COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jefferson Nunes de Mello

IDEIA INTUITIVA DE CONTINUIDADE DE FUNÇÕES APLICADA AO ENSINO MÉDIO POR COMPOSIÇÕES E TECNOLOGIA

Rio de Janeiro
2019

Jefferson Nunes de Mello

NOÇÃO INTUITIVA DE CONTINUIDADE DE FUNÇÕES APLICADA AO ENSINO MÉDIO POR COMPOSIÇÕES E TECNOLOGIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro
2019

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

M527 Mello, Jefferson Nunes de
Ideia intuitiva de continuidade de funções aplicada ao ensino médio por composições e tecnologia/ Jefferson Nunes de Mello. – Rio de Janeiro, 2019.
93 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Aprendizagem significativa. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Título.
CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves da Silva – CRB7 5692.

Jefferson Nunes de Mello

NOÇÃO INTUITIVA DE CONTINUIDADE DE FUNÇÕES APLICADA AO ENSINO MÉDIO POR COMPOSIÇÕES E TECNOLOGIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em: 08/05/2019.

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr.Sc. Daniel Felipe Neves Martins
PROFMAT – CP II

____
Profa. Dra.Sc. Teresa Cristina de Carvalho Piva
Universidade Veiga de Almeida

____
Profa. Dra.Sc. Marilis Bahr Karam Venceslau
PROFMAT – CP II

Rio de Janeiro
2019

Dedico esta dissertação ao meu pai, ao meu avô, as minhas tias avós e ao meu grande amigo Zé Roberto, professor de matemática responsável por eu ter escolhido o magistério como ofício. Apesar de hoje não estarem fisicamente presentes, me deram a motivação necessária para buscar essa evolução. Dedico também a todos os meus alunos que participaram e se dedicaram a este projeto inovador.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Oxalá e todos os guias espirituais que me acompanham e me conduzem por caminhos que só me fazem buscar crescimento, aprendizado e evolução.

A minha esposa Isabella que nunca me permitiu desistir, que sempre me apoia e me passa confiança para conquistar todos os meus objetivos.

A minha querida mãe, incansável na busca pela minha melhor formação, que sempre me passou a importância dos estudos na minha formação humana e que além de mãe é a minha melhor professora.

Ao meu irmão Jadher que sempre secou minhas lágrimas e seguiu ao meu lado em todos os momentos.

Agradeço também a minha família por ser a minha base de sustentação.

Por fim, sem menos importância, agradeço aos meus amigos professores de matemática Eric, Wesley, Gil e Daniel por estarem comigo desde o início na batalha do magistério e por terem me assistido significativamente ao longo desse mestrado.

RESUMO

DE MELLO, Jefferson Nunes. **Noção intuitiva de continuidade de funções aplicada ao ensino médio por composições e tecnologia**. 2019. 93 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

Esta dissertação procura despertar a noção intuitiva de continuidade de funções reais de variável real em classes regulares do Ensino Médio. Para isso apoia-se na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e utiliza os conhecimentos prévios dos alunos, a saber, os conceitos de função composta e de função inversa como elementos de ancoragem. As atividades foram pensadas pelo autor para serem desenvolvidas com o auxílio do Geogebra.

Palavras-chave: David Ausubel; Aprendizagem Significativa; Continuidade; Descontinuidade.

ABSTRACT

DE MELLO, Jefferson Nunes. **Noção intuitiva de continuidade de funções aplicada ao ensino médio por composições e tecnologia**. 2019. 93 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.
.

This dissertation tries to evocate the intuitive notion of continuity of real functions in high school classes. Based on David Ausubel´s theory of meaningful learning, students' prior knowledge like composite functions and inverse functions were use as subsunters. The activities to be applied in classes were though by the author using GeoGebra.

Keywords: David Ausubel; Meaninful Learnng; Continuity; Descontinuity.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É senso comum ouvir entre professores de Matemática que durante o processo de ensino e aprendizagem do tópico *funções* ao longo do ensino médio o professor se depara com rotineiras percepções das dificuldades de seus alunos em assimilar conceitos e definições relativos a tal conteúdo. Ao longo do ensino da Matemática escolar do Ensino Médio, o estudo das funções acaba por privilegiar preponderantemente cálculos algébricos dando pouca ênfase a problemas contextualizados sobre o assunto evidenciando a sua modelagem matemática, por exemplo, ou mesmo buscando explorar o conteúdo através do campo das tecnologias. Tall (1997) afirma que o estudo das funções deve surgir das formas mais variadas possíveis e que estas formas devem contemplar o seu caráter numérico, algébrico, visual, gráfico e formal. Pinto (2008, p. 17) chama atenção do professorado para a seguinte questão:

> Como consequência desta prática, formamos alunos que têm normalmente grandes dificuldades em ler, interpretar, extrair dados e utilizar instrumentalmente gráficos de funções. Tais dificuldades ficam claras quando constata-se que um estudante é incapaz de ver um gráfico como algo além de pontos interligados determinados algebricamente por alguma estrutura semelhante à tabela. Estudá-los somente desta forma inviabiliza a formação do conceito e do objeto matemático 'gráfico de função', uma vez que o mecaniza e não estimula o aluno a operar com ele. Desta forma o gráfico fica sendo apenas um objetivo a ser alcançado e não um objeto matemático com o qual é possível operar e extrair dados.

A fim de diminuir tais dificuldades por parte dos alunos, esta pesquisa tem por um de seus objetivos levar ao professor e ao aluno à possibilidade de abordar a temática por diversas representações, de modo que o aluno se aproprie do conhecimento de maneira significativa, priorizando a tecnologia digital como principal ferramenta para a construção e para a consolidação do conhecimento num dado recorte do ensino das funções. Em particular, tem-se como destaque a operação de composição de funções reais de variável real porque gera diversos questionamentos, além de servir de excelente ponte para desenvolver paulatinamente a ideia intuitiva de continuidade.

Ao buscar uma fundamentação teórica que pudesse sustentar esse trabalho metodologicamente, a questão natural que surge é sobre qual referencial a pesquisa poderia se basear e também se, de maneira geral, o professor teria conhecimento satisfatório para o desenvolvimento do tema sob a óptica de tal referência bibliográfica, pois espera-se que o texto dessa pesquisa possa servir de um material que contribua substancialmente para mudanças de práticas em sala de aula.

Não apenas foi questionado se o conjunto de axiomático teórico vindo da Matemática seria suficiente para despertar o interesse do leitor e ser o principal material de apoio para a criação das atividades que seriam apresentadas aos alunos, mas também sobre a real possibilidade de utilização da mais simples ferramenta tecnológica disponível em consonância com a teoria apresentada, uma vez que a abordagem computacional foi adotada como ferramenta de auxílio à melhor compreensão do tema. Palis (2003) afirma que estudar uma função a partir do seu traço no plano cartesiano e totalmente desvinculado de sua lei de formação deixa o aluno sem referencial “por não existir explicitamente uma receita a ser seguida”. Este trabalho procurou explorar atividades que vão ao encontro da ideia de que o gráfico de uma função é a “sua cara para o mundo” e a exploração de suas potencialidades através de atividades que despertem no aluno curiosidade ou que contribuam para aquisição e consolidação de seus conhecimentos.

Um segundo momento foi definir se a pesquisa teria bases na Didática da Matemática ou na Psicologia da Educação. A segunda opção foi mais contemplativa e a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (1980) foi adotada como referencial teórico que apoiou a metodologia abordada com os alunos. O capítulo 2 procura responder as angústias expostas no parágrafo anterior e mostrará que a metodologia aplicada com os alunos durantes as aulas ministradas em um Ambiente de Aprendizagem Virtual foi toda construída segundo os preceitos da Teoria da Aprendizagem Significativa. Este referencial influenciou bastante a condução da prática pedagógica durante as atividades propostas para sala de aula. Ausubel (1980), ajuda com sua teoria a costurar o tema dessa pesquisa, assim como permite o estabelecimento de diálogo entre os conceitos vindos da matemática com outros temas já estudados pelos próprios alunos e que contribuíram bastante para que pudessem estabelecer conexões entre saberes, assim como desenvolver autonomia matemática, uma vez que leva em consideração conhecimentos e experiências pré-existentes sobre o tema ou mesmo suas capacidades de estabelecer relações com outros temas ou situações que permitam encontrar a solução de uma situação problema proposta de maneira mais criativa ou até mesmo com mais rigor do que o habitual.

No contexto das ferramentas computacionais no ensino das funções em Matemática foi adotado o GeoGebra[1] como principal aliado no desenvolvimento dessa pesquisa e o leitor

[1] Segundo o site do Instituto GeoGebra, o GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito, para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Foi criado em 2001 como tese de doutoramento de Markus Hohenwarter e sua popularidade tem crescido a cada dia. Atualmente é usado em mais de 190 países, traduzido para 55 idiomas, possui mais de 300mil downloads mensais, além de ter recebido vários prêmios mundialmente. O leitor é convidado a dar os primeiros passos desvendando o GeoGebra em https://ogeogebra.com.br/arquivos/oqueeogeogebra.pdf e baixar o programa a partir do site oficial https://www.geogebra.org/ caso queira acompanhar a leitura do texto realizando as atividades propostas.

poderá perceber que a linguagem corrente, assim como a linguagem matemática e toda uma comunicação própria estabelecida pelo software acabam interligados e todos juntos funcionam como facilitadores da aprendizagem.

A escolha de tal software nos permite ter acesso gratuito a combinações de conceitos de Geometria e Álgebra através de uma Matemática dinâmica, por meio de uma única interface gráfica. As versões para aplicativo do mesmo programa está disponível para IOS, Android e Windows Phone e estão disponíveis para download em celular e tablets, além de possuir ainda uma versão on-line que possibilita o seu amplo uso. Pela facilidade de obtenção desta ferramenta, pelo fato de seu menu estar escrito em língua portuguesa em seus comandos e pela diversidade de material tutorial que permite ao professor explorar e desenvolver diversas classes de funções, o GeoGeobra torna-se peça fundamental nesse trabalho e acima de tudo, altamente democrático por diversos motivos, motivador pelo seu caráter dinâmico e de alto grau de interatividade com o usuário.

Sobre o estudo das funções compostas currículo do Ensino Médio, a prática em sala de aula se dá normalmente através de enfadonhos cálculos algébricos, fazendo com que alunos e professores repitam um verdadeiro mantra sobre a inutilidade do tema. Quase a totalidade dos autores dos livros didáticos que fazem parte do PNLD[2] já retiraram este tópico de suas coleções e a BNCC[3] não especifica coisa alguma sobre a obrigatoriedade da exploração dessa classe de funções. Como atualmente não tem sido um tema recorrente nos principais exames vestibulares nem no ENEM, os professores dão pouca ênfase ao assunto, quando abordam. Há escolas que retiraram definitivamente o tema *funções compostas* do currículo e, sem ter dado a atenção devida ao tópico e sem a análise correta das possibilidades de questionamentos acerca das potencialidades de uso em sala de aula onde podem ser explorados. Por fim, o tema tornou-se desinteressante e esquecido pelos professores e alunos. Ainda referindo-se a Tall (1992), esse autor nos diz que ao invés de serem trabalhadas as definições formais inicialmente, com elementos pouco conhecidos pelos estudantes, é preferível que se procure achar uma aproximação que construa conceitos que estejam familiarizados com os estudantes e sejam as bases, para um desenvolvimento matemático posterior.

[2] O leitor interessado encontra os livros selecionados pelo Programa Nacional do Livro Didático para a área de Matemática em https://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-livro-didatico/item/11148-guia-pnld-2018

[3] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagem essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Todas as informações sobre ‘a base’ estão em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Os poucos livros didáticos oficiais que abordam o tema, como a coleção Matemática: ciência e aplicações, aprovada no PLND-2018, Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016), estabelecem uma abordagem frívola que não relaciona, por exemplo, a relação importante entre função inversa e função composta, isto é, os autores não sinalizam que a inversa de uma função bijetora f(x) é uma função g(x) se e somente se f(g(x))=g(f(x))=x. De importantíssimas possibilidades de exploração em sala de aula, essa propriedade será trazida durante o desenvolvimento deste trabalho com objetivo de dialogar também com o professor.

Durante a pesquisa, foi proposta uma série de atividades a um grupo de vinte alunos de 1ª e 2ª séries do Ensino Médio, todos voluntários e devidamente autorizados por seus representantes legais para participarem das aulas extras no contraturno. Tais atividades serão apresentadas futuramente, assim como os resultados dos alunos em relação às propostas de trabalho contidas nas tarefas. Essas tarefas/atividades tiveram duração de 50 a 100 minutos por semana durante 6 semanas, e foram realizadas no contraturno em que os alunos estiveram matriculados regularmente, segundo o seguinte calendário:

1ª semana: Apresentação da ferramenta GeoGebra e seu menu. Atividades de exploração: Construção de gráficos de funções; determinação do maior domínio de definição das funções, determinação do conjunto imagem, exploração do conceito de bijeção e um outro olhar sobre a função inversa;

2ª semana: Estudo da continuidade das funções polinomiais de 1º e 2º graus;

3ª semana: Função Composta e continuidade – 1ª parte;

4ª semana: Função Composta e continuidade – 2ª parte;

5ª semana: Continuidade em Funções Racionais por composição de funções

Diante de um modelo de aula e de sala de aula cada vez menos atrativo e percebendo que os alunos estão permanentemente ligados a ferramentas tecnológicas através de seus smartphones, smartwatches, tablets, laptops e toda inovação que invade nosso cotidiano, ficou evidente a necessidade de aproximar as aulas destas turmas de 1ª série de ensino médio a todo esse atrativo, de maneira significativa e mais segura para o estudante.

Diante de um grupo de alunos entusiasmados, a exploração e o estudo do gráfico das funções racionais com suporte do software GeoGebra foi o ponta pé inicial para explorarmos a ideia de descontinuidade de uma função em relação a um ponto e posteriormente em mais pontos do seu maior domínio de validade. A partir da composição de funções estudaremos os gráficos das funções racionais juntamente com a ideia intuitiva de continuidade, porque dessa maneira podemos ampliar o conhecimento dos alunos de ensino médio e expandir suas habilidades em direção de conceitos, possibilidades de formular conjecturas e obter conclusões acerca de temas mais abstratos que certamente só seriam possíveis em projetos de nível superior, e que sendo bem explorados no universo do Ensino Médio de maneira intuitiva, trazem qualitativos ganhos em relação à aprendizagem. Um exemplo clássico é o conflito computacional gerado ao analisar o domínio de uma função racional cuja lei de formação é resultante da composição de funções e o gráfico plotado em tela pelo GeoGebra.

Estima-se alcançar com as atividades de análises gráficas de funções a partir da composição entre duas funções através do software GeoGebra uma maior autonomia do aluno e consequentemente o domínio das diferentes notações que uma função pode apresentar que vai além de uma listagem de valores em tabelas ou representações por diagramas seguidos de flechas. Espera-se também que este trabalho leve ao professor a possibilidade de reconstruir e ampliar o conceito das funções compostas fixando as condições sobre as quais funções dessa natureza existam e as funções racionais exploradas de tal modo que o aluno compreenda o conceito de função continua/descontínua em um ponto ou ao longo de seu domínio.

2 A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

2.1 Sobre David Ausubel

David Paul Ausubel foi um psicólogo norte americano de origem judaica nascido no Brooklyn, cidade de Nova Iorque aos 25 de outubro de 1918 e com a morte datada em 9 de julho de 2008, no condado de Hyde Park, Estado de Nova Iorque. Sua maior contribuição se deu no campo da Psicologia Educacional, em especial na área de Psicologia Cognitiva. Casado com Pearl Ausubel, teve dois filhos.

Ausubel graduou-se bacharel em psicologia na Universidade da Pennsylvania (1934), em psiquiatria na Universidade de Middlessex (1943) e concluiu mestrado e doutoramento em psicologia na Universidade de Columbia (1950) com ênfase em psicologia da aprendizagem[4]. Muito influenciado pelas aulas que obteve com Jean Piajet (1896-1980), a maioria de seus estudos na área giram em torno de descobrir como os seres humanos adquirem conhecimento. Seu referencial teórico foi o Cognitivismo[5], teoria que estuda os processos de mediação da atividade intelectual: organização do conhecimento, processamento de informações e raciocínio lógico. Este referencial opõe-se ao Behaviorismo[6], que se interessa, predominantemente, pelas componentes observáveis do comportamento de acordo com o modelo conhecido por E-R, estímulo-resposta.

Em 1973, aposenta-se de uma vida acadêmica de muito sucesso na Universidade de Nova Iorque e segue na área de psiquiatria até os 75 anos de idade, época em que publicou quatro livros muito lidos: Ego development and Psychopathology (1996), The Acquisition and Retention of

[4] A psicologia da aprendizagem procura explicar o processo ensino/aprendizagem, além de levar professores e alunos à produção eficaz do conhecimento. A produção eficaz do conhecimento tem compromisso com o saber válido, duradouro e aplicável pela vida afora. “O real conhecimento é assegurado quando se percebem relações de significados e dos fins para que servem”, afirma João de Oliveira e Silva, na obra Psicologia da Aprendizagem, de 1990, ao escrever sobre Ausubel.

[5] É uma abordagem teórica para o entendimento da mente. O movimento foi uma resposta ao behaviorismo, que, segundo os cognitivistas, negligencia a cognição. A psicologia cognitiva deriva seu nome do latim *cognoscere* ('conhecer') e é, em parte, derivada de antigas tradições de investigação acerca do pensamento e de processos de resolução de problemas. Os behavioristas reconhecem a existência do pensamento mas este é identificado como um comportamento. Os cognitivistas argumentam que o modo como as pessoas pensam tem impactos sobre seu comportamento; portanto, o modo de pensar não pode ser um comportamento em si. Posteriormente, os cognitivistas defenderam que o pensamento é tão essencial à psicologia que o estudo do pensamento seria o seu próprio campo de estudo

[6] O termo vem do inglês *behavior* que significa, comportamento. É o conjunto de abordagens, nascidas nos séculos XIX e XX, que propõe o comportamento como objeto de estudo da psicologia.

Knowledge (2000), Theory and Problems of Adolescent Development (2002) e Death and the Human Condition (2002).

2.2 O que a teoria de Ausubel trouxe de novo à sua época?

Segundo Silva (1990), Ausubel está interessado em descrever um tipo de aprendizagem que permita a compreensão e a utilização dos conhecimentos já adquiridos pelo aprendiz. O enfoque de sua teoria reside no processo pelo qual o novo conteúdo se organiza e se integra na estrutura cognitiva daquele que aprende. O conhecimento pelo professor daquilo que o aluno já possui de conhecimento é fator decisivo no processo ensino-aprendizagem, que Ausubel (1980) evidencia ao dizer que se tivesse que reduzir toda a Psicologia da Aprendizagem a um único princípio, formularia que "de todos os fatores que influenciam a aprendizagem, o mais digno de nota consiste no que o aluno já sabe. Investigue-se isto e ensine-se ao aluno de uma maneira consciente".

Ausubel (1980) admite que a estrutura cognitiva é construída por tudo o que o indivíduo já sabe, e isso inclui vivências, ou seja, informações, conceitos, leis, princípios, definições, dados, organização, entre tantos outros. Porém, a fim de que a nova aprendizagem se instale na mente do aluno de maneira significativa, é fundamental que a estrutura cognitiva seja organizada, ordenada e precisa. Desorganização e ambiguidade, de acordo com Ausubel (1980), fazem com que o processo de aprendizagem se dê de maneira prejudicial ou incompleta. A estrutura cognitiva deve ser hierarquicamente organizada e a melhor representação é a piramidal, em que os conceitos com o maior poder de inclusão, abstração e generalização ocupem o vértice da pirâmide. Já os conceitos menos abrangentes como os fatos e informações, devem ocupar a base da pirâmide. O conhecimento prévio que o aluno possuiu acerca de um assunto funciona como um "ponto de ancoragem" onde as novas informações irão encontrar um modo de se integrar a aquilo que o indivíduo já conhece de alguma maneira. Esta estrutura prévia orienta o modo de assimilação de novos dados, que também influenciam o conhecimento armazenado resultando numa interação entre novos e velhos dados, gerando aprendizagem. Este processo de associações de múltiplas informações que se relacionam, denomina-se **aprendizagem significativa.**

Como um forte contestador da aprendizagem mecânica, por acreditar ser este tipo de aprendizagem um caminho pelo qual o conhecimento é armazenado com muito pouca ou nenhuma informação prévia na estrutura cognitiva, a ponto de dificultar suas relações com outros conhecimentos adquiridos, Ausubel sugere sempre a apresentação de conceitos com alto teor de novidade para os alunos, a fim de que forçosamente os aprendizes busquem conexões entre o que está sendo lançado e o que já é conhecido pelo aluno.

Uma crítica forte dos estudiosos da Teoria da Aprendizagem Significativa em relação à aprendizagem mecânica é que o aluno apenas memoriza o novo material de forma literal, sem contudo compreender o assunto. Houve aprendizagem? Sim, porém se deu de maneira receptiva e o conteúdo foi exposto em sua forma final, acabada. O aluno não consegue fazer conexões entre assuntos pelo fato de ter recebido o conhecimento de forma direta, receptiva e automática, o que não permite exercitar a criatividade e produzir questionamentos. Isso já não ocorre quando o professor propõe ao aprendiz atividades em que a aprendizagem se dá por *descoberta*, isto é, quando o conteúdo não é colocado para o aluno em sua forma final, mas sim quando é encontrado ou redescoberto por ele. O professor oferece apenas dados essenciais sobre o assunto que possibilitem a realização da atividade por parte dos alunos.

Muitas vezes, a aprendizagem mecânica provoca surpresas e até ansiedade nos aprendizes, principalmente quando percebem depois de muito tempo que o que está sendo apresentado pelo professor tem conexões com assuntos previamente estudados e que se perdeu muito tempo até se dar a consolidação do processo de aprendizagem. Conteúdos interpretados pelos alunos como extremamente difíceis de serem assimilados ou complexos em sua estrutura poderiam ser mais facilmente compreendidos se encontrassem um elo de ancoragem existente na sua própria estrutura cognitiva, os **subsunçores**[7]. Estes elos de ancoragem são chamados por Ausubel de "advance organizers[8]", que na língua portuguesa pode ser traduzido por organizadores prévios. Tais organizadores são como âncoras criadas a fim de manipular a Estrutura Cognitiva, interligando conceitos aparentemente não relacionáveis através da abstração.

De acordo com Silva (1990) são conceitos inclusivos e abrangentes existentes na estrutura cognitiva, capazes de incorporar conhecimentos menos gerais e ou específicos, necessários para proporcionar firme ancoragem aos novos conteúdos. Sem os subsunçores, os novos conteúdos cairiam no vazio, uma vez que não se interligariam com os conceitos pré-existentes na estrutura cognitiva do aluno. Para a ocorrência da aprendizagem significativa é imprescindível que os

[7] O *subsunçor* é uma estrutura específica através da qual uma nova informação pode se integrar ao cérebro humano, que é altamente organizado e detentor de uma hierarquia conceitual que armazena experiências prévias do aprendiz.

[8] É a informação apresentada por um instrutor que ajuda o estudante organizar as novas informações que recebe. Direcionada à informação que é mais importante no material de estudos que o aluno recebe sobre um tema, permite que o aluno estabeleça relações e saiba escolher o que efetivamente é prioridade em relação ao conhecimento que necessitará adquirir a fim de terminar uma tarefa proposta. É através desses subsunçores que o aluno processa e compreende a informação apresentada pelo professor e que consegue perceber e estabelecer relações entre conceitos básicos e novos termos que estão sendo apresentados.

subsunçores sejam claros, estáveis e relevantes. Vale a pena destacar que não é somente o conhecimento que deve ser hierarquicamente organizado, mas que cada conteúdo presente em um currículo deve ser estruturados de maneira que conceitos mais amplos e gerais ocupem o topo do conjunto e incluam os menos abrangentes.

A aprendizagem significativa se divide em três tipos: representacional (atribui significados a símbolos), de conceitos (amplia a aprendizagem relacional, o estudo da linguagem, por exemplo) ou proposicional (necessita do domínio de conhecimentos prévios, dos conceitos e dos símbolos para promover compreensão de um assunto).

2.3 Como se dá a aprendizagem segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa ?

É importante que o aluno no momento do desenvolvimento da atividade seja autor, seja ativo e apresente uma disposição para estabelecer constantemente ligações entre conteúdos já estudados e que jamais busque a aprendizagem como pura memorização ou a simulação de uma associação de conteúdos. O professor há que estar atento para isso, sempre lançando novos questionamentos que propiciem ao aluno estabelecer constantes relações entre conteúdos.

Para Ausubel (1980) a aprendizagem significativa se dá quando há *substantividade* e quando *não há arbitrariedade.* Isto é, quando a relação entre o conteúdo a ser aprendido e os subsunçores pertence ao campo das ideias[9] e quando o material for realmente significativo ao ponto da relação entre o novo conteúdo e os subsunçores não ser apenas literal. Por exemplo, ao confeccionar um material ou propor uma atividade para sala de aula, a ordem de apresentação deve priorizar as ideias mais globalizantes e, então, progressivamente apresentar as ideias mais específicas e seus detalhes. Esta ordem de apresentação, corresponde à disposição natural de aquisição do conhecimento. Silva (1990) chama atenção para o fato do professor que em sua prática docente "leva os alunos à aquisição de detalhes, sem que antes eles tenham formado uma visão de conjunto, pode estar contribuindo para a realização de uma aprendizagem automática em vez de significativa". Esta fala foi de grande valia quando as atividades em laboratório desta pesquisa foi desenvolvida. Por que tal cuidado deve ser tomado? Simples, para haver aprendizagem, o novo conceito interagiu com o familiar ao indivíduo e por vezes ocorre uma reorganização do pensamento, notadamente quando o novo conceito admite outro significado.

[9] Quer dizer que na inserção de outros símbolos ou modificação da linguagem, a ideia central permanece e o aluno é capaz de resolver a questão. Por exemplo, um triângulo pode ser definido por uma curva poligonal fechada com exatamente três segmentos de reta ou por um polígono formado por exatos três ângulos internos. Independente da definição, todos chegam à concepção do triângulo.

A melhor maneira de garantir que a aprendizagem se deu de maneira significativa consiste em sempre apresentar problemas novos e não familiares, pois assim há necessidade constante de reorganização do conhecimento. A leitura e releitura do problema ou do enunciado de um comando deve ser sempre explorada pelo professor, verificando se o aluno compreendeu o que está sendo pedido ouvindo-o a fim de se estabeleça um esforço de compreensão ideativa.

Silva (1990) resume seu pensamento sobre os trabalhos de Ausubel (1980) dizendo que a aprendizagem significativa "é resultado da atividade intelectual ideacional, que considera mais produtivo e duradouro, relacionar, interagir e reter ideias, conceitos e proposições gerais e estáveis a reter informações, dados e conhecimentos específicos, principalmente quando frutos apenas de um trabalho de fixação literal, arbitrário". O método de ensino ou a prática a ser realizada com os alunos devem priorizar a associação dos conceitos presentes nos conteúdos com os subsunçores do aprendiz, de forma a criar aprendizagem significativa, associar conceitos e consolidar efetivamente o aprendizado. Ausubel propõe uma espécie de reconciliação integrativa, isto é, uma teoria comprometida com a clareza e a discriminação dos conceitos a fim de valorizar sempre a estrutura cognitiva do aprendiz, fazendo com que o instrutor desenvolva um método de trabalho ou um material didático que esteja subordinado à capacidade do aluno de assimilar a informação.

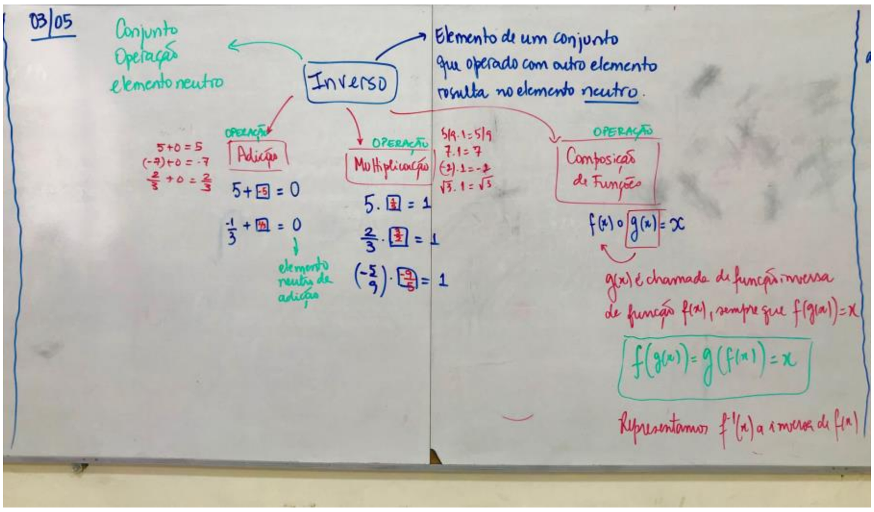
No capítulo seguinte, vamos apresentar conteúdos de Matemática que funcionaram como elos de ancoragem para que chegássemos com mais segurança ao objetivo dessa pesquisa e para que subsunçores fossem ativados a fim de garantir consolidação da aprendizagem. Convidamos ao leitor a associar os exemplos e as práticas desenvolvidas com os alunos no próximo capítulo com o que nestas linhas acima foram expostas.

3 COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Durante o Ensino Médio o tema função composta pouco é explorado pelos professores em sala de aula. Diferentemente da maneira como era abordado até inicio dos anos 2000, atualmente o tema é apresentado de maneira superficial e aqueles que ainda buscam conceituar e explorar exercícios acabam por se limitar ao cálculo algébrico. Poucas são as atividades encontradas em livros de ensino médio em que se pode explorar o assunto de forma contextualizada ou até mesmo encontrar propostas onde o aluno pode aprofundar o tema e chegar a conclusões como, por exemplo, a relação entre a função inversa e função composta citada na introdução dessa pesquisa. Tanto o aluno quanto o professor acabam ficando reféns desse "algebrismo" puro que distancia a composição de funções de sua aplicabilidade mais direta e de possíveis contextualizações reais impondo ao tema um falso status de ser de pouca relevância ao longo do estudo das funções, o que não é verdade.

O uso da linguagem pode dar bastante sentido ao que expomos aqui. Por exemplo, numa aula de introdução ao conceito de função inversa, dizer que a "inversa desfaz o que a função faz e que somente existe inversa de funções bijetoras" é de uma pobreza matemática indescritível, pois o tema guarda infinitas possibilidades de estabelecimento de conexões entre assuntos estudados pelos alunos que consolidarão a aprendizagem do tópico, a partir do momento em que o professor fizer associações com temas já vivenciados pelos próprios alunos. Sejamos mais claros, antes de abordar o tema função inversa, expressões como **inverso de um número real** em relação à adição (apresentados através de muitos exemplos) ou inverso de um número real em relação à multiplicação(com outros tantos exemplos), servem para conectar o estudante e estabelecer elos de ancoragem. Palavras e expressões matemáticas esquecidas com o tempo vêm à tona e os alunos criam rápidos elos, além de estabelecerem profundas conexões aparentemente perdidas. Quantos alunos compreendem melhor (ou pela primeira vez) o que significa 'operar' ou o verdadeiro significado de um elemento de um conjunto ser o 'elemento neutro' em relação a uma operação, a partir dessas atividades exploratórias? Assim, de posse desses conhecimentos adormecidos, emergidos e ressignificados, dizer que uma função $g(x)$ é chamada inversa da função $f(x)$, no conjunto das funções bijetoras ao operarem através da composição de funções e 'devolverem' como resultado o *elemento neutro do conjunto das funções*, a função identidade, passa fazer muito mais sentido para o aluno, porque houve *substantividade*. A aprendizagem torna-se assim, significativa, no sentido de Ausubel.

Figura 1 - Atividade Motivacional



Fonte: O autor, 2018.

Desta forma, acreditamos estar justificado porque tomaremos como ponto de partida a análise da abordagem do tema funções compostas realizada em dois livros didáticos de matemática[10]: O tópico Composição de funções do capítulo 9 da coleção Matemática: ciência e aplicações, 1: ensino médio / Gelson Iezzi, aprovada no PLND-2018 e o Capítulo X, Função Composta e Função Inversa, do livro Fundamentos de Matemática Elementar, volume 1: Conjuntos, funções de Gelson Iezzi e Carlos Murakami, os únicos livros que ainda trazem o tema no seu contexto curricular.

Ao observar as abordagens de ambos os livros objetivando a pesquisa, é natural indagar se teria o professor, ao utilizar as obras citadas, todo o suporte para preparar ou desenvolver essa temática em sala de aula sem um referencial que viesse da didática da matemática ou da psicologia da aprendizagem. O professor encontraria nesses livros meios de como introduzir o tema através de uma situação-problema, por exemplo? Teriam o professor ou o aluno atividades propostas que explorem o campo das tecnologias digitais para aproximar o cálculo algébrico de outras representações semióticas? Pretende-se, com esta análise de livros didáticos, investigar intencionalmente estes questionamentos além de comparar a abordagem do tema nestas duas importantes obras do ensino da matemática. Buscaremos sinalizar pontos que poderiam ser melhores desenvolvidos e alguns outros tópicos que deixaram de ser abordados e que são importantes segundo o referencial teórico que suporta esta pesquisa. Concomitantemente, estima-

[10] O objetivo é possibilitar, através da análise de tais capítulos, verificar se há possibilidade de criação de elementos de ancoragem importantes.

se compreender como o uso da tecnologia digital poderia auxiliar o professor e o aluno no desenvolvimento desta temática.

3.1 Composição de funções - Livro didático Matemática: ciência e aplicação

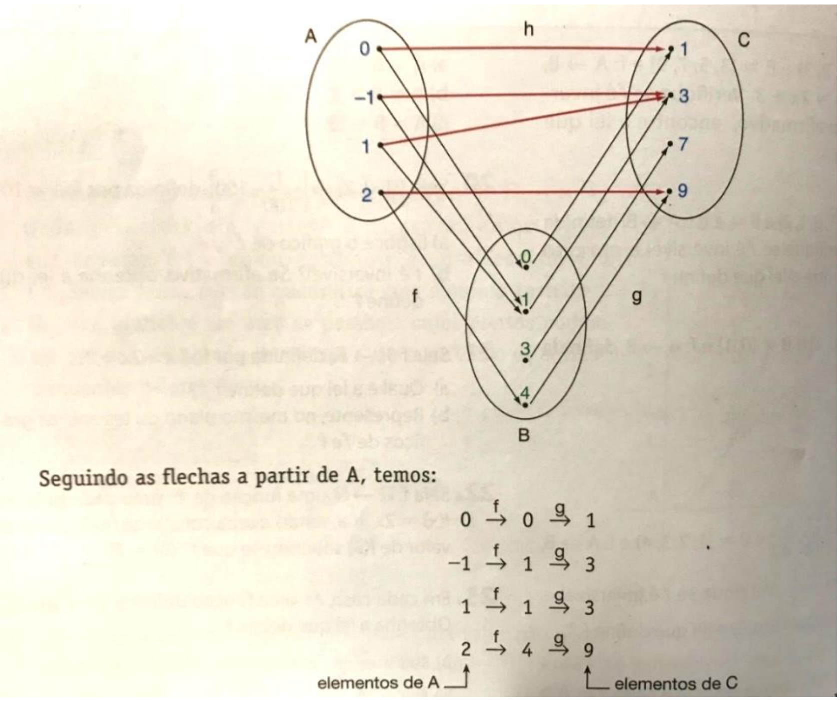
Na coleção ‘Matemática: ciência e aplicações’, aprovada pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático para o ano de 2018, Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016) dão total ênfase ao cálculo algébrico na obtenção de funções compostas do tipo g∘f(x) e f∘g(x). Ao longo do desenvolvimento do tópico não há exemplos contextualizados, análises gráficas além de não terem sido encontrados registros de atividades que explorem as tecnologias digitais disponíveis aos alunos. Nem mesmo no material de apoio ao professor foi encontrado outras sugestões de abordagem para o tema.

Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2016) antecipando a definição de função composta introduzem o conceito por meio de um exemplo clássico de diagramas. Vejamos:

Sejam os conjuntos A={-1, 0, 1, 2}, B= {0, 1, 3, 4} e C= {1, 3, 7, 9}e as funções f: A→B, definida pela lei f(x) = x², e g: B→C, definida por g(x) = 2x+1.

Essa situação é observada no diagrama de flechas abaixo:

Figura 2 - Diagrama de flechas



Fonte: Iezzi et al (2016, p.274).

É possível verificar que cada elemento do conjunto A está associado a um único elemento correspondente em C, isto é, h é uma função de A em C. Isso é destacado pelas setas vermelhas, onde tem-se que:

$h(-1)=3$; $h(0)=1$; $h(1)=3$; $h(2)=9$.

Os autores denominam essa função h de função composta de g com f, nesta ordem, e indica as notações $g \circ f$ ou $g(f(x))$ como a composta de g com f. Sendo assim, $h(x) = (g \circ f) = g(f(x))$. Confira:

$h(-1) = g(f(-1)) = g(1)=3$;

$h(0) = g(f(0)) = g(0)=1$;

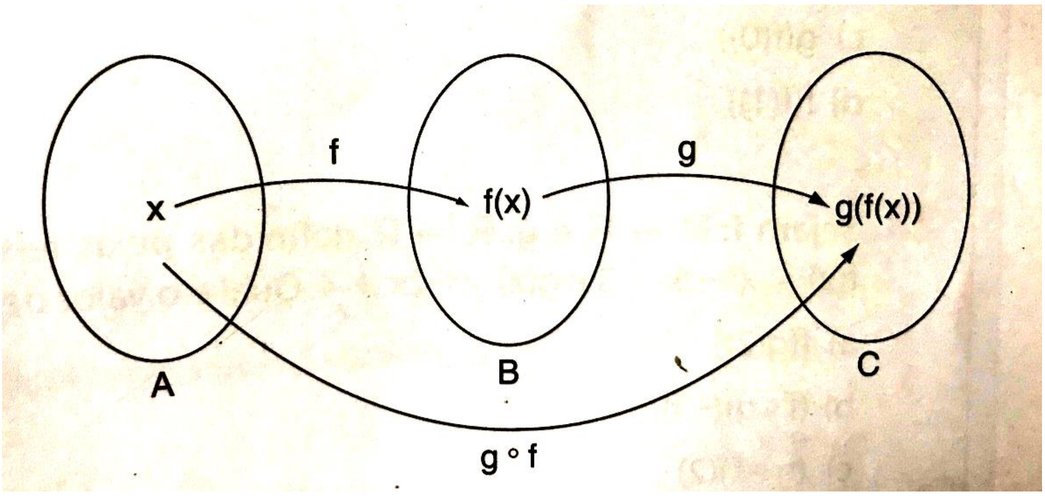
$h(1) = g(f(1)) = g(1) = 3$;

$h(2) = g(f(2)) = g(4) = 9$.

Na sequência, estabelecem a lei que define a função h citada acima como $h(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2(x^2)+1 = 2x^2+1$ e formaliza essa definição da seguinte maneira:

"Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ duas funções. Chama-se ***função composta de g com f*** a toda função de A em C indicada por $g \circ f$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in A$"

Figura3 - gof



Fonte: Iezzi et al (2016, p.275).

Diferentemente de outros capítulos do livro onde são facilmente encontrados exercícios introdutórios contextualizados, o autor prioriza mais uma vez exemplos e exercícios de fixação voltados para o método algébrico substitutivo de uma função em outra a fim de compô-las. Vejamos dois exemplos resolvidos que destacaremos a seguir:

➢ Exemplo 3 (IEZZI, et al, 2016, p. 275):

Se f e g são funções de R em R definidas por f(x) = 2x e g(x) = -3x, então a composta de g com f é dada pela lei:

g(f(x)) = g(2x) = -3 . (2x) = -6x ou (g∘f) (x) = -6x

Observe, por exemplo, que:

- (g∘f)(-1) = g(f(-1)) = g(-2) = -3.(-2) = 6;

Usando diretamente a lei obtida acima, vem (g∘f)(-1) = -6.(-1) = 6

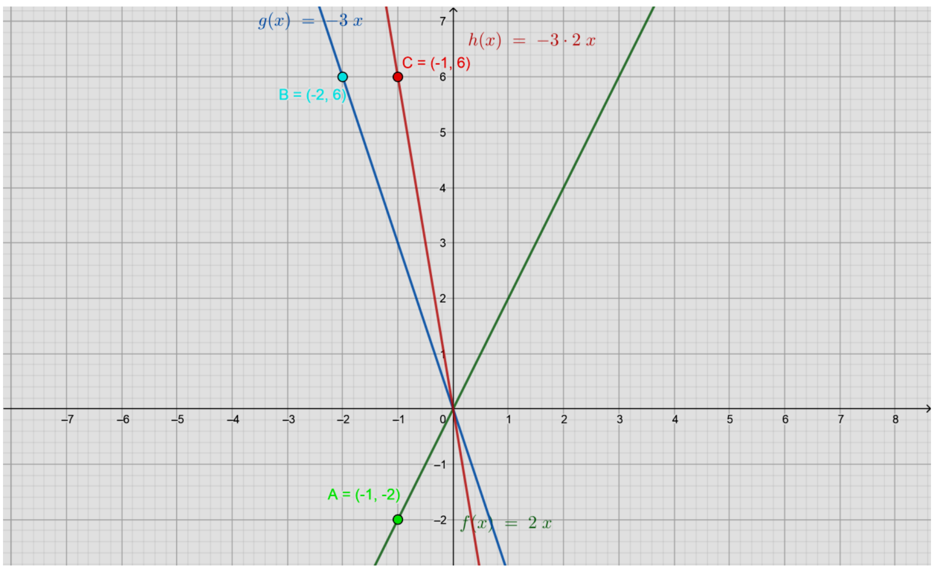
- (g∘f)(1/2) = g(f(1/2)) = g(1) = -3 . 1 = -3;

Usando diretamente a lei, vem (g∘f)(1/2) = -6 . 1/2 = -3

Destaca-se o exemplo 3 devido à abordagem dada pelos autores no desenvolvimento da dupla forma de resolução. Esta análise possibilita ao aluno a percepção que a imagem da função composta poderá ser obtida através de sucessivas substituições ou pelo desenvolvimento através de uma única substituição na lei que define a função (g∘f) (x). Essas duas formas de resolução no exemplo 3 poderiam ser mais exploradas com o auxílio da ferramenta Geobebra, pois proporcionaria ao aluno a aproximação entre os resultados algébricos obtidos e da matemática gráfica. Eis a primeira tentativa de associação do tema com assuntos já vistos pelos alunos.

Vejamos a seguir:

Figura4 - g(f(-1))



Fonte: o autor, 2018.

Onde se entende que $h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = -3 \cdot 2x = -6x$ e é possível visualmente perceber neste gráfico que $g(f(-1)) = g(-2) = 6$ ou ainda que $h(-1) = (g \circ f)(-1) = 6$.

- Exemplo 4 (IEZZI, et al, 2016, p. 275):

Se f e g são funções de R em R definidas por $f(x) = 3x$ e $g(x) = x^2$, então a composta de g com f é dada pela lei:

- $g(f(x)) = g(3x) = (3x)^2 = 9x^2$

Vamos verificar qual é a lei que define a função composta de f com g. Temos:

- $f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2$

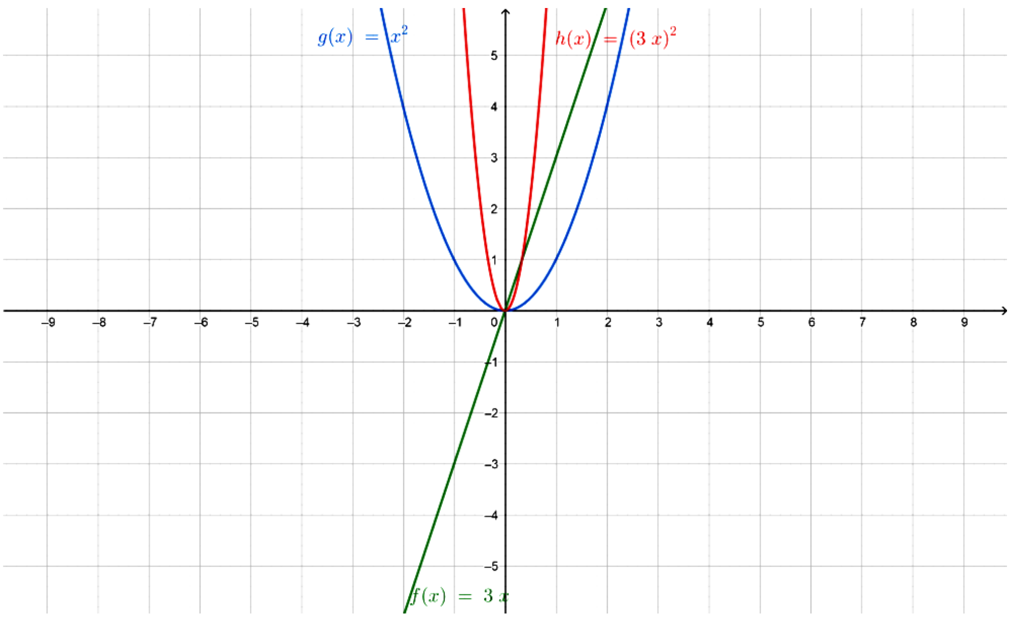
Mostrando que **f∘g** e **g∘f** são funções com diferentes leis de formação.

Esse exemplo 4 é de fundamental importância no desenvolvimento desta temática, pois é possível para o aluno perceber que $f \circ g \neq g \circ f$, isto é, a propriedade da comutatividade não é valida para composição de funções. Este raciocínio poderia ser explorado e desenvolvido através da análise gráfica via do software Geogebra possibilitando ao aluno uma nova abordagem além da algébrica adotada pelo autor.

Vejamos a seguir os gráficos de:

- $h(x) = g(f(x)) = g(3x) = (3x)^2 = 9x^2$

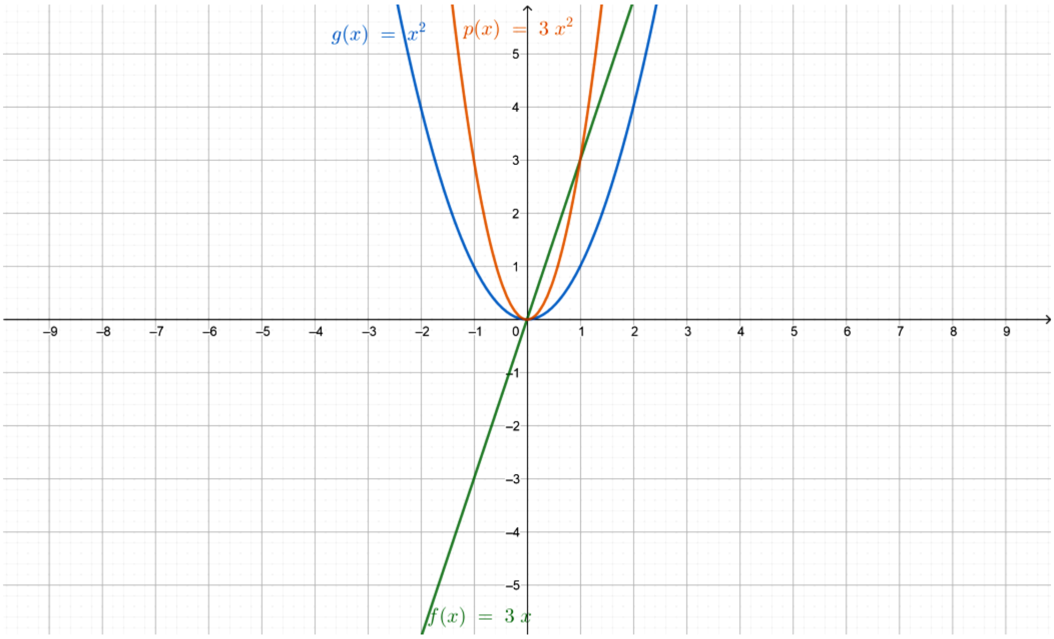
Figura 5 - h(x)=9x²



Fonte: o autor, 2018.

- $p(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2$

Figura 6 - $p(x)=3x^2$



Fonte: o autor, 2018.

Através das construções dos gráficos das funções f(x) e g(x) bem como das construções das compostas h(x) = g(f(x)) e p(x) = f(g(x)) é facilmente perceptível pelo o aluno a diferença entre os gráficos das compostas obtidas. As curvas são parábolas distintas, formadas por pontos distintos. Por exemplo, h(-1) = h(1) = 9 e por outro lado p(1) = p(-1) = 3 e assim teremos que $h(1) = g(f(1)) \neq p(1) = f(g(1))$ e $h(-1) = g(f(-1)) \neq p(-1) = f(g(-1))$, isto significa dizer que compor g(x) com f(x) não é o mesmo que compor f(x) com g(x), ou seja, de maneira geral funções compostas não são comutáveis.

Outros exercícios que podem ser destacados ainda nesse capítulo de composição de funções são os exercícios de número 1, da página 278 e o teste número 28, da página 283, que analisaremos a seguir. Estes exercícios poderiam ser utilizados pelo autor como introdução ao capitulo, antes mesmo dos conceitos iniciais do tema. Poderiam ainda ser utilizados pelo docente como uma situação-problema a ser investigada pelos alunos e a partir das conclusões e observações admitidas construir o conceito inicial de composição de funções.

Vejamos:

- Teste 28 – U.F. Santa Maria (IEZZI, et al, 2016, p. 283):

Os praticantes de exercícios físicos se preocupam com o conforto dos calçados utilizados em cada modalidade. O mais comum é o tênis, que é utilizado em corridas, caminhadas, etc. A numeração para esses calçados é diferente em vários países, porém existe uma forma para converter essa numeração de acordo com os tamanhos. Assim, a função $g(x) = \frac{x}{6}$ converte a numeração dos tênis fabricados no Brasil para a dos tênis fabricados nos Estados Unidos, e a função f(x) = 40x + 1 converte a numeração dos tênis fabricados nos Estados Unidos para a dos tênis fabricados na Coreia. **A função h que converte a numeração dos tênis brasileiros para a dos tênis coreanos é**

a) $h(x) = \frac{20}{3}x + \frac{1}{6}$.

b) $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$.

c) $h(x) = \frac{20}{3}x + 1$.

d) $h(x) = \frac{20x + 1}{3}$.

e) $h(x) = \frac{2x + 1}{3}$.

Este exercício pode perfeitamente ser usado com base introdutória na apresentação do conteúdo de composição de funções. O autor pode, por exemplo, explorar essa atividade por meio de outras conjecturas e levantar questionamentos do tipo:

Qual seria a numeração de um tênis fabricado na Coreia de uma pessoa que no Brasil usa um tênis de numeração 42?

Esse tipo de questionamento, antes mesmo do conteúdo apresentado, induz ao aluno a busca pelo número do tênis produzido nos Estados Unidos usando a função g(x) para só depois desse resultado usá-lo obter o número deste tênis na Coreia.

Basicamente os alunos iriam obter g(42) = 42/6 = 7 e assim o número 7 seria o número nos Estados Unidos de um tênis de numeração 42 produzido no Brasil. A seguir seria calculado f(7) = 40.7+1 = 281 e desta forma o tênis de número 7 nos Estados unidos corresponderá ao tênis de numeração 281 na Coreia.

Além disso, o docente pode questionar:

É possível descobrir o número de um tênis na Coreia referente a um tênis de numeração 42 no brasil sem que seja necessário descobrir antes a sua referência numérica nos Estados Unidos?

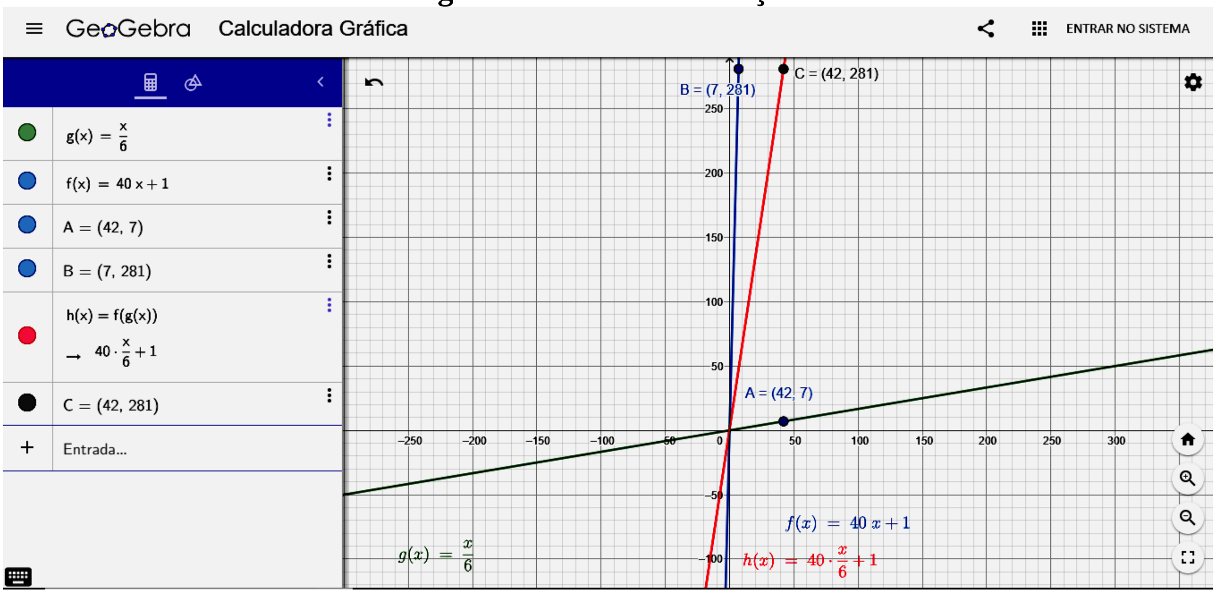
Assim, partindo de uma situação-problema de um exemplo contextualizado, os próprios alunos poderão desenvolver a composição de funções esperada sem que seja necessário uma base teórica previa do tema. É lançado intuitivamente o conceito e espera-se que o aluno crie conexões necessárias para encontrar a resolução do problema. Espera-se que o aluno aplique a função g(x) na função f(x) obtendo h(x) = f(g(x)) = 40 . g(x) + 1, isto é, h(x) = f(g(x)) = $\frac{40x}{6} + 1 = \frac{20x}{3} + 1$, após as ferramentas dadas pelo professor, via oralidade.

E portanto conclua que, h(42) = f(g(42)) = $\frac{40.42}{6} + 1$= 280+1 = 281.

Após as respostas dos alunos e considerações feitas pelo docente, sugere-se que seja feita a análise gráfica mais minuciosa do que as análises feitas nas primeiras atividades em que o aluno obteve o primeiro contato com o tema. Uma ferramenta tecnológica que possibilite a construção de gráficos potencializa ganhos pedagógicos e auxilia na consolidação do conteúdo, além de como já dito anteriormente, aproximar o cálculo algébrico de outras representações semióticas que o tema permite aproximar.

Essa atividade consiste basicamente em plotar as funções f(x) = 40x + 1, g(x) = x/6 e h(x) = f(g(x)) $= \frac{20x}{3} + 1$ e verificar graficamente as duas possibilidades algébricas mencionadas acima. Assim, verifica-se primeiramente no gráfico o ponto A = (42 , 7), isto é g(42) = 7 e o ponto B = (7 , 281) donde f(7) = 281 ou pela alternativa atenuada pelo ponto C = (42 , 281), que nos possibilita a percepção de que h(42) = f(g(42)) = 281. Vejamos essa atividade plotada na imagem capturada a seguir.

Figura 7 - Número do calçado



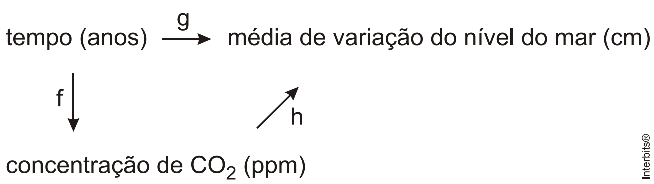
Fonte: O autor, 2018.

- Exercício complementar 18 - VUNESP (IEZZI, et al, 2016, p. 278):

Seja x o número de anos decorridos a partir de 1960 (x = 0). A função y = f(x) = x + 320 fornece, aproximadamente, a média de concentração de CO_2 na atmosfera em PPM (partes por milhão) em função de x. A média de variação do nível do mar, em cm, em função de x, é dada aproximadamente pela função $g(x) = \frac{1}{5}x$. Seja h a função que fornece a média de variação do nível do mar em função da concentração de CO_2.

No diagrama seguinte estão representadas as funções f, g e h.

Figura 8 - diagramação Ex18

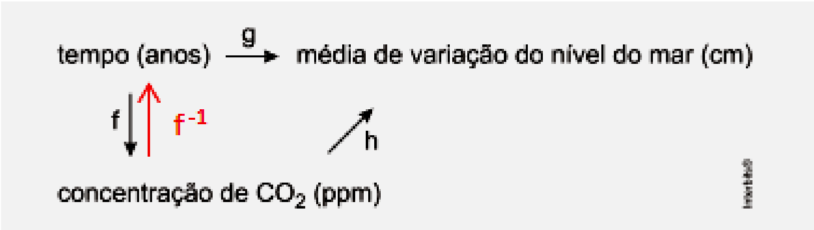


Fonte: Iezzi et al (2016, p.278).

Determine a expressão de h em função de y e calcule quantos centímetros o nível do mar terá aumentado quando a concentração de CO_2 na atmosfera for de 400 PPM.

Nesse exercício é possível tanto trabalhar o conceito de composição de funções como o de função inversa. Observe que f é a função que relaciona a concentração de CO_2 na atmosfera em PPM (partes por milhão) com o numero de anos x. Ora, será necessário obter o número de anos x em função da concentração de CO_2, pois para obter h, o numero de anos x será a variável comum a ser substituída em g e assim obter a composição das funções que representaremos por h = $g(f^{-1})$. Isso poderá ser representado no diagrama seguinte onde estarão representadas as funções f, g, h e f^{-1}, onde f^{-1} é a função inversa de f.

Figura 9 - Inversa e composta



Fonte: O autor, 2018.

Através do diagrama anterior o professor conseguirá expor que na obtenção da função h será necessário compor a inversa de f , denominada f^{-1} , com a função g que relaciona a média de variação do nível do mar, em cm, com o numero de anos obtidos através de f^{-1}.

Assim, como $f(x) = y = x + 320 \leftrightarrow x = y - 320$,

isto é, $f^{-1} = x = y - 320$.

Como $f^{-1} = x = y - 320$ e $g(x) = \frac{x}{5}$,

Tem-se então que $h(y) = g(f^{-1}) = \frac{y-320}{5}$.

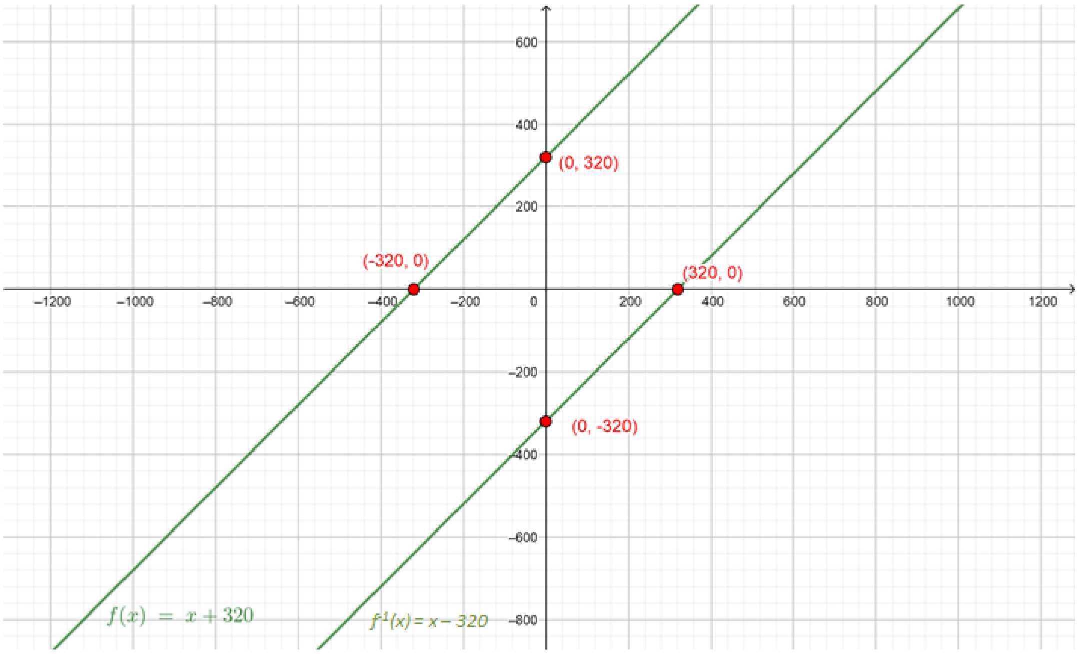
Por fim, para obter quantos centímetros o nível do mar terá aumentado quando a concentração de CO_2 na atmosfera for de 400 PPM o professor novamente poderá explorar a resolução para aprofundamento e compreensão do tema composição de funções através do calculo algébrico e pelo uso de ferramentas tecnológicas.

Analisando pelo cálculo algébrico podemos obter o número de centímetros que o nível do mar terá aumentado substituindo na função $f^{-1} = y - 320$ e assim obter que terão decorridos a partir de 1960, $x = 400 - 320 = 80$ anos. Uma vez que foram decorridos 80 anos, novamente substituindo, agora em g(x), temos que $g(80) = 80/5 = 16$, isto é, em 80 anos, quando a concentração de CO_2 na atmosfera for de 400 ppm, o nível do mar terá aumentado 16 cm.

Toda essa análise também poderia ser explorada graficamente pelo professor através do Geogebra onde seus alunos poderiam primeiramente trabalhar no gráfico da função inversa f^{-1}

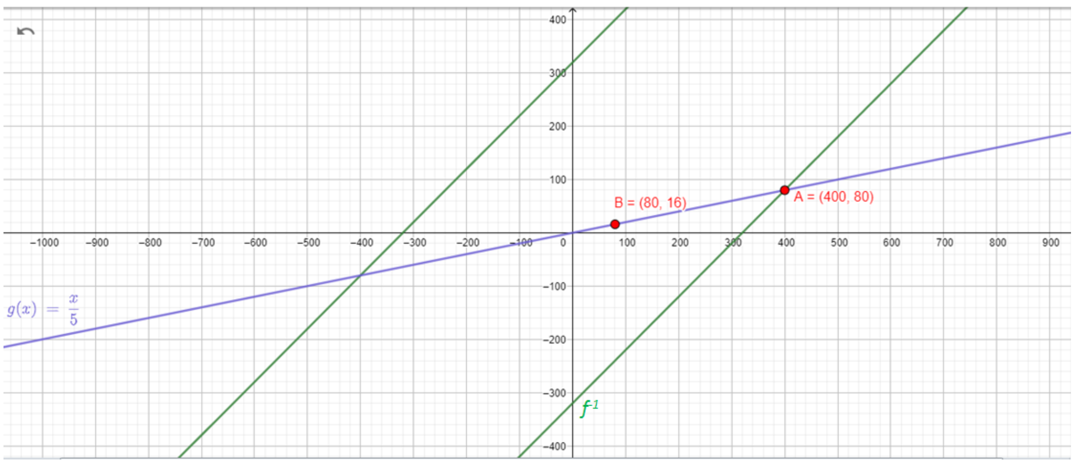
(figura 9) e a seguir plotar as funções f^{-1} e g observando e estudando especificamente os pontos A = (400, 80) pertencente à função f^{-1} e B = (80, 16) pertencente a função g(x) destacados a seguir no gráfico (figura 10).

Figura 10 – Inversa



Fonte: O autor, 2018.

Figura 11 - Nível do mar



Fonte: O autor, 2018.

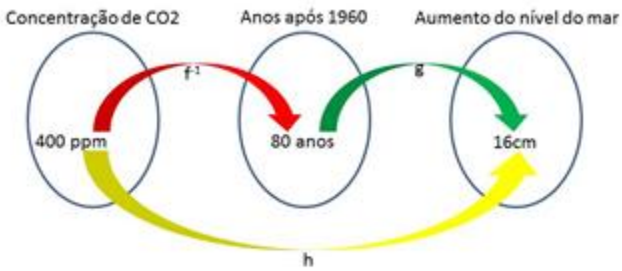
A imagem da figura 10 obtida pelo software permite ao docente estimular graficamente no aluno aquilo que o mesmo já descobriu através da conjectura algébrica feita previamente. No ponto A, observemos que uma quantidade de CO_2 equivalente a 400ppm está relacionada à passagem de 80 anos a partir de 1960. No ponto B, o decorrer de 80 anos está associado ao aumento de 16cm no nível do mar.

Uma outra maneira de analisar a proposta do enunciado seria efetuando a substituição diretamente na função $h(y) = g(f^{-1}) = \frac{y-320}{5}$.

Assim, $h(400) = \frac{400-320}{5} = \frac{80}{5} = 16,$

Isto é, quando a concentração de CO_2 na atmosfera for de 400 ppm o nível do mar terá aumentado 16cm. Observe:

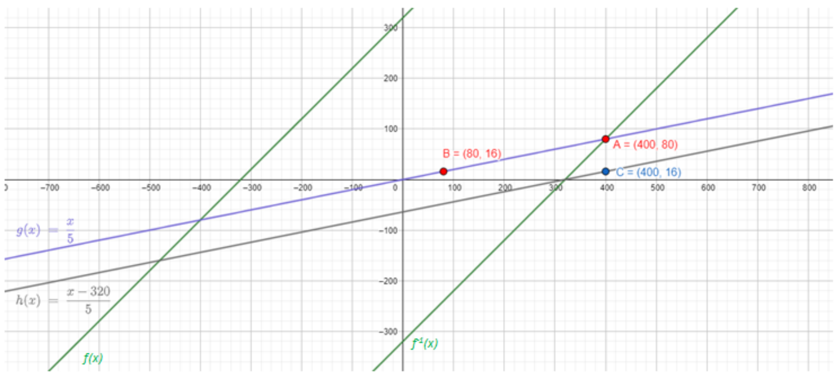
Figura 12 - h(x) = g(f -1(x))



Fonte: O autor, 2018.

Ainda explorando a ferramenta gráfica, o professor poderá fazer a composição da função $h(y) = g(f^{-1}) = \frac{y-320}{5}$.

Figura 13 - Ponto C



Fonte: O autor, 2018.

Observe na figura 11 que o ponto C = (400, 16), pertencente à função h, representa a associação da quantidade de 400 ppm de $CO2$ ao aumento de 16cm do nível do mar, sem que seja necessário descobrir quantos anos foram decorridos a partir de 1960. Nesta imagem a função h deverá ser tratada como $h(y) = g(f^{-1}) = \frac{y-320}{5}$ e apenas por uma questão de funcionalidade do software a denominamos de $h(x) = \frac{x-320}{5}$.

O livro trás uma qualidade boa de exercícios, assim como a variedade suficiente para o tempo que o autor sugere que o tema seja tratado em sala. Porém, observando as resoluções propostas, vemos que notações carregadas e o pouco diálogo com o aluno na apresentação do conteúdo faz da figura do professor, elemento essencial para o desenvolvimento de todo o tópico com êxito, caso queira tornar este processo de ensino dinâmico e a aprendizagem significativa no sentido de Ausubel. Desde a leitura e interpretação dos problemas, às conexões com outros conteúdos matemáticos, a condução das resoluções dos problemas pelos alunos, a dinâmica da sala de aula promovendo partilha do conhecimento consolidado e o estabelecimento de elementos de ancoragem para o sucesso de atividades futuras, a figura do professor que domina o referencial teórico proposto é muito importante a fim de melhorar a proposta do material apresentado pelo autor e ir ao encontro da teoria que embasa esta pesquisa.

3.2 Composição de funções - Livro didático Fundamentos de Matemática Elementar

A coleção Fundamentos da Matemática Elementar de Gelson Iezzi e Carlos Murakami é voltada para o aluno que deseja obter uma visão um pouco mais aprofundada da matemática abordada ao longo das três series do Ensino Médio. Em um texto mais denso do que aqueles contidos nos livros aprovados pelo PNLD, seus 10 volumes trazem a Matemática para a sala de aula sem a preocupação de contextualização em toda a obra.

O livro número 1 desta coleção percorre temas de grande relevância na formação do conceito analítico de funções. O autor inicia o texto abordando aspectos básicos da lógica, passando por conjuntos e conjuntos numéricos e a seguir, explorando amplamente definições, propriedades e exercícios das principais funções estudadas ao longo do ensino médio. São abordagens estanques calcadas na formalidade matemática no tocante ao excesso de notações e na informalidade natural de um texto para o Ensino Médio, entendida aqui também como natural, uma vez que faltariam aos alunos, aspectos cognitivos específicos e conceitos básicos de uma matemática nada elementar para a compreensão plena dos assuntos contidos neste volume. Um exemplo é a ideia do *continuum* desde a apresentação dos números reais, que refletirá no estudo das funções. As demonstrações também não seguem o rigor, por exemplo, de um livro de estruturas algébricas ou mesmo de análise real. Não há, por exemplo a demonstração de que a composição de funções contínuas é uma função contínua porque o conceito de continuidade não é abordado neste nível de escolaridade no Brasil.

Na obra, Função Composta está em destaque no capítulo X e discutiremos como a abordagem dada pelo autor se diferencia e complementa a abordagem dada pelo mesmo no livro Matemática Ciência e Aplicações que foi previamente estudado anteriormente. Essa coleção se destina a um outro público que não necessariamente o aluno que esteja cursando o Ensino Médio em escolas regulares, podendo ser um entusiasta pela Matemática, um estudante de pré-vestibular ou até mesmo estudantes de universidades privadas que adotam o texto em seus cursos elementares de Matemática. A diferença dos textos se dá também pela própria natureza de um livro didático que foi submetido às exigências específicas do PNLD.

O Capítulo X: Função composta e função inversa, do livro Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 1: Conjuntos, funções / Gelson Iezzi, Carlos Murakami – 7ª ed., opta por iniciar a abordagem do tema por sua definição . Vejamos:

Seja f uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja g uma função de B em um conjunto C. Chama-se função composta de g e f à função h de A em C em que a imagem de cada x é obtida pelo seguinte procedimento:

(1) Aplica-se a x a função f, obtendo-se f(x)
(2) Aplica-se a f(x) a função g, obtendo-se g(f(x)).

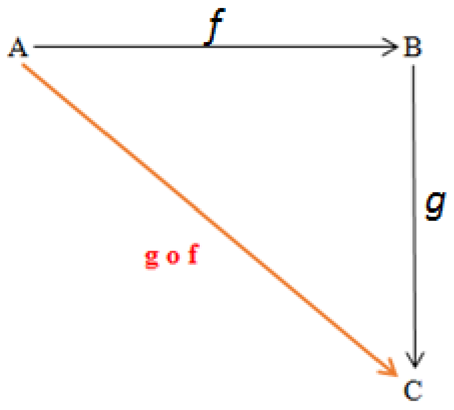
Indica-se por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Pode-se indicar a composta por g o f (lê-se: “g composta com f” ou “g circulo f”); portanto:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Podemos representar também a composta g o f pelo diagrama.

Figura 14 - Diagrama gof(x)



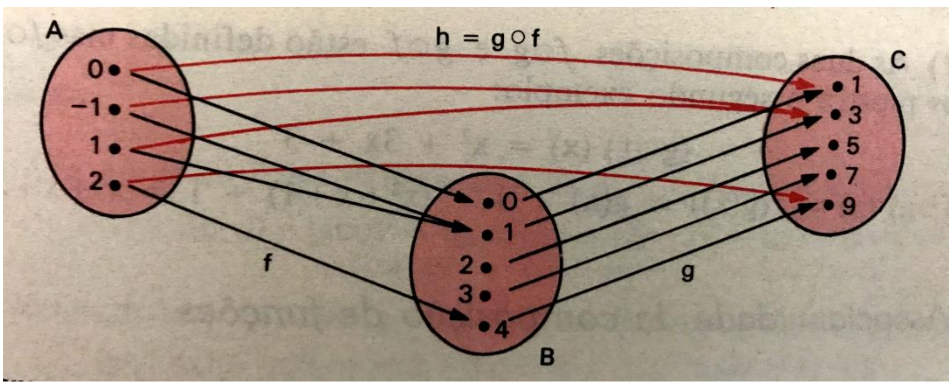
Fonte: O autor, 2018.

A seguir o autor aborda dois exemplos básicos bem semelhantes ao elaborado na obra mais atual. São exemplos simples e introdutórios, porém não são contextualizados oque pra muitos alunos representam apenas reprodução de métodos resolutivos sem real aplicabilidade em situações-problemas. Observe que a abordagem dura não permite ao professor estabelecer conexões sem que haja uma desconstrução da forma em que o tema é apresentado no material.

Vejamos estes exemplos:

1. Sejam os conjuntos A={-1, 0, 1, 2}, B= {0, 1, 2, 3, 4} e C= {1, 3, 5, 7, 9}e as funções:
   f, de A em B, definida por $f(x) = x^2$
   g, de B em C, definida por $g(x) = 2x+1$.

Figura 15 - exemplo 1



Fonte: Iezzi et al (2016, p.283).

Observemos por exemplo que f(2) = 4, g (4) = 9 e h(2) = 9, isto é, h(2) = (g o f) (2) = g(f(2)) = g(4) = 9.

Para obtermos a lei de correspondência da função composta h = g o f, fazemos assim: g(f(x)) é obtida a partir de g(x) trocando-se x por f(x).

No exemplo dado, temos:

h(x) = (g o f) (x) = g(f(x)) = 2 . f(x) + 1 = $2x^2$ + 1.

Se vamos calcular h(2), fazemos deste modo:

h(2) = 2 . 2^2 + 1 = 9.

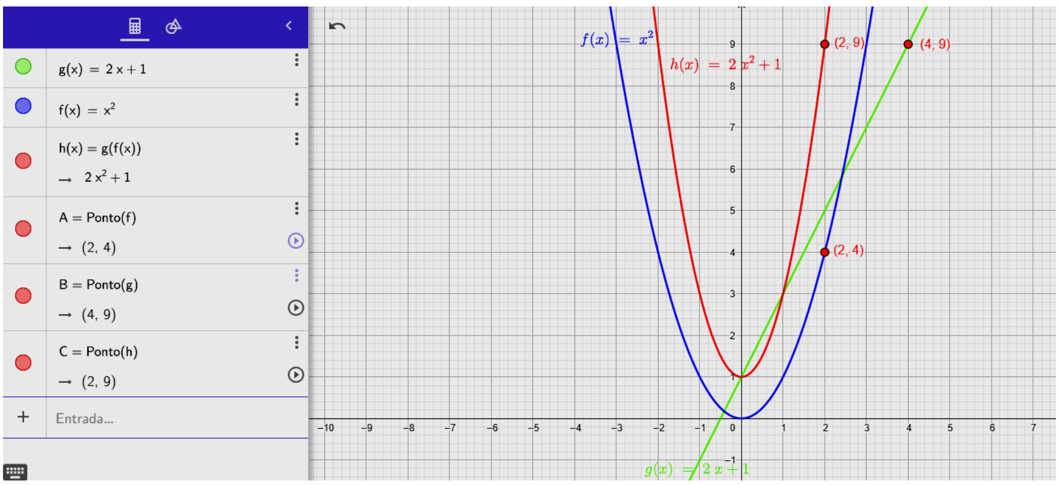
Este modelo de exercício-exemplo também poderia ser trabalhado no Geogebra e permite muitos questionamentos por parte do professor que também pode sugerir aos alunos que plotassem e analisassem separadamente os gráficos das funções f e g. Assim, o docente poderia seguir o mesmo procedimento algébrico citado anteriormente, só que desta vez fornecendo ao aluno a analise resolutiva gráfica deste exemplo

(1) Aplica-se a x a função f, obtendo-se f(x),ou seja, aplica-se 2 a função f, obtendo-se f(2) = 4. Representado no gráfico abaixo pelo ponto (2,4).

(2) Aplica-se a f(x) a função g, obtendo-se g(f(x)), isto é, aplica-se f(2) a função g, obtendo-se g(f(2)) = g(4) = 9. Representado no gráfico abaixo pelo ponto (4,9).

Por outro lado, fazendo h(x) = (g o f) (x) = g(f(x)) = 2 . f(x) + 1 = $2x^2$ + 1, o professor poderia sugerir que os alunos construíssem no software o gráfico de h, calculando h(2) = 2 . 2^2 + 1 = 9 e representando no gráfico abaixo pelo ponto de coordenada (2,9).

Figura 16 - h(x) = g(f(x)) = $2x^2$ +1



Fonte: O autor, 2018.

Neste problema é importante o professor ressaltar que o software auxiliará o aluno na compreensão do problema, porém os domínios dasfunções originais f, g e h são conjuntos discretos e seus gráficos são conjuntos de pontos isolados. As curvas plotadas pelo GeoGebra contém o gráfico de cada função. É importante que o professor reforce quais os pares ordenados que pertencem ao gráfico da função.

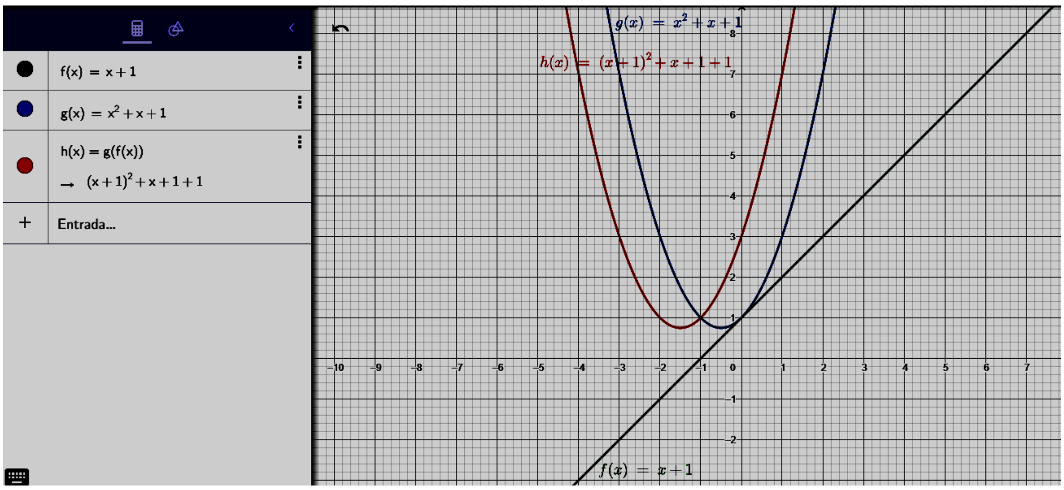
2. Sejam as funções f e g definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$.

Notemos que a função composta h = g o f é definida por:

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + f(x) + 1 = (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^2 + 3x + 3$.

Vejamos o estudo desse problema que poderia ser feito pelos alunos com orientação do professor utilizando o software Geogebra:

Figura 17 - $h(x) = g(f(x)) = x^2 + 3x + 3$



Fonte: O autor, 2018.

Esses são dois exemplos iniciais clássicos em que o professor poderia explorar as diversas maneiras resolutivas além de examinar os conjuntos domínio e imagem das funções através das ferramentas tecnológicas disponíveis. São exercícios que seria facilmente possível trabalhar o conceito básico e informal de continuidade de uma função. Neste caso ainda poderia ser analisada a suposta continuidade de uma função obtida pela composição entre duas outras funções.

O autor ainda faz três observações de grande relevância:

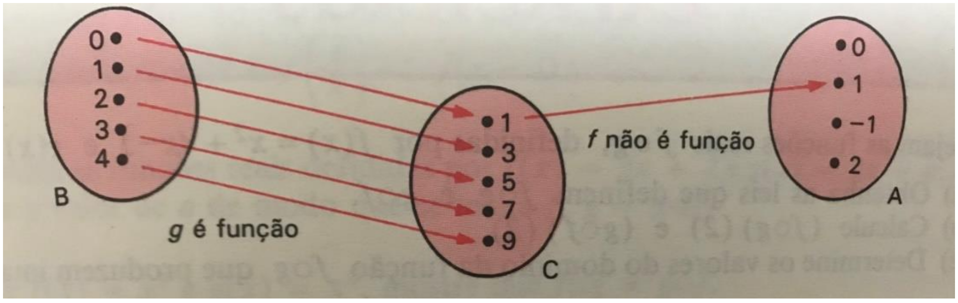
1ª) A composta g o f só está definida quando o contradomínio da f é igual ao domínio da g. Em particular, se as funções f e g são de A em A, então as compostas (fog) e (gof) estão definidas e são funções de A em A.

2ª) Notemos que, em geral, fog ≠ gof, isto é, a composição de funções não é comutativa.

Pode acontecer que somente uma das funções fog ou gof esteja definida.

Assim no primeiro exemplo, se tentarmos obter fog, verificaremos que é impossível, pois:

Figura 18 - contradomínio



Fonte: Iezzi, et al (2016, p.284)

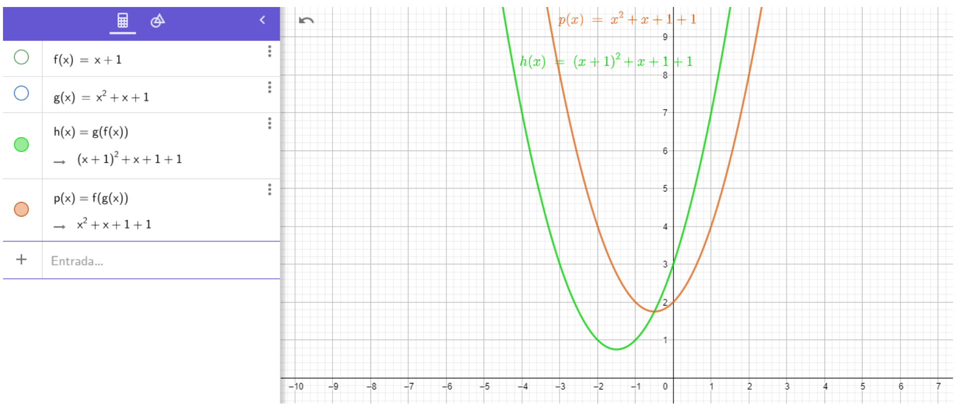
3ª) As duas composições fog e gof estão definidas mas fog ≠ gof como nos mostra o segundo exemplo:

$(gof)(x) = x^2 + 3x + 3$

$(fog)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = (x^2 + x + 1) + 1 = x^2 + x + 2.$

Comparando-as pelo software:

Figura 19 - $p(x) = f(g(x)) = x^2 + x + 2$



Fonte: O autor, 2018.

O autor ainda propõe uma série de teoremas que complementam o estudo das composições das funções. Esses teoremas servem de base para o aluno que desejar aprofundar-se no conteúdo de maneira mais substancial. Vejamos a seguir:

- **Teorema:** Associatividade da composição de funções

Quaisquer que sejam as funções

Figura 20: h(g(f(x)))

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Fonte: O autor, 2018.

Tem-se:

$$(hog)of\ (x) = ho(gof)\ (x).$$

Demonstração

Consideremos um elemento qualquer x de A e coloquemos f(x) = y,
g(y) = w e h(w) = z; temos:

$$((hog)of)\ (x) = (hog)\ (f(x)) = (hog)\ (y) = h(g(y)) = h(w) = z$$

e notemos que

$$(gof)\ (x) = g(f(x)) = g(y) = w$$

portanto,

$(ho(gof))\ (x) = h((gof)\ \ (x)) = h(w) = z$

então, temos:

$$((hog)of)\ (x) = (ho(gof))\ (x),$$

Para todo x de A.

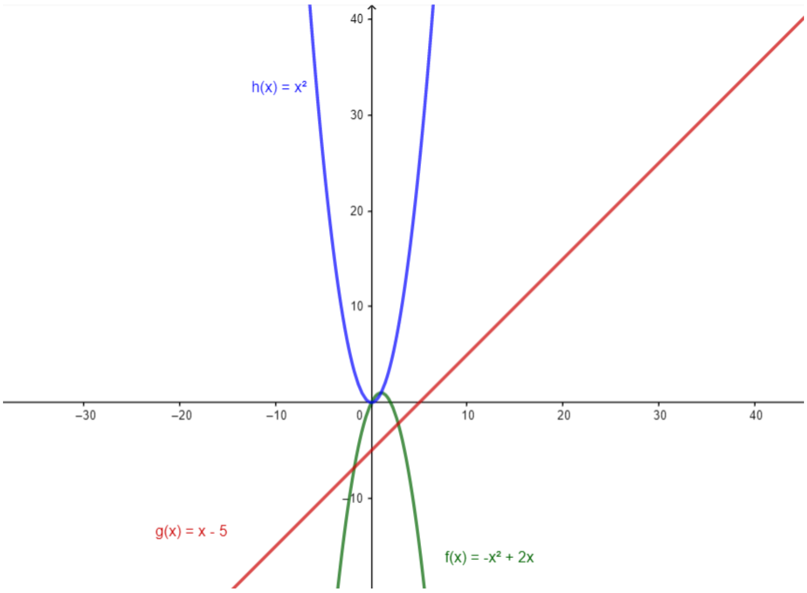
Sugestão de atividade: O teorema da Associatividade de funções compostas poderia ser explorado graficamente com a utilização do software GeoGebra. Observe um exemplo de atividade proposta:

Sejam as funções reais de variável real f, g e h : R→R definidas por:

$f(x) = -x^2+2x$ $g(x) = x-5$ $h(x) = x^2$

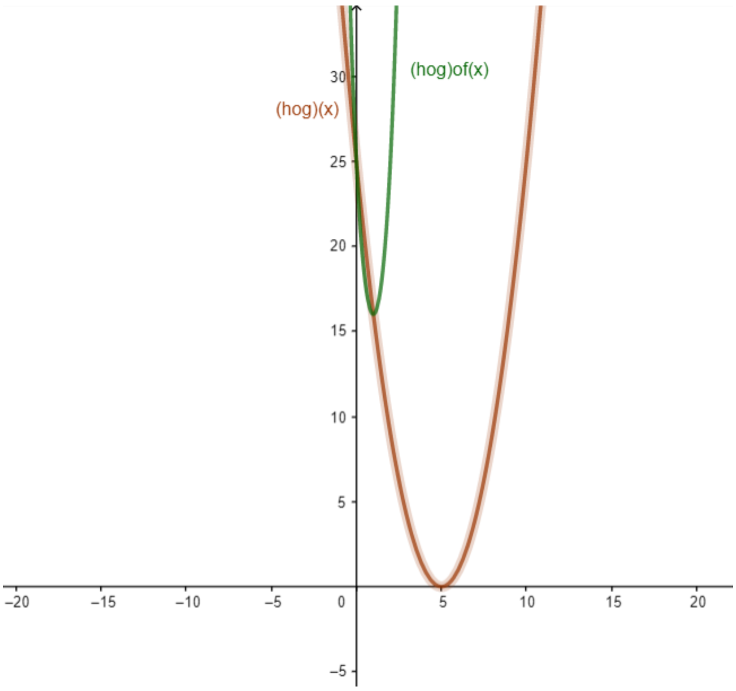
Obtenha os gráficos de (hog)of(x) e ho(gof)(x).

Figura 21 - $f(x) = -x^2+2x$, $g(x) = x-5$ e $h(x) = x^2$



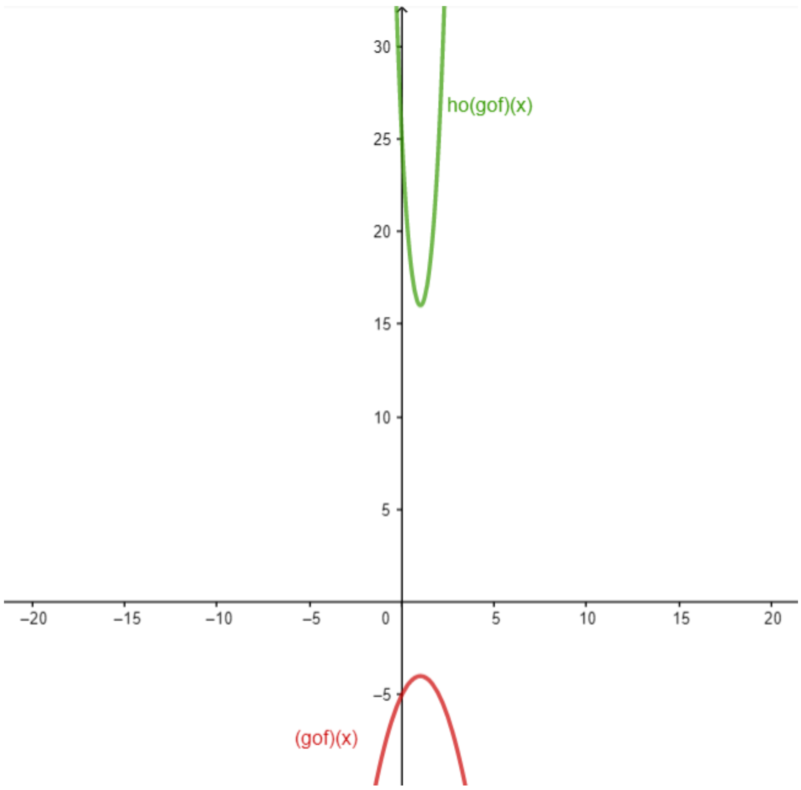
Fonte: O autor, 2018.

Figura 22 - h(g(x)) e h(g(f(x)))



Fonte: O autor, 2018.

Figura 23 - g(f(x)) e h(g(f(x)))



Fonte: O autor, 2018.

- **Teorema:** Compostas de sobrejetoras

Se duas funções f de A em B e g de B em C são sobrejetoras, então a função composta gof de A em C é também sobrejetora.

Demonstração:

A função g é sobrejetora; então, para todo z de C, existe y em B tal que g(y) = z.

A função f é sobrejetora, isto é, dado y em B, existe x em A tal que f(x) = y.

Logo, para todo z em C, existe x em A tal que

$$z = g(y) = g\ (f(x)) = (gof)\ (x)$$

O que prova que gof é sobrejetora.

Sugestão de atividade: Fazer uma pesquisa de busca rápida sobre o conceito de função sobrejetora. Retomar o conceito através de exemplos de funções definidas em domínios discretos e em domínios contínuos. A partir dessa retomada de conteúdos, o teorema da Composta entre funções sobrejetoras poderia ser ilustrado a partir do Geogebra. Observe um exemplo de atividade:

Sejam as funções sobrejetoras f: R→R e g: R→R^+, definidas, em por:

f(x) = 5+x

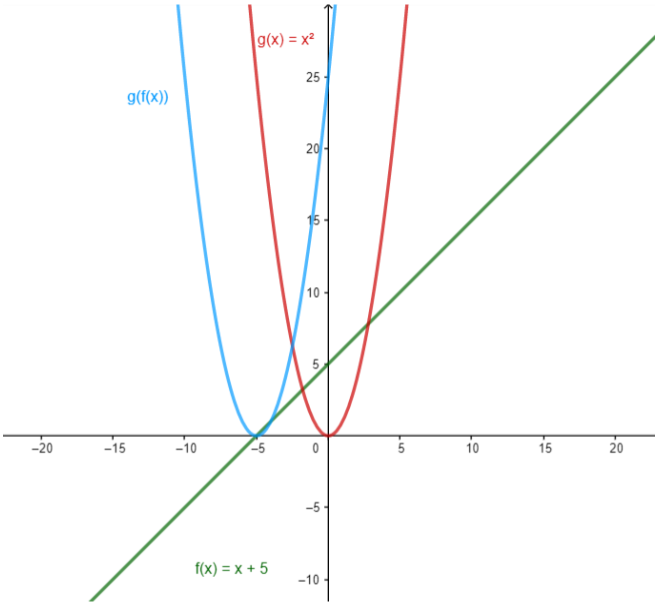
g(x) = x^2

a) Determine, após obervar os gráficos descritos no plano cartesiano, o domínio e a imagem das duas funções separadamente.

b) Decida se estas funções são sobrejetoras

c) Obtenha o gráfico de g (f(x)) se é o gráfico de uma função sobrejetora.

Figura 24 - g(f(x)) = (x+5)²



Fonte: O autor, 2018.

Dadas f(x) e g(x) funções sobrejetoras, ao compor o gráfico de g(f(x)) = (gof) (x) encontramos a função descrita pela lei de formação g(f(x)) = $(x+5)^2$, onde g(f(x)): R→ R^+.

Como o conjunto imagem de g(f(x)) é exatamente igual ao conjunto contradomínio de g(f(x)) pode-se então concluir que a função é sobrejetora.

- **Teorema:** Compostas de injetoras

Se duas funções f de A em B e g de B em C são injetoras, então a função composta gof de A em C é também injetora.

Demonstração

Consideremos x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de A.

Suponhamos que (gof) (x_1) = (gof) (x_2),

isto é, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Como g é injetora, da ultima igualdade resulta que $f(x_1) = f(x_2)$;

Como f é também injetora, vem que $x_1 = x_2$;

Portanto,

gof é injetora.

Sugestão de atividade:

O teorema diz que a composição entre funções injetoras, resulta numa função injetora.

Observe um exemplo de atividade proposta:

É pedido aos alunos que plotem duas funções afins, uma crescente e uma decrescente e que justifiquem porque são funções crescentes/ decrescentes, analisando o crescimento ou o decrescimento das imagens a medida que os elementos do domínio variam de uma em um unidade. A seguir é pedido aos alunos que busquem em um site de busca a definição de injetividade de funções e que a partir desta informação justifiquem o questionamento trazido pelo professor: a composição entre dias funções injetores resulta sempre numa função injetora? O professor pode tomar por exemplo no quadro interativo:

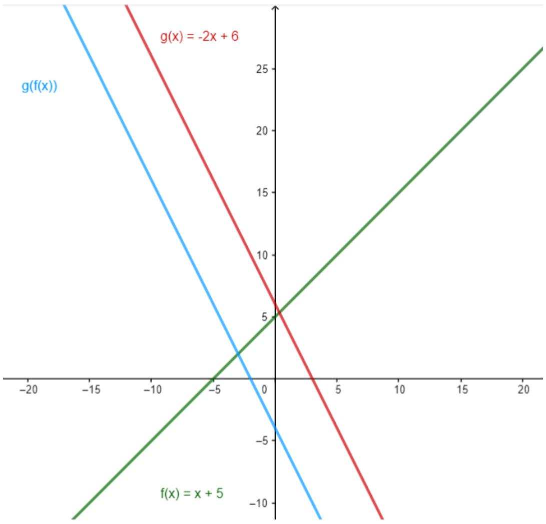
Sejam as funções sobrejetoras f: R→R e g: R→R, definidas, em por:

f(x) = 5+x

g(x) = -2x+6

Obtenha o gráfico de g (f(x)) = (gof) (x) e verifique a injetividade da função obtida.

Figura 25 - g(f(x)) = -2(x+5) +6



Fonte: O autor, 2018.

Dadas f(x) e g(x) funções injetoras, ao compor o gráfico de g(f(x)) encontramos a função descrita pela lei de formação: $g(f(x)) = -2(x+5) +6 = -2x - 4$, tal que $g(f(x)): R \rightarrow R$.

Como cada elemento do conjunto imagem de g(f(x)) está associado a um único elemento do domínio de g(f(x)) e para cada elemento distinto do domínio, temos imagens distintas. Estabelecemos uma relação biunívoca na função obtida e assim pode-se concluir que a função é injetora. Elementos diferentes pertencentes ao domínio da função possuem magens diferentes.

- **Teorema:** A composta de funções inversas entre si

Seja f(x) uma função bijetora de A em B. Se $f^{-1}(x)$ é uma função inversa de f(x), então:

$$f^{-1}of(x) = I_A \text{ e } fof^{-1}(x) = I_B$$

Demonstração

Sabemos que se f(x) é bijetora, então $f^{-1}(x)$ é uma função bijetora de A em B.

Assim, $\forall x \in A$, $(f^{-1}of)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$, portanto $(f^{-1}of)(x) = x$

Analogamente, $\forall x \in B$, $(fof^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$, portanto $(fof^{-1})(x) = x$

Assim, $(f^{-1}of)(x) = (fof^{-1})(x) = x$

Sugestão de atividade: O teorema da composta de funções inversas entre si poderia ser explorado graficamente com a utilização do software Geogebra. Observe um exemplo de atividade proposta:

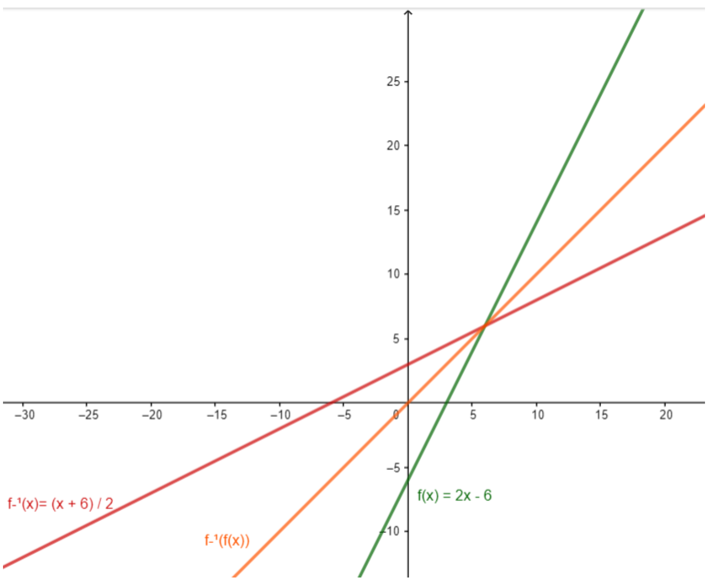
Seja a função bijetora f: R→R definida, em por:

f(x) = 2x - 6

Tarefa: Obtenha o gráfico de $f^{-1}(x)$ e a seguir obtenha o gráfico das funções compostas $f^{-1}(f(x))$ e $f(f^{-1}(x))$.

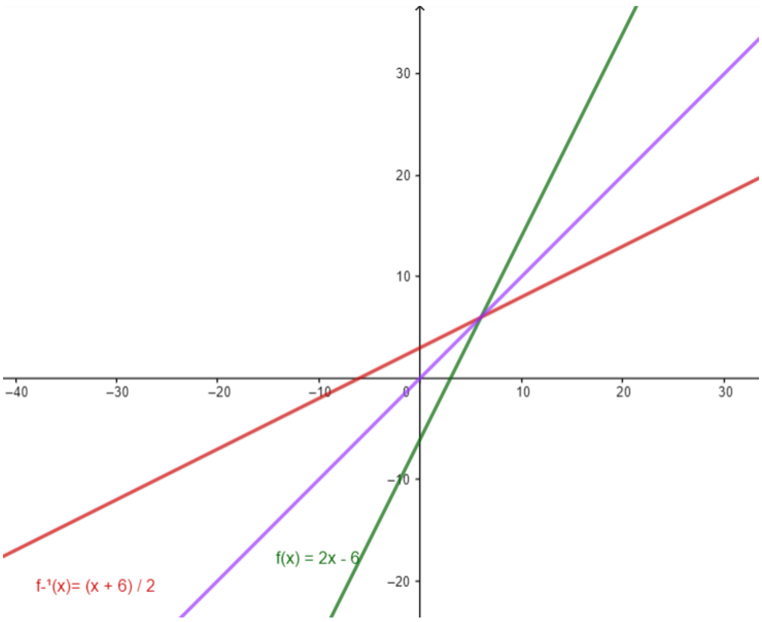
Após muitas discussões acerca do conceito de função inversa, neste momento é importante que o professor destaque que é possível determinar alguns pontos do gráfico da função inversa f^{-1} (x)conhecendo pontos do gráfico da função f(x), uma vez que todo elemento do domínio de $f^{-1}(x)$ é imagem de f(x) e vice-versa. Explorar tais pontos e reconhecer que $(x, y) \in f(x)\ e\ (y, x) \in f^{-1}(x)$ são pontos de IR^2 que são equidistantes da reta $y = x$. Interessante também explorar com os alunos o que significa o ponto de encontro das três retas no plano. Estas interfaces entre o pensamento algébrico, o analítico e o geométrico que envolvem a representação gráfica de uma função, permite ao aluno criar ancoragem para a melhor compreensão de aspectos mais abstratos que envolvem as funções e que serão expostos em outras etapas de suas vidas escolares.

Figura 26 - f-1(f(x))



Fonte: O autor, 2018.

Figura 27 - f(f-1(x))



Fonte: O autor, 2018.

- **Teorema:** A inversa da composta

Se as funções f(x) de a em B e g(x) de B em C são bijetoras, então:

$$(gof)^{-1}(x) = f^{-1}o\ g^{-1}(x)$$

Demonstração

Observemos inicialmente: se as funções f(x) de a em B e g(x) de B em C são bijetoras, então a função composta gof(x) de A em C é bijetora; logo, existe a função inversa $(gof)^{-1}(x)$ de C em A.

Queremos provar que $(gof)^{-1}(x) = f^{-1}o\ g^{-1}(x)$; então basta provar que

$$(f^{-1}o\ g^{-1})\ o\ (gof)\ (x) = I_A \text{ e } (gof)o(f^{-1}o\ g^{-1})\ (x) = I_C$$

Notemos que

$f^{-1}of\ (x) = I_A$, $fof^{-1}(x) = I_B$, $g^{-1}og(x) = I_B$ e $gog^{-1}(x) = I_C$.

Então:

$(f^{-1}og^{-1})o(gof)(x) = [((f^{-1}og^{-1})og]o\ f(x) = [f^{-1o}(g^{-1}og)]of(x) = [f^{-1}oI_B]of(x) = f^{-1}of(x) = I_A$.

$(gof)o(f^{-1}og^{-1})(x) = [(gof)of^{-1}]og^{-1}(x) = [go(fof^{-1})og^{-1}(x) = [goI_B]og^{-1}(x) = gog^{-1}(x) = I_C$.

Sugestão de atividade:

Para muitos professores, levar para o aluno a verificação de um teorema forte como este à nível da escolaridade básica aparentemente não faz sentido algum, mas sempre há um outro lado da moeda quando o assunto é buscar alternativas para fixação de conteúdos, ideias ou facilitar o nascimento de elementos que sirvam de base para a consolidação do conhecimento. Com base nos trabalhos de Ausubel (1980), acreditamos que resultados fortes e de demonstrações densas para determinados sujeitos, precisam ser explorados anteriormente no âmbito da compreensão leitora. A linguagem oral precisa ser dinamizada em sala de aula, principalmente porque esta linguagem ainda sofrerá uma tradução para a linguagem computacional. Ler o enunciado do teorema em língua corrente, destacar a(s) hipótese(s) e procurar 'traduzir' da linguagem matemática para a linguagem computacional, por exemplo, requer maturidade cognitiva, mesmo sendo o Geogebra uma ferramenta altamente interativa e de fácil manuseio. Certamente o aluno nesse tipo de tarefa precisa buscar aqueles conhecimentos que se tornaram mais sólidos em relação ao assunto, mas que paradoxalmente, estão aptos a serem ressignificados quando em interação com novos conceitos. Por exemplo:

(a) O quadrado da soma de dois números naturais e a soma de dois quadrados de dois números naturais resultam num mesmo valor?

(b) A função inversa e a inversa de uma função (ou função recíoroca) possuem as mesmas leis de formação?

(c) Menos, dois ao quadrado e menos dois ao quadrado têm a mesma escrita matemática? Produzem o mesmo resultado?

Uma possível ressignificação, ou uma extensão natural do conhecimento reside em deixar o aluno perceber se determinar a lei de formação da função inversa de uma função resultante da composição de duas funções é o mesmo que determinar a inversa de cada uma das funções e compor estes resultados encontrados. Grosso modo, seria responder à questão: 'o inverso da composta é a composta das inversas'?

Observe um exemplo de atividade proposta em dupla:

Sejam as funções bijetoras f: R→R e g: R→R, definidas, em por:

$f(x) = 5+x$

$g(x) = -2x+6$

a) Um par da dupla deverá obter a expressão analítica de $g(f(x))$ e o companheiro entrar com os dados no GeoGebra a fim de obter a lei de formação da mesma função. A dupla deverá comparar seus resultados encontrados.

b) A seguir, os pares trocam de lugar e um determina a lei de formação da função inversa e o outro determina o gráfico da função inversa com auxílio do GeoGebra.

c) Printar a tela ou imprimir os resultados

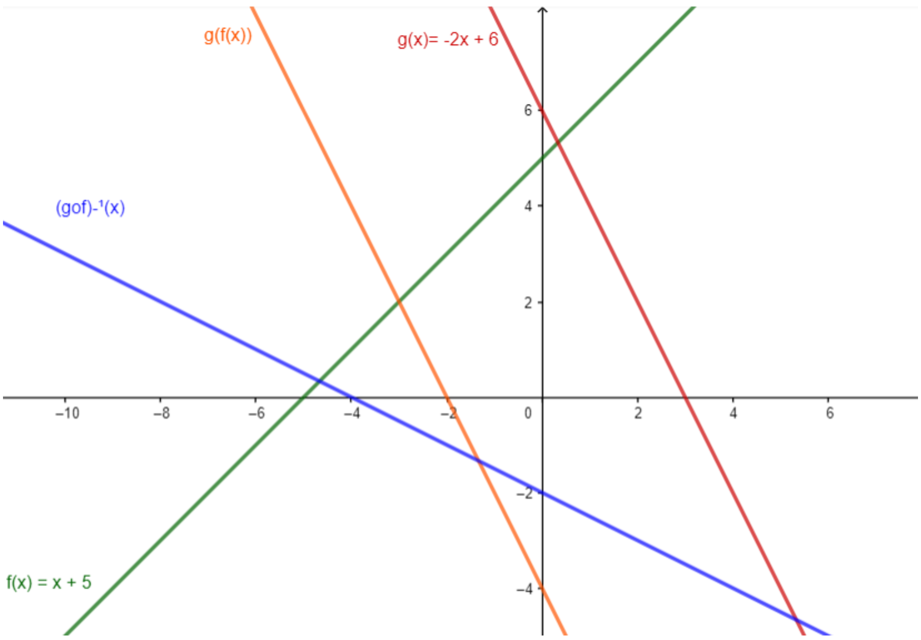
d) A dupla deverá determinar juntos as leis de formação das funções inversas, compor as duas e obter a expressão analítica de $f^{-1}og^{-1}(x)$.

e) O professor insere os dados no GeoGebra, que determina o gráfico da função encontrada pela dupla.

f) A dupla, de posse do resultado, compara com o gráfico obtido no item c e escreve suas conclusões a serem lidas para a turma no momento final.

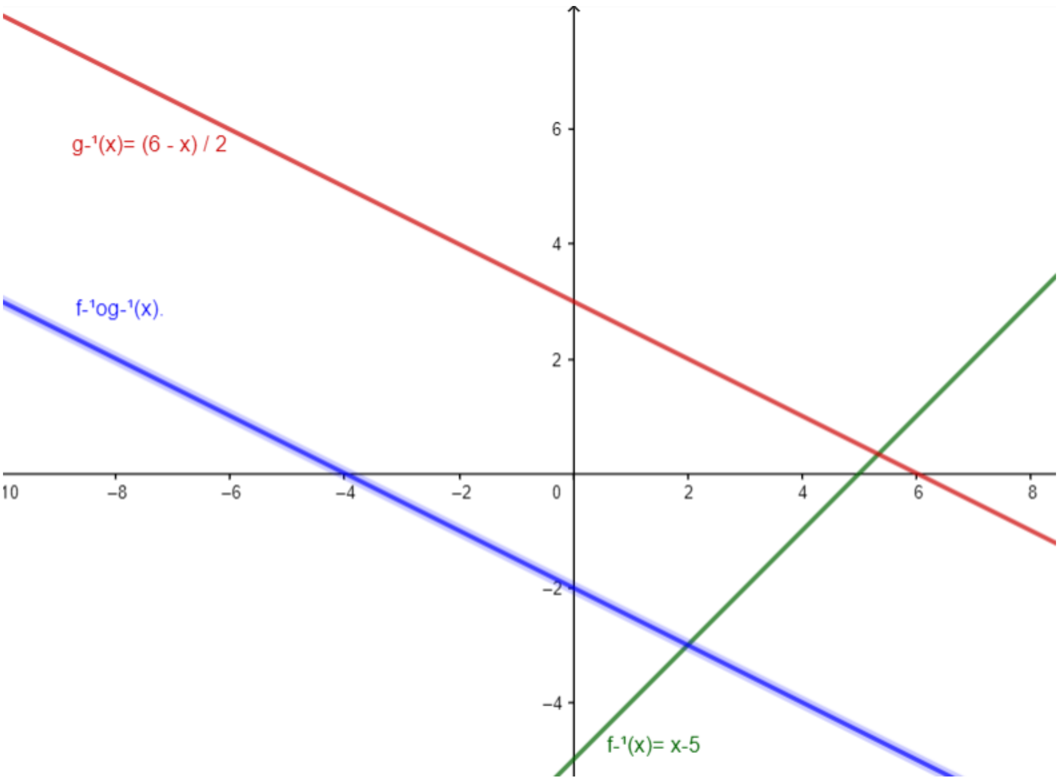
Obtendo o gráfico de $(gof)^{-1}(x)$ e de $f^{-1}og^{-1}(x)$.

Figura 28 - g(f-1(x))



Fonte: O autor, 2018.

Figura 29 - f-1(g-1(x))



Fonte: O autor, 2018.

Nessa atividade podemos verificar que as funções h(x) e t(x) tais que, $h(x) = (gof)^{-1}(x)$ e $t(x) = f^{-1}og^{-1}(x)$ possuem o mesmo traço. Acreditamos que com esta atividade não estamos contribuído para uma aprendizagem motora que privilegia a memorização de preposições e fórmulas, além de concordarmos com Silva (1990) ao dizer que explicações, exemplos, e até mesmo maneiras de resolver problemas técnicos para adquirirem um caráter significativo no sentido de Ausubel, precisam ser apresentados de uma maneira nova, envolvendo reorganização do conhecimento.

É importante deixar claro que todas as atividades deste capítulo foram pensadas com base no referencial teórico adotado e que um dos objetivos futuros é testar tais atividades com professores em formação, a fim de que conheçam a Teoria de David Ausubel e a partir dela e do conhecimento de suas classes, possam organizar mais materiais que tornem realmente os atos de ensinar e aprender significativos tanto para o aluno quanto para o professor, pois desenvolvendo estas tarefas, acreditamos que o professor ressignificará muitos conteúdos que julgava dominar.

4 COMPOSIÇÕES DE FUNÇÕES E CONTINUIDADE APLICADAS AO ENSINO MÉDIO

4.1 Uma pequena digressão

Em meados dos anos 2000, época que comecei ministrar aulas de matemática, me enxergava em um ambiente de alunos fascinados por um mundo tecnológico extremamente atraente fora da escola traduzidos por jogos, aplicativos simples de samrtphones e parafernalhas que traziam a realidade virtual ao alcance das mãos. Porém, a escola não caminhava com a mesma velocidade do mundo real. A abordagem de determinados assuntos nos livros didáticos, sugestões de desenvolvimento de conteúdos ou mesmo ferramentas que possibilitassem ou estimulassem a inserção das aulas ao campo das tecnologias educacionais não eram essencialmente populares.

Softwares gratuitos eram difíceis de serem encontrados e diante desse cenário se tornava mais que necessário aproximar o meu aluno do mundo digital que o rodeava. A matemática que envolvia as funções nos livros e materiais didáticos ainda estava completamente baseada no puro algebrismo, na confecção de poucos gráficos e se tornava desinteressante para grande parte do público. Os mais ousados ensaiavam um estudo a partir da escrita canônica de uma ou outra função como a função quadrática e os questionamentos e abordagens em aulas de laboratório acabavam sendo extremamente repetitivos.

Para Bortolossi (2010, p. 50), coordenador do Instituto Geogebra no Rio de Janeiro e membro do Conselho Diretor da Sociedade Brasileira de Matemática:

> Estudos recentes mostram que apenas ter o computador e usá-lo para acessar a internet produz pouco impacto no desempenho do aluno do ensino básico: (PAPANASTASIOU, ZEMBYLAS e VRASIDAS, 2003), (OECD, 2006), (LEI e ZHAO, 2007) e (WITTER e SENKBEIL, 2008). Para o caso da matemática, o impacto é negativo! Estes mesmos estudos indicam que o problema não está no computador em si mas, sim, em como ele é usado como ferramenta de ensino e aprendizagem. A disponibilidade de conteúdos digitais de qualidade, de fácil acesso e com orientações metodológicas para uso efetivo destes conteúdos na prática docente é fundamental. Neste contexto, a área de matemática está especialmente deficitária: os softwares educacionais de propósito geral (geometria dinâmica, computação simbólica, estatística, computação gráfica) normalmente são pagos e estão em inglês. Apesar dos esforços das comunidades de software livre, faltam ainda incentivos que promovam o uso deste tipo de software nas escolas: conteúdos digitais de qualidade, material de treinamento, sequências didáticas e suporte ao professor.

Não apenas buscando sair do modelo algébrico que norteou as aulas de funções no Ensino Médio nas últimas décadas, essa pesquisa procura possibilitar o professor dar passos maiores no que diz respeito ao estudo da composição de funções objetivando ampliação dos conhecimentos matemáticos e do exercício do pensamento mais abstrato que a própria Matemática exige a medida que avançamos em seus conteúdos.

Essa temática especifica, o estudo da continuidade de funções reais de variável real a partir da composição de funções e da exploração do estudo das funções racionais com auxilio do Geogebra, foi escolhida devida a forma de como é abordada em sala de aula por grande parte dos professores e muito também por conta da carência de materiais disponíveis que possibilitem torná-la mais próxima à realidade em que se encontra o aluno ou, na maioria dos casos, trazer este conteúdo para as salas de aula já que grande parte dos diferentes corpos docentes de Matemática nas escolas brasileiras já optou por não trabalhar tal conteúdo por diferentes motivos.

Pinto (2008) afirma que apesar do número crescente de pesquisas nesta área e do evidente interesse dos educadores matemáticos por este tema, se nota que a implementação da utilização do gráfico de uma função como objeto, com o objetivo de enriquecer o conceito de função em sala de aula ainda está faltando, completando que Dreyfus (1991 apud Costa, 2002) afirma que isto provavelmente ocorre por uma das duas causas: ou porque os desenvolvedores de currículo não atribuem ainda aos gráficos de funções o papel de construtor de conceitos além de ilustrador de aulas, ou por serem as atividades gráficas mais difíceis por pressuporem fortemente a intuição matemática, necessitando assim serem adquiridas por um trabalho refletido e árduo". Procuramos caminhar sobre a segunda opção.

4.2 Da Implementação

Como objetivo de buscar o aperfeiçoamento da correta interpretação gráfica que representem relações entre grandezas, assim como tentar promover/aguçar/desenvolver a intuição matemática dos alunos de acordo com o que foi dito por Dreyfus (1991), este ponto do trabalho vê na composição de funções e em toda a sua teoria, os elementos de ancoragem segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa que melhor sustentam e permitem conexões e apropriações de novos conceitos, para a introdução à ideia intuitiva da definição de continuidade de funções, seja num ponto, num intervalo ou em seu maior domínio de validade.

Adotando a linguagem mais apropriada e próxima ao vocabulário que trás consigo um aluno do ensino médio e, fazendo-se valer da ferramenta Geogebra disponível, foi apresentado aos alunos o software matemático e as principais técnicas de construções de gráficos.

> Todos os conteúdos são apresentados em uma página HTML. Assim, eles são acessados por meio de um ambiente que é familiar ao usuário: um navegador (Firefox, Internet Explorer). O acesso pode ser feito através da internet (http://www.uff.br/cdme/)[1] ou através de uma cópia local (o que permite o uso offline, sem a necessidade de uma conexão com a internet) e, isto, em qualquer sistema operacional (Windows, Linux, Mac OS). A interatividade é obtida através de recursos das linguagens Java e JavaScript. Destaca-se aqui o excelente software gratuito GeoGebra (HOHENWATER, 2009), que oferece recursos gráficos, numéricos e simbólicos. O sistema 3D foi desenvolvido a partir da excelente e poderosa biblioteca gráfica JavaView (POLTHIER; HILDEBRANDT; REITEBUCH, 2009). (BORTOLOSSI, 2010, p. 55).

Ao longo de cinco encontros semanais de 100 min com uso da tecnologia disponível – computador, projetor e internet – podemos contemplar discussões que dificilmente seriam possíveis no ambiente habitual de ensino, a velha e dura sala de aula tradicional.

Nas atividades que serão propostas estima-se também desenvolver junto ao aluno as competências da área 5 da matriz de referência de matemática e suas tecnologias do ENEM, consistindo “em modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas” (olha a álgebra mais uma vez aí de maneira explicita nos documentos oficiais!):

H19 - Identificar representações **algébricas** que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos **algébricos**.

H22 - Utilizar conhecimentos **algébricos**/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos **algébricos**.

Os alunos que optaram participar voluntariamente desse projeto, chamado pela escola de Laboratório de Matemática, foram alunos que possuíam como característica comum à afinidade e o gosto pela Matemática. Todos estiveram presentes nas aulas de preparação para OBMEP e grande parte apresentou desempenho que os levaram à segunda fase da competição. Desde o momento inicial em que a proposta do Laboratório de Matemática foi oferecida, os alunos se mostraram entusiasmados em analisar, compreender e aprofundar o conteúdo de função composta já abordado em dois bimestres passados. Para muitos, o tema resumia-se a sucessivas substituições de uma função pela outra ou “um puro operar com polinômios” como afirmado por um participante das atividades. Contudo, a possibilidade de discutir graficamente com suporte de uma ferramenta digital interativa, leve, fácil e de comprovada qualidade corroborou para implementação deste projeto com sucesso.

Tendo aliado toda estrutura e apoio de uma escola privada de ensino médio no município de Ribeirão Preto-SP, que comprou a ideia desta pesquisa em aproximar as aulas matemática do mundo externo tecnológico através de tecnologia computacional e principalmente o interesse de alguns alunos na utilização de ferramentas digitais para aperfeiçoamento de conteúdo, o presente trabalho busca integrar o estudo das funções compostas com o conceito de continuidade da função a partir da função racional $f(x) = \frac{1}{x}$, e das funções polinomiais do primeiro e segundo graus. Tais atividades constituíram para este grupo de alunos participantes, uma verdadeira imersão no estudo da continuidade das funções racionais presente na matriz curricular da matemática no Ensino Médio.

Os alunos que participaram do "laboratório", como passou ser carinhosamente chamado pelo grupo, já possuíam grande parte dos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento das atividades que seriam propostas, ou seja, as ferramentas necessárias para a realização do trabalho, como por exemplo, o conhecimento um pouco mais amplo do tema 'composição de funções', assim como da análise correta e da construção de gráficos de funções afins e quadráticas usando lápis e papel milimetrado. Um diferencial para o pesquisador.

Esperava-se, com esta proposta, evidenciar a importância do tratamento de funções compostas no Ensino Médio, bem como motivar a introdução de novos métodos de ensino em sala de aula que valorizassem o tratamento formal da matemática e também a compreensão eficaz de temas importantes da disciplina, assim como de propriedades e resultados fortes que são ferramentas para a compreensão de outros assuntos relacionados ao estudo das funções que virão, como o estudo das funções polinomiais e dos polinômios no último ano da escolaridade básica.

Buscamos, assim, contribuir para a reflexão dos professores e, por consequência, para a aprendizagem efetiva dos alunos. Por isso, a necessidade das atividades estarem calcadas num sólido referencial teórico que permitisse avaliar após o desenvolvimento das tarefas se houve ou não ganho na aprendizagem, se houve ou não mudança de atitude qualitativa do aluno frente à Matemática, se houve amadurecimento matemático do aluno, se houve apropriação de novos conteúdos, se houve aquisição de conhecimento através do exercício da linguagem através do trinômio língua materna-linguagem matemática-linguagem computacional, se houve apropriação e transformação do conhecimento a partir de conexões com a própria Matemática, se elementos de ancoragem foram usados, se novos subsunçores foram criados e principalmente se o **conhecimento foi consolidado.** Para melhor compreensão, apresentamos abaixo a estrutura das atividades no “laboratório”.

Como dito anteriormente, aulas de 100 minutos foram divididas em cinco semanas consecutivas. Aulas intensas e com muita participação por parte dos alunos. Ainda que possuíssem o conhecimento prévio no que diz respeito às composições de funções, absolutamente nenhum tinha vivido alguma experiência de uso de software matemático como suporte em suas aulas.

Pela necessidade de conhecimento básico da ferramenta digital Geogebra, a organização semanal das aulas se deu da seguinte maneira:

1ª semana: Apresentação da ferramenta Geogebra; Construção de gráficos de funções; função inversa;

2ª semana: Estudo da continuidade das funções de 1º e 2º grau;

3ª semana: Função Composta e continuidade – 1ª parte;

4ª semana: Função Composta e continuidade – 2ª parte;

5ª semana: Continuidade em Funções Racionais por composição de funções.

Ao longo desses encontros cada aluno teve acesso a um computador com sistema operacional Windows e acesso ilimitado a internet. Cada atividade foi realizada individualmente pelos alunos em suas respectivas máquinas e todas as atividades foram realizada segundo preceitos da Teoria da aprendizagem Significativa. O professor tomou para si cinco ações básicas:

(1) Identificar a estrutura conceitual da matéria de ensino,
(2) Identificar os assuntos relevantes à aprendizagem de conteúdos a serem ensinados,
(3) Diagnosticar o que o aluno já sabe,
(4) Levar em consideração o que o aluno já sabe, utilizando recursos que facilitem a aprendizagem e
(5) Procurar ser sempre o estimulador e orientador da aprendizagem.

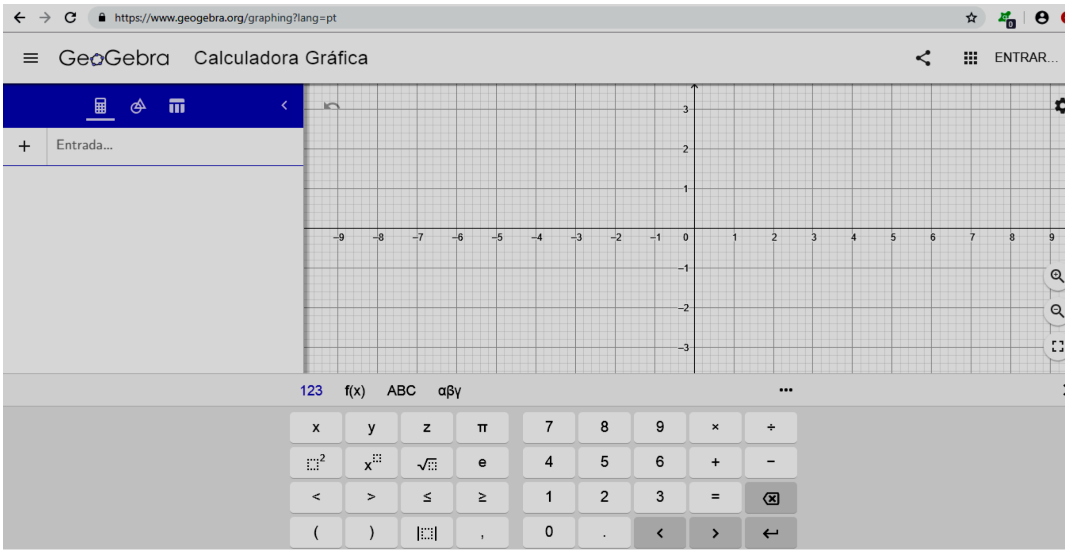
4.3 Relato da Semana 1 - Apresentação da ferramenta Geogebra, construção de gráficos de funções e função inversa

Como todos os alunos interessados em participar das aulas de laboratório não tinham conhecimento prévio da ferramenta Geogebra, reservou-se este primeiro encontro para apresentação do software.

Nesta primeira semana foi enfatizado o uso das principais funcionalidades do software que manipularíamos nos próximos encontros.

Como primeira atividade deste encontro, falar sobre a origem do programa e ensinar aos alunos fazer o seu download foi tarefa indispensável. Abrir direto por um famoso site de busca a calculadora gráfica Geogebra e sermos direcionados para a página do software (https://www.geogebra.org/graphing?lang=pt) foi a primeira tarefa realizada pelo grupo em conjunto. Foi um momento de muita valorização do que seriam estes encontros tanto por parte dos alunos quanto do professor. A reação instantânea dos alunos foi de grande surpresa pelo fato do software utilizar seus comandos em português e não haver necessidade de baixar e instalar o programa. Para muitos dos alunos, o nome GeoGebra trás consigo “um quê de software gringo”, afirmou o aluno X. Vale ressaltar aqui que a versão on-line atende todas as nossas necessidades.

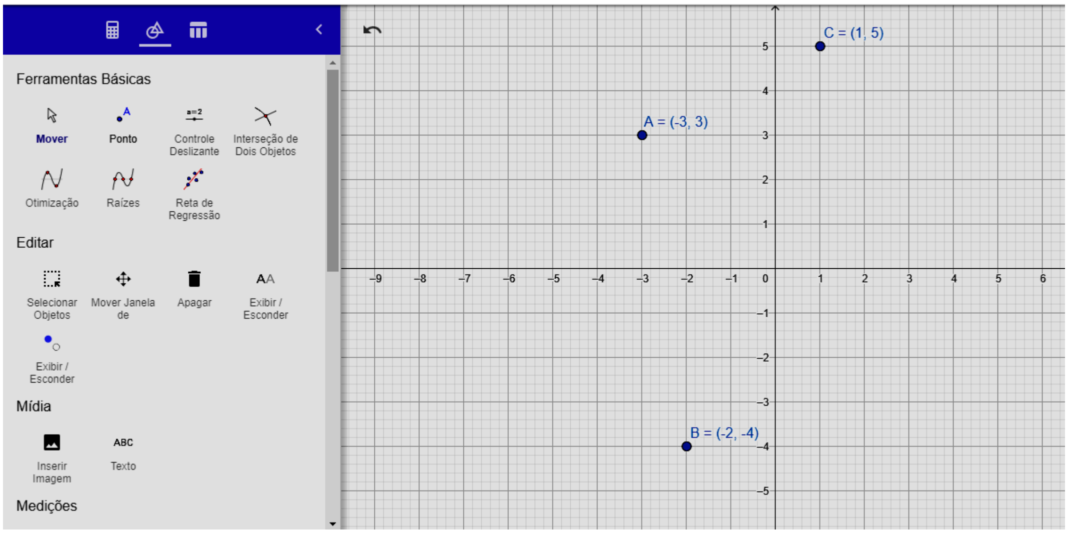
Figura 30 - layout Geogebra



Fonte: o autor, 2018.

Em seguida, foi encaminhado como atividade inicial no software que os alunos indicassem no gráfico, usando o ícone ferramentas básicas do menu ferramentas, os pontos A(-3, 3), B(-2, -4) e C(1, 5).

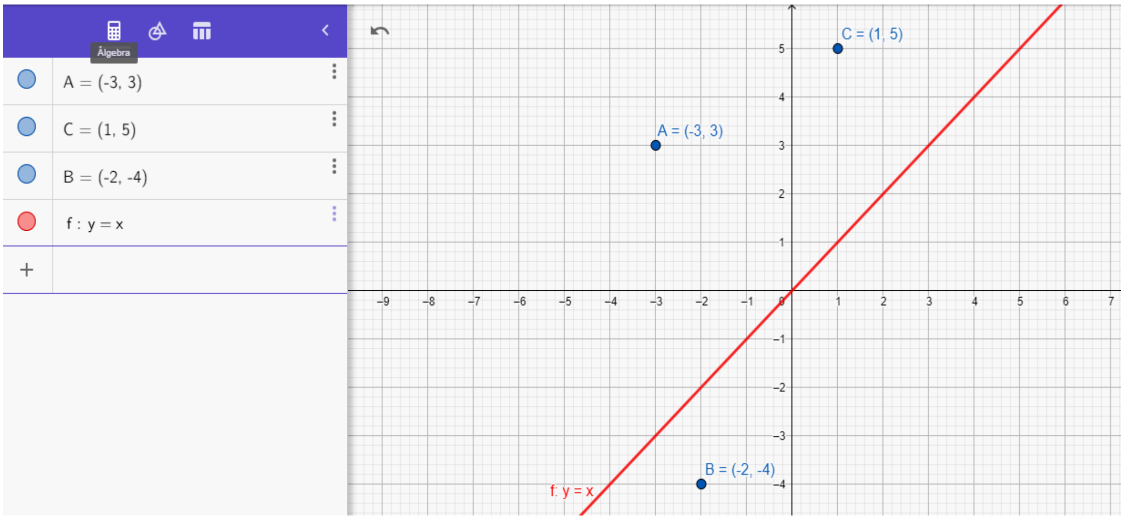
Figura 31 - Pontos A, B e C



Fonte: o autor, 2018.

Voltamos à calculadora gráfica para que os alunos construíssem a função f(x)=x no domínio dos números reais. Seu traço é a reta bissetriz dos quadrantes ímpares. Veja:

Figura 32 - Y = x

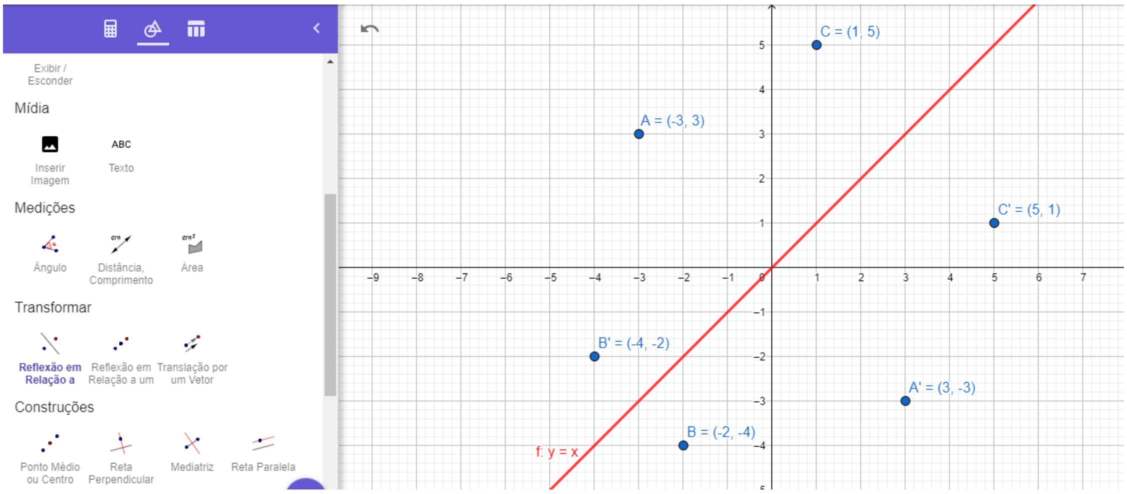


Fonte: o autor, 2018.

A seguir, utilizamos a ferramenta Transformar: ‘reflexão em relação a uma reta’ para obter pontos com coordenadas invertidas, isto é, (x,y) e (y,x), em relação aos pontos iniciais A, B e C, já com o objetivo de criar conexões entre o que seria abordado e o que já fora estudado pelos alunos.

Note que refletir em relação a uma reta não é uma tarefa trivial em Matemática e a Álgebra Linear é a parte da Matemática que se ocupa desse estudo mais detalhado. Porém, a partir do momento que o aluno percebe que esta ação já foi realizada em um outro instante no mesmo ano escolar, cria conexões e segue mais seguro na proposta de Ausubel junto do professor, de maneira mais natural e confiante, sem muito receio de errar. Durante a tarefa, o professor priorizou as ideias mais globalizantes para progressivamente as diferenciar em especificidades. Isto é, não está sendo abordado o conceito formal de função inversa, porém o de imagem inversa R^{-1} de uma relação R cujos elementos são os pares ordenados A=(-3,3), B=(-2, -4) e C=(1,5). Veja:

Figura 33 - Espelhamento de pontos



Fonte: o autor, 2018.

Foi orientado para que inserissem em cada ponto o seu nome e sua coordenada cartesiana. Para isso, bastava clicar com o botão direito do mouse e selecionar o menu configurações, ir até a aba "básico" e exibir rótulo: nome & valor.

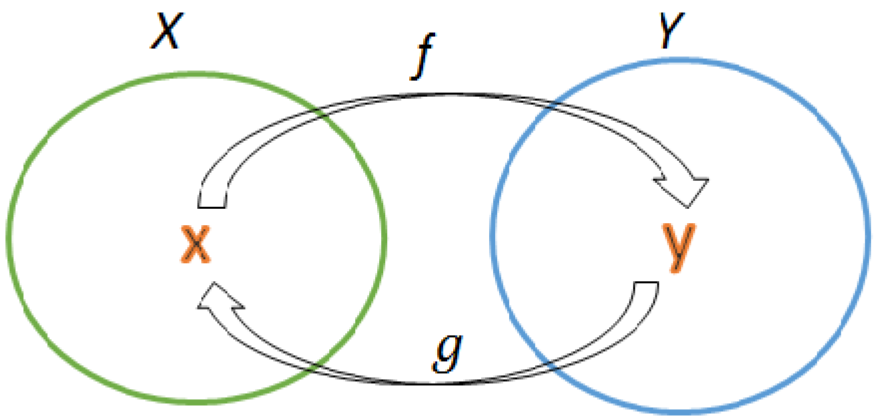
Após a execução deste comando foi perguntado aos alunos o que de fato ocorreu com as coordenadas cartesianas inicias dos pontos A, B e C em relação às novas coordenadas obtidas após as reflexões de cada ponto em relação à reta. Todos responderam que "os valores de x e y trocaram para cada ponto" e dois desses alunos destacaram que esta técnica de "espelhamento" teria sido usada na construção de gráficos de função inversa e ainda ressaltaram que todas as abscissas referentes aos pontos usados se tornaram ordenadas, assim como as ordenadas de cada ponto se transformaram em abscissas ao fazer a reflexão em relação à função f representada pela reta y = x. Subsunçores!

Ainda que os alunos possuíssem base teórica para desenvolver o conteúdo de funções inversas com auxilio do GeoGebra, a decisão tomada foi aguardar e analisar a evolução do grupo perante o uso do software. Nesse momento as ações básicas (1), (2) e (3) descritas anteriormente estavam sendo praticadas.

4.3.1 Função Inversa no Geogebra

Considere a função g: Y → X e f: X → Y quando se tem g(f(x)) = x e f(g(y)) = y para todo x ϵ X e y ϵ Y, as funções são chamadas funções inversas.

Figura 34 - g(y) = x



Fonte: o autor, 2018.

Quando g é a inversa de f, tem-se que g(y) = x, se e somente se, f(x) = y. Evidentemente, g é a inversa de f se, e somente se f é inversa de g.

Note que, se g(f(x)) = x para todo x ϵ X então f é injetiva, pois
$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \rightarrow x_1 = x_2$.

Por sua vez a igualdade f(g(y)) = y, valendo para todo y ϵ Y, implica que y é sobrejetiva pois, dado y ϵ Y arbitrário, tomamos x = g(y) ϵ Xe temos f(x) = y.

Portanto, se a função f: X → Y possui inversa, então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre X e Y.

Reciprocamente, se f: X → Y é uma correspondência biunívoca entre X e Y então f possui uma inversa g: Y → X. Para definir g, notamos que, sendo f sobrejetiva, para todo y ϵ Y existe algum x ϵ X tal que f(x) = y. Além disso, como f é injetiva, este x é único. Pomos então g(y) = x. Assim, g: Y → X é a função que associa a cada y ϵ Y o único x ϵ X tal que f(x) = y. É imediato que g(f(x)) = x e f(g(y)) = y para x ϵ X e y ϵ Y quaisquer.

Sugestão de atividade 1:

Esta tarefa é para ser feita em dupla e os mesmos passos realizados com materiais como lápis, borracha, canetas com diferentes cores e régua, serão identificados no menu do Geogebra. O aluno deve perceber que as mesmas ferramentas que possui sobre a mesa são encontradas também no Geobebra e que a tela do computador é a sua folha de papel!

Sejam f: $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ e g:$[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

(I) Em dupla, mostre algebricamente que g é a função inversa de f.

(II) Construa os gráficos de $h(x) = f(g(x))$ e $p(x) = g(f(x))$.

(III) Determine algebricamente as leis das funções $h(x)$ e $p(x)$.

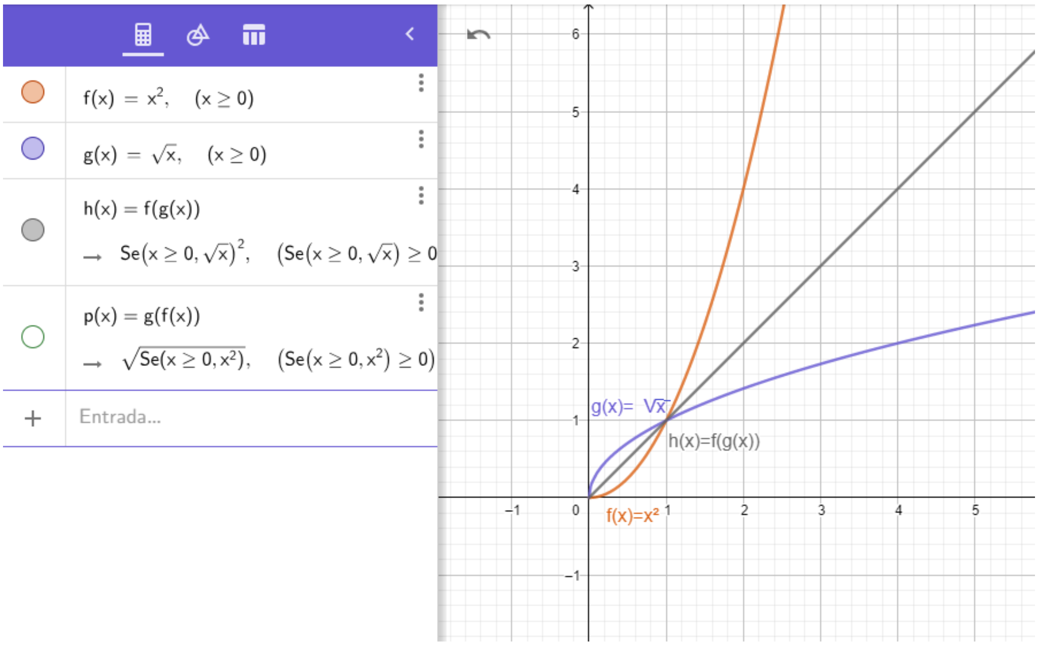
Resolução da atividade de aluno X:

(I) Fazendo $f(x) = y = x^2$ e isolando x temos que $x = \sqrt{y}$ uma vez que estamos considerando a restrição de que f: $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ e g:$[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Temos que f é uma correspondência biunívoca e sua inversa g é dada por $g(x) = \sqrt{x}$.

IMPORTANTE!

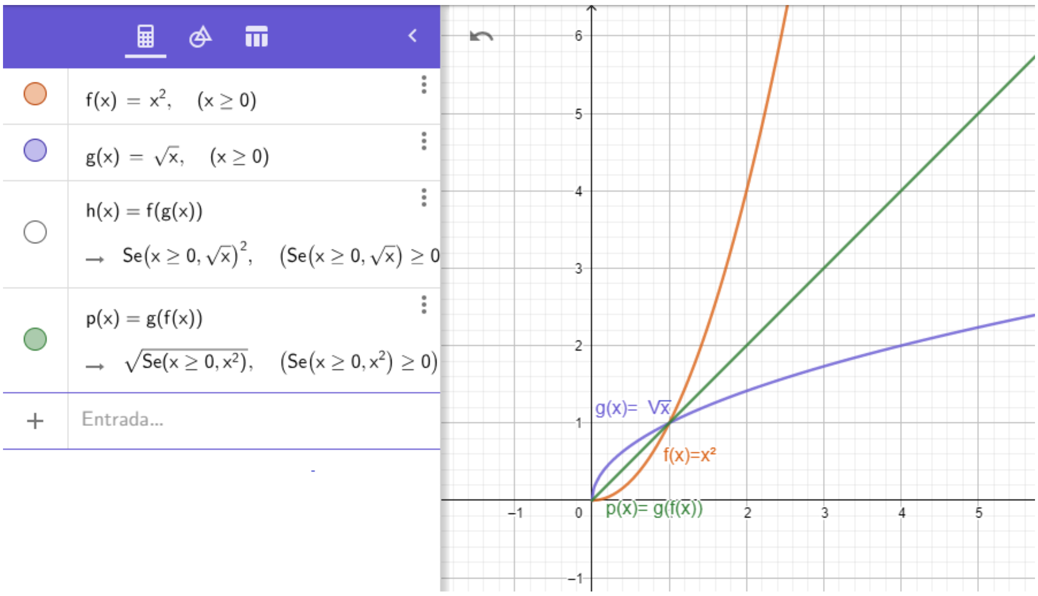
Nenhum aluno mostrou que a inversa de f(x) é g(x) e vice-versa usando o fato de que se são inversas, então a composição à esquerda ou à direita resulta na identidade. Além disso, a atividade anterior não permitiu que fizessem tal conexão, apesar de ser um momento ótimo para relembrar a condição de existência de funções do tipo $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{x},\ n \in IN\ e\ n \geq 2}$. Esta análise foi feita no item (III) desta tarefa pelo professor.

(II) Figura 35 - f(g(x)) = x



Fonte: o autor, 2018.

Figura 36 – g(f(x)) = x



Fonte: o autor, 2018.

(III) h(x) = f(g(x)) = $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

p(x) = g(f(x)) = $\sqrt{(x^2)}$ = x

Observações da atividade 1:

Geralmente, para todo n ϵ N, a função x → x^né uma correspondência biunívoca de [0, +∞) sobe si mesmo, cuja inversa é y → $\sqrt[n]{y}$. A função é monótona e crescente.

Se n é impar, então x → x^n é uma correspondência biunívoca de R sobre si mesmo, cuja inversa G: R → R é dada por G(y) = $\sqrt[n]{y}$. A função é monótona e crescente.

Quando g: Y → X é a função inversa de f: X → Y, escreve-se g = f^{-1}.

Prova-se que uma função contínua f: I → R, definida num intervalo I contido em R, só pode ser injetiva se for monótona (crescente ou decrescente).

Portanto, a fim de que uma função contínua f: I→ J (I, J Intervalos) possua uma inversa, é necessário que f seja estritamente monótona crescente, ou monótona decrescente , além de ser sobrejetiva.

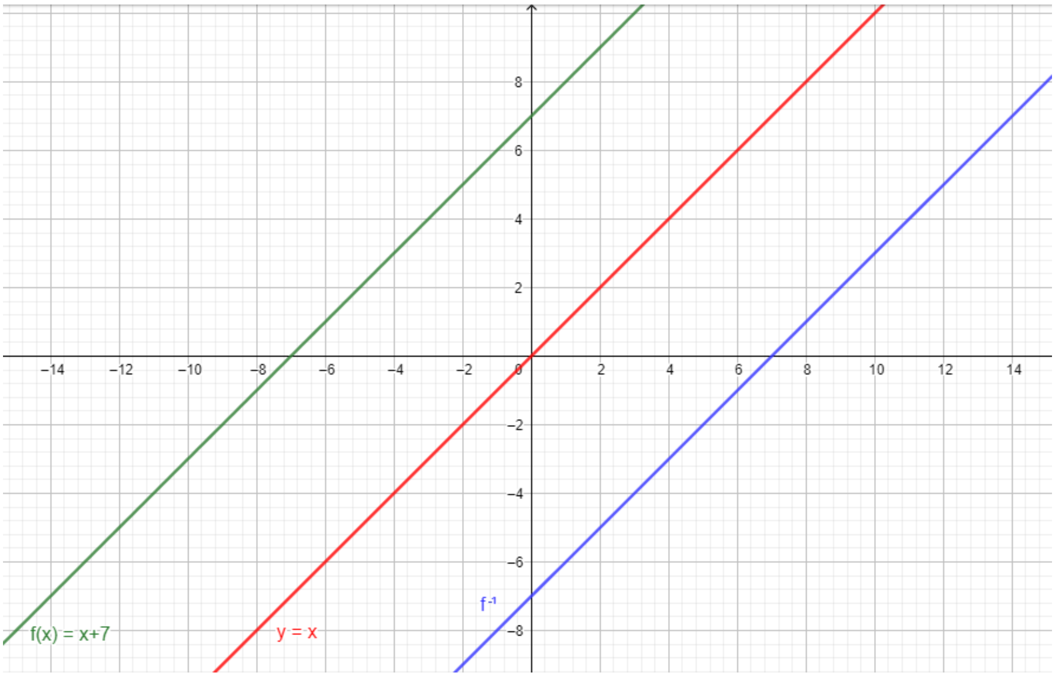
Esperou-se com a construção dos gráficos acima que os próprios alunos concluíssem que o gráfico de g(x) é a reflexão do gráfico de f(x) em relação à reta y = x, bissetriz dos quadrantes ímpares. O mesmo observado na atividade inicial desta aula onde estabelecemos a reflexão dos pontos A, B e C em relação à reta y = x. O resultado foi rapidamente verificado.

Sugestão de atividade 2:

Seja f(x) = x + 7 uma função monótona crescente e g(x) = $(\frac{1}{2})^x$ uma função monótona decrescente. Usando a reflexão em relação à reta y = x, construa o gráfico das funções inversas de f(x) e g(x) e verifique se suas inversas serão funções monótonas crescentes ou monótonas decrescentes.

Esta atividade foi feita de maneira bem rápida, porém grande parte das duplas de alunos lançou mão de uma tabela para esboçarem o gráfico da inversa da função g(x) e somente depois comparar com o que encontravam no Geogebra.

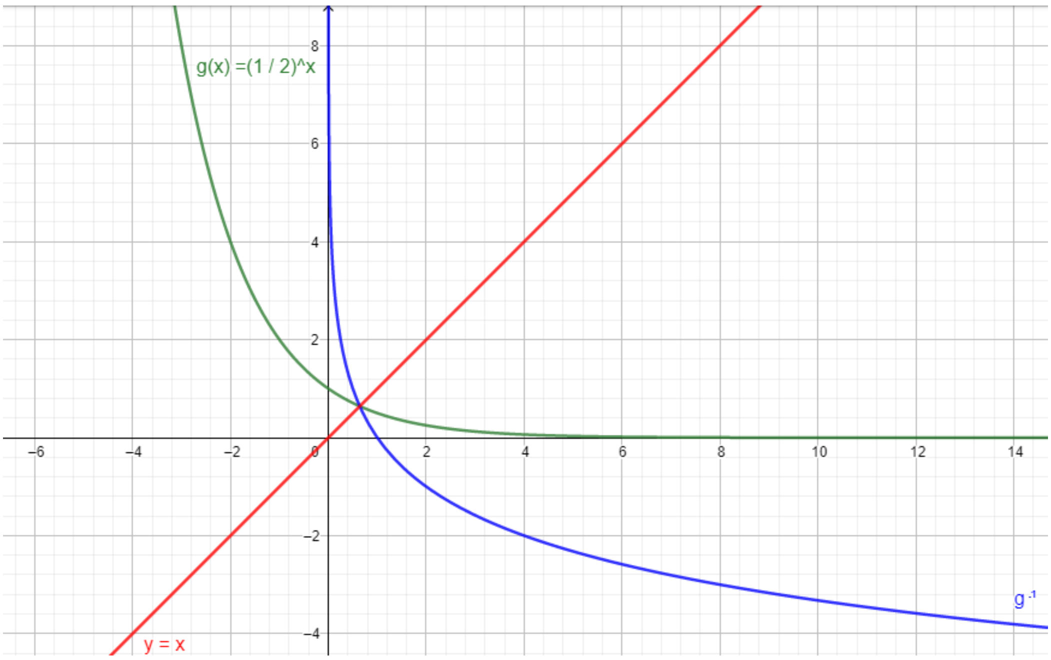
Figura 37 - f-1(x) = x-7



Fonte: o autor, 2018.

Com auxílio do GeoGebra fica muito fácil perceber que tanto f quanto f^{-1} são funções crescentes.

Figura 38 - g-1(x)



Fonte: o autor, 2018.

Sendo g^{-1} a função inversa de $g(x) = (\frac{1}{2})^x$, observa-se que g^{-1} é também decrescente tal como g(x). Note que não está sendo pedido a lei de formação da função inversa, foi pedido somente o esboço do gráfico da inversa. Esta atividade permitiu que consolidássemos as condições de existência de uma função inversa.

Como atividade final, foi perguntado aos alunos se f(x) = x+7 e $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ eram funções contínuas. Foi solicitado que tal reflexão deveria ser feita individualmente e por escrito, sem que fosse dito a eles o que vem a ser uma função contínua. Foi pedido ainda que os alunos trouxessem a resposta desse questionamento na semana seguinte junto a uma justificativa informal de sua conclusão, porém, que construíssem a resposta de modo que refletissem sobre a semântica da palavra.

4.4 Relato da Semana 2 - Estudo da continuidade das funções

Iniciamos a 2ª semana com o questionamento deixado no último encontro a respeito da continuidade das funções f(x) = x+7 e $g(x) = (\frac{1}{2})^x$. A resposta unanime foi de que sim, as funções f(x) e g(x) são funções continuas. No que diz respeito às justificativas, mesmo sem nunca terem estudado anteriormente a continuidade de funções, todos os alunos tiveram conclusões intuitivas de que são ambas funções contínuas "por nunca descontinuarem".

Um primeiro aluno A_1, disse que são f(x) e g(x) contínuas, pois "seguem sempre sem parar", um segundo aluno A_2 afirmou que são contínuas, pois "não possuem nenhum buraco em seus gráficos", porém a resposta mais interessante foi de uma aluna A_3 que afirma que são contínuas, pois "seria possível desenhar seus gráficos sem retirar o lápis do papel". Essa foi a resposta que mais me agradou nesse momento e usamos essa resposta como a nossa definição informal de função contínua, até porque esta é uma fala recorrente dos professores de cálculo diferencial quando desejam simplificar de maneira grosseira o conceito de continuidade de funções reais de variável real. Não foi feita nenhuma investigação sobre a conclusão da aluna, isto é, se foi a resposta foi construída por conexões próprias ou se foi aceita a partir da fala de algum amigo próximo ou familiar que já tenha conhecimento do assunto. Foi intencional a fim de valorizar a fala da aluna. De certa forma, mesmo que tenha pedido ajuda a alguém, mostrou interesse nem cumprir a tarefa, trazendo para a aula uma solução para a questão.

Partimos então para a análise de todas as respostas e voltamos ao aluno A_2 que intuitivamente falou que o "gráfico não possuía buracos". Tomamos um ponto do domínio da função e com auxilio de uma calculadora, investigamos três aspectos sobre o gráfico da função envolvendo um determinado elemento aleatório do domínio. Isto é, se conseguíssemos de alguma maneira garantir que este ponto e sua imagem fazem parte do gráfico da função e se pudéssemos fazer isso para todos os pontos, poderíamos concluir que realmente a função não tem buracos e que ela pode ser dita continua em todo o seu domínio de definição.

Iremos partir nossas atividades da 2ª semana analisando a função crescente f(x) = x+7. O domínio desta função é IR, porém vamos realizar a atividade fixando um valor x_o do domínio e este x_o como sendo o centro de um intervalo I.

Três perguntas foram lançadas aos alunos e logo, logo o leitor perceberá a intenção delas. As perguntas foram introduzidas por: " Esta tarefa é para alunos criativos! Caso você pudesse caminhar sobre o eixo Ox, onde se encontram os elementos que compõem o domínio da função e ao mesmo tempo pudessem acompanhar o movimento das imagens de cada ponto sobre o qual você pisa, você seria capaz de responder a três questionamentos?"

(1) Dado um elemento qualquer **a** do domínio da função gostaria de saber **para onde caminham as imagens dos números sobre o qual você pisa quando você anda em direção ao número a, a direita de a ?**

(2) Agora, **para onde caminham as imagens dos números sobre o qual você pisa quando você anda em direção ao número a, a esquerda de a ?**

(3) Por fim, gostaria de saber qual a imagem de **a**, quando você **esta pisando exatamente** em **a** ?

Sugestão de atividade 1:

Arbitrariamente, a turma escolheu a = 3 e rapidamente disseram que a reposta à terceira pergunta era 10. Ao serem questionados porque, imediatamente falaram que "f de 3 é 10", ou seja, pisar sobre o 3 e anotar a sua imagem, o caminhante encontra 10, veja: f(3) = 3+7 =10.

O que não foi automático é a percepção de que precisaríamos colocar um caminhante curioso à direta e a esquerda de 3 e este caminhante anotar suas observações, que são os valores das imagens sobre cada elemento do domínio que pisa.

Partimos então para a construção de uma tabela e com auxílio de uma calculadora os alunos procuraram responder as questões (1) e (2). Nesse momento, após o valor fixado de **a** não houve consenso sobre a que distância o caminhante deveria andar em direção ao ponto, cabendo ao professor mediar e definir meia unidade para cada lado. Esta unidade causou um rebuliço na classe e muitas duplas tiveram dificuldades em ordenar os decimais de maneira satisfatória. Foi sugerido que usassem decimais exatos com até casas decimais. O preenchimento da tabela não foi fácil e nem rápido, atrasando um pouco a conclusão da tarefa e o cronograma previsto.

Veja a tabela contendo as imagens dos elementos do domínio pertencentes ao intervalo fechado I = [2.5, 3.5] e suas respectivas imagens. Os quatro últimos valores para serem calculados as imagens foram resultados da mediação do professor.

Tabela 1 - I = [2.5, 3.5]

a	f (a)	a	f (a)
2,5	9,5	3,5	10,5
2,55	9,55	3,45	10,45
2,6	9,6	3,4	10,4
2,65	9,65	3,35	10,35
2,7	9,7	3,3	10,3
2,75	9,75	3,25	10,25
2,8	9,8	3,2	10,2
2,85	9,85	3,15	10,15
2,9	9,9	3,1	10,1
2,95	9,95	3,05	10,05
2,97	9,97	3,03	10,03
2,98	9,98	3,02	10,02
2,99	9,99	3,01	10,01
2,995	9,995	3,005	10,005
2,996	9,996	3,006	10,006
2,997	9,997	3,007	10,007
2,998	9,998	3,008	10,008
2,999	9,999	3,009	10,009

Fonte: O autor, 2018.

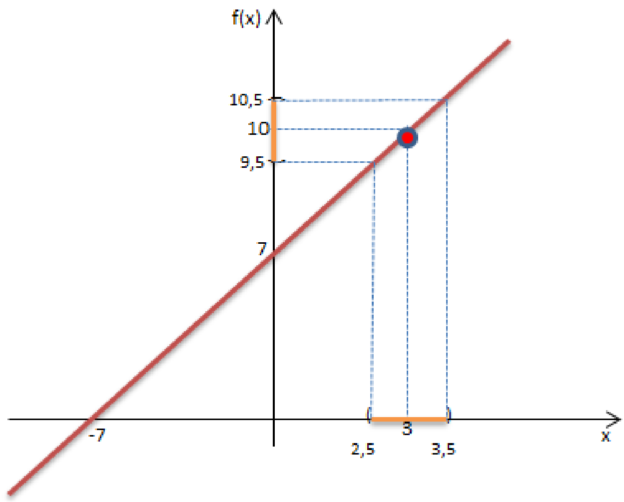
Optamos por redigir um texto em conjunto antes da formalização do conteúdo. Veja:

“Quando o caminhante está caminhando sobre o eixo Ox em direção ao número 3 pela direita do 3 e anota todas as imagens que consegue ver, ele percebe que as imagens vão em direção ao 10 sem ser o 10. Há uma sobrinha. Os números estão bem perto do 10, mas são todos maiores que 10. Já quando o caminhante está caminhando sobre o mesmo eixo Ox em direção ao número 3 pela esquerda e anota todas as imagens que consegue ver, ele percebe que as imagens vão em direção ao 10 sem ser o 10. Os números estão bem perto de 10. Se o caminhante pisar no 3 a imagem é exatamente 10”.

Curiosamente os alunos não questionaram sobre a possibilidade de eleger outros números decimais exatos com mais casas decimais que fossem o mais próximos o quanto quiséssemos imaginar de 3 ou sobre caminhar com passos mínimos em direção a 3 por ambos os lados como esperado. Todos concluíram que o fato de terem infinitos números antes e depois do 3, não teria outra opção para as imagens, elas iriam “inevitavelmente na direção do 3”. Este texto foi guardado para ser analisado posteriormente a fim de que a ideia intuitiva de continuidade não comprometesse o conceito de descontinuidade, uma vez que podemos nos deparar com gráficos de funções em que o caminhante a direta ou a esquerda do 3 anota as imagens e consegue perceber que elas caminham em direção a um mesmo número, porém em 3 a imagem é outra diferente daquela que a tabela induz. Este valor pode ser até mesmo inexistente, como o caso da função $f(x) = \begin{cases} x+3; & x \neq 3 \\ 4; & x = 3 \end{cases}$. A aula foi encerrada com a formalização do conceito.

Observe que para a=3, a ϵ I, temos que f(a) se aproxima de 10 tanto a direita quanto a esquerda de 3 e para valores tão pequenos o quanto podemos imaginar. Além disso f(3) coincide com os valores para onde tendem todas as imagens quando tentamos determinar as imagens dos números que estão ao redor do 3. 10 é chamado de limite da função f(x) tanto a direita quanto a esquerda de 3. Agora vejamos no gráfico o que descrevemos acima:

Figura 39: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 10$



Fonte: O autor, 2018.

Dizemos que uma função f(x) é contínua em um ponto **a** quando o limite a direita desse ponto é igual ao limite a esquerda e além disso, coincide com f(**a**).

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)}$$

Dizemos que a função f(x) é contínua em todo o seu domínio D_f quando para todo quando pudermos verificar esta propriedade para todos os elementos **a** pertencente a $D_{f.}$

Obviamente que esta não é a definição de continuidade encontrada nos livros de Análise na Reta, mas aqui estamos querendo despertar o aluno para o conceito de maneira intuitiva e tal abordagem não gera danos pedagógicos. Estamos assim respeitando o estagio cognitivo dos alunos e explorando do grupo todas as suas potencialidades e possibilidades de criar elementos de ancoragem para lançarmos um conceito mais complexo: a definição de descontinuidade. A ideia era realizar uma segunda atividade, com o término da aula, a atividade ficou para casa.

Sugestão de atividade 2: Para Casa

Seja a função real de variável real decrescente g(x) = - 2x +1, de D_f = IR. Tomando arbitrariamente a = 0,5 tem-se que g(0,5) = -2.0,5 +1 = 0, construa uma tabela contendo elementos do intervalo I = [0, 1] para aproximarmos valores de 0,5 tanto pela sua esquerda, quanto pela sua direita. Por fim, construa o gráfico da função g(x) e determine se a mesma é contínua ou não em x=0,5.

O enunciado foi seco e direto, porém os alunos interpretaram a atividade exatamente igual a primeira atividade, trazendo em suas repostas expressões do tipo "o caminhante", "andar sobre o domínio", "pisar sobre elementos do domínio", "listar/anotar os valores das imagens", etc. durante a correção ficou claro que houve comunicação entre eles e trocas de informações. De certa forma estavam mais preocupados em acertar, talvez por isso, tenham escolhidos intervalos de comprimentos decimais e os pontos médios entre eles.

Acreditamos que a tabela organizada com valores que saiam do 1 em direção a 0,5 de maneira decrescente e do 0 em direção a 0,5 de maneira crescente pudesse ajudar mais na compreensão da expressão "tender a", porém foi proposital a livre escolha para a ordenação dos valores.

Sempre optamos por uma resposta coletiva que contemple o entendimento de todos. Colocaremos abaixo a tabela que mais contemplou a turma e suas conclusões.

Tabela 2 - I = [0, 1]

a	g(a)		a	g(a)
0	1		1	-1
0,05	0,9		0,95	-0,9
0,1	0,8		0,9	-0,8
0,15	0,7		0,85	-0,7
0,2	0,6		0,8	-0,6
0,25	0,5		0,75	-0,5
0,3	0,4		0,7	-0,4
0,35	0,3		0,65	-0,3
0,4	0,2		0,6	-0,2
0,45	0,1		0,55	-0,1
0,47	0,06		0,53	-0,06
0,48	0,04		0,52	-0,04
0,49	0,02		0,51	-0,02
0,495	0,01		0,505	-0,01
0,496	0,008		0,504	-0,008
0,497	0,006		0,503	-0,006
0,498	0,004		0,502	-0,004
0,499	0,002		0,501	-0,002

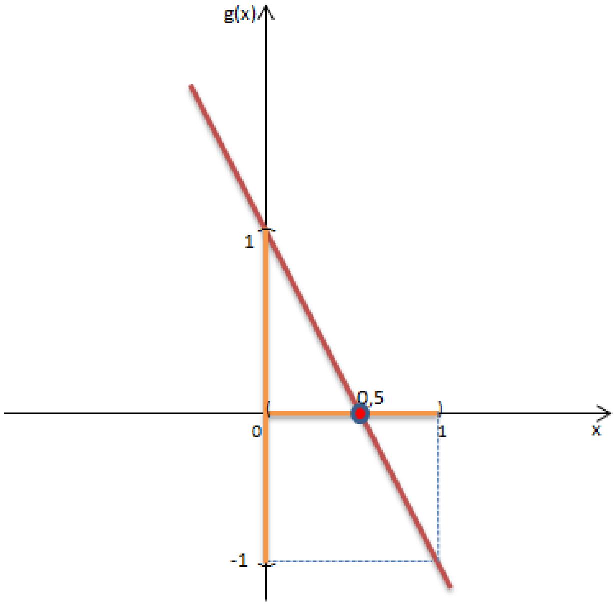
Fonte: O autor, 2018.

Note que caminhando a direita ou a esquerda de 0,5 sobre o eixo Ox, os valores das imagens vão em direção ao zero. Além disso a imagem de 0,5 também é zero o que nos leva a concluir que a função é continua em 0,5 e em torno do 0,5.

Ficou explicito que os alunos construíram a noção intuitiva de limite a direita, de limite à esquerda, de continuidade num ponto e de continuidade num intervalo e que se esta 'engenharia' puder ser realizada em todos os intervalos possíveis contidos no D_f tudo levará a crer que a função será contínua em todo o seu domínio.

A análise gráfica da função g(x), sobretudo das imagens em torno da imagem de 0,5 auxiliarão na compreensão dos conceitos construídos a partir das atividades propostas. É claro que a ideia de um intervalo denso e do continuum não teve lugar nessa discussão por conta do foco deste trabalho, mas guarda seu lugar em experiências futuras.

Figura 40 - lim┬(x→a)⁡〖g(x)=g(a)=0〗



Fonte: o autor, 2018.

$$\lim_{x\to a^+} g(0{,}5) = \lim_{x\to a^-} g(0{,}5) = g(0{,}5) = 0$$

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = g(a)$$

A função g(x) é contínua em 0,5, é continua no intervalo que contém 0,5, isto é [0,1] e este raciocínio pode ser expandido para todos os possíveis intervalos que pudermos imaginar e que estiverem contidos no domínio da função.

Sugestão de atividade 3:

Verifique se a função $f\colon IR \to IR\ definida\ por\ f(x) = x^2 - 4$ é $continua\ em\ x = 3$. Esta função é continua em todo o seu domínio?

Análise da atividade:

Para efeito de consolidação da aprendizagem esta atividade foi proposta de maneira livre. Enunciado duro e seco. Cada dupla desenvolveu a tabela de valores da maneira que achou melhor. Os cinco últimos valores da tabela foram sugestões do professor, a resolução foi muito mais rápida e muitos questionamentos puderam ser levados à turma como forma de revisão e avaliação da aprendizagem. Para uns a atividade foi enfadonha e para quebrar a rotina, foi apresentado aos alunos o modo 'calculadora científica' de seus smartphones. Foi pensado para o futuro, trabalhar com a planilha de cálculos do próprio Geogebra. Não foi implementado com este grupo de alunos porque o tempo tornava-se extremamente escasso e havia necessidade de conclusão da pesquisa para esta dissertação.

A conclusão acerca da continuidade da função já não tomou tanto o caráter inicial da atividade 1, isto é, não apresentou uma linguagem informal com muito apelo à ludicidade nas repostas. Além disso, a reposta mais comum vindas das duplas já foi a seguinte: "os limites a esquerda e a direita em relação ao 3 são iguais e coincidem com a imagem de 3". Careceu uma sequência de perguntas mais detalhadas no quadro para que a avaliação sobre aquisição ou não do conhecimento pudesse realmente ser realizada. Veja a tabela que contemplou a turma.

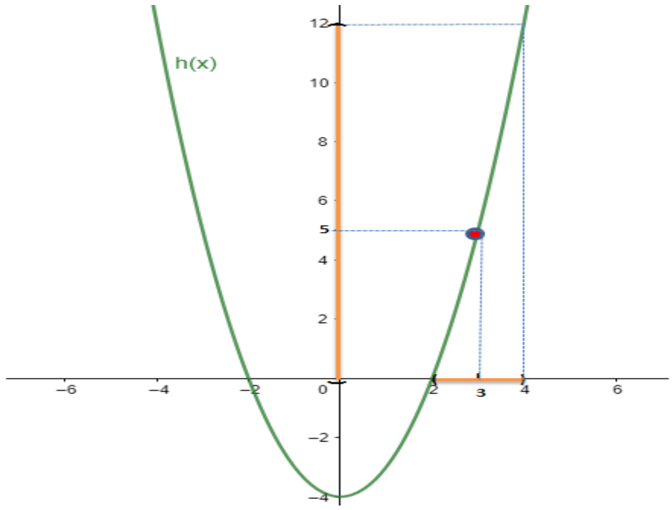
Tabela 3 - I = [2, 4]

a	h(a)	a	h(a)
2	0	4	12
2,1	0,41	3,9	11,21
2,2	0,84	3,8	10,44
2,3	1,29	3,7	9,69
2,4	1,76	3,6	8,96
2,5	2,25	3,5	8,25
2,55	2,5025	3,45	7,9025
2,6	2,76	3,4	7,56
2,65	3,0225	3,35	7,2225
2,7	3,29	3,3	6,89
2,75	3,5625	3,25	6,5625
2,8	3,84	3,2	6,24
2,85	4,1225	3,15	5,9225
2,9	4,41	3,1	5,61
2,95	4,7025	3,05	5,3025
2,97	4,8209	3,03	5,1809
2,98	4,8804	3,02	5,1204
2,99	4,9401	3,01	5,0601
2,995	4,970025	3,005	5,030025
2,996	4,976016	3,006	5,036036
2,997	4,982009	3,007	5,042049
2,998	4,988004	3,008	5,048064
2,999	4,994001	3,009	5,054081

Fonte: O autor, 2018.

A seguir, o gráfico sobre o qual questionamentos sobre o a atividade foram realizados. Pela primeira vez os alunos perceberam que se “duas pessoas caminhassem a partir dos pontos x=2 e x=4 em direção ao 3, as imagens dos números sobre os quais elas pisam iriam ambas em direção ao 5. Foi a primeira vez que a expressão “tender a” foi utilizada.

Figura 41 - $\lim_{x \to a} h(x)=h(a)=5$



Fonte: O autor, 2018.

Dizemos que a função h(x) é contínua em todo o seu domínio.

A presença de uma quarta atividade parecerá repetitiva e para muitos até pode ser vista como uma atividade de caráter behaviorista, mas o objetivo foi trabalhar com tipos diferentes de funções já estudadas pelos alunos: as funções afins crescentes ou decrescentes e as funções quadráticas com concavidade ou para cima ou para baixo. Esta diversificação no estudo das funções ligadas a este tema facilitará futuras abordagens como o conceito de limites que tendem a $+\infty$ ou $a - \infty$. Como seria, por exemplo, perguntar aos alunos para onde tendem as imagens de h(x) se por ventura nos afastarmos de 3, infinitamente pela direita ou pela esquerda dele. Em ambos os casos encontraríamos como resposta $+\infty$.

Sugestão de atividade 4: Atividade de consolidação da Aprendizagem para casa corrigida no laboratório.

Observe a tabela abaixo. Ela foi construída na tentativa de verificar se uma determinada função real de variável real é contínua num ponto x_o, porém o enunciado da questão foi apagado.

Você é capaz de recompor o enunciado somente observando os dados da tabela? O que você pode concluir?

Tabela 4 - I = [-1.5, -0.5]

a	p(a)
-1,5	-2,25
-1,45	-2,1025
-1,4	-1,96
-1,35	-1,8225
-1,3	-1,69
-1,25	-1,5625
-1,2	-1,44
-1,15	-1,3225
-1,1	-1,21
-1,09	-1,1881
-1,08	-1,1664
-1,07	-1,1449
-1,06	-1,1236
-1,05	-1,1025
-1,04	-1,0816
-1,03	-1,0609
-1,02	-1,0404
-1,01	-1,0201
-1,005	-1,01003
-1,004	-1,00802
-1,003	-1,00601
-1,002	-1,004
-1,001	-1,002

a	p(a)
-0,5	-0,25
-0,55	-0,3025
-0,6	-0,36
-0,65	-0,4225
-0,7	-0,49
-0,75	-0,5625
-0,8	-0,64
-0,85	-0,7225
-0,9	-0,81
-0,91	-0,8281
-0,92	-0,8464
-0,93	-0,8649
-0,94	-0,8836
-0,95	-0,9025
-0,96	-0,9216
-0,97	-0,9409
-0,98	-0,9604
-0,99	-0,9801
-0,995	-0,99003
-0,996	-0,99202
-0,997	-0,99401
-0,998	-0,996
-0,999	-0,998

Fonte: O autor, 2018.

A tarefa é de difícil conclusão, pois requer atenção e desconstrução do que vinha sendo feito nas atividades anteriores. Os alunos precisavam concluir que o intervalo de análise das imagens era o intervalo [-1.5 , - 0.5].

Uma dupla D_1 explicou que conseguiu determinar o intervalo procurando o menor valor de **a** e o menor valor de **a** na tabela, mas teve dificuldades em ordená-los pelo fato de todos serem racionais não positivos. Este é um obstáculo epistemológico da construção dos elementos de Q_- que dificulta a conclusão deste tipo de tarefa: a ordenação sem o auxílio da reta numerada.

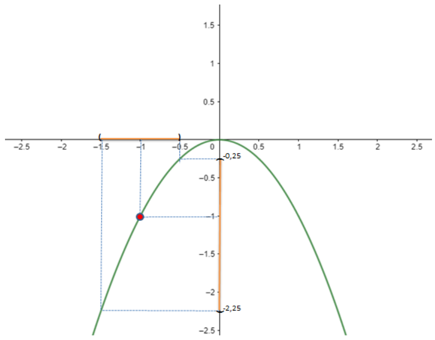
Somente duas duplas, D_6 e D_9 conseguiram perceber que se tratava da função quadrática $f(x) = -x^2$. 'Matamos a questão observando as linhas que assinalamos em vermelho', disse um dos membros da dupla.

Uma outra dupla, D_5 , também chegou à esta conclusão, porém escreveu errado a lei de formação, escreveu $f(x) = (-x)^2$ e não teve o cuidado de reparar o erro. Curioso observar que as duplas que acertaram integralmente ou parcialmente a questão, escreveram corretamente que a função é contínua em -1 e que

$$\boxed{\lim_{x \to -1+} p(x) = \lim_{x \to -1-} p(x) = p(a) = -1}$$

Agora vejamos graficamente a situação exposta pelo professor na culminância da tarefa. Os alunos saíram da aula um pouco frustrados com a quantidade de equívocos cometidos, porém sabemos que atividades de desconstrução do conhecimento para forçar a criação de novos subsunçores, devem trazer o novo e desafiar o aluno, pois são sempre atividades que não priorizam a memória ou a mecanização da aprendizagem.

Figura 42: lim┬(x→a) 〖p(x)=p(a)=-1〗



Fonte: O autor, 2018.

4.5 Relato da Semana 3 - Função Composta e continuidade – 1ª parte

Sugestão de atividade:

Sejam f(x) = x+7 e h(x) = x² - 4 ambas com domínio real.

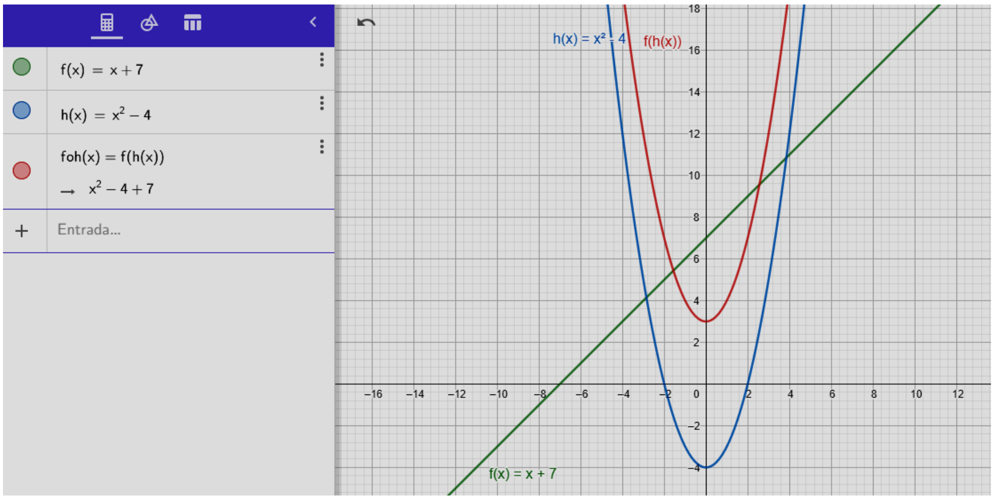
Determine algebricamente as funções compostas f(h(x)), h(f(x)) e a seguir construa seus respectivos gráficos. Os gráficos das funções compostas f(h(x)) e h(f(x)) são funções contínuas em todo os seus domínios?

Neste nível de escolaridade não temos como demonstrar que a composição de funções contínuas são funções contínuas com as ferramentas que dispomos, mas podemos inferir que funções polinomiais são contínuas a partir das atividades anteriores.

1ª parte- Estudo da continuidade de f(h(x))

Algebricamente, $f(h(x)) = h(x) + 7 = (x^2 - 4) + 7 = x^2 + 3$

Figura 43 - $f(h(x)) = x^2 + 3$



Fonte: O autor, 2018.

Vamos analisar a continuidade em um ponto do domínio da função composta.

Analisando os gráficos das funções f(x) e h(x) e o gráfico de função f(h(x)) , no ponto a = 3, tem-se que h(3)= 5 e f(h(3)) =f(5)= 5+7 = 12. Precisamos verificar agora, se os limites laterais são iguais. Assim, tomando o intervalo I = [2.5, 3.5], quando aproximamos valores do domínio em direção a 3 tanto pela sua esquerda, quanto pela sua direita observamos que as sequencias de racionais obtidas tendem a 12.

Podemos construir a usual tabela de valores, estender o raciocínio para outros elementos do seu domínio e inferir que a função h(x), resultante da composição entre outras duas funções polinomiais é uma função polinomial do segundo grau e portanto, contínua.

Análise da tabela que constrói uma sequência de racionais sobre o eixo Ox tendendo a a=3 e sobre o eixo Oy tendendo a 12.

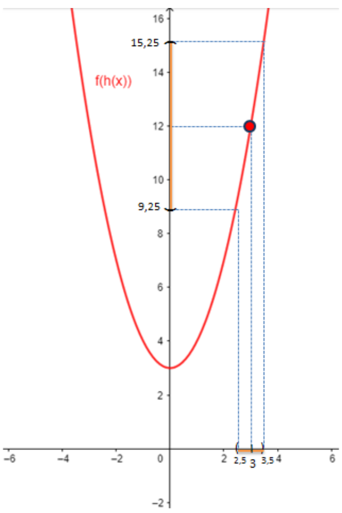
Tabela 5 - f(h(3)) = 12

a	f(h(a))
2,5	9,25
2,55	9,5025
2,6	9,76
2,65	10,0225
2,7	10,29
2,75	10,5625
2,8	10,84
2,85	11,1225
2,9	11,41
2,95	11,7025
2,96	11,7616
2,97	11,8209
2,98	11,8804
2,99	11,9401
2,995	11,97003
2,996	11,97602
2,997	11,98201
2,998	11,988
2,999	11,994

a	f(h(a))
3,5	15,25
3,45	14,9025
3,4	14,56
3,35	14,2225
3,3	13,89
3,25	13,5625
3,2	13,24
3,15	12,9225
3,1	12,61
3,05	12,3025
3,04	12,2416
3,03	12,1809
3,02	12,1204
3,01	12,0601
3,005	12,03003
3,004	12,02402
3,003	12,01801
3,002	12,012
3,001	12,006

Fonte: O autor, 2018.

Figura 44 - $\lim_{x \to a} f(h(x)) = f(h(a)) = 12$



Fonte: O autor, 2018.

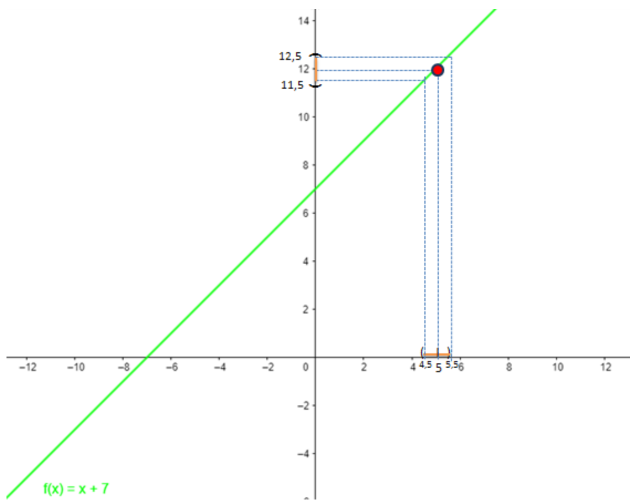
Repetimos a ideia de testar a continuidade ponto a ponto como atividade de fixação. Vejamos:

Tabela 6 - f(5) = 12

a	f(a)	a	f(a)
4,5	11,5	5,5	12,5
4,55	11,55	5,45	12,45
4,6	11,6	5,4	12,4
4,65	11,65	5,35	12,35
4,7	11,7	5,3	12,3
4,75	11,75	5,25	12,25
4,8	11,8	5,2	12,2
4,85	11,85	5,15	12,15
4,9	11,9	5,1	12,1
4,95	11,95	5,05	12,05
4,96	11,96	5,04	12,04
4,97	11,97	5,03	12,03
4,98	11,98	5,02	12,02
4,99	11,99	5,01	12,01
4,995	11,995	5,005	12,005
4,996	11,996	5,004	12,004
4,997	11,997	5,003	12,003
4,998	11,998	5,002	12,002
4,999	11,999	5,001	12,001

Fonte: O autor, 2018.

Figura 45 - (lim)┬(x→a)⁡〖f(a) =f(5) =12〗



Fonte: O autor, 2018.

Teorema:

Se f(x) é uma função contínua em a e g(x) é uma função contínua em f(a), então a composta g(f(x)) é contínua em a.

Como não é finalidade da atividade desta semana formalizar a demonstração deste teorema, opta-se por analisar uma sequencia de gráficos de funções resultantes da composição entre duas funções do material didático do aluno e decidir se representam traços de funções contínuas em seus maiores domínios de validade.

O trabalho na analise gráfica de compostas de funções feito por meio do Geogebra também é explorado, porém de maneira menos incisiva.

4.6 Relato da Semana 4 - Função Composta e continuidade – 2ª parte

Destinaremos o encontro desta semana para reforçar o teorema visto na semana anterior: "Se f é contínua em a e g é contínua em f(a), então a composta g(f(x)) é contínua em a". Houve falta de alunos ao encontro e alguns sinalizaram dificuldade de compreensão do conceito de continuidade global. A atividade foi repetida para outras funções, porém preservando o fato de serem funções polinomiais.

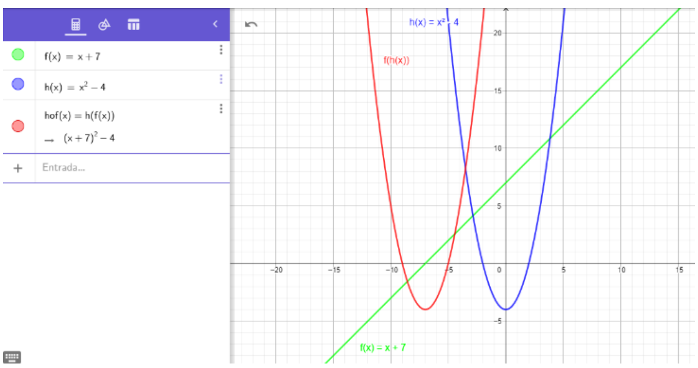
A novidade é que as duplas criaram sequencias diferentes de números racionais, pois verificaram a continuidade local para valores diferentes do domínio.

Vejamos:

2ª parte- Estudo da continuidade de h(f(x))

Algebricamente, $h(f(x)) = [f(x)]^2 - 4 = (x + 7)^2 - 4 = x^2 + 14x + 49 - 4 = x^2 + 14x + 45$

Figura 46 - $h(f(x)) = (x+7)^2 - 4$



Fonte: O autor, 2018.

Analisando a função h(f(x)) no ponto onde a = 3, tem-se que h(f(3)) = 3^2 +14.3 + 45 = 96. Assim, com um intervalo I = [2.5, 3.5] quando aproximarmos valores de 3 tanto pela sua esquerda, quanto pela sua direita encontramos a seguinte situação:

Tabela 7 - h(f(3)) = 96

a	h(f(a))
2,5	86,25
2,55	87,2025
2,6	88,16
2,65	89,1225
2,7	90,09
2,75	91,0625
2,8	92,04
2,85	93,0225
2,9	94,01
2,95	95,0025
2,96	95,2016
2,97	95,4009
2,98	95,6004
2,99	95,8001
2,995	95,90003
2,996	95,92002
2,997	95,94001
2,998	95,96
2,999	95,98

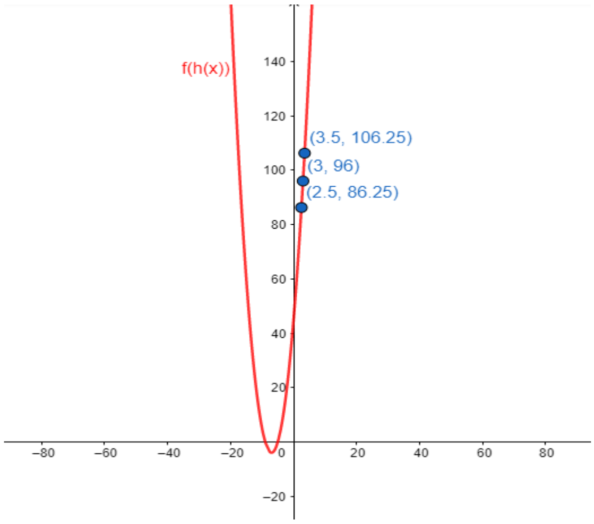
a	h(f(a))
3,5	106,25
3,45	105,2025
3,4	104,16
3,35	103,1225
3,3	102,09
3,25	101,0625
3,2	100,04
3,15	99,0225
3,1	98,01
3,05	97,0025
3,04	96,8016
3,03	96,6009
3,02	96,4004
3,01	96,2001
3,005	96,10003
3,004	96,08002
3,003	96,06001
3,002	96,04
3,001	96,02

Fonte: O autor, 2018.

Observe que para todo a ϵ I, temos que h(f(a)) se aproxima de 96 para cada a cada vez mais próximo de 3, tanto tomando valores que se aproximam pela esquerda de 3, quanto tomando valores que se aproximam pela direita de 3, isto é, o $\lim_{x \to a} \mathrm{h}(\mathrm{f}(\mathrm{x})) = \mathrm{h}(\mathrm{g}(\mathrm{a})) = 96.$

Vejamos graficamente como se comportam os valores

Figura 47: $\lim_{x\to a} 〖h(f(x)) = h(g(a)) = 96〗$



Fonte: O autor, 2018.

Como reflexão final desse encontro, insiro os seguintes questionamentos:

- É contínua em IR a função g: R → R, tal que $g(x) = \frac{1}{x}$?

- A função composta P: R→ R da forma P(x) = g(f(x)), de maneira que $g(x) = \frac{1}{x}$ e f(x) = x +7, é uma função contínua em IR?

- A função composta Q: R→ R da forma Q(x) = g(h(x)), de maneira que $f(x) = \frac{1}{x}$ e h(x) = $x^2 - 4$, é uma função contínua em IR? É contínua para todo elemento de seu domínio?

4.7 Relato da Semana 5 – Continuidade em Funções Racionais.

Destinaremos esse último encontro para o estudo da continuidade das funções racionais tomando como ponto de partida, a composição de funções.

Vimos anteriormente que caso f(x) e g(x) sejam ambas contínuas em IR, então f(g(x)) e g(f(x)) também serão funções continuas em IR e em particular, em qualquer ponto de seu domínio.

Nas atividades destinadas a esse encontro daremos foco ao estudo da função g: R → R, tal que $g(x) = \frac{1}{x}$, bem como a verificação de sua continuidade em todo seu domínio e em IR. Além disso, iremos obter a composição de g(x) com as funções f(x) = x + 7 e h(x) x^2 - 4 estudadas anteriormente e verificar se são contínuas em IR.

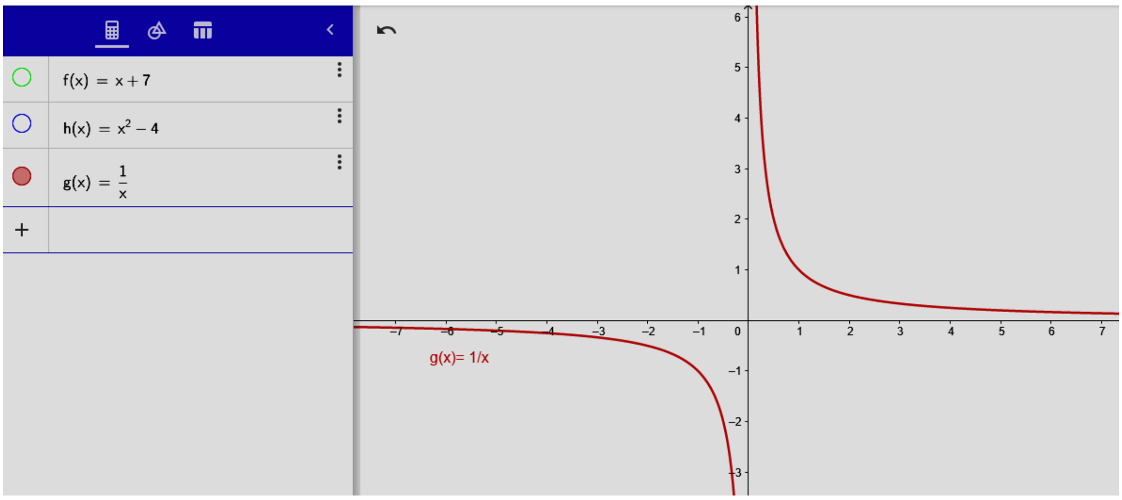
Sugestão de atividade 1 :

Construa com auxilio do software Geogebra o gráfico da função g: R – {0} → R, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$. A função g(x) é contínua em IR ?

De imediato, plotamos o gráfico de g(x) e com as telas abertas os alunos são expostos a uma série de questões.

Após imprimir o gráfico que você vê na tela, é possível com auxilio de um lápis cobrir toda a linha que o descreve sem retirar este lápis do papel ?

Figura 48 - g(x) = 1/x



Fonte: O autor, 2018.

A resposta foi negativa de imediato.

Todos sinalizaram que tentar cobrir o gráfico da função com um lápis pela esquerda do elemento x = 0 do domínio de g(x) a linha que formava o gráfico seguia para -∞ e que estava cada vez mais próxima do eixo das ordenadas e que haveria uma necessidade de tirar o lápis do papel para continuar a cobrir a linha com o grafite. O mesmo acontecia caso esta tentativa de recobertura do desenho fosse iniciada da esquerda para a direita. A medida que o gráfico ia sendo coberto pelo grafite a direita de x = 0 do domínio da g(x) a linha que formava o gráfico seguia para $+\infty$ e estava cada vez mais próxima do eixo das ordenadas. E mais! Para continuar traçando a curva, não tinha como fazê-lo sem que o lápis saísse do papel.

Tomando arbitrariamente a = 0, perguntamos: "Para onde caminham as imagens da função a medida que chegamos perto de 0 tanto a esquerda quanto a direita de 0?

Para dinamizar mais o trabalho dos alunos, foi oferecido os possíveis valores de candidatos a valores próximos de 0 e deixado a cargo dos alunos os cálculos das imagens. Uma tabela com valores pertencentes ao intervalo I = [-0.5, 0.5] para aproximarmos valores de 0 tanto pela sua esquerda quanto pela direita foi oferecida aos alunos a fim de auxiliar a conclusão.

Tabela 8 - I = [-0.5, 0.5]

a	g(a)
-0,5	-2
-0,45	-2,222222222
-0,4	-2,5
-0,35	-2,857142857
-0,3	-3,333333333
-0,25	-4
-0,2	-5
-0,15	-6,666666667
-0,1	-10
-0,05	-20
-0,04	-25
-0,03	-33,33333333
-0,02	-50
-0,01	-100
-0,005	-200
-0,004	-250
-0,003	-333,3333333
-0,002	-500
-0,001	-1000
-0,0001	-10000
-0,00001	-100000
-0,000001	-1000000
-0,0000001	-10000000
-0,00000001	-100000000

a	g(a)
0,5	2
0,45	2,222222222
0,4	2,5
0,35	2,857142857
0,3	3,333333333
0,25	4
0,2	5
0,15	6,666666667
0,1	10
0,05	20
0,04	25
0,03	33,33333333
0,02	50
0,01	100
0,005	200
0,004	250
0,003	333,3333333
0,002	500
0,001	1000
0,0001	10000
0,00001	100000
0,000001	1000000
0,0000001	10000000
0,00000001	100000000

Fonte: O autor, 2018.

Observe que para todo a ϵ I, que tende a zero pela esquerda, observamos que g(a) se caminha em direção a -∞ e para cada vez mais próximo de 0, tomando valores que se aproximam pela sua direita, os valores aumentam rapidamente e tendem a $+\infty$. Estas sequencias de valores não convergem para valor algum e a conclusão é que em IR, a função não é contínua. Porém, para se testar a continuidade num ponto, devemos primeiramente garantir que a abscissa deste ponto seja um elemento do domínio e obviamente que possua uma imagem. Para a função em questão, 0 não é elemento do domínio da função, por isso podemos dizer que a função é contínua *em seu domínio*, diferentemente do que foi concluído quando foi perguntado se a função é contínua em IR.

O conceito de continuidade de uma função em um ponto de seu domínio pode ser colocado na forma de uma definição precisa: g é contínua num ponto a de seu domínio quando existe f(a) e $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Quando f é contínua em cada ponto de seu domínio de validade, dizemos que f é contínua em seu domínio.

Observamos que para questionarmos se uma dada função é contínua em determinado ponto, precisamos tomar o cuidado de verificar se esse ponto pertence ao domínio da função. Se tal ponto não está no domínio, a função não é contínua nesse ponto. Assim, g(x) = $\frac{1}{x}$ é uma função contínua em todos os pontos de seu domínio R- {0}, porém não é contínua no conjunto R, pois não é contínua em x=0, uma vez que não está nem definida nesse ponto.

E as funções resultantes da composição da função $f(x) = \frac{1}{x}$ com funções polinomiais do primeiro ou do segundo grau são sempre continuas ou descontínuas em IR? Vamos procurar explorar tais composições em atividades que envolvam o Geogebra.

Definição: A função f definida pela equação f(x) = $\frac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são funções polinomiais e q(x) ≠ 0, é denominada **Função Racional**.

A função racional é chamada de própria se o grau do polinômio p(x) for menor que o grau de q(x) e imprópria caso ocorra o contrário.

Como propriedade, conceituamos que sejam f e g duas funções racionais, então a soma, o produto, a diferença e o quociente entre f e g são também funções racionais e trabalharemos com uma classe de funções racionais especiais, aquelas do tipo f(x) = $\frac{1}{q(x)}$.

Sugestão de atividade 2:

Faça o estudo da função composta P: R→ R da forma P(x) = g(f(x)), de maneira que g(x) = $\frac{1}{x}$ e f(x) = x +7.

P(x) é uma função contínua para todo elemento de seu domínio?

De imediato determinaremos P(x). Assim, P(x) = g(f(x)) = $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x+7}$

Ora, como visto anteriormente, f(x) é contínua para todo elemento a de seu domínio e se tomarmos a = -7, tem-se que f(a) = f(-7) = -7+7 = 0.

Pelo teorema, se f é contínua em a e g é contínua em f(a), então a composta g(f(a)) é contínua em a. Portanto, faz-se necessário demonstrar que g é continua em g(f(-7)) = g(0).

Iniciamos nosso ultimo encontro constatando que g(x) = $\frac{1}{x}$ é uma função contínua em todos os pontos de seu domínio R- {0}, porém não é contínua no conjunto R, pois não é contínua em x=0, uma vez que não está definida nesse ponto.

Portanto, P(x) = g(f(x)) é uma função contínua em todos os pontos de seu domínio R- {-7}, porém não é contínua no conjunto R, pois não é contínua em x=-7, uma vez que não está definida nesse ponto.

Tomando a = -7, Construiremos uma tabela com um intervalo I = [-7.5, -6.5] para aproximarmos valores de -7 tanto pela sua esquerda, quanto pela sua direita e vamos comparar com o gráfico obtido em tela

Tabela 9 - I = [-7.5, -6.5]

a	g(a)	a	g(a)
-7,5	-2	**-6,5**	2
-7,45	-2,222222222	**-6,55**	2,222222222
-7,4	-2,5	**-6,6**	2,5
-7,35	-2,857142857	**-6,65**	2,857142857
-7,3	-3,333333333	**-6,7**	3,333333333
-7,25	-4	**-6,75**	4
-7,2	-5	**-6,8**	5
-7,15	-6,666666667	**-6,85**	6,666666667
-7,1	-10	**-6,9**	10
-7,05	-20	**-6,95**	20
-7,04	-25	**-6,96**	25
-7,03	-33,33333333	**-6,97**	33,33333333
-7,02	-50	**-6,98**	50
-7,01	-100	**-6,99**	100
-7,005	-200	**-6,995**	200
-7,004	-250	**-6,996**	250
-7,003	-333,3333333	**-6,997**	333,3333333
-7,002	-500	**-6,998**	500
-7,001	-1000	**-6,999**	1000
-7,0001	-10000	**-6,9999**	10000
-7,00001	-100000	**-6,99999**	100000
-7,000001	-999999,9999	**-6,999999**	999999,9999
-7,0000001	-9999999,972	**-6,9999999**	9999999,972
-7,00000001	-100000000,6	**-6,99999999**	100000000,6

Fonte: O autor, 2018.

$$\lim_{x \to -(-7)} g(x) - \infty \text{ e } \lim_{x \to +(-7)} g(x) = +\infty .$$

Ao observar todos os números reais, verificamos que -7 não é elemento do domínio da função, não estando definido não podemos dizer que a função é descontínua em seu domínio, porém, podemos afirmar que g(x) é descontínua em IR.

A reta vertical, paralela ao eixo Oy é chamada de assíntota vertical ao gráfico de g(x). A assíntota vertical contém exatamente a abscissa do ponto de descontinuidade da função racional quando analisada em IR.

Figura 49 - P(x) = g(f(x)) = 1/(x+7)

Fonte: O autor, 2018.

Há funções do tipo $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ que possui duas ou mais assíntotas verticais?

Sugestão de atividade 3:

Faça o estudo da função composta Q(x) = g(h(x)), tal que g(x) = $\frac{1}{x}$ e h(x) = x² - 4.

Q(x) é uma função contínua em IR?

De imediato determinaremos Q(x). Assim, Q(x) = g(h(x)) = $\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x^2-4}$.

Ora, como visto anteriormente, g(x) é contínua para todo elemento a de seu domínio, porém não é contínua em IR. Os pontos de descontinuidade da função são justamente aqueles onde Q(x) não está definida.

Iniciamos nosso ultimo encontro constatando que g(x) = $\frac{1}{x}$ é uma função contínua em todos os pontos de seu domínio R- {0}, porém não é contínua no conjunto R, pois não é contínua em x=0, uma vez que não está definida nesse ponto.

Portanto, Q(x) = g(h(x)) é uma função contínua em todos os pontos de seu domínio R- {-2,2}, porém não é contínua no conjunto R, pois não é contínua em x=-2 ou x=2, uma vez que não está definida nesses pontos.

Tomando a = -2, Construiremos uma tabela com um intervalo I = [-2,5, -1,5] para aproximarmos valores de -2 tanto pela sua esquerda, quanto pela sua direita.

Tabela 10 - I = [-2.5, -1.5]

a	h(a)	a	h(a)
-2,5	0,444444444	-1,5	-0,57142857
-2,45	0,49937578	-1,55	-0,62597809
-2,4	0,568181818	-1,6	-0,69444444
-2,35	0,65681445	-1,65	-0,78277886
-2,3	0,775193798	-1,7	-0,9009009
-2,25	0,941176471	-1,75	-1,06666667
-2,2	1,19047619	-1,8	-1,31578947
-2,15	1,606425703	-1,85	-1,73160173
-2,1	2,43902439	-1,9	-2,56410256
-2,05	4,938271605	-1,95	-5,06329114
-2,04	6,188118812	-1,96	-6,31313131
-2,03	8,271298594	-1,97	-8,39630563
-2,02	12,43781095	-1,98	-12,5628141
-2,01	24,93765586	-1,99	-25,0626566
-2,005	49,93757803	-1,995	-50,0625782
-2,004	62,43756244	-1,996	-62,5625626
-2,003	83,27088017	-1,997	-83,3958802
-2,002	124,9375312	-1,998	-125,062531
-2,001	249,9375156	-1,999	-250,062516
-2,0001	2499,937502	-1,9999	-2500,0625
-2,00001	24999,9375	-1,99999	-25000,0625
-2,000001	249999,9375	-1,999999	-250000,063
-2,0000001	2499999,943	-1,9999999	-2500000,06
-2,00000001	25000000,15	-1,99999999	-25000000,2

Fonte: O autor, 2018.

$$\lim_{x \to -(-2)} h(x) = h(a) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to +(-2)} h(x) = h(a) = -\infty .$$

Tomando a = 2, construiremos uma tabela com um intervalo I = [1.5, 2.5] para aproximarmos valores de 2 tanto pela sua esquerda, quanto pela sua direita.

Tabela 11 - I = [1.5, 2.5]

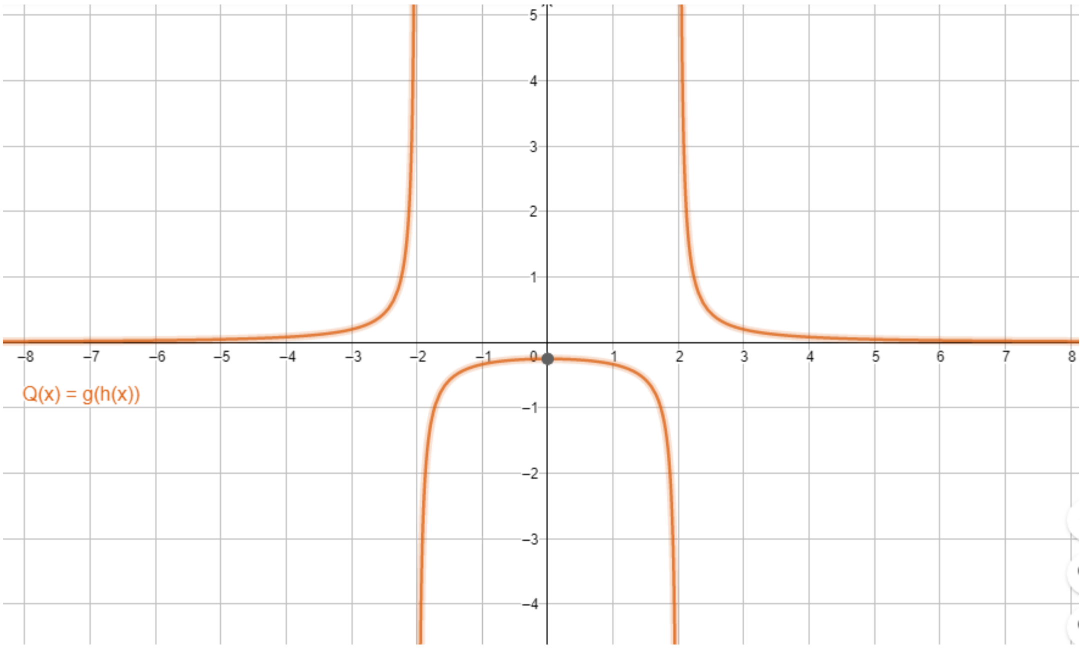
a	h(a)	a	h(a)
1,5	-0,571428571	2,5	0,444444444
1,55	-0,625978091	2,45	0,49937578
1,6	-0,694444444	2,4	0,568181818
1,65	-0,782778865	2,35	0,65681445
1,7	-0,900900901	2,3	0,775193798
1,75	-1,066666667	2,25	0,941176471
1,8	-1,315789474	2,2	1,19047619
1,85	-1,731601732	2,15	1,606425703
1,9	-2,564102564	2,1	2,43902439
1,95	-5,063291139	2,05	4,938271605
1,96	-6,313131313	2,04	6,188118812
1,97	-8,396305626	2,03	8,271298594
1,98	-12,56281407	2,02	12,43781095
1,99	-25,06265664	2,01	24,93765586
1,995	-50,06257822	2,005	49,93757803
1,996	-62,56256256	2,004	62,43756244
1,997	-83,39588024	2,003	83,27088017
1,998	-125,0625313	2,002	124,9375312
1,999	-250,0625156	2,001	249,9375156
1,9999	-2500,062502	2,0001	2499,937502
1,99999	-25000,0625	2,00001	24999,9375
1,999999	-250000,0625	2,000001	249999,9375
1,9999999	-2500000,062	2,0000001	2499999,943
1,99999999	-25000000,15	2,00000001	25000000,15

Fonte: O autor, 2018.

$$\lim_{x \to -(2)} h(x) = h(a) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to +(2)} h(x) = h(a) = +\infty .$$

Agora vejamos graficamente se nossa intuição vai ao encontro da realidade:

Figura 50 - Q(x) = g(h(x)) = 1/((x)^2-4)



Fonte: O autor, 2018.

(1) Os pontos de descontinuidade da função são exatamente os pontos que não pertencem ao domínio da função.

(2) As assíntotas verticais desses gráficos contêm as abscissas dos pontos de descontinuidade.

(3) Analisando a sequencia de números racionais obtidas ao determinar as imagens que compuseram as tabelas de valores acima, conclui-se que a esquerda de -2 estes valores tendem a $+\infty$, já a esquerda de -2, as imagens tendem a $-\infty$. Analisando a sequência de números racionais obtidas ao determinar as imagens em torno de +2, conclui-se que a direita dele as imagens tendem a $+\infty$ enquanto a esquerda os valores diminuem, tendendo a $-\infty$.

Após os encontros esta linguagem própria da Análise real passou a ser corriqueira para o grupo de alunos que participou desta pesquisa, o que tornou a pesquisa extremamente gratificante.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa podemos concluir através das atividades práticas em ambientes virtuais de aprendizagem é possível obter ganhos extremamente positivos de aprendizagem quando estas atividades são bem fundamentadas numa teoria que priorize que a Aprendizagem Cognitiva. A teoria escolhida foi a da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, que é a integração do conteúdo aprendido numa edificação mental ordenada, a Estrutura Cognitiva.

Concordamos com Ausubel (1980) ao afirmar que essa Estrutura Cognitiva representa todo um conteúdo informacional armazenado por um indivíduo, organizado de uma certa forma em qualquer modalidade do conhecimento e que O conteúdo previamente detido pelo indivíduo representa um forte influenciador do processo de aprendizagem. A medida que Novos dados serão assimilados e armazenados na razão direta da qualidade da Estrutura Cognitiva prévia do aprendiz.

O ponto mais importante da teoria aplicada ao ensino da matemática se dá quando o professor é capaz de perceber que o conhecimento anterior quando bem desenvolvido e bem estruturado tanto na prática pedagógica quanto na matemática em si, resultará num "ponto de ancoragem" onde as novas informações irão encontrar um modo de se integrar a aquilo que o indivíduo já conhece. No caso dessa pesquisa a ancoragem se deu através dos seguintes conteúdos: função composta, função inversa e composição de funções, que integrados e ressignificados segundo Ausubel, foram bases sólidas para a compreensão da ideia intuitiva de continuidade e descontinuidade de funções para alunos do ensino médio.

Enquanto as funções polinomiais e as funções compostas entre funções polinomiais permitiram organizar uma sequencia didática em que a ideia intuitiva de continuidade pudesse ser explorada com sucesso, a introdução ao estudo simples das funções racionais do tipo $f(x) = \frac{1}{q(x)}$ permitiu a consolidação da ideia de descontinuidade de uma função em IR e a discussão a cerca de sua continuidade em seu domínio.

As multipotencialidades do software Geogebra foi fundamental para que o objetivo final fosse alcançado. Alunos motivados e apoio dos gestores escolares são fatores importantíssimos para que as atividades sejam desenvolvidas de maneira calma e segura, sempre visando ganhos na aprendizagem.

A mudança de comportamento do professor após o contato com tal referencial teórico é evidente, pois a proposta da teoria de Aprendizagem Significativa exige do professor mais do que conhecimento de sua disciplina, exige uma ampla cultura sobre a disciplina a fim de obter êxito nas escolhas corretas de conteúdos que servirão de ancoragem para a consolidação futura do conteúdo a ser ensinado. Além disso, como a teoria exige que as atividades sempre tragam o novo para o aluno e que o aluno lance mão de conhecimentos prévios, o professor deve sempre estar antenado de como os seus alunos adquiriram os conhecimentos prévios.

Ao longo do desenvolvimento deste projeto pude constatar que a sua viabilidade dependeria da estrutura e aparato tecnológico oferecido pela escola, o que fui atendido plenamente. Além disso, é necessário a disponibilidade dos alunos em horário alternativo uma vez que na grade curricular do ensino da Matemática no ensino médio não comporta tempo hábil para que seja explorada todas possibilidades desse projeto e ainda contemplar todos os conteúdos contidos no currículo proposto pela instituição e aqueles exigidos pelos exames oficiais nacionais. Desta forma, em nossos encontros semanais fora do horário das aulas habituais, procuramos fazer com que os assuntos fossem desenvolvidos de maneira agradável e acima de tudo que a linguagem adotada aproximasse o aluno da Matemática, principalmente sabendo que os temas abordados são áridos para alunos nessa faixa etária.

Outro ponto positivo que podemos destacar foi o entusiasmo e empenho dos alunos quando foi apresentado as ferramentas tecnológicas que exploramos. Através dos softwares Geogebra, da calculadora científica e de rudimentos simples do Excel pude me aproximar muito mais dos alunos, usando a tecnologia como minha aliada no sentido de propiciar a facilitação da aprendizagem.

O ensino das funções compostas, por exemplo, se tornou mais palpável e agradável para os alunos quando trouxemos exemplos contextualizados e os destrinchamos através das interfaces gráficas do Geogebra. Problemas que se limitavam a puro algebrismo, ao serem abordados de usando todas essas ferramentas disponíveis, tornaram-se mais simples e agradáveis no que diz respeito ao ensino de conteúdos pouquíssimos explorados no ensino médio.

Ao final do conjunto de tarefas propostas percebemos que este estudo possibilitou ao professor explorar por uma outra ótica a composição de funções além inserir as funções racionais elementares de maneira eficaz no ensino médio, apresentando atividades e formas alternativas de aplicá-las. Muitos conceitos, teoremas e propriedades que dificilmente seriam abordados nas aulas regulares tornam-se compreensíveis. É um trabalho que deixa possibilidades de extensão de pesquisa, tanto na área da didática da matemática, da psicologia da educação matemática ou do ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo horizonte**. Tradução de Cyro de Carvalho e Marcia Tamanaha. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ARTIGUE, M. Analisys. In D. Tall (ed.), **Advanced Mathematical Thinking**, 167-198. Kluwer, Dordrecht: 1991.

AUSUBEL ET alii. **Psicologia Educacional.** Rio de Janeiro. Editora Interamericana, 1980.

BAKER B.W. **Inproving continuity in the secondary school throug removing enrollment and content barriers.** Association for supervision for curriculum development. Educational Lidership, March 1961. p. 343-345

BREIDENBACH, D., DUBINSKY, E., HAWKS, J. & NICHOLS, D. **Development of the Process Conception of Function.** Educational Studies in Mathematics 23, pp. 247 – 285. 1992.

CONTEÚDOS DIGITAIS PARA A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO: INTEGRANDO O COMPUTADOR NA PRÁTICA DOCENTE. http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/MR/MR19_Bortolossi.pdf. Consultado em 01 de Maio de 2019.

HOHENWATER, M. GeoGebra. http://www.geogebra.org/. Consultado em 01 de Maio de 2019.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da matemática elementar, 1**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

IEZZI, Gelson. et al. **Matemática: ciência e aplicações, 1: ensino médio**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2014.

JACOMINO, T.Z.M. **Funções Racionais no Ensino Médio.** 2013**.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – UENF, Campos dos Goytacazes, RJ, 2013. Disponível em:

http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/08/22032013 Thiago-Marques-Zanon-Jacomino.pdf. Acesso em: 13 de março de 2019.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise; v.1**. 14. ed. Rio de janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. 1. ed. Rio de janeiro: SBM 2013.

MATRIZ DE REFERENCIA ENEM. http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Consultado em 01 de Maio de 2019.

PARKER, F. **Continuity between High School and College.** Association for supervision for curriculum development. Educational Lidership, March 1961. p.346-350.

PENTEADO, W.M.A. (org). **Psicologia e Ensino.** São Paulo: Papelivros Editora, 1980.

PINTO, G.M.da F. **Compreensão gráfica da derivada de uma função real em um curso de cálculo semi-presencial.** 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - UFRJ, Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/01%20Gisela% 20Pinto.pdf. Acesso em 13 de março de 2019.

PNLD 2018: http://www.fnde.gov.br/pnld-2018/. Consultado em 01 de Maio de 2019.

SILVA, J. de O. Aprendizagem Significativa: David Ausubel. In: TOVAR, Sonia Maria; ROSA, Marilaine Bauer Santa (Org). **Psicologia da Aprendizagem**. Rio de Janeiro: Edições Agua-Forte, 1990, p. 86-95.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v.12, p. 151– 169, 1981.

TALL, D. Functions and Calculus. In: BISHOP A. J. et al (Eds.). **International Handbook of Mathematics Education.** Dordrecht: Kluwer, 1997. p. 289-325.

TAKAE, D.; PESIC, D.; TATAR, J. An Introduction to the continuity of functions using scientific workplace. **The Teaching of Mathematics**, vol. 6, n. 2, p. 105-112, 2003.