



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANTÔNIO JOSIMÁRIO SOARES DE OLIVEIRA

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO EXPONENCIAL EM UM AMBIENTE  
DE MODELAGEM MATEMÁTICA

MOSSORÓ  
2013

ANTÔNIO JOSIMÁRIO SOARES DE OLIVEIRA

**O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO EXPONENCIAL EM UM  
AMBIENTE DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, campus Mossoró, para a obtenção do título de Mestre em matemática.

**Orientador:** Prof<sup>o</sup>. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

**Ficha catalográfica preparada pelo setor de classificação e  
catalogação da Biblioteca “Orlando Teixeira” da UFERSA**

O46o Oliveira, Antônio Josimário Soares de.

O ensino e a aprendizagem de função exponencial em um ambiente de modelagem matemática. /Antônio Josimário Soares de Oliveira. – Mossoró-RN: 2013  
95f.: il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia

1.Aprendizagem significativa. 2. Modelagem matemática.  
3.Função exponencial. I Título.

CDD: 511.8

Bibliotecária: Marilene Santos de Araújo

ANTÔNIO JOSIMÁRIO SOARES DE OLIVEIRA

**O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO EXPONENCIAL EM UM  
AMBIENTE DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada à Universidade  
Federal Rural do Semiárido – UFERSA,  
campus Mossoró, para a obtenção do  
título de Mestre em matemática.

APROVADO EM:

05/07/2013.

BANCA EXAMINADORA



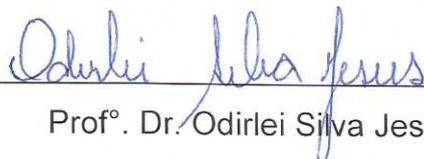
---

Prof°. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia – UFERSA  
Presidente



---

Prof°. Dr. Walter Martins Rodrigues – UFERSA  
Primeiro Membro



---

Prof°. Dr. Odirlei Silva Jesus – UFRN  
Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 05 de Julho de 2013.

A Deus, pelo dom da vida, sabedoria e perseverança para superar as dificuldades que a vida nos impõe diariamente.

Aos meus pais, Gilvan Soares de Oliveira e Francisca Soares de Oliveira, pelos valiosos ensinamentos, pelo exemplo de superação, dignidade e honradez.

A minha esposa Maria Sandilene e aos meus filhos Deborah Kamilly e Douglas Kauan, pelo carinho, apoio e incentivo nas horas que eu mais precisei.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por sempre ter me guiado nos momentos alegres e difíceis. A certeza de sua presença me fortalece.

Aos meus pais, Gilvan Soares de Oliveira e Francisca Soares de Oliveira, que não mediram esforços na criação dos seus filhos, dando-lhes uma educação pautada na dignidade, na austeridade, no respeito e na honradez.

A minha esposa Maria Sandilene, pela compreensão nos momentos de ausência, pelo carinho, pelo companheirismo, pela confiança e pela posição sempre otimista, mesmo diante das dificuldades.

Aos meus filhos, Deborah Kamilly e Douglas Kauan, pela compreensão de minha ausência, pelo carinho, pelas palavras de incentivo e por serem inspirações constantes em minha vida.

Aos meus familiares, irmãos, sogros e cunhados, pelo apoio, pelo incentivo, pela confiança e por sempre estarem torcendo por mim a cada batalha enfrentada.

Ao coordenador do Curso (PROFMAT – UFERSA) e meu orientador, Prof.<sup>o</sup> Dr. Antonio Ronaldo Garcia, pela dedicação, pelo apoio, pela objetividade, pela humildade e pela presteza com que atendeu a todos nós e, principalmente, pelas orientações, pelo apoio, incentivo e pela confiança na minha pessoa.

Ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal Rural do Semiárido-UFERSA, que através de sua Coordenação me oportunizou a realização de um grande sonho.

Aos colegas do curso, que contribuíram significativamente com suas discussões, didáticas ou conceituais, para o enriquecimento do meu currículo e para a conclusão desse curso.

"Em tempo de mudanças, os dispostos a aprender sempre são os que herdarão o futuro. Os que acham que já aprenderam tudo descobrirão estar preparados apenas para viver num mundo que já não mais existe."

(Eric Haffer).

## RESUMO

Diante da necessidade urgente de se buscar novas estratégias de ensino de Matemática, frente ao baixo rendimento de nossos alunos e a fim de minimizar os já reiterados problemas do ensino de Matemática no Brasil, o presente trabalho, ao reconhecer a importância da Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino que deve ser incorporada à prática pedagógica do professor, tem como objetivo apresentar uma proposta de atividade educacional para o Ensino Médio com a Função Exponencial em um ambiente de Modelagem Matemática, articulada com a Resolução de Problemas. Fundamentando-se, principalmente, nos trabalhos de Bassanezi (1999, 2009, 2012) e Barbosa (1999, 2003, 2004, 2009) sobre a Modelagem Matemática e motivados por estudos de Lima (1999, 2006) sobre o ensino de funções, a atividade apresentada explora, sobretudo, a conexão existente entre as funções exponenciais e as progressões geométricas. Espera-se, como resultados, que o ensino da Função Exponencial num ambiente de Modelagem Matemática possibilite ao aluno, por meio da problematização/ investigação e do conhecimento sólido das características/propriedades dessas funções, juntamente com estratégias eficientes, definir qual o modelo matemático que descreve (modela) um dado problema, opondo-se a um ensino em que as fórmulas (modelos) já vêm prontas e acabadas, como comumente ocorre na maioria de nossos livros didáticos. Neste sentido, o desenvolvimento de atividades com a Função Exponencial baseadas na Modelagem Matemática promove, sobretudo, uma aprendizagem significativa, que permita ao aluno não só aplicar procedimentos, mas sim, diante de problemas matemáticos ou não, refletir sobre eles a fim de interpretá-los e solucioná-los usando, de forma consciente, métodos e conhecimentos apropriados.

**Palavras-chave:** Aprendizagem Significativa. Modelagem Matemática. Função Exponencial

## ABSTRACT

In view of the urgent necessity of searching for new mathematics teaching strategies in face of the low performance of our students and in order to minimize the reiterated problems of mathematics teaching in Brazil, the present paper, by recognizing the importance of mathematics modeling as a teaching methodology which should be incorporated to the teacher educational practice, it has as objective to present a proposal of educational activity for High School with the exponential function in an environment of mathematical modeling, articulated with solutions to problems. Basing especially in BASSANEZI's works (1999, 2009, 2012) and BARBOSA (1999, 2004, 2009) on mathematics modeling and motivated by LIMA's studies (1999, 2006) on functions teaching, the presented activity explores mainly the existing connection between exponential functions and geometric progressions. We expect as results that the exponential function teaching in a mathematical modeling environment enables the students through problematization/investigation and solid knowledge of characteristics / properties of these functions, along with efficient strategies, defining what mathematical model describes/models a given problem, opposing a teaching in which formulas (models) already come ready and finished, as it usually happens in most our textbooks. In doing so, the development of activities with exponential functions based on mathematical modeling promotes, above all, a significant learning that makes not only applying procedures, but in view of mathematical problems or not, reflect on them in order to interpret and solve them using, in a conscious way, methods and proper knowledge.

**Keywords:** Significant learning. Mathematical modeling. Exponential function.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	10
<b>2 O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL: PROBLEMAS E SOLUÇÕES</b> .....	15
2.1 OS TRÊS COMPONENTES DO ENSINO DA MATEMÁTICA, SEGUNDO LIMA .....	19
2.1.1 Conceituação .....	19
2.1.2 Manipulação .....	20
2.1.3 Aplicações .....	20
2.2 O QUE DIZEM AS ORIENTAÇÕES CURRICULARES OFICIAIS .....	22
2.2.1 A Resolução de Problemas .....	24
2.2.2 O recurso à História da Matemática .....	25
2.2.3 O recurso às Novas Tecnologias .....	26
2.2.4 O recurso aos Jogos .....	30
<b>3 A MODELAGEM MATEMÁTICA</b> .....	32
3.1 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA CONCEPÇÃO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA .....	32
3.2 PORQUE USAR A MODELAGEM MATEMÁTICA .....	37
3.3 COMO FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA .....	43
3.4 ALGUNS OBSTÁCULOS APONTADOS PARA SE FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA .....	48
<b>4 AS FUNÇÕES</b> .....	52
4.1 BREVE HISTÓRICO SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO .....	52
4.2 PORQUE ESTUDAR FUNÇÃO .....	59
4.3 SOBRE A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO .....	63
4.3.1 A Função Exponencial .....	64
4.3.1.1 A Função Exponencial nos livros didáticos .....	67
<b>5 ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM A FUNÇÃO EXPONENCIAL</b> .....	70
5.1 CULTURA DE BACTÉRIAS .....	73
5.2 DESINTEGRAÇÃO RADIOATIVA .....	75
5.3 O FRUTICULTOR .....	78
5.4 CRESCIMENTO POPULACIONAL .....	80

5.5 ELIMINAÇÃO DO ÁLCOOL PELO ORGANISMO HUMANO.....	83
<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>86</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>89</b>
<b>APÊNDICE A – Caracterização das Funções Quadráticas.....</b>	<b>94</b>

## 1 INTRODUÇÃO

São recorrentes os problemas que afetam o ensino de matemática no Brasil. Os professores constantemente “denunciam” a falta de interesse por parte dos alunos ou muitas vezes reclamam que eles estão cada vez mais aprendendo menos. De fato, a experiência em sala de aula tem mostrado que o nível e a qualidade da aprendizagem dos alunos em matemática decrescem a cada dia. Há quase um consenso entre alguns alunos e educadores que de fato a matemática é difícil e, portanto, aprendê-la é quase impossível. Há outros mais radicais que chegam a questionar sobre a necessidade real do ensino de matemática no ensino básico. Certamente esta tese agradaria a muitos alunos e teóricos da educação, que desconhecendo a verdadeira matemática ou até mesmo “resignados” pelo destino, esbanjam teorias contrárias a necessidade de se estudar matemática. É evidente que esta não é a melhor solução.

É necessário reconhecer, no entanto, que em alguns casos os alunos têm razão quando dizem que desconhecem a real necessidade da matemática para sua formação e para a sua vida. Na realidade, a matemática que tem sido ensinada por muitos professores não tem utilidade nenhuma, pois na maioria das vezes se resume a um emaranhado de fórmulas prontas e a aplicação mecânica de procedimentos, e poucas vezes criam condições para que os alunos apliquem os conceitos estudados na resolução de problemas reais de seu cotidiano. Dessa forma, quem de fato convive com a matemática sabe que o verdadeiro problema que assola o ensino dessa disciplina tem origens na má formação inicial e continuada dos professores.

Nesse sentido, conscientes e otimistas da possibilidade de uma aprendizagem significativa em Matemática, mesmo sabendo que, devido a sua própria natureza, o caminho que leva a uma verdadeira aprendizagem nessa área do conhecimento é muito mais difícil e longo, é que acreditamos que alguma coisa tem que ser feita para reverter este estado de coisas. Pensar num ensino de matemática que leve o aluno a pensar, a construir conhecimentos, a compreendê-la e usá-la em vários contextos, aliado a capacidade de resolver problemas, matemáticos ou não, é certamente um primeiro passo para que se amenizem os velhos e novos problemas que afetam o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Então, torna-se urgente e necessária a busca de metodologias de ensino de matemática que privilegie, sobretudo, a capacidade do aluno de construir a sua própria aprendizagem, de aplicar de forma proveitosa os conhecimentos matemáticos e não simplesmente reproduzi-los. Cabe, nesse contexto, que o professor se torne um verdadeiro orientador do processo de aprendizagem e não alguém que, supostamente, tem a única palavra nesse processo. Assim, a Modelagem Matemática, articulado com um ensino pautado na Resolução de Problemas, é indicada por muitos professores e educadores matemáticos como uma estratégia de ensino que contribuirá de forma decisiva para um processo de ensino e aprendizagem de matemática mais útil e efetivo.

No que diz respeito ao ensino dos conteúdos em sala de aula, o que se vê é uma supervalorização de regras, fórmulas e procedimentos em detrimento de uma abordagem que priorize uma aprendizagem mais significativa, onde os alunos possam de fato apreender os conceitos e aplicá-los na resolução de problemas diversos, que sejam do seu cotidiano ou originados da própria lógica interna da matemática. Daí a necessidade de se trabalhar com metodologias de ensino que promovam um ambiente em sala de aula que permita a conexão dos conteúdos matemáticos entre si e com outros de importância diária do aluno.

Dessa forma, frente a essas considerações, o presente trabalho apresenta uma proposta de ensino de função exponencial em um ambiente de Modelagem Matemática, destacando principalmente as propriedades exclusivas desse tipo de função por acreditar, sobretudo, que essa forma de abordar as funções exponenciais contribuirá para uma melhor construção do significado do conceito dessas funções por parte do aluno. Objetivamente, esses estudos serão guiados pelo seguinte questionamento: como trabalhar o ensino e a aprendizagem de função exponencial em um contexto de Modelagem Matemática, de forma a garantir uma aprendizagem significativa desse tópico importante da Matemática?

A escolha do tema foi motivada principalmente pelas inquietações pessoais como professor de Matemática por sentir um certo desconforto ao trabalhar com as funções e perceber que os principais problemas propostos na maioria dos livros didáticos já trazem o tipo de função que resolve uma dada questão, cabendo ao aluno fazer apenas o “cálculo” correspondente. Observações essas que foram de encontro com preocupações semelhantes publicadas num livro intitulado “Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio” de Lima (2001), onde

foi feita uma análise criteriosa dos principais livros de matemática do ensino médio adotados nas escolas brasileiras.

Aliado a isso, temos a necessidade de pautar o processo de ensino e aprendizagem de matemática em metodologias que favoreçam uma aprendizagem eficaz e verdadeira que se caracteriza por “[...] envolver o indivíduo como um todo. Esta deve ir ao encontro de suas necessidades, gerando assim um desequilíbrio para o mesmo, o que resulta em uma energia impulsora para que vá à busca daquilo que necessita aprender”. (RIPPLINGER & BLANCHER, 2006, p. 3).

É abundante o número de trabalhos científicos, como artigos, dissertações, TCC e atividades referentes à Modelagem Matemática, colocando essa opção metodológica para as aulas de Matemática como uma tendência atual no ensino de matemática. Barbosa (2004, p.2), ao apresentar algumas idéias teóricas sobre a Modelagem Matemática, destaca alguns argumentos em favor de sua inclusão no currículo: “motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio-cultural da matemática”. Assim, nota-se que o trabalho com a Modelagem Matemática cria, sobretudo, um ambiente de problematização e investigação em sala de aula.

Especificamente, em relação ao ensino de funções no Ensino Médio foram referências para nossos estudos as dissertações de mestrado de Brucki (2011) e Schönardie (2011) que pesquisaram e sugeriram atividades, respectivamente, com as funções exponenciais e afins, usando a Modelagem Matemática como ambiente de ensino.

É muito comum vermos questões sobre funções do tipo: “Certa substância radioativa desintegra-se de modo que, decorrido o tempo  $t$ , em anos, a quantidade ainda não desintegrada da substância é  $S = S_0 \cdot 2^{-0,25t}$ , em que  $S_0$  representa a quantidade de substância que havia no início[...]” (UEG-GO). A pergunta que se deve fazer: Por que o modelo matemático apropriado para esta situação é a função do tipo exponencial e não a função afim, por exemplo? Atividades deste tipo exigem apenas do aluno a necessidade de escolher o procedimento adequado para resolver o “problema”, não contribuindo em nada para uma independência intelectual por parte do aluno.

Nesse sentido, ressalta-se a problemática desta pesquisa: apresentar uma proposta de atividade com a Função Exponencial para o Ensino Médio em um

ambiente de Modelagem Matemática, abordando, principalmente, a relação dessas funções com as progressões aritméticas e geométricas. A esse respeito, Barreto (2008, p. 2) conclui que ao se trabalhar com as funções “a ênfase deve estar no conceito, suas propriedades, interpretação gráfica e aplicações, ao invés, do enfoque tradicional que privilegia as manipulações algébricas e uma linguagem excessivamente formal”.

A justificativa para escolha de uma atividade com as funções exponenciais se deve à necessidade de delimitação do tema e por reconhecer que essas funções aparecem com maior frequência em situações reais do cotidiano do aluno, como na Matemática Financeira, em situações de crescimento populacional, na análise do pH de substâncias e da desintegração radioativa de alguns elementos, bem como em situações de eliminação de algumas drogas pelo organismo, como veremos logo adiante.

Quanto aos aspectos metodológicos, o trabalho apresenta uma proposta de atividade de ensino da função exponencial em um contexto de Modelagem Matemática. Para tanto, considerando a natureza e objetivos do trabalho, foi realizada uma revisão bibliográfica minuciosa de alguns trabalhos que tratam da mesma temática, como artigos científicos, monografias, dissertações e livros didáticos. Dessa forma, optou-se por uma pesquisa de abordagem qualitativa em que “considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números”. (SILVA, MENEZES, 2001, p.20).

Para tanto, as pesquisas foram ancoradas, principalmente, em autores como Barbosa (1999, 2003, 2004, 2009) e Bassanezi (1999, 2002, 2012), que têm se dedicado ao estudo da Modelagem Matemática na perspectiva de Educação Matemática. Nesse mesmo sentido, orientações curriculares oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio (1998, 1999), as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006) e os PCN + Ensino Médio (2002) foram suportes teóricos importantes para concretização desses estudos.

Da mesma forma, Chaves (2006); Machado Júnior (2004); Figueredo e Bisognim (2006) e Leite (2008), entre outros, desenvolveram pesquisas no sentido de apontar atividades com Modelagem Matemática para serem aplicadas em sala de aula com grupos de professores e alunos. Machado Júnior, ao citar Blum (1995),

define Modelagem Matemática, por exemplo, como sendo um processo de construção de modelos que transforma uma situação com referência na realidade em uma situação matemática.

Diversos trabalhos já foram realizados sobre o ensino da Função Exponencial. Brucki (2011) desenvolveu estudos com uma turma de alunos de uma escola estadual paulista sobre atividades de Modelagem Matemática para o ensino da Função Exponencial, destacando, principalmente, a relação existente entre essas funções e as Progressões Geométricas. Dentre suas conclusões, podemos destacar: a Modelagem possibilita uma aprendizagem significativa, uma vez que essa metodologia por si só é motivadora. Além do mais, a Modelagem permite que os alunos façam uma relação teoria-prática dos conteúdos estudados, a fim de resolver situações-problema do seu cotidiano.

DOMINONI (2005), por sua vez, apresenta em seu trabalho dissertativo de mestrado uma sequência de atividades em um grupo de alunos de escola particular de uma cidade paranaense, explorando principalmente as diversas formas de representação da Função Exponencial. Esta concluiu que o conhecimento de diversas formas de registro de representação da Função Exponencial por parte dos alunos contribui de forma positiva para a construção do conceito desta função.

Para finalizar, estruturalmente o trabalho será desenvolvido em quatro capítulos. No capítulo 1, serão discutidos alguns problemas que afetam o ensino de Matemática no Brasil, bem como, serão apontadas algumas soluções para esses problemas, conforme alguns educadores matemáticos e especialistas. No capítulo 2, será apresentado um referencial teórico sobre a Modelagem Matemática, destacando, principalmente, o seu conceito e a sua importância no ensino de Matemática. No capítulo 3, será feito um breve relato sobre a evolução histórica do conceito de função, sobre a importância de seu ensino e sobre a definição de função exponencial. Finalmente, no capítulo 4, serão apresentados alguns problemas com a função exponencial, ilustrando situações do dia a dia do aluno que são modeladas por uma função do *tipo exponencial*.

## 2 O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL: PROBLEMAS E SOLUÇÕES

Nas últimas décadas, muito se tem discutido sobre a educação brasileira, em particular, sobre o rendimento de nossos alunos em matemática. Participações em avaliações nacionais, como SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica), ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), ENADE (Exame Nacional de Desempenho de Estudantes), Prova Brasil, e internacionais como PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), entre outras, têm demonstrado, enfaticamente, um quase “analfabetismo matemático”. Só para termos uma ideia de nossa fragilidade em matemática, na última edição do PISA, em 2009, ficamos na 57ª posição, num ranking de 65 países.

Os fatores que explicam esse desempenho muito baixo em matemática são os mais diversos. Educadores matemáticos e teóricos da educação garantem que faltam metodologias acertadas, falta didática que dê conta de responder à diversidade de personalidades e carências cognitivo-afetivas de nossos alunos. Por outro lado, alguns professores e matemáticos acreditam que o maior problema é a falta de domínio dos conteúdos por parte dos professores que lecionam Matemática. De qualquer forma, pelo menos um fato é consensual: alguma coisa tem que ser feita para amenizarmos essa situação, em que a maioria dos alunos termina o ensino básico sem dominar se quer as quatro operações básicas.

Alguns pesquisadores e professores têm apontado causas e sinalizam caminhos que podem amenizar esses índices. Druck (2010, p.1) destaca a má formação dos professores como uma das causas responsáveis por esses problemas e justifica:

Em geral, os professores recebem durante sua formação uma overdose de teorias pedagógicas, sociologia da educação e psicologia infantil, em detrimentos de conteúdos matemáticos e de boas práticas de ensino. A Aritmética Elementar, raiz de todo o conhecimento matemático é estudada superficialmente, e os gregos Pitágoras, Thales, Arquimedes e outros estão expulsos das salas de aula pelo pouco domínio da Geometria por grande parte dos professores [...].

Nesse caso, a professora citada argumenta que um dos principais problemas na formação inicial do professor de Matemática é o excesso de teorias, métodos, em detrimento de uma formação voltada mais para o domínio de conteúdos. De fato, quem tem uma mínima experiência com a matemática sabe que um bom domínio dos conteúdos a serem ensinados em sala de aula é um requisito necessário e indispensável para orientar e mediar, a contento, o processo de ensino e aprendizagem de matemática. Com efeito, é consenso que ninguém pode ensinar aquilo que não sabe e não aprendeu, muito menos será capaz de promover uma aprendizagem significativa, verdadeira de conteúdos que ele mesmo não domina.

Contra-pondo-se a esse entendimento, Bassanezi (1999, p. 16) se expressa da seguinte forma:

a deficiência do professor de matemática não está no conjunto de conteúdos matemáticos aprendidos - muitas vezes, ele estudou matemática de modo excessivo, tendo como referência os conteúdos que ele precisa ensinar nos cursos do ensino fundamental e médio, mas sim na essência do processo que orientou sua formação. Isto é, em geral, as disciplinas são tratadas de modo independente uma das outras, consideradas como prontas/acabadas, sem origem e sem futuro e, quase sempre apresentadas/desenvolvidas sob o regime formalista dos teoremas e suas demonstrações; as aplicações, quando sugeridas, só dizem respeito ao próprio conteúdo recém-ensinado. Em resumo, a matemática trabalhada, num programa tradicional da Licenciatura, tem sido inteiramente privada de originalidade/ criatividade e apresenta-se desvinculada da fonte geradora dos conteúdos que a constituem.

Nesse contexto, o autor concorda que temos problemas na formação do professor, mas não acredita que haja deficiências em termos de conteúdos, e sim na sua qualificação/atuação didático-pedagógica, evidenciadas numa postura tradicional, formalista de abordar os conteúdos em sala de aula.

Druck (2010, p.2) insiste e revela que muitos professores que não dominam os conteúdos matemáticos recorrem a técnicas e modismos, afetando cada vez este quadro: “Essa combinação perversa acabou por produzir o pano de fundo para o desastre que hora assistimos: aulas monótonas e confusas, cheias de fórmulas sem sentido, com a conseqüente falta de interesse e baixíssimo nível de conhecimento matemático dos alunos”. De qualquer forma, a formação precária do professor se revela como um dos principais fatores que afetam a qualidade do ensino de matemática no Brasil.

Por outro lado, educadores matemáticos têm apontado quase que sistematicamente que a matemática que está sendo dada em sala de aula é sem utilidade para o aluno, é inútil para a sua vida, é obsoleta para o momento em que vivemos, o que deixa os alunos desmotivados. Na realidade, “o dia-a-dia do trabalho na sala de aula é uma tentativa de transmissão de um conhecimento deslocado dos interesses dos alunos e que, para grande parte dos educadores, é motivo de frustração”. (BARASUOL, 2006, p.2). A esse respeito, Bassanezi (1999, p.1) também comenta:

Na verdade, a produção matemática tem ocorrido de modo supostamente desvinculado de um contexto sócio-cultural-político e com pouca preocupação em tornar-se utilitária ou mais bem definida em suas metas - o que, de certo modo, diferencia a Matemática de outras Ciências. De fato, tal produção apresenta-se como fruto exclusivo da mente humana, resultando numa linguagem que almeja essencialmente elegância e rigor.

Nas entrelinhas podemos concluir que há uma preocupação em trazer a matemática para o contexto do aluno, trabalhar situações do dia a dia, dar mais sentido aos conteúdos e, sobretudo, dotar os alunos de conhecimentos e procedimentos matemáticos a fim de resolver problemas reais de seu cotidiano.

Nesse mesmo sentido, Druck (2003) traz algumas preocupações quanto à contextualização ao afirmar que muitos professores não possuem conhecimento matemático necessário para “decidir” sobre qual matemática está por trás de algumas situações concretas. Algumas vezes, cita a autora, na busca incessante de

se trabalhar a matemática no contexto do aluno, surgem propostas didático-pedagógicas das mais variadas, muitas vezes inadequadas, como a criação da 'matemática junina' ou fazer a interpretação matemática de um poema religioso.

Ainda nessa mesma direção, muitos professores e matemáticos têm compartilhado preocupações quanto à forma de se abordar alguns conteúdos matemáticos em sala de aula. Lima et al.(2001), ao analisarem os principais livros didáticos de Matemática adotados no Ensino Médio, concluíram que a maioria desses livros trazem uma série de enunciados cuja veracidade não é demonstrada nem justificada, o que impede os jovens de desenvolverem o seu espírito crítico, aprender a raciocinar e, sobretudo, tomar decisões baseada na análise cuidadosa dos fatos.

De fato, a experiência tem mostrado que um ensino baseado na transmissão de conteúdos por parte do professor, em que o aluno recebe passivamente os conteúdos e os reproduz, conforme regras e procedimentos, não garantem uma aprendizagem efetiva. Qualquer que seja a área do conhecimento, o aluno tem que participar ativamente do processo e construção do conhecimento, entender que os mesmos são responsáveis, com uma adequada orientação e mediação do professor, num contexto de erros e acertos, de forma perseverante, pela sua aprendizagem. Chaves e Bisognim ([s.d], p.1) corroboram essa opinião, ao fazerem a seguinte ponderação:

Critica-se, no entanto, os conteúdos transmitidos exclusivamente de maneira tradicional. Para essa pedagogia, o aluno atento à explicação e o professor apropriado de uma didática coerente e clara, são fatores necessários e suficientes para que se possa assegurar e efetivar o processo de aprendizagem. A prática, no entanto, tem mostrado que não é tão simples assim, que a realidade de uma sala de aula evoca, muitas vezes, por um fazer diferenciado.

Vale ressaltar que, qualquer que seja a método de ensino usado pelo professor, não obteremos resultados positivos se não tivermos professores conscientes da importância de seu papel histórico-social enquanto orientador e mediador do processo de ensino e aprendizagem, comprometidos com a qualidade

do ensino, que tenham sobriedade para questionar e não ceder a orientações de um “sistema” cada vez mais assistencialista e paternalista, que prioriza a quantidade em detrimento da qualidade. Da mesma forma, nenhum método, nenhuma orientação de cunho pedagógico funciona se o nosso aluno real não estiver motivado, comprometido com a sua aprendizagem, se não desempenhar o seu verdadeiro papel de aluno na acepção própria da palavra.

## 2.1 OS TRÊS COMPONENTES DO ENSINO DA MATEMÁTICA, SEGUNDO LIMA.

Considerando que a matemática tem suas características próprias, assim como as demais áreas das ciências e seus conteúdos exigem meios apropriados para sua aquisição, Lima (1999), de forma simples e franca, sugere três componentes básicos aos quais o ensino de matemática deve se apoiar: conceituação, manipulação e aplicação.

O autor acredita que o conhecimento e a adoção por parte dos professores desses três componentes, utilizados de forma não divorciada e equilibrada, permitirão que os alunos entendam e reconheçam o “método matemático”. Além do mais, irão “dotá-los de habilidades para lidar desembaraçadamente com os mecanismos do cálculo e dar-lhes condições para mais tarde saberem utilizar seus conhecimentos em situações da vida real [...]”. (LIMA, 1999, p.1). A seguir, iremos descrevê-los:

### 2.1.1 Conceituação

Segundo o autor, a conceituação compreende a formulação correta das definições, o domínio da notação/linguagem de uma certa teoria, o enunciado preciso das proposições, a prática de formas distintas de raciocínio, como o dedutivo, por exemplo, a dedução (quando possível) das fórmulas e o estabelecimento de conexões entre diversos conceitos, ou seja, é o “saber”.

É o “saber fazer” relações entre temas matemáticos, considerando os seus diversos contextos, e interpretar/reformular corretamente situações e ideias matemáticas. Pertencem a esse componente, também, a prática e a compreensão da demonstração, uma vez que demonstrar é validar uma verdade matemática, seja um teorema ou uma proposição, através da razão e não pela imposição.

Cabe destacar que um bom domínio dos conceitos matemáticos por parte dos alunos garante, de forma consciente e consistente, a aplicação desses conceitos na resolução de situações-problemas. Na realidade, esse componente corresponde ao que se faz, normalmente, nas chamadas aulas teóricas.

### **2.1.2 Manipulação**

Sabemos que o ensino de matemática, na visão de muitos professores e alunos, resume-se a manipulação, que é o “saber fazer”, ou seja, colocar em prática (“manipular”) via métodos, algoritmos e fórmulas, os conceitos matemáticos. Para Lima (1999), a manipulação ágil de equações, de fórmulas, de construções geométricas, de expressões numéricas, acompanhadas do desenvolvimento de atitudes mentais, permite aos que fazem matemática uma abordagem consciente e objetiva das situações (problemas) matemáticas. Outrossim, permite o “treinamento” desses procedimentos indispensáveis para um fazer matemático eficaz e ágil. É o que se faz geralmente ao se propor os chamados exercícios de fixação.

No entanto, o autor observa que é prática no Brasil a supervalorização da manipulação, decorrente, muitas vezes, da forma como a maioria dos livros didáticos tratam a matemática, priorizando cálculos mecânicos e repetitivos, trazendo listas extensas de questões do tipo “calcule”, em prejuízo de questões relacionadas ao dia a dia do aluno ou a questões de investigações internas da matemática.

Não há dúvida que o excesso de manipulação tem guiado a grande maioria de nossos professores na seleção e organização dos conteúdos a serem dados em sala de aula. Daí por que áreas importantes da Matemática, como Geometria, por exemplo, têm sido abandonadas, por exigir não só a manipulação mecânica, mas, sobretudo, o raciocínio dedutivo e a capacidade visual, características que geralmente não são intrínsecas a um ensino baseado simplesmente no domínio de procedimentos.

### **2.1.3 Aplicações**

Certamente, a possibilidade de aplicações de conceitos e procedimentos matemáticos para resolver problemas, sejam eles relacionados ao cotidiano, a questões de outras áreas, sejam científicas ou tecnológicas, ou a questões próprias

da matemática, é o momento mais motivante e prazeroso para os alunos. Muitas vezes este momento dá sentido e responde a muitas perguntas de “por que” de se estudar certos conteúdos. Para Lima (1999), as aplicações são o emprego das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões em situações do dia a dia ou em questões de outras áreas do conhecimento, ou seja, é o ato de “contextualizar” os conceitos e procedimentos matemáticos. O mesmo ressalta que o trabalho com aplicações em Matemática desenvolve, entre outras habilidades, a criatividade, a autoestima, a capacidade de resolver problemas e, sobretudo, justifica e torna menos cansativo o ato de aprender.

Para o mesmo autor, o trabalho com as aplicações no ensino de Matemática deve ser uma constante em sala de aula e desenvolvido num ambiente de resolução de situações-problemas:

Cada novo capítulo do curso deveria começar com um problema cuja solução requeresse o uso da matéria que vai a ser ensinada. É muito importante que o enunciado do problema não contenha palavras que digam respeito ao assunto que vai ser estudado naquele capítulo. De resto, as aplicações mais interessantes, durante todo o curso, são exemplos e exercícios cujo objeto principal não é o assunto que está sendo tratado. Por exemplo: problemas sobre logaritmos em que a palavra logaritmo não apareça no enunciado ou exercícios que se resolvam com trigonometria, mas que não falem em seno, cosseno, etc. (LIMA, 1999, p. 6).

Dessa forma, o uso equilibrado e não dissociado destes três componentes no ensino da Matemática trará como resultados uma aprendizagem efetiva e duradoura, um ensino que valorize mais o raciocínio, o ato de fazer pensar e menos baseado na reprodução e repetição de conceitos e procedimentos.

Objetivamente, o principal ponto de convergência desse estudo com as concepções de Lima (1999) (artigo este que teve uma contribuição importante na escolha do tema deste trabalho) foi a constatação de que a maioria dos alunos do Ensino Médio não sabe diferenciar qual é o modelo matemático adequado para modelar uma dada situação. Por exemplo, se um dado problema é resolvido usando

a função afim, quadrática ou exponencial, quando não se tem explicitamente o tipo de função que deve ser usada.

Claro, quando se defende a valorização das aplicações no ensino da matemática não se pretende, de forma alguma, minimizar ou relativizar a importância de conceitos e procedimentos, mas sim reconhecer que a principal finalidade da conceituação e da manipulação em Matemática é a possibilidade de aplicações dessas ferramentas dentro da própria Matemática ou em problemas que têm referência no dia a dia do aluno.

Da mesma forma, não podemos adotar uma visão maniqueísta e acreditar que devemos tirar das salas de aulas conteúdos que não permitam uma contextualização fora da matemática, como defendido por alguns educadores. Basta lembrar que, em geral, os matemáticos não produzem matemática pensando, num primeiro momento, em aplicações imediatas. Agora, historicamente, percebemos que muita matemática considerada teórica e menos utilitária teve aplicações surpreendentes, como, por exemplo, a inesperada aplicação da teoria dos números primos na Criptografia, entre outros casos.

## 2.2 O QUE DIZEM AS ORIENTAÇÕES CURRICULARES OFICIAIS

Não se pode negar que o professor hoje dispõe de um vasto material relativo a orientações curriculares, sejam elas didáticas ou pedagógicas, que podem auxiliá-los na seleção e organização dos conteúdos.

Juntamente com os documentos de Secretarias Municipais e Estaduais de Educação, temos, seguramente, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), sejam eles direcionados para o Ensino Fundamental ou Médio e suas complementações, como um dos principais documentos institucionais que orientam a prática pedagógica docente no âmbito da educação brasileira. Desse modo, considerando que as concepções expressas nestes documentos contribuirão para uma mudança de postura dos professores, se eles forem interpretados corretamente, iremos descrever suas principais propostas e opiniões.

Grosso modo, os PCN para o Ensino Fundamental (1998) apontam como obstáculos enfrentados pelo Brasil em relação ao ensino de matemática a má formação, a falta de políticas educacionais concretas, interpretações equivocadas de concepções pedagógicas e, principalmente, a não adoção dessas propostas por

partes dos professores. Vale notar que essas orientações, mesmo sendo voltadas para o ensino fundamental, têm caráter geral e se aplicam, portanto, a qualquer nível de ensino.

Como exemplo de “inovações” mal sucedidas, o documento alerta sobre a forma comum e não adequada de trabalhar a resolução de problema como opção metodológica: “[...] quando é incorporada, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos”. (BRASIL, 1998, p.22). Um outro obstáculo apontado, não menos importante, fruto de interpretações equivocadas por parte de docentes e do corpo pedagógico das escolas, diz respeito a forma como esses profissionais veem a ideia de contexto na sala de aula:

[...] ao se trabalhar apenas com o que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno. Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata. (BRASIL, 1998, p.23).

Da mesma forma, o documento critica a forma de como a História da Matemática vindo sido trabalhada em sala de aula: muitas vezes se resume a apresentação de fatos ou biografias de autores, empobrecendo esse recurso tão importante para as aulas de Matemática, por mostrar a trajetória de construção e reconstrução de conceitos e procedimentos matemáticos. Além do mais, o trabalho com História da Matemática deixa claro para os alunos que essa área do saber é fruto da produção humana e que muitas vezes reflete momentos e necessidades históricas. Além do mais, mostra fatos importantes da construção ou reconstrução

dos conhecimentos matemáticos, que podem apontar formas de se abordar certos conceitos em sala de aula.

### **2.2.1 A Resolução de Problemas**

A fim de orientar e amenizar as dificuldades apontadas, os autores desse documento sugerem a resolução de problemas como uma das principais metodologias de ensino em Matemática. Em termos gerais, a atividade com resolução de problemas pressupõe que sejam apresentados aos alunos situações desafiadoras (problemas), sejam elas construídas/geradas na própria Matemática ou relacionadas ao seu dia a dia, que demandem por parte do aluno a necessidade de gerenciar informações, escolher conceitos e procedimentos adequados na busca da resolução do problema.

Daí, como consequência, essa metodologia permite a criação de um ambiente desafiador, privilegiando o desenvolvimento do raciocínio, trocas de experiências entre alunos, e, sobretudo, a necessidade de justificar o processo de resolução. Nessa visão, o ensino na perspectiva de resolução de problemas se opõe ao um ensino voltado para a reprodução e memorização de conceitos, fórmulas e procedimentos. Os PCN (BRASIL, 1998, p.40-41) ainda caracterizam e definem mais precisamente, em forma de princípios, a resolução de problemas:

- a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas,

segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;

- um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Nesse contexto, o ensino através da resolução de problemas permite que os alunos desenvolvam sua “capacidade de aprender a aprender, habituando-os a determinar por si próprios respostas às questões que os inquietam, sejam elas questões escolares ou da vida cotidiana, ao invés de esperar uma resposta já pronta dada pelo professor ou pelo livro-texto” (PINTO; SOARES,[s.d], p.1) e, como consequência, promove o desenvolvimento de atitudes como perseverança, de formas eficazes de aprender, contribui para a conquista da autoestima e, principalmente, mostra que o fazer matemático se dá num ambiente de tentativas, de acertos e erros. Afinal de contas, a produção de matemática ocorre, como já falado, num contexto de resolução de problemas, sejam eles matemáticos ou de demandas científicas, tecnológicas ou sociais.

### **2.2.2 O recurso à História da Matemática**

Os PCN também apontam alguns recursos que podem propiciar contextos e contribuir na estratégia de busca de soluções num trabalho com Resolução de Problemas. Dentre eles, podemos destacar o recurso à História da Matemática. Ao reconhecer a importância dessa ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, os autores justificam sua relevância:

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas,

em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p.42).

Nesse sentido, o recurso à História da Matemática se mostra como um aliado forte no processo de ensino e aprendizagem de matemática por mostrar o caminho longo trilhado por esse conhecimento, sua evolução, sua importância na consolidação de outras áreas, como a tecnológica, e, sobretudo, ilustra muito bem para os alunos que suas dificuldades hoje de aceitar/compreender alguns conceitos também foram sentidas no passado pelos matemáticos, ou seja,

O aluno reconhecerá a Matemática como uma criação humana, que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecerá as preocupações dos vários povos em diferentes momentos históricos, identificando a utilização da Matemática em cada um deles e estabelecerá comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente. (PORTANOVA, [s.d], p.1).

Daí, a necessidade do reconhecimento de que a matemática está sendo sempre aprimorada, incorporando novos conceitos e métodos, refletindo momentos e necessidades da sociedade. Outrossim, “[...] o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns porquês e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento”. (BRASIL, 1998, p.42).

### **2.2.3 O recurso às Novas Tecnologias**

As novas tecnologias, sejam elas de comunicação ou de informática, estão cada vez mais presentes no dia a dia dos nossos alunos. Recursos tecnológicos

como computadores, celulares, *tablets*, o acesso aos meios de comunicação ou até mesmo as calculadoras, sendo usados de forma consciente e planejada, podem se tornar aliados fortes no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Então não podemos negá-las, muito menos tirá-las do meio escolar; pelo contrário, devemos encontrar formas eficazes de incorporá-las ao ensino.

Sabidamente, o simples fato de se ter contato com novas tecnologias, com uma grande quantidade de informações diariamente, não significa para o usuário uma automática contribuição para a sua aprendizagem, algumas vezes podem até atrapalhar. Daí a necessidade da escola desenvolver um trabalho contínuo a fim de conscientizar seus alunos quanto ao uso proveitoso e responsável desses recursos, devidamente orientados pelos professores. Nesse sentido, os PCN (1998), fazendo referência a recursos como calculadoras, computadores e outras tecnologias, listam algumas de suas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática:

- relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
- evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
- possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
- permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo

É consensual que a matemática tem papel decisivo na produção e execução de novos recursos tecnológicos, mas vale lembrar que o conhecimento matemático ou suas linguagens, muitas vezes, são necessários também para o uso adequado

desses recursos. Daí, que muita gente fica privado dessas ferramentas por se sentirem incapazes de manuseá-los ou se sentem inseguros de usá-los e, neste caso, um razoável conhecimento matemático pode ajudar.

Especificamente, em relação ao uso de computadores, os autores sustentam que eles podem ser usados, principalmente, como fonte de informação, como auxiliar no processo de construção de conhecimentos e, em alguns casos, como ferramenta para realizar algumas atividades como a construção de planilhas eletrônicas, banco de dados, etc.

Certamente, de todos os recursos ditos tecnológicos, a calculadora tem tido o seu uso mais questionado no ensino de Matemática. A questão que se levanta é se sua utilização traz benefícios ou prejuízos para a aprendizagem. Alguns acreditam que se a calculadora não for bem usada, com atividades planejadas e direcionadas, ela pode deixar os alunos “mal acostumados”, ou seja, em alguns casos troca-se o cálculo mental por um simples cálculo mecânico.

Além do mais, o uso abusivo da calculadora, dependendo do nível escolar, pode reduzir e dificultar algumas habilidades aritméticas. Uma vez um colega comentou que um aluno seu do Ensino Médio “perguntou” se poderia usar a calculadora para somar  $40 + 40!$ . É muito provável que esse aluno se quer observou o que estava somando. Esse fato isolado, mas emblemático, ilustra muito bem nossa preocupação com o mau uso da calculadora.

Claro, não é simplesmente com este intuito que a calculadora deve ser usada. Os prejuízos que podemos ter pelo uso da calculadora podem estar relacionados à forma de como ela é usada. Neste sentido, os PCN têm nos apontado alguns caminhos:

[...] constata-se que ela é um recurso útil para verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um valioso instrumento de autoavaliação. A calculadora favorece a busca e percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problema, pois ela estimula a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses, uma vez que os alunos ganham tempo na execução dos cálculos. Assim elas podem ser

utilizadas como eficiente recurso para promover a aprendizagem de processos cognitivos. (BRASIL, 1998, p.28).

Assim, o uso adequado da calculadora pode desenvolver algumas habilidades, como a descoberta de regularidades, a verificação e interpretação de resultados, acompanhados da devida justificativa matemática, e a confirmação ou a refutação de hipóteses. Ademais, as propriedades de algumas operações podem ser abordadas e exploradas na calculadora.

Finalmente, não podemos deixar de fazer referências a alguns programas de computadores (os *softwares*) que podem ser um suporte pedagógico a mais para professores e alunos. Existem vários *softwares* educacionais, em particular de Matemática, que permitem a construção e aplicação de conceitos. Muitos deles possibilitam a visualização de propriedades e de “demonstrações” de relações, o que seguramente torna o ensino e aprendizagem de matemática mais motivante e “realístico” para o aluno. A esse respeito, Romero (2006) apresenta mais algumas contribuições do uso dos *softwares* educacionais para as aulas de Matemática:

A tecnologia, especificamente os *softwares* educacionais disponibiliza oportunidade de motivação e apropriação do conteúdo estudado em sala de aula, uma vez que em muitas escolas de rede pública e particular, professores utilizam recursos didáticos como lousa e giz para ministrarem suas aulas, este é um dos diversos problemas que causam o crescimento da qualidade não satisfatória de ensino, principalmente na rede estadual. (idem, 2006, p.1).

É evidente que os alunos devem ter consciência de que os recursos tecnológicos devem ser um aliado seu no processo de aprendizagem e que, portanto, deve ser usado não somente dentro do ambiente de sala de aula, mas, principalmente, fora das salas de aulas, já que, neste caso, os recursos disponíveis são bem mais variados.

#### 2.2.4 O recurso aos Jogos

Os jogos são, sem sombra de dúvida, um dos recursos mais importante para a motivação dos alunos, por ser natural o ato de “brincar” e de “jogar”. Assim, podem ser utilizados na Matemática como “pano de fundo” para se propor problemas criativos, que demandem a criação de estratégias, o desenvolvimento do raciocínio rápido, a capacidade de concentração e, sobretudo, a aplicação, dependendo da situação, de conceitos matemáticos. Além do mais,

os jogos podem ser utilizados para introduzir conteúdos, verificar a aprendizagem, fixar conceitos já estudados e resgatar conteúdos anteriores. Essa prática irá melhorar o relacionamento entre os alunos e também entre alunos e professor. Serão reforçados valores de respeito, reciprocidade e confiança. (PASDIORA, 2008, p.6).

Recorremos à Flemming (2009, p.34) para citarmos mais algumas razões para trabalharmos com jogos nas aulas de Matemática: “os jogos podem minimizar as dificuldades de aprendizagens e, principalmente, facilitar o resgate de conceitos e propriedades Matemáticas de forma mais espontânea e natural”. Não deixando de lembrar que seu uso pode desenvolver outras atitudes, como o conhecimento e o respeito a “regras” pré-estabelecidas e favorecem o trabalho coletivo. Nesse sentido, os jogos

podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes, enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório necessárias para aprendizagem da Matemática. (BRASIL, 1998, p.47).

Portanto, objetivamos com este capítulo (não o considere à parte!) fazer um panorama do ensino da matemática do Brasil, mostrando algumas dificuldades e apontando soluções para superá-las, segundo educadores, professores e as

orientações curriculares oficiais. Acreditamos, enfim, que não nos distanciamos do tema em pauta, mas justificamos a necessidade de se criar novas formas e métodos para o ensino da Matemática.

Explicitamente, percebemos que qualquer que seja a metodologia ou recurso usado no ensino de Matemática o objetivo maior é criar ambientes de ensino que permitam uma aprendizagem real, significativa, em que o aluno, lançando mão de conhecimentos e métodos, possa usá-los para resolver problemas, sejam eles escolares ou de sua realidade. E, seguramente, a adesão à Modelagem Matemática, num ambiente de resolução de problemas, permitirá darmos um passo importante no sentido de amenizar os já recorrentes e propagados problemas que afetam o processo de ensino e aprendizagem de Matemática no Brasil. Claro, no capítulo que se segue, iremos definir e caracterizar a Modelagem Matemática como uma importante estratégia de ensino que deve ser incorporada a nossa prática pedagógica.

### 3 A MODELAGEM MATEMÁTICA

Conscientes da necessidade de se buscar alternativas no sentido de minimizar os já falados problemas do ensino de Matemática no Brasil, educadores, pesquisadores e professores apontam algumas possibilidades. Dentre elas, podemos destacar a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática como metodologias de ensino que devem ser incorporadas à prática pedagógica do professor de Matemática. Não há dúvidas, no entanto, que nas últimas décadas a Modelagem Matemática vem ganhando adeptos e se tornando uma das principais alternativas metodológicas de ensino de Matemática, por aproximar o aluno da sua realidade, ou seja, permite a tão sonhada relação teoria e prática na Matemática.

Nesse sentido, pretendemos neste capítulo caracterizar em termos mais específicos a Modelagem Matemática como um ambiente de ensino e aprendizagem, uma vez que o nosso trabalho sugere o ensino da Função Exponencial baseado nessa metodologia de ensino.

Inspirados em Barbosa (2004), nos guiaremos, principalmente, pelas seguintes questões: O que é Modelagem Matemática? Por que Modelagem Matemática? Como fazer Modelagem Matemática? Quais são os obstáculos apontados na aplicação da Modelagem Matemática?

#### 3.1 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA CONCEPÇÃO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Não são recentes no Brasil estudos, pesquisas e argumentos em prol do uso da Modelagem Matemática no ensino de Matemática. Debates sobre a necessidade de se trabalhar as aplicações em matemática certamente conduziram reflexões a respeito de usar os conceitos matemáticos para problematizar/investigar e resolver problemas que têm alguma relação com a realidade dos alunos, levando a uma consciência da importância do papel sócio-cultural que a Matemática desempenha.

Pesquisadores sustentam que o surgimento da Modelagem Matemática como estratégia de ensino no Brasil se deu na década de 70, tendo como um dos pioneiros o professor Aristides Camargos Barretos, da PUC do Rio de Janeiro, que realizou, na época, a sua principal experiência de Modelagem em sala de aula numa turma de Cálculo Diferencial e Integral, obtendo bons resultados. Posteriormente, os

professores D'Ambrósio e Bassanezi (ambos da UNICAMP) se engajaram em discussões no âmbito nacional e internacional sobre o uso da Modelagem Matemática; o que os levaram, posteriormente, a criar e coordenar cursos e projetos com a finalidade de criar grupos de pesquisa e estudos em Modelagem Matemática. Mais tarde, Bassanezi se tornou um dos principais especialistas e disseminadores da Modelagem Matemática, sendo referência para muitos pesquisadores e estudiosos do tema. Temos ainda estudos mais recentes dos professores/pesquisadores Barbosa e Biembengut que têm dado contribuições teóricas e práticas importantes sobre a Modelagem Matemática.

Diversas são as concepções sobre a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, contudo não há divergências quanto aos seus objetivos. Bassanezi (1999, p.15) define Modelagem Matemática como a “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, resolvê-los e, então, interpretar suas soluções na linguagem do mundo real”. Nesse contexto, o autor acredita que essa forma de atuar/conceber o ensino de Matemática aproxima o aluno, de certa forma, da Matemática que é feita nos “laboratórios”, que muitas vezes empresta a sua teoria/linguagem para solucionar ou deixar “mais claros” fenômenos e fatos de outras áreas do conhecimento:

Desse modo, a Matemática tem penetrado fortemente na Economia, Química, Biologia, entre outras, na perspectiva da utilização de modelos, quase sempre apoiados nos paradigmas que nortearam a Física - como as leis de conservação e analogias consequentes. Outras áreas como Sociologia, Psicologia, Medicina, Linguística, Música, e mesmo a História, começam a acreditar na possibilidade de ter suas teorias modeladas por meio da linguagem matemática. (idem, p.11).

Dessa forma, o processo de Modelagem Matemática, em particular, visa problematizar, investigar e solucionar situações/problemas vindo de outros contextos, como, por exemplo, de questões originadas em outras áreas ou que tenham origem ou referência na realidade do aluno, resultando na obtenção de um modelo matemático que traduza, em termos matemáticos, a situação colocada.

Além do mais, se “busca trabalhar os conteúdos matemáticos de uma forma que possibilite a construção dos conceitos matemáticos, buscando relações destes com o dia a dia [...]”. (BURAK; BARBIERI, 2005, p.2). Resulta, então que um modelo matemático “é um conjunto consistente de equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno - este pode ser biológico, social, psicológico, conceitual ou até mesmo outro modelo matemático” (BASSANEZI, 1999, p.12) ou em termos mais simples, como dizem Biembengut e Hein (2000), é um conjunto de fórmulas e relações matemáticas que traduz um fenômeno ou um problema real.

De forma mais ampla, Bassanezi (idem, p.11) completa que modelo é um processo artificial que ocorre “quando procuramos agir/refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, compreender ou modificá-la. O mesmo ainda pondera que um modelo nunca encerra uma verdade definitiva, uma vez que ele representa uma aproximação da realidade analisada. Na mesma direção desses autores, Barasuol (2006, p.3) considera a Modelagem Matemática como um processo que envolve a obtenção de um modelo matemático e complementa:

Este sob certa ótica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento apurado de matemática, o modelador deve ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

Assim, um ensino de Matemática que prioriza atividades, sejam elas simples ou mais complexas, que tenham como objetivo a interpretação via matemática de fatos e situações, permitirá o seu reconhecimento, por parte de alunos e sociedade em geral, da sua utilidade, da sua presença nas questões que dizem respeito à vida do aluno. Ademais, situações de ensino nesses moldes desenvolvem, sem dúvida, um sentimento, por parte do aluno, de ser um agente ativo de sua aprendizagem, levando em consideração que ele faz parte do processo de construção das soluções e não um mero reprodutor de algoritmos e estratégias do professor. Acrescentamos, enfim, que uma Matemática útil e interessante não deve se distanciar do conteúdo

programático básico existente (BASSANEZI, 1999), sob pena de reduzir cada vez mais a qualidade e o nível do ensino de Matemática.

Barbosa (2009), que tem publicado diversos estudos teóricos e, principalmente, tem relatado experiências de atividades em sala de aula com Modelagem Matemática, define essa metodologia de ensino em termos mais simples como o ato de abordar situações do dia a dia ou de outras ciências por meio da Matemática; o que nos parece uma definição mais adequada para os objetivos de nosso trabalho. Em outro momento, o mesmo autor explicita melhor o que entende por ambiente de Modelagem:

[...] o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo. (BARBOSA, 2004, p.3).

Nesse sentido, um ambiente de Modelagem Matemática possibilita, por parte do aluno, a aplicação de teorias, linguagem, procedimentos e algoritmos da Matemática, assim como a construção de novos conceitos, para abordar situações que se relacionam, de alguma maneira, com o seu cotidiano. Além do mais, a despeito de várias concepções mais abrangentes, essa metodologia “deve ser vista apenas como uma estratégia de aprendizagem, onde o objetivo principal não é de se chegar a um modelo, mas seguir etapas aonde o conteúdo matemático vai sendo, no decorrer do processo, sistematizado e aplicado”. (MACLYNE; SANTOS, 2007. p.8).

Barbosa (2009) ainda explica que a Modelagem Matemática não é único ambiente de ensino e aprendizagem que tem como objetivo a busca da resolução de um problema. Uma outra metodologia com os mesmos objetivos é a Resolução de Problemas. No entanto, a primeira se diferencia da segunda por trabalhar temas

interdisciplinares, que têm origem ou tem relação do cotidiano dos mesmos, o que não ocorre geralmente com atividades de resolução de problemas.

Todavia, considerando a natureza e os objetivos deste trabalho, adota-se a concepção de que a Modelagem Matemática está vinculada a um ambiente de Resolução de Problemas, mas como dito antes, se busca objetivamente, como essa alternativa metodológica, solucionar problemas provenientes do dia a dia dos alunos. Explicando melhor: em particular, pretendemos sugerir atividades de ensino da Função Exponencial - via a resolução de problemas contextualizados - baseadas, em seus objetivos e métodos, na Modelagem Matemática. Na realidade, esse entendimento tem suporte nas Orientações Curriculares Nacionais para o ensino Médio que dizem: “A modelagem matemática, percebida como estratégia de ensino, apresenta fortes conexões com a ideia de resolução de problemas apresentada anteriormente [...]”. (BRASIL, 2006, p.84).

Especificamente, pretende-se, com este trabalho, apresentar situações-problema que leve o aluno a “decidir”, apoiado nas características das principais funções elementares (afins, quadráticas, exponenciais, etc..) sobre qual é o modelo matemático adequado que modela tal situação. Essa visão de se ensinar/apreender os conceitos matemáticos, em particular das funções, se contrapõe a postura adotada geralmente pelos professores e autores de livros didáticos, que dão os modelos (fórmulas) já prontos e acabados, sem necessidade do aluno agir, intervir, refletir sobre qual é o modelo adequado para uma dada situação.

Finalmente, Barbosa (2009); a par da importância da Modelagem Matemática para motivar nossos alunos e favorecê-los na aprendizagem de Matemática; atenta para o fato de que a busca de modelos matemáticos tem sua importância na sociedade como um todo. Ele lembra, como exemplo, que muitas empresas de transportes procuram uma representação matemática que relacione seus custos e receitas, e daí elas podem usar esses modelos para justificar, por exemplo, seus aumentos. Da mesma forma, as entidades de fiscalização, 'sobre um ponto de vista técnico', tomam esses modelos para analisarem possíveis irregularidades. Enfim, o autor sugere que por trás da produção de um modelo pode estar o interesse de quem os produz, o que torna essa produção um processo não neutro. Daí, sobre esse ponto de vista, a Modelagem Matemática perpassa as salas de aula para ter sua importância também no exercício de nossa cidadania:

Parece-me que, do ponto de vista da cidadania, há um argumento mais crucial: a necessidade de os alunos perceberem a natureza enviesada dos modelos matemáticos e o papel que eles podem ter na sociedade e nas ciências. Isso não significa o esquecimento do conteúdo matemático, mas seu posicionamento como um 'meio' para convidar os alunos a enxergarem seu uso para além dos limites da disciplina escolar. (BARBOSA, 2009, p.2).

Nesta perspectiva, a preocupação do autor embasa algumas de nossas reflexões que serão citadas e explicitadas em momento posterior de que a falta de um repertório básico em matemática, ou uma aprendizagem deficiente nesta área do conhecimento, por parte dos alunos e cidadãos em geral, acaba por privar essas pessoas do exercício pleno de sua cidadania.

### 3.2 PORQUE USAR A MODELAGEM MATEMÁTICA

Muitos professores e matemáticos têm compartilhado preocupações quanto à forma de se abordar os conteúdos matemáticos em sala de aula. Daí, a necessidade premente do professor de Matemática mudar sua postura. Não há mais espaço para um ensino pautado na supervalorização de regras, fórmulas e procedimentos em detrimento de uma abordagem que priorize uma aprendizagem significativa, onde os alunos possam de fato apreender os conceitos e aplicá-los na resolução de problemas diversos, que sejam do seu cotidiano ou originados na própria lógica interna da Matemática.

Muitos afirmam que essa metodologia tradicional do ensino de Matemática, que se limita a expor os conteúdos, resolver e propor exercícios para que os alunos “exercitem” seus conhecimentos, sem o incentivo da participação ativa deles na construção e busca de soluções está ultrapassada e que, portanto, é um fator preponderante para o atual fracasso do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Aliás, a esse respeito, Barasuol assevera enfaticamente que:

Esta forma de apresentação dos conteúdos depreende-se uma concepção de Matemática em que a criatividade é totalmente

desfigurada, induzindo os alunos à impotência frente à sabedoria do mestre, que aparentemente encontra de imediato os melhores caminhos para a solução de questões matemáticas, em verdade, esse modo de proceder só é possível porque o professor já conhece antecipadamente aquele conteúdo. (BARASUOL, 2006, p.2).

No entanto, acreditamos que o problema não está só na forma de “expor” os conteúdos, mas, sobretudo, se os conteúdos são selecionados e organizados com o objetivo de alcançar uma aprendizagem verdadeira, desenvolver o raciocínio e a capacidade de aplicar adequadamente conceitos e procedimentos para resolver problemas. De outra forma: não adianta garantir a todo custo a “audiência” dos alunos, como aulas muito “divertidas” e com um certo apelo teatral, como hoje podemos presenciar em alguns casos . Assim, devemos

descobrir novas formas de estabelecer o processo de ensino-aprendizagem, com a intenção de não somente melhorar a qualidade das aulas, mas também de adotar estratégias que levem o aluno a questionar e traçar novos caminhos, como forma de ultrapassar as dificuldades que se apresentam. (MACLYNE; SANTOS, 2007, p.8).

Por isso, é inadiável a necessidade de perseguir e assegurar uma aprendizagem sólida, que leve o aluno a pensar e aplicar, conscientemente, seus conhecimentos matemáticos para resolver seus problemas, sejam escolares ou não. Nesse sentido, acreditamos que a Modelagem Matemática se impõe como uma metodologia que pode contribuir de forma decisiva na busca de uma aprendizagem efetiva e mais reflexiva, pois:

Através dela o aluno tem condições de desenvolver sua capacidade de reflexão, deixando de ser um mero repetidor e copiador de conhecimentos, podendo analisar, interpretar e discutir teoricamente o vivido na prática, podendo assim avaliar as dificuldades encontradas, objetivando uma

aprendizagem mais interessante e agradável. (SIQUEIRA; NATTI, 2009, p.4).

Desse modo, estamos convictos de que um ensino de Matemática que contemple em sua metodologia atividades simples ou mais complexas de Modelagem Matemática despertará o interesse dos alunos pela investigação e pesquisa, tornará as aulas mais dinâmicas e produtivas, o que resultará numa aprendizagem mais eficiente e útil.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (1999), ao apontar algumas competências e habilidades que devem ser desenvolvidas em Matemática, em particular sobre o campo investigação e compreensão, nos remetem a algumas características peculiares da Modelagem Matemática que podemos usar a nosso favor para justificar o seu uso em sala de sala:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Por outro lado, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio reiteram as características citadas anteriormente e destacam algumas competências

e procedimentos que o aluno pode desenvolver ao se trabalhar na sala de aula com atividades de Modelagem Matemática:

selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer um trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado é matematicamente muito complexo; validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes; e eventualmente ainda, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda à situação real, aqui se revelando o aspecto dinâmico da construção do conhecimento. (BRASIL, 2006. p.85).

Não há dúvida que essas habilidades relacionadas à Modelagem Matemática por si sós deveriam ser considerados argumentos suficientes para garantir a adoção por parte dos professores dessa estratégia de ensino na Matemática.

Em Barbosa (2003, p.3), são citadas algumas razões para incluir a Modelagem Matemática no currículo:

- **Motivação:** os alunos sentir-se-iam mais estimulados para o estudo de matemática, já que vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola;
- **Facilitação da aprendizagem:** os alunos teriam mais facilidade em compreender as ideias matemáticas, já que poderiam conectá-las a outros assuntos;
- **Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas:** os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar matemática em diversas situações, o que é desejável para moverem-se no dia-a-dia e no mundo do trabalho;

- Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração: os alunos desenvolveriam habilidades gerais de investigação;
- Compreensão do papel sociocultural da matemática: os alunos analisariam como a matemática é usada nas práticas sociais.

Mas ele chama atenção, sobretudo, para o último desses argumentos, por acreditar que “ele está diretamente conectado com o interesse de formar sujeitos para atuar ativamente na sociedade e, em particular, capazes de analisar a forma como a matemática é usada nos debates sociais” (idem, 2004, p.2). Nessa perspectiva, o autor considera que a Modelagem Matemática pode ajudar as pessoas a tomarem decisões e refletirem sobre as aplicações da Matemática usadas nas práticas sociais. Siqueira e Natti (2009, p.5) corroboram esse entendimento ao afirmarem que essa alternativa metodológica, além de desenvolver a capacidade de aplicar os conceitos matemáticos em diversos contextos, promove uma aprendizagem significativa, “[...] adquirindo conhecimentos voltados para sua cidadania, tornando-o cidadão crítico, reflexivo e participante, atuando como agente da transformação de seu ambiente, participando mais ativamente no mundo do trabalho, das relações sociais, da política e da cultura”.

Percebe-se, então, que as diversas defesas em favor da Modelagem Matemática feitas por pesquisadores e professores recaem principalmente sobre a sua importância social, ou seja, oferecer ao aluno e a sociedade em geral a oportunidade de reconhecer a Matemática como um instrumento eficaz de atuação nas questões sociais. Dessa forma, os ganhos que se podem ter de seu uso não se reduzem apenas ao desenvolvimento de capacidades cognitivas, intelectuais, mas sim na possibilidade concreta de tornar o ensino de Matemática mais atraente, mais criativo e agradável. Ademais, permitirá a “entrada” de temas de relevância social nas aulas de Matemática, o que pode contribuir para diminuir a rejeição e o “medo” que os nossos alunos têm da Matemática. Chaves e Bisognim ([s.d],p.2) reforçam essa concepção:

Um dos mais relevantes aspectos com o qual o ensino por meio da Modelagem contribui, é o social, pois através da

valorização de temas atuais e da realidade, podemos trazer para a sala de aula assuntos em que, ao mesmo tempo em que se ensina Matemática, desperta-se para problemas atuais da sociedade, problemas ambientais, econômicos, financeiros, dentre outros. O aluno sai de uma posição passiva, e como cidadão integrado no mundo no qual faz parte, tem condições de contribuir, provocar mudanças, interagir, integrar e tomar decisões.

Finalmente, do ponto de vista do ensino das funções, alguns professores e educadores sustentam que o fato mais importante no tratamento de algumas funções, como afins, quadráticas e exponenciais, por exemplo, é “descobrir” qual é tipo de função mais adequado para modelar um problema. Na realidade, o que vemos, na maioria dos livros didáticos e na prática em sala de aula, são situações em que o tipo de função que modela tal situação já está explicitado na questão, empobrecendo o processo de aprendizagem, dificultando o desenvolvimento do pensamento matemático, ou seja, deixa-se de

colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva (BRASIL, 2006, p. 70).

Ainda, nesse sentido, Lima et al. (2006) afirmam que uma vez decidido o modelo adequado para um determinado problema, o tratamento matemático da questão não oferece maiores dificuldades. Portanto, as maiores dúvidas que ocorrem são referentes à escolha do instrumento apropriado para o problema em questão. Daí por que o trabalho com Modelagem Matemática possibilitará ao aluno, por meio da problematização, da investigação e do conhecimento sólido das características/propriedades das funções elementares, juntamente com estratégias eficientes, definir qual o modelo matemático que descreve a situação em questão,

opondo-se a um ensino em que as fórmulas (modelos) já vêm prontas e acabadas, como comumente ocorre com a maioria de nossos livros didáticos.

### 3.3 COMO FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA

Não pretendemos aqui, de forma alguma, mostrar a forma “correta” de fazer Modelagem em sala de aula. Pelo contrário, desejamos apresentar algumas maneiras, sendo resultados de convicções teóricas e experiências de alguns autores, de organizar e conduzir a Modelagem Matemática como um ambiente de ensino, ou seja, de que forma aquelas concepções de Modelagem Matemática – à luz da Educação Matemática – se materializa em sala de aula como um ambiente de ensino e aprendizagem e adotar uma como “pano de fundo” para desenvolvermos nossa atividade.

Barbosa (2009) fala em “casos” para se referir às diferentes formas de se trabalhar Modelagem Matemática em sala de aula. Esses “casos” mostram, na realidade, o nível de complexidade da atividade proposta e as “tarefas” do professor e do aluno no desenvolvimento e busca da solução do problema. No que se segue, iremos detalhar essa classificação:

a) **Caso 1:** o professor apresenta a situação-problema e seus dados qualitativos e quantitativos, ou seja, fornece as informações necessárias à sua resolução, cabendo aos alunos apenas o processo de investigação e sistematização da resolução, dessa forma não é preciso procurar dados fora da sala de aula. O autor acrescenta ainda que neste “caso” o desenvolvimento da atividade é mais previsível para o professor, pois ele já conhece antecipadamente o problema e certamente os dados necessários para sua resolução. No entanto, para os alunos a atividade ainda é desconhecida, o que favorece o surgimento de outras possibilidades de soluções. O mesmo sugere que esse tipo de atividade deve ser feita em grupos, cabendo ao professor sanar eventuais dúvidas, fazer algumas formalizações e coordenar as discussões sobre as possíveis soluções. Em resumo, ele divide o caso 1 em três momentos (BARBOSA, 2009, p.20-21):

- o convite – o professor apresenta a situação-problema e discute com os alunos;

- o trabalho em grupo – os alunos, organizados em grupos, buscam produzir uma resolução para a situação, tendo o acompanhamento do professor;
- a socialização – os grupos de alunos apresentam suas resoluções para discussão da turma;
- a formalização – o professor pode fazer formalizações (ou institucionalização) de estratégias ou de tópicos matemáticos.

b) **Caso 2:** o professor apresenta a situação-problema para os alunos investigarem, mas não disponibiliza os dados para a sua resolução. Assim, os alunos têm que sair da sala de aula e procurar informações quantitativas e qualitativas sobre o problema em questão para resolvê-lo. Neste caso, os alunos devem traçar a sua própria estratégia de solução, além do mais, esse tipo de atividade demanda mais tempo para sua execução e a participação dos alunos é mais efetiva e decisiva.

c) **Caso 3:** os alunos formulam problemas sobre temas de seu interesse, buscam e coletam informações necessárias a sua resolução. Neste caso, a atividade de Modelagem é feita de forma mais aberta, podendo ser desenvolvida em forma de pequenos projetos, já que temos um processo mais complexo e longo.

Percebemos que esses três casos mostram algumas possibilidades/formas de se trabalhar Modelagem Matemática na sala de aula. A escolha por um “caso” ou outro depende dos objetivos e experiência do professor, podendo optar por atividades mais simples e práticas (caso 1) que estão mais voltadas para a investigação e que podem ser feitas articuladas com a Resolução de Problemas ou até mesmo desenvolver atividades mais complexas e longas (caso 1 e 2). Em qualquer que seja o caso, alerta o autor, devem ser sugeridas atividades sobre situações que tenham referência na realidade. Notamos, ainda, que em todos os casos o professor tem um papel decisivo, atuando como um orientador das atividades e “revisor” dos processos, bem como fica muito claro a divisão de responsabilidades entre professor e alunos, como mostra o quadro a seguir:

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração do problema	Professor	Professor	Professor/alunos
Coleta de dados	Professor	Professor/alunos	Professor/alunos
Resolução	Professor/alunos	Professor/alunos	Professor/alunos

Quadro 1. Tarefas do professor e alunos no processo de Modelagem

Ainda nesse contexto, a escolha de uma atividade de Modelagem Matemática mais simples ou mais elaborada depende também do perfil dos alunos, das convicções do professor e das condições da escola. O preferível é que o professor comece com atividades mais simples de investigação, em forma de Resolução de Problemas, e depois passe a fazer tarefas mais elaboradas que demandem mais pesquisa e atuação dos alunos. De qualquer forma, como diz Biembengut (2009), a Modelagem Matemática como método de ensino pode ser feita de forma eficaz e simples da seguinte maneira: se expõe o assunto, delimita o problema, desenvolve o conteúdo, apresenta exemplos, resolve e interpreta o problema em questão.

Bassanezzi, por sua vez, admitindo que Modelagem Matemática é “simplesmente uma estratégia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais”(BASSANEZZI, 2012, p.9) , lista e explica algumas etapas a serem seguidas ao se trabalhar com essa estratégia de ensino na sala de aula. Inicialmente, o autor assegura que o primeiro passo é encontrar dados experimentais ou até mesmo algumas conclusões de especialistas sobre o tema escolhido e que esses dados geralmente são apresentados através de uma tabela de valores. Claro, como também lembra o autor, uma fonte primária para esse levantamento de dados é a pesquisa na Internet. A seguir, iremos explicitar e definir essas etapas segundo Bassanezzi:

a) **A escolha do tema:** neste caso, o professor deve fazer um levantamento sobre possíveis situações que podem ser “estudadas” para decidirem, juntamente com os alunos, sobre qual tema ou temas deverão ser trabalhados em sala de aula. A escolha de um “bom” tema deve levar em consideração a possibilidade de levantarmos vários questionamentos, indagações e, sem dúvida, avaliar a sua viabilidade, como por exemplo, se temos facilidade na obtenção de dados, se há

necessidade de pesquisas em campo, se há fontes bibliográficas seguras, etc. O autor ainda lembra que o fato da escolha do tema ser feita pelos os alunos, devidamente orientados pelos professores, é relevante no sentido de permitir uma participação mais ativa deles no processo de aprendizagem.

Enfim, o autor explica que o desenvolvimento do tema ou temas, metodologicamente, deve ser feito em pequenos grupos, assim como a “problematização” da situação estudada. Ademais “o professor não deve propor diretamente os problemas, mas deve atuar como monitor em cada grupo, sugerindo situações globais que devem ser incorporadas pelos alunos”(BASSANEZZI, 2012, p.11).

b) **Coleta de dados:** depois da escolha do tema, o próximo passo é colher informações, ou seja, procurar dados, sejam eles qualitativos ou quantitativos, sobre o assunto em questão. A coleta desses dados pode ser feita através de entrevistas e pesquisas realizadas conforme conceitos estatísticos, através de um levantamento bibliográfico, com o objetivo de encontrar dados publicados em livros e revistas especializadas e, se for o caso, através de experiências programadas e executadas pelos próprios alunos. A partir daí, esses dados devem ser organizados numa tabela e, se possível, podem ser representados graficamente, o que permite uma melhor “visualização” e interpretação dos mesmos.

c) **Análise dos dados e formulação de modelos:** através da análise atenta dos dados busca-se, nesta etapa, um modelo matemático que expresse a relação entre as variáveis. Neste caso, é preciso entender como ocorre a variação entre as variáveis envolvidas, seja ela simples (absoluta), variação média ou relativa ou até mesmo, dependendo do nível de ensino, variação instantânea (derivada), pois conhecendo os teoremas de caracterização(condições necessárias e suficientes) das principais funções elementares(afins, quadráticas, exponenciais, etc) é possível determinar qual a função(modelo) que modela tal situação. Pois, conforme o autor,

Quando temos uma variável  $y$  dependendo quantitativamente de uma outra variável independente  $x$  podemos, muitas vezes, construir o modelo matemático ou analisar esta dependência através das características variacionais destas variáveis, ou

seja, o modelo é formulado através das variações destas grandezas. Entretanto, o termo variação pode ter diferentes formulações em matemática e para cada situação podemos escolher o tipo mais apropriado para o modelo. (BASSANEZZI, 2012, p.31).

Chamamos a atenção para a necessidade de observarmos como ocorre a variação entre as variáveis envolvidas no problema por justamente ser esse o objetivo, num primeiro momento, de nossa atividade com a função exponencial. Explicando melhor: lançando mão das características/propriedades dessas funções, os alunos deverão encontrar o modelo matemático que “gerou” os dados e no caso específico, justificar porque que o modelo adequado para aquela situação é o modelo (função) exponencial e não outros.

d) **Validação:** neste momento, os valores obtidos através do modelo devem ser confrontados com os dados reais a fim de confirmar ou rejeitar tal modelo. O autor explica que um “bom modelo deve servir para explicar os resultados e tem capacidade de previsão e novos resultados ou relações insuspeitas” (BASSANEZZI, 2012, p.17). O mesmo atenta para o fato de que sempre é interessante buscar um modelo simples para o problema em questão, mesmo sabendo que algumas vezes esse modelo não é satisfatório e que é preciso reformulá-lo, o que é possível fazendo modificações ou “ajustes” nas variáveis envolvidas. Daí que o autor defende que o trabalho com Modelagem Matemática no ensino pode ser feito inicialmente com problemas que resultem na formulação de modelos simples, levando em consideração os objetivos dessa atividade que é de promover uma aprendizagem significativa:

Ainda, no processo de modelagem, a escolha do instrumental matemático é fundamental principalmente em se tratando de promover o conhecimento matemático. Assim, num ambiente de estudo do ensino básico um modelo simples, mesmo que não reproduza perfeitamente os dados experimentais, pode ser bastante eficiente no contexto educacional. Um modelo

matemático é bom quando satisfaz algum objetivo e quando o usuário o considera como tal. (BASSANEZZI, 2012, p.17).

Desse modo, nesta etapa é sempre recomendável construir tabelas e gráficos a partir do modelo encontrado para confrontar com os dados experimentais e proceder a validação ou não desse modelo ou até mesmo fazer modificações no mesmo.

Finalmente, faz-se necessário afirmar que os nossos estudos no sentido de sugerir atividades com a Função Exponencial num ambiente de Modelagem Matemática, temática em questão, adotam como “tipo” de atividades àquelas apontadas por Barbosa (2009) como “caso 1”, pela própria natureza e objetivos desse trabalho. Claro, essa forma mais simples de “fazer Modelagem” comporta todos os procedimentos e métodos (etapas) sugeridos por Bassanezzi (2012), além do mais, mantém no seu esboço os pressupostos teóricos e filosóficos, mesmo em menor escala, que orientam um ensino através da Modelagem Matemática.

### 3.4 ALGUNS OBSTÁCULOS APONTADOS PARA SE FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA

Não há dúvida que o maior obstáculo ao se trabalhar ou desenvolver as primeiras atividades com Modelagem Matemática em sala de aula ou com qualquer outra metodologia é o desconhecimento por parte dos professores dessas novas estratégias de ensino. Há uma natural resistência em mudar nossas convicções e adotar um caminho “novo”, principalmente quando achamos que a nossa “forma” está dando certo e não conhecemos profundamente o “outro” caminho. Com a Matemática não é diferente.

O que nos deixa perplexo é que apesar dos apelos insistentes de educadores matemáticos, de especialistas e de professores renomados de instituições repetidas, como a SBM, IMPA, etc, alguns de nossos professores mantêm-se indiferentes, inflexíveis, e ainda continuam ensinando apenas “fórmulas”, “macetes”, dando “arme” e “efetue” nas aulas de Matemática. No entanto, concordando com Barbosa (2009), além de integrarmos a Modelagem Matemática às nossas atividades, acreditamos que outros métodos de ensino, como resolução de

problemas, por exemplo, e até mesmo as aulas expositivas, devem ser mantidos e redimensionados.

Acreditamos que essa inércia diante de problemas tão graves no ensino de Matemática se dá pela ausência de formação continuada, pela falta de contato com revistas especializadas, dificultando o conhecimento e o contato desses profissionais com novas metodologias de ensino. Não queremos de forma nenhuma defender o apego a “modismos pedagógicos”, pelo contrário, combatemos a mudança pela simples mudança, como se existisse uma forma fácil de fazer Matemática, como é colocado por alguns “especialistas”. De fato, muitas vezes a interpretação equivocada de algumas tendências para o ensino de Matemática as distorce e se torna um empecilho para a sua adoção. Aqui, compartilhamos e defendemos as ideias e convicções de pessoas que conhecem verdadeiramente a Matemática em todos os seus aspectos, que sabem na prática o que é “fazer Matemática”.

Especificamente em relação ao uso da Modelagem Matemática em sala de aula, alguns estudiosos, a despeito dos diversos argumentos a seu favor, apontam alguns obstáculos para a sua concretização. Barbosa (2009) acredita que a pressão para cumprir programas da disciplina, a “desconfiança” por partes dos pais, supervisores, professores e alunos ao adotar “inovações” em sala de aula, são barreiras, num primeiro momento, para a sua implantação.

Bassanezzi (1999) também apresenta os principais obstáculos que são assinalados para se trabalhar a Modelagem Matemática, principalmente quando se considera a estrutura curricular de nossas escolas:

- Os cursos regulares possuem programas já definidos e que devem ser cumpridos integralmente e o processo de Modelagem Matemática pode tomar muito tempo;
- O uso de Modelagem quebra a rotina tradicional da aula de Matemática e aí os alunos se sentem impotentes, incapazes de desenvolver e se envolver com aulas desse tipo;
- Os professores não se sentem seguros em desenvolver Modelagem em suas aulas por desconhecimento desse processo ou por medo de serem colocados

em situações constrangedoras por não terem um conhecimento mais amplo sobre as aplicações da Matemática em outras áreas;

- Alguns professores ainda acreditam que essa nova forma de trabalhar a Matemática pode tirar seu aspecto de ciência exata e imutável, que não deve ter nenhuma relação com o contexto do aluno.

Barbosa (1999), ao realizar estudos com um grupo de professores, conclui que estes admitem haver dificuldades para a implementação da Modelagem Matemática em sala de aula e resume os obstáculos encontrados nas três esferas, alunos, escola e professores:

- **Os alunos:** a falta de motivação para aprendizagem por parte dos alunos, bem como dificuldades e resistência em pensar e raciocinar são impedimentos para se trabalhar com novas formas de ensino como a Modelagem Matemática. O autor acredita que essa visão é normal devido à tradição escolar preponderante em que o aluno sempre foi tido como agente passivo no processo de aprendizagem:

Eles estão acostumados a ver o professor como transmissor de conhecimentos e, portanto, têm uma postura passiva em relação à aula. Esperam receber explicações e participar apenas fazendo perguntas ou resolvendo exercícios. Quando o trabalho coloca o centro do processo ensino-aprendizagem nos alunos, e quando os resultados dependem da ação deles, a aula passa a caminhar em ritmo lento, pois eles não estão acostumados a agir e nem sempre sabem o que fazer, ou por onde começar. (FRANCHI, 1993, p.102 apud BARBOSA, 1999, p.18).

- **A escola:** o currículo, os conteúdos, a realidade das escolas públicas, a necessidade de se preparar para o vestibular e o tempo são impedimentos impostos pelas instituições escolares para a realização de atividades de Modelagem Matemática.

- **Os professores:** a falta de preparação/qualificação por parte dos professores e a ausência de uma formação continuada que pudesse “ensinar” sobre esse método são barreiras que impedem ou dificultam a utilização da Modelagem Matemática em sala de aula, por não se sentirem seguros e preparados para desenvolver tal atividade. Segundo o autor, os professores acolhem muito bem a ideia da Modelagem Matemática apesar de reconhecerem algumas dificuldades e terem receios normais ao fazer alguma mudança:

As evidências apontam para o sentido de que os professores sofrem um tensionamento entre aderir a uma abordagem interdisciplinar, conectada com a realidade e tendo a pesquisa como elemento subjacente, e por outro lado, prezar o planejamento linear da atividade escolar e pelos conteúdos matemáticos. (BARBOSA, 1999, p.21).

Seguramente, apesar de existirem algumas dificuldades, reconhecidas por professores e especialistas, para a implementação da Modelagem Matemática em sala de aula, as vantagens superam em muitos esses obstáculos. Por isso devemos buscar meios para minimizar esses pequenos entraves, muitos deles já superados, e insistir na busca de novas metodologias que façam frente às novas demandas. Exigências justas de se tornar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática mais eficaz, que tenha como objetivo primordial o desenvolvimento pleno do aluno, a capacidade de apreender e aplicar os conceitos e procedimentos matemáticos nos mais diversos contextos, sejam eles de ordem prática ou não. Dessa forma, acreditamos que um trabalho bem planejado com atividades de Modelagem Matemática, acompanhados de uma boa “exposição” de conceitos, articulado com a Resolução de Problemas, nos possibilitará darmos um passo muito importante no sentido de melhorar significativamente o rendimento escolar de nossos alunos.

## 4 AS FUNÇÕES

Dentre os conceitos elementares e fundamentais da Matemática, não há dúvida que as funções ocupam um lugar de destaque pela sua presença como “âncora” para a construção de outros conceitos mais complexos (Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo) e pelas suas diversas “conexões” com outras áreas do conhecimento. Afinal de contas, muitas situações do cotidiano como fenômenos físicos, biológicos, econômicos e químicos, entre outros, são, muitas vezes, modelados e expressos através de funções matemáticas. Na realidade, alguns pesquisadores acreditam que foi a busca, pelos filósofos e cientistas, por métodos que permitissem a compreensão e o estudo dos fenômenos que os cercavam – até então a “realidade” era explicada através de interpretações religiosas, mitos – que motivou e deu origem ao conceito de função.

No entanto, muitos professores e estudiosos têm feito críticas quanto à forma como tem sido abordado, tradicionalmente, em sala de aula esse tópico tão importante da Matemática. Lima (1999), por exemplo, entende que a definição de função como um conjunto de pares ordenados que é dada na maioria dos livros didáticos brasileiros não contribui para compreensão desse conceito, pelo contrário, cria obstáculos didáticos para professores e alunos durante o processo de ensino e aprendizagem das funções.

Portanto, faremos neste capítulo um breve histórico sobre a origem e a evolução do conceito de função, apresentaremos argumentos que justifiquem a presença desse tema no currículo de Matemática, definiremos, finalmente, a função exponencial, bem como pretendemos fazer uma breve análise dos livros didáticos quanto à abordagem das funções exponenciais.

### 4.1 BREVE HISTÓRICO SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO

A ideia intuitiva de função, que é encarada como uma relação de dependência entre quantidades, aparece, conforme alguns pesquisadores, desde quando o homem teve a necessidade de “contar” fazendo associações entre objetos (pedras) e os animais de seus rebanhos (ovelhas), a fim de conferir o seu rebanho ao voltar do pasto. Desta forma, podemos afirmar que as ideias mais simples de função estão

relacionadas ao processo de contagem. Chaves e Carvalho deixam mais claro esse entendimento ao afirmar que

[...] todas as relações criadas pelas civilizações antigas para a invenção do número, necessidade primeira da matematização, já constituía o 'instinto de funcionalidade' citado anteriormente. Quando associaram os dedos às quantidades, e quando viram que estes já não eram mais suficientes e buscaram outros elementos para contar/enumerar estavam vivenciando a interdependência de variáveis que fluíam para a formação de sistemas de numeração cada vez mais adequados/práticos. (CHAVES; CARVALHO, 2004, p.3).

Ainda nessa mesma direção, podemos também perceber as primeiras ideias de função nas tabelas que os babilônios construíram em argilas, onde para cada valor na primeira coluna correspondia um valor na segunda coluna, determinado, de acordo com alguns historiadores, pela multiplicação do número da primeira coluna por um valor constante. Também os egípcios construíram tabelas que apresentavam correspondências que, segundo Boyer (1989), retratavam resultados de investigações de natureza empírica, ou até mesmo, pequenas generalizações de casos mais simples, via o método da indução, para casos mais complexos que nos reportam ao conceito intuitivo de função. Dessa forma, essas tabelas seriam as primeiras representações “gráficas” das funções.

Cabe ressaltar, no entanto, que não temos nenhuma garantia de que esses povos reconheçam ou percebam a ideia de dependência funcional ou que tinham a intenção de retratar tal relação através dessas tabelas, até porque esse conceito não tinha ainda sido formalizado.

Os pitagóricos, ao fazerem experimentos com instrumentos de cordas, perceberam a relação existente entre o comprimento da corda que era tensionada e posta a vibrar com a harmonia (afinação) da nota obtida. Assim, podemos reconhecer uma relação funcional entre os comprimentos das cordas e o som correspondente. Na realidade, esses estudos mostraram que existe uma relação de independência dos números inteiros com a harmonia dos sons.

Mas foi, sobretudo, com Ptolomeu (85 -165 d.C) que aparecem as primeiras noções do que hoje chamamos de funções trigonométricas. Na tentativa de encontrar modelos que descrevessem como astros e planetas se moviam pelo céu, astrônomos gregos desenvolveram tabelas de cálculo de cordas (segmentos determinados por um ângulo central  $\beta$  em um círculo de raio fixo) que permitiam calcular as posições de astros e planetas, relacionando ângulos com segmentos (cordas). Ptolomeu, em sua obra *Almagesto*, desenvolve uma verdadeira “teoria” das cordas, demonstrando teoremas e explicando como construir tabelas sobre as cordas, o que seria equivalente as atuais tabelas de seno. Os estudos sobre cordas permitiram o desenvolvimento do conceito de seno, criando as bases para a trigonometria. Essas ideias foram, mais tarde, incorporadas por matemáticos árabes e europeus, entre outros, contribuindo para o desenvolvimento do conceito de funções trigonométricas.

Vale destacar que, mesmo encontrando situações que indicam a ideia de dependência, esses povos e matemáticos não deram a definição de função, nem mesmo fizeram alguma referência a palavra função em seus estudos. O que se observa, conforme alguns estudiosos, é que essas pessoas apresentaram em seus trabalhos e feitos um certo “instinto funcional”.

Encontramos em Nicole Oresme (1323-1382) as primeiras ideias do que seria hoje a representação gráfica de uma função, antecipando de certa forma alguns aspectos da Geometria Analítica. Na realidade, Oresme pretendia traçar figuras que representassem a maneira pela qual algumas “coisas” variavam, mas sem ter nenhuma preocupação com a quantidade e sim com a qualidade dessa variação, ou seja, pretendia entender como as mudanças ocorriam. Para isso, ele apresentou o seguinte método para traçar o gráfico da velocidade versus o tempo do movimento de um corpo que se move com aceleração constante: marcou ao longo de uma reta horizontal pontos que representavam os tempos (longitudes) e representou as velocidades em cada instante por segmentos de retas (latitudes) perpendiculares à reta de longitudes em cada tempo. Notamos, dessa forma, que os termos longitude e latitude correspondiam, respectivamente, ao que chamamos hoje de abscissa e ordenada.

Mas foi com Galileu Galilei (1564-1642), ao procurar compreender e explicar os fenômenos naturais por meio da observação e da experiência, inaugurando uma nova fase em que os cientistas procuravam explicar os fenômenos de uma forma

mais racional, científica e menos baseada em explicações religiosas, como era comum até então, que foi dado um grande passo no sentido de quantificar as “formas” variáveis, ao descrever quantitativamente um fenômeno através da Matemática, ou seja, as “associações de causa e efeito são expressas de forma quantitativa, verificáveis e verificadas (OLIVEIRA, 1997, p.17).

Galileu tinha interesse no estudo dos movimentos, analisando a velocidade, aceleração e distância percorrida e, em particular, desenvolveu estudos sobre a queda livre dos corpos. Por isso, os pesquisadores acreditam que o estudo do movimento deu origem ao conceito mais amplo de função, ao se trabalhar explicitamente a relação entre grandezas variáveis. A esse respeito, Oliveira traz algumas ponderações e conclusões:

Ele procurou reunir os diferentes conceitos com auxílio das leis inspiradas na experiência e observação. Efetuou muitas medidas, retomou numerosas vezes suas experiências a fim de obter resultados mais exatos e 'verdadeiros' possíveis. Esta insistência em querer estudar os movimentos de forma quantitativa, por intermédio da experimentação, contribuiu grandemente para a evolução da noção de função: Lidou de forma funcional com as causas e efeitos, e esta necessidade é essencial à concepção de variável dependente. (OLIVEIRA, 1997, p.17).

René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) são considerados os inventores da Geometria Analítica, muito embora o primeiro tenha recebido muito mais crédito por essa invenção. Essa nova forma de abordar a geometria tradicional, ou seja, essa associação da Álgebra à Geometria permitiu que se representasse graficamente a relação entre quantidades desconhecidas (FERMAT) e variáveis, criando as primeiras ideias de coordenadas espaciais e introduzindo a representação da relação de dependência entre quantidades variáveis através de expressões analíticas. Dessa forma, pioneiramente, estabeleceram que retas, planos, figuras planas e cônicas poderiam ser expressas por equações algébricas que mantinham alguma dependência entre as variáveis envolvidas.

Assim, não restam dúvidas que a possibilidade de articular as formas planas e espaciais com equações, acompanhadas da introdução de notações inovadoras para a época, deram um grande impulso na formalização do conceito de função, lançando, posteriormente, as bases para a criação e sistematização do Cálculo Integral e Diferencial. Nesse contexto, Berlinghoff e Gouvêa (2010) consideram a criação da Geometria Analítica como um dos principais progressos matemáticos, em virtude das diversas aplicações que ela possibilitou, não obstante a aparente simplicidade que permeia essa nova visão de encarar a Geometria, que podemos resumir como “[...] a ideia verdadeiramente simples de dar a cada ponto do espaço um endereço numérico, de modo que possamos descrever formas por números” (idem, 2010, p.178).

Com o intuito de usar a Matemática para entender o mundo, muitos matemáticos desenvolveram temas relacionados à astronomia, óptica e navegação, entre outros, vislumbrando a possibilidade de explicação de alguns fenômenos. Isaac Newton (1642-1727) foi um dos matemáticos que empenharam esforços no sentido de entender alguns fatos, particularmente, sobre o movimento. Algumas questões foram levantadas sobre a infinita divisibilidade do tempo, como, por exemplo, como avaliar a velocidade de um objeto em que sua velocidade varia constantemente. É possível determinar a velocidade desse objeto num dado instante? Surgiram ainda questões sobre como determinar tangentes a curvas e calcular áreas de figuras. Sobre essa última questão era necessário encontrar um método geral para fazer tal “cálculo”. Foi a busca desse método geral de fazer alguns “cálculos” que Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) – apoiados em estudos pioneiros de outros matemáticos importantes como Arquimedes (287-212 a.C.) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647) – desenvolveram, de forma independente, as bases do Cálculo, contribuindo de forma decisiva para o desenvolvimento e aprimoramento do conceito de função.

Nesse contexto, muitos pesquisadores acreditam que foi Isaac Newton que primeiro citou explicitamente o conceito de função, ao saber exprimir funções em termos de séries infinitas. Foi ele também que pela primeira vez referências a taxas de variação (“fluxos”) entre variáveis (“fluentes”) e usou termos específicos, como “relatia quantias” para variável dependente e “genita” como a quantidade obtida a partir de outras, usando apenas as quatro operações fundamentais.

Leibnz, por sua vez, desenvolveu o seu “cálculo” usando a ideia de quantidades infinitamente pequenas ou “infinitésimos”, resultando no que hoje chamamos de derivadas. Em seus estudos, ele citou a palavra função, mas, conforme alguns pesquisadores, apenas para indicar quantidades que variavam ao longo de uma curva (BOTELHO; REZENDE, [s.d]), ou seja, a noção de função tinha apenas um significado geométrico. Leibnz ainda contribuiu com a criação de notações inovadoras para o Cálculo. Ademais, estabeleceu e definiu alguns termos intrínsecos ao conceito de função, como variável, constante e parâmetro.

Jean Bernoulli (1667-1748), membro de uma família que produziu grandes matemáticos— a família “Bernoulli” – parece ter dado a primeira definição explícita de função como uma expressão algébrica ao considerar uma função de uma certa variável como sendo uma expressão composta dessa variável e de algumas constantes. Assim, Jean Bernoulli, ao desenvolver estudos no sentido de abordar as curvas por meios algébricos, traz significativas contribuições ao “oferecer” uma boa aproximação da definição atual de função como uma “regra” que diz como associar grandezas e testar algumas notações para função, entre elas a notação “fx”, que sabidamente não foi consagrada.

Leonhard Euler (1707-1783), considerado por muitos um dos maiores matemáticos de todos os tempos, aprimorou, apoiado no seu ex-mestre Jean Bernoulli, o conceito de função, deixando-o mais claro ao trocar a palavra “quantidade” por “expressão analítica”. Dessa forma, ele considerou uma função de uma quantidade variável como uma expressão analítica composta, de qualquer maneira, desta quantidade e de números ou algumas constantes, ou seja, definiu função como uma fórmula, bem próximo do conceito atual. Na realidade, Euler inaugurou, a partir do seu livro *Introductio in analysin infinitorum*, uma fase muito importante na Análise em que o conceito de função passa a ter um importância central. Além disso, Euler criou a notação “f(x)” que hoje usamos para denotar “função” (na realidade, quando nos referimos à função deveríamos dizer apenas “f”) e classificou as funções em contínuas e descontínuas, muito embora a noção de continuidade, no início, se referia a “qualidade” (propriedade) de que algumas curvas tinham.

Finalmente, encontramos nos estudos de Peter Gustav Lejune Dirichet (1805-1859) uma definição que mais se aproxima da definição atual de função, muito embora o conceito de função não comportava ainda a noção de conjuntos: “Se uma

variável  $y$  está relacionada com uma variável  $x$  de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a  $x$ , existe uma regra segundo a qual um valor único de  $y$  fica determinado, então diz-se que  $y$  é função da variável independente  $x$ ". (BOYER, 1989, p.405).

Foi Dirichlet que considerou, pela primeira vez, o aspecto arbitrário das funções, ou seja, que a relação funcional entre as variáveis poderia ser expressa de forma arbitrária, sem que, necessariamente, a regra de correspondência fosse dada através de uma "fórmula" única ou que representasse alguma relação qualitativa entre as variáveis envolvidas. É tanto que ele definiu e propôs a seguinte função para ilustrar a sua concepção: faça  $f(x) = c$ , se  $x$  é racional, e quando  $x$  é irracional, tome  $f(x) = d$ , com  $c \neq d$ . Essa função é, geralmente, chamada de função de Dirichlet e, dentre outras curiosidades, ela se destaca por ser descontínua em todo elemento do seu domínio.

Mas, é devido a um grupo de matemáticos franceses, que usavam o pseudônimo Bourbaki, interessados em reformular e 'modernizar' a matemática escolar "(EVES, p.690), dando origem a chamada Matemática Moderna, a definição atual de função, usada até hoje em muitos livros didáticos e por professores:

Sejam  $E$  e  $F$  dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável  $x$  de  $E$  e uma variável  $y$  de  $F$  é dita uma relação funcional em  $y$ , ou relação funcional de  $E$  em  $F$ , se qualquer que seja  $x \in E$ , existe um e somente um elemento  $y \in F$  que esteja associado a  $x$  na relação considerada.

Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento  $x \in E$  o elemento  $y \in F$  que se encontra ligado a  $x$  na relação dada; diz-se que  $y$  é o valor da função para o elemento  $x$ , e que a função está determinada pela relação funcional considerada [...] (MENDES, 1994, p. 53).

Enfim, podemos notar através desse breve "passeio" pela origem e a evolução do conceito de função; que se confunde com a própria história da Matemática; que a suas primeiras tentativas de definição se pautaram, sobretudo,

por questões relacionadas ao movimento de corpos, análise de curvas e relações entre grandezas “variáveis”, num contexto de rupturas de paradigmas, envolto por questões de cunho prático e instigado, geralmente, por necessidades e situações demandadas por interesses científicos do momento.

Daí por que acreditamos que o professor deve levar em consideração esses fatos históricos e se conscientizar de que o ensino da função não pode se resumir a uma “expressão analítica”, deixando de fora aspectos tão importantes como a relação entre quantidades variáveis, dando um caráter mais dinâmico a esse tópico tão importante da Matemática. Na realidade, ao fazermos isso, estaríamos fazendo jus a própria origem e motivação para a criação do conceito de função que teve em sua gênese o entendimento das relações entre quantidades, principalmente, sobre como ocorria a razão entre essas variações, nos dando “pistas” e argumentos de que o ensino de funções deve abordar, em maior escala, a “qualidade” dessas razões.

#### 4.2 PORQUE ESTUDAR FUNÇÃO

Sabidamente, as funções são um dos tópicos mais elementares e fundamentais da Matemática. Sua utilização se espalha pelas mais diversas áreas do conhecimento, em virtude de sua aplicação no estudo de fenômenos físicos, biológicos, químicos e econômicos, entre outros, além de ser um conceito essencial em áreas mais complexas, como Cálculo, Análise e Álgebra Linear.

Aliado a todos esses aspectos, atualmente o ensino e aprendizagem das funções assumem cada vez mais importância vital, devido as suas diversas formas de representações, como a gráfica, a representação por tabelas, uma vez que meios de comunicação, institutos de pesquisas e mídias em geral fazem uso frequente da linguagem de funções nos noticiários e jornais, bem como para divulgar resultados e simplificar informações. Assim, é necessário dar destaque especial às diversas possibilidades de aplicações do conceito de função em situações do cotidiano do aluno, pois:

A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento

utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. (BRASIL, 2002, p.121).

Assim, a não abordagem em sala de aula desse ferramental tão importante da Matemática pode, em última análise, privar cidadãos de exercer sua cidadania por não interpretar corretamente algumas informações, que muitas vezes tem impactos consideráveis em suas vidas, como, por exemplo, a sua decisão de voto ou a efetivação de uma transação financeira podem ser “contaminadas” e prejudicadas por interpretações equivocadas de pesquisas e informações divulgadas através de gráficos e tabelas.

Como visto, pela sua própria essência, pelas motivações históricas que orientaram a construção do seu conceito, as funções são, sem sombra de dúvida, um dos conceitos da Matemática que mais estão presentes nas aplicações, ou seja, que mais oferecem contextos para a realização de atividades de ensino e aprendizagem que priorizam situações contextualizadas; criando as condições favoráveis a um ambiente de Resolução de Problemas. Isso porque, na sua origem histórica, ela teve papel decisivo no estudo da variação entre grandezas e a busca de regularidades, motivados por interesses de cientistas e estudiosos em explicar fenômenos naturais. Assim, neste particular, o ensino das funções se apresenta como um “instrumento para o estudo de fenômenos e situações das outras ciências, constituindo-se um meio de descrição, explicação, previsão [...]” (BARRETO, 2008, p.5). Dessa forma, é fácil reconhecer que as funções se tornam o principal ingrediente num trabalho escolar com a Modelagem Matemática, que é o pano de fundo para o desenvolvimento de nossa atividade.

Nessa mesma direção, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2002) situam o estudo das funções no tema Álgebra e destaca a sua importância dentro do currículo escolar de Matemática, pois segundo os autores dessas orientações:

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para

expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, interpretações de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002, p.121).

O mesmo documento ainda orienta que situações contextualizadas que descrevem dependência entre grandezas, que sejam expressas analiticamente ou através de gráficos – pela sua já destacada relevância no entendimento de situações do cotidiano do aluno devem ser priorizadas no trabalho com funções e deve-se dar uma importância relativa à linguagem dos conjuntos como condição necessária para o ensino e aprendizagem de funções. Neste sentido, a forma como muitos autores de livros didáticos definem função como casos particulares de relação entre conjuntos, ou seja, como um conjunto de pares ordenados, deve ser repensada por ser esse caminho desnecessário e não favorecer o entendimento do aluno, uma vez que essa linguagem de conjuntos é, posteriormente, abandonada no estudo dos diferentes tipos de funções.

Outros autores já manifestaram preocupações semelhantes quanto ao abuso de “formalidades” no ensino de funções. Ávila (1985; 2010) e Lima (1999) compartilham da mesma opinião ao afirmarem que a definição de função como um conjunto de pares ordenados é uma prática que não contribui para o entendimento da noção de função, pelo contrário, torna menos claro para o aluno os aspectos importantes envolvidos no seu conceito, como a ideia de dependência, uma vez que essa forma de apresentar o seu conceito não expressa verdadeiramente o que “os usuários da Matemática e os próprios matemáticos costumam pensar numa função de modo dinâmico, em contraste com essa concepção estática” (LIMA, 1999, p.3).

Por outro lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (1999) salientam a importância das funções como um campo fértil para promover um ensino e aprendizagem de forma interdisciplinar, valorizando as diversas conexões desse tema com outros dentro da própria Matemática ou com outras áreas do saber.

Neste caso, se faz necessário que o aluno entenda os diversos contextos em que aparecem a ideia de função, bem como as reconheça como uns dos

instrumentos primordiais na modelagem de problemas de seu cotidiano. Reconhecer a relação existente entre as funções e outros campos como a Trigonometria, a Geometria Analítica e algumas sequências, como as Progressões Aritméticas e Geométricas, pode justificar e dar mais sentido para o aluno o estudo desses temas que, tradicionalmente, são explorados apenas sob seus aspectos algébricos. Por isso,

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problemas de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1999, p.255-256).

Finalmente, considerando a essencialidade do ensino de funções, por todas as suas importantes relações internas e conexões indispensáveis com outras áreas, esperamos que o professor crie situações de ensino que privilegiem seus aspectos mais importantes, sobretudo aqueles que dizem respeito a relação de dependência entre as variáveis e ao estudo das razões entre as variações das grandezas envolvidas, por ser estas as noções que de fato são exploradas nas situações que demandam, de alguma forma, o uso do conceito de função. Daí por que dar um destaque maior a sua relação com a linguagem de conjuntos, reduzindo o seu ensino/estudo a diagramas, tabelas e fórmulas, como comumente ocorre, é uma perda de tempo e certamente contribui para uma aprendizagem sem significados por parte dos alunos e impede, sobremaneira, o “reconhecimento” de sua utilização na resolução de problemas do seu cotidiano.

### 4.3 SOBRE A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Como já relatado, muitos livros didáticos e, como corolário, os professores, geralmente definem função como um conjunto de pares ordenados e como já foi objetado por alguns pesquisadores e professores, essa forma não é a mais adequada, uma vez que a maioria das funções representam, via de regra, certas regularidades e apresentam um caráter dinâmico, em contraste com essa visão estática (LIMA, 1999). Assim, faz-se necessário explicitar a definição de função adotada neste trabalho e que acreditamos ser a mais objetiva e adequada para o Ensino Médio. Entendemos que antes de definir formalmente uma função é importante explorar o seu conceito intuitivamente, pois, neste caso, é possível abordar situações do cotidiano do aluno que os remete a ideia de dependência.

Posteriormente, já com um certo grau de amadurecimento, podemos seguir o caminho indicado por Lima et al.(2001, p.108), que sustentam que para definição de função é suficiente termos apenas “dois conjuntos A e B e uma regra que permita associar a cada elemento de A um único elemento de B”. De forma mais detalhada, “dados os conjuntos X, Y, uma função  $f: X \rightarrow Y$  [...] é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento  $x \in X$  um elemento  $y=f(x) \in Y$  [...]” (LIMA et al., 2006, p.38).

Cabe destacar que inerente ao conceito de função temos as noções de domínio, contradomínio e a lei de correspondência. Na realidade, esses elementos “materializam” a própria função e trabalhar em sala de aula questões do tipo “qual o domínio da função”, como aparecem na maioria dos livros didáticos brasileiros, não tem sentido, já que a explicitação a priori desses termos é condição necessária para a existência da função. Da mesma forma, é importante observar que a natureza da regra que define a função é inteiramente arbitrária, exigindo-se apenas que essa regra não tenha exceções e ambigüidades (LIMA et al.,2006) . Devemos ainda notar que o professor deve abordar em sala de aula as diversas formas de representação de uma função: verbalmente, algebricamente, graficamente ou através de tabelas, permitindo um entendimento mais amplo por parte do aluno do seu conceito. Isto porque, conforme Lima et al.(2001), as funções que aparecem na Matemática, nas Ciências em geral e no dia a dia da vida real se apresentam mediante fórmulas, tabelas e gráficos.

### 4.3.1 A Função Exponencial

As funções exponenciais, assim como as afins e as quadráticas, são as que mais aparecem na resolução de problemas do cotidiano, ou seja, são os modelos matemáticos mais utilizados na modelação de certos fenômenos. Elas, juntamente com as logarítmicas, “são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras”.(BRASIL, 2002, p.121).

Segundo Lima et al.(2006, p.178), sendo  $a$  um número real positivo e diferente de 1, a função exponencial de base  $a$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , dada por  $f(x) = a^x$ , deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ :

1.  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2.  $a^1 = a$
3.  $x < y \Rightarrow a^x < a^y$  quando  $a > 1$  e  $x < y \Rightarrow a^y < a^x$  quando  $0 < a < 1$ .

Em relação às propriedades características dessas funções, Lima et al.(2006, p.183) estabelecem o seguinte teorema (a sua demonstração pode ser encontrada nas páginas 183,184):

**Teorema** (Caracterização da função exponencial): Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função crescente ou decrescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1)  $f(nx) = f(x)^n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (2)  $f(x) = a^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $a = f(1)$ ;
- (3)  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

De forma mais geral, é comum chamar as funções  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  do *tipo exponencial* quando se tem  $g(x) = ba^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , com  $a$  e  $b$  constantes. Sendo que a propriedade 3, citada anteriormente, ainda continua válida para esse tipo de função.

Na realidade, quando se utiliza qualquer tipo de função na resolução de problemas reais ou que tenham alguma relação com a realidade, o mais importante que se deve considerar é entender por que o modelo matemático adequado para uma dada situação é, por exemplo, a função afim e não a exponencial. Nesse

contexto, a opção por um modelo funcional passa, inevitavelmente, pelo reconhecimento das características das funções, fato que, geralmente, é desconsiderado por muitos professores.

Assim, fica evidente que resumir o ensino de funções, em particular, das exponenciais, em manipulações algébricas, como ocorre tradicionalmente, não cria as condições necessárias para que os alunos possam aplicar esses conceitos de forma consciente e produtiva na modelagem de problemas diversos, uma vez que “as dúvidas que possam surgir acontecem geralmente, antes, na escolha do instrumento matemático apropriado para o problema que se estuda”. (LIMA et al., 2006, p.183).

Por isso, devemos, em sala de aula, designar um momento – talvez o mais importante – para explorar as propriedades que caracterizam as funções, visto que essas características definem plenamente o tipo de função, o que acaba caracterizando também, como consequência, as situações em que um dado modelo se aplica. A esse respeito, Lima (1999, p.6) se pronuncia de forma enfática:

[...] o aluno do ensino médio, diante de um certo problema proposto, não sabe se deverá modelar a situação com uma função afim, quadrática ou exponencial. (Problemas da vida não aparecem acompanhados de fórmulas!) É preciso que ele conheça as propriedades dessas funções a fim de tomar sua decisão.

Em relação às funções do *tipo exponencial*, Lima et al(2006) apresentam o que eles chamam de “Teoremas de caracterização”, (idem, p.185-186):

**Teorema 1:** Seja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função crescente ou decrescente tal que, para  $x, h \in \mathbb{R}$ , o acréscimo relativo  $[g(x+h)-g(x)]/g(x)$  (ou, equivalentemente, a razão  $g(x+h)/g(x)$ ) dependa apenas de  $h$ , mas não de  $x$ . Então, se  $b = g(0)$  e  $a = g(1)/g(0)$ , tem-se que  $g(x) = ba^x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** A hipótese feita equivale a supor que a função  $\varphi(h) = g(x+h)/g(x)$  independe de  $x$ . Substituindo, se necessário,  $g(x)$  por  $f(x) = g(x)/b$ , onde  $b = g(0)$ ,  $f$  continua crescente ou decrescente, com  $f(x+h)/f(x)$  independente de  $x$  e, agora,

com  $f(0) = 1$ . Então, fazendo  $x = 0$  na relação  $\varphi(h) = f(x+h)/f(x)$ , obtemos  $\varphi(h) = f(h)$  para todo  $h \in \mathbb{R}$ . Observamos que a função monótona injetiva  $f$  (crescente ou decrescente) cumpre  $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$ , ou seja,  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Daí, resulta do teorema anterior que  $f(x) = a^x$ , logo  $g(x) = bf(x) = ba^x$ .

Chama a atenção, em especial, nessa caracterização da função do *tipo exponencial* o fato de que  $g(x+h)/g(x) = a^h$ , isto é, o valor funcional em  $(x+h)$  é proporcional à quantidade existente no início do intervalo  $x$ . Ademais, essa é uma característica exclusiva dessas funções, ou seja, funções crescentes ou decrescentes com esta propriedade são obrigatoriamente da forma  $f(x) = ba^x$ .

**Teorema 2:** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função crescente ou decrescente que transforma toda progressão aritmética  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , numa progressão geométrica  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ , onde  $y_n = f(x_n)$ . Se pusermos  $b = f(0)$  e  $a = f(1)/f(0)$  teremos  $f(x) = ba^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Seja  $b = f(0)$ . A função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definida por  $g(x) = f(x)/b$  continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se  $g(0) = 1$ . Assim, dado  $x \in \mathbb{R}$  qualquer, a sequência  $x; 0; -x$  é uma progressão aritmética, logo resulta que  $g(x); 1; g(-x)$  é uma progressão geométrica de razão  $g(-x)$ . Daí,  $g(-x) = 1/g(x)$ . Considere agora  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in \mathbb{R}$ . A sequência  $0; x; 2x; \dots; nx$  é uma progressão aritmética, logo  $1; g(x); g(2x); \dots; g(nx)$  é uma progressão geométrica, cuja razão é  $g(x)$ . Então seu  $(n+1)$ -ésimo termo é  $g(nx) = g(x)^n$ . Se  $-n$  é um inteiro negativo então  $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$ . Dessa forma, vale  $g(nx) = g(x)^n$  para quaisquer  $n \in \mathbb{Z}$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Segue-se do Teorema de Caracterização acima que, pondo  $a = g(1) = f(1)/f(0)$ , tem-se  $g(x) = a^x$ , ou seja,  $f(x) = ba^x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Este último teorema, além de ser de simples entendimento, faz uma importante conexão das funções com as sequências, tão desejada e sugerida por pesquisadores e educadores matemáticos: “uma função é exponencial se transforma toda P.A numa P.G”. Na realidade, em muitas situações em que aparece o crescimento/decrescimento exponencial as progressões geométricas são o modelo matemático que representam as “regularidades” envolvidas, pois uma “progressão

geométrica se obtém quando se toma uma função de tipo exponencial e se consideram apenas valores  $f(n) = a^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ". (LIMA et al, 2001, p.24).

Dessa forma, as progressões geométricas representam funções em que o domínio se restringe aos números naturais, particularidade muito comum em problemas reais e fenômenos naturais. Portanto, abordar essa conexão pode ser uma forma de dar mais ênfase ao ensino das sequências, em particular, das progressões aritméticas e geométricas, principalmente quando se vislumbra a possibilidade de usar esses conceitos para modelar problemas. Portanto, em virtude dos objetivos desse trabalho e da familiaridade dos alunos com as progressões aritméticas e geométricas, adotaremos essa “caracterização” das funções exponenciais como “ferramenta” para decidir se o modelo exponencial é o apropriado ou não para modelar um dado problema.

#### 4.3.1.1 A Função Exponencial nos livros didáticos

É consensual o fato de que o livro didático tem um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem em Matemática. No entanto, não pode ser o único recurso didático utilizado pelo professor, principalmente, quando hoje dispomos de vários outros recursos que podem ser “agregados” ao livro didático.

Por deficiências na formação, seja inicial ou continuada, muitos professores usam, quase que exclusivamente, o livro didático em suas aulas, sem transpor suas páginas. Dessa forma, esses docentes acreditam e passam a impressão de que os “fatos”, conceitos colocados nos livros didáticos são verdades absolutas e infalíveis, não apresentando e permitindo, muitas vezes, o “contraditório” ou uma análise crítica acerca de eventuais erros conceituais. Acreditamos que o livro didático deve ser utilizado como um complementar da atividade docente, uma forma de “organizar” e “guiar” as atividades em sala de aula. Mas não pode ser a única.

Em relação à Matemática, esses problemas se potencializam em virtude de sua própria natureza. Com muita frequência, os livros didáticos de Matemática, com o intuito de facilitar a compreensão dos alunos, ou seja, permitir o acesso do aluno ao conhecimento dito da “academia”, simplificam conceitos, abusam de fórmulas, sem a devida demonstração, expõem os conteúdos de forma estanque e isolada, não apresentam conexão entre os temas, demonstram uma despreocupação

descabida com a linguagem e possíveis erros conceituais. Muitas vezes, trazem uma lista enfadonha de exercícios mecânicos, repetitivos, sem nenhuma alusão a possíveis aplicações, dificultando uma atuação mais efetiva do aluno na construção de seu próprio conhecimento.

Com respeito à Função Exponencial, como já frisado, o aspecto mais importante diz respeito a sua caracterização, ou seja, as suas propriedades características e específicas. Pois é a partir do conhecimento dessas características que os alunos resolvem os problemas, principalmente nos casos em que a palavra exponencial ou a sua expressão analítica não aparece no enunciado. Assim, o professor deve dar uma atenção especial a esses aspectos, “isto porque o estudante que se depara com problemas que usam essas funções vê sempre que elas acompanham os dados da questão, mas nunca sabe de onde vêm nem por que são usadas (LIMA et al., 2001, p.276). Mas parece que os autores dos livros didáticos desconhecem esse fato. Outros dão um certo destaque às características das funções, mas logo depois “esquecem” e não as exploram de forma adequada nos exercícios posteriores.

Por exemplo, no livro Matemática, volume único (2005), de autoria de Manoel Paiva, o autor, após fazer uma breve revisão sobre potências, inicia o capítulo com um exemplo “motivador”: “suponha que a dívida de um certo município seja 1 milhão de dólares e, que a partir de hoje, a cada década, a dívida dobre em relação ao valor devido na década anterior”. Por meio de uma tabela, o leitor é levado a concluir que “a dívida  $y$ ” em função de  $x$  (número de décadas) pode ser expressa por  $y = 2^x$ . Esse tipo de exemplo não é o mais adequado, visto que é pouco provável que uma dívida tenha esse comportamento ao longo do tempo, em que pese o “suponha”. Além do mais, como lembram Lima et al. (2001, p.270), “nas aplicações a função exponencial pura  $f(x) = a^x$  raramente ocorre”.

Logo em seguida, o autor define a função exponencial, sem citar as funções do *tipo exponencial*, muito embora essas funções mais gerais apareçam na maioria dos exercícios. Depois constrói gráficos através do cálculo de alguns valores funcionais, mas não faz nenhuma alusão a qualquer característica dessas funções. A propósito, é uma prática comum na maioria dos livros didáticos a “construção” de gráficos a partir de dois ou mais exemplos, como se o “aspecto” do gráfico de um certo tipo de função fosse determinado apenas por alguns pontos.

Após “definir” equação exponencial, o autor apresenta uma série de exercícios, na maioria “contextualizados, mas em quase todos eles a palavra “função exponencial” aparece ou a sua expressão analítica. Na realidade, como já discutido, esse tipo de exercícios, meramente manipulativos, não contribui para a compreensão do conceito e das propriedades dessas funções, principalmente com vistas às aplicações.

Só no capítulo referente às sequências, o autor menciona a conexão entre a função exponencial e as progressões geométricas, mas de forma simplista e informal. E o mais curioso: nenhum exercício do capítulo aborda essa relação, pelo menos de forma explícita e na resolução de problemas reais.

Finalmente, analisamos esse livro apenas para ilustrar como as funções exponenciais são abordadas pela maioria dos autores dos livros didáticos mais usados no Ensino Médio. Muito embora, por uma questão de justiça, não podemos negar que temos algumas exceções. Luiz Roberto Dante tem se sobressaído em relação à abordagem das funções, talvez porque tenha cedido ao apelo de alguns especialistas.

Cabe insistir, portanto, que o mais importante no ensino das funções e, em particular, das exponenciais, são as suas características/propriedades, pois essas informações são as ferramentas principais, aliadas a capacidade de criar estratégias e aplicar conceitos apropriadamente, que o “modelador” usa ao fazer a modelação de um certo problema, principalmente, aqueles que têm alguma referência na realidade. Mas, nunca é demais repetir: o ensino da Matemática deve apresentar um “equilíbrio entre a conceituação teórica, as manipulações e as aplicações realísticas” (LIMA et al., 2001, p.276).

## 5 ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA COM A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Já está muito claro para o caro eleitor a proposta de ensino para a Função Exponencial que se defende neste trabalho, pelo menos do ponto de vista teórico: apresentar uma proposta de atividade com a Função Exponencial num ambiente de Modelagem Matemática, articulada com a Resolução de Problemas. Deste modo, como ressaltado em capítulos anteriores, o objetivo com esse tipo de atividade é, em última instância, permitir uma exploração mais instrutiva das propriedades da função exponencial, principalmente aquela que faz uma conexão com as Progressões Aritméticas e Geométricas. No entanto, em momento algum citamos exemplos de atividades contextualizadas que defendemos com a Função Exponencial, de acordo com os nossos objetivos, ou seja, quais exemplos de atividades, problemas contextualizados com a função exponencial permitem uma “descoberta” por parte dos alunos desses modelos matemáticos. É o que será feito no presente capítulo.

Antes, será detalhada melhor, em termos instrucionais e metodológicos, essa proposta, mesmo que os seus pressupostos teóricos já foram exaustivamente apresentados e discutidos neste trabalho:

### **a) Objetivos:**

Como já relatado, o objetivo principal dessas atividades é permitir o ensino e aprendizagem da Função Exponencial num ambiente de Modelagem Matemática, articuladas com a Resolução de Problemas. Dessa forma, essas atividades levarão os alunos a recorrer às propriedades características desse tipo de função para resolver os problemas colocados, ou seja, devem modelar matematicamente a situação proposta. Em particular, visam criar condições, meios para que os alunos usem a conexão das funções exponenciais com as sequências para resolver situações-problemas, além de solidificar ou consolidar a aprendizagem conceitual feita anteriormente.

Essa proposta de abordagem das funções exponenciais, ou qualquer outro tipo de funções, diferencia-se da forma como tem sido, tradicionalmente, o ensino das funções nas escolas brasileiras por não colocar no enunciado o tipo de função que modela a questão, ou seja, em momento algum o nome do modelo apropriado para a situação vem expresso na questão, nem a fórmula (expressão analítica) característica da função acompanha a questão. Daí, os alunos são instigados a

buscar meios, conhecimentos, estratégias para resolver o problema e, posteriormente, explicar a sua solução.

Em relação à Modelagem Matemática, essa atividade se baseia no que Barbosa (2009) classificou de “caso 1”, em que o professor apresenta a situação-problema, juntamente com os seus dados qualitativos e quantitativos, isto é, fornece todas as informações necessárias à sua resolução, cabendo aos alunos apenas o processo de investigação e sistematização da resolução. Neste caso, essas atividades exploram exemplos simples de Modelagem, deixando para um segundo momento a aplicação de exemplos de Modelagem mais complexos (caso 1 e 2), quando o professor e os alunos já terão um grau de maturidade maior.

**b) Público alvo:** Como se trata das funções exponenciais, tema que geralmente é abordado no 1º ano do Ensino Médio, essa proposta está voltada, originalmente, para esse ano de escolaridade. Mas pode, seguramente, ser aplicada, por exemplo, no 2º ano do Ensino Médio, como uma forma de fazer uma recapitulação do ensino das funções no início desse ano escolar.

**c) Pré – requisitos:** No primeiro momento, para o desenvolvimento dessas atividades o aluno deve ter o conhecimento prévio das principais funções, particularmente, devem “dominar” as características que definem plenamente as funções afins, quadráticas e exponenciais e das sequências, principalmente, as Aritméticas e Geométricas. No segundo momento, como em qualquer outra atividade matemática, o aluno deve ter a capacidade de interpretação, compreensão do enunciado e habilidades de resolução de problemas.

**d) Recomendações metodológicas:** Como sugerido por Barbosa (2009) esse “caso” de Modelagem deve ser realizado em grupos, cabendo ao professor orientar a atividade, sanar eventuais dúvidas, instigar discussões sobre as possíveis soluções e organizar um momento para cada grupo apresentar as soluções dos problemas.

Do ponto de vista prático, o professor deve no primeiro dia de aula apresentar uma lista com vários problemas, inclusive situações que não são modeladas por nenhuma função elementar ou questões que trazem uma relação funcional através de dados já tabelados para que os alunos, em grupo, discutam e tentem resolvê-los. O fato de se apresentar problemas que sejam modelados não apenas por funções exponenciais ou até mesmo que não sejam modelados por nenhum tipo de função elementar se faz necessário para que o aluno não seja levado a “adivinhar” qual o

modelo apropriado para tal situação. Na realidade, dos problemas que serão apresentados a seguir, o professor deve escolher no máximo três.

**e) Dificuldades esperadas:** Como também já foi assinalado por Barbosa (2009), os alunos podem apresentar algum tipo de resistência a esse tipo de atividades por já estarem acostumados com os exercícios “manipulativos” em que o raciocínio nem sempre é evocado. Na realidade, esse comportamento se justifica porque o aluno é levado a ter, conforme a tradição escolar brasileira, uma “participação” passiva no processo de aprendizagem. Neste caso, um obstáculo que deve ser perseguido e superado é de como garantir a participação efetiva dos alunos.

Essas dificuldades podem ser superadas com a prática, com a conscientização por parte dos alunos de que a verdadeira aprendizagem se dá quando os mesmos usam de forma consciente os conceitos e procedimentos para resolver os mais diversos problemas, sejam eles oriundos da própria Matemática ou da vida cotidiana dos mesmos. Ou seja, o engajamento por completo dos alunos se dará quando eles adquirem autoconfiança na resolução de problemas, quando perceberem a importância das aplicações matemáticas na resolução e explicação de fenômenos, sejam eles físicos, biológicos, químicos e até “sociais”.

No que se segue, iremos apresentar exemplos de atividades contextualizadas com a Função Exponencial. Antes, vale salientar, que para cada problema será apresentada “uma solução”, no entanto, em momento algum se deseja apresentar uma “receita” de como resolver cada problema, o que seria notadamente uma contradição com o que foi exposto e defendido neste trabalho. Na realidade, o que se espera é que os alunos tentem resolver o máximo de problemas da lista apresentada, se não no primeiro dia de aulas, nos dias subsequentes. Daí, diante de várias tentativas por parte dos alunos, o professor pode apresentar uma solução, mas não obrigatoriamente a aqui apresentada. Assim, a solução que será dada neste trabalho para cada problema proposto não passa de um apoio didático-pedagógico para o professor.

Finalmente, é importante destacar que a escolha dessas questões se deu em função de serem esses os principais exemplos de problemas com as funções exponenciais apresentados nos livros didáticos. E, neste caso, objetivamos apenas mostrar como essas situações clássicas de crescimento e decrescimento exponencial podem ser abordadas de uma forma mais instrutiva, ou seja,

priorizando-se um ambiente de resolução de problemas e de modelagem matemática.

## 5.1 CULTURA DE BACTÉRIAS

“Desde o ano passado, a superbactéria KPC (*Klebsiella pneumoniae carbapenemase*) começou a assustar os pacientes e médicos. De acordo com dados da Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa), 24 pessoas infectadas pela superbactéria morreram no Estado de São Paulo desde julho de 2009 – mesmo não se sabendo se todos os casos de morte foram causados pela bactéria. Nesse mesmo período, 70 casos de contaminação foram confirmados.

A KPC não se trata de uma mutação. Ninguém sabe ao certo como a primeira dessas bactérias surgiu, mas acredita-se que o uso dos antibióticos do tipo carbapenens, de uso comum, favoreceu sua aparição, mas ninguém sabe a origem do gene, nem como isto ocorreu exatamente.

As bactérias, como as KPC, geralmente se multiplicam muito rápido, duplicando de número a cada 20 minutos e as pessoas que estão hospitalizadas, ou em contato com ambiente hospitalar têm maiores riscos”.

(Texto adaptado de: Jornal online Guaxupé Hoje, 02 nov. 2011. Disponível: <http://www.guaxupehoje.com.br/noticia/2010/11/02/kpc-a-superbacteria-que-mata/>)

Levando em consideração as informações divulgadas no trecho acima, responda:

- a) Considerando que num dado instante, existam 100 bactérias do tipo KPC num recipiente, em condições favoráveis, quantas bactérias existirão depois de 2 h do experimento?
- b) E após  $t$  minutos?

### Uma solução

Inicialmente, o aluno deve notar que o número de bactérias, conforme informação no texto, dobra a cada 20 minutos. Assim, chamando o instante inicial de observação de  $t_0$  e o número inicial de bactérias de  $n_0$ , ele pode construir a seguinte tabela:

Instante	Número de bactérias
$t_0$	$n_0$
$t_0 + 20$	$2.n_0$
$t_0 + 2.20$	$4.n_0$
$t_0 + 3.20$	$8.n_0$
.....	.....

Agora, basta notar que os elementos da 1ª coluna da tabela  $t_0$ ,  $t_0 + 20$ ,  $t_0 + 2.20$ ,  $t_0 + 3.20$ , ..., formam uma P.A. de razão  $r = 20$ , enquanto que as suas respectivas “imagens”  $n_0$ ,  $2.n_0$ ,  $4.n_0$ ,  $8.n_0$ , ..., formam uma P.G. de razão  $q = 2$ . Observando ainda que a função que dá o número de bactérias em função do instante  $t$  é uma função crescente, segue, conforme o Teorema 2 de caracterização da função do *tipo exponencial*, que o modelo matemático que expressa o número de bactérias em função do instante  $t$  é dado por uma função da forma  $f(t) = b \cdot a^t$ , onde  $t$  é o tempo decorrido após o início da observação.

Do enunciado, item a, fazendo instante  $t_0 = 0$ , temos  $f(t) = 100$ . Daí, obtemos:  $f(0) = 100 \Rightarrow b \cdot a^0 = 100 \Rightarrow b = 100$ . Mas, é fácil observar que  $f(20) = 200$ . Segue, então, que:  $b \cdot a^{20} = 200 \Rightarrow 100 \cdot a^{20} = 200 \Rightarrow a^{20} = 2 \Rightarrow a = \sqrt[20]{2}$ . Logo,

$$f(t) = 100 \cdot (\sqrt[20]{2})^t, \text{ que é a solução do item b.}$$

a) Neste caso, temos  $t = 120$ , pois  $2h = 120$  min. Assim,

$$f(120) = 100 \cdot (\sqrt[20]{2})^{120} = 100 \cdot 2^6 = 6400.$$

Logo, depois de 2 h existirão 6400 bactérias.

b)  $f(t) = 100 \cdot (\sqrt[20]{2})^t$ , onde  $t$  é o tempo decorrido após o início da observação.

**Comentário:** Além da construção e da aplicação do conhecimento matemático, este problema é importante, pois permite um momento na escola para o professor chamar a atenção dos alunos sobre a necessidade de higiene pessoal, sobre os problemas graves e frequentes de contaminação hospitalar no Brasil e, de forma geral, sobre a grave questão da saúde brasileira. Outrossim, é um tipo de questão que permite uma conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento, como

a Biologia e a Química, ou seja, possibilita a tão difundida e desejada interdisciplinaridade.

No tocante ao aspecto matemático, essa atividade (problema) exige que o aluno tenha um conhecimento sólido dos conceitos envolvidos, particularmente, das características das funções elementares, o que se contrapõe a um exercício em que o aluno tem o trabalho apenas de fazer as devidas “contas”, pois na maioria dos livros didáticos o tipo de função que modela a situação já vem expresso no enunciado. Além do mais, encoraja professores a elaborar atividades que tenham alguma referência na realidade dos alunos, isto é, mais realísticos e não meros problemas “fictícios”.

## 5.2 DESINTEGRAÇÃO RADIOATIVA

**VUNESP** (com adaptações) O acidente do reator nuclear de Chernobyl, em 1986, lançou para a atmosfera grande quantidade de isótopo radioativo estrôncio - 90, cuja meia-vida<sup>1</sup> é de 28 anos.

- a) Supondo ser esse isótopo a única contaminação radioativa, e sabendo que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de isótopo radioativo estrôncio - 90 se reduzir, por desintegração, a  $\frac{1}{16}$  da quantidade inicialmente presente, a partir de que ano o local poderá ser habitado novamente?
- b) Que percentual da massa original da quantidade lançada de isótopo radioativo estrôncio – 90 restará em uma amostra após 280 anos?

---

<sup>1</sup> *Meia-vida*: tempo necessário para que uma grandeza (física, biológica) atinja metade de seu valor inicial.

### Uma solução

Da mesma forma, observando que a meia-vida do isótopo radioativo estrôncio - 90 é de 28 anos e considerando  $m_0$  a massa inicialmente presente, podemos construir a seguinte tabela:

Instante (anos)	Massa restante
0	$m_0$
28	$1/2 m_0$
56	$1/4 m_0$
84	$1/8 m_0$
....	....

Observa-se facilmente que os instantes 0, 28, 56, 84,.... formam uma P.A. de razão  $r = 28$ (meia-vida), enquanto que os elementos  $m_0, 1/2 m_0, 1/4 m_0, 1/8 m_0, \dots$ , formam uma P.G. de razão  $q = 1/2$ . Como a função  $f$  que dá a massa restante (segunda coluna) em função do instante  $t$  (primeira coluna) é uma função decrescente, então, segundo o Teorema 2 de caracterização da função do *tipo exponencial*, o modelo matemático que representa a massa restante é dado por uma função da forma  $f(t) = b.a^t$ .

Para obtermos a função  $f$ , basta utilizarmos os valores  $f(0) = m_0$  e  $f(28) = 1/2 m_0$ . Daí, obtemos:

$$f(0) = m_0 \Rightarrow b.a^0 = m_0 \Rightarrow b = m_0. \text{ A segunda igualdade nos dá: } f(28) = b.a^{28} = 1/2$$

$$m_0 \Rightarrow m_0.a^{28} = 1/2.m_0 \Rightarrow a^{28} = 1/2 \Rightarrow a = \sqrt[28]{\frac{1}{2}}. \text{ Resulta, então, que}$$

$$f(t) = m_0.\left(\sqrt[28]{\frac{1}{2}}\right)^t.$$

a) Devemos encontrar o valor de  $t$  para que  $f(t) = 1/16 . m_0$ . Daí vem:  $m_0.\left(\sqrt[28]{\frac{1}{2}}\right)^t =$

$$1/16 . m_0 \Rightarrow \left(\sqrt[28]{\frac{1}{2}}\right)^t = 1/16 \Rightarrow \frac{1}{2^t} = \left(\frac{1}{16}\right)^{28} \Rightarrow 2^{-t} = (2^{-4})^{28} \Rightarrow -t = -112 \Rightarrow t = 112,$$

ou seja, depois de 112 anos a quantidade de isótopo radioativo estrôncio-90 será  $1/16$  da quantidade inicialmente presente. Logo, no ano  $1986 + 112 = 2098$  o local poderá ser habitado novamente.

b) Neste caso, basta calcularmos  $f(280)$  e compararmos o seu valor com o valor inicial  $m_0$ . Vejamos:

$$f(280) = m_0 \cdot \left(\sqrt[28]{\frac{1}{2}}\right)^{280} = m_0 \cdot \sqrt[28]{2^{-280}} = m_0 \cdot 2^{-10} = \frac{1}{1024} \cdot m_0. \text{ Assim, após 280 anos, a}$$

massa restante é igual a  $\frac{1}{1024}$  de  $m_0$ , o que corresponde a aproximadamente 0,1% do valor inicialmente.

**Comentário:** Essa questão, para além do aspecto matemático, permite ao professor (que deve pesquisar sobre o tema) promover discussões acerca das sérias conseqüências dos acidentes nucleares e os riscos eminentes da proliferação de armas nucleares para a humanidade, temas que com certa frequência estampam os noticiários mundiais. Além, claro, de alertá-los sobre o fato de que, quando é usada de forma controlada e direcionada, a radioatividade pode trazer benefícios para a humanidade.

Do ponto de vista da Matemática, como na primeira questão, ela permite que o aluno faça a relação da função exponencial com as progressões aritméticas e geométricas. Mais do que isso, ela traz para sala de aula aspectos interdisciplinares importantes, como a necessária relação da Matemática com a Química e a Física. Por outro lado, como defendido neste trabalho, o aluno resolve um problema contextualizado sem que o modelo adequado para tal situação seja citado. Fato que raramente é visto nos livros didáticos brasileiros, onde o tipo de função que expressa a situação já vem no enunciado. Por exemplo, na maioria dos nossos livros didáticos essa questão (ou outra de natureza semelhante) vem geralmente da seguinte forma:

**(VUNESP/MANOEL PAIVA - 2005)** Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outro elemento). Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Suponhamos que certa quantidade de

um elemento químico radioativo com inicialmente  $m_0$  gramas de massa se decompõe segundo a equação matemática  $m(t) = m_0 \cdot 10^{-\frac{t}{70}}$ , onde  $m(t)$  é a quantidade de massa radioativa no tempo  $t$  (em anos). Usando a aproximação  $\log 2 = 0,3$ , determine quantos anos demorará para que esse elemento se decompõe até atingir um oitavo da massa inicial.

Considerando a forma como essa questão foi formulada, observa-se que cabe ao aluno apenas aplicar os dados na fórmula matemática apresentada, sem nenhum trabalho a mais, o que certamente empobrece o processo de aprendizagem, pois em momento algum o aluno é levado a raciocinar, buscar meios e ferramentas apropriadas para resolvê-la.

Finalmente, o aluno atento pode perceber, induzido pela resposta do item b e considerando o modelo matemático encontrado, que a quantidade de massa da substância radioativa em questão nunca chega a zero, pelo menos, do ponto de vista matemático. Vale esclarecer, ainda, que outras substâncias como as drogas terapêuticas (remédios) tem sua eliminação pelo organismo da mesma forma (em certos intervalos) como ocorre com as substâncias radioativas, o que também pode servir de contextos muito mais interessantes para a formulação de situações-problemas.

### 5.3 O FRUTICULTOR

(UERJ/ DANTE – 2003 - com adaptações) Um fruticultor, no primeiro dia da colheita de sua safra anual, vende cada fruta por R\$ 2,00. A partir daí, o preço de cada fruta decresce R\$ 0,02 por dia. Considere que esse fruticultor colheu 80 frutas no primeiro dia e a colheita aumenta uma fruta por dia.

Determine o modelo matemático que representa a receita do fruticultor com a venda das frutas em função do dia da colheita.

#### **Uma solução**

Lembrando que a receita é obtida multiplicando-se a quantidade vendida pelo preço de cada unidade, podemos tomar alguns valores de receita  $R$  em função do

dia da venda  $t$ . Para isso, basta fazer o primeiro dia de venda  $t = 0$ . Alguns resultados serão mostrados na tabela a seguir:

<b>Dia da colheita</b>	<b>Receita ( R\$ )</b>
<b>0</b>	<b>80 x 2,00 = 160</b>
<b>1</b>	<b>81 x 1,98 = 160,38</b>
<b>2</b>	<b>82 x 1,96 = 160,72</b>
<b>3</b>	<b>83 x 1,94 = 161,02</b>
<b>4</b>	<b>84 x 1,92 = 161,28</b>
<b>....</b>	<b>....</b>

Se analisarmos os valores da tabela acima, podemos notar que os elementos da primeira coluna 0, 1, 2, 3, 4,.... , formam uma P.A., mas os elementos “correspondentes” da segunda coluna 160; 160,38; 160,72; 161,02; 161,28;.... ; não formam uma P.G. já que, por exemplo,  $\frac{160,38}{160} = 1,0024 \neq \frac{160,72}{160,38} = 1,0021$ . Neste caso, podemos perceber que a função  $R$  não “transforma uma P.A em uma P.G”, o que nos permite concluir que a função  $R$  não é do *tipo exponencial*. Cabe agora, analisar melhor os dados da tabela.

Se examinarmos as diferenças entre os termos consecutivos dos elementos da segunda coluna, obtemos os seguintes valores: 0,38; 0,34; 0,30; 0,26;...., que é uma progressão aritmética (P.A) de razão  $r = - 0,04$ . Então, a função  $R$  transforma uma progressão aritmética não-constante numa progressão aritmética de segunda ordem<sup>2</sup> não-degenerada.

Mas, esse fato expresso acima é uma propriedade exclusiva das funções quadráticas (ver apêndice A). Daí, podemos afirmar que o modelo matemático que representa a receita  $R$  em função do dia  $t$  é da forma  $R(t) = at^2 + b.t + c$ . Utilizando os valores  $R(0) = 160$ ,  $R(1) = 160,38$  e  $R(2) = 160,72$  , obtemos o seguinte sistema:

---

<sup>2</sup> Progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência  $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$  tal que as diferenças sucessivas  $d_1 = y_2 - y_1$ ,  $d_2 = y_3 - y_2$ ,  $d_3 = y_4 - y_3$ , ... formam uma P.A. usual.( LIMA et al., 2006, p.147)

$$\begin{cases} c = 160 \\ a + b + c = 160,38 \\ 4a + 2b + c = 160,72 \end{cases} . \text{ Daí, resolvendo esse sistema, obtemos } a = -0,02 ; b = 0,4 \text{ e}$$

$c = 160$ . Logo,  $R(t) = -0,02t^2 + 0,4t + 160$ .

**Comentário:** Essa questão “atípica”, pois a sua solução não resulta na determinação de uma função *do tipo exponencial*, como vimos, serve para ilustrar que o professor deve mesclar, quando se tem a intenção de trabalhar situações-problemas que visam explorar as propriedades exclusivas de algumas funções, questões que envolvam não só um tipo de modelo matemático (afim, quadrático ou exponencial), pois neste caso o aluno poderá “chutar” a solução do problema, mesmo sem ter um conhecimento sólido das características das funções elementares, mas sim problemas que envolvam dois ou mais tipos de funções.

Resta ainda comentar que aluno deve conhecer com profundidade as propriedades das principais funções elementares, pois é de posse desse conhecimento que ele poderá resolver os diversos problemas que demandem a “descoberta” do modelo matemático que modela a situação proposta. Sim, ainda em relação a esse problema, devemos fazer uma *mea culpa* e admitir que ele não é tão “realístico” assim, uma vez que é pouco provável que o preço decresça de forma constante por dia numa situação normal de mercado.

#### 5.4 CRESCIMENTO POPULACIONAL

“A população do Brasil, que chegou a 190,7 milhões de pessoas em 2010, cresce no menor ritmo já registrado (1,12% ao ano) e de maneira desigual pelo território do País, com as maiores taxas concentradas nas regiões Norte e Centro-Oeste.

As informações constam da Sinopse do Censo Demográfico 2010, que contém os primeiros resultados definitivos do último censo e foi divulgada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Segundo a pesquisa, a população brasileira cresceu 12,3% desde 2000, quando havia 169,8 milhões de habitantes no País e chegou a 190.755.799[...]”.

(Texto adaptado. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/noticias/arquivos/2011/10/26/crescimento-populacional-do-brasil-e-o-menor-ja-registrado/>)

Considerando essas informações, pede-se:

- a) A população brasileira estimada para o ano de 2020;  
 b) A população brasileira t anos após o ano de 2010.

### Uma solução

Com base nos dados fornecidos no texto acima e considerando que a taxa de crescimento da população brasileira se mantenha constante e igual a 1,12% ao ano, podemos construir a seguinte tabela, onde o ano 2010 corresponde ao ano 0:

Ano	População (milhões)
0	190,7
1	192,8
2	195,0
3	197,2
4	199,4
....	.....

Tomando os quocientes entre os elementos consecutivos da segunda coluna (população), obtemos:

$$\frac{192,8}{190,7} = 1,01 ; \quad \frac{195,0}{192,8} = 1,01 ; \quad \frac{197,2}{195,0} = 1,01 ; \quad \frac{199,4}{197,2} = 1,01 ; \quad \dots$$

Como podemos notar, as razões entre esses elementos consecutivos são constantes, ou seja, a sequência 190,7 ; 192,8 ; 195,0 ; 197,2 ; 199,4 formam uma progressão geométrica de razão  $q = 1,01$ . Dessa forma, como os elementos da primeira linha (anos) 0, 1, 2, 3, 4, ..., formam uma progressão aritmética de razão  $r = 1$  e a função  $P$  que representa a população em função do ano  $t$  é crescente, então podemos concluir que  $P$  é da forma  $P(t) = b \cdot a^t$ , pois ela “transforma uma P.A numa P.G”, conforme afirma o Teorema 2 de caracterização da função do *tipo exponencial*.

Para determinarmos a função  $P$ , basta tomarmos os seguintes valores  $P(0) = 190,7$  e  $P(1) = 192,8$ . Sendo assim, obtemos:

$P(t) = b \cdot a^t \Rightarrow b \cdot a^0 = 190,7 \Rightarrow b = 190,7$ . A segunda igualdade nos dá:

$$P(1) = b \cdot a^1 = 192,8 \Rightarrow 190,7 \cdot a = 192,8 \Rightarrow a = \frac{192,8}{190,7} = 1,01. \text{ Assim,}$$

a expressão de  $P$  em função de  $t$  é  $P(t) = 190,7 \cdot 1,01^t$ , que é a resposta do item b.

a) Neste caso,  $t = 10$ . Daí,  $P(10) = 190,7 \cdot 1,01^{10} = 210,7$ . Portanto, a população brasileira estimada para 2020 é de 210,7 milhões de habitantes.

b)  $P(t) = 190,7 \cdot 1,01^t$ , sendo  $t$  o número de anos decorridos a partir de 2010.

**Comentário:** Situações-problemas relacionados ao crescimento populacional têm sido indicados por documentos oficiais (PCN) e por especialistas como “bons” exemplos de crescimento exponencial, quando se considera períodos curtos de tempos. Vale ressaltar que neste caso em particular, o que se observa é que os resultados representam uma “tendência”, uma aproximação da população brasileira ao longo de alguns anos, pois a taxa de crescimento representa uma média e que esta pode ser “distorcida” ao longo do tempo. Por isso, quando são trabalhadas questões desse tipo, se faz necessário expor para os alunos em que condições o modelo matemático encontrado representa a situação dada. Neste caso, é clara a necessidade de supor que o crescimento da população brasileira cresça a taxas constantes de 1,12% ao ano da forma como tinha sido observado em 2010. Todas essas observações são necessárias para evitar “estranhamentos” por parte do aluno ao comparar esses resultados obtidos com os divulgados oficialmente pelos institutos de pesquisas.

Por outro lado, quando se vislumbra a possibilidade de “contextualizar” esse problema em sala de aula, cabe ao professor trazer à discussão temas como a expansão da população urbana em detrimento da rural e suas consequências, até que ponto o crescimento populacional, seja ele brasileiro ou mundial, coloca em risco os recursos disponíveis para a nossa sobrevivência, principalmente os alimentos, ou seja, se o consumo de alimentos não poderá superar a sua produção.

Uma outra preocupação que vem à tona sobre o crescimento populacional diz respeito ao “consumo” dos recursos ambientais. Um exemplo de um recurso que pode ser extinto devido a um crescimento demográfico acentuado é a água potável.

Mais uma vez, como se vê, esse problema, que tem seguramente referência na realidade do aluno, para além de permitir a construção do conhecimento por parte do aluno e não a mera reprodução dele cria um “pano de fundo” para tratar de temas importantes da Geografia, da Biologia e, de forma mais ampla, de assuntos de interesses sociais, situação típica de quando se trabalha num ambiente de Modelagem Matemática.

## 5.5 ELIMINAÇÃO DO ÁLCOOL PELO ORGANISMO HUMANO

(CHAVES; 2006 – com adaptações) [...] Os jovens estão bebendo cada vez mais cedo e em quantidade cada vez maior. É também nessa faixa que o vício, no maior número de casos é instalado. É alto o número de acidentes de carro envolvendo motoristas alcoolizados, e as conseqüências, muitas vezes, são danosas [...]

Foi feita uma pesquisa sobre como se daria a eliminação de álcool pelo organismo humano e encontrou-se a informação de que a taxa de eliminação de etanol em um homem que ingeriu 7 latas de cervejas é de aproximadamente 8% por hora e que 350 ml de cerveja possuem 17,5 ml de etanol.

Com base nessas informações, responda:

- a) Para esse exemplo, qual é o modelo matemático que representa o resíduo de álcool (etanol) no organismo em função do tempo?
- b) Neste caso, qual é o resíduo de etanol no organismo após 7 horas?

### Uma solução

Conforme as informações fornecidas, a pessoa bebeu 7 latas de cervejas, o que corresponde a  $7 \times 350 \text{ ml} = 2450 \text{ ml}$ . Desse total, como cada cerveja tem 17,5 ml de etanol, a pessoa ingeriu  $7 \times 17,5 \text{ ml} = 122,5 \text{ ml}$  de álcool (etanol). Usando a informação de que a taxa de eliminação do álcool (etanol) pelo organismo dessa pessoa é de 8% por hora, podemos construir a seguinte tabela de valores:

Tempo (horas)	Resíduo de álcool (etanol)
0	122,5
1	112,7
2	103,7
3	95,4
4	87,8
.....	...

Calculando-se os quocientes entre os elementos consecutivos da segunda coluna (resíduo de álcool), obtemos:

$$\frac{112,7}{122,5} = 0,92 ; \frac{103,7}{112,7} = 0,92 ; \frac{95,4}{103,7} = 0,92 ; \frac{87,8}{95,4} = 0,92; \dots$$

Dessa forma, como se nota, essas razões são constantes, ou seja, a sequência 122,5 ; 112,7 ; 103,7; 95,4 ; 87,8 ; .... , formam uma progressão geométrica de razão  $q = 0,92$ . Daí, a função  $R$  que representa a quantidade de álcool (etanol) no organismo em função do tempo  $t$  transforma a progressão aritmética 0, 1, 2, 3, 4,... em uma P.G.. Sendo assim, como  $R$  é uma função decrescente, segue do Teorema 2 de caracterização da função do *tipo exponencial*, que o modelo matemático que representa o resíduo de etanol em função do tempo é dado por uma função da forma  $R(t) = b \cdot a^t$ , sendo  $t$  o instante qualquer (em horas).

Agora, tomando os valores  $R(0) = 122,5$  e  $R(1) = 112,7$ , obtemos:

b.  $a^0 = 122,5 \Rightarrow b = 122,5$ . Da segunda igualdade, resulta que:  $b \cdot a^1 = 112,7$   
 $\Rightarrow 122,5 \cdot a = 112,7 \Rightarrow a = \frac{112,7}{122,5} = 0,92$ . Assim,

$$R(t) = 122,5 \cdot (0,92)^t, \text{ que é a resposta do item a.}$$

b) Neste caso, basta calcular  $R(7)$ . Vejamos:  $R(7) = 122,5 \cdot (0,92)^7 = 122,5 \cdot 0,5578 = 68,33$ , ou seja, restam 68,33 ml de álcool(etanol) no organismo.

**Comentário:** Essa atividade é uma versão adaptada (foram feitas algumas alterações) de um problema proposto por Chaves (2006) durante o desenvolvimento de uma pesquisa com alunos do 1º ano do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria/RS, com o objetivo de avaliar a importância da Modelagem Matemática em sala de aula.

É evidente a importância desse contexto, uma vez que os jovens estão bebendo cada vez mais cedo e discussões em sala de aula sobre os malefícios do uso abusivo do álcool se tornam urgentes. É claro que esta questão oportuniza ter uma discussão mais ampla sobre quaisquer tipos de drogas, principalmente as ditas ilícitas, já que o Brasil enfrenta uma verdadeira “epidemia” das drogas. Um outro tema importante que esta questão pode incitar é a discussão sobre os problemas que o consumo de álcool trazem para os motoristas que dirigem embriagados, principalmente diante do “endurecimento” das Leis de Trânsito brasileiras.

No que se refere à matemática, como as demais questões, ela permite que o aluno procure uma solução que não “aparece” diretamente no enunciado. Para isso, o aluno deve criar estratégias de solução, evocar as características das funções a fim de encontrar o modelo matemático que modela a situação. Após encontrar esse modelo, ele pode testá-lo e convencer da sua “razoabilidade”. Por exemplo, poderia a eliminação do álcool pelo organismo se dá a uma taxa constante? É muito mais razoável admitir que a quantidade eliminada num instante qualquer dependa do valor que se tem no instante anterior. Da mesma forma, esta questão ilustra muito bem o fato de que um modelo matemático é apenas uma aproximação da realidade, pois neste caso, embora matematicamente seja impossível o resíduo de álcool no organismo ser zero, na prática isso ocorre. Para comprovar tal fato basta que a pessoa faça um exame laboratorial que encontrará um teor de álcool no seu organismo igual a zero.

Por outro lado, é uma oportunidade para o professor fazer a desejada conexão da Matemática com a Química, Biologia e, de forma indireta, com algumas disciplinas das áreas de Humanas. Daí, fica evidente o poder da Modelagem Matemática como estratégia de ensino, pois além de desenvolver as capacidades intelectuais dos alunos, ela permite que eles se tornem atores principais na construção do seu próprio conhecimento. Ademais, a aluno adquire habilidades necessárias para ser um bom resolvidor de problemas, virtude desejada num ensino que prioriza o conhecimento verdadeiro, a descoberta e a capacidade de raciocínio, como se pretende na Matemática.

## 6 CONCLUSÕES

Nossos estudos apontaram a necessidade urgente de se buscar novas formas de trabalhar os conteúdos de matemática em sala de aula. Não há mais espaço para um ensino que se limite a expor fórmulas prontas, a propor “cálculos” sem sentido, a “encher” os alunos de proposições e teoremas sem uma justificativa plausível de suas origens e de sua importância. O ensino de matemática tem que, de fato, se pautar na busca de mostrar a real necessidade de ensino dessa área tão importante do conhecimento. E não simplesmente “obrigar” os alunos a reproduzirem conceitos, procedimentos e fórmulas sem significados, apenas os “preparando” para tirar uma boa nota para que possam ser aprovados no final do ano letivo. Na realidade, o professor de matemática deve urgentemente abrir mão do seu “conformismo” irrepreensível ou da sua verdade absoluta, rever suas concepções e refletir principalmente sobre sua prática. Um primeiro passo é procurar uma formação continuada e atender aos apelos dos verdadeiros conhecedores da matemática e não daqueles que acham que faltam apenas “métodos” apropriados no ensino da matemática.

Uma forma de diversificar o ensino de matemática é adotar, como visto no desenvolvimento desse trabalho, a metodologia de Modelagem Matemática, pois ela permite que professores e alunos apliquem os conhecimentos e métodos matemáticos na busca e solução de problemas reais de seu cotidiano. Na sala de aula, essa metodologia torna o ensino de matemática mais dinâmico e vivo, ao criar um ambiente de investigação, de problematização e de descoberta, tão desejado para um “fazer matemático” verdadeiro. Na realidade, a própria história da matemática tem dado informações definitivas e apontado o caminho a ser seguido no processo de ensino e aprendizagem dessa área: sua construção se dá num ambiente constante de pesquisas, de rupturas, de reformulações e, sobretudo, sua produção reflete necessidades temporais da comunidade científica ou não. E como tal, o ensino de matemática em sala de aula deve se aproximar desse “método” de fazer matemática.

Outros aspectos importantes que devem ser destacados quando se faz a adesão à Modelagem Matemática, é a possibilidade real de motivar os alunos, de incentivá-los a participar de forma efetiva do processo de construção de conhecimentos, de prepará-los para o trabalho com a resolução de problemas. Além

do mais, essa alternativa de ensino permite uma real contextualização dos conteúdos matemáticos, ao trazer para a sala de aula temas de interesse do próprio aluno, já que a sua aplicação pressupõe a “tradução” em termos matemáticos de problemas e situações que têm referência na sua realidade e não simplesmente criar pseudo-aplicações, como ocorre em alguns livros didáticos.

Particularmente, quando se trata de funções, os estudos demonstraram que na maioria das vezes o seu ensino se limita a exposição e exploração da expressão analítica de cada tipo particular, sem fazer uma abordagem razoável da sua idéia intuitiva, de seus aspectos gráficos e, sobretudo, de suas propriedades. Sem a correta exploração desses elementos, o ensino desse componente fundamental da matemática perde o sentido, uma vez que sua aplicação se restringe ao campo das manipulações. Ainda, foi possível observar que a abordagem das funções pela via da linguagem de conjunto é inteiramente desnecessária, pois essa conexão, além de ser um fator desestimulador para o aluno, não é usada nos tópicos subsequentes das funções.

Por outro lado, quando se tenta fazer a contextualização desses conceitos o que se vê é que o enunciado do problema já traz o tipo de função que o modela, que resolve a questão, e nunca explica o porquê da adequação desse modelo. Trabalhar atividades contextualizadas com as funções num ambiente de Modelagem Matemática certamente contribuirá para o entendimento das propriedades de seus tipos elementares, o que resultará num uso mais consciente e eficaz desses conhecimentos na busca de modelos matemáticos que representem as mais diversas situações, sejam dentro da própria matemática ou de outros contextos, como as questões originadas no próprio cotidiano do aluno.

Quando se trata do ensino da função exponencial, o que se defende é que na sua abordagem seja contemplada a relação dessas funções com as progressões geométricas, pois dessa forma fica muito mais fácil para o aluno reconhecer situações em que o modelo exponencial é o adequado. Outrossim, se for priorizada essa relação, o ensino e a aprendizagem das progressões aritméticas e geométricas se mostrará mais útil e necessário, indo além dos tradicionais exercícios de encontrar “o termo tal da P.A”; calcular “a soma dos 5 primeiros da P.G”.

Em relação às atividades contextualizadas apresentadas neste trabalho, a escolha dos contextos e questões se deu por motivos de relevância social (consumo de álcool, contaminação hospitalar, proliferação de armas nucleares, etc) e pela

própria “qualidade” das variações de quantidades observadas nesses fenômenos, ou seja, por serem situações típicas de crescimento/decrescimento exponencial, largamente citadas na literatura. É evidente que outras situações poderiam ser abordadas, como a absorção e eliminação de fármacos pelo organismo, o aumento ou o decréscimo do número de usuários de tabaco e as aplicações financeiras a juros compostos.

Como desdobramentos futuros desse trabalho, sugerimos a possibilidade de aplicação dessas atividades em sala de aula e a análise dos seus resultados, como uma forma de avaliar melhor a eficácia dessa proposta. Uma outra etapa importante diz respeito à formulação de atividades mais complexas de Modelagem Matemática, onde o aluno possa sugerir temas de relevância social (devidamente mediado pelo professor) e proceder a pesquisa em campo das informações necessárias para a solução do problema proposto, diferentes das aqui apresentadas que se enquadram no que Barbosa (2009) chama de “caso 1”. Da mesma forma, proposta semelhante sobre as funções afins, quadráticas ou logarítmicas poderia ser desenvolvida com o mesmo propósito. Uma possibilidade futura também muito importante é fazer chegar aos professores que atuam no ensino básico essa proposta, através de publicação de artigos ou da realização de seminários/palestras nas escolas.

Para finalizar, cabe ressaltar que esse trabalho não tem a intenção (e não poderia!) de dar “receitas” de como podemos trabalhar com a função exponencial em sala de aula, muito menos de esgotar qualquer possibilidade de abordagem dessas funções. Pelo contrário, desejamos que nossos estudos fomentem uma discussão mais ampla sobre como trabalhar os conteúdos matemáticos de forma a garantir uma aprendizagem mais efetiva, que possibilite ao aluno não só aplicar algoritmos e fórmulas, mas sim, diante de problemas matemáticos ou não, possa refletir sobre eles a fim de interpretá-los e solucioná-los usando, de forma consciente e justificada, conhecimentos e procedimentos apropriados.

## REFERÊNCIAS

AVILA, Geraldo. Evolução dos conceitos de função e de integral. **Revista de Matemática Universitária**, n.1, pág. 14-46, jun. 1985.

\_\_\_\_\_. **Várias faces da Matemática**: tópicos para licenciatura e leitura em geral. 2.ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BARASUOL, Fabiana Fagundes. Modelagem Matemática: Uma Metodologia Alternativa para o Ensino da Matemática. **UNirevista**, p. 01 - 06, 01 abr. 2006.

BARBIERI, Daniela D.; BURAK, D. Modelagem Matemática e suas implicações para a Aprendizagem Significativa. In: IV CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2005, Feira de Santana. **Anais...** Feira de Santana: Universidade Estadual de Feira de Santana, 2005.

BARBOSA, J. C. O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? **Zetetiké**, Campinas, v. 7, n. 11, p. 67-85, 1999. Disponível em: < <http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/Professores-sobre-Mod-Mat.pdf>>. Acesso em: 15 fev. 2013.

\_\_\_\_\_. Modelagem matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim, v. 27, n.98, p. 65-74, 2003. Disponível em: < <http://www.uefs.br/nupemm/perspectiva.pdf>>. Acesso em: 20 fev. 2013.

\_\_\_\_\_. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73 – 80, 2004. Disponível: < <http://www.uefs.br/nupemm/veritati.pdf>>. Acesso em: 20 fev. 2013.

\_\_\_\_\_. Integrando Modelagem Matemática nas práticas pedagógicas. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 26, p. 17-25, mar. 2009.

BARRETO, Marina Menna. **Tendências atuais sobre o ensino de funções no Ensino Médio**. 2008. Disponível em: < [http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias\\_digitaes\\_II/modulo\\_II/pdf/funcoes.pdf](http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitaes_II/modulo_II/pdf/funcoes.pdf)>. Acesso em: 12 jan. 2013.

BASSANEZZI, Rodney C. **Modelagem Matemática**: Uma Disciplina Emergente nos Programas de Formação de Professores. Biomatemática IX. Campinas. 1999. Disponível em: < [www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art\\_1.pdf](http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf)>. Acesso em: 10 jan. 2013.

\_\_\_\_\_. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

\_\_\_\_\_. **Modelagem Matemática**. Santo André: UFABC, 2012.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A Matemática através dos tempos**: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2.ed. Tradução: Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2010.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009. Disponível em: <<http://alexandria.ppgect.ufsc.br/files/2012/03/mariasalett.pdf>>. Acesso em: 05 mar. 2013.

BOTELHO, Leila; REZENDE, Wanderley. Um breve histórico do conceito de função. **Caderno Dá-Licença**. [s.d]. Disponível em: <[http://www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume6/UM\\_BREVE\\_HISTRICO\\_DO\\_CONCEITO\\_DE\\_FUNO.pdf](http://www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume6/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf)>. Acesso: 02 mar. 2013.

BOYER, Carl B. História da matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1989.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: SEF, 1998.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: SEMTEC, 1999.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio: Orientações Curriculares Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais/Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: SEMTEC, 2002.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: SEB, 2006.

BRUCKI, Cristina Maria. **O uso de Modelagem Matemática no ensino de Função Exponencial**. 2011. 139f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – PUC, São Paulo, 2011. Disponível em: <[http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/cristina\\_brucki.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/cristina_brucki.pdf)>. Acesso em: 05 jan. 2013.

CHAVES, Cristina M. de Souza. **Modelagem Matemática e o uso do álcool e do cigarro: uma forma de contextualizar a matemática**. 2006. 169f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2006.

CHAVES, Cristina M. de Souza; BISOGNIM, Eleni. **A Modelagem Matemática na sala de aula: uma forma de diversificar o ensino**. [s.d] Disponível em: <[http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro\\_Gaucho\\_Ed\\_Matem/cientificos/CC11.pdf](http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro_Gaucho_Ed_Matem/cientificos/CC11.pdf)>. Acesso em: 15 jan. 2013.

CHAVES, M. I. de A.; CARVALHO, H. C. **Formalização do Conceito de Função no Ensino Médio**: Uma Seqüência de Ensino-Aprendizagem. VII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, Anais, p.1– 18, 2004.

DOMINONI, Nilcéia Regina Ferreira. **Utilização de diferentes registros de representação: um estudo envolvendo funções exponenciais**. 2005. 120f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

DRUCK, Suely. O drama do ensino da matemática. **Folha Online**. São Paulo, 25 mar. 2003. Disponível em: <<http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtml>>. Acesso em: 10 jan. 20013.

\_\_\_\_\_. **Sobre o ensino da matemática no Brasil**. Sessão: Ciência e Matemática nas Escolas e Educação Tecnológica. *Parcerias Estratégicas*, n. 31, Parte 5, p. 175-180, dez. 2010.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FIGUEIREDO, Fabiane Fischer; BISOGNIN, Eleni. **A Modelagem Matemática e o Ensino de Funções Afins**. 12ª Jornada de Educação e 2º Congresso Internacional em Educação. Educação e Sociedade: Perceptivas Educacionais no século XXI. Santa Maria: UNIFRA, 2006. Disponível em: <<http://www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/matem%C3%A1tica/a%20modelagem%20matem%C3%81tica%20e%20o%20ensino%20de%20fun%C3%87%C3%95es%20afins.pdf>>. Acesso em: 15 jan. 2013.

FLEMMING, Diva Marília. Jogos como recursos didáticos nas aulas de Matemática no contexto da Educação Básica. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 26, p. 17-25, mar. 2009.

LEITE, K. G.. **Modelagem matemática "para" sala de aula**: uma experiência com professores do Ensino Médio. In: III Fórum de Educação e Diversidade, 2008, Tangará da Serra-MT. Anais, 2008.. Disponível em: <[http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes\\_modelagem/modulo\\_VI/pdf/modelagem%20para%20a%20sala%20de%20aula.pdf](http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_VI/pdf/modelagem%20para%20a%20sala%20de%20aula.pdf)>. Acesso em: 05 jan. 2013.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, Manipulação e Aplicações: os três componentes do ensino da Matemática. In: **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, n.41, 1999.

LIMA, E. L. et al. **Exame de textos**: análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: SBM/ IMPA, 2001.

\_\_\_\_\_. **A Matemática do Ensino Médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.v.1

MACHADO JÚNIOR, Arthur Gonçalves. **Modelagem Matemática no ensino-aprendizagem**: ação e resultados. 2005. 142f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Núcleo de Apoio ao Desenvolvimento Científico,

Belém, 2005. Disponível em: <  
[http://www.ufpa.br/npadc/gemm/documentos/docs/Doc\\_12.pdf](http://www.ufpa.br/npadc/gemm/documentos/docs/Doc_12.pdf)>. Acesso em: 20 jan. 2013.

MENDES, Maria Helena Monteiro. **O conceito função**: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau. Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de função**: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 1997. 134f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997. Acesso em: <  
[http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/nanci\\_oliveira.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/nanci_oliveira.pdf)>. Acesso em: 15 jan. 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: 2005. Volume único.

PASDIORA, Neusa M. W. Leineker. **Jogos e matemática**: uma proposta de trabalho para o ensino médio. 2008. Disponível em:<  
<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/978-4.pdf>>. Acesso em: 05 fev. 2013.

PORTANOVA, Ruth. **História da Matemática**: um recurso metodológico?[s.d]. Disponível em:<  
[http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/cd\\_xxvii\\_cnmac/cd\\_cnmac/files\\_pdf/10494a.pdf](http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/cd_xxvii_cnmac/cd_cnmac/files_pdf/10494a.pdf)>. Acesso em: 20 jan. 2013.

RIPPLINGER, Tiéle; BLANCHER, Vantoir Roberto. **A aprendizagem significativa e o ensino da matemática**: algumas reflexões. [s.d]. Disponível em: <  
<http://www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/matem%C3%A1tica/A%20APRENDIZAGEM%20SIGNIFICATIVA%20E%20O%20ENSINO%20DA%20MATEM%C3%81TICA.pdf>> Acesso em: 25 dez. 2012.

ROMERO, C. S., **Recursos Tecnológicos nas Instituições de Ensino**: Planejar aulas de matemática utilizando softwares educacionais. UNIMESP – Centro Universitário Metropolitano de São Paulo. 2006. Disponível:  
<http://www.fig.br/fignovo/graduacao.htm>>. Acesso em: 05 jan. 2013.

SANTOS, Cícero; MACLYNE, Diógenes. **A Modelagem Matemática como estratégia no Ensino-Aprendizagem**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte - MG, 2007.

SCHÖNARDIE, Belissa. **Modelagem Matemática e introdução da função afim no Ensino Fundamental**. 2011. 116f. Dissertação (Mestrado- programa de Pós - Graduação em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em:  
 <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/32422/000786646.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 10 jan. 2013.

SILVA, E. L.; MENESES, E. M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 4.ed. Florianópolis: LED/UFSC, 2005. Disponível em: [http://www.tecnologiaprojetos.com.br/banco\\_objetos/%7B7AF9C03E-C286-470C-9C07-EA067CECB16D%7D\\_Metodologia%20da%20Pesquisa%20e%20da%20Disserta%C3%A7%C3%A3o%20%20UFSC%202005.pdf](http://www.tecnologiaprojetos.com.br/banco_objetos/%7B7AF9C03E-C286-470C-9C07-EA067CECB16D%7D_Metodologia%20da%20Pesquisa%20e%20da%20Disserta%C3%A7%C3%A3o%20%20UFSC%202005.pdf) >. Acesso em: 15 jan. 2013.

SIQUEIRA, Maria Lucia Panichi ; NATTI, Paulo Laerte. **Modelagem Matemática - Perspectivas de uma aprendizagem mais agradável**. Curitiba: SEED-Paraná, 2009 (Artigo PDE/Cadernos PDE-SEED-Paraná).

SOARES, Maria Teresa Carneiro; PINTO, Neuza Bertoni. **Metodologia da Resolução de Problemas**. [s.d] Disponível em: [http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_24/metodologia.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf). Acesso em: 20 jan. 2013.

## APÊNDICE A – Caracterização das Funções Quadráticas

Conforme Lima et al (2006, p.115), uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se quadrática se existem números reais  $a, b, c$ , sendo  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Teorema:** (Caracterização das funções quadráticas) Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Assim,  $f$  é uma função quadrática se, e somente se, transforma toda progressão aritmética não-constante  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n), \dots$

**Demonstração:** Sendo  $f(x) = ax^2 + bx + c$  uma função quadrática e  $a_1, a_1+r, \dots, a_1+(n-1)r, \dots$  uma P.A não-constante, então não é difícil mostrar que  $f$  transforma essa P.A numa P.A de segunda ordem.

Reciprocamente, seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua com a propriedade de transformar toda P.A. não constante numa P.A. de segunda ordem não-degenerada. Se substituirmos  $f(x)$  por  $g(x) = f(x) - f(0)$ , podemos notar que  $g$  tem a mesma propriedade de  $f$ , sendo  $g(0) = 0$ .

Tomando-se a progressão aritmética  $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$  notamos que os valores  $g(1), g(2), \dots, g(n), \dots$ , formam uma P.A. de segunda ordem não-degenerada. Logo, existem constantes  $a \neq 0$  e  $b$  tais que  $g(n) = an^2 + bn + c$ . Mas,  $g(0) = 0$ . Daí,  $g(n) = an^2 + bn$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Agora, considere a seguinte progressão aritmética  $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \dots, \frac{n}{p}$ , sendo

um número  $p \in \mathbb{N}$  fixo. Assim, de modo análogo, podemos afirmar que existem  $a' \neq 0$

e  $b'$  tais que  $g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Segue, então que

$$an^2 + bn = g(n) = g\left(\frac{np}{p}\right) = a'(np)^2 + b'(np) = (a'p^2)n^2 + (b'p)n.$$

Logo, as funções  $ax^2 + bx$  e  $(a'p^2)x^2 + (b'p)x$  coincidem para todo  $x = n \in \mathbb{N}$ .

Assim, só podemos ter  $a = a'p^2$  e  $b = b'p$ , ou seja,  $a' = a/p^2$  e  $b' = b/p$ . Logo, para quaisquer números naturais  $n$  e  $p$  vale:

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a' n^2 + b' n = \frac{a}{p^2} n^2 + \frac{b}{p} n = a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right).$$

Segue, então, que as funções contínuas  $g(x)$  e  $ax^2 + bx$  são tais que  $g(r) = ar^2 + br$  para todo número racional positivo  $r = n/p$ . Daí,  $g(x) = ax^2 + bx$  para todo número real positivo  $x$ . Da mesma forma, considerando a P.A.  $-1, -2, -3, \dots$ , pode-se concluir que  $g(x) = ax^2 + bx$ ,  $\forall x \leq 0$ . Logo, fazendo  $f(0) = c$ , teremos  $f(x) = g(x) + c$ , isto é,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \text{ (LIMA, 2006. p.149-150).}$$