1.3: Dependência da constante C.

Observação 1.5.3. *Condições iniciais* $M(0) = M_{eq}$ *é que fazem sentido em nosso problema. Elas correspondem a valores* $C < 0$ *da constante. Neste caso a solução* $M(t)$ *é uma função crescente, pois a exponencial é decrescente. Uma condição inicial* $M(0) > M_{eq}$ *é matematicamente possível. Teriamos* $C > 0$ *e a solução de* $M(t)$ *seria decrescente. A função constante* $M(t) = M_{eq}$ *é a solução que corresponde a* $C = 0$*. É a solução de equilíbrio pois trata-se de um ponto de equilíbrio estável: tomando uma condição inicial* $M(0)$ *próxima ao valor de equilíbrio* M_{eq}*, a solução que se obtém tende a voltar ao valor de equilíbrio, embora sem atingi-lo em um tempo finito.*

1.5.3 Equações de Riccati

Partindo também de um problema concreto, Jacopo Riccati $(1676 - 1754)$ elaborou uma nova equação à qual leva seu nome. As equações diferenciais do tipo Riccati são importantes para a construção de modelos para monitorar fenômenos associados a linhas de transmissão, teoria de ruídos e processos aleatórios, teoria do controle, problemas de difusão, etc. Após a sua caracterização iremos buscar uma solução e perceber que existe um estreita relação entre as equações de Riccati e as equações de Bernoulli.

Definição 1.6. *Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem na forma*

$$y^{'} = q(t)y^2 + p(t)y + r(t) \tag{1.26}$$

em que $r(t)$*,* $p(t)$ *e* $q(t)$ *são funções contínuas em um intervalo* I *e* $q(t) \neq 0$ *em* I*, é chamada de Equação de Riccarti.*

É importante observar que quando $q(t) = 0$, temos uma equação linear e quando $r(t) = 0$, temos uma equação de Bernoulli com $n = 2$. Para encontrar soluções de equações diferenciais do tipo (1.26), iremos inicialmete apresentar uma importante propriedade que relaciona soluções da equação de Riccati à solução da equação de Bernoulli.

Proposição 1.1. *Dadas a funções* $y_1(t)$ *e* $y_2(t)$ *duas soluções da equação de Riccati então* $z = y_1 - y_2$ *é solução da equação de Bernoulli*

$$z^{'} - [p(t) + 2y_1(t)y_2(t)]\, z = q(t)z^2.$$

Demonstração. De fato, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de (1.26), então teremos:

$$y_1^{'} = q(t)y_1^2 + p(t)y_1 + r(t), \tag{1.27}$$

$$y_2' = q(t)y_2^2 + p(t)y_2 + r(t). \tag{1.28}$$

Subtraindo (1.28) com (1.27), teremos,

$$(y_2 - y_1)' = q(t)(y_2^2 - y_1^2) + p(t)(y_2 - y_1),$$

isto é,

$$(y_2 - y_1)' = q(t)[(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)] + p(t)(y_2 - y_1)$$

Fazendo $z = y_2 - y_1$ e notando que $y_2 + y_1 = y_2 - y_1 + 2y_1 = z + 2y_1$ a igualdade acima pode ser vista como,

$$z' = p(t)z + q(t)[z(z + 2y_1)],$$

ou seja,

$$z' - [p(t) + 2y_1 q(t)]z = q(t)z^2,$$

que é a equação de Bernoulli na variável z. □

O matemático francês Joseph Liouville (1809–1882), mostrou que para resolver uma equação de Riccati devemos conhecer uma solução particular. Vamos exemplificar uma equações de Riccati:

Exemplo 1.22. *Resolva a equação diferencial ordinária* $y' - ty^2 + (2t-1)y = t - 1$ *sabendo que* $y = 1$ *é uma solução.*

Solução: Como $y = 1$ é uma solução, façamos a seguinte mudança de variável $y = 1 + \frac{1}{z}$, onde $z = z(t)$. Assim, $y' = -z^{-2}z'$. Substituindo na equação diferencial ordinária dada, teremos:

$$-z^{-2}z' - t\left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 + (2t-1)\cdot\left(1 + \frac{1}{z}\right) = t - 1$$

$$\Rightarrow -z^{-2}z' - t\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + 2t + \frac{2t}{z} - 1 - \frac{1}{z} = t - 1$$

$$\Rightarrow -z^{-2}z' - t - \frac{2t}{z} - \frac{t}{z^2} + 2t + \frac{2t}{z} - 1 - \frac{1}{z} = t - 1$$

multiplicando ambos os lados da equação acima por $-z^2$, obtemos:

$$z' + z + t = 0$$

Note agora que esta última equação é uma equação diferencial ordinária linear, com $p(t) = 1$ e $q(t) = t$. Seja $u(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int 1 dt} = e^t$ 0 fator integrante da equação acima. Temos que a solução da equação é dada por:

$$z(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[\int \mu(t)q(t)dt + c\right]$$

$$\Rightarrow z(t) = e^{-\int 1dt}\left[\int e^t \cdot tdt + c\right]$$

$$\Rightarrow z(t) = e^{-\int 1dt} \cdot (te^t - e^t + c)$$

$$\Rightarrow z(t) = t - 1 + ce^{-t},$$

voltando a variável original, temos que a solução é dada por:

$$y(t) = 1 + \frac{1}{t - 1 + ce^{-t}}$$

1.5.4 Equações de Clairaut

Alexis Claude Clairaut (1713 - 1765) foi um dos mais precoces matemáticos de todos os tempos. Aos nove anos de idade, havia estudado completamente e dominado todo o conteúdo do excelente livro de Guisnée, Application de l'algèbre à la géométrie, que lhe proporcionou uma boa introdução ao Cálculo Diferencial e Integral bem como à Geometria Analítica. Em 1734, estudou durante alguns meses com Johann Bernoulli e, no período de 1733 a 1743, publicou alguns trabalhos importantes como "Sur quelques questions de maximis et minimis". Em 1735, Clairaut estudou as equações diferenciais que hoje são conhecidas como as "equações de Clairaut". Nos anos de 1739-1740, publicou um outro trabalho sobre Cálculo Integral, provando a existência de fatores para resolver equações diferenciais de primeira ordem. A seguir, mostraremos como é a forma de uma equação de Clairaut bem como sua solução.

Definição 1.7. *Uma equação diferencial na forma*

$$ty' + f(y') = y, \tag{1.29}$$

é chamada de Equação de Clairaut.

Suponha que a função f na equação de Clairaut é diferenciável, vamos achar as soluções dessa equação. Para simplificarmos a notação, façamos $y' = p$ em (1.29). Assim teremos,

$$tp + f(p) = y.$$

derivando a expressão acima com relação a t, obtemos:

$$p + tp' + f'(p)p' = y',$$

mas $y' = p$, assim:

$$p + tp' + f'(p)p' = p,$$

colocando $p^{'}$ em evidência, vêm:

$$[t+f^{'}(p)]p^{'}=0$$

Observe que a última igualdade resulta em: $p^{'}=0$ ou $t+f^{'}(p)=0$. Vejamos cada um dos casos:

Se $p^{'}=0$, então $p=c$ é uma constante e como $p=y^{'}$ isso implica diretamente que $y^{'}=c$. Substituindo na equação (1.29) teremos:

$$y=ct+f(c),$$

que representa uma família de retas não-paralelas, para cada constante c.

Se $t+f^{'}(p)=0$, obtemos outra solução da equação de Clairaut, eliminando p entre as equações e resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} t+f^{'}(p)=0 \\ y=pt+f(p) \end{cases}$$

Exemplo 1.23. *Vamos resolver a equação diferencial* $y=ty^{'}+\ln y^{'}$

Primeiro tomamos $y^{'}=p$, assim:

$$y=tp+\ln p,$$

Derivando em relação a t, obtemos:

$$y^{'}=p+tp^{'}+\frac{1}{p}p^{'},$$

como $y^{'}=p$, vem:

$$p=p+tp^{'}+\frac{1}{p}p^{'},$$

usando o cancelamento e colocando $p^{'}$ em evidência, temos:

$$p^{'}\left(t+\frac{1}{p}\right)=0,$$

se $p^{'}=0$, temos que $p=c$ e consequentemente temos:

$$y=ct+\ln c.$$

Por outro lado, se $t+\dfrac{1}{p}=0$, teremos:

$$\frac{1}{p}=-t,$$

como $y^{'}=p$, vêm:

$$\frac{1}{y^{'}}=-t\Rightarrow y^{'}=-\frac{1}{t},$$

integrando ambos os lados e eliminando a constante obtemos:

$$\int y' dt = \int -\frac{1}{t} dt \Rightarrow y = -\ln |t|.$$

Note agora que essa últma solução não satisfaz a equação diferencial ordinária dada.

1.5.5 Equações Diferenciais Autônomas

Equações autônomas são equações da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \tag{1.30}$$

em que não há dependência explicita da variável t. Exemplos de equações autônomas são a equação do crescimento exponencial e a equação logística. Importantes informações qualitativas podem ser obtidas para equações autônomas sem a necessidade de resolvê-las. Quando tratamos do comportamento qualitativo da equações diferenciais ordinárias precisaremos das seguintes definições:

Definição 1.8. *Um zero y_0 da função f é chamado **ponto de equilíbrio** (ou ponto fixo ou ponto crítico) da equação diferencial ordinária e a solução $y(t) = y_0$ é chamada uma **solução estacionária** (ou **solução de equilíbrio**).*

Com efeito, se $f(y_0) = 0$, então:

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

para todo t e $y(t) \equiv 0$ é uma solução constante para qualquer condição inicial que passe pelo ponto y_0 em qualquer instante de tempo t dado.

Definição 1.9. *Dizemos que um **ponto de equilíbrio** y_0 é **estável** se,*

$$f(y) > 0, \quad \textit{para todo} \;\; y < y_0 \;\; \textit{próximo de} \;\; y_0 \quad e$$

$$f(y) < 0, \quad \textit{para todo} \;\; y > y_0 \;\; \textit{próximo de} \;\; y_0.$$

*Dizemos que um **ponto de equilíbrio** y_0 é **instável** se,*

$$f(y) < 0, \quad \textit{para todo} \;\; y < y_0 \;\; \textit{próximo de} \;\; y_0 \quad e$$

$$f(y) > 0, \quad \textit{para todo} \;\; y > y_0 \;\; \textit{próximo de} \;\; y_0.$$

De fato, se $f(y) > 0$, então

$$\frac{dy}{dt} > 0$$

e a tendência da solução é crescer, enquanto que se $f(y) < 0$, então

$$\frac{dy}{dt} < 0$$

e a tendência da solução é decrescer.

Definição 1.10. *Dizemos que um* ***ponto de equilíbrio*** y_0 *é um* ***ponto de sela*** *se,*

$$f(y) > 0 \quad \textit{para todo} \quad y \neq y_0 \quad \textit{próximo de} \quad y_0$$

ou se,

$$f(y) < 0 \quad \textit{para todo} \quad y \neq y_0 \quad \textit{próximo de} \quad y_0.$$

Exemplo 1.24. *Vamos analisar a função* $\frac{dy}{dt} = y^2 - y$

Primeiramente vamos encontrar os pontos de equilíbrio. Para isso, façamos $f(y) = 0 = y^2 - y \Rightarrow$ $y_1 = 0$ *e* $y_2 = 1$ são os pontos de equilíbrio da equação diferencial ordinária dada. Note que, $\frac{dy}{dt} = y^2 - y < 0$ quando $0 < y < 1$. Desta forma as soluções são decrescentes no intervalo $0 < y < 1$. Note também que $\frac{dy}{dt} = y^2 - y > 0$, para $y < 0$ e $y > 1$. Desta forma as soluções são crescentes para $y < 0$ e $y > 1$. Para valores de y próximos de y_1 as soluções de $y(t)$ se aproximam de $y_1 = 0$ quando t cresce, logo o ponto de equilíbrio $y_1 = 0$ é estável. Já para valores de y próximos de $y_2 = 1$ as soluções de $y(t)$ se afastam de $y_2 = 1$ quando t cresce, assim o ponto de equilíbrio $y_2 = 1$ é instável. No gráfico abaixo, apresentamos algumas soluções da equação diferencial autônoma dada

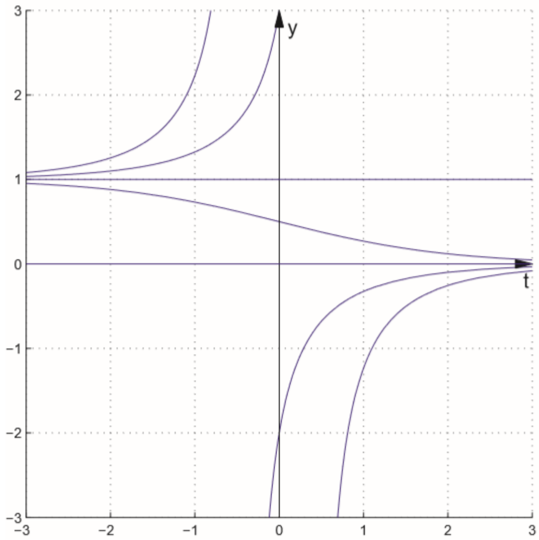


Figura 1.4: Algumas soluções do exemplo (1.24).

1.6 Teorema da Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias

Teorema 1.6.1. *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se f *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são contínuas no retângulo*

$$R = \left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2; \alpha < t < \beta \quad e \quad a < y < b\right\}$$

que contém o ponto (t_0, y_0), *então o problema possui uma única solução em um aberto contendo* t_0

Vamos apresentar agora uma idéia da prova do teorema acima.

Ideia da prova: A demonstração clássica deste resultado é através do chamado *método iterativo de Picard* (ou método das aproximações sucessivas), que também pode ser usado como método numérico para obter a solução computacionalmente. Suponha que exista a solução $y(t)$. Então, ao integrarmos a equação diferencial ordinária

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$$

ela deve satisfazer

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Como na verdade não sabemos se a solução $y(t)$ existe, tentamos aproximá-la sucessivamente através desta fórmula. Definimos como primeira aproximação a função constante

$$y_0(t) \equiv y_0,$$

e obtemos teoricamente uma melhor aproximação

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))ds,$$

em seguida, usamos esta nova função na fórmula para obter uma aproximação ainda melhor

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))ds$$

E assim por diante, definimos uma sequência de funções iterativamente:

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds \tag{1.31}$$

Pode-se provar, sob as condições estabelecidas no enunciado no teorema (e mesmo usando hipótese um pouco mais fracas) que a sequência de funções assim definida converge uniformemente para uma função continuamente diferenciável e que esta é de fato a solução do problema de valor inicial. Detalhes podem ser vistos em livros que tratam de EDOs, por exemplo no livro Introdução as Equações Diferenciais Ordinárias, de Reginaldo J. Santos (seção 1.8) ou em Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores Iniciais de Contorno, de Boyce e DiPrima (seção 2.9).

A demonstração da unicidade da solução é mais fácil. De fato, se existirem duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$, então elas satisfazem

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, y_1(s))ds,$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, y_2(s))ds,$$

logo,

$$y_2(t) - y_1(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s)) \right] ds,$$

donde

$$|y_2(t) - y_1(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))ds \right|$$

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))|ds \tag{1.32}$$

Agora, se $(s, y_1(s))$ e $(s, y_2(s))$ estão dentro do retângulo R onde sabemos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua, podemos usar a Desigualdade do Valor Médio (*vide*[7]) para concluir que existe $c = c(s)$ tal que $y_1(s) < c(s) < y_2(s)$ e

$$\left|\frac{f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))}{y_2(s) - y_1(s)}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(s, c(s))\right|$$

Então,

$$|f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial y}(s, c(s))\right| |y_2(s) - y_1(s)|.$$

como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em R, ela assume o seu máximo

$$A := m\acute{a}x._{(s,y)\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(s, y)\right|$$

ai podemos escrever

$$|f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| \leqslant A|y_2(s) - y_1(s)|.$$

Portanto, segue que

$$|y_2(t) - y_1(t)| = A \int_{t_0}^{t} |y_2(s) - y_1(s)| ds.$$

Defina agora

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} |y_2(s) - y_1(s)| ds.$$

Então,

$$y_0 = 0,$$

$$y(t) \geqslant 0, \quad para\ todo \quad t \geqslant t_0,$$

$$y^{'}(t) = |y_2(t) - y_1(t)|.$$

Em particular, segue que

$$y^{'}(t) - Ay(t) \leqslant 0$$

Multiplicando esta desigualdade pelo fator integrante e^{-At}, segue que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}y^{'}(t)\right) \leqslant 0.$$

Integrando de 0 a t e lembrando que $y(0) = 0$, obtemos:

$$e^{-At}y^{'}(t) \leqslant 0$$

para todo $t \geqslant 0$, o que implica

$$y(t) \leqslant 0, \quad para\ todo \quad t \geqslant t_0.$$

Concluímos que $y(t) \equiv 0$ para todo $t \geqslant t_0$, o que significa que $y_2(t) = y_1(t)$ para todo $t \geqslant t_0$. Analogamente, provamos o mesmo fato para todo $t \leqslant t_0$. $\square$

Se as hipóteses do teorema não são satisfeitas, a existência ou a unicidade da solução podem ser comprometidas.

1.7 Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Muitos foram os problemas que contribuiram para o desenvolvimento das equações diferenciais ordinárias. Nesta seção mostraremos alguns desses problemas que ajudaram a desenvolver a teoria de tais equações e suas respectivas modelagem.

1.7.1 Modelo de Malthus e Verhust no estudo populacional da cidade de Aracaju-Sergipe

Crescimento populacional da cidade de Aracaju segundo o Modelo de Malthus

O modelo de Thomas Robert Malthus (1766-1834), pressupõe que a taxa de crescimento de uma determinada população é proporcional ao seu tamanho, considerando um crescimento otimizado, sem guerras, fome ou qualquer variável, e além disso todos os indivíduos são "idênticos"e de mesmo comportamento. Seja $N = N(t)$ o número de habitantes de uma certa população após t anos. Considerando a população inicial $N(t_0) = N_0$ a modelagem do modelo de Malthus nos diz que:

$$\begin{cases} N^{'}(t) = kN \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \tag{1.33}$$

como vimos, o modelo de Malthus é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem. Devemos agora resolver a equação acima, e para isto usaremos o metódo da substituição. Seja $\mu(t) = e^{\int -kdt} = e^{-kt}$. Multiplicando a equação (1.33) por $\mu(t) = e^{-kt}$ obtemos,

$$e^{-kt} \cdot N^{'}(t) - e^{-kt}kN = 0,$$

essa equação é equivalente à:

$$\left[Ne^{-kt}\right]^{'} = 0,$$

integrando ambos os lados, obtemos:

$$e^{-kt} \cdot N(t) = C \Leftrightarrow N(t) = Ce^{kt},$$

substituindo $t = 0$ e $N(t_0) = N_0$ segue,

$$N_0 = Ce^{k \cdot 0} = C,$$

logo a solução geral é dada por:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}.$$

Malthus afirmava que a população mundial crescia em razão geométrica, e que os meios de alimentação cresciam em razão aritmética. Assim, a população teria um crescimento até um determinado limite de subsistência, e após esta seria controlada pela fome, epidemias, miséria, e outras situações. Por essa razão, o modelo de Malthus é considerado um modelo muito simples. O modelo de Malthus ficou conhecido como **modelo exponencial.**

Para exemplificar o modelo de Malthus, considere os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) sobre o crescimento populacional de Aracaju de 1960 à 2000

Ano	População Aracajuana
1960	115.713
1970	186.838
1980	299.422
1991	401.676
2000	461.083

Censo populacional do IBGE - 1960 à 2000

Observando a tabela, vamos calcular a taxa de crescimento segundo o modelo de Malthus dos 40 anos considerados, ou seja,

$$461.083 = 115.713e^{k(2000-1960)} \Rightarrow 3,984712176 = e^{40k}$$

aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade acima, vem,

$$1,382465083 = 40k \Rightarrow k \simeq 3\%,$$

logo, a população aracajuana segundo o modelo de Malthus, obedece a equação:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{0,03t}, \tag{1.34}$$

Desta forma, partindo do ano de 1960, podemos estimar através do modelo de Malthus, a população Aracajuana em 2010. De fato,

$$N(2010) = 115.713e^{0,03(2010-1960)}$$

$$N(2010) = 115.713e^{0,03(50)} \Rightarrow N(2010) \simeq 518.589.$$

Quando consultamos os dados do censo de 2010 pelo IBGE, verificamos que no referido ano a população era de 571.149 apresentando um erro aproximado de 10 %. O modelo de Malthus porém não é recomendado quando temos um população grande, pois se usarmos os mesmo dados para calcular a população sergipana que em 1960 era de 760.273, por exemplo, com a mesma taxa de crescimento anterior, teriamos:

$$N(2010) = 760.273e^{0,03(2010-1960)} \Rightarrow N(2010) \simeq 3.407.307.$$

No entanto, o IBGE divulgou que em 2010 a popualção Sergipana foi de 2.068.031 pessoas. O modelo de Malthus nos dá um erro maior que 1 milhão de pessoas. Notavelmente, o modelo de Malthus não é eficaz quando a população é muito grande. A seguir apresentaremos um outro modelo que nos permita calcular o crescimento populacional de maneira mais aproximada para grandes populações.

Crescimento populacional da cidade de Aracaju segundo o Modelo de Verhust

O modelo de crescimento exponencial de Malthus, descreve bem a população até um certo estágio. Quando o número de indivíduos cresce, existem variáveis a ser consideradas, haja vista que, a competição entre eles passa a ser determinante. Doenças, competição por comida e os fatores ambientais são bons exemplos disso. Desta forma, tende a ter uma diminuição na taxa de crescimento, que é preciso levar em conta, para obter um modelo que descreva mais fielmente a realidade. A taxa de crescimento será proposto por:

$$N^{'}(t) = f(N)N(t). \tag{1.35}$$

Nesta modelagem teremos uma função $f(N)$ de modo que, em geral, $f(N) \simeq k$ quando a população N for pequena e que $f(N)$ decresça quando a população N for suficientemente grande. Podemos pensar em várias funcões que descrevem tais condições, entretanto será conveniente pensar em uma função simples do tipo $f(N) = k - aN$ com $a > 0$. Substituindo na equação (1.35), temos:

$$N^{'}(t) = (k - aN) \cdot N(t)$$

$$N^{'}(t) = N(t) \cdot k - aN \cdot N(t)$$

e como $N(t) = N$, temos,

$$N^{'}(t) = N(t) \cdot k - aN^2 \tag{1.36}$$

Essa última equação é conhecida como modelo de Verhust, onde k e a são chamados de coeficientes vitais da população. Supondo $N(t_0) = N_0$, o problema de valor inicial é dado por,

$$\begin{cases} N^{'}(t) = N \cdot k - aN^2 \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \tag{1.37}$$

Precisamos agora resolver a equação diferencial de Verhust para verificar se esta realmente nos apresenta valores mais confiáveis quando a população tende a crescer. Resolveremos por separação de variáveis. Dividindo a equação por $N \cdot k - aN^2$, obtemos,

$$\frac{1}{N \cdot k - aN^2} N^{'}(t) = 1,$$

integrando, vem:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{N^{'}(t)}{Nk - aN^2} dt = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

Como $\dfrac{1}{N(k-aN)} = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{N} + \dfrac{a}{k-aN}\right)$, temos:

$$\frac{1}{k}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{N} + \frac{a}{k-aN}\right) dt = t - t_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\left[ln\frac{N}{N_0} - ln\left|\frac{k-aN}{k-aN_0}\right|\right] = t - t_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\left[ln\frac{N}{N_0} \cdot \left|\frac{k-aN_0}{k-aN}\right|\right] = t - t_0$$

$$\Rightarrow ln\left(\frac{N}{N_0} \cdot \left|\frac{k-aN_0}{k-aN}\right|\right) = k(t-t_0),$$

aplicando a exponencial, obtemos:

$$\frac{N}{N_0} \cdot \left|\frac{k-aN_0}{k-aN}\right| = e^{k(t-t_0)} \Rightarrow N(t) = \frac{N_0|k-aN|}{|k-aN_0|}e^{k(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{N_0k - aNN_0}{|k-aN_0|}e^{k(t-t_0)} \Rightarrow N(t) = \frac{N_0k}{k-aN_0}e^{k(t-t_0)} - \frac{aN_0N(t)}{k-aN_0}e^{k(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow N(t) + \frac{aN_0N(t)}{k-aN_0}e^{k(t-t_0)} = \frac{N_0k}{kaN_0}e^{k(t-t_0)} \Rightarrow N(t)\left(1 + \frac{aN_0}{k-aN_0}e^{k(t-t_0)}\right) = \frac{N_0k}{k-aN_0}e^{k(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow N(t)\left(\frac{k-aN_0+aN_0e^{k(t-t_0)}}{k-aN_0}\right) = \frac{N_0k}{k-aN_0}e^{k(t-t_0)} \Rightarrow N(t) = \frac{k-aN_0}{k-N_0(ae^{k(t-t_0)}-a)}\frac{N_0k}{k-aN_0}e^{k(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{N_0 k e^{k(t-t_0)}}{k - N_0 a e^{k(t-t_0)} + N_0 a} \Rightarrow N(t) = \frac{N_0 k}{(k - N_o a)e^{-k(t-t_0)} + N_0 a}.$$

Almejamos encontrar a população sergipana em 2010 e mostrar que o modelo de Verhust é mais eficaz. Para isso, precisamos encontrar o valor do parâmetro a com dois dados já estabelecidos. Usaremos os dados do IBGE que nos fornece que a população sergipana em 1960 era de 760.273 e que a população em 2000 era de 1.784.475. Isolando o parâmetro a na solução encontrada, vêm:

$$N(t)[(k - N_0 a)e^{-k(t-t_0)} + N_0 a] = N_0 k$$

$$\Rightarrow N(t)[ke^{-k(t-t_0)} - N_0 a e^{-k(t-t_0)} + N_0 a] = N_0 k$$

$$\Rightarrow N(t)ke^{-k(t-t_0)} - N(t)N_0 a e^{-k(t-t_0)} + N(t)N_0 a = N_0 k$$

$$\Rightarrow -N(t)N_0 a e^{-k(t-t_0)} + N(t)N_0 a = N_0 k - N(t)ke^{-k(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow a\left(-N(t)N_0 e^{-k(t-t_0)} + N(t)N_0\right) = N_0 k - N(t)ke^{-k(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow a = \frac{N_0 k - N(t)ke^{-k(t-t_0)}}{\left(-N(t)N_0 e^{-k(t-t_0)} + N(t)N_0\right)}.$$

Aplicando $N_0 = N(1960) = 760.273$, $N(t) = N(2000) = 1.784.475$ e usando novamente $k = 0,03$, temos,

$$a = \frac{760273 \cdot 0,03 - 1784475 \cdot 0,03 \cdot e^{-0,03\cdot(2000-1960)}}{\left(-1784475 \cdot 760273 \cdot e^{-0,03\cdot(2000-1960)} + 1784475 \cdot 760273\right)} \simeq 7 \cdot 10^{-9}$$

Com esses dados faremos agora o cálculo usando o modelo de Verhust para a população sergipana em 2010. Assim:

$$N(2010) = \frac{760273 \cdot 0,03}{\left[\left(0,03 - 760273 \cdot 7.10^{(-9)}\right) \cdot e^{-0,03\cdot(2010-1960)} + 760273 \cdot 7.10^{(-9)}\right]} \simeq 2.106.342$$

Note que, a população sergipana divulgada pelo IBGE em 2010 foi de 2.068.031 logo, o modelo de Verhust nos apresenta um erro de 38.311 que nos dá uma ótima aproximação com o valor encontrado.

Usando o modelo de Verhust iremos encontrar uma aproximação para a próxima divulgação do IBGE sobre a população sergipana em 2020 à partir de 1960. Desta forma, devemos considerar $N_0 = N(1960) = 760.273$, $k = 0,03$ e $a = 7 \cdot 10^{-9}$, teremos:

$$N(2020) = \frac{760273 \cdot 0,03}{\left[\left(0,03 - 760273 \cdot 7.10^{(-9)}\right) \cdot e^{-0,03\cdot(2020-1960)} + 760273 \cdot 7.10^{(-9)}\right]} \simeq 2.426.100$$

Se os dados se confirmarem, teremos um crescimento de 319.758 pessoas entre 2010 e 2020.

1.7.2 Lei de Resfriamento de Newton

Para compreender melhor a lei de resfriamento de Newton, nos recordemos do principal conceito da termodinâmica: Quando um corpo de temperatura T é exposto à um meio cuja temperatura é T_m (considerando que $T \neq T_m$), o corpo atinge o equilíbrio térmico com o meio, ou seja, o calor é transferido de onde há maior temperatura para onde a temperatura é menor. A lei de resfriamento de Newton nos diz que a taxa de variacão da temperatura $T^{'}(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura atual do corpo T e a temperatura constante do meio ambiente T_m.
Fazendo a modelagem do problema obtemos:

$$T^{'}(t) = -k(T - T_m)$$

O sinal negativo de k nos indica que há um resfriamento do corpo. Para resolver essa equação diferencial ordinária usaremos o método da separação, assim dividindo a equação por $(T - T_m)$, vem:

$$\frac{1}{T - T_m} \cdot T^{'}(t) = -k,$$

integrando em ambos os lados da igualdade em relação a t, obtemos:

$$\int \frac{1}{T - T_m} \cdot T^{'}(t)dt = \int -kdt$$

$$\Rightarrow \ln |T - T_m| = -kt + c,$$

aplicando a exponencial na igualdade acima, temos:

$$e^{\ln |T - T_m|} = e^{-kt+c}$$

$$\Rightarrow T - T_m = c_1 e^{-kt}$$

$$\Rightarrow T = c_1 e^{-kt} + T_m$$

Desta forma, a solução da lei de resfriamento de Newton, é dada por:

$$T = c_1 e^{-kt} + T_m$$

com $c_1 = e^c \in \mathbb{R}$. Para exemplificar a Lei de Resfriamento de Newton, vamos considerar o exemplo que segue.

Exemplo 1.25. *Um corpo é encontrado as 5 horas da manhã com uma temperatura de 30$^o C$ e as 7 horas apresenta uma temperatura de 20$^o C$. Moradores do local disseram que ouviram disparos de arma de fogo por volta das 2hs e também em torno de 4hs da madrugada. A polícia prendeu João e José, autores dos disparos respectivamente. Qual deles deve ser indiciado por assassinato se a temperatura ambiente no local do crime era de 15$^o C$?*

Solução: Primeiramente notamos que $T(0) = T = T_m + ce^{-k\cdot 0} \Rightarrow c = T - T_m$. Vamos encontrar o valor da constante k, sendo: $T = 20^{\text{o}}$, $t = 2$ horas, $T_m = 15^{\text{o}}$ e $T = 30^{\text{o}}$ Substituindo o valores na solução da lei de resfriamento de Newton, vem:

$$20 = 15 + (30 - 15)e^{-k\cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow 5 = 15e^{-k\cdot 2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} = e^{-2k}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade acima, temos:

$$ln \mid \frac{1}{3} \mid = -2k$$

$$\Rightarrow -1.098612289 = -2k$$

$$\Rightarrow k \simeq 0.54$$

Admitindo que a temperatura corporal normal seja de $37^{\text{o}}C$ no instante $t = 0$ temos:

$$30 = 15 + (37 - 15)e^{-0.54\cdot t}$$

$$\Leftrightarrow 15 = 22e^{-0.54t}$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{22} = e^{-0.54t}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade, temos:

$$-0.382992252 = -0.54t$$

$$\Rightarrow t \simeq 0.7 = 42min$$

Logo, a vítima foi encontrada as 5 horas e sua morte foi à 42 minutos atrás, ou seja as 4h18min, então José deve ser indiciado pelo assassinato.

1.7.3 Decaimento Radioativo (estudo da meia-vida)

O decaimento radioativo é um processo pelo qual o núcleo de um átomo instável perde energia, emitindo radiação ionizante. Tais radiações incluem, por exemplo, partículas alfa, partículas beta e raios gama. Um decaimento radioativo pode ocorrer como resultado de uma colisão de um feixe de prótons de alta energia(isto é, movendo-se a velocidades muito próximas a da luz) com um núcleo de átomo pesado. Isso é o que ocorre em todo acelerador de partículas, como, por exemplo, LHC-Large Hadron Collider-, localizado em Genebra, Suiça. Contudo, há substâncias, ditas radioativas que decai para Plutônio 239 com emissão de partículas beta (por isso, dizemos que se trata de um *decaimento beta*).

No iníco do século XX, E. Rutheford [4] verificou experimentalmente a validade da lei física hoje conhecida com **lei do decaimento radioativo**: A taxa $M^{'}(t)$ segundo o qual o núcleo de uma substância decai é diretamente proporcional a quantidade $M(t)$ de substância remanescente no instante t. Matematicamente, a expressão do decaimento radioativo é dado pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$M^{'}(t) = kM(t) \tag{1.38}$$

a equação acima é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear. Iremos resolver essa equação diferencial ordinária por separação de variáveis. Dividindo a equação (1.38) por $M(t) \neq 0$ teremos:

$$\frac{M^{'}(t)}{M(t)} = k$$

integrando ambos os lados da equação em relação a t temos,

$$\int \frac{M^{'}(t)}{M(t)} dt = \int k dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{M^{'}(t)}{M(t)} dt = kt + c.$$

mas $(\ln |M(t)|)^{'} = \frac{1}{M(t)} M^{'}(t)$ daí,

$$\ln |M(t)| = kt + c,$$

aplicando a exponencial em ambos os lados da igualdade acima, temos:

$$M(t) = e^{kt} \cdot e^{c},$$

[4] O químico e físico, Ernest Rutherford, começou sua carreira conceituando a meia-vida radioativa. Também é atribuído a ele as pesquisas no campo da radioatividade que levaram a descoberta das partículas, Alfa e Beta. Seus feitos nessa área foram reconhecidos, que, no ano de 1908, Rutherford foi digno de receber um prêmio Nobel.

fazendo $M(0) = M_0 \Rightarrow c = M_0$, logo a solução geral da equação diferencial ordinária do decaimento radiotivo é dado por:

$$M(t) = M_0 e^{kt} \tag{1.39}$$

onde M_0 é a massa inicial da substância.

Exemplo 1.26. *Glicose marcada com nuclídeos de carbono-11 é utilizada na medicina para se obter imagens tridimensionais do cérebro, por meio de tomografia de emissão de pósitrons. A desintegração do carbono-11 gera um pósitron, com tempo de meia-vida de 20,4 min, de acordo com a equação da reação nuclear:*

$$^{11}_{6}\mathrm{C} \rightarrow \; ^{11}_{5}\mathrm{B} + \; ^{0}_{1}\mathrm{e}$$

(pósitron)

A partir da injeção de glicose marcada com esse nuclídeo, o tempo de aquisição de uma imagem de tomografia é de cinco meias-vidas. Considerando que o medicamento contém 1,00 g do carbono-11, calcule a massa, em miligramas, do nuclídeo restante, após a aquisição da imagem.

Solução: Notamos que, o tempo de meia-vida, ou seja o tempo necessário para que a substância reduza sua massa inicial à metade, é de $t = 20,4min$. Substituindo em (1.39), temos, por um lado,

$$M_{20,4} = \frac{M_0}{2}$$

e por outro lado,

$$M_{20,4} = M_0 e^{(20,4)k},$$

deste modo, temos que,

$$e^{(20,4)k} = \frac{1}{2}, \tag{1.40}$$

o que resulta em,

$$(20,4)k = -\ln 2$$
$$\Rightarrow k = \frac{-\ln 2}{20,4},$$

com isso a solução geral do problema proposto será,

$$M(t) = M_0 e^{\frac{-\ln 2}{20,4}t}$$

pelo enunciado, queremos encontrar a massa do *carbono* $- 11$ após 5 meias-vidas. Assim, sendo $M_0 = 1g$, temos:

$$M(5 \cdot 20,4) = M(102) = 1 \cdot e^{\frac{-\ln 2}{20,4} \cdot 102}$$

$$\Rightarrow M(102) = 0,031250003,$$

ou seja, teremos em torno de 31,3 mg.

Capítulo 2

Equações Diferencias Ordinárias de Segunda Ordem

Neste capítulo, estudaremos as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares na forma

$$F(t, y, y^{'}, y^{''}) = 0$$

em geral na literatura escrevemos na forma,

$$a_1(t)y^{''} + a_2(t)y^{'} + a_3(t)y = a_4(t), \tag{2.1}$$

com $a_1(t) \neq 0$. Dividindo a equação acima por $a_1(t)$ e tomando $p(t) = \dfrac{a_2(t)}{a_1(t)}$, $q(t) = \dfrac{a_3(t)}{a_1(t)}$ e $r(t) = \dfrac{a_4(t)}{a_1(t)}$ teremos a forma mais usual,

$$y^{''} + p(t)y^{'} + q(t)y = r(t). \tag{2.2}$$

A forma (2.2) será a partir daqui a mais utilizada. Assim como fizemos com as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem podemos generalizar as equações (2.2) na forma $y^{''} = f(t, y(t), y^{'}(t))$ onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função definida em um aberto [1] $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, que será chamada de **forma normal de uma equação diferencial de segunda ordem**. A equação diferencial acima é chamada de Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem Linear. Se $r(t) = 0$ dizemos que a equação (2.2) é uma **Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem linear Homogênea**, caso contrário será dita **Não-Homogênea**. Em suma, nos preocuparemos em encontrar uma função y que satisfaça a equação (2.2) e como vimos essa função é chamada de solução da equação diferencial ordinária.

[1] Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto se todos os seus elementos são pontos no interior de S, ou seja, S é aberto se (e somente se) $S = intS$. Detalhes podem ser vistos no livro de Elon (ver bibliografia).

A seguir, faremos a definição de problema de valor de inicial e problema de valor de fronteira que será muito importante para a sequência da teoria, vejamos:

2.1 Equações Diferenciais de Ordem Superior

Definição 2.1. *Considere a Equação Diferencial de Ordem n*

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + ... + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t) = g(t)$$

ou

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y^{'} + a_0(t) = g(t) \tag{2.3}$$

Um problema de valor inicial (PVI) de ordem n é resolver a equação diferencial ordinária (2.3) sujeita as condições $y(t_0) = y_0$, $y^{'}(t_0) = y_1$,...,$y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

Obs 2.1. *Consideramos que estamos procurando y definida em um intervalo I.*

Teorema 2.1.1. *Sejam $a_n(t), a_{n-1}(t), ..., a_1(t), a_0(t)$ e $g(t)$ contínua em um intervalo I. Seja $a_n(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Seja $t_0 \in I$, então existe uma única solução $y(t)$ definida em I do PVI*

$$\begin{cases} a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y^{'} + a_0(t) = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y^{'}(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

A demonstração desse teorema pode ser visto no livro de Fábio Soares Pinheiro cuja referência bibliográfica se encontra em ([13]).

Definição 2.2. *(Problema de Valor de Fronteira) Considere a Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem*

$$a_2(t)y^{''} + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = g(t) \tag{2.4}$$

um problema como resolver (2.4) sujeita a $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$ é chamado Problema de Valor de fronteira (PVF). As condições $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$, são chamadas condições de fronteira.

Uma solução do PVF acima é uma função que satisfaz (2.4) em algum intervalo I que contém a e b, cujo gráfico passa pelos pontos (a, y_0) e (b, y_1).

Obs 2.2. *Condições de fronteira mais gerais são dadas por*

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y^{'}(a) = \gamma_1 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y^{'}(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

Exemplo 2.1. *Considere o problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Solução: Temos que $y = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$ satisfaz $y(0) = 0$ e $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ se,

$$\begin{cases} c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = 0 \\ c_1 \cos 2\pi + c_2 \operatorname{sen} 2\pi = 0 \end{cases}$$

daí teremos, $c_1 = 0$ e $c_2 \in \mathbb{R}$. Logo, $y = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$ é solução deste problema de valor de fronteira, para todo $c_2 \in \mathbb{R}$. Ou seja, existe uma quantidade infinita de soluções para este PVF.

A seguir, apresentaremos alguns tipos de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que podem ser reduzidas a uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, e que são resolvidas de maneira mais simples, e em seguida, apresentaremos métodos para solucionar equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com classificação específica. Apresentaremos também, algumas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem básicas, na qual resolveremos com métodos quantitativos para a obtenção de soluções.

2.2 Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem Redutível a uma de Primeira Ordem

Considere uma equação diferencial ordinária de segunda ordem na forma da equação (2.2). Alguns casos específicos dessa equação podem ser resolvidas com métodos utilizados nas seções anteriores. Vejamos :

Caso I: $\mathbf{p(t) \equiv q(t) \equiv 0}$.

Neste caso a equação diferencial ordinária de segunda ordem é da forma:

$$y'' = r(t) \tag{2.5}$$

A solução das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem do tipo (2.5) é da forma:

$$y(t) = \int \left(\int g(t)dt + c_1 t + c_2 \right) dt$$

onde $g(t) = \int r(t)dt$ e c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso II: $\mathbf{q(t) \equiv 0}$.

Nesse caso a equação diferencial (2.1) toma a forma:

$$y^{''} + p(t)y^{'} = r(t).$$

Para encontrar a solução desse caso específico, façamos a substituição $w = y^{'}$. Logo, (2.2) fica,

$$w^{'} + p(t)w = r(t)$$

que é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear cuja resolução pode ser vista pelos métodos descritos no Capítulo 1.

Exemplo 2.2. *Vamos resolver a equação* $y^{''} + y^{'} = 6$

Solução: Notamos que $q(t) = 0$. Fazendo $w = y^{'}$, substituindo na equação acima, temos,

$$w^{'} + w = 6.$$

Essa última igualdade é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear em w, com $p(t) = 1$. Como vimos nas equações diferenciais de primeira ordem linear, a equação acima possui solução:

$$w(t) = e^{-\int p(t)dt} \int \mu(t)q(t)dt + c.$$

logo,

$$w(t) = e^{-\int dt} \int k \cdot e^{\int dt}(t)q(t)dt + c$$

como $q(t) = 6$ na equação diferencial de segunda ordem dada, temos:

$$w(t) = e^{-\int dt} \int k \cdot e^{\int dt} 6dt + c \Rightarrow w(t) = e^{-t}6k \cdot (e^{t} + c) \Rightarrow w(t) = 6k + e^{-t}c.$$

Assim, temos que a solução da equação diferencial ordinária é:

$$y(t) = -e^{-t}.$$

2.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem Homogênea

Vimos na seção anterior que algumas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem podem ser resolvidas reduzindo-as a uma equação diferencial de primeira ordem. Nesta seção, iremos apresentar um método de resolução para as equações diferencias ordinárias homogêneas de segunda ordem, no entanto, iremos generalizar para uma equação diferencial ordinária linear homogênea de ordem n, a fim de generalizar os resultados. Uma equação diferencial ordinária de ordem n é da forma

$$a_n(t)y^n(t) + ... + a_1(t)y^{'}(t) + a_0y(t) = 0. \tag{2.6}$$

com $a_n(t) \neq 0$ e $a_i(t)$ funções contínuas, $\forall\ t \in I$, $i = 0, ..., n$. A seguir, iremos expor resultados e definições gerais imprescindíveis para o entendimento da teoria.

Teorema 2.3.1. *(Princípio da Superposição) Sejam $y_1, y_2, ...y_n$ soluções de (2.6) então:*

$$y(t) = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n,$$

também é solução de 2.6 com $c_1, c_2, ..., c_n$ constantes reais.

Demonstração. Seja $y(t) = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$. Substituindo em (2.6), obtemos,

$$a_n\left(c_1y_1^n + c_2y_2^n + ... + c_ny_n^n\right) + ... + a_1\left(c_1y_1^{'} + c_2y_2^{'} + ... + c_ny_n^{'}\right) + a_0\left(c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n\right) =$$

$$c_1\left[a_ny_1^n + a_{n-1}y_1^{n-1} + ... + a_0y_1\right] + ... + c_n\left[a_ny_n^n + ... + a_1y_n^{'} + a_0y_n\right] = 0$$

□

O teorema acima de maneira particular, nos garante que se tivermos duas soluções de uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem, a combinação linear entre elas é também solução da equação diferencial dada. Vamos exmplificar o princípio acima com o seguinte exemplo:

Exemplo 2.3. *Mostre que $y(t) = \cos bt + \operatorname{sen} bt$ é solução da equação geral do oscilador harmônico linear $y^{''} + b^2y = 0$*

Solução: A priori, mostremos que $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções da equação diferencial dada. De fato,

$$y_1(t) = \cos bt\ ;\ y_1^{'}(t) = -b \operatorname{sen} bt\ ;\ y_1^{''}(t) = -b^2 \cos bt.$$

substituindo na equação dada, temos:

$$-b^2 \cos bt + b^2 \cos bt = 0$$

analogamente, faz-se para y_2.

Logo, pelo princípio da superposição, $y(t) = c_1 \cos bt + c_2 \operatorname{sen} bt$ é solução de $y^{''} + b^2y = 0$.

Observação 2.3.1. *Da teoria de álgebra linear, sabemos que o conjunto das funções $\mathcal{F}(I)$ com as operações usuais é um espaço vetorial.*

Afirmamos que o subconjunto $S = \{y \in \mathcal{F}(I) / a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + ... + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(I)$. De fato:

i) A função $y(t) \equiv 0 \in S$, haja vista que:

$$a_n(t)0^n + ... + a_2(t)0^{''} + a_1(t)0^{'} + a_0(t)0 = 0.$$

ii) Se $y_1, y_2, ..., y_n \in S$, então $y_1 + y_2 + ... + y_n \in S$ pois:

$$a_n \frac{d}{dt^n}(y_1 + ... + y_n) + ... + a_1 \frac{d}{dt}(y_1 + ... + y_n) + a_0(y_1 + ... + y_n) =$$

$$(a_n y_1^n + ... + a_2 y_1^{''} + a_1 y_1^{'} + a_0 y_1) + ... + (a_n y_2^n + ... + a_2 y_2^{''} + a_1 y_2^{'} + a_0 y_2) + (a_n y_1^n + ... + a_2 y_1^{''} + a_1 y_1^{'} + a_0 y_1)$$

$$= 0 + ... + 0 + 0 + 0 = 0$$

iii) Dado $k \in \mathbb{R}$ e $y \in S$ então $ky \in S$, haja vista que:

$$a_n\,(ky)^n + ... + a_1\,(ky)^{'} + a_0(ky) = a_n k y^n + ... + a_1 k y^{'} + a_0 k y = k \underbrace{\left(a_n y^n + ... + a_1 y^{'} + a_0 y\right)}_{0} = 0$$

Ainda da teoria de álgebra linear, vamos agora nos recordar de uma definição muito importante que nos norteará, na busca por soluções de uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem.

Definição 2.3. *Sejam $f_1, f_2, ..., f_n$ funções definidas em um intervalo I . Dizemos que $f_1, f_2, ..., f_n$ são linearmente independente, se a equação:*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... c_n f_n = 0$$

é satisfeita somente quando $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$. Caso exista algum $c_i \neq 0$, dizemos que as funções $f_1, f_2, ..., f_n$ são linearmente dependentes.

Observação 2.3.2. *Mas em quais condições $f_1, f_2, ..., f_n$ são linearmente independentes? Para responder essa pergunta, sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, no qual,*

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_n f_n = 0.$$

Derivando n vezes a equação acima, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_n f_n = 0 \\ \alpha_1 f_1^{'} + \alpha_2 f_2^{'} + ... + \alpha_n f_n^{'} = 0 \\ \alpha_1 f_1^{''} + \alpha_2 f_2^{''} + ... + \alpha_n f_n^{''} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 f_1^{(n-1)} + \alpha_2 f_2^{(n-1)} + ... + \alpha_n f_n^{(n-1)} = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

que é equivalente a equação matricial representada por:

$$AX = B,$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & ... & f_n \\ f_1^{'} & f_2^{'} & ... & f_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & ... & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \; ; \; X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se a matriz A possui uma inversa A^{-1}, o sistema matricial admitirá solução única e podemos multiplicar ambos os lados da igualdade pela esquerda por tal inversa e solucionar a igualdade, assim:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

que é a solução da equação matricial. Mas uma matriz quadrada A de ordem n é dita invertível se $det(A) \neq 0$ e como queremos que as soluções $f_1, f_2, ..., f_n$ sejam linearmente independentes, o sistema (2.7) *terá solução única quando $det(A) \neq 0$, por isso almejamos valores tais que $det(A) = 0$.*

Definição 2.4. *Na teoria de equações diferenciais ordinárias, o determinante*

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & ... & f_n \\ f_1^{'} & f_2^{'} & ... & f_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & ... & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

é chamado de **Wronskiano**.

Vamos agora apresentar alguns resultados importantes que serão usados mais adiante.

Teorema 2.3.2. *Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ soluções de uma equação diferencial ordinária linear homogênea de ordem n*

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + ... + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = 0.$$

Deste modo, $y_1, y_2, ..., y_n$ são linearmente independentes se, e somente se, $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$; para todo $t \in I$.

Demonstração. Suponha que $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ para todo $t \in I$, então pelo método de Cramer,

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n = 0 \\ \alpha_1 y_1^{'} + \alpha_2 y_2^{'} + ... + \alpha_n y_n^{'} = 0 \\ \alpha_1 y_1^{''} + \alpha_2 y_2^{''} + ... + \alpha_n y_n^{''} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{n-1}(t_0) + \alpha_2 y_2^{n-1}(t_0) + ... + \alpha_n y_n^{n-1}(t_0) = 0 \end{array}\right. ,$$

tem única solução $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Por outro lado, suponha que $W(y_1, y_2, ..., y_n)(t_0) = 0$, para algum $t_0 \in I$. Daí,

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_1 y_1(t_0) + \alpha_2 y_2(t_0) + ... + \alpha_n y_n(t_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1^{'}(t_0) + \alpha_2 y_2^{'}(t_0) + ... + \alpha_n y_n^{'}(t_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1^{''}(t_0) + \alpha_2 y_2^{''}(t_0) + ... + \alpha_n y_n^{''}(t_0) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{array}\right. ,$$

tem infinitas soluções $c_1, c_2, ..., c_n$. Assim podemos encontrar $c_1, c_2, ..., c_n$ não todos nulos tais que $c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + ... + c_n y_n(t_0) \Rightarrow y_1, y_2, ..., y_n$ é linearmente dependente para algum $t_0 \in I$. $\square$

Exemplo 2.4. *Veja que as soluções $y_1 = \cos(\alpha t)$ e $y_2 = \operatorname{sen}(\alpha t)$ da equação diferencial ordinária $y^{''} + \alpha y = 0$ são linearmente independente, para todo $\alpha \neq 0$, pois sendo $y_1^{'} = -\alpha \operatorname{sen}(\alpha t)$ e $y_2^{'} = \alpha \cos(\alpha t)$, segue naturalmente que:*

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1^{'} & f_2^{'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\alpha t) & \operatorname{sen}(\alpha t) \\ -\alpha \operatorname{sen}(\alpha t) & \alpha \cos(\alpha t) \end{vmatrix} = \alpha \neq 0.$$

logo, o conjunto $S = \{y_1, y_2\}$ é linearmente independente.

Definição 2.5. ***(Conjunto Fundamental de Solução)*** *Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ soluções da equação diferencial ordinária linear homogênea*

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + ... + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = 0 \tag{2.8}$$

Se $\beta = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ é um conjunto linearmente independente, então β é chamado de conjunto fundamental de soluções.

Exemplo 2.5. *Considere uma equação diferencial ordinária de segunda ordem conforme 2.8. Verifique em quais condições as soluções $y_1 = e^{\alpha_1 t}$ e $y_2 = e^{\alpha_2 t}$ de uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem formam um conjunto fundamental de solução.*

Solução: As soluções $y_1 = e^{\alpha_1 t}$ e $y_2 = e^{\alpha_2 t}$ para serem fundamentais devem ser linearmente independente. Calcularemos então o $W = [y_1, y_2]$, assim:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 t} & e^{\alpha_2 t} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 t} & \alpha_2 e^{\alpha_2 t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{\alpha_1 t}\alpha_2 e^{(\alpha_2 t} - e^{\alpha_2 t}\alpha_1 e^{(\alpha_1 t}$$

$$= \alpha_2 e^{\alpha_1 t+\alpha_2 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t+\alpha_1 t}$$

$$= e^{(\alpha_1 t+\alpha_2 t)}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

logo, as soluções y_1 e y_2 formarão um conjunto fundamental de solução quando $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 \neq \alpha_2$.

Teorema 2.3.3. *Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ um conjunto fundamental de soluções da uma equação diferencial linear homogênea*

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + ... + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = 0,$$

para todo $t \in I$. A solução geral desta equação existe, é única e da forma:

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + ... + c_n y_n(t).$$

Demonstração. Faremos o caso para $n = 2$. Seja $\beta = \{y_1, y_2\}$ um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial ordinária,

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + ... + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = 0. \tag{2.9}$$

Seja y uma solução desta equação diferencial ordinária. Considere que, $y(t_0) = k_1$ e $y^{'}(t_0) = k_2$ com $t_0 \in I$ e considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ay_1(t_0) + by_2(t_0) = k_1 \\ ay_1^{'}(t_0) + by_2^{'}(t_0) = k_2, \end{cases}$$

com coeficientes a e b reais. Como $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1^{'}(t_0) & y_2^{'}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$, então existe um único $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que;

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = k_1 = y(t_0) \\ c_1 y_1^{'}(t_0) + c_2 y_2^{'}(t_0) = k_2 = y^{'}(t_0) \end{cases}.$$

Seja $z = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Pelo princípio da superposição, z é solução de (2.9) em I. Mas $z(t_0) = c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = k_1 = y(t_0)$ e $z^{'}(t_0) = c_1 y_1^{'}(t_0) + c_2 y_2^{'}(t_0) = k_2 = y^{'}(t_0)$. Ou seja, tanto z quanto y são soluções de (2.9), com as mesmas condições iniciais, logo, pelo teorema da existência e unicidade[2],

$$y = z = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

□

Observação 2.3.3. *Os resultados acima obtidos, nos ajudarão na busca por soluções de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, linear e homogênea.*

Observação 2.3.4. *Nos direcionando objetivamente ao Wronskiano, percebe-se que podemos encontrar o Wronskiano de duas soluções de uma equação diferencial ordinária sabendo apenas os coeficientes atribuídos a equação diferencial ordinária definida. Para provar isso, vamos exibir a proposição a seguir que tem como grande inspirador o notável matemático **Niels Abel** (1802-1829)*[3].

Proposição 2.1. *Sejam y_1 e y_2 duas soluções para a equação diferencial ordinária*

$$a_2(t)y^{''} + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = 0,$$

em que $a_2(t), a_1(t)$ e $a_0(t)$ são contínuas em um intervalo I e a_2 é uma função não-nula. São verdadeiras as seguintes afirmações:

a) Se $W[y_1, y_2]$ é o Wronskiano de y_1 e y_2, então:

$$a_2(t)\frac{dW}{dt} + a_1(t)W = 0 \tag{2.10}$$

b) O Wronskiano independe de encontrar os valores de y_1 e y_2, isto é,

$$W = ce^{-\int [a_1(t)/a_2(t)]dt}$$

*em que c é uma constante. Tal expressão é chamada de **fórmula de Abel**.*

[2] Dizemos que a função f é *Lipschitziana* em W, relativamente a segunda variável, ou simplesmente *Lipschitziana*, se existe uma constante k tal que,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x - y|$$

para todos $(t,x),(t,y) \in W$. Dizemos que k é uma constante de *Lipschitz* para f; quando queremos explicar a constante; dizemos que f é *k-Lipschitziana*.

(Teorema de Picard ou Teorema da Existência e Unicidade de Soluções): Seja $f : W \to \mathbb{R}^n$ contínua e *localmente Lipschitziana* no aberto $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Então para cada ponto $(t_0, y_0) \in W$, existem um número $\alpha > 0$ e uma única solução de $y^{'} = f(t,y)$ definida no intervalo $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

[3]**Niels Henrik Abel** foi um matemático norueguês cuja morte trágica aos 26 anos, devida à tuberculose, representou uma perda inestimável para a matemática. Seu grande feito foi a solução para um problema que confundiu os matemáticos por séculos: ele mostrou que uma equação polinomial geral para quinta ordem não pode ser resolvida algebricamente, isto é, em termos de radicais. Contemporâneo de Abel, o francês Evariste Galois, então provou que era impossível resolver qualquer equação geral para grau maior que quatro algebricamente.

c) Pela fórmula de Abel,

$$W = ce^{-\int_{t_0}^{t}[a_1(t)/a_2(t)]dt}$$

para t_0 em I, temos que:

$$W[y_1, y_2] = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}[a_1(t)/a_2(t)dt}.$$

d) Se $W(t_0) = 0$, então $W = 0$ para todo t em I, enquanto, se $W(t_0) \neq 0$, então $W \neq 0$ para todo t no intervalo.

Demonstração. a) Da definição de Wroskinano, temos:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(t) & y(t) \\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2^{'}(t) - y_2(t)y_1^{'}(t)$$

Derivando W em relação a t usando a regra do produto, temos:

$$W^{'}[y_1, y_2] = y_1^{'}(t)y_2^{'}(t) + y_1(t)y_2^{''}(t) - [y_2^{'}(t)y_1^{'}(t) + y_2(t)y_1^{''}(t)]$$

$$\Rightarrow W^{'}[y_1, y_2] = y_1^{'}(t)y_2^{'}(t) + y_1(t)y_2^{''}(t) - y_2^{'}(t)y_1^{'}(t) - y_2(t)y_1^{''}(t)$$

$$\Rightarrow W^{'}[y_1, y_2] = y_1(t)y_2^{''}(t) - y_2(t)y_1^{''}(t)$$

Substituindo em (2.10), temos:

$$a_2(t)[y_1(t)y_2^{''}(t) - y_2(t)y_1^{''}(t)] + a_1(t)[y_1(t)y_2^{'}(t) - y_2(t)y_1^{'}(t)] =$$

$$a_2(t)y_1(t)y_2^{''}(t) - a_2(t)y_2(t)y_1^{''}(t) + a_1(t)y_1(t)y_2^{'}(t) - a_1(t)y_2(t)y_1^{'}(t) =$$

$$y_1(t)[a_2(t)y_2^{''}(t) + a_1(t)y_2^{'}(t)] - y_2(t)[a_2(t)y_1^{''}(t) + a_1(t)y_1^{'}(t)] \tag{2.11}$$

Como $y_1(t)$ é solução de $a_2(t)y_1^{''} + a_1(t)y_1^{'} + a_0y_1 = 0$, então:

$$a_2(t)y_1^{''} + a_1(t)y_1^{'} = -a_0y_1.$$

Do mesmo modo, $y_2(t)$ é solução de $a_2(t)y_2^{''} + a_1(t)y_2^{'} + a_0(t)y_2 = 0$, então:

$$a_2(t)y_2^{''} + a_1(t)y_2^{'} = -a_0(t)y_2$$

Substituindo em (2.11), vêm:

$$y_1(t)(-a_0(t)y_2) - y_2(t)(-a_0(t)y_1) =$$

$$-y_1(t)a_0(t)y_2 + y_2(t)a_0(t)y_1 = 0$$

b) Note que a equação 2.10 é uma equação diferencial ordinária, linear, de primeira ordem. Resolvendo pelo método de separação de variáveis, temos:

$$a_2(t)W^{'} = -a_1(t)W$$

Sendo $W \neq 0$, temos:

$$\frac{W^{'}}{W} = -\frac{a_1(t)}{a_2(t)}$$

integrando ambos os lados da equação em relação a t, teremos:

$$\int \frac{W^{'}}{W} dt = \int -\frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt$$

$$\Rightarrow \ln|W| + b = \int -\frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt$$

$$\Rightarrow \ln|W| = \int -\frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt - b$$

Com $b \in \mathbb{R}$. Aplicando a exponencial em ambos os lados da igualdade acima, vêm:

$$e^{\ln|W|} = e^{\int -\frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt - b}$$

$$W = e^{\int -\frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt} \cdot e^{-b}$$

Como $e^{-b} = c$, com $c \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$W = c \cdot e^{\int -\frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt}$$

c) Para $t = t_0 \in I$, temos $W[y_1(t_0), y_2(t_{0)}] = W(t_0)$, então:

$$W(t_0) = W[y_1(t_0), y_2(t_{0))}] = ce^{-\int_{t_0}^{t_0}[a_1(t)/a_2(t)]dt} = c$$

portanto, $\forall\ t \in I$,

$$W[y_1, y_2] = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}[a_1(t)/a_2(t)]dt}$$

d) Se $W(t_0) = 0$, temos pelo item anterior que:

$$W[y_1, y_2] = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}[a_1(t)/a_2(t)]dt} = 0 \cdot e^{-\int_{t_0}^{t}[a_1(t)/a_2(t)]dt} = 0.$$

De maneira análogo, se $W(t_0) \neq 0$, temos:

$$W[y_1, y_2] = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}[a_1(t)/a_2(t)]dt} \neq 0$$

pois, $e^{-\int_{t_0}^{t}[a_1(t)/a_2(t)]dt} \neq 0$, $\forall\ t \in I$.

$\square$

Para solucionar a equação, como vimos, precisamos geralmente encontrar duas soluções fundamentais y_1 e y_2 da equação diferencial ordinária dada e, se o $W[y_1, y_2] \neq 0$, então a combinação linear entre elas será a solução geral da homogênea dada. A seguir apresentaremos alguns métodos para obtenção de soluções de equações diferenciais ordinárias homogêneas de ordem $n \geqslant 2$ com coeficientes constantes e mais, veremos também como obter soluções de equações diferenciais ordinárias de ordem $n \geqslant 2$ com coeficientes variáveis. A partir de agora também, usaremos $y_i(t) = y_i$, a menos de ocorrer alguma ambiguidade.

2.4 Método de D'alembert para obter outra solução de uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem (Redução de Ordem)

Consideramos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem linear homogênea:

$$y^{''} + p(t)y^{'} + q(t)y = 0 \tag{2.12}$$

e uma solução $y_1(t)$ qualquer. O método de D'alembert [4]. consiste em construir uma nova solução através da multiplicação da solução conhecida por uma função incógnita $v = v(t)$. Vejamos a lógica da construção desta nova solução. A priori, escreva,

$$y_2(t) = v(t)y_1(t)$$

Derivando a equação acima obtemos,

$$y_2^{'}(t) = vy_1^{'}(t) - v^{'}y_1(t) \quad e \quad y_2^{''}(t) = vy_1^{''}(t) + 2y_1^{'}(t)v^{'} + y_1(t)v^{''}$$

Notoriamente, $y_2(t)$ é solução da equação diferencial homogênena linear, se e somente se,

$$vy_1^{''}(t) + 2y_1^{'}(t)v^{'} + y_1(t)v^{''} + p(t)\left[vy_1^{'}(t) - v^{'}y_1(t)\right] + q(x)vy_1(t)$$
$$= y_1(t)v^{''} + v^{'}(2y_1^{'}(t) + p(t)y_1) + v(y_1^{''}(t) + p(t)y_1^{'}(t) + q(t)y_1(t)) = 0.$$

Mas como por hipótese $y_1(t)$ é solução da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, então, ficaremos com a equação simplificada

$$y_1(t)v^{''} + v^{'}(2y_1^{'}(t) + p(t)y_1) = 0 \tag{2.13}$$

[4]Matemático e filósofo francês, Jean Le Rond d'Alembert nasceu em 1717, em Paris na França, e morreu em 1783, na mesma cidade. Em 1752 estabeleceu equações acerca do movimento dos fluidos. Descobriu a solução de uma equação de derivadas parciais e propôs um método de resolução de sistemas de equações diferenciais. As pesquisas no campo da mecânica e da astronomia representaram um contributo fundamental para o avanço da ciência.

Agora defina $w(t) = v^{'}(t)$, assim a equação (2.13) pode ser reescrita como,

$$y_1(t)w^{'} + (2y_1^{'}(t) + p(t)y_1)w = 0$$

a equação acima é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem homogênea. Dividindo a equação por $y_1(t)$ obtemos,

$$w^{'} + \frac{(2y_1^{'}(t) + p(t)y_1)w}{y_1(t)} = 0,$$

equivalentemente,

$$\frac{w^{'}}{w} = -\frac{2y_1^{'}}{y_1(t)} - p(t).$$

Integrando ambos os lados em relação a t, temos,

$$\ln|w| = -2\ln|y_1(t)| - \int p(t)dt + C$$

reorganizando a expressão e aplicando a propriedade dos logaritmos, chegamos à:

$$\ln|wy_1(t)^2| = -\int p(t)dt + C$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados da igualdade, conseguimos:

$$w(t) = \frac{e^{-\int p(t)dt + C}}{y_1(t)^2} = \frac{e^{-\int p(t)dt} \cdot e^C}{y_1(t)^2}$$

fazendo $e^C = D$, com $D \in \mathbb{R}$, teremos,

$$w(t) = D\frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}.$$

Mas $w(t) = v^{'}(t)$, e resolvendo a equação para $v(t)$, teremos:

$$v(t) = D\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}dt + D_2$$

Vamos agora substituir $v(t)$ na equação $y_2(t) = v(t)y_1(t)$. Desta forma teremos:

$$y_2(t) = \left(D\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}dt + D_2\right)y_1(t)$$

para simplificar nosso resultado, vamos considerar $D_2 = 0$ e $D = 1$, logo, construimos a solução,

$$y_2(t) = y_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}dt$$

Nos resta agora, mostrar que a solução encontrada acima e a solução y_1 formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênea. Veja que,

$$W[y_1, y_2] = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_1(t)\int \dfrac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}dt \\ y_1^{'}(t) & y_1^{'}(t)\int \dfrac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}dt + \dfrac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)} \end{bmatrix} = e^{-\int p(t)dt} \neq 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O método de D'alembert, como vimos, nos garante que quando temos uma solução $y_1(t)$ da equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênea, a outra solução fundamental é dada por:

$$y_2(t) = y_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}dt. \tag{2.14}$$

Vamos exemplificar o método de D'alembert com a exemplo a seguir.

Exemplo 2.6. *Encontre a outra solução $y_2(t)$ da equação diferencial ordinária $t^2y^{''} - 3ty^{'} + 5y = 0$ sabendo que $y_1(t) = t^2\cos(\ln t)$ é solução da equação dada.*

Solução: Dividindo a equação por $t^2 \neq 0$, temos:

$$y^{''} - \frac{3}{t}y^{'} + \frac{5}{t^2}y = 0$$

Note que na equação acima $p(t) = -\frac{3}{t}$ e pela equação (2.14), $y_2(t)$ é dado por:

$$y_2(t) = t^2\cos(\ln t)\cdot\int \frac{e^{-\int -\frac{3}{t}}}{[t^2\cos(\ln t)]^2}dt$$

$$\Rightarrow y_2(t) = t^2\cos(\ln t)\cdot\int \frac{e^{3\ln|t|}}{t^4\cos^2(\ln t)}dt$$

$$\Rightarrow y_2(t) = t^2\cos(\ln t)\cdot\int \frac{1}{t\cos^2(\ln t)}dt$$

como $\sec^2 t = 1 + \operatorname{tg}^2 t$, vêm:

$$y_2(t) = t^2\cos(\ln t)\cdot\left[\int \frac{1}{t}dt + \int \frac{\operatorname{tg}^2(\ln t)}{t}dt\right]$$

$$\Rightarrow y_2(t) = t^2\cos(\ln t)\cdot\left[\ln|t| + \int \frac{\operatorname{tg}^2(\ln t)}{t}dt\right]$$

fazendo $u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t}dt$. Assim, pela regra da substituição, temos:

$$y_2(t) = t^2\cos(\ln t)\cdot\left[\ln|t| + \int \operatorname{tg}^2 u du\right]$$

$$\Rightarrow y_2(t) = t^2\cos(\ln t)\cdot[\ln|t| + (\operatorname{tg} u - u)]$$

$$\Rightarrow y_2(t) = t^2\cos(\ln t)\cdot[\ln|t| + (\operatorname{tg}\ln t - \ln t)]$$

$$\Rightarrow y_2(t) = t^2\cos(\ln t)\operatorname{tg}(\ln t)$$

$$\Rightarrow y_2(t) = t^2\operatorname{sen}(\ln t).$$

2.5 Equações Diferenciais Ordinárias com Coeficientes Constantes

Vamos considerar agora as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares da seguinte forma:

$$ay^{''} + by^{'} + cy = 0 \tag{2.15}$$

com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, isto é, equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. Vamos assumir que a função $y(t) = e^{rt}$ seja solução de (2.15), sendo r um valor constante. Assim:

$$\begin{cases} y^{'}(t) = e^{rt}r \\ y^{''}(t) = e^{rt}r \cdot r = r^2e^{rt} \end{cases}. \tag{2.16}$$

Substituindo 2.16 em (2.15) obtemos:

$$ar^2e^{rt} + be^{rt}r + ce^{rt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{rt}\left(ar^2 + br + c\right) = 0$$

como $e^{rt} \neq 0$, a equação acima será satisfeita quando:

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.17}$$

a equação (2.17) damos o nome de **equação auxiliar** [5] de (2.15). Por se tratar de uma equação do segundo grau, sabemos que podemos ter duas raízes. Chamaremos o conjunto solução $S = \left\{e^{r_1t}, e^{r_2t}\right\}$ de 2.15 de conjunto fundamental. Vamos agora analisar a quantidade de raízes através do discriminate $\triangle$ dessa equação:

Caso I: A equação auxiliar possui duas raízes reais diferentes.

Se $\triangle = b^2 - 4ac > 0$, então as soluções reais diferentes r_1 e r_2 são da forma:

$$y_1(t) = e^{r_1t} \quad e \quad y_2(t) = e^{r_2t}$$

Devemos mostrar agora que essas duas soluções são linearmente independente e consequentemente são soluções fundamentais de (2.15). Para isso, vamos calcular o Wronskiano das soluções encontradas

$$W[y_1, y_2] = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{bmatrix} = e^{(r_1+r_2)t}r_2 - e^{(r_1+r_2)t}r_1 = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t} \neq 0$$

[5] Em quase todas as referências bibliográficas a equação (2.17) é também chamada equação característica de (2.15), desta forma iremos nos referir em alguns momentos com essa denominação.

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, as soluções y_1 e y_2 são linearmente independentes e portanto a solução geral será dadao por:

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Exemplo 2.7. *Vamos encontrar a solução da equação* $2y^{''} + 5y^{'} + 2y = 0$

Solução: A equação auxiliar da equação diferencial dada é:

$$2r^2 + 5r + 2 = 0$$

O discrimante $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$. Assim as raízes da equação são:

$$r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

Logo, $r_1 = 2$ e $r_2 = \frac{1}{2}$. Portanto a solução da equação diferencial ordinária é dada por:

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{\left(\frac{1}{2} \cdot t\right)} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{\frac{t}{2}}$$

com c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso II: A equação auxiliar possui duas raízes reais e iguais.

Consideremos inicialmente a equação (2.15)

$$ay^{''} + by^{'} + cy = 0$$

como $a \neq 0$, podemos dividir a equação acima por a. Assim, teremos:

$$y^{''} + \frac{b}{a} y^{'} + \frac{c}{a} y = 0$$

cuja equação auxiliar é,

$$r^2 + \frac{b}{a} r + \frac{c}{a} = 0.$$

Sendo $\triangle = b^2 - 4ac = 0$, a solução da equação auxiliar é:

$$r_1 = r_2 = \frac{\frac{-b}{a} \pm 0}{2} \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

logo, $e^{r_1 t}$ é uma das soluções do conjunto fundamental de soluções. Precisamos agora encontrar uma outra solução, linearmente independente para a equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem (2.15). Para isso, usaremos o método de D'alembert, que como vimos nos fornece a segunda raiz através da equação (2.14). Substituindo a solução encontrada, temos:

$$y_2(t) = e^{r_1 t}\int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dt}}{\left(e^{r_1 t}\right)^2}dt$$

$$\Rightarrow y_2(t) = e^{r_1 t}\int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dt}}{e^{2r_1 t}}dt$$

notamos agora que $\dfrac{b}{a} = -2r_1$, assim,

$$y_2(t) = e^{r_1 t}\int \frac{e^{\int 2r_1 dt}}{e^{2r_1 t}}dt \Rightarrow y_2(t) = e^{r_1 t}\int \frac{e^{2r_1 t}}{e^{2r_1 t}}dt \Rightarrow y_2(t) = te^{r_1 t}$$

Desta forma, a solução geral da equação diferencial ordinária em (2.15) será dada por,

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$$

Exemplo 2.8. *Vamos resolver a equação* $4y^{''} - 4y^{'} - y = 0$

Solução: A equação auxiliar da equação diferencial dada é:

$$2r^2 - 4r - 1 = 0$$

O discrimante $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 4\cdot(-1) = 16 - 16 = 0$. Assim as raízes da equação são:

$$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)\pm\sqrt{0}}{2\cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Portanto a solução da equação diferencial ordinária é dada por:

$$y(t) = c_1 e^{\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)} + c_2 t e^{\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)} = e^{\frac{t}{2}}(c_1 + tc_2)$$

com c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso III: A equação auxiliar possui duas raízes complexas.

Se $\triangle = b^2 - 4ac < 0$, então a equação auxiliar terá duas soluções complexas $r_1 = \alpha + \beta i$ e o seu conjugado $r_2 = \alpha - \beta i$. Como $r_1 \neq r_2$ a solução fundamental será do tipo $S = \left\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\right\}$. Perceba que,

$$e^{r_1 t} = e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}e^{\beta i t} \tag{2.18}$$

$$e^{r_2 t} = e^{(\alpha-\beta i)t} = e^{\alpha t}e^{(-\beta i t)} \tag{2.19}$$

mas a fórmula de Euler garante que,

$$e^{r_1 t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}(\beta t)\right) \quad e \quad e^{r_2 t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) - i\,\mathrm{sen}(\beta t)\right).$$

e como sabemos, essas soluções são linearmente independentes, e consequentemente a combinação linear entre elas também é solução equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênena, logo,

$$e^{r_1 t} + e^{r_2 t} = 2e^{\alpha t}\cos(\beta t),$$

e mais,

$$e^{r_1 t} - e^{r_2 t} = 2ie^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$$

ou seja,

$$\frac{e^{r_1 t} + e^{r_2 t}}{2} = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad e \qquad \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2i} = e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t).$$

Consideremos agora $y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ e $y_2(t) = e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$. Como $W[y_1, y_2] \neq 0$, então y_1 e y_2 são linearmente independentes e consequentemente são soluções fundamentais. Assim a solução geral da equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênena será:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t),$$

para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.9. ***(Oscilador Harmônico Simples)*** *O oscilador harmônico simples é um dos primeiros sistemas que estudamos na Mecânica Clássica e também um dos mais importantes. Fisicamente, ele serve de base para a descrição de um grande número de fenômenos periódicos, tais como o comportamento de átomos e moléculas e a propagação de ondas mecânicas e eletromagnéticas. Considere então, uma massa m presa a uma mola de constante elástica k, como mostra a figura abaixo:*

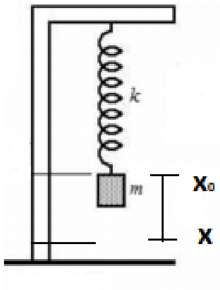


Figura 2.1: Sistema massa-mola.

A deformação causada pela corpo na mola é dada pela lei de Hooke, calculado por

$$F = -kx. \tag{2.20}$$

Por outro lado, o corpo sofre a influência das leis gravitacionais, que segundo a lei de Newton nos diz que:

$$F = mx'', \tag{2.21}$$

das equações (2.20) *e* (2.21) *obtemos,*

$$mx'' = -kx$$

dividindo os dois membros da equações por $m \neq 0$*, vêm:*

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0. \tag{2.22}$$

Devemos agora encontrar uma solução para equação (2.22). A equação auxiliar dessa equação é:

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

Calculamos primeiramente o discriminante Δ *dessa equação:*

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{k}{m} = -\frac{4k}{m} < 0$$

logo, a equação auxiliar possui duas raízes complexas, dada por:

$$r = \frac{-0 \pm \sqrt{\frac{-4k}{m}}}{2 \cdot 1} = \pm\frac{\sqrt{\frac{4ki^2}{m}}}{2} = \pm\frac{\frac{2i\sqrt{k}}{\sqrt{m}}}{2} = \pm\frac{2i\sqrt{k}}{2\sqrt{m}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$$

ou seja: $r_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} i$ *e* $r_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}} i$.

Como vimos, quando as raízes do polinômio característico de uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes são complexas, as soluções fundamentais $y_1(t)$ *e* $y_2(t)$ *são dadas por:*

$$x_1(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

$$x_2(t) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

portanto, a solução geral da equação diferencial ordinária de segunda ordem homogênea do oscilador harmônico simples é:

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

com c_1 *e* $c_2 \in \mathbb{R}$.

2.6 Equações Diferenciais Ordinárias com Coeficientes Constantes: Caso geral.

Na seção anterior, vimos como encontrar soluções das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes. Nesta seção iremos generalizar os casos anteriores, ampliando os resultados obtidos. Vamos considerar agora as equações diferenciais ordinárias de ordem $n \geq 2$ lineares da seguinte forma:

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + ... + a_1 y^{'} + a_0 y = 0 \tag{2.23}$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, isto é, equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. Vamos adotar que a função $y(t) = e^{rt}$ seja solução de (2.23), sendo r um valor constante. Assim:

$$y^{'}(t) = e^{rt} r,$$

$$y^{''}(t) = e^{rt} r \cdot r = r^2 e^{rt},$$

$$\vdots$$

$$y^n(t) = r^n e^{rt}$$

Substituindo em (2.23) obtemos,

$$a_n r^n e^{rt} + ... + a_1 e^{rt} r + a_0 e^{rt} = 0 \Leftrightarrow e^{rt} \left(a_n r^n + ... + a_1 r + a_0\right) = 0$$

novamente, como $e^{rt} \neq 0$, a equação acima será satisfeita quando o polinômio

$$P(r) = a_n r^n + ... + a_1 r + a_0 = 0 \tag{2.24}$$

que é a equação auxiliar de 2.23.

Observação 2.6.1. *Através das raízes de uma equação auxiliar podemos encontrar a equação diferencial ordinária correspondente.*

Para exemplificar a observação (2.6.1), considere s raízes de uma equação auxiliar são $m_1 = -\frac{1}{2}$,$m_2 = 3 + i$ e $m_3 = 3 - i$. Como a equação possui três raízes distintas $m_1 \neq m_2 \neq m_3$, temos que a equação auxiliar é dado por um polinômio $Q(m)$ de grau 3. Pelo teorema fundamental da álgebra, o polinômio $Q(m)$ pode ser decomposto como:

$$Q(m) = a(m - m_1)(m - m_2)(m - m_3),$$

com $a \in \mathbb{R}$. Substituindo $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = 3 + i$ e $m_3 = 3 - i$, temos:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= a\left(m - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)(m - (3 + i))(m - (3 - i)) \\
\Rightarrow Q(m) &= a\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m^2 - 3m + mi - 3m + 9 - 3i - mi + 3i - i^2\right) \\
\Rightarrow Q(m) &= a\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m^2 - 6m + 10\right) \\
\Rightarrow Q(m) &= a\left(m^3 - 6m^2 + 10m + \frac{m^2}{2} - 3m + 5\right) \\
\Rightarrow Q(m) &= a\left(2m^3 - 12m^2 + 20m + m^2 - 6m + 10\right) \\
\Rightarrow Q(m) &= a\left(2m^3 - 11m^2 + 14m + 10\right)
\end{aligned}$$

Portanto, $Q(m)$ é a equação auxiliar da equação diferencial ordinária $y(t) = 2ay^{'''} - 11ay^{''} + 14ay^{'} + 10ay$.

Nos concentramos agora em encontrar raízes de (2.24) e sabemos da álgebra que este possui n raízes (em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Vamos novamente separar em casos:

Caso 1: As raízes do polinômio são todas distintas

Se $P(r)$ possui n raízes distintas $r_1, r_2, ..., r_n$, então o conjunto fundamental de soluções será $S = \left\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, ..., e^{r_n t}\right\}$ e a solução geral será dado por:

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + ... + c_n e^{r_n t}.$$

Exemplo 2.10. *Vamos resolver a equação diferencial ordinária* $y^{'''} - 7y^{'} + 6y = 0$.

Solução: A equação auxiliar associada a equação diferencial dada é,

$$P(r) = r^3 - 7r + 6 = 0$$

Pelo teste da raiz racional, as possíveis raízes dessa equação são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Notamos que $r_1 = 1$ é raíz da equação, pois $P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$. Desta forma, pelo teorema fundamental da álgebra, o polinômio $P(r)$ se escreve como $P(r) = (r-1).Q(r)$. Devemos então encontrar as raízes do polinômio $Q(r)$ e para isso usaremos o dispositivo de Briot-Ruffini,

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & \text{-}7 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & \text{-}6 & 0 \end{array}$$

Logo, as outras raízes são obtidas através do polinômio

$$Q(r) = r^2 + r - 6.$$

Fazendo $Q(r) = 0$ na equação acima, o discriminante vale $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$. Calculando as raízes obtemos,

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Logo, $r_2 = 2$ e $r_3 = -3$. Portanto, a solução geral da equação diferencial ordinária dada é:

$$y(t) = c_1 e^{(t)} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{(-3t)}$$

com c_1, c_2 e $c_3 \in \mathbb{R}$.

Caso 2: O polinômio possui $m \leqslant n$ raízes iguais

Se $P(r)$ possui m raízes iguais, com $m \leqslant n$, então o conjunto fundamental de soluções será $S = \left\{ e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, ..., t^{n-1}e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, ..., e^{r_{n-m} t} \right\}$ e portanto a solução geral será dada por,

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_1 t e^{r_1 t} + ... + c_{m-1} t^{m-1} e^{r_1 t} + c_{m+1} e^{r_2 t} + ... + c_n e^{(n-m+1)t}$$

Exemplo 2.11. *Vamos encontrar a solução da equação diferencial ordinária* $y^{'''} - y^{''} - 8y^{'} + 12 = 0$

Solução: O polinômio característico $P(r)$ é dado por:

$$P(r) = r^3 - r^2 - 8r + 12.$$

Novamente pelo teste da raíz racional, as possíveis raízes são $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$. Notamos então que, $P(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 - 8.(-3) + 12 = 0$ é uma raiz de $P(r)$, e pelo teorema fundamental da álgebra, $P(r)$ se escreve como $P(r) = (r - (-3)).Q(r) = (r+3).Q(r)$. Devemos então encontrar as raízes do polinômio $Q(r)$ e para isso usaremos novamente o dispositivo de Briot-Ruffini,

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 1 & -1 & -8 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

Logo, as outras raízes são obtidas através do polinômio

$$Q(r) = r^2 - 4r + 4,$$

cujas raízes são $r_2 = r_3 = 2$. Logo, a solução geral da equação diferencial ordinária será:

$$y = e^{2t}(c_1 + c_2 t) + c_3 e^{(-3t)}.$$

Caso 3: O polinômio possui raízes complexas.

Por fim, se $P(r)$ possui raíz complexa $m_1 = \alpha + \beta i$ com multiplicidade k, o conjugado desta $m_2 = \alpha - \beta i$ também é raiz de $P(r)$ com multiplicidade k, desta forma as soluções complexas serão da forma:

$$e^{(\alpha+\beta i)t}, te^{(\alpha+\beta i)t}, ..., t^{k-1}e^{(\alpha+\beta i)t}, e^{(\alpha-\beta i)t}, te^{(\alpha-\beta i)t}, ..., t^{k-1}e^{(\alpha-\beta i)t}$$

Considerando o grau de $P(r) = n$ com $n > k$ e as demais raízes reais e distintas, a solução geral será dada por:

$$y(t) = \left(e^{(\alpha+\beta i)t} + te^{(\alpha+\beta i)t} + ... + t^{k-1}e^{(\alpha+\beta i)t}\right) + \left(e^{(\alpha-\beta i)t} + te^{(\alpha-\beta i)t} + ... + t^{k-1}e^{(\alpha-\beta i)t}\right) + y(w)$$

Onde $y(w)$ é a solução do polinômio com raízes distintas. Vejamos,

Exemplo 2.12. *Encontre a solução da da equação diferencial ordinária* $y''' + 2y'' + y' + 2 = 0$

Solução: O polinômio característico $P(r)$ é dado por:

$$P(r) = r^3 + 2r^2 + r + 2$$

Notamos que $P(-2) = (-2)^3 + 2.(-2)^2 + (-2) + 2 = 0$, e pelo teorema fundamental da álgebra, $P(r)$ se escreve como $P(r) = (r - (-2)).Q(r) = (r+2).Q(r)$. Devemos então encontrar as raízes do polinômio $Q(r)$ e para isso usaremos o dispositivo de Briot-Ruffini,

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

Logo, as outras raízes são obtidas através do polinômio

$$Q(r) = r^2 + 1,$$

cujas raízes são $r_2 = i$ e $r_3 = -i$. Logo, a solução geral da equação diferencial ordinária será:

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 \cos(t) + c_3 \operatorname{sen}(t).$$

Exemplo 2.13. *Use a identidade* $i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$ *e* $-i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$ *para resolver a equação diferencial ordinária*

$$\frac{d^4y}{dt^4} + y = 0$$

Solução: A equação característica é dada por $m^4 + 1 = 0$, que pode ser escrita como,

$$(m^2 + 1)^2 - 2m^2 = 0$$

Fazendo $m^2 = \alpha$, temos:

$$(\alpha + 1)^2 - 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = -1$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm i$$

como $m^2 = \alpha$, vêm:

$$m^2 = \pm i \Rightarrow m = \pm\sqrt{i} \Rightarrow m_1 = \sqrt{i} \ \ e \ \ m_2 = -\sqrt{i}$$

$$m^2 = \pm - i \Rightarrow m = \pm\sqrt{-i} \Rightarrow m_3 = \sqrt{-i} \ \ e \ \ m_4 = -\sqrt{-i}.$$

Usando $i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$ e $-i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$, obtemos:

$$m_1 = \sqrt{i} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$m_2 = -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$m_3 = \sqrt{-i} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$m_4 = -\sqrt{-i} = -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial ordinária é:

$$y(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t + c_4 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

2.7 Equações Diferenciais Ordinárias Não-Homogêneas

Nesta seção, estaremos interessados em equações diferenciais na forma,

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + ... + a_2(t)y^{''} + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = g(t) \tag{2.25}$$

com $g(t) \neq 0$ e $a_0, a_1, ..., a_n$ funções contínuas em um intervalo I com $a_n(t) \neq 0$. Para nos ajudar a resolver essa equações consideremos o seguinte teorema:

Teorema 2.7.1. *Seja y_p uma solução particular da equação diferencial ordinária linear não homogênea* (2.25) *em um intervalo I, e seja $S = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial ordinária linear homogênea associada a* (2.25) *em I. Então, para qualquer solução $y(t)$ de* (2.25) *existem constantes $c_1, c_2, ..., c_n$ tais que,*

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

onde $y_c(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + ... + c_ny_n(t)$ é a solução geral da equação diferencial homogênea.

Demonstração. Sejam $y(t)$ e $y_p(t)$ as soluções de

$$a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} + ... + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0y = g(t).$$

Consideremos agora a função $u(t) = y(t) - y_p(t)$, então:

$$a_n(t)\left[\frac{d^ny}{dt^n} - \frac{d^ny_p}{dt^n}\right] + ... + a_1(t)\left[\frac{dy}{dt} - \frac{dy_p}{dt}\right] + a_0\left[y(t) - y_p(t)\right] = g(t) - g(t) = 0.$$

Logo, a função $u = y - y_p$ é solução da equação diferencial ordinária homogênea associada

$$a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} + ... + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = 0$$

Assim, pelo teorema (2.3.3), $u(t) = c_ny_n(t) + ... + c_2y_2(t) + c_1y_1(t)$, onde $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ é um conjunto fundamental da equação diferencial ordinária homogênea acima. Portanto, $y(t) = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n + y_p(t)$ é a solução da equação diferencial ordinária homogênea. $\square$

Também será válida para a equação diferencial ordinária linear não-homogênea o seguinte teorema:

Teorema 2.7.2. ***(Princípio da superposição para equações diferenciais ordinárias não-homogêneas)***
Se y_{pi} é solução particular da equação diferencial ordinária linear não-homogênea

$$a_n(t)y^n + ... + a_2(t)y^{''} + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = g_i(t)$$

em um intervalo I, $\forall\ i = 1, 2, ..., k$. Então $y_p = y_{p1} + y_{p2} + ... + y_{pk}$ é solução da equação diferencial ordinária linear não-homogênea

$$a_n(t)y^n + ... + a_2(t)y^{''} + a_1(t)y^{'} + a_0(t)y = g_1(t) + ... + g_n(t)$$

Demonstração. Faremos a prova para o caso $k = 2$. Veja que:

$$a_n(t)\frac{d^n(y_{p1} + y_{p2})}{dt} + ... + a_2(t)\frac{d^2(y_{p1} + y_{p2})}{dt} + a_1(t)\frac{d(y_{p1} + y_{p2})}{dt} + a_0(t)(y_{p1} + y_{p2}) =$$

$$= \left(a_n(t)\frac{d^n y_{p1}}{dt} + ... + a_1(t)\frac{dy_{p1}}{dt} + a_0(t)y_{p1}\right) + \left(a_n(t)\frac{d^n y_{p2}}{dt} + ... + a_1(t)\frac{dy_{p2}}{dt} + a_0(t)y_{p2}\right)$$

$$= g_1 + g_2$$

□

Nos capítulos anteriores vimos como encontrar soluções fundamentais $S = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ de equações diferenciais ordinárias homogêneas. Precisamos então, encontrar as soluções particulares y_p da equação diferencial ordinária não-homogênea e como vimos pelo teorema, a combinação linear entre elas é a solução geral da equação diferencial ordinária não-homogênea. Apresentaremos a seguir dois métodos para encontrar as soluções y_p, a saber, o método de coeficientes a determinar e o de variação do parâmetro. O primeiro será usado apenas quando a equação diferencial não-homogênea tiver seus coeficientes constantes, já o segundo, será usado para qualquer equação diferencial não-homogênea. Vejamos tais métodos.

2.7.1 Método dos coeficientes a determinar

Esse método dos coeficientes a determinar nos fornece uma solução particular quando a equação diferencial não-homogênea tiver coeficientes constantes, ou seja é uma equação diferencial da forma:

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n} + ... + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t)$$

em particular, para $n = 2$,

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(t) \tag{2.26}$$

conhecendo $g(t)$, o objetivo nesse caso é encontrar uma solução particular $y_p = y_p(t)$ que possa ser escrita como combinação linear. A seguir apresentaremos tais soluções de alguns casos em que $g(t)$ tem as formas:

1) $g(t)$ é um polinômio de grau n na variável independente

Vamos exemplificar tal caso com o seguinte exemplo:

Exemplo 2.14. *Vamos encontrar a solução geral da equação* $y'' - 5y' + 6y = t^2 - 2t + 3$

Solução: Primeiramente vamos encontrar a solução da equação diferencial homogênea associada, cuja equação característica é dada por,

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Veja que, as raízes dessa equação são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Logo, $y_c(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$. Precisamos agora encontrar a solução y_p da equação diferencial não-homogênea. Note que $g(t)$ é um polinômio de grau 2 em t. Assim, iremos supor que y_p tem o mesmo formato, ou seja,

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C.$$

Deste modo, $y_p'(t) = 2At + B$ e $y_p''(t) = 2A$. Substituindo na equação diferencial ordinária a ser analisada, temos,

$$2A - 5(2At + B) + 6(At^2 + Bt + C) = t^2 - 2t + 3$$

$$\Rightarrow 2A - 10At - 5B + 6At^2 + 6Bt + 6C = t^2 - 2t + 3.$$

Organizando o lado esquerdo da igualdade com respeito a t,

$$6At^2 + t(-10A + 6B) + (2A - 5B + 6C) = t^2 - 2t + 3,$$

comparando a igualdade entre polinômios, temos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 6A & & & = & 0 \\ -10A & +6B & & = & -2 \\ 2A & -5B & +6C & = & 3 \end{cases}$$

Assim, segue que, $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{18}$ e $C = \frac{43}{108}$. Portanto, a solução particular $y_p(t)$ é dado por,

$$y_p(t) = \frac{t^2}{6} - \frac{t}{18} + \frac{43}{108},$$

e consequentemente, a solução geral da equação diferencial ordinária não-homogênea será:

$$y = y_c(t) + y_p(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{18} + \frac{43}{108}.$$

2) $g(t)$ é múltiplo de uma função exponencial

Novamente, iremos exemplificar a situação dada.

Exemplo 2.15. *Encontre a solução geral da equação* $y'' - 4y = e^{5t}$.

Solução: Primeiramente, vamos encontrar a solução da equação diferencial homogênea associada, cuja equação característica é dada por,

$$r^2 - 4 = 0.$$

Desta forma, as raízes dessa equação são $r_1 = 2$ e $r_2 = -2$. Logo, a solução $y_c(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$. Precisamos agora encontrar a solução y_p da equação diferencial não-homogênea. Note que, $g(t)$ tem a forma de uma exponencial. Iremos supor que y_p é da forma $y_p = Ae^{5t}$, assim $y_p'(t) = 5Ae^{5t}$ e $y_p''(t) = 25Ae^{5t}$. Substituindo na equação, temos,

$$25Ae^{5t} - 4(Ae^{5t}) = e^{5t} \Rightarrow 25Ae^{5t} - 4Ae^{5t} = e^{5t} \Rightarrow 21Ae^{5t} = e^{5t}.$$

pela igualdade acima, temos que $A = \frac{1}{21}$. Logo, a solução $y_p(t) = \frac{1}{21}e^{5t}$ e consequentemente a solução geral é dada por,

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + \frac{1}{21}e^{5t}.$$

3) $g(t)$ é uma combinação linear das funções $\cos(kt)$ e $\operatorname{sen}(kt)$

Admitamos o seguinte problema:

Exemplo 2.16. *Encontre a solução geral da equação* $y'' - 4y = 5\cos 6t$.

Solução: Primeiramente, vamos encontrar a solução da equação diferencial homogênea associada, cuja equação característica é dada por,

$$r^2 - 4 = 0.$$

As rázes dessa equação são $r_1 = 2$ e $r_2 = -2$. Veja que, a solução $y_c(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$. Precisamos agora encontrar a solução y_p da equação diferencial não-homogênea. Neste caso devemos supor que y_p seja da forma,

$$y_p = A\cos 6t + B\,\text{sen}\,6t.$$

Derivando y_p temos: $y_p^{'} = -6A\,\text{sen}\,6t + 6B\cos 6t$ e $y_p^{''} = -36A\cos 6t - 36B\,\text{sen}\,6t$. Substituindo na equação, vêm,

$$(-36A\cos 6t - 36B\,\text{sen}\,6t) - 4(A\cos 6t + B\,\text{sen}\,6t) = 5\cos 6t$$

$$\Rightarrow -40A\cos 6t - 40B\,\text{sen}\,6t = 5\cos 6t.$$

Da última igualdade acima, segue que $-40A = 5$ e $-40B = 0$. Logo, $A = -\frac{1}{8}$ e $-40B = 0$ e portanto y_p é dado por,

$$y_p = -\frac{1}{8}\cos 6t.$$

Assim, a solução geral da equação diferencial ordinária não-homogênea será dada por:

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - \frac{1}{8}\cos 6t.$$

4) $g(t)$ é uma soma das formas anteriores

A solução nesse caso é muito parecido ao que fizemos nos casos anteriores. Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.17. *Encontre a solução geral da equação* $y^{''} - 4y = 5\cos 6t + e^{5t}$.

Solução: Vimos pelos casos anteriores que a solução da equação diferencial associada do exemplo é dada por $y_c(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$. Sendo $y_{p1} = -\dfrac{1}{8}\cos 6t$ a solução particular da equação diferencial ordinária não-homogênea $y^{''} - 4y = 5\cos 6t$ e $y_{p_2}(t) = \frac{1}{21}e^{5t}$ a solução particular da equação diferencial ordinária não-homogênea $y^{''} - 4y = e^{5t}$. Pelo princípio da superposição para equações diferenciais ordinárias não- homogêneas, é da forma,

$$y_p = -\frac{1}{8}\cos 6t + \frac{1}{21}e^{5t},$$

cujo y_p é solução particular da equação diferencial $y^{''} - 4y = 5\cos 6t + e^{5t}$. logo, a solução geral é dada por,

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - \frac{1}{8}\cos 6t + \frac{1}{21}e^{5t}$$

O exemplo a seguir decorre de uma equação diferencial típica na literatura e exibiremos a solução particular em qualquer caso.

Exemplo 2.18. *Prove que a equação diferencial*

$$a_n y_{(n)} + a_{n-1} y_{(n-1)} + ... + a_1 y\prime + a_0 y = k$$

k é uma constante, $a_0 \neq 0$, tem como solução particular a função $y_p = \frac{k}{a_0}$.

Solução: A equação é uma equação diferencial ordinária de orden n, linear, não-homogênea. Vamos procurar uma solução particular $y_p(t)$. Como k é uma constante, vamos supor que a solução seja $y_p(t) = A$. Derivando $n - vezes$ a solução $y_p(t)$, temos,

$$y_p^{'}(t) = y_p^{''}(t) = ... = y_p^{n}(t) = 0$$

Substituindo na equação dada, temos,

$$a_n \cdot 0 + a_{n-1} \cdot 0 + ... + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot A = k$$

$$\Rightarrow a_0 \cdot A = k$$
$$\Rightarrow A = \frac{k}{a_0}$$

Logo, a solução particular $y_p(t)$ é dada por,

$$y_p(t) = \frac{k}{a_0}$$

Exemplo 2.19. *Na prática, a função aplicada $g(t)$é frequentemente descontínua. Resolva o problema de valor inicial*

$$y^{''} + 4y = g(t), \quad y(0) = 1 \quad e \quad y^{'}(0) = 2,$$

em que:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0, & se t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

onde graficamente, temos,

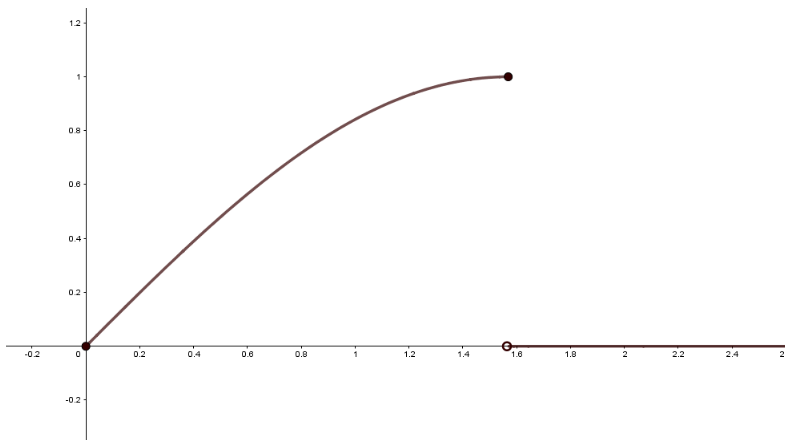


Figura 2.2: Função $g(t)$ descontínua.

Solução: *Vamos dividir a equação diferencial ordinária em dois casos:*

$$y^{''} + 4y = 0 \tag{2.27}$$

$$y^{''} + 4y = \operatorname{sen} t \tag{2.28}$$

A equação 2.27 é uma equação diferencial ordinária homogênea cuja equação característica é dada por,

$$r^2 + 4 = 0,$$

com raízes $r_1 = 2i$ *e* $r_2 = -2i$. *Portanto, a solução da equação homogênea é dada por,*

$$y_1 = c_1 e^0 \cos(2t) + c_2 e^0 \operatorname{sen}(2t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t).$$

A equação (2.28) é uma equação diferencial ordinária, linear, não-homogênea, cuja solução é dada por $y_2 = y_c + y_p$, *onde* y_c *é a solução da parte homogênea e* y_p *é uma solução particular de (2.28). Note que* $y_c = y_1$, *pois é a solução da equação homogênea associada a (2.28). Vamos encontrar uma solução particular* y_p *e para isso usaremos o método do coeficiente a determinar. Vamos supor então que* y_p *tenha a forma,*

$$y_p = A \cos t + B \operatorname{sen} t.$$

Derivando y_p *em relação a* t, *temos,*

$$y_p^{'} = -A \operatorname{sen} t + B \cos t \quad e \quad y_p^{''} = -A \cos t - B \operatorname{sen} t$$

Substituindo em (2.28), vêm,

$$(-A\cos t - B\operatorname{sen} t) + 4(A\cos t + B\operatorname{sen} t) = sent \Rightarrow \operatorname{sen}(-B+4B) + \cos(-A-4A) = \operatorname{sen} t$$

da igualdade, obtemos,

$$-B + 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$
$$-A + 4A = 0 \Rightarrow A = 0,$$

portanto a solução particular $y_p = \frac{1}{3}\cos t$*. Desta forma, a solução geral de (2.28) é,*

$$y_2 = c_1\cos(2t) + c_2\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{3}\cos t$$

Vamos resolver agora o problema de valor inicial, assim,

$$y_2(0) = c_1\cos(2\cdot 0) + c_2\operatorname{sen}(2\cdot 0) + \frac{1}{3}\cos 0 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{2}{3}$$

$$y_2^{'}(0) = c_1(-\operatorname{sen}(2\cdot 0))\cdot 2 + c_2\cos(2\cdot 0)\cdot 2 + \frac{1}{3}(-sen0) = 2 \Rightarrow c_2 = 1$$

Devemos agora encontrar uma solução de modo que y *e* $y^{'}$ *sejam contínuas em* $t = \frac{\pi}{2}$*. Para isso devemos mostrar que:*

i) *A função está definida em* $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$*, pois,*

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 1\cdot\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\cos\pi + \operatorname{sen}\pi = -\frac{2}{3}$$

ii) *Os limites laterais são iguais, ou seja:* $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^+} y_1 = \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-} y_2$*. De fato,*

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} y_1 = \frac{2}{3}\cos\pi + 1\operatorname{sen}\pi = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} y_2 = \frac{2}{3}\cos\pi + 1\operatorname{sen}\pi + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$$

iii) *A função em* $t = \frac{\pi}{2}$ *é igual ao limite no mesmo ponto visto que,*

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} y_1.$$

Observação 2.7.1. *Se as funções sugeridas já apareceram na solução geral da equação homogênea associada, então sugere-se uma nova função multiplicada por* t*. Caso novamente não sirva, multiplique-a por* t *e assim sucessivamente até que o expoente de* t *se encaixe no modelo que queremos.*

Apresentaremos uma tabela que nos ajudará a encontrar a forma da solução:

Forma de $g(t)$	*Forma da solução $y(t)$ procurada*
$3t^2$	$y(t) = At^2 + Bt + C$
$7e^{3t}$	$y(t) = ae^{3t}$
$17\cos(3t)$	$y(t) = a\cos(3t) + b\,\text{sen}(3t)$
$7\,\text{sen}(2t)$	$y(t) = a\cos(2t) + b\,\text{sen}(2t)$
$7\,\text{sen}(2t) + 8\cos(2t)$	$y(t) = a\cos(2t) + b\,\text{sen}(2t)$
$3e^{5t} + (t^2 + 7t + 3)$	$y(t) = de^{3t} + [at^2 + bt + c]$
$3e^{5t} \cdot (t^2 + 7t + 3)$	$y(t) = de^{3t} \cdot [at^2 + bt + c]$
$3e^{5t} \cdot \text{sen}(2t)$	$y(t) = e^{3t} \cdot [a\cos(2t) + b\,\text{sen}(2t)]$

A seguir, enunciaremos um importante teorema

Teorema 2.7.3. *Considere a equação não-homogênea*

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

A solução geral desta equação diferencial ordinária é da forma:

$$\varphi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \varphi_p(t)$$

e mais, se $g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = P_n(x)$, $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x$ e $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ então a solução particular respectivamente, $\varphi_p = x^s(A_0x^n + ... + A_n)$, $\varphi_p(x) = x^s(A_0x^n + ... + A_n)e^{\alpha x}$ e $\varphi_p = x^s(A_0x^n + ... + A_n)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s(A_0x^n + ... + A_n)e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x$, onde $s = min\{0, 1, 2\}$; os termos em φ_p não são soluções da equação homogênea correspondente. Note que s é a multiplicidade da raíz 0, α raíz da equação característica e $\alpha + \beta i$ é a raiz da equação característica, respectivamente.

Demonstração. Considere que g é um polinômio da forma $g(x) = P_n(x) = a_0x^n + ... + a_n$, onde $a_0 \neq 0$. Considere $\varphi_p(x) = A_0x^n + ... + A_n$. Logo,

$$a(A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n)'' + b(A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n)' + c(A_0x^n + ... + A_n = a_0x^n + ... + a_n.$$

Daí,

$$a\left[n(n-1)A_0x^{n-2} + ... + 2A_{n-2}\right] + b\left[nA_0x^{n-1} + ... + A_{n-1}\right] + c(A_0x^n + ... + A_n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n.$$

Com isso,

$$\begin{cases} c_0A_0 = a_0 \\ c_1A_1 + b_nA_0 = a_1 \\ \vdots \\ cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} = a_n \end{cases}$$

Se $c \neq 0$, então $A_0 = \frac{a_0}{c}$, encontramos $A_1, ..., A_n$. Se $c = 0$ e $b \neq 0$, então:

$a\left[n(n-1)A_0x^{n-2} + ... + 2A_{n-2}\right] + b\left[nA_0x^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + ... + A_{n-1}\right] = a_0x^n + ... + a_n \Rightarrow$

$a_0 = 0$, o que é um absurdo.

Pela equação acima, devemos ter $a\varphi_p^{''} + b\varphi_p^{'}$ é um polinômio de grau n. Portanto, devemos ter que φ_p tem que ser um polinômio de grau no mínimo $n+1$. Com isso, seja,

$$\varphi_p(x) = x(A_0x^n + ... + A_n) = A_0x^{n+1} + ... + A_nx$$

Não temos termos constante em φ_p, pois se houvesse poderia gerar um absurdo já que $c = 0$ é uma solução da homogênea correspondente.

Analogamente, ao que foi feito no primeiro caso, temos, $A_0 = \frac{a_0}{b(n+1)}$. Substituindo, encontramos $A_1, A_2, ..., A_n$. Se $c = b = 0$, então $ay^{''}$ tem que ter grau n. Logo φ_p tem que ser de grau $n+2$. Com isso,

$$\varphi_p(x) = x^2(A_0x^n + ... + A_n) = A_0x^{n+2} + ... + A_nx^2.$$

Os termos de graus 1 e 0 não aparecem em φ_p, pois são soluções da homogênea. Daí,

$$a(n+2)(n+1)A_0 = a_0 \Rightarrow A_0 = \frac{a_0}{a(n+2)(n+1)}$$

substituindo encontramos $A_1, ..., A_n$.

Agora, seja $q(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$. Podemos reduzir este caso ao caso anterior fazendo $\varphi_p(x) = e^{\alpha x}$. De fato, $\varphi_p^{'} = \alpha e^{\alpha x}\upsilon(x) + e^{\alpha x}\upsilon^{'}(x)$. E mais,

$$\varphi_p^{''} = \alpha^2 e^{\alpha x}\upsilon(x) + \alpha e^{\alpha x}\upsilon^{'}(x) + \alpha e^{\alpha x}\upsilon^{'}(x) + e^{\alpha x}\upsilon^{''}(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}\upsilon(x) + 2\alpha e^{\alpha x}\upsilon^{'}(x) + e^{\alpha x}\upsilon^{''}(x)$$

Logo,

$$a\varphi_p^{''} + b\varphi_p^{'} + c\varphi_p = e^{\alpha x}P_n(x)$$
$$\Leftrightarrow ae^{\alpha x}\upsilon^{''}(x) + (2\alpha a + b)e^{\alpha x}\upsilon^{'}(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)\upsilon(x)e^{\alpha x} = e^{\alpha x}P_n(x)$$
$$\Leftrightarrow a\upsilon^{''}(x) + (2\alpha a + b)\upsilon^{'}(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)\upsilon(x) = P_n(x)$$

Encontramos uma solução particular $U(x)$ para a equação acima, assim como foi feito no início da demonstração, e, logo, encontramos uma solução particular $\varphi_p(x) = e^{\alpha x}U(x)$ para a equação não homogênea.

Seja $q(x) = e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$ ou $q(x) = e^{\alpha x}P_n(x)\,\mathrm{sen}\,\beta x$. Como consequência da fórmula de Euller temos por exemplo que,

$$\mathrm{sen}\,\beta x = e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i$$

Logo, $q(x)$ é da forma:

$$q(x) = P_n(x)\left[\frac{e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{(\alpha-\beta i)x}}{2i}\right]$$

Escolhemos $\varphi_p(x) = e^{(\alpha+\beta i)x}(A_0x^n + ... + A_n) + e^{(\alpha-\beta i)x}(B_0x^n + ... + B_n)$. Como já fizemos, preferimos que

$$\varphi_p(x) = e^{\alpha x}(A_0x^n + ... + A_n)\cos\beta x + e^{\alpha x}(B_0x^n + ... + B_0)\,\mathrm{sen}\,\beta x.$$

Se $\alpha \pm \beta i$ são raízes da equação característica relacionada a equação homogênea correspondente multiplicamos $\varphi_p(x)$ por x.

$\square$

2.7.2 Método de Variação de parâmetro

Esse método mais abrangente nos permitirá resolver equações diferenciais ordinárias não homogêneas com coeficientes não-constantes. Tal método leva em consideração a solução da equação linear homogênea associada tratando-a como uma possível função de parâmetro t. Considere a equação diferencial ordinária:

$$p_n(t)y^n + ... + p_1y' + p_0y = g(t) \tag{2.29}$$

onde $p_n(t), ..., p_1(t), p_0(t)$ e $g(t)$ são funções contínuas em um intervalo I, com $p_n(t) \neq 0$. Se $y_c(t) = c_1y_1(t) + ... + c_ny_n(t)$ é a solução geral da equação diferencial ordinária homogênea associada a (2.29), então a solução particular y_p será dada por $y_p = u_1y_1 + ... + u_ny_n$ onde $u_i, i = 1, 2, ..., n$ são funções obtidas integrando as soluções do sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} u_1'y_1 & + & ... & + & u_n'y_n & = & 0 \\ u_1'y_1' & + & ... & + & u_n'y_n' & = & 0 \\ u_1'y_1'' & + & ... & + & u_n'y_n'' & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ u_1'y_1^{(n-1)} & + & ... & + & u_n'y_n^{(n-1)} & = & g(t) \end{array}\right. .$$

Pela regra de Cramer, temos,

$$u_i' = \frac{W_i}{W},$$

$$\text{onde, } W_i = \begin{vmatrix} y_1 & ... & 0 & ... & y_n \\ y_1^{'} & ... & 0 & ... & y_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & ... & g(t) & ... & y_n^{(n-1)} \\ & & \uparrow & & \\ & & \textit{i-ésima coluna} & & \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & ... & 0 & ... & y_n \\ y_1^{'} & ... & 0 & ... & y_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & ... & y_i^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

com $i = 1, 2, ..., n$.

A seguir iremos exemplificar alguns desses casos.

Exemplo 2.20. *Vamos resolver a equação diferencial ordinária* $y^{''} + 4y = \sec(t)$, *com* $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Solução: Primeiramente, encontramos a solução da equação diferencial ordinária associada $r^2 + 4 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2i$ e $r_2 = -2i$, assim a solução da homogênea associada é,

$$y_c(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t.$$

Sendo $y_1 = \cos 2t$ e $y_2 = \operatorname{sen} 2t$. Fazendo $y_p(t) = u_1 y_1 + u_2 y_2$, temos que $y_p^{'}(t) = -2u_1^{'} \operatorname{sen} 2t + 2u_2^{'} \cos 2t$. Substituindo na equação, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_1^{'} y_1 & + & u_2^{'} y_2 & = & 0 \\ -2u_1^{'} \operatorname{sen} 2t & + & 2u_2^{'} \cos 2t & = & \sec t \end{cases}$$

Usando a regra de Cramer, temos,

$$u_1^{'} = \frac{W_1}{W} = \frac{-\operatorname{sen} 2t \sec t}{2} \quad , \quad u_2^{'} = \frac{W_2}{W} = \frac{\cos 2t \sec t}{2}$$

haja vista que,

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 2t \\ sect & 2\cos 2t \end{vmatrix} = -\operatorname{sen} 2t \sec t$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos 2t & 0 \\ -2\operatorname{sen} 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = \cos 2t \sec t$$

Integrando $u_1^{'}$ e $u_2^{'}$ em relação a t, obtemos,

$$u_1 = -\int \frac{-sen2t \sec t}{2} = -\int \operatorname{sen} t dt = \cos t,$$

$$u_2 = \int \frac{W_2}{W} = \frac{\cos 2t \sec t}{2} = \int \frac{1}{2} \cos t dt - \int \frac{1}{2} \frac{sen^2 t}{\cos t} dt = \frac{1}{2}[2sent - \ln|\sec t + \tan t|].$$

Portanto, uma solução geral para a equação diferencial ordinária dada é,

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + \cos 2t \cos t + \operatorname{sen} 2t[sent - \frac{1}{2} \ln|\sec t + \tan t|]$$

2.8 Caso Especial de Equações Diferenciais Ordinárias Homogênea

Até agora temos resolvido equações diferenciais ordinárias de ordem dois ou mais alta somente quando estas possuem coeficientes constantes. Em aplicações, equações lineares de ordem superior com coeficientes não-constantes (variáveis) são igualmente importantes. Por exemplo, se quisermos encontrar a temperatura u na região compreeendida entre duas esferas concêntricas, como mostrado na figura, então sob certas circunstâncias temos que resolver a equação diferencial:

$$r\frac{d^2r}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} = 0$$

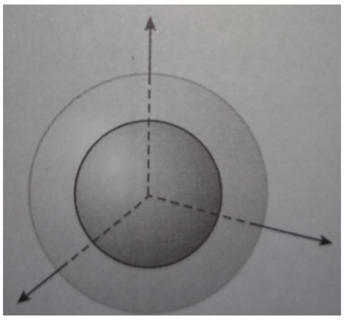


Figura 2.3: Esferas concêntricas.

em que $r > 0$ representa a distância radial medida a partir dos centros das esferas. Equações diferenciais com coeficientes variáveis como:

$$t^2y^{''} + ty^{'} + (t^2 - y^2)y = 0 \Rightarrow (1-t^2)y^{''} - 2ty^{'} + n(n+1)y = 0 \Rightarrow y^{''} - 2ty^{'} + 2ny = 0$$

ocorrem em aplicações como problema de potencial, distribuição de temperatura e fenômeno vibratório para a mecânica quântica.

Equações com coeficientes variáveis não podem ser resolvidas com a mesma facilidade com que resolvemos equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. Na verdade, não podemos esperar que a solução, mesmo de uma equação simples $y^{''} - 2ty = 0$, possa ser expressa em termos de funções construídas com potencias de t, senos, co-senos, logaritmos e exponenciais. O melhor que podemos fazer em relação a equação $y^{''} - 2ty = 0$ é encontrar uma solução na forma de uma série infinita. Porém há um tipo de equação diferencial com coeficientes variáveis, chamada de **Cauchy-Euler**, cuja solução geral, pode sempre ser escrita em termos de funções elementares. Vejamos o estudo deste tipo de equações.

Definição 2.6. *Chamamos de equações de Euler-Cauchy as equações diferenciais ordinárias lineares que se apresentam na forma,*

$$a_n t^n y^n + ... + a_2 t^2 y^2 + a_1 t y^{'} + a_0 y = 0$$

com $a_n \neq 0$ *e* $a_n, a_{n-1}, .., a_2, a_1$ *e* $a_0 \in \mathbb{R}$.

Essas equações também são conhecidas como equações equidimensionais, pois o expoente de cada coeficiente é igual a ordem da derivada.
Nos preocuparemos apenas com a equações de Euler-Cauchy de ordem 2, expressa por:

$$a_2 t^2 y^{''} + a_1 t y^{'} + a_0 y = 0 \tag{2.30}$$

com $a_2 \neq 0$ e $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

A partir da definição, vamos procurar uma solução na forma $y(t) = t^r$, com $r > 0$. Logo, derivando y duas vezes teremos,

$$y^{'} = rt^{r-1} \quad e \quad y^{''} = r(r-1)t^{r-2}$$

desta forma a equação (2.30) poderá ser vista como,

$$a_2 t^2 r(r-1)t^{r-2} + a_1 t r t^{r-1} + a_0 t^r = t^r(a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0) = 0$$

portanto, devemos nos preocupar com as raízes do polinômio de grau 2 dado por:

$$Q(t) = (a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0) = a_2 r^2 + (a_1 - a_2)r + a_0$$

Este polinômio terá discriminante $\triangle = (a_1 - a_2)^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_0$. Novamente dividimos em casos:

O discriminante $\triangle$ é positivo

Se $\triangle = (a_1 - a_2)^2 - 4a_2 a_0 > 0$, então a equação terá duas raízes reais r_1 e r_2 distintas. Assim, a solução geral será dada por,

$$y(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}.$$

Exemplo 2.21. *Considere duas esferas concêntricas de raio $r = a$ e $r = b$, $a < b$, como mostra a figura:*

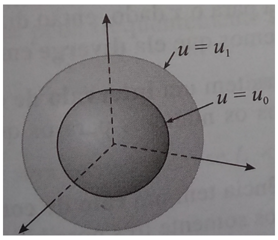


Figura 2.4: Figura do exemplo (2.21).

A temperatura $u(r)$ na região compreendida entre as esferas é determinada pelo problema de valor de fronteira

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + 2\frac{du}{dr} = 0, \quad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1$$

em que u_0 e u_1 são constantes. Exiba a solução geral desta equação.

Solução: O problema se resume a resolver a equação diferencial ordinária:

$$ru^{''}(r) + 2u^{'}(r) = 0 \tag{2.31}$$

Vamos adotar que $u(r) = r^m$ seja solução de (2.31). Assim $u^{'}(r) = m \cdot r^{m-1}$ e $u^{''}(r) = m \cdot (m-1) \cdot r^{m-2}$. Substituindo em (2.31), temos:

$$r\left[m \cdot (m-1) \cdot r^{m-2}\right] + 2 \cdot m \cdot r^{m-1} = 0 \Rightarrow r^{m-1} \cdot [m \cdot (m-1)] + 2 \cdot m \cdot r^{m-1} = 0$$

$$\Rightarrow r^{m-1} \cdot \left(m^2 - m + 2m\right) = 0 \Rightarrow r^{m-1} \cdot \left(m^2 + m\right) = 0$$

como $r^{m-1} \neq 0$, então,

$$m^2 + m = 0$$

Calculando o discrimante Δ, obtemos:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1.$$

Desta forma as raízes serão,

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 1}{2}$$

cujas raízes são $m_1 = 0 \Rightarrow y_1 = r^0 = 1$ e $m_2 = 1 \Rightarrow y_2 = r^{-1}$. Logo a solução geral da equação diferencial ordinária será:

$$u(r) = c_1y_1 + c_2y_2,$$

$$u(r) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot r^{-1},$$

onde,

$$u(a) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot r^{-1} = u_0 \quad e \quad u(b) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot r^{-1} = u_1$$

O discriminante $\triangle$ é nulo

Se $\triangle = (a_1 - a_2)^2 - 4a_2a_0 = 0$ teremos duas raízes reais iguais $r_1 = r_2 = \frac{-(a_1-a_2)}{2a_2}$ e a solução $y_1 = t^r$. Vamos então encontrar outra solução linearmente independente através do método de D'alembert, dado pela equação (2.14), assim,

$$y_2(t) = v(t)t^r \Rightarrow y_2^{'}(t) = t^r v^{'} + rt^{r-1}v \Rightarrow y_2^{''}(t) = t^r v^{''} + 2rt^{r-1}v^{'} + r(r-1)t^{r-2}$$

portanto,

$$a_2t^2y^{''} + a_1ty^{'} + a_0y = a_2t^{r+2}v^{''} + v^{'}t^{r+1}(2a_2r + a_1) = 0,$$

fazendo $v^{'} = w$, e sabendo que $r = \dfrac{a_2 - a_1}{2a_2}$ temos,

$$a_2t^{r+2}w^{'} + wt^{r+1}a_2 = 0.$$

Vamos resolver a equação acima que é uma equação diferencial de primeira ordem homogênea, logo:

$$\frac{w^{'}}{w} = -\frac{t^{r+1}}{t^{r+2}} = -\frac{1}{t}$$

integrando ambos os lados da igualdade acima em relação a t, vêm:

$$\ln|w| = \ln t^{-1}$$

aplicando a exponencial, teremos,

$$v^{'} = w = t^{-1} = \frac{1}{t}.$$

logo:

$$v(t) = \ln t.$$

Consequentemente, a solução y_2 procurada é,

$$y_2 = v(t)t^r = \ln t \cdot t^r. \tag{2.32}$$

Desta forma, solução geral da equação diferencial 2.30, será dada por:

$$y(t) = c_1t^r + c_2 \cdot \ln t \cdot t^r$$

Exemplo 2.22. *Encontre a solução da equação diferencial ordinária* $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0$.

Solução: Usando o método de Euller Cauchy temos,

$$Q(t) = a_2t^2 + (a_1 - a_2)t + a_0 = 1r^2 + (5-1)r + 4 = t^2 + 4t + 4.$$

Calculando o discriminate, obtemos,

$$\triangle = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0,$$

logo, $r_1 = r_2 = -2$ e a solução é y_1 e dada por $y_1 = t^{-2}$. Devemos agora encontrar uma outra solução linearmente independente que pela equação (2.32) será dada por,

$$y_2 = t^{-2} \ln t.$$

Logo, a solução geral da equação diferencial dada é,

$$y(t) = c_1t^{-2} + c_2t^{-2} \ln t$$

Exemplo 2.23. *Considere que um anel circular foi construído em uma fábrica de automóveis para sanar um defeito de fábrica que foi detectado após a revenda de uma marca. A figura abaixo ilustra o anel construído:*

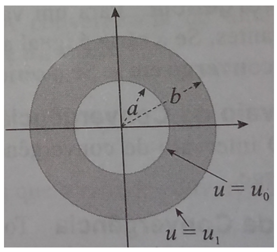


Figura 2.5: Anel circular

A temperatura no anel circular é determinado pelo problema de valor de fronteira:

$$r\frac{d^2r}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0, \quad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1$$

em que u_0 *e* u_1 *são constantes. Mostre que,*

$$u(r) = \frac{u_0 \ln(r/b) - u_1 \ln(r/a)}{\ln(a/b)}.$$

tal equação nos dará a temperatura em qualquer ponto de um anel circular genérico.

Solução: O problema se resume a resolver a equação diferencial ordinária:

$$ru''(r) + u'(r) = 0 \tag{2.33}$$

Vamos adotar que $u(r) = r^m$ seja solução de (2.33). Assim $u'(r) = m \cdot r^{m-1}$ e $u''(r) = m \cdot (m-1) \cdot r^{m-2}$. Substituindo em (2.33), temos,

$$r \cdot \left[m \cdot (m-1) \cdot r^{m-2}\right] + m \cdot r^{m-1} = 0 \Rightarrow r^{m-1} \cdot [m \cdot (m-1)] + m \cdot r^{m-1} = 0$$

$$\Rightarrow r^{m-1} \cdot (m^2 - m + m) = 0$$

$$\Rightarrow r^{m-1} \cdot (m^2) = 0,$$

como $r^{m-1} \neq 0$, devemos ter $m^2 = 0$. Note que o discrimante Δ dessa equação é nulo. Desta forma $m_1 = m_2 = 0$ e uma solução é dada por $y_1 = r^m = r^0 = 1$. A outra solução y_2 como vimos em (2.32), é dada por $y_2 = \ln r \cdot r^{m_1} = \ln r \cdot r^0 = \ln r$. Logo, a solução geral da equação diferencial ordinária é,

$$u(r) = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 \Rightarrow u(r) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \ln r.$$

Vamos agora resolver o problema de valor de fronteira, dado por,

$$u(r) = c_1 + c_2 \cdot \ln r, \quad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \ln(a) = u_0 \\ c_1 + c_2 \ln(b) = u_1, \end{cases}$$

subtraindo a primeira equação pela segunda no sistema acima, vêm,

$$u_0 - u_1 = c_2 \cdot \ln(a) - c_2 \cdot \ln(b) = c_2 \left(\ln(a) - \ln(b)\right).$$

Logo,

$$c_2 = \frac{u_0 - u_1}{\ln(a/b)},$$

substituindo c_2 na segunda equação, temos,

$$c_1 + \left(\frac{u_0 - u_1}{\ln(a/b)}\right) \cdot \ln b = u_1$$

$$\Rightarrow c_1 = u_1 - \left(\frac{u_0 - u_1}{\ln(a/b)}\right) \cdot \ln b$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{u_1 \cdot \ln(a/b) - \ln b \cdot u_0 + \ln b \cdot u_1}{\ln(a/b)}.$$

Substituindo c_1 e c_2 na solução geral da equação diferencial dada temos,

$$u(r) = \frac{u_1 \cdot \ln(a/b) - \ln b \cdot u_0 + \ln b \cdot u_1}{\ln(a/b)} + \left(\frac{u_0 - u_1}{\ln(a/b)}\right) \cdot \ln r$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{u_1 \cdot \ln(a/b) - u_0 \cdot \ln b + u_1 \cdot \ln b + u_0 \cdot \ln r - u_1 \cdot \ln r}{\ln(a/b)}$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{u_1 (\ln a - \ln b) - u_0 \cdot \ln b + u_1 \cdot \ln b + u_0 \cdot \ln r - u_1 \cdot \ln r}{\ln(a/b)}$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{u_1 \cdot \ln a - u_1 \cdot \ln b - u_0 \cdot \ln b + u_1 \cdot \ln b + u_0 \cdot \ln r - u_1 \cdot \ln r}{\ln(a/b)}$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{u_1 \cdot \ln a - u_0 \cdot \ln b + u_0 \cdot \ln r - u_1 \cdot \ln r}{\ln(a/b)}$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{u_1 \cdot (\ln a - \ln r) - u_0 \cdot (\ln b - \ln r)}{\ln(a/b)}$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{u_1 \cdot \ln(a/r) - u_0 \cdot \ln(b/r)}{\ln(a/b)}$$

como $\ln(a/r) = -\ln(r/a)$ e $\ln(b/r) = -\ln(r/b)$, temos:

$$u(r) = \frac{u_0 \ln(r/b) - u_1 \ln(r/a)}{\ln(a/b)}$$

O discriminante $\triangle$ é negativo

Se $\triangle = (a_1 - a_2)^2 - 4a_2a_0 < 0$ temos raízes $r_1 = \alpha + \beta i$ e seu conjugado $r_2 = \alpha - \beta i$. Do mesmo modo que fizemos com as equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, podemos usar a fórmula de Euler para obter,

$$t^{(\alpha \pm \beta i)} = e^{(\alpha \pm \beta i)\ln t} = t^{\alpha}(\cos(\beta \ln t) \pm \operatorname{sen}(\beta \ln t)).$$

Como as soluções são linearmente independentes, a solução geral será dada por:

$$y(t) = t^{\alpha}(c_1 cos(\beta \ln t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \ln t))$$

Exemplo 2.24. *Vamos resolver a equação* $t^2y'' - 3ty' + 5y = 0$

Solução: Notamos que a equação cima é uma equação diferencial de Euler-Cauchy de ordem 2, com $a_2 = 1$, $a_1 = 3$ e $a_0 = 5$. Vamos então encontrar o polinômio característico $Q(r)$ dessa equação que é dado por:

$$Q(r) = a_2r^2 + (a_1 - a_2)r + a_0 = r^2 + (3-1)r + 5 = r^2 + 2r + 5$$

Calculando o discriminante Δ dessa equação obtemos:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$$

As raízes do polinômio característico são:

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 2i}{2}$$

$$\Rightarrow r_1 = -1 + 2i \quad e \quad r_2 = -1 - 2i$$

Podemos então exibir a forma da solução geral dessa equação, sendo $\alpha = -1$ e $\beta = 2$. Logo,

$$y(t) = t^{\alpha}(c_1 \cos(\beta \ln t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \ln t)) \Rightarrow y(t) = t^{-1}(c_1 \cos(2 \ln t) + c_2 \operatorname{sen}(2 \ln t)).$$

2.9 Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Uma única equação diferencial pode servir como um modelo matemático para muitos fenômenos diferentes. A equação diferencial linear de segunda ordem $ay'' + by' + cy = f(t)$ aparece na análise de problemas na física, engenharia, química, biologia, entre outras.

Nesta seção, direcionaremos nossos estudos nos problemas elementares, como o sistema massa mola sem força externa, que é a forma básica, e sem força externa exercida. Além disso, na abordagem dos osciladores harmônicos, e em sistemas de circuitos elétricos. Para isso, utilizaremos lei clássicas, como lei de Hooke, segunda lei de Newton, lei de Kirchoff entre outros. Iniciaremos com o problema sistema massa-mola, com as leis de Hooke e a segunda lei de Newton, e formalizaremos um modelo característico.

Lei de Hooke

Suponha conforme figura abaixo, uma massa m_1 atada a uma mola flexível.

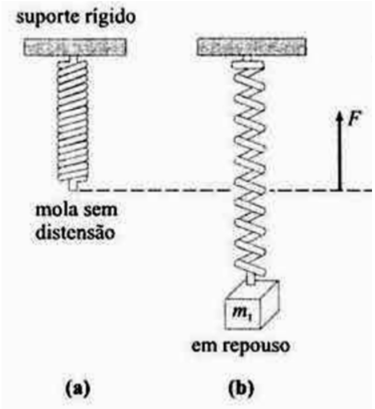


Figura 2.6: a) sistema sem distensão b) Sistema em repouso

Pela lei de Hooke, a mola exerce uma força restauradora F no sentido oposto a direção do alongamento e proporcinal a distenção s, enunciada como:

$$F = k \cdot s$$

onde k é uma constante de proporcionalidade.

Segunda Lei de Newton

Quando a massa é atada a uma mola, ela provoca uma distensão s na mola e atinge uma posição de equilíbrio na qual o peso W, definido por $W = m \cdot g$, é igual a força restauradora da mola $k \cdot s$, onde g é a aceleração da gravidade,. Nessa situação de equilíbrio temos:

$$mg = k \cdot s \Leftrightarrow mg - k \cdot s = 0$$

Se a massa estiver deslocada por uma quantidade y de sua posição de equilíbrio e for solta, como mostra a figura:

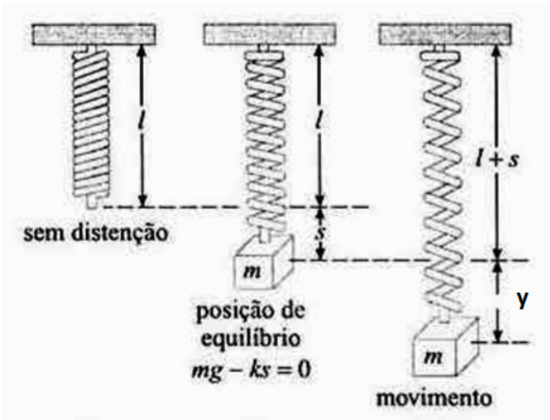


Figura 2.7: Deslocamento da massa no sitema.

a força resultante nesse caso de dinâmica é dada pela segunda lei de Newton, estabelecida por:

$$F = m \cdot a$$

onde $a = \frac{d^2y}{dt^2}$. Supondo agora que não haja forças de retardamento agindo sobre o sistema e supondo também que a massa vibre sem influências de outras forças externas - denominado **movimento livre** -, podemos igualar a força resultante do peso e a força restauradora, ou seja,

$$m \cdot a = -k \cdot (s + y) + m \cdot g$$

que é equivalente à,

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot s + -k \cdot y + m \cdot g$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \underbrace{-k \cdot s + m \cdot g}_{0} -k \cdot y$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y. \tag{2.34}$$

O sinal negativo usado na constante de proporcionalida k, indica que a força restaurada exercida pela mola age em direção contrária ao movimento. É importante também observarmos que o deslocamento y, como visto na figura acima, foi feito para baixo $y > 0$, no mesmo sentido da força resultante F. Se houvesse, logicamente uma compressão da mola, resultaria em um deslocamento $y < 0$.

2.9.1 Equação Diferencial do movimento livre sem amortecimento

Considere a equação do movimento livre (2.34). Dividindo-a por m, temos,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot y$$

$$\Rightarrow y^{''}(t) + \omega^2 \cdot y(t) = 0 \tag{2.35}$$

onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. A equação (2.35) descreve um movimento harmônico simples, ou movimento livre sem amortecimento.

Observação 2.9.1. *Há duas condições iniciais associadas: $y(0) = \alpha$ e $y^{'}(0) = \beta$, que representam respectivamente a posição inicial do movimento e a velocidade inicial. Note que, se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$, parte de um ponto abaixo da posição de equilíbrio com uma velocidade inicial direcionada para cima. Se $\alpha < 0$ e $\beta = 0$ a massa é solta de um ponto acima da posição de equilíbrio com uma velocidade nula.*

Vamos agora solucionar a equação diferencial ordinária (2.35). A equação característica é dada por,

$$m^2 + \omega^2 = 0,$$

essa equação característica possui raízes complexas $m_1 = \omega i$ e $m_2 = -\omega i$. Logo, a solução geral da equação diferencial ordinária é,

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t. \tag{2.36}$$

O período de vibrações livres em (2.36) é $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e a frequência é $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Forma alternativa de $y(t)$

Quando c_1 e c_2 são ambos não nulos em (2.36), a amplitude A das vibrações livres não é tão óbvia. Considere $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ como mostra a figura,

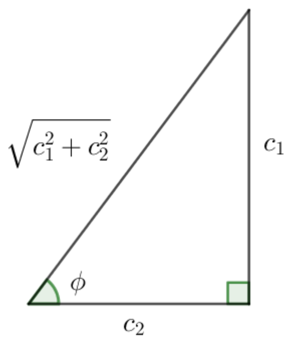


Figura 2.8: $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

Note que,

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \Rightarrow c_1 = A \cdot \operatorname{sen}\phi$$
$$\cos\phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \Rightarrow c_2 = A \cdot \cos\phi.$$

Substituindo em (2.36), temos:

$$y(t) = A \cdot \operatorname{sen}\phi \cdot \cos\omega t + A \cdot \cos\phi \cdot \operatorname{sen}\omega t$$

$$\Rightarrow y(t) = A\left(\operatorname{sen}\phi \cdot \cos\omega t + \cos\phi \cdot \operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = A \cdot \operatorname{sen}(\phi + \omega t).$$

Exemplo 2.25. *Sejam y_0 e v_0 são a posição inicial e a velocidade inicial, respectivamente, de um peso em movimento harmônicos simples, mostre que a amplitude das vibrações é,*

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0}{\omega}^2}.$$

Solução: Pelo enunciado temos $y(0) = y_0$ e $y^{'}(0) = v_0$. Como o peso está em movimento harmônico simples, a equação que descreve o movimento é dado por:

$$y(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t$$

derivando a equação em relação a t, temos,

$$y^{'}(t) = -c_1 \operatorname{sen}(\omega t)t + c_2 \cos(\omega t)t,$$

colocando as condições iniciais do problema, segue que,

$$y(0) = c_1 \cos(\omega \cdot 0) + c_2 \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 = y_0 \Rightarrow c_1 = y_0$$

$$y^{'}(0) = -c_1 \operatorname{sen}(\omega \cdot 0) \cdot 0 + c_2 \operatorname{sen}(\omega \cdot 0) \cdot 0 = y_0 \Rightarrow c_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

mas,

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Logo,

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0}{\omega}^2}.$$

Exemplo 2.26. *Mostre que a combinação linear* $y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$ *pode ser também escrita na forma,*

$$y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

em que $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ *e* $\operatorname{sen} \phi = \dfrac{c_2}{A}$, $\cos \phi = \dfrac{c_1}{A}$

Solução: Sabemos que,

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{c_2}{A} \Rightarrow c_2 = A \operatorname{sen} \phi$$
$$\cos \phi = \frac{c_1}{A} \Rightarrow c_1 = A \cos \phi$$

daí substituindo c_1 e c_2 obtidos em $y(t)$, temos:

$$y(t) = A \cdot \cos \phi \cdot \cos \omega t + A \cdot \operatorname{sen} \phi \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

$$\Leftrightarrow y(t) = A \cdot (\cos \phi \cdot \cos \omega t + \operatorname{sen} \phi \cdot \operatorname{sen} \omega t)$$

como $(\cos \phi \cdot \cos \omega t + \operatorname{sen} \phi \cdot \operatorname{sen} \omega t) = \cos(\omega t + \phi)$, segue que,

$$y(t) = A \cos(\omega t + \phi).$$

Nesta subseção, supomos que não havia nenhuma interferência no movimento descrito. No entanto, ao colocar uma massa atada em uma mola estará sujeita a pelo menos uma força de resistência; a saber, o meio ambiente. Para tais sistemas, daremos o nome de **Movimento Amortecido** que será visto na próxima subseção.

2.9.2 Equação Diferencial do Movimento com Amortecimento

Geralmente em mecânica, adotamos que a força de amortecimento que age em um corpo é proporcional a uma potência da velocidade, vamos supor que esta seja proporcional à $\frac{dy}{dt}$. Vamos supor também que não haja nenhuma outra força de resistência sobre o sistema, assim pela segunda lei de Newton, temos,

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y - \beta \cdot \frac{dy}{dt}, \tag{2.37}$$

onde β é uma constante de proporcionalidade. Note também que colocamos a força de amortecimento com sinal negativo indicando que esta é contrária ao movimento.

Dividindo a equação (2.37) por m, teremos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}\cdot y - \frac{\beta}{m}\cdot\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\beta}{m}\cdot\frac{dy}{dt} - \frac{k}{m}\cdot y$$

Por conveniência, faremos $2\lambda = \dfrac{\beta}{m}$ e $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, desta forma podemos reescrever a equação acima como,

$$y^{''}(t) + 2\lambda y^{'}(t) + \omega^2 y = 0 \tag{2.38}$$

A equação (2.38) é uma equação diferencial ordinária, linear e homogênea, cuja equação característica é dada por,

$$m + 2\lambda m + \omega^2 = 0.$$

Calculando o discrimante dessa equação,

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot\omega^2 = 4(\lambda^2 - \omega^2)$$

assim as raízes serão dadas por,

$$m = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2 - \omega^2)}}{2\cdot 1} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Notavelmente, o sinal de Δ depende do sinal de $\lambda^2 - \omega^2$, logo teremos três casos a considerar:

Primeiro caso: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$. Chamamos esse caso de sistema **superamortecido**, e nesse, como as raízes são reais e distintas, a solução geral da equação (2.38) é,

$$y(t) = c_1\cdot e^{m_1\cdot t} + c_2\cdot e^{m_2\cdot t}$$

Segundo caso: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$. Chamamos esse caso de sistema **criticamente amortecido**, e nesse como teremos uma raíz real dupla a solução geral da equação (2.38) é,

$$y(t) = c_1\cdot e^{m_1\cdot t} + c_2\cdot t\cdot e^{m_1\cdot t}$$

Terceiro caso: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$. Chamamos esse caso de sistema **subamortecido**, e nesse caso como teremos duas raízes complexas $m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}i$ e $m_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}i$, a solução geral da equação (2.38) será dada por,

$$y(t) = c_1 e^{-\lambda t}\cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + c_2 e^{-\lambda t}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)}t$$

Forma alternativa de $y(t)$

De maneira análoga ao que fizemos no movimento livre sem amortecimento, fazendo $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e considerando o ângulo de fase ϕ, teremos novamente $c_1 = A \operatorname{sen} \phi$ e $c_2 = A \cos \phi$ e consequentemente as soluções poderão ser vistas como:

$$y(t) = Ae^{-\lambda t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)}t + \phi\right).$$

Exemplo 2.27. *Uma força de $2N$ distende uma mola de $1m$. Um peso de $0,2kg$ é atado à uma mola e o sistema é então imerso em um meio que oferece uma força de amortecimento numericamente igual a $0,4$ vezes a velocidade instantânea.*

a) Encontre a equação de movimento se o peso é solto a partir do repouso $1m$ acima da posição de equilíbrio.

b) Expresse a equação do movimento na forma,

$$y(t) = Ae^{-\lambda t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi\right)$$

Solução:

a) A equação que descreve o movimento com amortecimento é dado por,

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y - \beta \cdot \frac{dy}{dt}$$

Pelo enunciado uma força de $2N$ distende a mola em $1m$. Assim, pela lei de Hooke, $2 = k \cdot 1 \Rightarrow k = 2N/m$. Ao colocar uma massa $m = 0,2kg$, temos que a força de amortecimento é $F = 0,4\frac{dy}{dt}$, assim, $\beta = 0,4$. Substituindo os valores na equação que descreve com amortecimento, temos,

$$0,2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -2 \cdot y - 0,4 \cdot \frac{dy}{dt}$$

dividindo a equação por $0,2$ e isolando os termos, vêm:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dt} + 10y = 0$$

que é equivalente a:

$$y^{''}(t) + 2y^{'}(t) + 10y(t) = 0$$

Também pelo enunciado o peso é solto a partir do repouso, assim $y^{'}(0) = 0$ e como este é solto $1m$ acima da posição de equilíbrio, temos também que $y(0) = 1$. Logo, a equação do movimento é dado pelo seguinte problema de valor inicial:

$$y^{''}(t) + 2y^{'}(t) + 10y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y^{'}(0) = 0$$

b) Fazendo $2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1$ e $\omega^2 = 10$, temos que $\lambda^2 + \omega^2 = 1 - 10 = -9 < 0$. Desta forma a solução da equação diferencial ordinária é dada por:

$$y(t) = c_1 e^{-\lambda t} \cos \sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)} t + c_2 e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)} t$$

substituindo λ e ω^2, teremos:

$$y(t) = c_1 e^{-1 \cdot t} \cos \sqrt{(10 - 1^2)} t + c_2 e^{-1 \cdot t} \operatorname{sen} \sqrt{(10 - 1^2)} t$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos 3t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} 3t$$

derivando a equação acima em relação a t usando a regra da cadeia, temos:

$$y^{'}(t) = -c_1 e^{-t} \cos 3t - 3c_1 e^{-t} \operatorname{sen} 3t - c_2 e^{-t} \operatorname{sen} 3t + 3c_2 e^{-t} \cos 3t$$

aplicando as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y^{'}(0) = 0$, temos que,

$$y(0) = c_1 e^{(-0)} \cos(3 \cdot 0) + c_2 e^{(-0)} \operatorname{sen}(3 \cdot 0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y^{'}(0) = -c_1 e^{(-0)} \cos(3 \cdot 0) - 3c_1 e^{(-0)} \operatorname{sen}(3 \cdot 0) - c_2 e^{(-0)} \operatorname{sen}(3 \cdot 0) + 3c_2 e^{(-0)} \cos(3 \cdot 0) = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}$$

fazendo $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, temos,

$$A = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

Colocando na forma pedida, temos,

$$y(t) = \frac{\sqrt{10}}{3} e^t \operatorname{sen}(\sqrt{10 - (1)^2 t} + \phi) = \frac{\sqrt{10}}{3} e^t \operatorname{sen}(3t + \phi)$$

Exemplo 2.28. *Um peso de $0,75kg$ é atado a uma mola cuja constante elástica vale $6N/m$. O movimento subsequente está sujeito a uma força de resistência numericamente igual a β ($\beta > 0$) vezes a velocidade instantânea. Se o peso parte da posição de equilíbrio com velocidade de $2m/s$ para cima, mostre que, se $\beta > 3\sqrt{2}$, a equação do movimento é*

$$y(t) = \frac{-3}{\sqrt{\beta^2 - 18}} e^{\frac{-2\beta t}{3}} \, senh \, \frac{2}{3} \sqrt{\beta^2 - 18t}$$

Solução: Pelo enunciado, $m = 0,75 = \frac{3}{4}$ e $k = 6$. Além disso, como o peso parte da posição de equilíbrio com uma com velocidade de $2m/s$ para cima, temos as seguintes condições iniciais $y(0) = 0$ e $y^{'}(0) = -2$. Substituindo os valores dados na equação diferencial do movimento com amortecimento, teremos,

$$\frac{3}{4} y^{''} = -6y - \beta y^{'},$$

multiplicando a equação por $\frac{4}{3}$ e colocando todos os termos no primeiro membro da equação, obtemos o seguinte problema de valor inicial,

$$y^{''} + \frac{4\beta}{3}y^{'} + 8y = 0; \quad y(0) = 0 \quad e \quad y^{'}(0) = -2.$$

A equação característica da equação diferencial ordinária acima é dada por,

$$m^2 + \frac{4\beta}{3}m + 8 = 0,$$

calculando agora o discrinante Δ dessa equação, temos,

$$\Delta = \left(\frac{4\beta}{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = \frac{16\beta^2 - 288}{9},$$

cujas raízes são dadas por,

$$m = \frac{-\frac{4\beta}{3} \pm \sqrt{\frac{16\beta^2-288}{9}}}{2 \cdot 1} = \frac{-\frac{4\beta}{3} \pm \frac{\sqrt{16\beta^2-288}}{3}}{2} = -\frac{2\beta}{3} \pm \frac{2\sqrt{\beta^2 - 18}}{3}.$$

Mas, por hipótese, $\beta > 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\beta^2 - 18} > 0$. Logo, a solução da equação diferencial ordinária do problema é dada por,

$$y(t) = c_1 e^{\left(\frac{-2\beta+2\sqrt{\beta^2-18}}{3}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{-2\beta-2\sqrt{\beta^2-18}}{3}\right)t}$$

derivando $y(t)$ em relação a t, temos,

$$y^{'}(t) = c_1 e^{\left(\frac{-2\beta+2\sqrt{\beta^2-18}}{3}\right)t}\left(\frac{-2\beta + 2\sqrt{\beta^2 - 18}}{3}\right) + c_2 e^{\left(\frac{-2\beta-2\sqrt{\beta^2-18}}{3}\right)t}\left(\frac{-2\beta - 2\sqrt{\beta^2 - 18}}{3}\right)$$

Pelas condições iniciais do problema, temos,

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

por outro lado,

$$y^{'}(0) = -2 \Rightarrow c_1\left(\frac{-2\beta + 2\sqrt{\beta^2 - 18}}{3}\right) + c_2\left(\frac{-2\beta - 2\sqrt{\beta^2 - 18}}{3}\right) = -2$$

fazendo $c_1 = -c_2$ na equação acima, teremos,

$$c_2 = \frac{3}{2\sqrt{\beta^2 - 18}} \quad e \quad c_1 = -\frac{3}{2\sqrt{\beta^2 - 18}}$$

portanto, a solução geral da equação diferencial ordinária do problema é,

$$y(t) = -\frac{3}{2\sqrt{\beta^2 - 18}}e^{\left(\frac{-2\beta+2\sqrt{\beta^2-18}}{3}\right)t} + \frac{3}{2\sqrt{\beta^2 - 18}}e^{\left(\frac{-2\beta-2\sqrt{\beta^2-18}}{3}\right)t},$$

colocando os termos comuns em evidência, temos,

$$y(t) = -\frac{3}{2\sqrt{\beta^2 - 18}} e^{-\frac{2\beta t}{3}} \left(e^{\frac{2}{3}\sqrt{\beta^2-18}} - e^{-\frac{2}{3}\sqrt{\beta^2-18}} \right),$$

mas, $senh\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Logo, a solução geral toma a forma,

$$y(t) = -\frac{3}{\sqrt{\beta^2 - 18}} e^{-\frac{2\beta t}{3}} senh\ \frac{2}{3}\sqrt{\beta^2 - 18}t.$$

2.9.3 Movimento Forçado

Nesse tipo de mocimento uma força $f(t)$ age no sistema vibratório. Vamos dividir esse tipo de movimento em dois casos:

Caso I: Com amortecimento

Consideremos agora uma força $f(t)$ agindo no sistema vibratório massa mola que poderia ser uma força causando um movimento oscilatório vertical no suporte, conforme a figura:

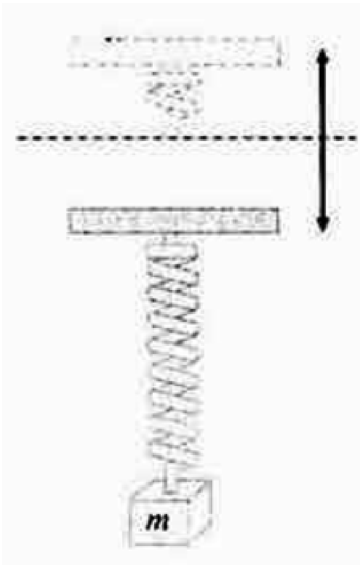


Figura 2.9: movimento forçado com amortecimento.

Considerando a função $f(t)$, pela segunda lei de Newton teremos,

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y - \beta \cdot \frac{dy}{dt} + f(t).$$

Dividindo a equação acima por m e isolando $f(t)$ teremos,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = \frac{f(t)}{m} \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{f(t)}{m},$$

ou equivalentemente,

$$y^{''}(t) + 2\lambda y^{'}(t) + \omega^2 y(t) = F(t), \tag{2.39}$$

onde $F(t) = \frac{f(t)}{m}$. Observe que a equação (2.39) é uma equação diferencial ordinária, linear, não-homogênea e como vimos, para resolvê-la podemos usar o método dos coeficientes a determinar ou o método da variação de parâmetro. Assim, a solução geral será dada por,

$$y(t) = y_c + y_p,$$

onde y_c é a solução da equação homogênea associada e y_p é a solução particular de (2.39). Quando $t \to \infty$ a solução y_c decai exponencialmente, ou seja, $y_c \to 0$ o que faz dessa solução uma **solução transitória**, desta forma a solução particular y_p descreve aproximadamente o deslocamento dos pesos no problema, sendo a solução y_p chamada de **solução estacionária**.

Caso II: Sem amortecimento

Com uma força externa agindo e sem nenhum amortecimento, não há solução transitória na solução do problema.

Exemplo 2.29. *Vamos resolver o problema de valor inicial*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = F_0 \operatorname{sen} \gamma t, \quad y(0) = 0, \quad y^{'}(0) = 0.$$

Solução: A equação acima é equivalente à,

$$y^{''}(t) + \omega^2 y(t) = F_0 \operatorname{sen} \gamma t.$$

Essa equação é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear, não-homogênea. Primeiramente, vamos encontrar a solução y_c da parte homogênea associada cuja equação característica é dada por,

$$m^2 + \omega^2 = 0.$$

Calculando as raízes da equação característica encontramos,

$$m_1 = \omega i \quad e \quad m_2 = -\omega i.$$

Logo, a solução da parte homogênea associada é,

$$y_c = c_1 e^0 \cos \omega t + c_2 e^0 \operatorname{sen} \omega t = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t.$$

Nos preocuparemos agora em encontrar uma solução particular y_p para o problema proposto. Neste caso, usaremos o método dos coeficientes a determinar. Supomos então que, $y_p(t) = A \cos \gamma t + B \operatorname{sen} \gamma t$. Derivando $y_p(t)$ em relação a t, temos,

$$y_p^{'}(t) = -A\gamma \operatorname{sen} \gamma t + B\gamma \cos \gamma t,$$

$$y_p^{''}(t) = -A\gamma^2 \cos \gamma t - B\gamma^2 \operatorname{sen} \gamma t,$$

daí, substituindo no problema proposto, temos,

$$-A\gamma^2 \cos \gamma t - B\gamma^2 \operatorname{sen} \gamma t + \omega \left(A \cos \gamma t + B \operatorname{sen} \gamma t \right) = F_0 \operatorname{sen} \gamma t$$

$$A \cos \gamma(-\gamma^2 + \omega^2) + B \operatorname{sen} \gamma t(-\gamma^2 + \omega^2) = F_0 \operatorname{sen} \gamma t$$

pela igualdade, vêm,

$$F_0 = B(-\gamma^2 + \omega^2) \Rightarrow B = \frac{F_0}{(-\gamma^2 + \omega^2)}$$

$$0 = A(-\gamma^2 + \omega^2) \Rightarrow A = 0$$

logo, a solução particular $y_p(t)$ é dada por,

$$y_p(t) = \frac{F_0}{(-\gamma^2 + \omega^2)} \operatorname{sen} \gamma t,$$

podemos então exibir a solução geral da equação do problema proposto,

$$y(t) = y_c + y_p$$

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{(-\gamma^2 + \omega^2)} \operatorname{sen} \gamma t$$

Resolvendo agora o problema de valor inicial temos,

$$y(0) = c_1 \cos(\omega \cdot 0) + c_2 \operatorname{sen}(\omega \cdot 0) + \frac{F_0}{(-\gamma^2 + \omega^2)} \operatorname{sen}(\gamma \cdot 0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y^{'}(0) = -c_1 \operatorname{sen}(\omega \cdot 0)\omega + c_2 \cos(\omega \cdot 0)\omega + \frac{F_0}{(-\gamma^2 + \omega^2)} \cos(\gamma \cdot 0)\gamma = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{-F_0 \gamma}{\omega(-\gamma^2 + \omega^2)},$$

e portanto, a solução geral da equação diferencial ordinária é,

$$y(t) = -\frac{F_0\gamma}{\omega(-\gamma^2+\omega^2)}\operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{(-\gamma^2+\omega^2)}\operatorname{sen}(\gamma t)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{F_0}{\omega(-\gamma^2+\omega^2)}\left(-\gamma\operatorname{sen}(\omega t) + \omega\operatorname{sen}(\gamma t)\right), \tag{2.40}$$

$\gamma \neq \omega$.

Ressonância pura: Apesar da aparente indefinição $\gamma = \omega$ em (2.40), se a equação diferencial no exemplo (2.29) fosse:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = F_0 \operatorname{sen}\omega t, \quad y(0)=0, \quad y^{'}(0)=0$$

teríamos como resposta,

$$y(t) = \frac{F_0}{2\omega^2}\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{F_0}{2\omega}t\cos(\omega t) \tag{2.41}$$

ou seja, os deslocamentos se tornam grandes quando $t \to \infty$. Esse fenômeno é conhecido como **ressonância pura**. O gráfico abaixo ilustra o movimento típico nesse caso:

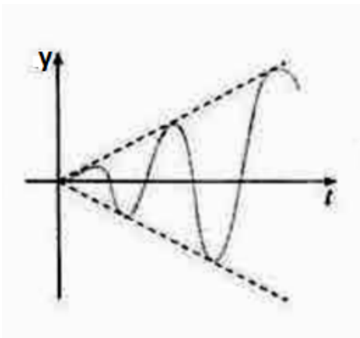


Figura 2.10: Ressonância pura.

Observamos, portanto, que não é necessário usar o processo de em (2.40) para obter a solução quando $\gamma = \omega$. Alternativamente, a equação (2.41) pode ser obtida resolvendo o problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = F_0 \operatorname{sen}\omega t, \quad y(0)=0, \quad y^{'}(0)=0$$

diretamente pelos métodos tradicionais.

Curva de Ressonância: No caso de vibrações subamortecidas, a solução geral para a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = F_0 \operatorname{sen}\gamma t$$

é

$$y(t) = Ae^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}t+\phi) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}\,\mathrm{sen}(\gamma t+\theta), \tag{2.42}$$

em que $A = \sqrt{c_1^2+c_2^2}$ e os ângulos de fase ϕ e θ são, respectivamente, definidos por

$$\mathrm{sen}\,\phi = \frac{c_1}{A}, \quad \cos\phi = \frac{c_2}{A}, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{-2\lambda\gamma}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \cos\theta = \frac{\omega^e-\gamma^2}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}$$

Exemplo 2.30. *Analisando a equação (2.42), vemos que $y_c(t)$ é transiente quando há amortecimento, e então, após um longo período de tempo, a solução fica próxima da solução estacionária*

$$y_p(t) = g(\gamma)\,\mathrm{sen}(\gamma t+\theta),$$

em que definimos,

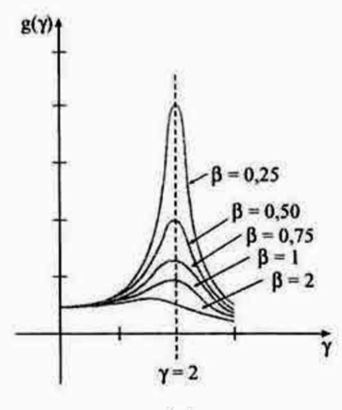
$$g(\gamma) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}$$

Embora a amplitudede y_p seja limitada, podemos ver facilmente que as oscilações máximas ocorrerão quando $\gamma_1 = \sqrt{\omega^2-2\lambda^2}$. Logo, quando a frequência da força externa for $\frac{\omega^2-2\lambda^2}{2\pi}$, dizemos que o sistema está em ***ressonância.***

No caso específico, $k=4$, $m=1$, $F_0=2$, $g(\gamma)$ torna-se

$$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4-\gamma^2)^2+\beta^2\gamma^2}} \tag{2.43}$$

A figura abaixo ***a)*** *mostra o gráfico de (2.43) para vários valores do coeficiente de amortecimento β. Essa família de gráficos é chamada de* ***curva de ressonância*** *do sistema. Observeo comportamentodas amplitudes $g(\gamma)$ quando $\beta \to 0$, isto é,quando o sistema se aproxima da ressonância pura.*



(a)

β	γ_1	$g(\gamma_1)$
2	1,41	0,58
1	1,87	1,03
0,75	1,93	1,36
0,50	1,97	2,02
0,25	1,99	4,01

(b)

Figura 2.11: Gráfico de 2.43para alguns valores do coeficiente de amortecimento β.

Exemplo 2.31. *Considere o problema físico do movimento forçado de uma mola sem amortecimento,*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = F_0 \cos \lambda t, \quad y(0) = 0, \quad y^{'}(0) = 0$$

a) *Mostre que a solução para o problema de valor inicial é*

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \lambda^2}(\cos \lambda t - \cos \omega t)$$

b) *Calcule* $\lim\limits_{\lambda \to \omega} \dfrac{F_0}{\omega^2 - \lambda^2}(\cos \lambda t - \cos \omega t)$

c) *Mostre que* $y(t)$ *dado na parte a) pode ser escrito na forma*

$$y(t) = \frac{-2F_0}{\omega^2 - \lambda^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\lambda - \omega)t \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\lambda - \omega)t$$

Solução:

a) A equação é equivalente a:

$$y^{''}(t) + \omega^2 y = F_0 \cos \lambda t, \quad y(0) = 0, \quad y^{'}(0) = 0.$$

Esta é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear, não homogênea cuja solução é dada por,

$$y(t) = y_c + y_p$$

onde y_c é a solução da parte homogênea e y_p é uma solução particular da equação diferencial dada. Vamos encontrar a solução da parte homogênea, cuja equação caractreística é dada por,

$$m^2 + \omega^2 = 0,$$

como $\Delta = -4\omega < 0$, a solução da equação diferencial ordinária homogênea é:

$$y_c = c_1 e^0 \cos \omega t + c_2 e^0 \operatorname{sen} \omega t = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t.$$

Vamos agora procurar uma solução particular para a parte não-homogênea. Faremos a solução pelo método dos coeficientes a determinar. Supomos que $y_p = A \cos \lambda t + B \operatorname{sen} \lambda t$ seja a solução particularsugerida. Como, $y_p^{'} = -A\lambda \operatorname{sen} \lambda t + B\lambda \cos \lambda t$ e $y_p^{''} = -A\lambda^2 \cos \lambda t - B\lambda^2 \ sen\lambda t$ e substituindo na equação diferencial ordinária do problema, obtemos,

$$-A\lambda^2 \cos \lambda t - B\lambda^2 \ sen\lambda t + \omega^2(A \cos \lambda t + B \operatorname{sen} \lambda t) = F_0 \cos \lambda t$$

$$-A\lambda^2\cos\lambda t - B\lambda^2\ sen\lambda t + \omega^2 A\cos\lambda t + \omega^2 B\,\text{sen}\,\lambda t) = F_0\cos\lambda t$$

logo, da igualdade, temos,

$$-A\lambda^2\cos\lambda t + \omega^2 A\cos\lambda t = F_0\cos\lambda t \Rightarrow A(\omega^2-\lambda^2) = F_0 \Rightarrow A = \frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}$$

e

$$-B\lambda^2\,\text{sen}\,\lambda t + B\omega^2\,\text{sen}\,\lambda t = 0 \Rightarrow B = 0$$

desta forma podemos exibir a solução particular que é dada por,

$$y_p = \frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}\cos\lambda t.$$

assim, a solução geral da equação diferencial do problema proposto é,

$$y(t) = c_1\cos\omega t + c_2\,\text{sen}\,\omega t + \frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}\cos\lambda t.$$

Aplicando as condições iniciais do problema, teremos:

$$y(0) = c_1\cos(\omega\cdot 0) + c_2\,\text{sen}(\omega\cdot 0) + \frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2} = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}$$

$$y^{'}(0) = -c_1(\text{sen}\,\omega\cdot 0)\omega + c_2(\cos\omega\cdot 0)\cdot\omega = 0 \Rightarrow c_2\cdot\omega = 0.$$

Como $\omega \neq 0$, temos que $c_2 = 0$. Assim, a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t) = -\frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}\cos\omega t + 0\cdot\text{sen}\,\omega t + \frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}\cos\lambda t = -\frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}\cos\omega t + \frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}\cos\lambda t$$

colocando o termo comum em evidência, temos:

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}(\cos\lambda t - \cos\omega t)$$

b)

$$\lim_{\lambda\to\omega}\frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}(\cos\lambda t - \cos\omega t) =$$

$$\lim_{\lambda\to\omega}\frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}\cos\lambda t - \lim_{\lambda\to\omega}\frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}\cos\omega t =$$

$$F_0\left[\lim_{\lambda\to\omega}\frac{(\cos\lambda t - \cos\omega t)}{(\omega^2-\lambda^2)}\right] =$$

Aplicando L'Hôpital, vêm,

$$F_0\left[\lim_{\lambda\to\omega}\frac{\frac{d}{d\lambda}(\cos\lambda t - \cos\omega t)}{\frac{d}{d\lambda}(\omega^2-\lambda^2)}\right] =$$

$$F_0\left[\lim_{\lambda\to\omega}\frac{-t(\text{sen}\,\lambda t) - t(\text{sen}\,\lambda t)}{-2\lambda}\right] =$$

$$F_0\left[\lim_{\lambda\to\omega}\frac{-2t(\operatorname{sen}\lambda t)}{-2\lambda}\right]=$$
$$F_0\cdot\frac{(-2t\operatorname{sen}\omega t)}{-2\lambda}=$$
$$\frac{F_0 t\operatorname{sen}\omega t}{\lambda}.$$

c) Notamos agora que,

$$\cos\lambda t-\cos\omega t=-2\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda t+\omega t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda t-\omega t}{2}\right),$$

logo, a solução encontrada no item a pode ser vista como,

$$y(t)=\frac{F_0}{\omega^2-\lambda^2}\cdot\left[-2\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda t+\omega t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda t-\omega t}{2}\right)\right]$$
$$\Rightarrow y(t)=\frac{-2F_0}{\omega^2-\lambda^2}\operatorname{sen}\left(\frac{(\lambda+\omega)t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(\lambda-\omega)t}{2}\right)$$
$$\Rightarrow y(t)=\frac{-2F_0}{\omega^2-\lambda^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\lambda-\omega)t\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\lambda+\omega)t$$

como queríamos determinar.

2.9.4 Circuitos elétricos em série L-R-C

Como dissemos no início da seção, são vários fenômenos que são modelados pela equação diferencial ordinária $ay^{''}+by^{'}+cy=f(t)$. De forma simplificada, por exemplo, um circuito elétrico é um dispositivo formado pela ligação de vários elementos elétricos, tais como *resistores, indutores, capacitores*, fontes de tensão, fontes de correntes e interruptores conectados.

Em um circuito elétrico, a **tensão elétrica** E entre as extremidades de um elemento é a diferença de potencial elétrico entre as mesmas, isto é, a diferença de energia elétrica potencial, por unidade de carga elétrica, entre dois pontos em questão. No SI, a unidade de energia é o Joule (abreviado J) e a unidade de carga é o Coulomb (abreviado C). Portanto a unidade de medida de tensão elétrica é $\frac{J}{C}$, também conhecida por **Volt** (abreviado V).

Já a **corrente elétrica** que atravessa um de seus elementos (dito então, um **condutor**) é o fluxo de elétrons observado no mesmo. A intensidade $i(t)$ dessa corrente, calculada no instante t, é a taxa de variação temporal instantânea da quantidade Δq de carga elétrica que atravessa o circuito entre as extremidades do condutor em questão:

$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}$$

Assim, medindo cargas em Coulombs e intervalos de tempos em segundos, concluímos que a unidade de medida de corrente é $\frac{C}{s}$, também conhecida como **Ampère** (abreviado A).

Um **resistor** é um elemento elétrico condutor utilizado com uma de duas funções básicas: transformar energia elétrica em energia térmica ou limitar a corrente elétrica que o atravessa (oferecendo para tanto, resistênca a passagem da carga). Esses resistores satisfazem a **primeira lei de Ohm**[6],

$$R = \frac{E_r(t)}{i(t)}$$

onde R é a resistência elétrica do resistor. Medindo E em Volts e i em Ampère, temos R medida em $\frac{V}{A}$, unidade conhecida como **Ohm** (abreviado Ω).

A lei de Ampère do eletromagnetismo garante que um campo elétrico é gerado sempre que uma corrente elétrica atravessa um condutor. Em circuitos elétricos, um **indutor** é um condutor que se vale da lei de Ampère para armazenar energia potencial elétrica no campo magnético gerado ao fazermos uma corrente elétrica atravessar as várias espiras da bobina à qual geralmente é construido o indutor. Esse processo de armazenamento de energia, em física, é conhecido como **indução eletromagnética**. A tensão instantânea entre os terminais de um indutor é dada por

$$E_l(t) = L\frac{di}{dt}$$

sendo a constante de proporcionalidade L denominada **indutância** do indutor.

A análise de circuitos elétricos é baseada na aplicação judiciosa da primeira lei de **Kirchhoff**[7], também conhecida como **lei das correntes** que diz: *em um nó*[8] *qualquer de um circuito, a soma das correntes elétricas que entram é igual a soma das correntes elétricas que saem* e da segunda lei do mesmo autor, também conhecida como **lei das malhas** que diz: *a soma algébrica das diferenças de potencial entre as extremidades dos elementos que compõem um caminho fechado é sempre nula.*

Considere o sistema elétrico abaixo:

[6]Georg Simon Ohm (1787 - 1854) nasceu na Bavária, Alemanha. Foi um importante físico do século XIX

[7]Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887) foi um físico alemão com contribuições científicas principalmente no campo dos circuitos elétricos, na espectroscopia, na emissão de radiação dos corpos negros e na teoria da elasticidade (modelo de placas de Kirchhoff). Kirchhoff propôs o nome de "radiação do corpo negro"em 1862. É o autor de duas leis fundamentais da teoria clássica dos circuitos elétricos e da emissão térmica.

[8]É um ponto ao qual estão ligados dois ou mais elementos

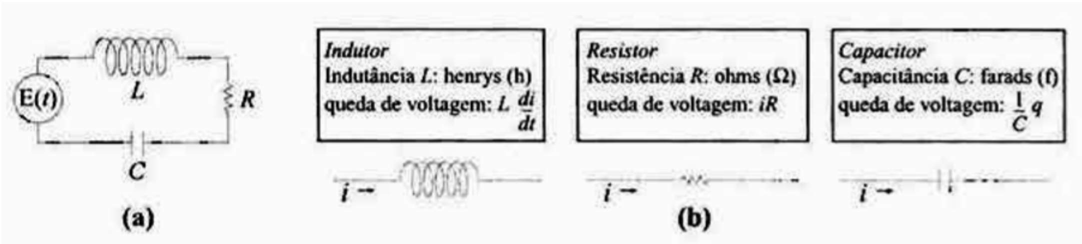


Figura 2.12: Circuito L-R-C.

Se $i(t)$ denota a intensidade em um circuito em série L-R-C como mostrado na figura acima em (a), então a queda de voltagem através do indutor, resistor e capacitor é igual na figura em (b). Como a Capacitância é definida por $C = \dfrac{q}{E_c}$ e a lei de **Faraday**[9] nos garante que $L = \frac{E_l}{i'}$, temos pela lei de Kirchoff que a soma algébrica das diferenças de potencial é igual a $E(t)$, ou seja,

$$E_l + E_r + E_c = E(t)$$

equivalentemente,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t)$$

por outro lado, a carga $q(t)$ no capacitor está relacionada com a corrente $i(t)$ e como esta é $i = \frac{dq}{dt}$, a equação acima se torna:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{2.44}$$

Se $E(t) = 0$, as vibrações no circuito são ditas livres. Neste caso a equação diferencial ordinária será linear e homogênea com equação característica igual a:

$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0.$$

Ao calcularmos o discriminante, teremos:

$$\Delta = R^2 - 4 \cdot L \cdot \frac{1}{C} = R^2 - \frac{4L}{C}$$

novamente devemos discutir o sinal do discriminate e aproveitaremos para classificar o sistema. Assim:

i) Se $R^2 - \dfrac{4L}{C} > 0$, dizemos que o circuito é **super amortecido**,

[9] Michael Faraday (1791-1867) foi um dos cientistas mais influentes da Física e da Química e também um dos maiores experimentalistas da história. Trouxe grandes contribuições para a área do Eletromagnetismo, como a descoberta da indução eletromagnética – sua maior descoberta.

ii) Se $R^2 - \dfrac{4L}{C} = 0$, dizemos que o circuito é **criticamente amortecido**,

iii) Se $R^2 - \dfrac{4L}{C} < 0$, dizemos que o circuito é **subamortecido**.

Exemplo 2.32. *Encontre a carga no capacitor em um circuito em série L-R-C quando* $L = \frac{1}{4}$ *henry,* $R = 20$ *ohms,* $C = \frac{1}{300}$ *farad,* $E(t) = 0$ *volt,* $q(0) = 4$ *coulomb e* $i(0) = 0$ *ampére. A carga no capacitor se anula em algum instante?*

Solução: Primeiramente, jotamos que $q^{'}(t) = i(t)$, desta forma temos que $q^{'}(0) = 0$. Substituindo os valores do enunciado em (2.44), temos:

$$\frac{1}{4}\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\frac{1}{300}}q = 0$$

fazendo os ajustes necessários e multiplicando a equação por 4, teremos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$q^{''}(t) + 80q^{'}(t) + 1200q(t) = 0, \quad q(0) = 4 \ e \ q^{'}(0) = 0$$

A equação característica da equação diferencial ordinária é dada por:

$$m^2 + 80m + 1200 = 0$$

o discriminante Δ dessa equação é:

$$\Delta = (80)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1200 = 6400 - 4800 = 1600$$

desta forma as raízes da equação característica são dadas por:

$$m_1 = \frac{-80 + \sqrt{1600}}{2 \cdot 1} = \frac{-80 + 40}{2} = -20$$

$$m_2 = \frac{-80 - \sqrt{1600}}{2 \cdot 1} = \frac{-80 - 40}{2} = -60$$

Assim, a solução da equação diferencial do problema dado é:

$$q(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t} = c_1e^{-20t} + c_2e^{-60t}$$

derivando a solução acima em relação a t, teremos:

$$q^{'}(t) = -20c_1e^{-20t} - 60c_2e^{-60t}$$

substituindo as condições iniciais do problema, obtemos:

$$q(0) = c_1e^{-20\cdot 0} + c_2e^{-60\cdot 0} \Rightarrow c_1 + c_2 = 4 \tag{2.45}$$

$$q^{'}(0) = -20c_1e^{-20\cdot 0} - 60c_2e^{-60\cdot 0} \Rightarrow -20c_1 - 60c_2 = 0 \tag{2.46}$$

isolando c_1 em (2.45) e substituindo em (2.46), temos:

$$-20(4 - c_2) - 60c_2 = 0$$

$$\Rightarrow -80 + 20c_2 - 60c_2 = 0$$

$$\Rightarrow -40c_2 = 80$$

$$\Rightarrow c_2 = -2$$

assim $c_1 = 4 - (-2) = 6$. Portanto a solução geral da equação diferencial ordinária do problema proposto é

$$q(t) = 6e^{-20t} - 2e^{-60t}$$

Vamos agora ver em qual instante a carga q se anula. Para isso façamos $q(t) = 0$, assim:

$$6e^{-20t} - 2e^{-60t} = 0$$

$$\Rightarrow 6e^{-20t} = 2e^{-60t}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{e^{-60t}}{e^{-20t}}$$

$$\Rightarrow 3 = e^{-60t-(-20t)}$$

$$\Rightarrow 3 = e^{-40t}$$

aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade acima, teremos:

$$\ln 3 = -40t$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 3}{-40}$$

$$\Rightarrow t \simeq -0,027465307$$

2.9.5 Pêndulo Simples

Estudaremos nessa seção o pêndulo simples de Galileu, descobeto pelo próprio aproximadamente em 1581. Galileu percebeu que o período do movimento pendular não depende da amplitude (conhecido como isocronismo do pêndulo). Este fato, devidamente trabalhado por Huyghens, veio a revolucionar a forma de medir intervalos de tempo e, portanto, de construir relógios, o que foi imprescindíveis na observação dos fenômenos físicos. Considere então, uma massa m de peso W suspenso a uma haste de comprimento L

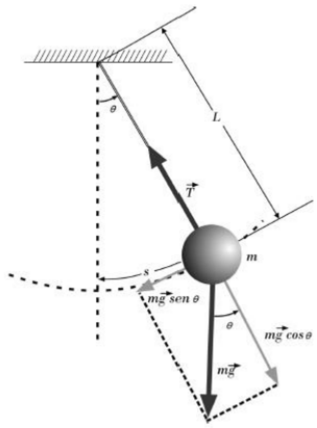


Figura 2.13: Pêndulo simples e a atuação das forças.

O ângulo θ, medido a partir da linha vertical, como função do tempo t, está relacionado com o arco s de um círculo de raio L do seguinte modo:

$$\frac{s}{L} = \theta \Leftrightarrow s = \theta \cdot L$$

Assim, a aceleração angular do movimento é,

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = L \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

e pela segunda lei de Newton a força resultante é,

$$F = m \cdot a = m \cdot L \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2.47}$$

Notamos agora que, as forças que atuam no corpo são as forças pesos e tração, respectivamente,

$$W = mg\cos\theta - mg\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.48}$$

$$T = -mg\cos\theta \tag{2.49}$$

Substituindo (2.48) e (2.49) em (2.47), temos,

$$(mg\cos\theta - mg\,\mathrm{sen}\,\theta) + (-mg\cos\theta) = m \cdot L \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

simplificando obtemos,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow \theta''(t) = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta \tag{2.50}$$

Pelo desenvolvimento em série de Taylor em torno do ponto $\theta = 0$,

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

e para deslocamentos pequenos de θ, temos $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$. Logo, a equação diferencial ordinária com coeficientes constantes que descreve o movimento do pêndulo simples ao substituirmos em (2.50) será,

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\theta \tag{2.51}$$

Vamos agora resolver a equação (2.51) cuja equação auxiliar é dada por,

$$m^2 + \frac{g}{L} = 0$$

cujas raízes são $m_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}i$ e $m_2 = -\sqrt{\frac{g}{L}}i$ Portanto, a solução geral da equação (2.51) é

$$\theta(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \tag{2.52}$$

Fazendo $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, como no exemplo (2.26), e sendo $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, ainda podemos escrever a equação alternativamente como:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi\right)$$

Assim, temos que o período de oscilação é dado por,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{2.53}$$

Exemplo 2.33. *Encontre a equação do movimento que descreve pequenos deslocamentos $\theta(t)$ de um pêndulo simples de comprimento 2 m solto no instante $t = 0$ com um deslocamento de $1/2$ rad à direita do eixo vertical e velocidade angular de $2\sqrt{3}$ m/min para a direita. Calcule a amplitude, o período e a frequência do movimento.*

Solução: Pelo enunciado,

$$\theta(0) = \frac{1}{2}rad \quad e \quad \theta'(0) = \frac{2\sqrt{3}}{60} = \frac{\sqrt{3}}{30}rad/s$$

A solução da equação diferencial ordinária é,

$$\theta(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right).$$

Derivando a equação em relação à t e aplicando as condições iniciais, temos,

$$\theta(0) = c_1 \cos 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

$$\theta^{'}(t) = -c_1\sqrt{\frac{g}{L}}\operatorname{sen} 0 + c_2\sqrt{\frac{g}{L}}\cos 0 \Rightarrow c_2 = \frac{\sqrt{3L}}{30\sqrt{g}}$$

Fazendo $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, obtemos,

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3L}{\sqrt{g}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3L}{900g}}. \tag{2.54}$$

Logo, a equação do movimento que descreve pequenos deslocamentos é dado por,

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3L}{900g}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{30}t + \frac{1}{2}\right).$$

O período de oscilação é dado por,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

logo,

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{30}} = 20\sqrt{3}\pi.$$

A frequência do movimento será dado por,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20\sqrt{3}\pi}.$$

Capítulo 3

Proposta de intervenção

Como vimos nos capítulos anteriores, a solução de uma equação diferencial ordinária não é um número, e sim uma função. Entretando, no ensino médio é comum a formulação de questões que possuam como característica resultados numéricos. Pensando nisso, nas seções a seguir introduziremos algumas propostas de intervenção no ensino médio das equações diferenciais ordinárias.

Não trataremos aqui de formular todo o conceito do cálculo e suas formalidades usualmente usado no ensino superior, o que almejamos é instigar um aluno das séries finais da educação básica a compreender o conceito de modelagem de fenômenos de equações diferenciais ordinárias. Nesse sentido, iremos apresentar alguns modelos matemáticos, que contribuiram para o desenvolvimento de diferentes áreas do conhecimento. Nosso propósito basicamente é desenvolver e motivar o estudo interdisciplinar, afim de que os estudantes do ensino médio possam compreender o problema proposto e resolvê-los com conhecimentos próprios de sua modalidade de ensino.

Obviamente, não é uma tarefa fácil motivar alunos dessa modalidade, no entanto além da apresentação formal do problema, faremos a apresentação dos modelos dentro da realidade dos discentes, o que proporcionará um melhor entendimento e familiaridade destes com o problema proposto. Na ocasião também iremos buscar, sempre que possível, mostrar as comparações entre os resultados obtidos através das equações diferenciais ordinárias e a solução obtida com os ferramentas usadas pelos alunos.

Começaremos esse capítulo com uma definição usada na séries iniciais do ensino médio a qual será muito importante para nos ajudar a modelar os problemas que seguirão.

Definição 3.1. *Progressão Geométrica: Chamamos de Progressão Geométrica a sequência numérica* *na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo antecessor, isto é:*

$$\frac{a_{t+1}}{a_t} = k$$

com $t \in \mathbb{N}$, ou equivalentemente,

$$a_{t+1} = k \cdot a_t$$

onde k é a taxa de crescimento constante de um termo para o outro.

Observe pela definição que:

a) Se $0 < k < 1$, a progressão geométrica é decrescente, pois $a_{t+1} = ka_t < a_t$;

b) Se $k = 1$, a progressão geométrica é dita estacionária;

c) Se $k > 1$, a progressão é dita crescente.

São exemplos de progressões geométricas:

Exemplo 3.1.

$$(2, 6, 18, 54) \rightarrow \textit{ progressão geométrica de razão } k = 3$$

Exemplo 3.2.

$$(4, 4, 4, 4) \rightarrow \textit{ progressão geométrica de razão } k = 1$$

Exemplo 3.3.

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{10}{6}, \frac{20}{18}, \frac{40}{54}\right) \rightarrow \textit{ progressão geométrica de razão } k = \frac{2}{3}$$

3.1 Apresentação do modelo de Malthus

A proposta de utilização de "modelos" para estabelecer o crescimento populacional começou com o economista inglês Malthus (1798). Seu modelo é baseado em dois postulados:

1- O alimento é necessário à subsistência do homem;

2- A paixão entre os sexos é necessária e deverá se comportar, aproximadamente, como um estado permanente.

Supondo que tais postulados estejam garantidos, Malthus afirma que "a capacidade de reprodução do homem é superior à capacidade da terra de produzir meios para sua subsistência. Assim, a população quando não obstaculizada, aumenta a uma razão geométrica enquanto que os meios de subsistência aumentam apenas em uma razão aritmética. Pela lei de nossa natureza, que torna o alimento necessário à vida do homem, os efeitos destas duas diferentes capacidades devem ser mantidos iguais". Segundo Malthus, a miséria seria, na verdade, um fator positivo, que atuou ao longo de toda a história humana, para equilibrar a desproporção natural entre a multiplicação do homem e a produção de alimentos. Apesar da proposta de Malthus para o crescimento populacional ter dois postulados, o que se tornou conhecido como Modelo de Malthus foi apenas o crescimento exponencial. Tal modelo assume que a população P cresce como uma progressão geométrica, isto é

$$P_{(t+1)} = kP_t$$

que é equivalente à:

$$P_t = (1+i)P_{(t-1)}$$

onde i significa a diferença entre a taxa de natalidade N e a taxa de mortalidade M em um período t de tempo. Para Malthus, essa taxa i se mantinha sempre constante, ou seja, $i = \alpha$, além disso, o crescimento de vida deveria ser otimizado, sem fome, guerra, epidemia ou qualquer catástrofe, onde todos os indivíduos seriam idênticos e com o mesmo comportamento. Notavelmente, o modelo de Malthus só se aplica para populações pequenas, haja vista que, com o aumento da população espera-se que a taxa M de mortalidade cresça e a taxa N de natalidade diminua em decorrência, principalmente, da competição entre os indivíduos. No entanto, para populações pequenas o modelo de Malthus é uma boa maneira de se fazer a previsão de uma certa população futura. Supondo a teoria desenvolvida pelo cientista Malthus, vamos expandir os termos da progressão:

- para $t = 1$ (população inicial)

$$P_1 = (1+\alpha)P_0$$

- para $t = 2$:

$$P_2 = (1+\alpha)P_1 = (1+\alpha)\cdot(1+\alpha)P_0 = (1+\alpha)^2 P_0$$

progressivamente, tem-se, para $t = n$:

$$P_n = (1+\alpha)^n P_0 \tag{3.1}$$

O resultado acima é uma função exponencial que depende do tempo n, e que pode ser definido como:

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & n & \mapsto & P(n) = (1+\alpha)^n P_0 \end{array}$$

Onde α é constante podendo ser calculada fazendo a diferença entre a taxa de natalidade N e a taxa de mortalidade M ao passo que P_0 é a população inicial.

É importante resaltar que quando fizemos $t = n$ passamos a ter um problema discreto, ou seja, $n \in \mathbb{N}$, diferentemente da solução geral em (1.7.1), cujo valores de $t \in \mathbb{R}_+$.

Vamos agora ver uma aplicação do modelo de Malthus e para isso considere os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) sobre o crescimento populacional de Aracaju de 1960 à 2000.

Ano	População Aracajuana
1960	115.713
1970	186.838
1980	299.422
1991	401.676
2000	461.083

Notamos que pela tabela no ano 1960 ($n = 0$) a população aracajuana era de 115.713 pessoas, e no ano 2000 ($n = 40$) a população era de 461.083. Podemos então calcular a taxa de crescimento i, que para Malthus era constante durante os 40 anos considerados. Substituindo em (3.1), temos:

$$461083 = (1+\alpha)^{40} \cdot 115713 \Rightarrow (1+\alpha)^{40} = \frac{461083}{115713}$$

$$\Rightarrow (1+\alpha) = \sqrt[40]{\frac{461083}{115713}} \Rightarrow \alpha = \sqrt[40]{\frac{461083}{115713}} - 1$$

$$\Rightarrow \alpha \simeq 0,03\%.$$

Com isso, a população aracajuana segundo o modelo de Malthus, cresceria mediante a seguinte função exponencial:

$$P_n = (1,03)^n P_0. \tag{3.2}$$

De posse da função exponencial acima, vamos usá-la para estimar a população aracajuana em 2010, o que equivale a um tempo $n = 50$ anos, assim,

$$P_{50} = (1,03)^{50} P_0,$$

pela tabela acima $P_0 = 115713$, e com isso,

$$P_{50} = (1,03)^{50} \cdot 115713 = 507274$$

Note que, em dados divulgados pelo IBGE, a população aracajuana em 2010 era de 571.149 pessoas nos dando assim um erro aproximado superior a 12 %. Vamos agora fazer uma análise dos resultados obtido com a solução (1.34) e na solução (3.2). Vejamos:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{0,03t} \quad \textit{(em 1.34)}$$

$$P_n = (1,03)^n P_0 \quad \textit{(em 3.2)}$$

note que, como fizemos $t = n$ para obter a expressão geral da progressão geométrica, devemos ter:

$$e^{0,03} = 1,03$$

sendo $N_0 = P_0$. No entanto, como k em (1.34) e α em (3.2) foram aproximados, as respostas obtidas com tais equações para o mesmo intervalo de tempo não são iguais, porém são muito próximos.

3.2 Apresentação do decaimento radiotivo

Um decaimento radioativo ocorre quando isótopos instáveis têm seus núcleos rompidos em razão da instabilidade atômica. Para entender por que um isótopo se desintegra é preciso nos atentar para o núcleo atômico. Sabe-se que o núcleo é carregado de partículas positivas (prótons), e que estas se encontram bem próximas umas das outras. É verdade também que partículas com cargas iguais se repelem. Portanto, a proximidade dos prótons faz com que passem a se repelir, na tentativa de tomar o maior espaço possível. Diante disso, o núcleo se rompe, por não conseguir comportar essas cargas repelentes. Problemas de decaimento radioativo são frequentes no ensino médio e muito cobrado em provas de vestibulares.

O Exame Nacional do Ensino Médio que mede a desenpenho dos estudantes das escolas públicas e particulares do ensino médio, o qual é válido como seleção em todo os países para instituições públicas de ensino superior, além de bolsas de estudos para instituições particulares, propôs, em 2013, a seguinte questão:

ENEM 2013 • QUESTÃO 49

Glicose marcada com nuclídeos de carbono-11 é utilizada na medicina para se obter imagens tridimensionais do cérebro, por meio de tomografia de emissão de pósitrons. A desintegração do carbono-11 gera um pósitron, com tempo de meia-vida de 20,4 min, de acordo com a equação da reação nuclear:

$$ {}^{11}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{11}_{5}\mathrm{B} + \underset{\text{(pósitron)}}{{}^{0}_{1}\mathrm{e}} $$

A partir da injeção de glicose marcada com esse nuclídeo, o tempo de aquisição de uma imagem de tomografia é de cinco meias-vidas.

Considerando que o medicamento contém 1,00 g do carbono-11, a massa, em miligramas, do nuclíde restante, apos a aquisição da imagem, é mais próxima de

A) 0,200.

B) 0,969.

C) 9,80.

D) 31,3.

E) 200.

Vamos resolver esse problema usando conhecimentos apenas dos estudantes do ensino médio. Notamos então, que o decaimento radioativo se comporta como uma progressão geométrica com uma taxa de decaimento $i = -\frac{1}{2}$. Desta forma, podemos ver o problema da seguinte forma:

$$\frac{M_{t+1}}{M_t} = k,$$

onde $k = \frac{1}{2}$ e consequentemente a igualdade acima pode ser vista como:

$$M_{t+1} = \frac{1}{2} \cdot M_t$$

ou equivalentemente:

$$M_t = \frac{1}{2} \cdot M_{t-1}.$$

Vamos agora encontrar a expressão geral da progressão geométrica:

- para $t = 1$:

$$M_1 = \frac{1}{2} \cdot M_0$$

- para $t = 2$:
$$M_2 = \frac{1}{2}M_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot M_0\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 M_0$$
- para $t = 3$:
$$M_3 = \frac{1}{2}M_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 M_0$$
$$\vdots$$

prosseguindo, tem-se $t = n$:
$$M_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot M_0, \tag{3.3}$$
O resultado obtido em (3.3) é uma função exponencial que depende do tempo n, e que pode ser definido como:
$$\begin{array}{rcl} M: \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}_+ \\ n & \mapsto & M(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot M_0 \end{array}$$
Aplicando na solução (3.3) o valor $n = 5$, que pelo enunciado é a quantidade de substância restante após 5 meias-vidas, teremos:
$$M_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1$$
$$M_5 = 1 \cdot \frac{1}{32}$$
$$M_5 = 0,03125$$
o que nos dá como resposta aproximada a letra D.

De maneira generalizada, a quantidade de massa $M(n)$ em função do tempo n pode ser visto pelo gráfico abaixo:

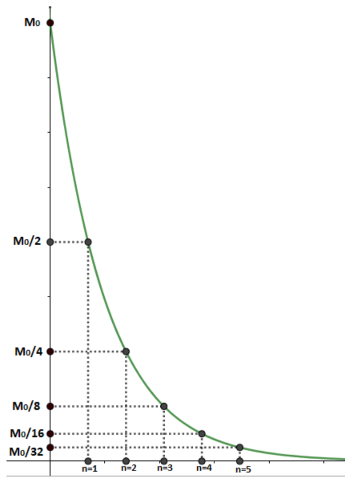


Figura 3.1: Gráfico da massa M_n em função do tempo n.

Neste caso, vale resaltar que a expressão que permite encontrar a solução em função do tempo n, pode ser vista comparando as equações (1.39) e (3.3), nos levando a seguinte função exponencial:

$$M_n = \left(e^{20{,}4k}\right)^n \cdot M_0$$

e como $k = -0,033977802$, podemos ver a solução da progressão geométrica como:

$$M_n = \left(e^{(20{,}4\cdot(-0{,}033977802))}\right)^n \cdot M_0$$

$$M_n = \left(e^{(-0{,}69314716)}\right)^n \cdot M_0$$

$$M_n = e^{(-0{,}69314716\cdot n)} \cdot M_0$$

3.3 Pêndulo Simples

Em 1851, o físico e astrônomo francês Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) demonstrou em público que o movimento de rotação da Terra realizava-se em torno do seu próprio eixo. Esse movimento já era conhecido desde a época de Galileu, sendo ele determinante na ocorrência de alguns fenômeno, como o fato do amanhecer acontecer em horários distintos em diferentes regiôes, dependendo da sua posição ocupada sobre a superfície terreste.

O conceito de pêndulo simples é estudado em física, onde o aluno dessa modalidade tem contato apenas com a fórmula que permite calcular o período de oscilação do movimento, dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.4}$$

Vamos agora aprofundar nossos conhecimetos sobre esse importante assunto visto no ensino médio.

Pêndulo é um sistema formado por um fio inextensível, de massa desprezível e de comprimento L que está ligado em um de suas extremidades a uma partícula de massa m, e a outra está ligada pendurada a um suporte. Ao retirarmos da posição de equilíbrio (ponto mais baixo), o sistema oscila em torno da vertical, desta forma, desconsiderando a força de resistência do ar, as únicas forças que atuam na massa são a força peso ($\overrightarrow{P}$) e a tensão no fio ($\overrightarrow{T}$), como mostra a figura:

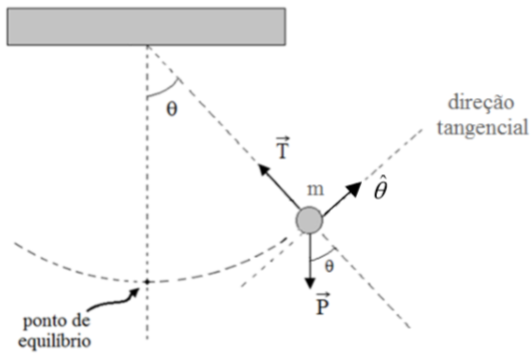


Figura 3.2: Forças atuando no pêndulo simples.

Pela segunda lei de Newton, temos,

$$\overrightarrow{T} + \overrightarrow{P} = m \cdot \overrightarrow{a}$$

A figura também nos mostra que a força restauradora é a componente tangencial da força peso, uma vez que essa força tende a recolocar a massa no ponto de equilíbrio, e como a componente da tensão na direção do vetor θ é nula, a segunda lei nessa direção nos fornece,

$$P_\theta = m \cdot a_\theta \Rightarrow -m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta = m \cdot a_\theta$$

logo, a aceleração tangencial é da dada por:

$$a_\theta = -g \cdot \operatorname{sen}\theta \tag{3.5}$$

A equação em (3.5) nos mostra que a aceleração no pêndulo não é constante e depende do valor de θ, ou seja, se modifica a cada posição assumida pelo pêndulo. Esta conclusão foge dos conceitos estudados no ensino médio, haja vista que nessa modalidade a aceleração é vista como uma constante aproximada. No entanto, iremos fazer a solução do problema considerando valores pequenos para θ, aproximando assim o resultado. Para isso, considere o ciclo trigonométrico de raio R unitário,

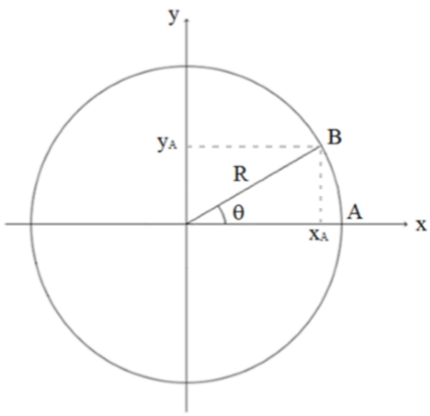


Figura 3.3: Ciclo trigonométrico de raio R unitário.

Pela figura, temos,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y_a}{R} = y_a \tag{3.6}$$

$$\cos\theta = \frac{x_a}{R} = x_a \tag{3.7}$$

além disso, o ângulo θ em radianos, é dado pela razão:

$$\theta = \frac{s}{R} \tag{3.8}$$

onde s é o comprmento do arco que vai de A até B. Assim, no caso do círculo trigonométrico considerado, temos,

$$\theta = \frac{AB}{R} = \frac{s}{R} = s \tag{3.9}$$

A figura abaixo, mostra que quando o angulo θ é pequeno o comprimento do arco s se aproxima de θ ($\operatorname{sen}\theta_1 \cong s$)

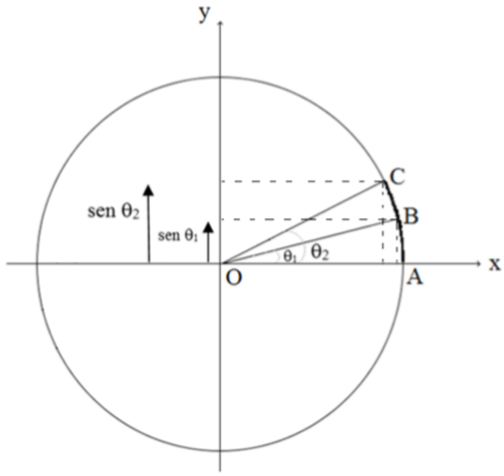


Figura 3.4: Aproximação de s e $\operatorname{sen}\theta$.

Logo, podemos escrever:

$$\operatorname{sen}\theta \cong \theta \tag{3.10}$$

essa afirmação se justifica quando aproximamos o gráfico da função seno, vejamos:

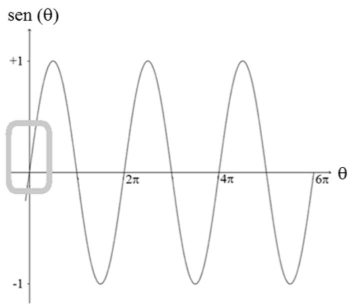


Figura 3.5: Gráfico da função $\operatorname{sen}\theta$.

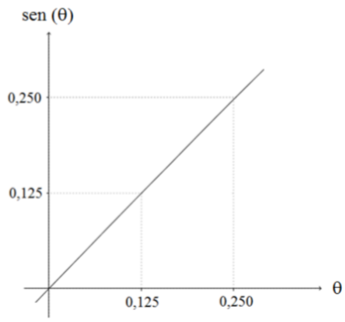


Figura 3.6: Aproximação sobre a função $\operatorname{sen}\theta$.

Vamos novamente escrever a equação (3.5) com a aproximação encontrada. Assim teremos,

$$a_\theta \cong -g \cdot \theta \tag{3.11}$$

A expressão acima nos dá um valor aproximado para a aceleração tangencial do pêndulo simples. Nos falta ainda encontrar a posição da massa m em função do ângulo θ. Para isso, considere um pêndulo em movimento e a projeção no chão da sombra da massa m. Observe que a variação da sombra vai de $+A$ à $-A$ sendo o ponto 0 a posição de equilíbrio da massa m.

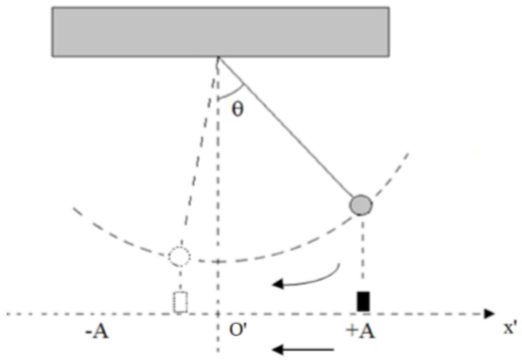


Figura 3.7: Projeção do pêndulo no chão.

Seja agora um bastão P em movimento circular uniforme, de velocidade ω e de raio A. A projeção do bastão P no anteparo acompanha a sombra do pêndulo no chão, como mostra a figura:

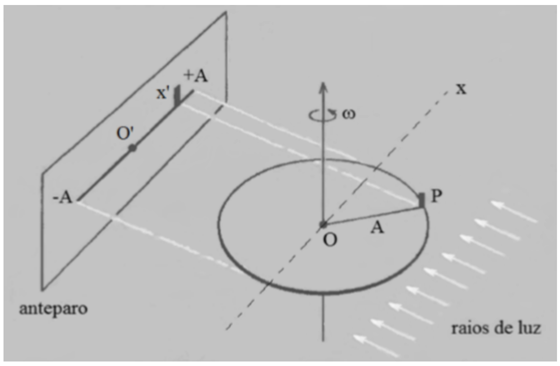


Figura 3.8: Movimento do bastão em MCU.

Observe que, no movimento circular uniforme executado pelo bastão podemos encontrar o movimento da sombra no anteparo projetando o bastão P sobre o eixo $\overrightarrow{OX}$, como mostra a figura abaixo:

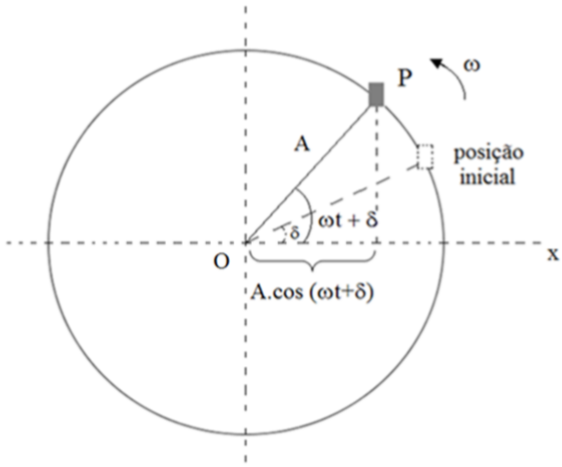


Figura 3.9: Movimento do bastão P sobre uma vista superior.

Logo, podemos escrever a equação que descreve o movimento do bastão no anteparo dado por,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \tag{3.12}$$

Observe que o valor de A representa o deslocamento máximo da sombra, chamado de amplitude do movimento. O parâmetro ω que no movimento circular uniforme é chamado de velocidade angular, aqui passa a ser chamado de frequencia angular, haja vista que a sombra não está girando. Note também que, o bastão girando em MCU passa sempre pela posição inicial com um período T em segundos (s), dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.13}$$

A relação entre período e frequencia é $f = \dfrac{1}{T}$, cuja unidade é denomindada Hertz (Hz). Existe uma relação entre L, T e g, pois se aumentarmos o comprimento L do fio o período T de oscilação também aumenta, e se diminuirmos a gravidade g o período T aumenta, logo podemos escrever a relação,

$$T = k \cdot \frac{L}{g} \tag{3.14}$$

Analisando apenas as unidade da razão acima, obtemos,

$$\frac{l}{g} = \frac{m}{\frac{m}{s^2}} = s^2$$

desta forma, como T é dado em segundos, pelas equações (3.13) e (3.14) obtemos a seguinte relação com a velocidade angular,

$$\frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Por fim, escrevemos a equação (3.13) com a nova expressão de ω, como,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{3.15}$$

Exemplo 3.4. *Vamos resolver agora, usando apenas ferramentas do ensino médio, o exemplo 2.33 onde tinhamos um pêndulo com um comprimento de fio de 2 m, este era solto no instante* $t = 0$ *com um deslocamento de* $1/2$ *rad à direita do eixo vertical com velocidade angular de* $2\sqrt{3}$ m/min *para a direita, onde era solicitado a amplitude, o período e a frequência do movimento.*

Solução: Pelo enunciado temos que $L = 2m$. O período de oscilação é dado por,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

e como $\dfrac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{L}{g}}$, temos que a velocidade é dada por,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Logo, podemos escrever a equação do movimento do pêndulo simples, sendo pelo enunciado $\delta = \frac{1}{2}$, assim,

$$y(t) = A\cos(\omega t + \delta) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \frac{1}{2}\right) \tag{3.16}$$

Precisamos agora encontrar o valor da amplitude A e para isso consideraremos um segmento de reta $\overline{BC}$ paralelo ao eixo horizontal X, traçado a partir da posição inicial $\theta = \frac{1}{2}rad$, como mostra a figura:

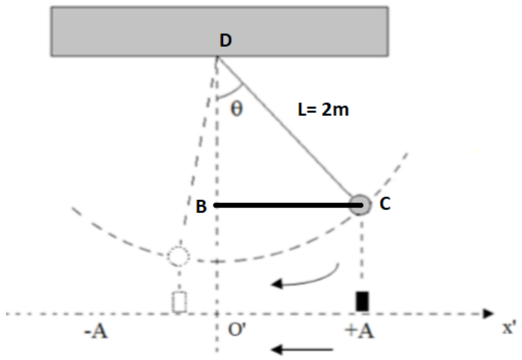


Figura 3.10: Segmento de reta $\overline{BC}$ paralelo ao eixo X.

Note que $\overline{BC} = A$. Além disso, $\overline{DO'} \perp X$, logo o ΔDBC é reto em B. Desta forma,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{A}{2},$$

Mas, pelo enunciado, $\theta = \phi = \frac{1}{2}$, assim,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,4 = \frac{A}{2} \Rightarrow A = 0,8 \tag{3.17}$$

Assim, a equação do movimento é dado por,

$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi) = 0,8\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \frac{1}{2}\right).$$

Observação 3.3.1. *Substituindo $L = 2m$ e fazendo $g = 9,8m/s^2$, notamos que a amplitude obtida em (2.54), é aproximadamente,*

$$A = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{6}{8820}} \simeq 0,5$$

difere da amplitude em (3.17), apresentando um erro de 60%.

Capítulo 4

Conclusão

Como vimos, a modelagem de muitos problemas que variam em função do tempo recaem em equações diferenciais ordinárias de primeira ou de segunda ordem, e suas soluções são geralmente estudadas na educação básica. Nesse sentido, esperamos que a teoria desenvolvida na dissertação ajude a alunos de graduação a compreender as várias formas de aplicação de equações diferenciais ordinárias e mais, esperamos também fazer com essa dissertação uma ponte que conecte o conhecimento da teoria de equações diferenciais ordinárias aos assuntos trabalhados por alunos da educação básica, contribuindo assim para a melhoria da grade curricular e consequentemente da qualidade do que é repassado.

Bibliografia

[1] MUNIZ NETO, Antonio Carminha. Fundamentos de Cálculo/Antonio Carminha Neto.-Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[2] HEFEZ, Abramo. Introdução à Álgebra Linear/Abramo Hefez; Cecília de Souza Fernandez. -Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[3] MORGADO, Augusto César. Matemática Discreta/ Augusto César Morgado; Paulo Cezar Pinto Carvalho. Capa de Pablo Diego Regino. -Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[4] BARÃO MINHÓS, Feliz Manuel. Equações Diferenciais Ordinárias-Relatório de Unidade Curricular/ Feliz Manuel Barão Minhós. Julho, 2009.

[5] SANTOS, Reginaldo J. Equações diferenciais para licenciatura em matemática / Reginaldo J. Santos. – Belo Horizonte : Editora UFMG, 2010

[6] SANTOS, Reginaldo J. Introducão às Equações Diferenciais Ordinárias / Reginaldo J. Santos - Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2010.

[7] LIMA, Elon Lages. Curso de análise vol.2 / Elon Lages Lima. 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[8] LIMA, Elon Lages. Análise real volume 1. Funções de uma variável / Elon Lages Lima. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[9] SOTOMAYOR, J. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Rio de Janeiro: IMPA, 1970. (Projeto Euclides)

[10] ZILL, Dennis G. Equações Diferenciais, volume I/ Dennis G. Zill, Michael R. Cullen; tradução Antônio Zumpano, revisão técnica Antonio Pertence Jr. São Paulo, Makron Books, 2001.

[11] Machado, Ivana Maria Fernandes. Matemática Aplicada: O uso das equações diferenciais ordinárias em modelos matemáticos de sistemas físicos e bio-químicos. Goiás: IFS, 2016.

[12] MAGRINI, Luciano Aparecido. Modelos matemáticos e aplicações ao ensino médio. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2013.

[13] PINHEIRO, Fabio Soares. Um estudo de osciladores. UFRJ- Instituto de Física.