

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

LEANDRO ROCHA

ÁRVORES ORDENADAS, CAMINHOS RETICULADOS E
COEFICIENTES TRINOMIAIS: UMA CONEXÃO

CAMPO GRANDE - MS

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

Leandro Rocha

ÁRVORES ORDENADAS, CAMINHOS RETICULADOS E
COEFICIENTES TRINOMIAIS: UMA CONEXÃO

Orientadora: Prof^a Dr.^a Elen Viviani Pereira Spreafico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
do Instituto de Matemática da Universidade Federal de
Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requi-
sitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2019

ÁRVORES ORDENADAS, CAMINHOS RETICULADOS E COEFICIENTES TRINOMIAIS: UMA CONEXÃO

Leandro Rocha

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof^a Dr.^a Elen Viviani Pereira Spreafico - UFMS

Prof^a. Dr.^a Irene Magalhães Craveiro - UFGD

Prof^a. Dr.^a Rubia Mara de Oliveira Santos - UFMS

Campo Grande – MS, 16 Julho de 2019

Agradecimentos

Agradeço à minha namorada Letícia, companheira nos momentos mais difíceis desse mestrado e que me deu força para nunca desistir e passar em todos os exames.

Agradeço aos meus pais, aos familiares que acreditaram e me apoiaram e a todos os acontecimentos que me trouxeram até aqui.

Aos professores do PROFMAT pelos ensinamentos, em especial à professora Elen, pela excelente orientação e pelas experiências acadêmicas oferecidas.

Aos amigos do PROFMAT, mesmo tendo chegado poucos até o final, sempre estiveram unidos e estudando para cada etapa do mestrado.

Aos amigos da Faculdade de Computação, à Laura por todo o apoio, principalmente no começo do mestrado. Ao Marcos pela ajuda com o LaTeX, ao Diretor Mongelli pelo apoio e incentivo, e aos demais colegas que acreditaram e me apoiaram nesta jornada.

Às Professoras que fizeram parte da banca examinadora, por terem aceitado o convite e por suas contribuições.

Agradeço à universidade pública brasileira, em especial a Universidade Estadual de São Paulo, pelo apoio para concluir a graduação e à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul por toda a oportunidade para concluir esse mestrado.

“A matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes.”

(Malba Tahan)

Resumo

Este trabalho apresenta uma bijeção direta entre o conjunto de caminhos reticulados que vão de $(0, 0)$ a $(n, 0)$ com passos $U = (1, 1)$, $D = (1, -1)$ e $H = (1, 0)$ e o conjunto de árvores ordenadas com $n + 1$ arestas, com raiz de grau ímpar e nós com grau de saída no máximo dois. Ambos os conjuntos são contados pelos coeficientes centrais da expansão do trinômio $(1 + x + x^2)^n$. Para tanto, são apresentados os conceitos de grafos, caminhos reticulados e sequências advindas da expansão de um trinômio, assim como algumas conexões combinatórias entre esses conjuntos.

Palavras-chave: Árvores Ordenadas, Caminhos Reticulados, Coeficientes Trinomiais.

Abstract

This work presents a direct bijection between the set of lattice paths going from $(0, 0)$ to $(n, 0)$ with steps $U = (1, 1)$, $D = (1, -1)$ and $H = (1, 0)$ and the set of ordered trees with $n + 1$ edges, having root of odd degree and nonroot nodes of outdegree at most two. Both sets are counted by the central coefficients of the expansion of the trinomial $(1 + x + x^2)^n$. For this, we present the concepts of graphs, lattice paths and sequences coming the expansion of a trinomial, as well as combinatorial connections between these sets.

Keywords: Ordered Trees, Lattice Paths, Trinomial Coefficients.

Sumário

1	Introdução à Teoria dos Grafos	4
1.1	Noção de conjunto e função	4
1.2	O Princípio Bijetivo	7
1.3	Grafos	7
1.4	Isomorfismo	11
1.5	Matriz de adjacência e matriz de incidência	15
1.6	Subgrafos	16
1.7	Grau de vértices	18
1.8	Caminhos e conexões	21
1.9	Ciclos	24
1.10	Árvores	26
1.11	Arestas de corte	28
1.12	Vértices de corte	31
1.13	Fórmula de Cayley	32
2	Introdução à Análise Combinatória e aplicações	38
2.1	Princípios aditivo e multiplicativo	38
2.2	Coeficiente Binomial	39
2.3	Coeficiente Multinomial	42
2.4	Números Trinomiais	43
2.5	Caminho Reticulado	46
2.6	Árvores ordenadas e os números de Catalan	49
3	Árvores ordenadas, caminhos reticulados e números trinomiais	53
3.1	Resultados	55

3.2	Construção de uma nova sequência	62
3.3	Outras relações	65

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de Grafo	8
1.2	Grafo Planar	9
1.3	Grafo Planar	9
1.4	Grafo de Petersen	10
1.5	Grafo de Petersen por conjuntos	10
1.6	Grafo G	12
1.7	Grafo H	13
1.8	Grafo Completo K_5	13
1.9	Grafo Bipartido	14
1.10	Grafo Bipartido Completo	14
1.11	Grafo G'	15
1.12	Grafo e grafo simples subjacente de G	17
1.13	Subgrafos - adaptação de [1], figura 1.7	18
1.14	3 - Cubo	20
1.15	$R(3, 3)$	21
1.16	Grafo H'	22
1.17	Grafo Conexo	23
1.18	Grafo G desconexo com 3 componentes, $\omega(G) = 3$	23
1.19	Grafo H''	24
1.20	Caminhos P e Q	25
1.21	A ponte de Königsberg e sua representação em grafo	26
1.22	Árvores	27
1.23	Caminho $P + e$	27
1.24	Aresta de corte	29
1.25	Árvore geradora	30

1.26	Vértices de corte	31
1.27	Contração de arestas	33
1.28	Correspondência entre árvores geradoras	33
1.29	Cálculo recursivo de $\tau(G)$	34
1.30	$(4,3,5,3,4,5)$	35
1.31	Construção da sequência	36
1.32	Construção da árvore	37
1.33	Árvores geradoras e não isomorfas de K_6	37
2.1	Caminho reticulado	47
2.2	Caminhos para $n = 3$	48
2.3	Árvore ordenada	49
2.4	Árvore ordenada	50
2.5	Árvores ordenadas distintas	50
2.6	Árvores ordenadas T_0, T_1, T_2 e T_3	51
2.7	Árvores ordenadas T_4	52
3.1	Caminho reticulado e árvore para $n = 0$	54
3.2	Caminho reticulado e árvore para $n = 1$	54
3.3	Caminhos reticulados e árvores para $n = 2$	54
3.4	Caminhos reticulados para $n = 3$	55
3.5	Árvores para $n = 3$	55
3.6	f em uma árvore comum	57
3.7	f aplicada no caso de exceção	57
3.8	Relação de árvore para caminho	59
3.9	Caminho $\psi(g)$	59
3.10	Caminho c	61
3.11	Árvore correspondente ao caminho c e sua árvore limpa	61
3.12	Árvore limpa e árvore correspondente ao caminho simétrico de c	62
3.13	$n = 2$	64
3.14	$n = 2$	64
3.15	$n = 3$	64
3.16	$T(2n, n)$ para $n = 2$	65

3.17 $T(2n, n - 1)$ para $n = 2$ 67

Introdução

A Análise Combinatória advém do desenvolvimento de métodos que permitem contar, de forma direta e indireta, o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas restrições, [2]. Alguns conjuntos, tais como, grafos, árvores ordenadas e caminhos reticulados possuem certas condições, das quais fazem corresponder o mesmo número de elementos. Esses conjuntos são interessantes, além de terem a mesma cardinalidade, pelo fato de apresentarem diversas interpretações combinatórias.

Em 1894, L.J Rogers [3] descobriu um par de identidades que, mais tarde, passaram a se chamar Identidades de Rogers-Ramanujan, que é uma igualdade $\pi(q) = \phi(q)$, onde $\pi(q)$ é uma série e $\phi(q)$ é um produto infinito. Ramanujan conjecturou estas identidades e Rogers provou-as, recebendo assim o nome de ambos.

A segunda prova das identidades de Rogers levou Bailey [4], em 1944, à observação que depois ficou conhecida como “Lema de Bailey”. Por sugestão de Bailey, L.J. Slater [5], sua aluna, no começo dos anos 50, usando esse lema, forneceu uma lista com 130 identidades do tipo Rogers-Ramanujan. Em 1986 Andrews [6] apresentou um algoritmo através do qual generalizações polinomiais de Identidades do tipo Rogers-Ramanujan podem ser obtidas.

Silva em 2014, em sua tese de doutorado [3], apresenta novas interpretações combinatórias de várias sequências a partir de ideias dadas por Andrews em [6], e resultados dados por Santos em [7]. Andrews introduziu uma função de duas variáveis para o estudo de Identidades do tipo Rogers-Ramanujan e Santos conjecturou fórmulas explícitas para famílias de polinômios que podem ser obtidas usando-se o método de Andrews para mais de 70 identidades da lista das 130 apresentada por Slater.

No cálculo da fórmula para o termo geral da sequência encontrada usando o Método de Andrews com $f_{23}(-q, t)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2}}{(q; q^2)_{2n+1}} = \frac{(q; q^2)_{\infty}}{(q^2; q^2)_{\infty}} (q^6; q^6)_{\infty} (q^4; q^6)_{\infty} (q^2; q^6)_{\infty}$$

onde $a(n) = (a; q)_n = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1 - aq^j)}{(1 - aq^{j+n})} = (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{j+n})$, tal que n é um número inteiro positivo, e $(a; q)_{\infty} = (a)_{\infty} = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - aq^j)$, para $|q| < 1$, um novo instrumento de contagem foi encontrado.

Essa nova sequência está apresentada em [8] e também uma interpretação em termos de caminhos reticulados para os coeficientes da expansão do trinômio $(1 + 3x + x^2)^n$, mas não encontramos relações com árvores ordenadas.

Assim, a ideia inicial do trabalho era determinar quais eram as restrições para a construção das árvores ordenadas contadas por essa nova sequência. O caminho tomado foi a investigação da relação já existente entre árvores ordenadas, caminhos reticulados e os termos centrais da expansão do trinômio $(1 + x + x^2)^n$. No entanto, na literatura não foi encontrada uma conexão direta entre esses conjuntos de maneira a nos dar uma direção para a construção dos objetos que queríamos. Desta forma, nosso novo objeto de estudo se tornou encontrar uma bijeção entre o conjunto de caminhos reticulados indo de $(0, 0)$ a $(n, 0)$ com passos $U = (1, 1)$, $D = (1, -1)$ e $H = (1, 0)$ e o conjunto de árvores ordenadas com $n + 1$ arestas, com raiz de grau ímpar e nós com grau de saída no máximo dois.

A partir de ideias dadas por E. Deutsch em [9], para a bijeção entre os pequenos números de Schröder e caminhos reticulados de Schröder, e informações que estão em [8], sobre a sequência formada pelos coeficientes dos termos centrais da expansão do trinômio $(1 + x + x^2)^n$ e sua relação com árvores ordenadas e caminhos reticulados, apresentamos uma prova bijetiva entre esses conjuntos.

No primeiro capítulo apresentamos uma introdução à Teoria dos Grafos, com os conceitos iniciais, definindo grafo e suas principais propriedades. Esse capítulo tem como finalidade a definição de árvores, objeto que abordamos no segundo capítulo. Apresentamos várias representações gráficas para que seja mais fácil o entendimento.

No segundo capítulo começamos com conceitos iniciais de análise combinatória, arranjos, combinações, até o coeficiente binomial. Em seguida, fazemos uma extensão dos coeficientes binomiais para definir o coeficiente multinomial. No final do capítulo serão apresentados os conceitos de caminhos reticulados, árvores ordenadas e sua ligação com os números de Catalan.

Em geral, os livros e materiais de Teoria dos Grafos sugerem ao leitor ter um domínio em matemática discreta, visto que esta é utilizada em muitas aplicações em grafos. Essa

inversão na ordem da apresentação dos dois conteúdos não altera o entendimento, pois na Teoria dos Grafos, neste trabalho, foram apresentados conceitos iniciais.

No terceiro capítulo temos a ligação entre os conteúdos de árvores ordenadas, caminhos reticulados e os coeficientes trinômiais. Dessa ligação, fazemos uma bijeção entre os conjuntos de caminhos reticulados e árvores ordenadas, conforme ideias dadas em [9].

Desses estudos, surge uma nova sequência que está relacionada ao número árvores ordenadas (com restrições para sua construção), obtida ao variarmos a quantidade de arestas. Esta sequência é apresentada no último capítulo, destinado a resultados e a trabalhos futuros, assim como algumas caracterizações já existentes na literatura sobre a conexão entre caminhos reticulados e o trinômio $(1 + 3x + x^2)^2$.

O professor da educação básica pode utilizar deste material para introduzir conceitos iniciais, como por exemplo, o problema das pontes de Königsberg pode ser utilizado como uma motivação utilizada de forma didática para a introdução da Teoria dos Grafos, assim como a parte de Análise Combinatória e aplicações. No sentido de garantir o acesso aos níveis mais elevados do ensino, segundo a capacidade de cada um, [10].

Capítulo 1

Introdução à Teoria dos Grafos

Para este capítulo utilizamos [11], [1] e [12] para as definições e alguns exemplos. Elon, em [11], foi utilizado para iniciar a noção de conjunto que está contida em Teoria dos Grafos. Bondy e Murty em [1], apresentam uma boa base teórica para aprender a Teoria dos Grafos, que vai desde conceitos básicos, bem explicados, à mais avançados. Neto em [12], apresenta a Teoria dos Grafos após conceitos de Análise Combinatória, apresentando vários exemplos de aplicações de Análise Combinatória em grafos.

1.1 Noção de conjunto e função

A noção de conjuntos é fundamental. A partir dela, todos os conceitos matemáticos atuais podem ser expressos.

Um conjunto é definido apenas por seus elementos. Este fato se reflete claramente na noção de igualdade entre conjuntos: dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos. Em Teoria de Conjuntos, esta propriedade corresponde ao chamado “Axioma da Extensão”, [11].

Dados um conjunto A e um objeto qualquer a , se a é um elemento do conjunto, dizemos que a pertence ao conjunto A e escrevemos $a \in A$. Caso contrário, dizemos que a não pertence ao conjunto A e denotamos por $a \notin A$.

O conjunto vazio é designado pelo símbolo \emptyset . Ele é aceito como conjunto porque cumpre a função de simplificar as proposições, evitando uma longa e tediosa menção de exceções.

Se A é o conjunto dos objetos que têm a propriedade P , e $x \in A$, então dizemos que

o objeto x tem a propriedade P .

Na linguagem e na notação de conjuntos existe uma álgebra, montada sobre as operações de reunião ($A \cup B$) e interseção ($A \cap B$), além da relação de inclusão ($A \subset B$).

Dados os conjuntos A e B :

(i) a reunião $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$ é o conjunto formado pelos elementos de A ou de B ;

(ii) a interseção $A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$ é o conjunto formado pelos elementos de A e de B .

Observa-se que as operações $A \cup B$ e $A \cap B$ têm associados os conectivos lógicos “ou” e “e”, respectivamente.

Seguem as propriedades relacionadas com as operações de união e interseção. Dados quaisquer conjuntos A e B , temos:

(i) Comutatividade da união e da interseção:

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$$

(ii) Associatividade da união e da interseção:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(iii) Distributividade de cada uma em relação à outra:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

A relação de inclusão tem três propriedades fundamentais. Dados quaisquer conjuntos A , B e C temos:

(i) reflexividade: $A \subset A$;

(ii) antissimetria: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;

(iii) transitividade: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

A noção de complementar de um conjunto só faz pleno sentido quando se fixa um conjunto U , chamado de “conjunto-universo”.

Definição 1. Dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de U), chamamos complementar de A ao conjunto A^c , formado pelos objetos de U que não pertencem a A .

Uma propriedade imediata do complementar é $U^c = \emptyset$ e $\emptyset^c = U$.

Seguem as propriedades operatórias básicas referentes ao complementar:

(i) Para todo conjunto $A \subset U$, temos que $(A^c)^c = A$. (Todo conjunto é complementar do seu complementar).

(ii) Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$. (Se um conjunto está contido em outro, seu complementar contém esse outro).

A conexão entre as operações de união e interseção e a relação de inclusão é dada pelas seguintes equivalências. Dados quaisquer conjuntos A e B temos:

(i) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$,

(ii) $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$ e $A \cap C \subset B \cap C$, para todo conjunto C .

E finalmente, se A e B são subconjuntos do Universo U , temos:

(iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

As relações do item (iii) são conhecidas como leis de De Morgan.

Considere os conjuntos A e B com as propriedades P e Q , respectivamente. As principais equivalências entre a linguagem de implicações e a linguagem de conjuntos podem ser resumidas na Tabela 1.1.

$A = B$	$P \Leftrightarrow Q$
$A \subset B$	$P \rightarrow Q$
A^c	$\sim P$
$A \cup B$	$A \vee B$
$A \cap B$	$A \wedge B$

Tabela 1.1: Tabela de equivalências

Quando contamos elementos de um conjunto, estamos fazendo uma correspondência com os números naturais, e esse tipo de relação dá origem ao conceito de função. A seguir são apresentados o conceito de função e algumas definições com o objetivo de mostrar a bijeção entre dois conjuntos finitos.

Definição 2. *Dados os conjuntos X, Y , uma função $f : X \rightarrow Y$ (lê-se “uma função de X em Y ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se “ y igual a f de x ”). O conjunto X é chamado de domínio e Y o contradomínio da função f . Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ é a imagem de x pela função f , ou o valor f assumido pela função f no ponto $x \in X$.*

Definição 3. *Uma função $f : X \rightarrow Y$ é injetiva quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y . Ou seja, f é injetiva quando $x \neq x'$ em $X \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.*

Em termos de demonstração a injetividade é usualmente expressa em sua forma contrapositiva: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Definição 4. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetiva quando, para qualquer elemento $y \in Y$, podemos encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Definição 5. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção, ou uma correspondência biunívoca entre X e Y quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

Exemplo 1. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Definindo $f(n) = 2n$, temos uma correspondência biunívoca, onde $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$, $f(4) = 8$ e $f(5) = 10$

1.2 O Princípio Bijetivo

Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $I_n = \{j \in \mathbb{N}; 1 \leq j \leq n\}$ como o conjunto dos números naturais de 1 até n .

Um conjunto A é **finito** se $A = \emptyset$ ou se existe uma bijeção $f : I_n \rightarrow A$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $A \neq \emptyset$ é finito e $f : I_n \rightarrow A$ é uma bijeção, então, denotando $a_j = f(j)$, escrevemos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e dizemos que n é o número de elementos de A , ou cardinalidade de A , que pode ser denotada por $|A| = n$, para indicar que A tem n elementos. Por completude dizemos que $|\emptyset| = 0$.

Proposição 1 (princípio bijetivo). *Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então $|A| = |B|$ se, e somente se, existe uma bijeção $f : A \rightarrow B$.*

No exemplo 1 temos $|X| = 5 = |Y|$ e a bijeção apresentada.

Outro exemplo, são os números de Catalan, C_n [[8], A000108], que contam o número de elementos de dois conjuntos, o de árvores binárias com n vértices e o de árvores ordenadas com $n + 1$ vértices, ou seja, para algum $n \in \mathbb{N}$, os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, e pelo princípio bijetivo existe um bijeção entre eles. Essa bijeção pode ser vista em [13].

1.3 Grafos

Muitas situações do mundo real podem ser convenientemente descritas por meio de diagramas, que consistem em um conjunto de pontos, junto com linhas que unem certos

pares desses pontos. Por exemplo, os pontos podem representar pessoas, com linhas juntando pares de amigos, ou os pontos podem representar centros de comunicação, com linhas ligando esses centros. Uma abstração matemática de situações deste tipo dá origem ao conceito de grafo.

Definição 6. Um grafo G consiste de um conjunto não-vazio $V(G)$ de vértices, um conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, de arestas, e uma função de incidência ψ_G que se associa a cada aresta de G um par não-ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de G .

Grafos podem ser representados por diagramas, onde cada vértice é representado por um ponto e cada aresta por uma linha ligando os pontos, que representam seus extremos.

Exemplo 2. Seja $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, tal que $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ e $E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e ψ_G é definida por $\psi_G(a) = uv$, $\psi_G(b) = uu$, $\psi_G(c) = vw$, $\psi_G(d) = wx$, $\psi_G(e) = vx$, $\psi_G(f) = wx$, $\psi_G(g) = ux$, $\psi_G(h) = xy$.

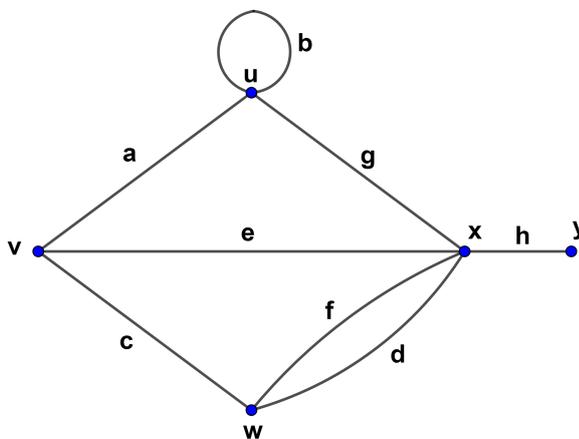


Figura 1.1: Exemplo de Grafo

Os grafos são assim chamados porque podem ser representados graficamente, e é esta representação gráfica que nos ajuda a entender muitas das suas propriedades. O diagrama de G é mostrado na figura 1.1 (os vértices são descritos aqui como pequenos círculos). Não existe uma maneira única de se desenhar um grafo. Um diagrama de um grafo representa apenas a relação de incidência entre seus vértices e arestas, no entanto, muitas vezes desenhamos um diagrama de um grafo e nos referimos a ele como o grafo em si, nesse sentido, vamos chamar seus pontos de vértices e suas linhas de arestas.

Observamos que duas arestas em um diagrama de um grafo podem se intersectar em um ponto sem que este seja um vértice. Vejamos a definição de grafo planar onde não ocorre essa intersecção.

Definição 7. *Grafo planar* é um grafo que possui representação onde as arestas não se intersectam, ou seja, as arestas se encontram apenas nos vértices e podem ser representados no plano de forma simples.

Exemplo 3. Na figura 1.2 temos um exemplo de grafo planar que no modo representado não fica claro a sua planaridade, no entanto pode ser representado de forma que seus vértices não se intersectem, conforme figura 1.3. Na figura 1.4 temos um exemplo de um grafo não planar, conhecido como **Grafo de Petersen**¹.

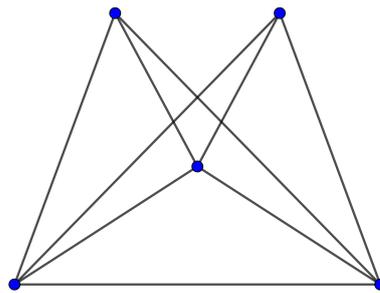


Figura 1.2: Grafo Planar

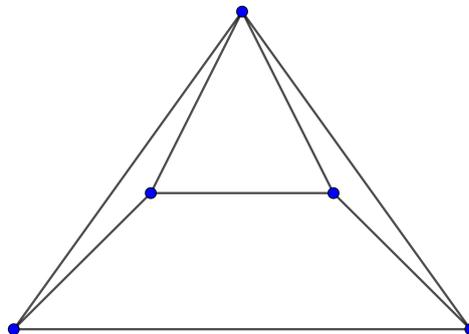


Figura 1.3: Grafo Planar

¹Julius Petersen (1839 - 1910), matemático dinamarquês

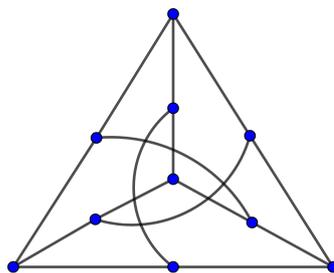


Figura 1.4: Grafo de Petersen

Exemplo 4. Outra maneira de se descrever o Grafo de Petersen é através de conjunto. Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e considere o grafo em que o conjunto V de vértices é formado por todos os subconjuntos de S que possuem exatamente dois elementos. Dois elementos v e w de V são adjacentes se $v \cap w = \emptyset$. Essa relação de adjacência sobre V que define o grafo de Petersen, conforme representado na figura 1.5.

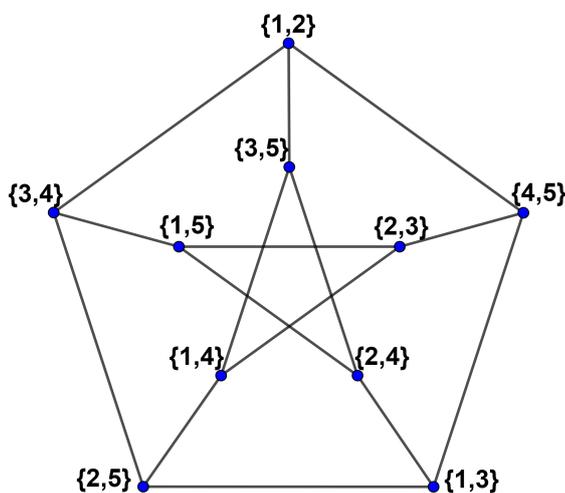


Figura 1.5: Grafo de Petersen por conjuntos

A seguir apresentamos algumas definições e conceitos utilizando a nomenclatura da literatura clássica.

A maioria das definições e conceitos da Teoria dos Grafos é sugerida pela representação gráfica. As extremidades de uma aresta são consideradas incidentes com a aresta, e vice-versa. Dois vértices que são incidentes com a mesma aresta são adjacentes, assim

como duas arestas que são incidentes com o mesmo vértice. Uma aresta com a mesma extremidade é chamada de laço (loop) e uma aresta com extremidades distintas é uma ligação. Por exemplo, a aresta b de G na figura 1.1 é um laço (loop) e todas as outras arestas de G são ligações.

Definição 8. *Um grafo é **finito** se tanto seu conjunto de vértices quanto seu conjunto de arestas são finitos. Um grafo com apenas um vértice é chamado de **trivial**, e todos os outros grafos não triviais.*

Os resultados estudados neste trabalho serão relacionados ao caso finito.

Definição 9. Grafo simples é um grafo que não possui laços (loops) e nenhuma de suas ligações se une ao mesmo par de vértices.

O grafo da figura 1.1 não é simples, enquanto os grafos das figuras 1.2 e 1.4 são. Grande parte da Teoria dos Grafos diz respeito ao estudo de grafos simples. Usamos os símbolos $v(G)$ e $\varepsilon(G)$ para denotar o número de vértices e arestas de um grafo G . Caso não haja dúvida do grafo de referência, escrevemos v e ε em vez de $v(G)$ e $\varepsilon(G)$.

A Definição 10 diz respeito a outro tipo de grafo, muito útil e que aparece em problemas aplicados, como o problema do caminho mínimo, nesse caso, pelo algoritmo de Bellman-Ford-Moore (1956, 1958) que determina a distância de um vértice aos demais, [1].

Definição 10. *Um grafo dirigido ou dígrafo é um grafo G , tal que associamos uma orientação a cada uma de suas arestas, podendo ser representada por uma seta indicando o sentido do percurso.*

1.4 Isomorfismo

Dois grafos G e H são iguais (escrito $G = H$) se $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ e $\psi_G = \psi_H$. Se dois grafos são iguais, então eles podem claramente serem representados pelo mesmo diagrama. No entanto, também é possível para grafos que não são idênticos possuírem o mesmo diagrama. Por exemplo, os diagramas de G na figura 1.6 e H na figura 1.7 são os mesmos, com a exceção que seus vértices e arestas têm rótulos diferentes. Os grafos G e H não são iguais, mas isomorfos.

Definição 11. *Dois grafos G e H são considerados isomorfos (escrito $G \cong H$) se existir uma bijeção $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ e $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ tal que, $\psi_G(e) = uv$ se, e somente se,*

$\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$, ou seja, que preserva incidência. Tal par (θ, ϕ) de mapeamentos é chamado de isomorfismo entre G e H .

Para mostrar que dois grafos são isomorfos, deve-se indicar um isomorfismo entre eles.

Exemplo 5. O par de mapeamentos (θ, ϕ) definido por $\theta(v_1) = u_1, \theta(v_2) = u_2, \theta(v_3) = u_3, \theta(v_4) = u_4, \theta(v_5) = u_5, \theta(v_6) = u_6, \theta(v_7) = u_7, \theta(v_8) = u_8, \theta(v_9) = u_9, \theta(v_{10}) = u_{10}$; e $\phi(e_1) = a_1, \phi(e_2) = a_2, \phi(e_3) = a_3, \phi(e_4) = a_4, \phi(e_5) = a_5, \phi(e_6) = a_6, \phi(e_7) = a_7, \phi(e_8) = a_8, \phi(e_9) = a_9, \phi(e_{10}) = a_{10}, \phi(e_{11}) = a_{11}, \phi(e_{12}) = a_{12}, \phi(e_{13}) = a_{13}, \phi(e_{14}) = a_{14}, \phi(e_{15}) = a_{15}$ é um isomorfismo entre os grafos G e H , nas figuras 1.6 e 1.7. G e H têm a mesma estrutura e diferem apenas nos nomes dos vértices e arestas. Note que esse par de mapeamentos não é único.

Uma vez que é nas propriedades estruturais que estamos interessados, muitas vezes omitimos os rótulos ao desenhar grafos. Um grafo sem rótulos pode ser considerado como um representante de uma classe de equivalência de grafos isomorfos. Atribuímos rótulos aos vértices e arestas em um grafo principalmente com o propósito de referir-se a eles. Por exemplo, quando se lida com grafos simples, muitas vezes é conveniente referir-se à aresta com extremidades u e v como aresta “ uv ”. (Essa convenção não resulta em ambiguidade, já que, em um grafo simples, uma aresta liga apenas dois vértices).

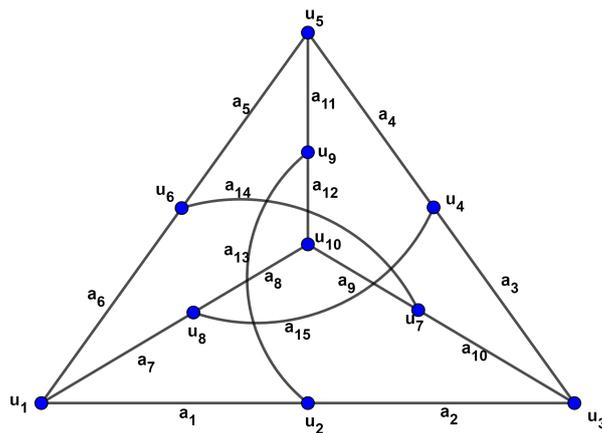


Figura 1.6: Grafo G

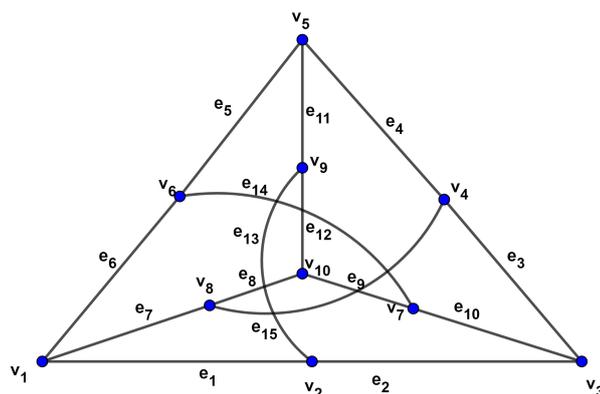


Figura 1.7: Grafo H

Concluimos esta seção apresentando algumas classes especiais de grafos. São elas: grafo completo, grafo vazio, grafo bipartido, grafo bipartido completo. Outras classes especiais de grafos serão vistas ao longo do texto.

Definição 12. Um grafo simples em que cada par de vértices distintos é unido por uma aresta é chamado de **grafo completo**. No isomorfismo, há apenas um grafo completo com n vértices que é denotado por K_n . Um **grafo vazio**, por outro lado, não possui arestas.

Exemplo 6. Uma representação do K_5 , grafo completo com 5 vértices, é mostrada na figura 1.8.

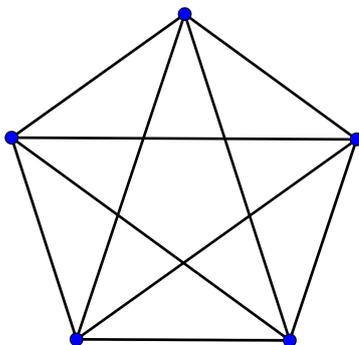


Figura 1.8: Grafo Completo K_5

Definição 13. Um **grafo bipartido** é aquele cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos, disjuntos, X e Y , de modo que cada aresta tenha uma extremidade em X e a outra extremidade em Y . Tal partição (X, Y) é chamada de uma bipartição do grafo. Um **grafo bipartido completo** é um grafo bipartido simples com bipartição (X, Y) em que cada vértice de X é ligado a cada vértice de Y . Se $|X| = m$ e $|Y| = n$, tal grafo é denotado por $K_{m,n}$.

Exemplo 7. O grafo definido pelos vértices e arestas de um cubo, figura 1.9, é bipartido, de modo que o rotulamos para mostrar a bipartição $X = \{1, 3, 5, 7\}$ e $Y = \{2, 4, 6, 8\}$. O grafo da figura 1.10 é o grafo bipartido completo $K_{3,3}$.

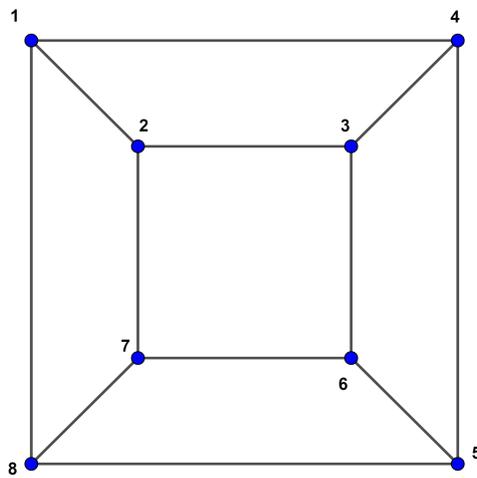


Figura 1.9: Grafo Bipartido

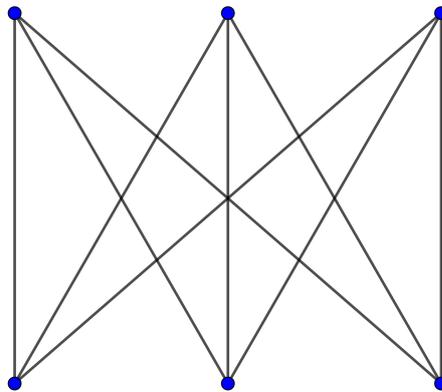


Figura 1.10: Grafo Bipartido Completo

1.5 Matriz de adjacência e matriz de incidência

Para qualquer grafo G , existe correspondência a uma matriz de ordem $v \times \varepsilon$ chamada de matriz de incidência de G . Vamos denotar os vértices de G por v_1, v_2, \dots, v_n e as arestas por $e_1, e_2, \dots, e_\varepsilon$. Então a matriz de incidência de G é a matriz $M(G) = (m_{ij})_{v \times \varepsilon}$, onde m_{ij} é o número de vezes (0, 1 ou 2) que v_i e e_j são incidentes. A matriz de incidência de um grafo é apenas uma maneira diferente de se especificá-lo.

Outra matriz associada a G é a matriz de adjacência. A matriz $A(G) = (a_{ij})_{v \times v}$, de ordem $v \times v$, em que a_{ij} é o número de arestas ligando v_i e v_j .

Exemplo 8. O grafo G' , dado na figura 1.11, sua matriz de incidência $M(G')$ e sua matriz de adjacência $A(G')$ são mostrados abaixo.

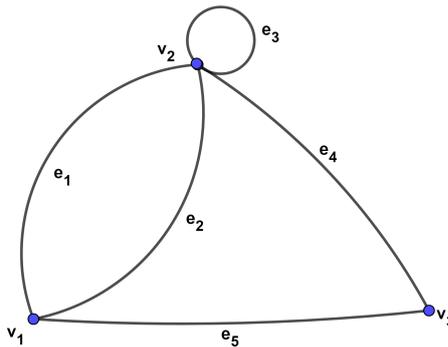


Figura 1.11: Grafo G'

$$M(G') = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$A(G') = \begin{array}{ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & \\ v_1 & 0 & 2 & 1 & \\ v_2 & 2 & 1 & 1 & \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

A matriz de adjacência de um grafo é, em geral, consideravelmente menor do que a matriz de incidência, e é nessa forma que os grafos são comumente armazenados nos computadores.

Note que dado um grafo simples, em sua matriz de adjacência, os elementos da diagonal principal são todos zeros.

Lema 1. *Seja M a matriz de incidência de um grafo G , então a soma dos elementos de cada coluna é 2.*

Demonstração. Sejam v_1 e v_2 vértices de um grafo G ligados pela aresta e_1 . Se forem distintos, a soma dos valores da coluna e_1 será 2, pois cada aresta incide em apenas dois vértices, neste caso v_1 e v_2 . Caso v_1 seja igual a v_2 , e_1 é um laço, e assim e_1 tem apenas o valor 2 relativo ao vértice $v_1 = v_2$ e portanto a soma dos valores de sua coluna também é 2.

□

1.6 Subgrafos

Aspectos e propriedades de grafos podem ser definidos por subgrafos. Apresentamos agora alguns conceitos e propriedades destes.

Definição 14. *Um grafo H é um subgrafo de G (escrito $H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, e ψ_H é a restrição de ψ_G para $E(H)$. Quando $H \subseteq G$ mas $H \neq G$, nós escrevemos $H \subset G$ e chamamos H de um **subgrafo próprio** de G . Se H é um subgrafo de G , então G é um **supergrafo** de H . Um **subgrafo gerador** de G é um subgrafo H com $V(H) = V(G)$.*

Exemplo 9. *Uma maneira de se construir um subgrafo simples gerador de G , chamado subgrafo subjacente de G , é excluindo-se de G todos os laços e, para cada par de vértices adjacentes, todos menos uma ligação. A figura 1.12 mostra um grafo e seu grafo simples subjacente.*

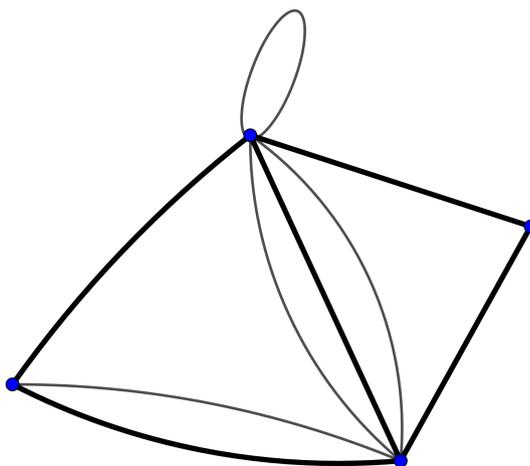


Figura 1.12: Grafo e grafo simples subjacente de G

Para as Definições 15 e 16, suponha que V' seja um subconjunto não vazio de V e E' seja um subconjunto não vazio de E .

Definição 15. O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é V' e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G que têm ambas as extremidades em V' é chamado de **subgrafo de G induzido por V'** e é denotado por $G[V']$. Dizemos que $G[V']$ é um subgrafo induzido de G . O subgrafo induzido $G[V \setminus V']$ é denotado por $G - V'$ e é o subgrafo obtido de G excluindo-se os vértices em V' , juntamente com suas arestas incidentes. Se $V' = \{v\}$ escrevemos $G - v$ para $G - \{v\}$.

Definição 16. O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é o conjunto de extremidades das arestas em E' e cujo conjunto de arestas é E' é chamado de **subgrafo de G induzido por E'** e é denotado por $G[E']$. $G[E']$ é um subgrafo aresta - induzido de G . O subgrafo induzido $G[E \setminus E']$ é escrito simplesmente como $G - E'$, e é o subgrafo obtido de G excluindo-se as arestas de E' . Similarmente, o grafo obtido de G adicionando um conjunto de arestas E' é denotado por $G + E'$. Se $E' = \{e\}$ escrevemos $G - e$ e $G + e$ em vez de $G - \{e\}$ e $G + \{e\}$.

Na figura 1.13 temos exemplos das Definições 15 e 16.

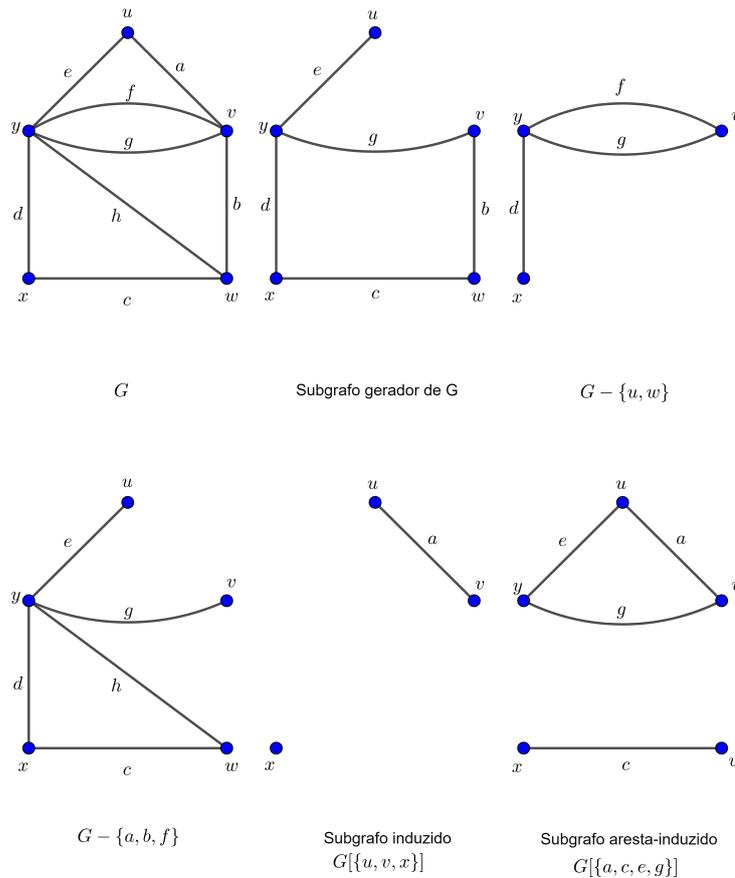


Figura 1.13: Subgrafos - adaptação de [1], figura 1.7

Segue uma análise de subgrafos em linguagem de conjuntos. Sejam G_1 e G_2 subgrafos de G . Dizemos que G_1 e G_2 são disjuntos, se eles não têm nenhum vértice em comum e disjunto-aresta, se eles não têm arestas em comum. A união $G_1 \cup G_2$ é o subgrafo com conjunto de vértices $V(G_1) \cup V(G_2)$. Se G_1 e G_2 são disjuntos podemos denotar por $G_1 + G_2$. A intersecção $G_1 \cap G_2$ é definida similarmente.

Nas seções a seguir são apresentados alguns conceitos a fim de determinar a definição de árvore, que é objeto de nosso estudo.

1.7 Grau de vértices

Exemplo 10. *Em uma reunião com 6 pessoas, mostre que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem.*

Reescrevendo o problema para a linguagem de grafos, pessoas são representadas por vértices e arestas, a relação entre elas. Assim, estudar a quantidade de arestas que incidem

em um vértice nos diz a quantidade de pessoas as quais o indivíduo conhece, nesse exemplo. Vejamos algumas propriedades sobre grau de vértices.

Definição 17. O grau de $d_G(u)$, de um vértice u em G , é o número de arestas de G que incidem em u , onde cada laço é contado como duas arestas. Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os graus mínimos e máximos, respectivamente, dos vértices de G .

Por simplicidade de notação, podemos escrever apenas $d(u)$, δ e Δ .

No caso do grafo dirigido, de acordo com [12], podemos definir o grau de saída $d_G^+(u)$ como o número de arestas que saem de u . Analogamente o grau de entrada de u , denotado por $d_G^-(u)$, é o número de arestas que chegam em u , de maneira que $d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$ é o grau de u em G , pensado como grafo sem orientações.

Agora, note que, E é o conjunto de arestas de um grafo G e $|E| = \varepsilon$ é o número de arestas de G . Seja u um vértice qualquer de G , ou seja, $u \in V$, tal que V é o conjunto de vértices de G .

Teorema 1. Seja $G = (V, E)$ um grafo, então

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2\varepsilon.$$

Demonstração. Considere a matriz de incidência M do grafo G . A soma das entradas das linhas correspondentes ao vértice u é precisamente $d(u)$, e, portanto, $\sum_{u \in V} d(u)$ é a soma de todas as entradas de M . Como a soma dos valores de cada coluna é 2, pelo Lema 1, e temos ε arestas, temos portanto que $\sum_{u \in V} d(u) = 2\varepsilon$. □

Corolário 1. Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Demonstração. Sejam V_1 e V_2 os conjuntos de vértices de grau ímpar e par em G , respectivamente. Então

$$\sum_{u \in V_1} d(u) + \sum_{u \in V_2} d(u) = \sum_{u \in V} d(u) = 2\varepsilon,$$

e pelo Teorema 1 temos que $\sum_{u \in V_2} d(u) = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sum_{u \in V_1} d(u) = \sum_{u \in V} d(u) - \sum_{u \in V_2} d(u) = 2\varepsilon - 2k = 2(\varepsilon - k),$$

e portanto $|V_1|$ é par.

□

Definição 18. O k -cubo é o grafo cujos vértices são todas as sequências ordenadas com k elementos de 0's e 1's. Dois vértices são adjacentes se, e somente se, diferem em exatamente uma coordenada.

Exemplo 11. Os vértices do 3-cubo, figura 1.14, são 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 e o vértice 000 é adjacente aos vértices 001, 010, 100 e a nenhum outro. Um k -cubo possui 2^k vértices, $k2^{k-1}$ arestas e é bipartido.

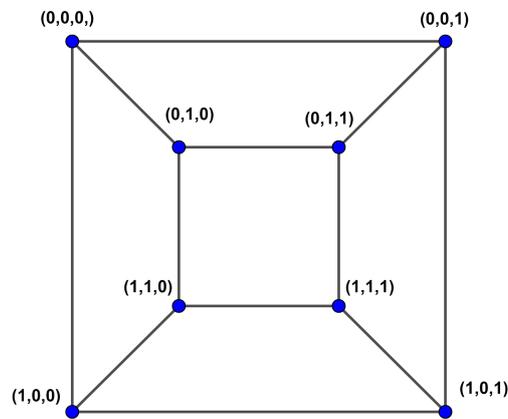


Figura 1.14: 3 - Cubo

De fato, como o número de subconjuntos que podemos formar a partir de um conjunto com k elementos é 2^k , um k -cubo possui exatamente 2^k vértices.

Como cada vértice é ligado aos demais por k arestas, pois é a quantidade de sequências que diferem exatamente uma coordenada, e temos 2^k vértices, contamos $k2^k$ arestas, mas deste modo cada aresta foi contada 2 vezes, pois liga dois vértices. Portanto o número de arestas é $\frac{k2^k}{2} = k2^{k-1}$.

Seja A um subconjunto do k -cubo, formado por vértices com quantidades ímpares de 1's. Pela Definição 18, cada vértice adjacente terá uma quantidade par de 1's. Seguindo esse pensamento dividimos todos os vértices adjacentes em dois subconjuntos, obtendo assim a bipartição do k -cubo.

Definição 19. Um grafo G é **regular** se $d(u) = k$ para todo $u \in V$. Também pode ser denotado por **grafo k -regular**.

Voltando ao exemplo 10, seja G um grafo com seis vértices onde cada vértice representa uma pessoa do grupo, e existe aresta ligando dois vértices se, e somente se, estas duas pessoas se conhecem.

Agora o problema é mostrar se existe um triângulo (circuito de comprimento 3) em G ou em G^c . Seja u um vértice de G . Então $d(u) \geq 3$ em G ou em G^c , pois o grau de qualquer vértice em um grafo completo com seis vértices é cinco. Sem perda de generalidade, assumimos que u é adjacente aos vértices p , q e r em G . Se existe aresta ligando quaisquer dois destes três vértices em G , temos um triângulo em G , caso contrário, temos um triângulo em G^c , conforme vemos na figura 1.15.

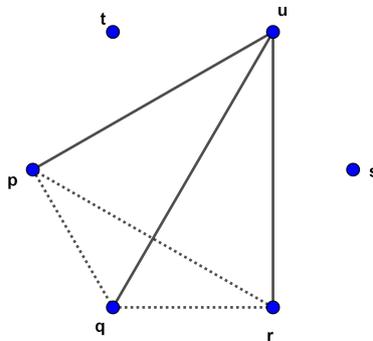


Figura 1.15: $R(3,3)$

Esse exemplo é uma aplicação do Teorema de Ramsey [14] para grafos bicoloridos, ou seja, cujas arestas são coloridas a partir de duas cores.

Teorema 2. *Para quaisquer dois números naturais, s e t , existe um número natural, $R(s, t) = n$, tal que qualquer grafo completo de ordem n e bicolorido, digamos vermelho e azul, deve conter um K_s vermelho ou K_t azul.*

No exemplo 10, cada aresta vermelha ou azul (Teorema 2) é conhecer ou não a outra pessoa, representado por ter ou não aresta, e $s = t = 3$.

1.8 Caminhos e conexões

Definição 20. *Um passeio em G é uma seqüência, não nula e finita, $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$, cujos termos são alternadamente vértices e arestas, de tal forma que, para $1 \leq i \leq k$, os*

extremos de e_i são v_{i-1} e v_i . Dizemos que W é um passeio de v_0 até v_k , ou um passeio (v_0, v_k) . Os vértices v_0 e v_k são chamados de origem e término de W , respectivamente, e v_1, v_2, \dots, v_{k-1} seus vértices internos. O inteiro k , não negativo, é o comprimento de W .

Se $W = v_0e_1v_1e_2\dots e_kv_k$ e $W' = v_ke_{k+1}v_{k+1}e_2\dots e_1v_1$ são passeios, o passeio $v_ke_kv_{k-1}\dots e_1v_0$, obtido pela inversão de W , é denotado por W^{-1} e o passeio $v_0e_1v_1e_2\dots e_1v_1$ obtido pela concatenação W e W' , é denotado por WW' .

Em um grafo simples, um passeio $v_0e_1v_1e_2\dots e_kv_k$ é determinado pela sequência $v_0v_1v_2\dots v_k$ dos seus vértices.

Definição 21. A distância entre dois vértices u e v em um grafo conexo G , denotado por $d(u, v)$, é o caminho de menor comprimento (u, v) .

Definição 22. Se as arestas e_1, e_2, \dots, e_k são distintas em um passeio W , então W é chamado de **trilha**.

Definição 23. Seja W uma trilha em G , se os vértices $v_0v_1v_2\dots v_k$ são distintos, W é chamado de **caminho**.

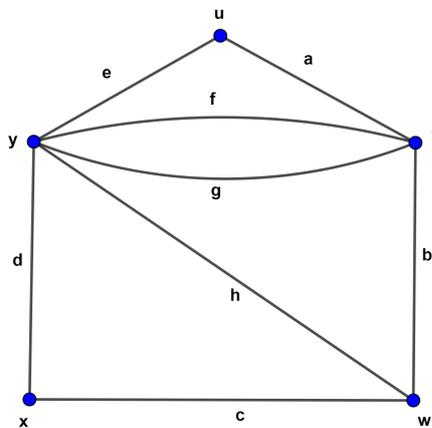


Figura 1.16: Grafo H'

Exemplo 12. Do grafo H' na figura 1.16, temos que a sequência **$uavfyfvgyhwbv$** é um passeio, **$wxcdyhwbvgy$** uma trilha e **$xcwhyeuav$** um caminho.

Definição 24. Dois vértices u e v de G são considerados conectados se houver um caminho (u, v) em G . Conexão é uma relação de equivalência no conjunto de vértices V . Assim, é uma partição de V em subconjuntos não vazios $V_1, V_2, \dots, V_\omega$, de modo que dois

vértices u e v estão conectados se, e somente se, tanto u quanto v pertencem ao mesmo conjunto V_i . Os subgrafos $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$ são chamados de componentes de G . Se G tem exatamente uma componente, G é conexo; caso contrário, G é desconexo. Denotamos o número de componentes de G por $\omega(G)$.

Exemplo 13. Vejamos nas figuras 1.17 e 1.18, as representações de um grafo conexo e um desconexo, respectivamente.

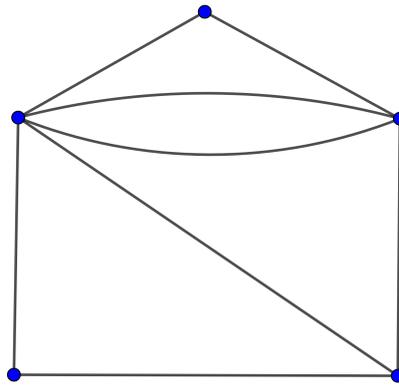


Figura 1.17: Grafo Conexos

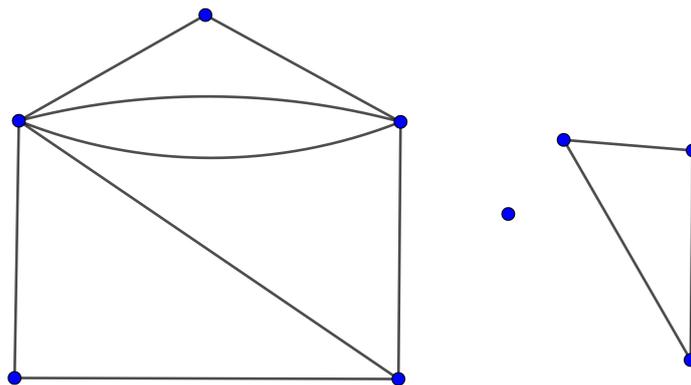


Figura 1.18: Grafo G desconexo com 3 componentes, $\omega(G) = 3$

1.9 Ciclos

Definição 25. Um passeio **fechado** é um passeio em que sua origem e término coincidem.

Observemos que por definição, caminhos e trilhas são exemplos de passeios, assim, a Definição 25 se estende a ambos.

Definição 26. Um **ciclo** é um caminho fechado.

Assim como nos caminhos, usamos o termo “ciclo” para denotar um grafo correspondendo a um ciclo. Um ciclo de comprimento k é chamado de k -ciclo. Um k -ciclo é ímpar ou par, conforme k seja ímpar ou par. Um 3-ciclo é chamado de triângulo.

Exemplo 14. Uma trilha fechada $vbwfuexdwcv$ e um ciclo $vcwfuav$ são apresentados na figura 1.19.

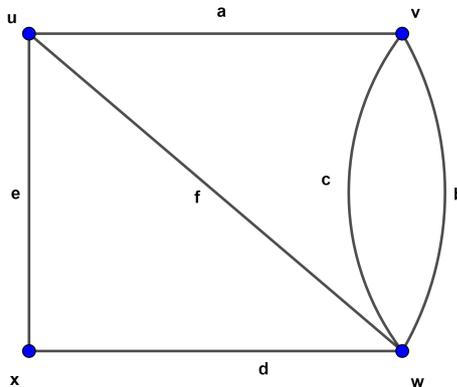


Figura 1.19: Grafo H''

Usando o conceito de ciclo, podemos agora apresentar uma caracterização de grafos bipartidos, apresentados na Definição 13.

Teorema 3. Um grafo é bipartido se, e somente se, ele não possui ciclo ímpar.

Demonstração. Suponha que G seja bipartido com bipartição (X, Y) , e seja $C = v_0v_1\dots v_kv_0$ um ciclo em G . Sem perda de generalidade, podemos supor que $v_0 \in X$. Então, $v_0v_1 \in E$ e como G é bipartido, $v_1 \in Y$. Similarmente $v_2 \in X$, em geral, $v_{2i} \in X$. Se $v_0 \in X$, então $v_k \in Y$. Assim $k = 2i + 1$, para algum $i \in \mathbb{N}$, e segue que C é par.

Para a recíproca é suficiente que a prova seja feita para grafos conexos, visto que para desconexos, tratamos as componentes conexas separadas. Seja G um grafo conexo que não contém ciclos ímpares. Escolhemos um vértice arbitrário u e definimos uma partição (X, Y) de V como $X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ é par}\}$ e $Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ é ímpar}\}$. Claramente $X \cap Y = \emptyset$. Mostremos que (X, Y) é uma bipartição de G .

Para tanto, suponha que v e w são dois vértices de X , dessa forma queremos mostrar que eles não são adjacentes. Seja P o caminho mais curto (u, v) e Q o mais curto (u, w) . Denote por u_1 o último vértice comum a P e Q . Se P e Q são caminhos mais curtos, o caminho (u, u_1) de P e Q é o menor dentre os caminhos (u, u_1) , e portanto, tem o mesmo comprimento. Agora, se os comprimentos de ambos, P e Q são pares, os comprimentos de (u_1, v) de P , P_1 , e (u_1, w) de Q , Q_1 , devem ter a mesma paridade. Segue que o caminho $P_1^{-1}Q_1$ que sai de v e chega em w é de comprimento par. Para ilustração, veja a figura 1.20. Se houvesse uma aresta vw , $P_1^{-1}Q_1vw$ seria um ciclo de comprimento ímpar, contrariando a hipótese. Logo, não há dois vértices em X adjacentes.

Analogamente, podemos provar que não há dois vértices adjacentes em Y , portanto (X, Y) é uma bipartição de G .

□

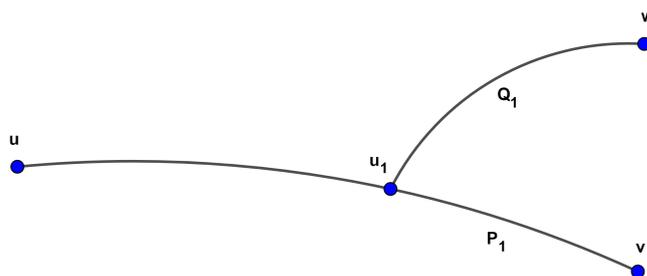


Figura 1.20: Caminhos P e Q

Dentre o assunto de passeio vale destacar a definição a seguir. Esta definição é importante, pois tem como problema associado uma motivação utilizada como forma didática para a introdução da Teoria dos Grafos no ensino básico.

Definição 27. Uma *trilha de Euler*, em um grafo conexo, é uma trilha fechada que usa todas as arestas do grafo. Um grafo conexo é **Euleriano** se possuir uma trilha de Euler.

Em algumas referências, pode ser encontrado o grafo Euleriano como o grafo que possui um “caminho Euleriano” ou até um “ciclo Euleriano”, mas pela teoria apresentada e para melhor entendimento foi definido como trilha de Euler.

Teorema 4 (Euler). Um grafo conexo e não trivial G é Euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par.

O Teorema 4, provado por L. Euler em 1735, marca o nascimento da Teoria dos Grafos. Euler chegou até ele após ser questionado se seria possível realizar um passeio pelas ruas da cidade prussiana de Königsberg (atual cidade russa de Kaliningrado), atravessando uma única vez cada uma das sete pontes que havia na época, sobre o rio Pregel, que corta a cidade, [12].

Esse problema pode ser representado por um grafo conforme figura 1.21, onde podemos ver que não é possível um passeio Euleriano no grafo, visto que todos os seus vértices têm grau ímpar.

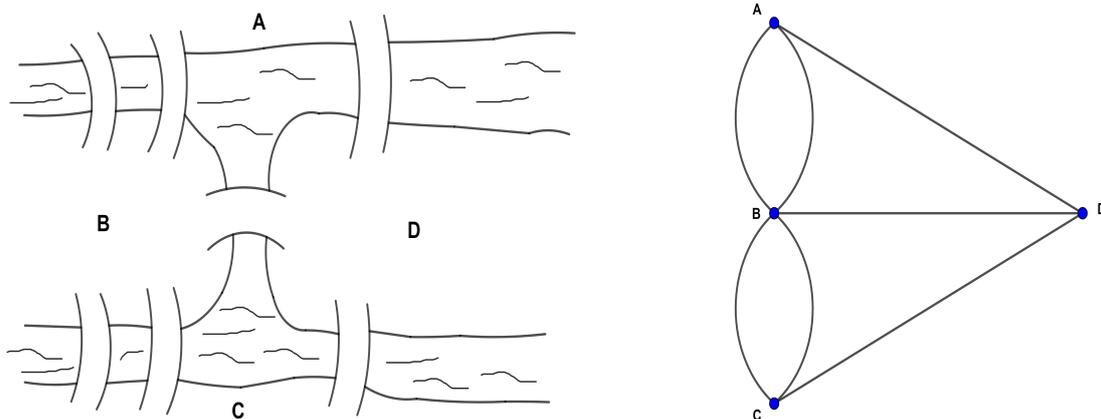


Figura 1.21: A ponte de Königsberg e sua representação em grafo

1.10 Árvores

Nesta seção são apresentados o conceito de árvore e algumas de suas propriedades.

Definição 28. Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico.

Exemplo 15. Na figura 1.22, temos exemplos de árvores.

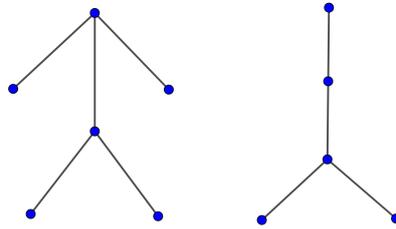


Figura 1.22: Árvores

Teorema 5. Em uma árvore, quaisquer dois vértices são conectados por um único caminho.

Demonstração. Seja G uma árvore. Por definição, G é um grafo conexo, logo quaisquer dois vértices de G são conectados por um caminho. Mostremos, por contradição, que este caminho é único. Suponha que existam dois caminhos distintos P_1 e P_2 em G , ligando os vértices u e v . Como $P_1 \neq P_2$, então existe uma aresta $e = xy$ de P_1 que não é uma aresta de P_2 . Claramente o grafo $(P_1 \cup P_2) - \{e\}$ é conexo, e portanto, contém um caminho P ligando x e y . Então $P + e$ é um ciclo, conforme figura 1.23, em um grafo acíclico G , uma contradição.

□

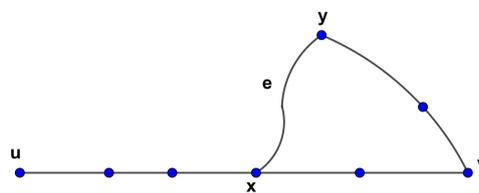


Figura 1.23: Caminho $P + e$

O próximo resultado relaciona o número de arestas e vértices de uma árvore.

Teorema 6. Se G é uma árvore, então $\varepsilon = v - 1$.

Demonstração. Seja G uma árvore com $v \geq 1$ vértices. Fazemos a prova por indução em v . Se $v = 1$, então $\varepsilon = 0 = v - 1$.

Suponha que a afirmativa do Teorema 6 seja verdadeira para todas as árvores com k vértices, $k < v$. Seja $uw \in E$. Então $G - uw$ não contém nenhum caminho (u, w) , já que uw é um caminho único em G . Assim $G - uw$ é desconexo e então $\omega(G - uw) = 2$. Os componentes G_1 e G_2 de $G - uw$, sendo acíclicos, são árvores. Além disso, cada um tem menos que v vértices. Assim sendo, pela hipótese de indução $\varepsilon(G_i) = v(G_i) - 1$, para $i = 1, 2$. Portanto,

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1 = v(G_1) + v(G_2) - 1 = v(G) - 1.$$

□

Corolário 2. *Toda árvore não trivial tem pelo menos dois vértices de grau um.*

Demonstração. Seja G uma árvore não trivial, ou seja, tal que $v > 1$. Então $d(u) \geq 1$ para todo $u \in V$. Além disso, pelos Teoremas 1 e 6, temos

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2\varepsilon = 2v - 2.$$

Segue que $d(u) = 1$ para pelo menos 2 vértices u .

□

1.11 Arestas de corte

Nesta seção introduzimos o conceito de aresta de corte a fim de obter uma caracterização de árvore, dentre grafos conexos.

Definição 29. *Uma aresta de corte de G é uma aresta e tal que $\omega(G - e) > \omega(G)$.*

Exemplo 16. *O grafo da figura 1.24 tem as três arestas de corte indicadas.*

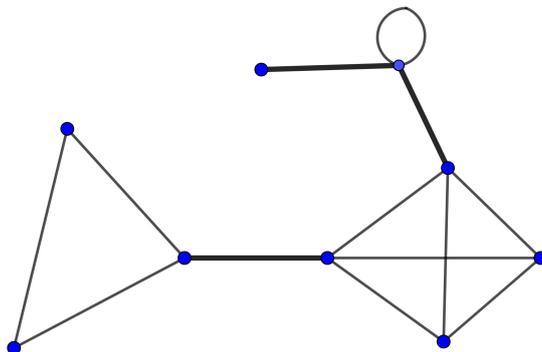


Figura 1.24: Aresta de corte

O próximo teorema caracteriza uma aresta de corte.

Teorema 7. *Uma aresta e de G é uma aresta de corte se, e somente se, e não está contida em nenhum ciclo de G .*

Demonstração. Seja e uma aresta de corte de G . Como $\omega(G - e) > \omega(G)$, existem vértices u e v de G que estão conectados em G , mas não em $G - e$. Há portanto, algum caminho P ligando os vértices u e v que, necessariamente, passa por e . Suponhamos que x e y são as extremidades de e , e que x precede y em P . Em $G - e$, u é ligado a x por um caminho em P , e y está ligado a v por um caminho em P .

Se e estivesse em um ciclo C , x e y seriam conectados em $G - e$ pelo caminho $C - e$. Assim, u e v seriam conectados em $G - e$, uma contradição.

A recíproca fazemos pela contrapositiva. Suponha que $e = xy$ não seja uma aresta de corte de G . Assim, $\omega(G - e) = \omega(G)$. Como existe um caminho (x, y) em G , x e y estão no mesmo componente de G . Segue que x e y estão no mesmo componente de $G - e$, portanto, há um caminho Q ligando x e y em $G - e$. Mas então e está no ciclo $Q + e$ de G .

□

Caracterizada uma aresta de corte, o Teorema 8 nos dá uma relação entre aresta de corte e árvore.

Teorema 8. *Um grafo conexo é uma árvore se, e somente se, toda aresta é uma aresta de corte.*

Demonstração. Seja G uma árvore, e e uma aresta de G . Como G é acíclico, e não está contido em nenhum ciclo de G e é portanto, pelo Teorema 7, uma aresta de corte de G .

Por outro lado, suponha que G seja conexo, mas não uma árvore. Então G contém um ciclo C . Pelo Teorema 7, nenhuma aresta de C pode ser uma aresta de corte de G , o que é absurdo, por hipótese, e portanto G é árvore. □

Os resultados a seguir envolvem o conceito de árvore geradora. Um problema interessante que envolve árvores geradoras é: dado um grafo G com pesos nas arestas, ou seja, cada aresta recebe um valor (custo), determinar um subgrafo gerador conexo de custo mínimo. Esse problema envolve determinar uma árvore geradora minimal. A resolução desse problema envolve um importante algoritmo em Ciência da Computação, conhecido como **algoritmo de Kruskal**, devido ao matemático americano Joseph Kruskal, [12].

Definição 30. Uma **árvore geradora** de G é um subgrafo gerador de G que é uma árvore.

Corolário 3. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Demonstração. Seja G conexo e T seja uma conexão minimal do subgrafo gerador de G , ou seja, um subgrafo conexo contendo todos os vértices de G com um número mínimo de arestas. Por definição, $\omega(T) = 1$ e $\omega(T - e) > 1$ para cada aresta e de T .

Segue que cada aresta de T é uma aresta de corte e, portanto, pelo Teorema 8, temos que T , sendo conexo, é uma árvore. □

Exemplo 17. A figura 1.25 mostra um grafo conexo e uma de suas árvores geradoras.

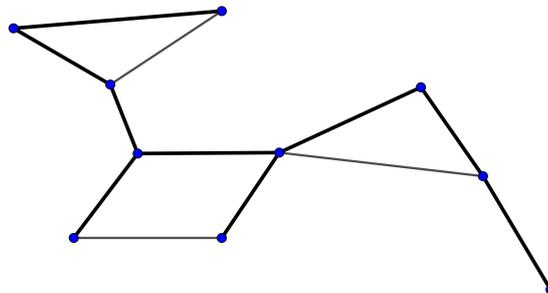


Figura 1.25: Árvore geradora

Corolário 4. Se G é conexo, então $\varepsilon \geq v - 1$

Demonstração. Seja G conexo, então G contém uma árvore geradora T . Portanto,

$$\varepsilon(G) \geq \varepsilon(T) = v(T) - 1 = v(G) - 1.$$

□

Teorema 9. Seja T uma árvore geradora de um grafo conexo, e seja e uma aresta de G que não está em T . Então $T + e$ contém um único ciclo.

Demonstração. Como T não possui ciclos, cada ciclo de $T + e$ contém e . Além disso, C é um ciclo de $T + e$ e, conseqüentemente, $C - e$ é um caminho em T conectando as extremidades de e . Pelo Teorema 5, T possui um único caminho. Portanto $T + e$ contém um único ciclo.

□

1.12 Vértices de corte

Definição 31. Um vértice u de G é um vértice de corte, se o conjunto de arestas E pode ser particionado em dois subconjuntos não vazios E_1 e E_2 , tais que $G[E_1]$ e $G[E_2]$ têm apenas o vértice u em comum.

Proposição 2. Se G não possui laço e é não trivial, então u é um vértice de corte de G se, e somente se, $\omega(G - u) > \omega(G)$.

Exemplo 18. O grafo da figura 1.26 tem os cinco vértices de corte indicado.

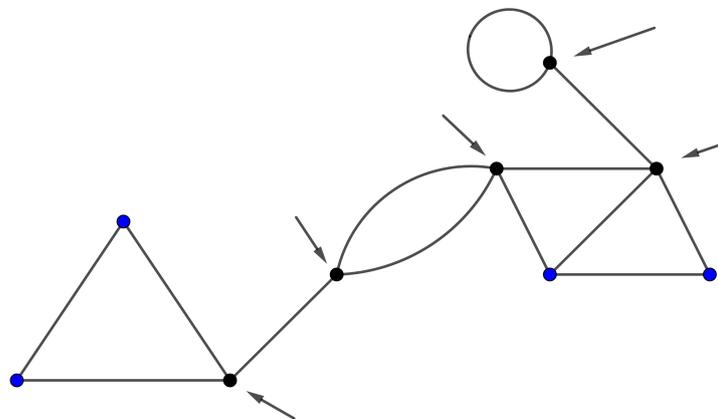


Figura 1.26: Vértices de corte

Teorema 10. *Um vértice u de uma árvore G é um vértice de corte se, e somente se, $d(u) > 1$.*

Demonstração. Seja G uma árvore. Se $d(u) = 0$, claramente, u não é um vértice de corte. Se $d(u) = 1$, $G - u$ é um grafo acíclico com $v(G - u) - 1$ arestas, e assim uma árvore. Portanto $\omega(G - u) = 1 = \omega(G)$, e u não é um vértice de corte de G . Então u é vértice de corte implica $d(u) > 1$.

Se $d(u) > 1$, existem pelo menos dois vértices distintos x e w adjacentes a u . O caminho xuw é um caminho (x, w) em G . Pelo Teorema 5, xuw é um caminho único (x, w) em G . Segue que não há um caminho (x, w) em $G - u$ e, portanto, que $\omega(G - u) > 1 = \omega(G)$. Assim u é um vértice de corte de G . □

Corolário 5. *Todo grafo conexo não trivial, que não contém laços, contém pelo menos dois vértices que não são de corte.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo que não possui laços e nem é trivial. Pelo Corolário 3, G contém uma árvore geradora T . Pelo Corolário 2 e Teorema 10, T tem pelo menos dois vértices que não são vértices de corte.

De fato, seja u um vértice qualquer destes, então $\omega(T - u) = 1$. Como T é um subgrafo gerador de G , $T - u$ é um subgrafo gerador de $G - u$ e portanto $\omega(G - u) \leq \omega(T - u)$.

Segue que $\omega(G - u) = 1$ e, portanto, que u não é um vértice de corte de G . Como há pelo menos dois desses vértices u , a prova está completa. □

1.13 Fórmula de Cayley

Existe uma fórmula recursiva para o número de árvores geradoras de um grafo que envolve a operação de contração de uma aresta. Dizemos que uma aresta e de G é contraída se esta for excluída e suas extremidades são identificadas, ou seja, viram um único vértice. O grafo resultante é denotado por $G \cdot e$.

Exemplo 19. *A figura 1.27 ilustra o efeito de contrair uma aresta.*

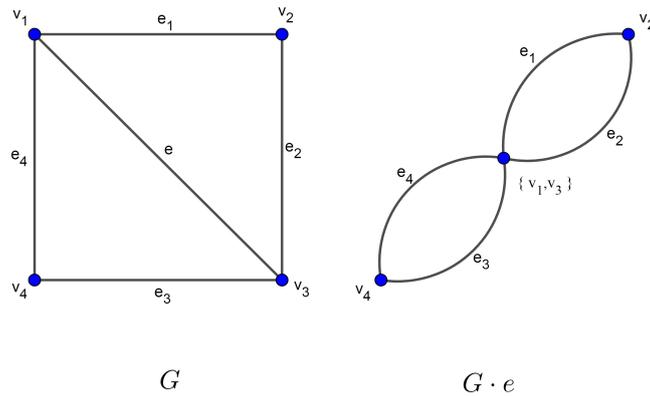


Figura 1.27: Contração de arestas

É claro que se e é uma ligação de G , então $v(G \cdot e) = v(G) - 1$, $\varepsilon(G \cdot e) = \varepsilon(G) - 1$ e $\omega(G \cdot e) = \omega(G)$. Portanto, se T é uma árvore, $T \cdot e$ também é. Denotamos o número de árvores geradoras de G por $\tau(G)$.

Teorema 11. *Se e é uma aresta em um grafo G , então $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.*

Demonstração. Inicialmente, note que, toda árvore geradora de G que não contém e é também uma árvore geradora de $G - e$, e inversamente, $\tau(G - e)$ é o número de árvores geradoras de G que não contêm e .

Agora, para cada árvore geradora T de G que contém e , corresponde a uma árvore geradora $T \cdot e$ de $G \cdot e$. Esta correspondência é uma bijeção (ver figura 1.28). Portanto, $\tau(G \cdot e)$ é precisamente o número de árvores geradoras de G que contêm e . Segue que $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

□

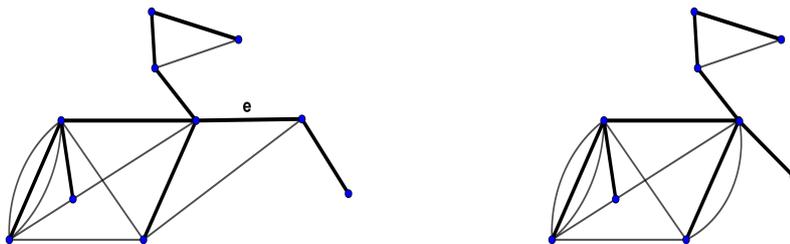


Figura 1.28: Correspondência entre árvores geradoras

Embora o Teorema 11 forneça um método de cálculo do número de árvores geradoras de um grafo, esse método não é adequado para grafos grandes, pois, conforme podemos ver na figura 1.29, um grafo com apenas cinco arestas gerou um grande número de operações.

Exemplo 20. A figura 1.29 ilustra o cálculo recursivo de $\tau(G)$ por meio do Teorema 11. O número de árvores geradoras de um grafo é representado simbolicamente pelo próprio grafo.

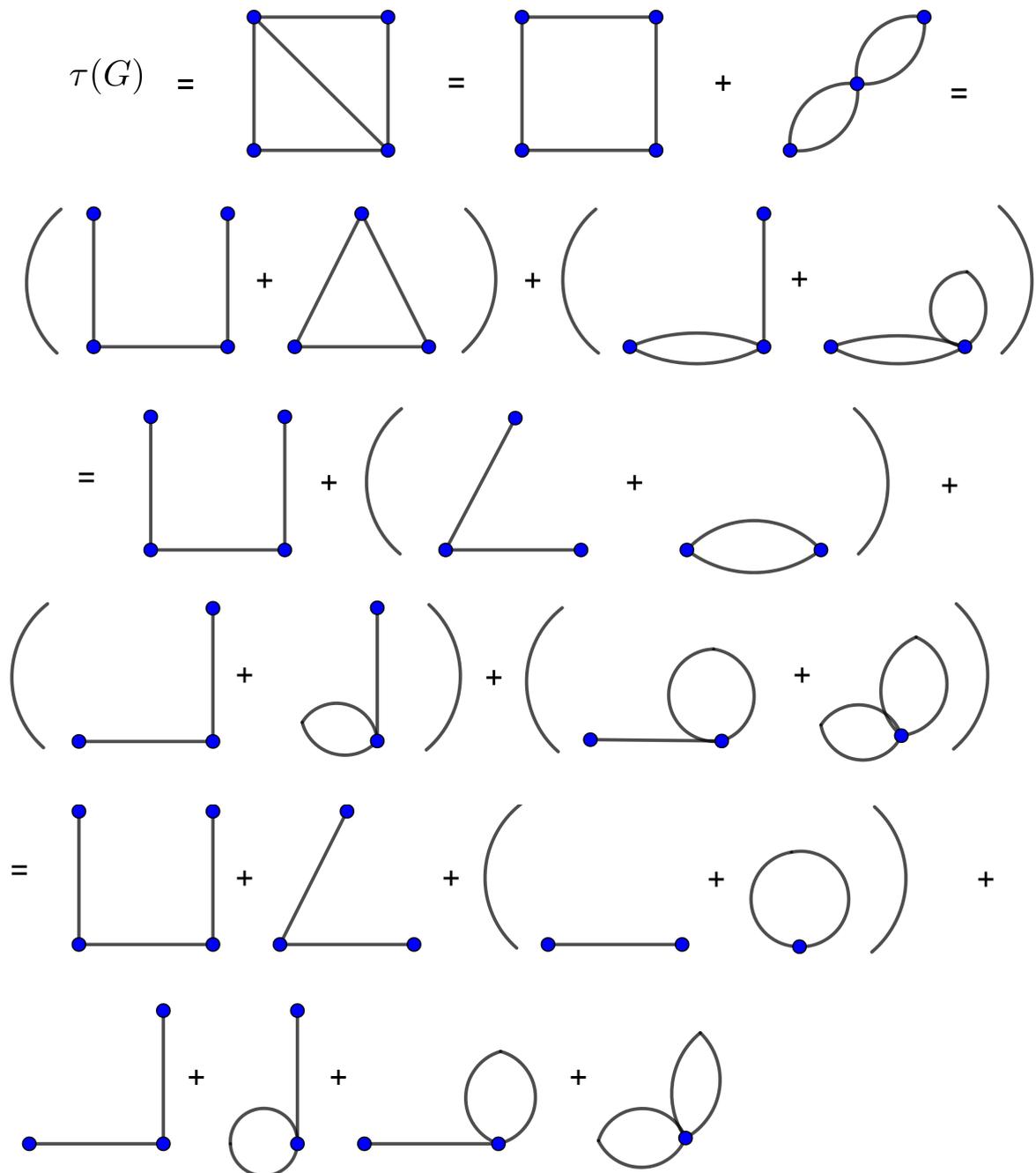


Figura 1.29: Cálculo recursivo de $\tau(G)$

Desse modo, podemos concluir que o número de árvores geradoras de G é 8.

Existe uma fórmula fechada para $\tau(G)$ que expressa $\tau(G)$ como um determinante, porém requer um estudo mais aprofundado nesse assunto e a prova, devida a Tutte (1965), pode ser encontrada em [1]. No caso especial quando G é completo, uma fórmula simples para $\tau(G)$ foi descoberto por Cayley (1889). A prova apresentada é devida a Prüfer (1918).

Teorema 12. *Dado K_n , temos que $\tau(K_n) = n^{n-2}$.*

Demonstração. Seja $N = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de vértices de K_n .

Note que n^{n-2} é o número de sequências de comprimento $n - 2$ que podem ser formadas com os elementos de N . Assim, para provar o teorema, basta estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto de árvores geradoras T de K_n e o conjunto de tais sequências $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$.

Relacionando N como um conjunto ordenado, seja s_1 o primeiro vértice de grau um em T ; o vértice adjacente a s_1 é levado em t_1 . Em seguida, excluimos s_1 de T , denotamos por s_2 o primeiro vértice de grau um em $T - s_1$, e levamos o vértice adjacente a s_2 em t_2 . Esta operação é repetida até que t_{n-2} tenha sido definida e uma árvore com apenas dois vértices permanece. A árvore na figura 1.30, por exemplo, dá origem à sequência $(4,3,5,3,4,5)$. Observe que qualquer vértice v de T ocorre $d_T(v) - 1$ vezes em $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$. Assim, os vértices de grau um em T são aqueles que não estão aparecendo nesta sequência.

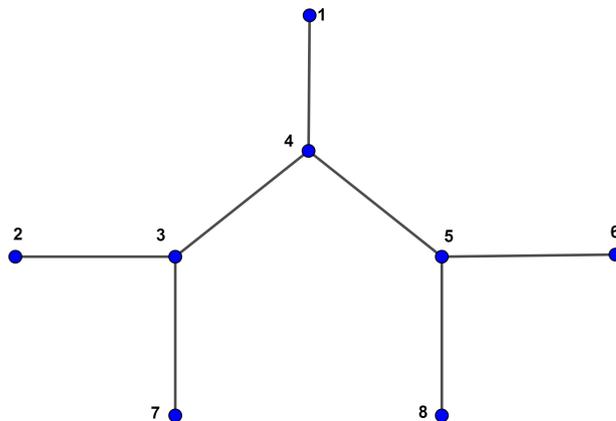


Figura 1.30: $(4,3,5,3,4,5)$

O procedimento inverso é igualmente direto. Para reconstruir T de $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$,

procedemos da seguinte forma. Considere os vértices em N que não estão na sequência $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$ e ordene-os.

Se s_1 for o primeiro vértice de N que não está em $(t_1, t_2, \dots, t_{n-2})$, conecte s_1 em t_1 . Em seguida, se s_2 for o primeiro vértice de $N - \{s_1\}$ que não está em $(t_2, t_3, \dots, t_{n-2})$, então conecte s_2 a t_2 . Continue com esse procedimento até que as $n-2$ arestas $s_1t_1, s_2t_2, \dots, s_{n-2}t_{n-2}$ tenham sido determinadas. A árvore T é agora obtida adicionando a aresta que une os dois vértices restantes $N - \{s_1, s_2, \dots, s_{n-2}\}$ (ver figuras 1.31 e 1.32). Podemos ver que diferentes árvores geradoras de K_n determinam sequências diferentes e que sequências diferentes dão origem a diferentes árvores geradoras de K_n , estabelecendo assim uma correspondência biunívoca.

□

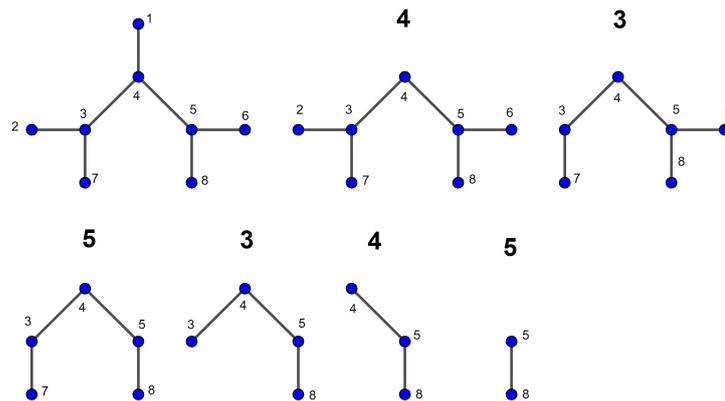


Figura 1.31: Construção da sequência

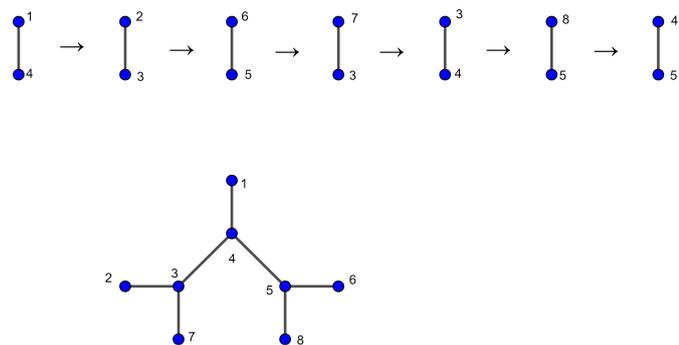


Figura 1.32: Construção da árvore

Note que n^{n-2} não é o número de árvores não isomorfas de K_n , mas o número de árvores geradoras distintas de K_n . Existem apenas seis árvores geradoras e não isomorfas de K_6 (ver figura 1.33), ao passo que $6^4 = 1296$ árvores geradoras distintas de K_6 .

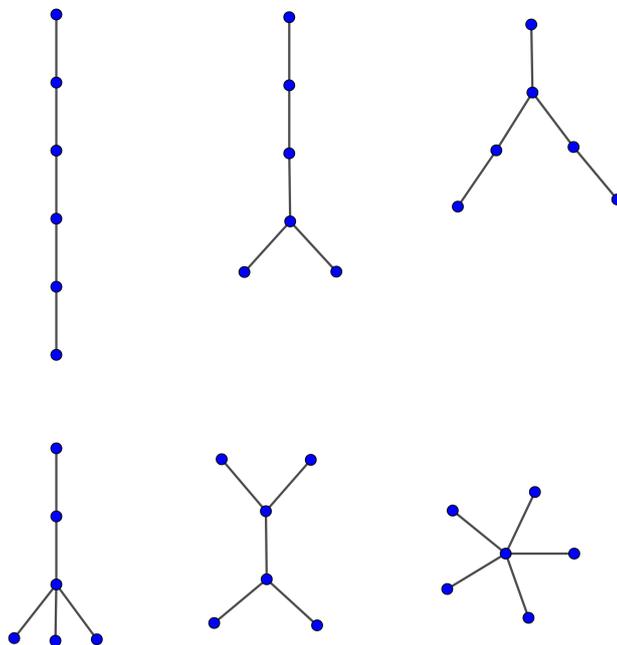


Figura 1.33: Árvores geradoras e não isomorfas de K_6

Capítulo 2

Introdução à Análise Combinatória e aplicações

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e definições em Análise Combinatória que nortearão nosso problema, assim como aplicações em contagem de caminhos reticulados e árvores ordenadas.

2.1 Princípios aditivo e multiplicativo

O uso dos princípios aditivos e multiplicativos é bastante eficiente para simplificar e dar maior entendimento a vários tipos de problemas em Análise Combinatória, assim como estender suas aplicações para fórmulas de permutações, arranjos e combinações. Para esta seção foram utilizados [15], [16], [17], [18], [13], [19] e [8].

Definição 32. (*Princípio aditivo*) Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) com, respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Definição 33. (*Princípio multiplicativo*) Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido de B é $m.n$, com a mesma cardinalidade do conjunto $A \times B$, (lê-se A cartesiano B).

Definição 34. **Arranjos simples** de n elementos distintos, tomados p a p , onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de p elementos, dentre n elementos, que diferem entre si pela ordem.

Notação: A_n^p é o número de arranjos simples de n elementos distintos, tomados p a p .

Podemos encontrar uma expressão para A_n^p a partir do princípio multiplicativo. Esse problema é equivalente a termos n objetos com os quais queremos preencher p lugares ordenadamente.

Para o primeiro lugar temos n objetos para escolher. Feito a escolha do primeiro, temos $(n - 1)$ objetos disponíveis para escolher o segundo, e assim sucessivamente, até o último lugar termos $(n - (p - 1))$ objetos disponíveis para escolher. Deste modo, pelo princípio multiplicativo, temos $n(n - 1)(n - 2)\dots(n - (p - 1))$ maneiras diferentes. Portanto $A_n^p = n(n - 1)(n - 2)\dots(n - (p - 1))$, que pode ser escrita como:

$$A_n^p = n(n - 1)(n - 2)\dots(n - (p - 1)) \cdot \frac{(n - p)(n - p - 1)\dots 2 \cdot 1}{(n - p)(n - p - 1)\dots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n - p)!}.$$

Definição 35. *Combinações simples* de n elementos distintos, tomados p a p , onde $n \geq 1$ e p é um número natural, tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos.

Notação: $C_n^p = \binom{n}{p}$ é o número de combinações simples de n elementos distintos, tomados p a p . Se $p > n$, p e n inteiros, define-se $C_n^p = 0$.

Note que a diferença entre a Definição 34 e a 35 está na ordem da escolha. Assim, para obtermos uma expressão para $\binom{n}{p}$ podemos apenas dividir A_n^p por $p!$, pois como a ordem não importa, A_n^p conta $p!$ vezes a mais o número de combinações do que $\binom{n}{p}$. Portanto, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n - p)!}$.

Exemplo 21. *Quantos são os anagramas formados por 3 vogais e 4 consoantes escolhidas dentre 18 consoantes e 5 vogais.*

Para as vogais temos $\binom{5}{3}$ maneiras diferentes de escolher. As consoantes podem ser escolhidas de $\binom{18}{4}$ maneiras distintas. Como os anagramas devem conter 7 letras a resposta é $\binom{5}{3} \binom{18}{4} 7! = 642.600$.

2.2 Coeficiente Binomial

Conforme Definição 35, dado um conjunto com n elementos distintos, o número de subconjuntos com k elementos que podemos formar a partir desse conjunto é dado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

No desenvolvimento de $(a+b)^n$, Newton¹ desenvolveu uma fórmula. O termo genérico do produto é obtido tomando em k dos fatores, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, a primeira parcela e tomando nos restantes $n-k$ fatores a segunda parcela. Isso pode ser feito de C_n^k maneiras e o termo genérico do produto é $C_n^k a^k b^{n-k}$. Assim temos a seguinte identidade:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \quad (2.2.1)$$

O próximo resultado determina uma relação, conhecida como Relação de Stifel, entre os coeficientes binomiais. Este resultado pode ser provado de maneira direta através da definição do número de combinações. Aqui escolhemos desenvolver a prova de maneira combinatória.

Teorema 13. (*Relação de Stifel*) $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$

Demonstração. Considere um conjunto A com $n+1$ elementos, dos quais um é x . O número de subconjuntos de A com $p+1$ elementos é C_{n+1}^{p+1} . Basta observar que esse número é igual à soma do número de subconjuntos nos quais x não figura, C_n^{p+1} , com o número de subconjuntos nos quais x figura, C_n^p .

□

Agora note que $C_n^k = C_n^{n-k}$. De fato,

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \quad (2.2.2)$$

Deste modo podemos ver que na expansão de $(a+b)^n$ os coeficientes dos termos equidistantes são iguais. Denotamos o i -ésimo termo por $T_{i+1} = C_n^k a^i b^{n-i}$.

¹Newton, Isaac (1642-1727), matemático e físico inglês.

A relação de Stifel e a relação 2.2.2 nos dão a simetria do triângulo de Tartaglia²-Pascal³, que é um triângulo formado com os diversos valores de C_n^k , conforme representado abaixo.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & & & & C_0^0 \\
 & & & & & & C_1^0 & C_1^1 \\
 & & & & & & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\
 & & & & & & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
 & & & & & & C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4
 \end{array}$$

Em Degroot [18], o exemplo 22 irá ajudar na compreensão do coeficiente multinomial e, conseqüentemente, do coeficiente trinomial.

Exemplo 22. *Suponha que 20 membros de uma organização devam ser divididos em três comitês A, B e C de tal maneira que cada um dos comitês A e B devam ter oito membros e o comitê C tenha quatro membros. Determinaremos o número de maneiras diferentes pelas quais os membros podem ser designados para esses comitês. Observe que cada um dos 20 membros é atribuído a um e apenas um comitê.*

Uma forma de pensar para resolver esse problema é formar o comitê A primeiro, escolhendo seus 8 membros, e então dividir os 12 membros restantes nos comitês B e C. Para formar o comitê A, devemos escolher 8 de 20 membros, e isso pode ser feito de $\binom{20}{8}$ maneiras.

Depois, para dividir os 12 membros restantes nos comitês B e C, existem $\binom{12}{8}$ maneiras de fazê-lo. Logo, pelo princípio multiplicativo a resposta é:

$$\binom{20}{8} \binom{12}{8} = \frac{20!}{8!12!} \frac{12!}{8!4!} = 62.355.150$$

²Tartaglia, Nicolo Fontana (1500-1557), matemático italiano.

³Pascal, Blaise (1623-1662), matemático, filósofo e físico francês.

Observe como o $12!$ que aparece no numerador de $\binom{12}{8}$ cancela com o $12!$ que aparece no denominador de $\binom{20}{8}$.

Este fato é a chave da fórmula geral que será apresentada na seção a seguir.

2.3 Coeficiente Multinomial

Em geral, suponha que n elementos distintos devam ser divididos em k grupos diferentes ($k \geq 2$), de tal maneira que, para $j = 1, \dots, k$, o j -ésimo grupo, A_j , contenha exatamente n_j elementos, onde $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Os elementos n_1 no primeiro grupo, A_1 , podem ser selecionados a partir dos n elementos disponíveis de $\binom{n}{n_1}$ maneiras diferentes. Após os elementos n_1 do primeiro grupo terem sido selecionados, os elementos n_2 do segundo grupo, A_2 , podem ser selecionados a partir dos $n - n_1$ elementos restantes em $\binom{n - n_1}{n_2}$ maneiras diferentes. Assim, o número total de maneiras diferentes de selecionar os elementos para o primeiro e segundo grupo é $\binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2}$. Desse modo, segue que para cada $j = 1, 2, \dots, k - 2$, após os primeiros j grupos terem sido formados, o número de maneiras diferentes em que os n_{j+1} elementos do próximo grupo, A_{j+1} , podem ser selecionados, dentre os $n - n_1 - \dots - n_j$ elementos restantes, é $\binom{n - n_1 - \dots - n_j}{n_{j+1}}$. Após os elementos do grupo A_{k-1} terem sido selecionados, os n_k elementos restantes devem então formarem o último grupo A_k .

Assim, o número total de maneiras diferentes de dividir os n elementos nos k grupos é:

$$\binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \binom{n - n_1 - n_2}{n_3} \dots \binom{n - n_1 - \dots - n_{k-2}}{n_{k-1}} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Onde a última fórmula significa escrever os coeficientes binomiais em termos de fatoriais.

Definição 36. O número $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ denotado por $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ é chamado de *coeficiente multinomial*.

O próximo resultado é uma extensão da identidade 2.2.1.

Teorema 14. Para todo x_1, x_2, \dots, x_k e para n inteiro positivo

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

tal que a soma se estende sobre todas as combinações possíveis de inteiros não negativos, n_1, n_2, \dots, n_k , tais que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Exemplo 23. Tomando $x_1 = 1$, $x_2 = 3x$ e $x_3 = x^2$, onde $k = 3$, temos:

$$(1 + 3x + x^2)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, n_3} (3x)^{n_2} x^{2n_3}$$

tais que $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

Exemplo 24. Consideremos agora o trinômio $(1 + x + x^2)^n$. Pelo Teorema 14 temos que

$$(1 + x + x^2)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, n_3} x^{n_2 + 2n_3}$$

tais que $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

2.4 Números Trinomiais

Os coeficientes do trinômio $(1 + x + x^2)^n$ também podem ser definidos como $\binom{n}{h}_2$, conforme [15]. Desse modo estamos interessados agora em obter uma fórmula para esses números na expansão

$$(1 + x + x^2)^n = \sum_{h=-n}^n \binom{n}{h}_2 x^{h+n}. \quad (2.4.1)$$

Note que o índice 2 em $\binom{n}{h}_2$ é para diferenciá-lo dos números binomiais $\binom{n}{h}$. Como os expoentes de x variam de 0 a $2n$, o índice h deve variar de $-n$ a n . De fato, temos pela expressão 2.2.1 que

$$\begin{aligned}
(1 + x + x^2)^n &= [-x + (1 + x)^2]^n \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-x)^j [(1 + x)^2]^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-x)^j (1 + x)^{2n-2j}.
\end{aligned}$$

Observamos agora que $(1 + x)^{2n-2j} = \sum_{k=0}^{2n-2j} \binom{2n-2j}{k} x^{2n-2j-k} (1)^k$. Assim temos que

$$\begin{aligned}
(1 + x + x^2)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-x)^j \sum_{k=0}^{2n-2j} \binom{2n-2j}{k} x^{2n-2j-k} \\
&= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{2n-2j} \binom{n}{j} \binom{2n-2j}{k} (-1)^j x^{2n-j-k} \\
&= x^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{2n-2j} \binom{n}{j} \binom{2n-2j}{k} (-1)^j x^{n-j-k}. \tag{2.4.2}
\end{aligned}$$

Fazendo $n - j - k = h$, podemos observar que como $0 \leq j \leq n$ e $0 \leq k \leq 2n - 2j$, o valor mínimo de h é quando $j = 0$ e $k = 2n - 2j$, ou seja, $h = -n$ e o máximo quando $j = 0$ e $k = 0$ que é $h = n$.

Substituindo na expressão 2.4.2, temos:

$$x^n \sum_{j=0}^n \sum_{h=-n}^n \binom{n}{j} \binom{2n-2j}{n-j-h} (-1)^j x^h = \sum_{j=0}^n \sum_{h=-n}^n \binom{n}{j} \binom{2n-2j}{n-j-h} (-1)^j x^{h+n}.$$

Note que, para $j > n$, $\binom{n}{j} = 0$. Logo, podemos escrever a última expressão da seguinte forma:

$$\sum_{h=-n}^n \sum_{j \geq 0} \binom{n}{j} \binom{2n-2j}{n-j-h} (-1)^j x^{h+n}.$$

Obtendo, portanto, a expressão

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2n-2j}{n-h-j} = \binom{n}{h}_2. \quad (2.4.3)$$

Conseguimos construir um triângulo aritmético, semelhante ao de Pascal, com os coeficientes trinômiais. Seguem duas relações, semelhantes às do triângulo de Pascal, que nos darão a simetria e um método para a construção do triângulo, cuja n -ésima linha contém os coeficientes da expansão de $(1+x+x^2)^n$.

Proposição 3.
$$\binom{n}{h}_2 = \binom{n}{-h}_2.$$

Demonstração. Pelas relações 2.4.3 e 2.2.2 temos que

$$\begin{aligned} \binom{n}{h}_2 &= \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2n-2j}{n-h-j} \\ &= \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2n-2j}{2n-2j-n+h+j} \\ &= \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2n-2j}{n+h-j} \\ &= \binom{n}{-h}_2. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.
$$\binom{n}{h}_2 = \binom{n-1}{h-1}_2 + \binom{n-1}{h}_2 + \binom{n-1}{h+1}_2$$

Demonstração. Note que $(1+x+x^2)^n = (x(x^{-1}+1+x))^n$

$$= x^n (x^{-1}+1+x)^n = x^n \sum_{h=-n}^n \binom{n}{h}_2 x^h.$$

Exemplo 25. A Figura 2.1 mostra os seis caminhos reticulados em \mathbb{Z}^2 de $(0, 0)$ a $(2, 2)$ com passos $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

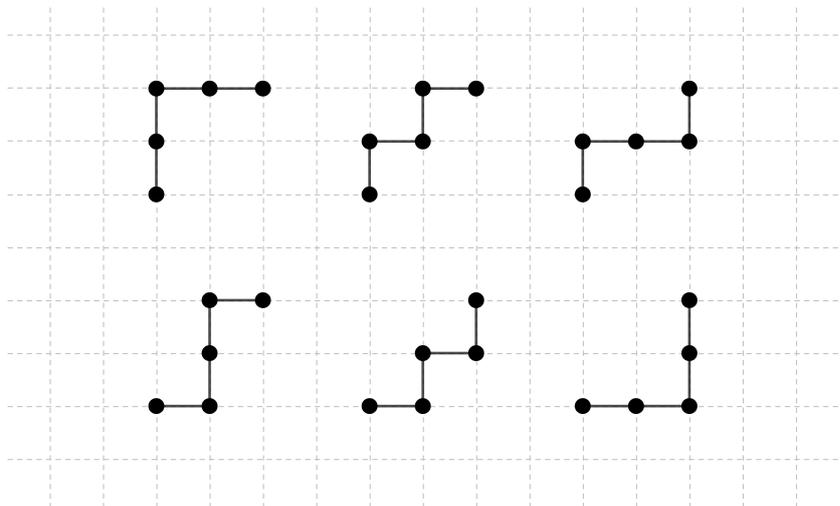


Figura 2.1: Caminho reticulado

Os seis segmentos, figura 2.1, representam caminhos reticulados. Aqui não colocamos as coordenadas conforme plano cartesiano, mas pelo desenho conseguimos fazer essa correspondência.

Em \mathbb{Z}^2 podemos enunciar a Proposição 5.

Proposição 5. Seja $v = (a, b) \in \mathbb{N}^2$. O número de caminhos reticulados que vão de $(0, 0)$ para v , com passos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ é dado por $\binom{a+b}{a, b}$.

Demonstração. O número de passos de $(0, 0)$ a (a, b) é $a + b$, pois $a(1, 0) + b(0, 1) = (a, b)$. Podemos pensar aqui em dois grupos para os passos, e em cada grupo temos a e b elementos. Portanto, pela definição do coeficiente multinomial temos que o número possível de caminhos reticulados é $\binom{a+b}{a, b}$. \square

Para o caso geral a proposição fica conforme segue.

Proposição 6. Seja $v = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{N}^d$, e seja e_i o vetor cujo i -ésimo elemento é 1 e os demais 0, em \mathbb{Z}^d . O número de caminhos reticulados em \mathbb{Z}^d que vão de $(0, 0, \dots, 0)$ para v com passos e_1, \dots, e_d , é dado pelo coeficiente multinomial $\binom{a_1 + a_2 + \dots + a_d}{a_1, a_2, \dots, a_d}$.

Demonstração. Note que temos um total de $a_1 + a_2 + \dots + a_d$ passos para ir de $(0, \dots, 0)$ a v , e podemos percorrê-los de modo que tenhamos a_i passos e_i em alguma ordem, ou

seja, podemos pensar em $a_1 + a_2 + \dots + a_d$ elementos para serem divididos em d grupos, de modo que o grupo e_i tenha a_i elementos. Da definição de coeficiente multinomial segue que o número de caminhos reticulados que vão de $(0, \dots, 0)$ para v é $\binom{a_1 + a_2 + \dots + a_d}{a_1, a_2, \dots, a_d}$. \square

Exemplo 26. Na figura 2.1 temos passos $(1,0)$ e $(0,1)$, indo de $(0,0)$ a $(2,2)$. Pela Proposição 5, temos $\binom{2+2}{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ caminhos reticulados, conforme vemos na figura. Podemos ver que se tomarmos passos $(1,0) = A$ e $(0,1) = B$, conseguimos associar, aos caminhos, as palavras: $AABB$, $ABAB$, $ABBA$, $BAAB$, $BABA$ e $BBAA$.

Exemplo 27. Considere os caminhos reticulados que vão de $(0,0)$ a $(2n,0)$ com passos $(1,1)$ e $(1,-1)$ e que nunca vão abaixo do eixo OX . Seguem os 5 caminhos, tomando $n = 3$, na figura 2.2.

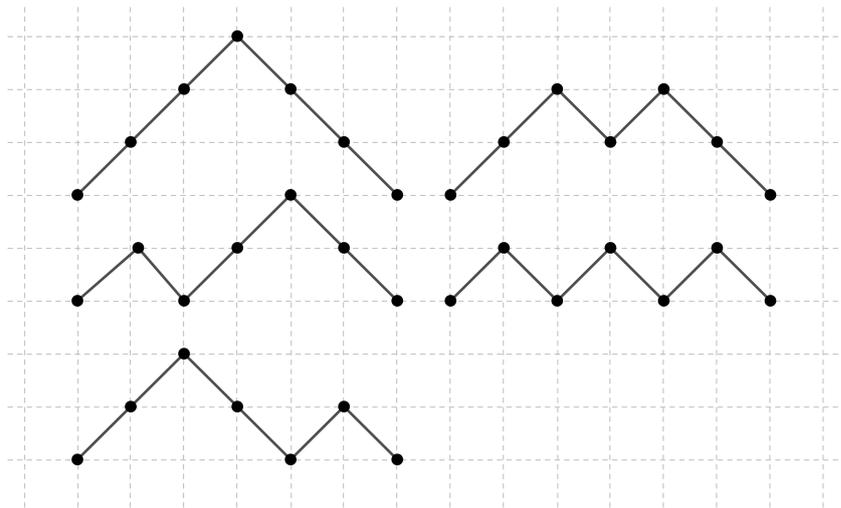


Figura 2.2: Caminhos para $n = 3$

Note que no exemplo 27, o número de caminhos reticulados é equivalente ao número de caminhos reticulados que vão de $(0,0)$ a (n,n) , com passos $(1,0)$ e $(0,1)$ que estão acima da reta $x = y$. Basta substituir os passos $(1,1)$ por $(1,0)$ e os passos $(1,-1)$ por $(0,1)$. De fato, temos que $k(1,1) + j(1,-1) = (2n,0) \Leftrightarrow k + j = 2n$ e $k = j \Leftrightarrow k = j = n$. E $a(1,0) + b(0,1) = (n,n) \Leftrightarrow a = b = n$. Seguindo a restrição, o número de passos continua o mesmo.

2.6 Árvores ordenadas e os números de Catalan

No capítulo 1 vimos a definição de árvore. Dizemos que uma árvore é enraizada quando diferenciamos um vértice (nó) dos demais, o qual chamamos de raiz. Segue a definição de árvore ordenada de acordo com Stanley [17].

Definição 38. Uma árvore ordenada T é definida por:

a - Um dos vértices é designado como raiz de T ;

b - Os vértices restantes são colocados em uma partição ordenada (T_1, \dots, T_m) de $m \geq 0$ conjuntos disjuntos dois a dois não-vazios T_1, \dots, T_m , os quais são árvores planas.

Essas árvores planas ou subárvores são ditas como filhos da raiz da árvore e são árvores ordenadas.

Uma árvore ordenada também pode ser definida, de acordo com Stanton [13], como uma árvore enraizada cujas subárvores principais (as árvores obtidas pela remoção da raiz) são árvores ordenadas e receberam alguma ordem entre elas. A raiz geralmente é representada pelo vértice que está no topo da árvore, conforme destacamos em vermelho na figura 2.3.

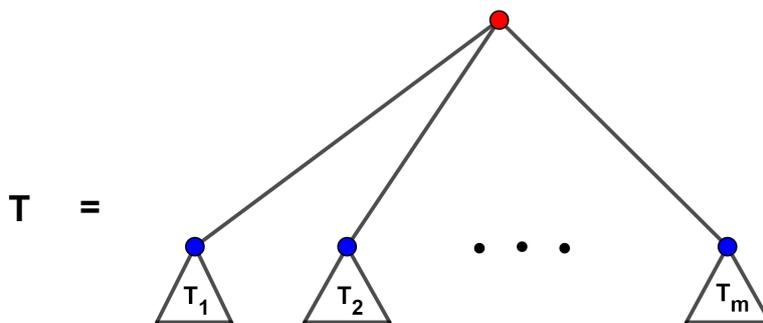


Figura 2.3: Árvore ordenada

Exemplo 28. Considere a árvore da figura 2.4. Temos a raiz 1, suas subárvores $T_1 = \{2, 4, 8, 6\}$, $T_2 = \{3\}$ e $T_3 = \{7, 5, 9, 10\}$. Note que 2 é raiz de T_1 e 7 de T_3 , e $T_4 = \{4, 8, 6\}$ é subárvore de T_1 , com raiz 4. $T_5 = \{5, 10\}$ com raiz 5 e $T_6 = \{9\}$, e as subárvores $T_7 = \{8\}$, $T_8 = \{6\}$ e $T_9 = \{10\}$ consistem de um único vértice cada.

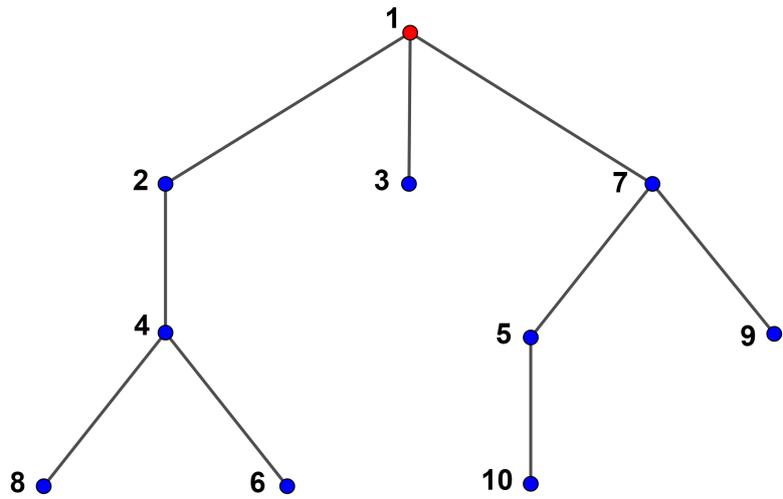


Figura 2.4: Árvore ordenada

Nessas árvores ordenadas, não teríamos uma árvore distinta se trocássemos o vértice 6 pelo 8, pois eles ainda assim seriam filhos da raiz 4 na subárvore T_4 . Desse modo, podemos construir as árvores sem rótulos para simplificar. A figura 2.5 mostra duas árvores que são isomorfas, porém são árvores ordenadas distintas. Podemos ver uma árvore com raiz de grau três e uma aresta emanando do nó mais à esquerda que é adjacente à raiz, e a outra árvore, em que a raiz é de grau três e uma aresta emanando do segundo nó mais à esquerda que é adjacente à raiz.

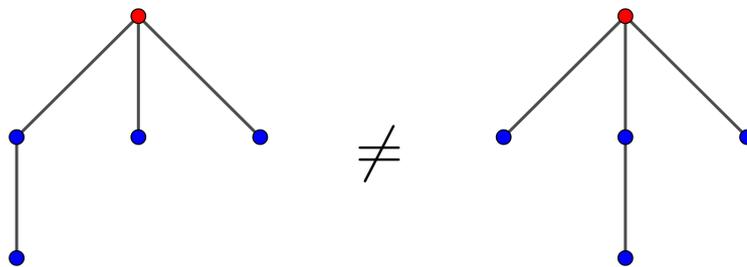


Figura 2.5: Árvores ordenadas distintas

De acordo com Dershowitz [19], o conjunto T_n ($n \geq 0$) denota o conjunto de árvores ordenadas com n arestas. Conforme figuras 2.6 e 2.7, podemos ver que o número de elementos desse conjunto forma a sequência com primeiros termos 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ..., [[8], A000108]. Esses são os conhecidos números de Catalan C_n :

$$|T_n| = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

No exemplo 27, o número de caminhos reticulados também conta os números de Catalan. Tais caminhos são conhecidos como caminhos de Dyck, conforme [8].

Essas provas geralmente são feitas pela bijeção entre o conjunto que queremos mostrar e o que já sabemos que é contado por determinada função ou sequência, e a mesma cardinalidade se dá pelo princípio bijetivo. Por exemplo, Stanton em [13], mostra que C_n é o número de sequências de “parêntesis bem formados de tamanho $2n$ ”, e faz a bijeção deste com outros conjuntos, dentre eles, o de árvores ordenadas com n arestas.

Parêntesis bem formados quer dizer que em uma sequência formada por parêntesis “(” ou “)”, ao olharmos qualquer elemento da sequência da esquerda para a direita, o número de parêntesis “)” não excede o de “(”, e a sequência tem o mesmo número de “(” que o de “)”.

Temos nas figuras 2.6 e 2.7 as árvores ordenadas com n arestas T_i , para $i = 0, 1, 2, 3$ e 4.

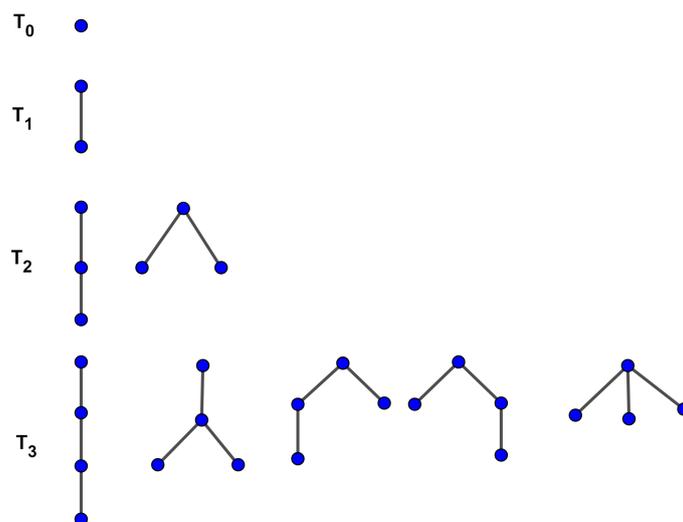


Figura 2.6: Árvores ordenadas T_0, T_1, T_2 e T_3

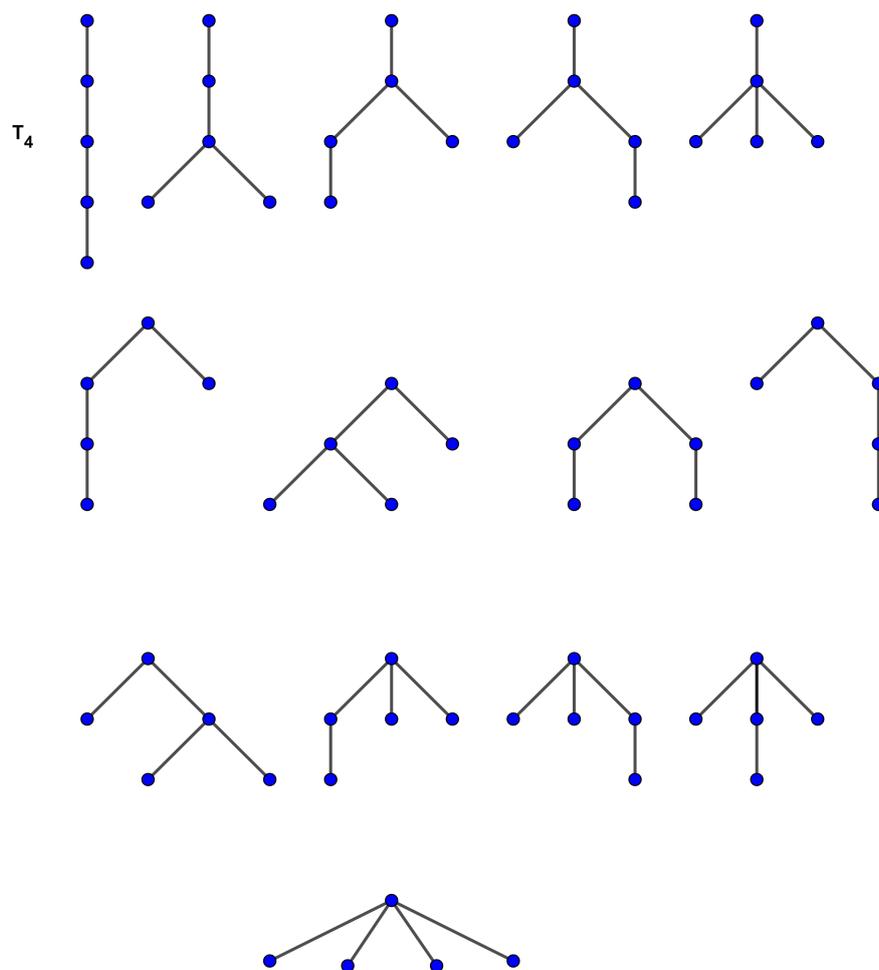


Figura 2.7: Árvore ordenadas T_4

Capítulo 3

Árvores ordenadas, caminhos reticulados e números trinomiais

Para este capítulo, foram utilizados [8], [19], [17] e [13].

Analisando a sequência numérica [[8], A002426] determinada pelos coeficientes centrais da expansão do trinômio $(1 + x + x^2)^n$ e por interpretações feitas de informações que estão disponíveis em [8], existem mais algumas propriedades apresentadas neste capítulo.

Em [8], temos que os coeficientes centrais da expansão do trinômio $(1 + x + x^2)^n$, é o número de caminhos reticulados indo de $(0, 0)$ a $(n, 0)$ com passos $U = (1, 1)$, $D = (1, -1)$ e $H = (1, 0)$. E também, é o número de árvores ordenadas com $n + 1$ arestas, com raiz de grau ímpar e nós com grau de saída no máximo dois.

Na próxima seção fazemos uma prova bijetiva entre caminhos reticulados e árvores ordenadas, segundo as restrições supracitadas.

Exemplo 29. *Para $n = 0, 1, 2$ e 3 temos a representação gráfica, conforme figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5, das árvores ordenadas e todos os possíveis caminhos reticulados, os quais foram diferenciados pelas cores vermelho, verde e preto.*

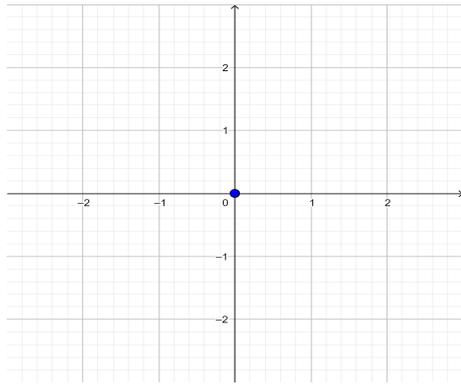


Figura 3.1: Caminho reticulado e árvore para $n = 0$

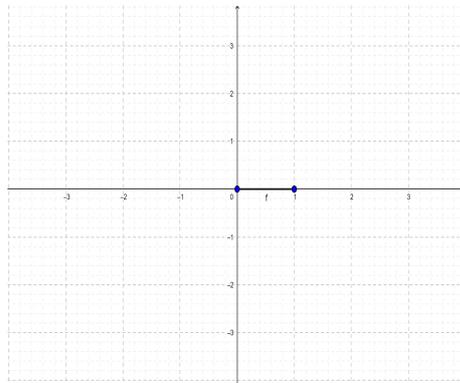


Figura 3.2: Caminho reticulado e árvore para $n = 1$

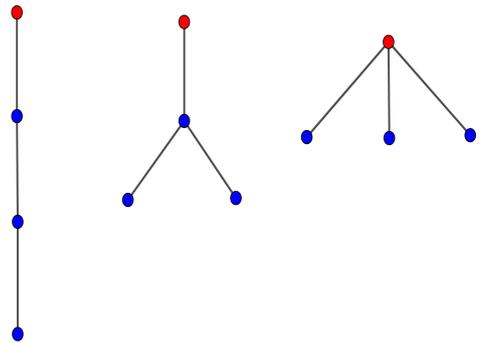
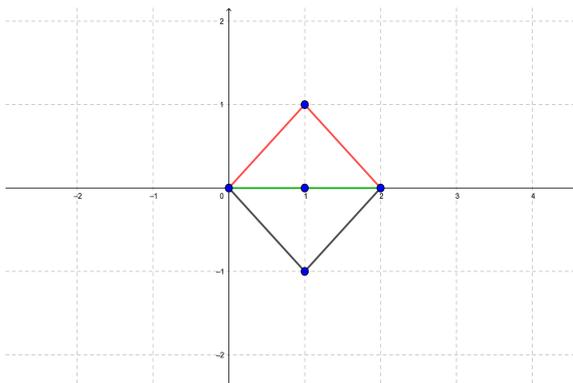


Figura 3.3: Caminhos reticulados e árvores para $n = 2$

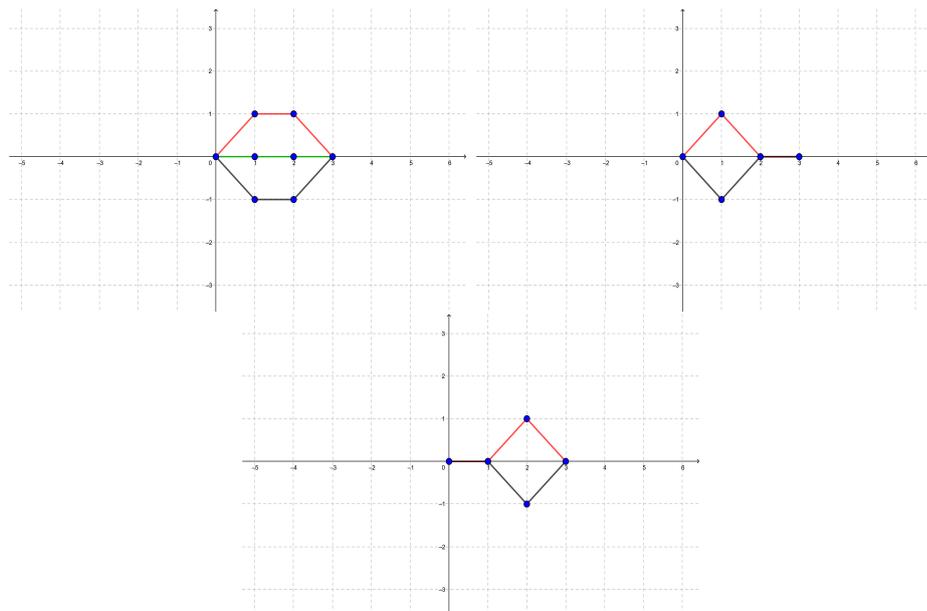


Figura 3.4: Caminhos reticulados para $n = 3$

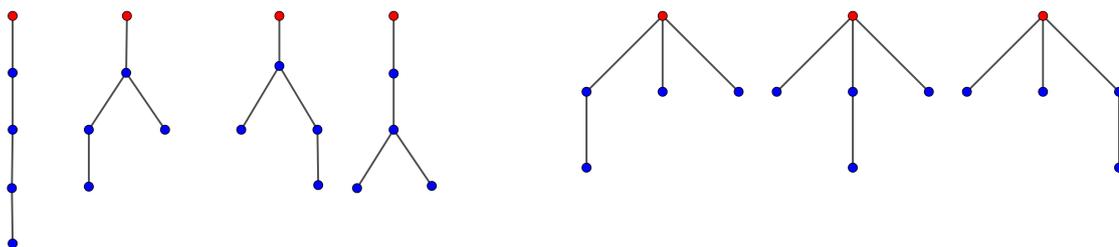


Figura 3.5: Árvores para $n = 3$

3.1 Resultados

Seja \mathbb{G}_n o conjunto de árvores ordenadas com $n + 1$ arestas, tendo raízes de grau ímpar e nós com grau de saída no máximo dois. E seja \mathbb{P}_n , o conjunto dos caminhos reticulados indo de $(0, 0)$ a $(n, 0)$ com passos $(1, 1)$, $(1, -1)$ e $(1, 0)$. Como os conjuntos possuem mesma cardinalidade quando fixado $n \in \mathbb{N}$, conforme visto em [8], então existe uma bijeção entre eles. Seja $\phi : \mathbb{G}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ a função bijetiva de \mathbb{G}_n e \mathbb{P}_n .

Em 2001 E. Deutsch, em [9], apresenta uma prova da bijeção entre os pequenos e os grandes números de Schröder, que envolve árvores ordenadas e caminhos reticulados. A partir dessas ideias foi possível fazer $\phi : \mathbb{G}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$, conforme apresentaremos nesta seção.

Primeiramente, vejamos um resultado simples sobre caminhos reticulados.

Lema 2. *O número de passos $(1, 1)$ em \mathbb{P}_n é o mesmo que o de passos $(1, -1)$.*

Demonstração. Consideramos o caminho reticulado c indo de $(0, 0)$ a $(n, 0)$ com k passos $(1, 1)$, j passos $(1, -1)$ e q passos $(1, 0)$.

Temos $k(1, 1) + j(1, -1) + q(1, 0) = (k + j + q, k - j)$, onde $k + j + q = n$ e $k - j = 0$. Portanto $k = j$. □

Sejam C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 em \mathbb{P}_n , tais que C_1 é o conjunto dos caminhos que estão acima do eixo OX , C_2 o conjunto dos que estão abaixo do eixo OX , C_3 dos que têm ordenada positiva e depois negativa, C_4 dos que têm ordenada negativa e depois positiva e C_5 dos que possuem apenas ordenada zero.

Deste modo, podemos ver que $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 = \mathbb{P}_n$ (conjuntos disjuntos) e $|C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5| = K_n$, tal que K_n é o n -ésimo termo da sequência formada pelos coeficientes centrais da expansão de $(1 + x + x^2)^n$. Note que $|C_1| = |C_2| = s$, para algum $s \in \mathbb{N}$, pois para cada $c_1 \in C_1$ existe um simétrico, em relação ao eixo OX , $c_2 \in C_2$. Analogamente temos $|C_3| = |C_4| = t$, para algum $t \in \mathbb{N}$ e $C_5 = 1$. Logo $2s + 2t + 1 = K_n$, e portanto $|C_1 \cup C_3 \cup C_5| = \frac{K_n + 1}{2}$. Assim será suficiente usarmos os caminhos C_1, C_3 e C_5 e posteriormente fazemos relação com os simétricos.

Fixado n , considere os conjuntos C_1, C_3 e C_5 em \mathbb{P}_n . Denominamos $C_1 \cup C_3 \cup C_5 = C$.

Note que o número de arestas, em \mathbb{G}_n , é um a mais do que o de passos, em \mathbb{P}_n , deste modo vamos retirar uma aresta, convenientemente, para que esse número fique igual e assim definirmos a bijeção. Denominamos A o conjunto das “árvores limpas” com n arestas, ou seja, que foram removidas exatamente uma aresta, e seja $f : \mathbb{G}_n \rightarrow A$, a função que faz essa remoção. Vamos definir f .

Fazemos a contração da aresta (veja seção 1.13) mais à direita que emana da raiz, a “aresta em excesso”, de forma que obtemos uma árvore em $A = Im(f)$; ocorrendo uma exceção nos casos em que tivermos após a aresta em excesso, uma sequência de arestas com nós de grau um. Neste caso, essa sequência de arestas adjacentes consecutivas e com nós de grau um, caso exista, irá para acima da raiz após a contração da aresta em excesso. Segue um exemplo de cada caso, nas figuras 3.6 e 3.7.

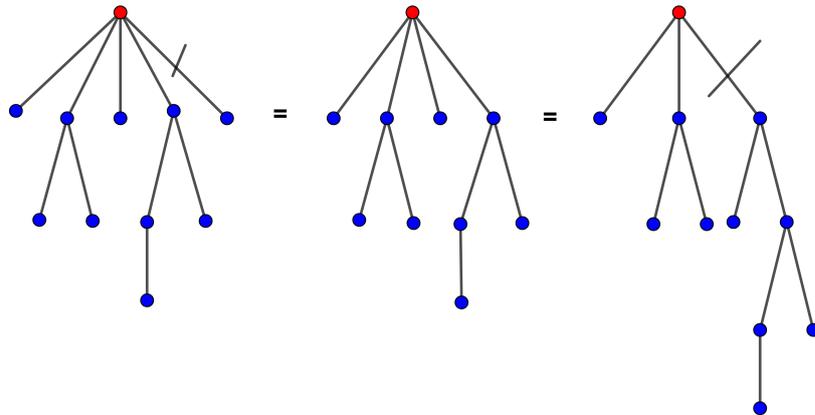


Figura 3.6: f em uma árvore comum

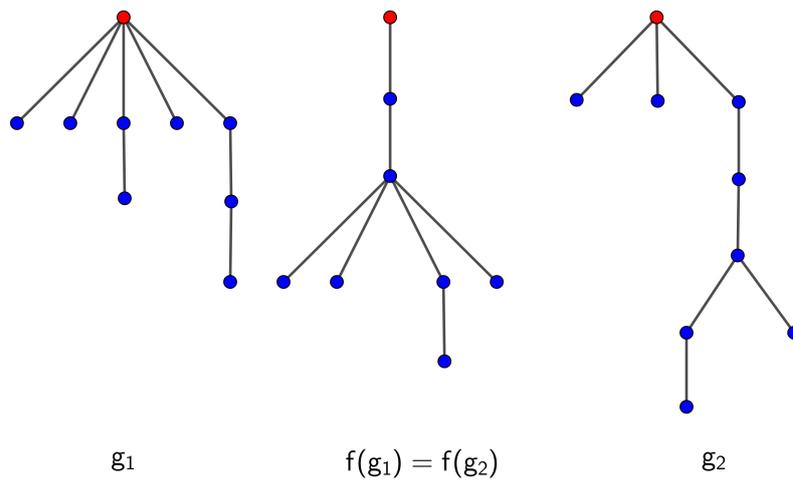


Figura 3.7: f aplicada no caso de exceção

Desta forma, vemos que duas árvores podem determinar uma mesma árvore limpa e conforme veremos é única. Agora, note que, dada a árvore limpa, podemos fazer o procedimento inverso, que nesse caso gera exatamente duas árvores, com exceção da árvore composta apenas com nós e raiz de grau um, ou seja, árvore em que $\Delta = 1$.

Dividimos em dois casos:

I - Grau da raiz da árvore limpa é maior do que um: para obtermos a primeira árvore, fazemos a expansão de uma aresta saindo da raiz, empurrando as duas arestas mais à direita da raiz da árvore limpa. Para obtermos a segunda, fazemos a expansão desta criando mais uma aresta à direita emanando da raiz.

II - Grau da raiz da árvore limpa igual a um: tome v , caso exista, com sendo o primeiro

nó de grau maior do que um após a raiz. Para obtermos a primeira árvore, expandimos uma aresta em v , empurrando as duas arestas mais à direita que emanam deste nó. Em seguida, contraímos a sequência de nós de grau um que antecedem v e expandimos essa sequência no vértice adjacente a v mais à direita. Para a segunda árvore, expandimos uma aresta mais à direita de v , e novamente contraímos a sequência de nós de grau um que antecedem v e expandimos essa sequência no vértice adjacente a v mais à direita. Caso v não exista, essa árvore limpa deriva unicamente da árvore em que $\Delta = 1$.

Podemos observar que as duas árvores que geram $a \in A$ possuem raízes de graus distintos, e que a diferença dos seus graus é exatamente dois, conforme definimos o procedimento inverso. E que sempre a árvore limpa terá grau um ou par. Isso ocorre porque quando aplicamos f , contraímos uma aresta, e no lugar desta ficam duas ou nenhuma, resultando em uma raiz de grau par. E no caso da exceção, em que logo após a aresta em excesso tivermos nó de grau um, este se torna a raiz de grau um.

Vemos que $f(g_1) = a = f(g_2)$, para duas árvores g_1 e g_2 em \mathbb{G}_n . Assim, $\forall a \in A$, definimos o procedimento inverso $f^{-1}(a) = \{g_1, g_2\}$. Como g_1 e g_2 possuem diferentes graus para suas raízes, tome sem perda de generalidade g_1 como a árvore com raiz de maior grau. Seja $h : A \rightarrow \mathbb{G}_n$, tal que h associa cada elemento de A à árvore g_1 , ou seja, sempre associa à árvore com raiz de maior grau. Tome $B = Im(h)$, então $f|_B$ é bijetiva.

Desta forma, temos que $|A| = \frac{K_n - 1}{2} + 1 = \frac{K_n + 1}{2}$, e assim concluímos que $|A| = |C| = |B|$.

Lema 3. *Existe uma bijeção entre os conjuntos C e B .*

Demonstração. Queremos encontrar $\psi : B \rightarrow C$ bijetiva.

Considere $g \in B$. Seja $a \in A$ tal que $f(g) = a$. Então $\psi(g)$ é obtida percorrendo as arestas da árvore a da esquerda para a direita, de baixo para cima e por fora. As arestas internas que sobraem iremos percorrê-las da direita para a esquerda e de cima para baixo de modo que:

I - Faz passo (1,0) quando o vértice tem grau de saída um.

II - Faz passo (1,1) e (1,-1) quando o vértice tem grau de saída maior do que ou igual a dois. Sendo (1,1) correspondente a aresta mais à esquerda e (1,-1) à aresta mais a direita, alternadamente quando o vértice tem grau de saída maior do que dois (ver figuras 3.8 e 3.9).

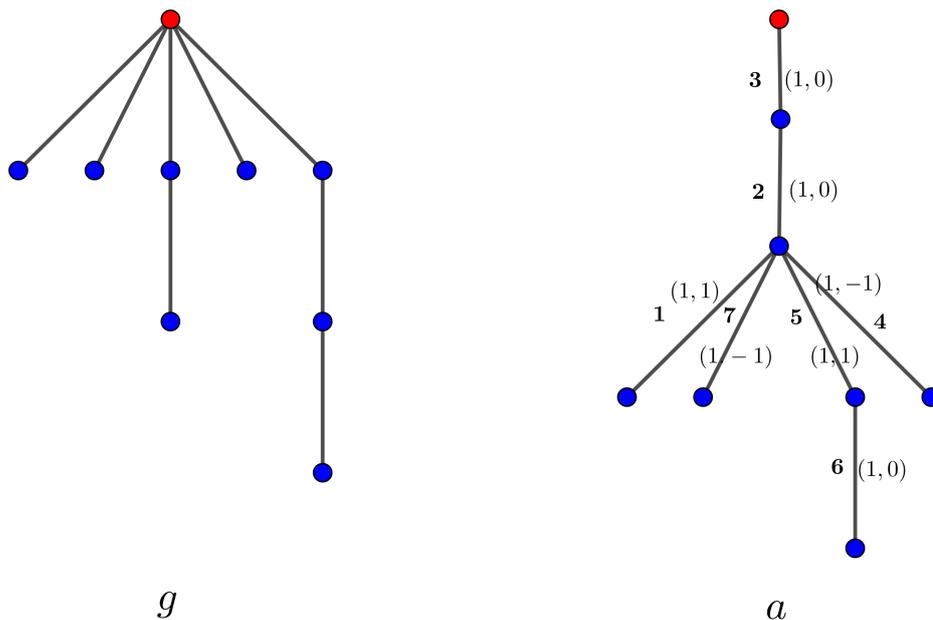


Figura 3.8: Relação de árvore para caminho

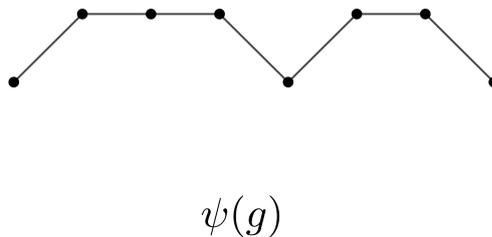


Figura 3.9: Caminho $\psi(g)$

Como percorremos as árvores da esquerda para a direita e de baixo para cima, sempre iniciaremos com passos $(1,0)$ ou $(1,1)$, podendo posteriormente, em algum ponto do caminho, ter uma quantidade de passos $(1,-1)$ superior ao de passos $(1,1)$. Logo, o caminho construído está em C . Como percorremos as árvores ordenadas em ordem, cada árvore em A associará a apenas um único caminho em C . De fato, ao trocarmos uma aresta de lugar, mudamos também o passo.

Reciprocamente, dado um caminho reticulado $c \in C$, podemos construir uma árvore g , tal que $\psi^{-1}(c) = g$.

Deste modo, seja c com k passos $(1,1)$, e conseqüentemente k passos $(1,-1)$, pelo Lema 2. Formamos o grau da raiz por $2k - 2t + 1$, sendo $t = t_1 + t_2$, tais que $t_1 + 1$ é o número de passos $(1,1)$ consecutivos, e $t_2 + 1$ é o número de passos $(1,-1)$ consecutivos. Isso ocorre devido ao passo consecutivo exigir um nó de grau dois, diminuindo assim o grau da raiz em dois, pois cada passo $(1,1)$ está ligado ao passo $(1,-1)$, por construção; e o grau máximo possível da raiz é $2k + 1$, pelo número total de arestas. Assim, formamos o grau da raiz e os demais nós possuem grau dois ou um, conforme o número de passos $(1,0)$, estando mais à esquerda e emanando de um nó apropriado, conforme seqüência de passos do caminho reticulado.

Como chegamos no maior valor possível para o grau da raiz, pois definimos o grau da raiz removendo o mínimo possível de arestas quando temos $t > 0$, vemos que essa árvore está em B e é única, pois árvores com raízes de mesmo grau não geram a mesma árvore limpa, por construção, e portanto não estão associadas ao mesmo caminho reticulado. □

Teorema 15. *O número de caminhos reticulados indo de $(0,0)$ a $(n,0)$ com passos $U = (1,1)$, $D = (1,-1)$ e $H = (1,0)$ é o mesmo que o de árvores ordenadas com $n+1$ arestas, tendo raízes de grau ímpar e nós com grau de saída no máximo dois.*

Demonstração. Seja $\phi : \mathbb{G}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ a função bijetiva de \mathbb{G}_n e \mathbb{P}_n .

Dada uma árvore $g \in \mathbb{G}_n$ encontramos um caminho reticulado tal que, se $g \in B \subset \mathbb{G}_n$, então $\phi(g) = \psi(g) = c \in C$. Caso contrário, $g \in B^c \subset \mathbb{G}_n$, então $\phi(g) = c' \in C^c \subset \mathbb{P}_n$, tal que c' é o simétrico de c em relação a OX .

Agora, dado um caminho $c \in \mathbb{P}_n$, temos que se $c \in C \subset \mathbb{P}_n$, então $\phi^{-1}(c) = \psi^{-1}(c) = g \in B$. Caso contrário, $c \in C^c \subset \mathbb{P}_n$, então, tomamos $c' \in C$, tal que c' é o simétrico de c em relação ao eixo OX . Logo, aplicando ψ^{-1} em c' obtemos $g \in B$. Então, sabemos que existe $a \in A$ tal que $f^{-1}(a) = \{g, \bar{g}\}$, onde \bar{g} é a árvore com raiz de menor grau. Desta forma definimos $\phi^{-1}(c) = \bar{g} \in B^c$. □

Exemplo 30. *Consideremos o caminho $c \in C_3$, figura 3.10. Vamos fazer sua árvore correspondente e a do seu simétrico.*

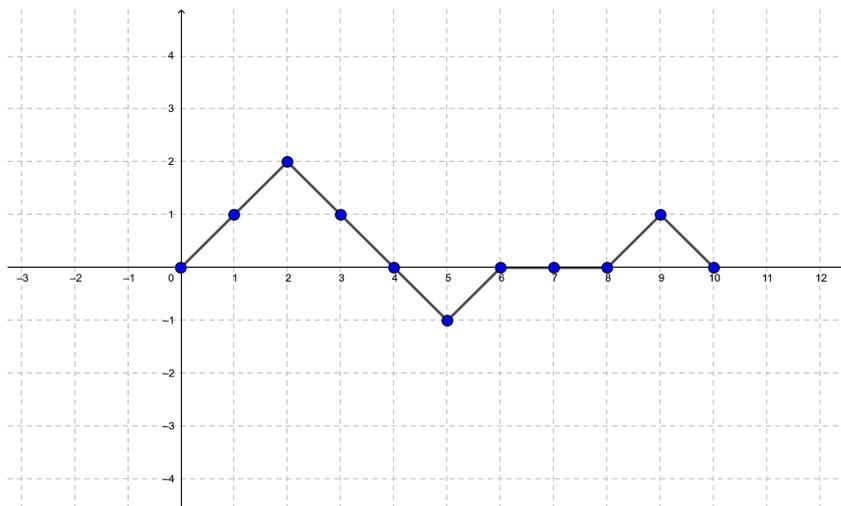


Figura 3.10: Caminho c

Observamos que $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$, com 4 passos $(1,1)$. Logo o grau da raiz é $2 \cdot 4 - 2 \cdot 3 + 1 = 3$.

Como temos dois passos $(1,1)$ consecutivos, iniciamos com um nó de grau dois adjacente à raiz e mais à esquerda. Sendo a terceira aresta em excesso e como na sequência temos três passos $(1,-1)$ consecutivos, fazemos um nó de grau dois conectado à raiz pela segunda aresta e mais um nó de grau dois emanando da aresta mais à direita do último nó de grau dois. E finalmente fazendo os nós de grau um emanando da raiz apropriada.

Para formar a árvore correspondente ao simétrico de c , fazemos $f(g)$ para obtermos a árvore limpa, e desta achamos g' , a árvore com raiz de grau um. Vejamos as árvores nas figuras 3.11 e 3.12.

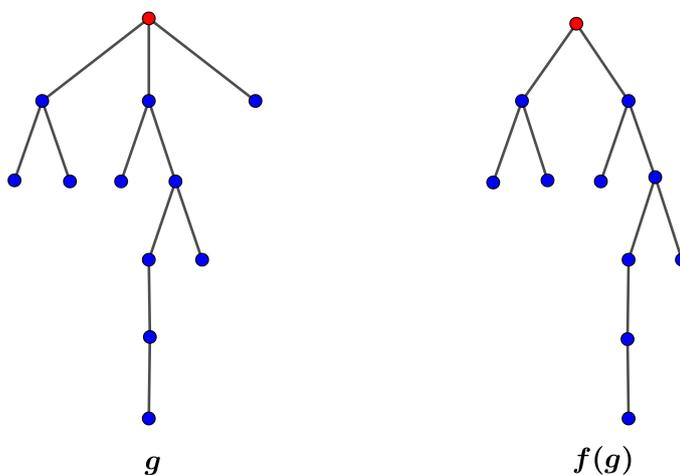


Figura 3.11: Árvore correspondente ao caminho c e sua árvore limpa

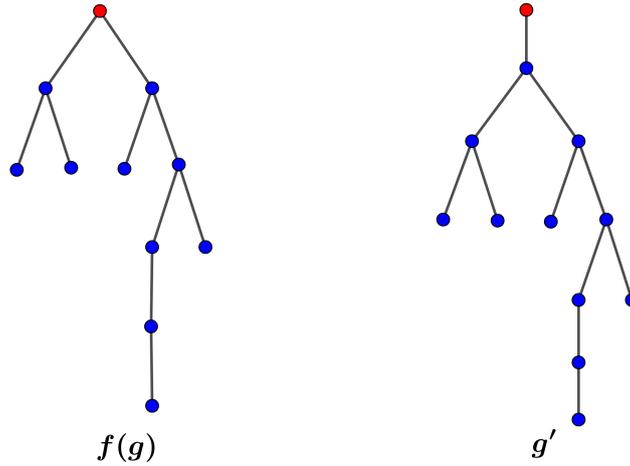


Figura 3.12: Árvore limpa e árvore correspondente ao caminho simétrico de c

3.2 Construção de uma nova sequência

Denotamos K_n como a sequência formada pelos coeficientes centrais de $\sum_{h=-n}^n \binom{n}{h}_2 x^{h+n}$.

Para encontrarmos uma expressão fechada para K_n podemos tomar o elemento de maior coeficiente no desenvolvimento de $[-x + (1+x)^2]^n$. Assim temos,

$$\begin{aligned}
 [-x + (1+x)^2]^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^{n-k} [(1+x)^2]^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (x)^{n-k} (1+x)^{2k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (x)^{n-k} \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (x)^{2k-i} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} x^{n+k-i}.
 \end{aligned}$$

Note que pela simetria do triângulo aritmético, o coeficiente de maior valor é o que acompanha x^n no desenvolvimento de $(1+x+x^2)^n$, ou seja, o maior valor ocorre quando $x^{n+k-i} = x^n$, então $k = i$.

Podemos resumir o problema a mostrar que $\binom{2k}{k} > \binom{2k}{k-n}$, para $1 \leq n \leq k-1$. Assim temos que

$$\begin{aligned}
\binom{2k}{k} > \binom{2k}{k-n} &\Leftrightarrow \frac{(2k)!}{k!k!} > \frac{(2k)!}{(k-n)!(k+n)!} \\
&\Leftrightarrow (k-n)!(k+n)! > k!k! \\
&\Leftrightarrow (k-n)!(k+n)(k+n-1)\dots k! > k!k(k-1)\dots(k-n)! \\
&\Leftrightarrow (k+n)(k+n-1)\dots(k+1) > k(k-1)\dots(k-n+1). \quad (3.2.1)
\end{aligned}$$

Note que do lado esquerdo da desigualdade 3.2.1, o menor valor é $(k+1)$, enquanto do lado direito o maior é k . Como ambos os lados possuem n termos multiplicando, temos que $\binom{2k}{k} > \binom{2k}{k-n}$, para $1 \leq n \leq k-1$. Como $\binom{2k}{k-n} = \binom{2k}{k+n}$, concluímos que o maior coeficiente ocorre quando $i = k$ e acompanha x^n .

Assim, a expressão fechada para K_n fica $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{2k}{k}$.

Denotamos C_n como a sequência formada pelos números de Catalan, ou seja, cuja função geradora é dada por $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Como K_n conta o número de árvores ordenadas com $n+1$ arestas, com raiz de grau ímpar e nós com grau de saída no máximo dois, e C_n conta o número de árvores ordenadas com n arestas, podemos concluir que $C_{n+1} - K_n$ conta as árvores ordenadas com $n+1$ arestas tais que, ou a raiz tem grau par, ou a árvore ordenada possui raiz com grau ímpar em que os nós tenham grau de saída maior do que ou igual a 3.

Como $K_0 = 1, K_1 = 1, K_2 = 3, K_3 = 7, K_4 = 19\dots$ e $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42\dots$ formamos a sequência $0, 1, 2, 7, 23, 81, 288, \dots$, não catalogada na literatura, conforme verificado em <https://oeis.org/>.

Seja $L_n = C_{n+1} - K_n$, para $n = 0$, não temos como formar uma árvore com uma aresta, nas condições enunciadas acima, logo $L_0 = 0$.

Variando n em $\frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1} - \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{2k}{k}$, podemos ver a relação com as árvores das figuras 3.13, 3.14 e 3.15.

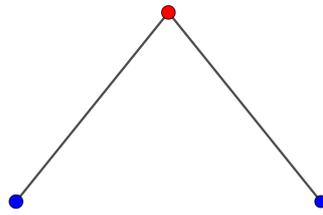


Figura 3.13: $n = 2$

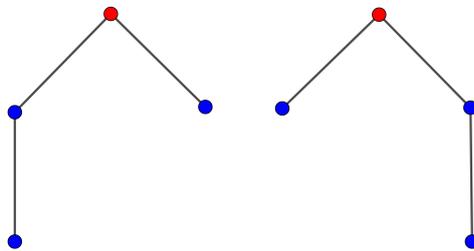


Figura 3.14: $n = 2$

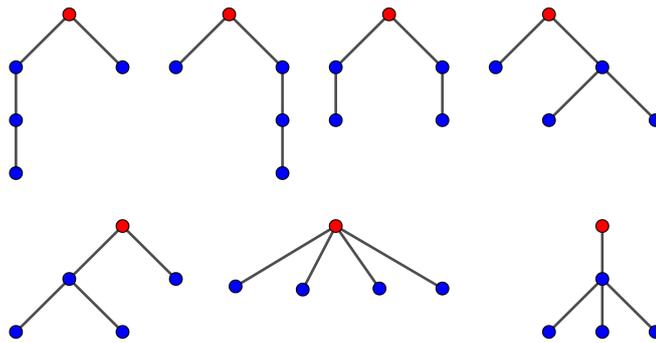


Figura 3.15: $n = 3$

3.3 Outras relações

Considerando o triângulo aritmético formado pelos coeficientes do trinômio $(1 + 3x + x^2)^n$, temos algumas propriedades em [3].

					1															
						1	3	1												
					1	6	11	6	1											
				1	9	30	45	30	9	1										
			1	12	58	144	195	144	58	12	1									
		1	15	95	330	685	873	685	330	95	15	1								
	1	18	141	630	1770	3258	3989	3258	1770	630	141	18	1							

A coluna central desse triângulo tem os primeiros termos dados por 1, 3, 11, 45, 195, 873,... e é descrita em [8] com termo geral dado por:

$$a(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2k}{k} = T(2n, n).$$

Define-se $T(n, k)$ como o número de caminhos reticulados de $(0, 0)$ até $(n, n - 2k)$, usando passos $U = (1, 1)$, $D = (1, -1)$ e, em níveis pares também $H = (2, 0)$.

A função geradora para $T(2n, k)$ é dada por $(1 + 3x + x^2)^n$.

Seguem os possíveis caminhos reticulados de $T(2n, n)$, para $n = 2$, na figura 3.16.

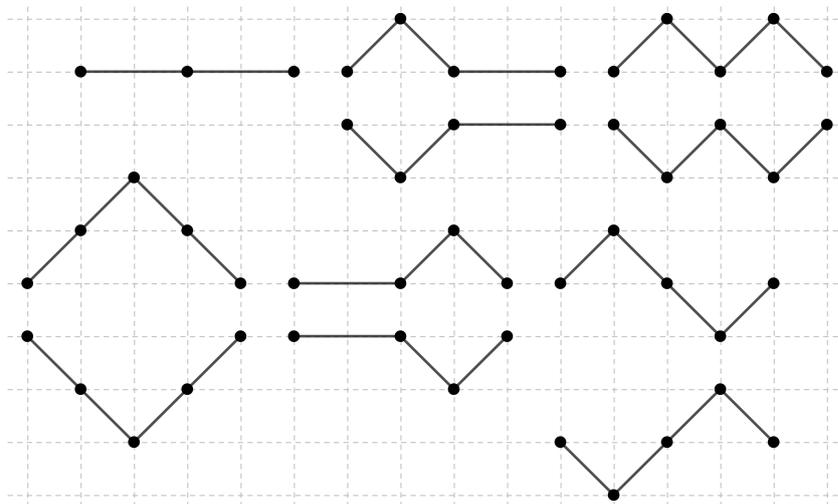


Figura 3.16: $T(2n, n)$ para $n = 2$

Note que, nas diagonais do triângulo, da esquerda para a direita temos a primeira diagonal formada por 1's, pois

$$\binom{n}{n}_3 = \sum_{h \geq 0} \binom{n}{h} \binom{2n-2h}{-h} = \binom{n}{0} \binom{2n}{0} = 1 = \binom{n}{-n}_3,$$

e na segunda diagonal temos

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-1}_3 &= \sum_{h \geq 0} \binom{n}{h} \binom{2n-2h}{1-h} \\ &= \binom{n}{0} \binom{2n}{1} + \binom{n}{1} \binom{2n-2}{0} \\ &= 3n \\ &= \binom{n}{1-n}_3. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

A terceira diagonal, com os termos 1, 11, 30, 58,... é dada por

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-2}_3 &= \sum_{h \geq 0} \binom{n}{h} \binom{2n-2h}{2-h} \\ &= \binom{n}{0} \binom{2n}{2} + \binom{n}{1} \binom{2n-2}{1} + \binom{n}{2} \binom{2n-4}{0} \\ &= n(2n-1) + n(2n-2) + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(9n-7)}{2} \\ &= \binom{n}{2-n}_3. \end{aligned}$$

Esses são conhecidos como números hendecagonais, [[8], A051682], encontrados em uma espiral triangular, conforme destacado no triângulo aritmético a seguir.

					65																				
					36		64																		
					37		35		63																
					38		15		34		62														
					39		16		14		33		61												
					40		17		3		13		32		60										
					41		18		4		2		12		31		59								
					42		19		5		0		1		11		30		58						
					43		20		6		7		8		9		10		29		57				
					44		21		22		23		24		25		26		27		28		56		
					45		46		47		48		49		50		51		52		53		54		55

A partir desses resultados, Silva, em [3], conjectura a expressão 3.3.2 para caminhos reticulados, feitas a partir de [[8], A026376] e [[8], A026377].

$$\binom{n}{j}_3 = T(2n, n - j). \tag{3.3.2}$$

Podemos ver que cada linha do trinômio representa um valor fixo de n , e as colunas se devem a variação de j ($-n \leq j \leq n$). Assim, tomando $j = 1$, vemos que o caminho reticulado vai de $(0, 0)$ até $(2n, 2)$. Tomando $n = 2$ temos o número 6 relacionado à primeira coluna e terceira linha do triângulo. De fato, conseguimos formar 6 caminhos reticulados.

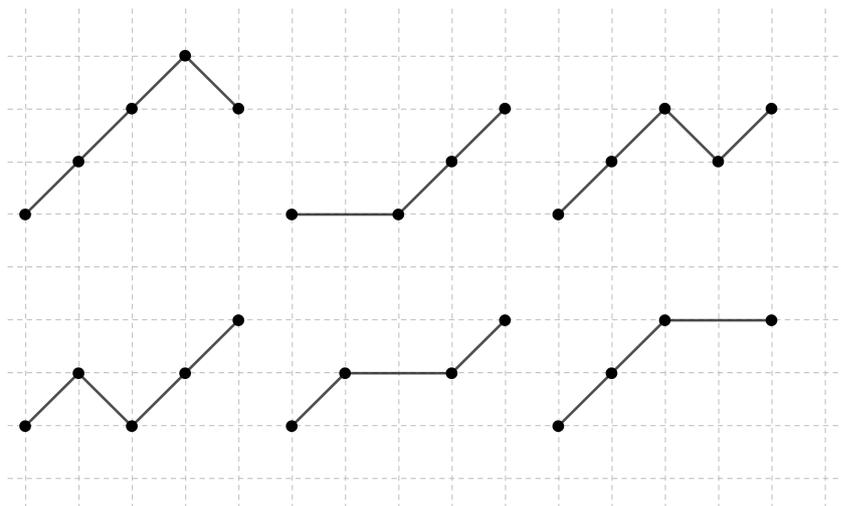


Figura 3.17: $T(2n, n - 1)$ para $n = 2$

Conclusão

Ao longo desses estudos procuramos mostrar mais propriedades envolvendo o conjunto formado pelos coeficientes centrais da expansão do trinômio $(1 + x + x^2)^n$, caminhos reticulados e árvores ordenadas, assim como dar maior embasamento teórico para estudar bijeções entre esses conjuntos.

Esta pesquisa permitiu determinar uma função bijetiva entre o conjunto de árvores ordenadas e caminhos reticulados.

Esperamos que a partir destes estudos e de novos estudos, encontrar se o trinômio $(1 + 3x + x^2)^n$ também pode ser representado por uma árvore ordenada, ou algum tipo de grafo, e se puder, determinarmos quais são as restrições para essa construção.

Também, esperamos encontrar, em trabalhos futuros, uma expressão mais simples e direta para L_n .

Finalmente, esperamos que esses estudos tenham contribuído para termos uma aproximação na interpretação generalizada entre os trinômios da forma $(a + bx + cx^2)^n$, árvores ordenadas e caminhos reticulados.

Referências Bibliográficas

- [1] Bondy, J.A.; Murty, U. S. R. **Graph theory with applications**. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1976.
- [2] Cataldo, J. C. **Análise combinatória: a importância dos métodos de contagem - parte 1**. 2013. Disponível em: <http://www.revista.vestibular.uerj.br/artigo/artigo.php?seq_artigo=31>, acesso em: 04 jun. 2019.
- [3] Silva, K. C. P. **Sobre questões de combinatória envolvendo os números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal**. 2014. 165f. Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.
- [4] Bailey, W. N. **Identities of the Rogers-Ramanujan Type**. Proceedings of the London Mathematical Society. vol. 2, nº 1, pp 1-10, 1948.
- [5] Slater, L. J. **Further Identities of the Rogers-Ramanujan Type**. Proceedings of the London Mathematical Society. vol. 2, nº 1, pp 157-167, 1952.
- [6] Andrews, G. E. **Combinatorics and Ramanujan's "lost" Notebook**. London Math. Soc. Lecture Note Series. vol. 103, pp 1-23, 1985.
- [7] Santos, J. P. O. **Computer algebra and identities of the Rogers-Ramanujan type**. Tese de Doutorado - Pennsylvania State University, 1991.
- [8] Sloane, N. J. A. **The On-line Encyclopedia of Integer Sequences**. Disponível em: <https://oeis.org/>, acesso em: 04 jun. 2019.
- [9] Deutsch, E. **A bijective proof of the equation linking the Schröder numbers, large and small**. Discrete Mathematics. vol. 241, nº1-3, pp 235-240, 2001.

- [10] BRASIL. Ministério de Educação e Cultura, **LDB - Lei 9194/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.
- [11] Lima, E.L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção PROFMAT, 2017.
- [12] Muniz Neto, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: Volume 4 Combinatória**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção do Professor de Matemática, 2016.
- [13] Stanton, D.; White, D. **Constructive Combinatorics**. New York: Springer-Verlag, 1986.
- [14] Taylor, G. E. W. **Ransey Theory**. School of Mathematics, The University of Birmingham, 2006.
- [15] Santos, J. P. O.; Mello, M. P.; Murari, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 4. Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciencia Moderna Ltda, 2007.
- [16] Morgado, A. C.; Carvalho, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2. Ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção PROFMAT, 2015.
- [17] Stanley, R. P. **Enumerative Combinatorics Volume 1**. 2. Ed. Cambridge studies in advanced mathematics, 2011.
- [18] Degroot, M. H.; Schervish, M. J. **Probability and Statistics**. 4. Ed. Pearson Education, 2012.
- [19] Dershowitz, N.; Zaks, S. **Enumerations of ordered trees**. Discrete Mathematics. vol. 31, n^o1, pp 9-28, 1980.