



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

GERLÚCIO SILVA DE LIMA

**AS FORMAS GEOMÉTRICAS NAS OBRAS DE GAUDÍ:
AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS, AS SUPERFÍCIES REGRADAS E A CATENÁRIA**

FORTALEZA – CEARÁ

2019

GERLÚCIO SILVA DE LIMA

AS FORMAS GEOMÉTRICAS NAS OBRAS DE GAUDÍ:
AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS, AS SUPERFÍCIES REGRADAS E A CATENÁRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr Claudemir Silvino Leandro

FORTALEZA – CEARÁ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Lima, Gerlúcio Silva de .

As formas geométricas nas obras de gaudí: as superfícies quádricas, as superfícies regradas e a catenária [recurso eletrônico] / Gerlúcio Silva de Lima. - 2019.

1 CD-ROM: il.; 4 ¼ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 95 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.

Área de concentração: Matemática. .

Orientação: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro.

1. Formas geométricas. 2. Obras arquitetônicas. 3. Antoni Gaudí. I. Título.

GERLÚCIO SILVA DE LIMA

AS FORMAS GEOMÉTRICAS NAS OBRAS DE GAUDÍ:
AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS, AS SUPERFÍCIES REGRADAS E A CATENÁRIA


Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 25 de abril de 2019

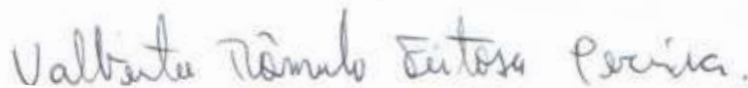
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Claudemir Silvano Leandro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Prof. Dr. Valberto Rômulo Feitosa Pereira
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Dedico esse trabalho a Deus, a minha esposa Vivianne Severino de Jesus Lima, ao meu pai Paulo César Alves de Lima (in memoriam), a minha mãe Maria do Socorro Silva de Lima (in memoriam), a minha filha Lívia Maria de Jesus Lima, ao meu filho Pedro César de Jesus Lima e a todos que me incentivaram durante toda essa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço sinceramente:

A Deus, por tornar possível realizar esse sonho que eu vinha perseguindo durante muito tempo.

Aos idealizadores do Profmat, que proporcionaram aos professores essa oportunidade ímpar de obter o título de mestre e à Universidade Estadual do Ceará (UECE) por ter abraçado esse projeto.

Aos professores que ministraram o curso os quais cito nominalmente: Tiago Caúla Ribeiro, João Montenegro de Miranda, João Marques Pereira, Hermínio Borges Neto, Ana Cláudia Mendonça Pinheiro, Ulisses Lima Parente e Claudemir Silvino Leandro (Meu nobre orientador) que muito contribuíram para minha formação profissional com seus ensinamentos e dedicação em prol do nosso aprendizado.

Aos meus colegas de turma que iniciaram comigo essa empreitada, mas em especial aos que se tornaram amigos e irmãos de coração os quais cito nominalmente: Albimar Silva Neri, Diarlley Emanuel Lacerda de Almeida Loyola Sena, João Mendes Barroso Filho, Jonathan Araújo Barbosa, José Aldeci de Lima e Silva, José Bernardo de Araújo Torres (nosso líder), José Ivan Esteves Vieira, Marcelo de Castro Soares Alencar e Sérgio Augusto Coelho Monteiro Júnior que muito contribuíram para minha formação tanto no aspecto técnico quanto no aspecto motivacional.

Aos meus colegas e amigos de trabalho, em especial a Cristiane Michele Santos Herculano, que muito me incentivaram durante todo o processo de formação, dando apoio para que eu nunca fraquejasse.

A minha esposa Vivianne Severino de Jesus Lima, a minha filha Lívia Maria de Jesus Lima, ao meu filho Pedro César de Jesus Lima, aos meus irmãos, tios, primos, sogros e cunhados que de alguma forma participaram ou participam da minha vida.

Ao meu pai Paulo César Alves de Lima (in memoriam) e a minha mãe Maria do Socorro Silva de Lima (in memoriam) que com todo esforço e dificuldades em momento algum deixaram de me apoiar durante toda a minha vida estudantil e que muito se orgulharam, enquanto vivos, de tudo que conquistei em minha vida.

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso, aprendemos sempre.”

(Paulo Freire)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo mostrar a relação existente entre a matemática e a arquitetura, através do uso de formas geométricas nas obras arquitetônicas do arquiteto espanhol Antoni Gaudí. Para melhor entendimento do assunto, foi feita no primeiro capítulo uma breve explanação do que seria abordado no trabalho. No segundo capítulo falou-se sobre a vida e a obra de Gaudí, destacando sua forte relação com a natureza. No terceiro, no quarto e no quinto capítulos foi feito um estudo mais apurado sobre as superfícies quádricas, as superfícies regradas e a catenária, apresentando suas equações com as respectivas demonstrações. No sexto capítulo foram apresentadas aplicações dessas formas geométricas em objetos e obras arquitetônicas em geral e no sétimo capítulo, foram apresentadas as obras de Gaudí onde essas formas geométricas foram utilizadas. Finalizando, foram feitas algumas considerações relevantes sobre a realização desse trabalho.

Palavras-chave: Formas geométricas. Obras arquitetônicas. Antoni Gaudí.

ABSTRACT

This work aims to show the relationship between mathematics and architecture, through the use of geometric forms in the architectural works of the Spanish architect Antoni Gaudí. For a better understanding of the subject, was made in the first chapter a brief explanation of what would be approached in the work. In the second chapter was spoken about the life and work of Gaudí, highlighting his strong relationship with nature. In the third, fourth and fifth chapters a study was made on quadrics surfaces, ruled surfaces and the catenary, presenting their equations with their respective demonstrations. In the sixth chapter were presented applications of these geometric forms in objects and architectural works in general and in the seventh chapter, were presented Gaudí works where these geometric forms were used. Finally, were made some relevant considerations about the accomplishment of this work.

Keywords: Geometric forms. Architectural works. Antoni Gaudí

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Antoni Gaudí	18
Figura 2 –	Residência de Gaudí em Riudoms	19
Figura 3 –	Cortejo do último adeus a Gaudí	20
Figura 4 –	Parque Güell (mosaicos coloridos)	20
Figura 5 –	Palácio Episcopal de Astorga	21
Figura 6 –	Casa Calvet	22
Figura 7 –	Embarcadouro	23
Figura 8 –	Vitrine Comella	24
Figura 9 –	Casa Milá	25
Figura 10 –	Parque Güell	26
Figura 11 –	Palácio Güell	26
Figura 12 –	Casa Batlò	27
Figura 13 –	Casa Vincens	27
Figura 14 –	Cripta da Colônia Güell	28
Figura 15 –	Templo Expiratório da Sagrada Família	29
Figura 16 –	Arquimedes de Siracusa	30
Figura 17 –	Elipsoide	32
Figura 18 –	Hiperboloide de uma folha	33
Figura 19 –	Hiperboloide de duas folhas	34
Figura 20 –	Paraboloide elíptico	35
Figura 21 –	Paraboloide hiperbólico	36
Figura 22 –	Cone elíptico	36
Figura 23 –	Cilindro elíptico	37
Figura 24 –	Cilindro hiperbólico	38
Figura 25 –	Cilindro parabólico	39
Figura 26 –	Gráfico da curva f	41
Figura 27 –	Circunferência gerada por um ponto da curva f	41
Figura 28 –	Interseção do hiperbolóide de uma folha com um plano .	44
Figura 29 –	Interseção do parabolóide elíptico com um plano	45
Figura 30 –	Superfície regrada (conoide)	54
Figura 31 –	Guarda chuva de Whitney	55
Figura 32 –	Cilindro regrado	55

Figura 33 –	Cone regrado	56
Figura 34 –	Hiperboloide de uma folha regrado	57
Figura 35 –	Paraboloide hiperbólico regrado	57
Figura 36 –	Helicoide regrado	58
Figura 37 –	Conoide circular reto	59
Figura 38 –	Catenária	61
Figura 39 –	Catenária sob ação de forças de tração e da força peso .	62
Figura 40 –	Infoys Headquarters	65
Figura 41 –	Montreal Biosphere	66
Figura 42 –	Catedral de Brasília	67
Figura 43 –	Restaurante Los Manantiales	68
Figura 44 –	Museu de arte da Paraíba	69
Figura 45 –	Palácio dos três poderes	69
Figura 46 –	Catedral Basílica Menor	70
Figura 47 –	Gateway Arch	71
Figura 48 –	Catenária e catenária invertida	73
Figura 49 –	Sótão da Casa Milá	74
Figura 50 –	Coluna de duplo giro	75
Figura 51–	Cúpula da sacristia da Sagrada Família	76
Figura 52 –	Nós em forma de elipsoides	77
Figura 53 –	Subsolo do Palácio Güell	78
Figura 54 –	Casa Botines de León	79
Figura 55 –	Bovedas em forma de hiperbolóide da Sagrada Família ..	80
Figura 56 –	Cobertura da Cripta Güell	81
Figura 57 –	Escolas Provinciais da Sagrada Família	82
Figura 58 –	Rampa do Palácio Güell	83
Figura 59 –	Escadaria do Templo Expiratório da Sagrada Família	83

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	A GEOMETRIA AO LONGO DA HISTÓRIA.....	14
1.2	AS QUÁDRICAS, CATENÁRIA E A ARQUITETURA	15
1.3	A CONCEPÇÃO DO TRABALHO	16
2	A VIDA E A OBRA DE ANTONI GAUDÍ	18
2.1	ASPECTOS GERAIS DA VIDA DE GAUDÍ	18
2.2	ESTILOS QUE INFLUENCIARAM A CARREIRA DE GAUDÍ	20
2.2.1	A fase Mourisca	20
2.2.2	O estilo Gótico	21
2.2.3	O estilo Arte Nova e o modernismo catalão	22
2.2.4	O estilo próprio	22
2.3	AS OBRAS ARQUITETÔNICAS DE ANTONI GAUDÍ	23
2.3.1	As primeiras obras de Antoni Gaudí	23
2.3.2	Obras de maior destaque na carreira de Gaudí	24
3	AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS	30
3.1	UM POUCO DA HISTÓRIA DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS	30
3.2	DEFINIÇÃO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS	31
3.3	QUÁDRICAS NÃO DEGENERADAS	32
3.3.1	Elipsoide	32
3.3.2	Hiperboloide elíptico de uma folha	33
3.3.3	Hiperboloide elíptico de duas folhas	34
3.3.4	Paraboloide elíptico	35
3.3.5	Paraboloide hiperbólico	35
3.3.6	Cone duplo	36
3.3.7	Superfícies cilíndricas	37
3.3.7.1	Cilindro elíptico	37
3.3.7.2	Cilindro hiperbólico	38
3.3.7.3	Cilindro parabólico	39
3.4	QUÁDRICAS DE REVOLUÇÃO.....	40
3.5	INTERSEÇÃO DE UMA QUÁDRICA COM UM PLANO.....	44
3.6	RECONHECIMENTO DE QUÁDRICAS	45

3.6.1	Equação geral das quádricas sem os termos mistos.....	46
3.6.2	Equação geral das quádricas com os termos mistos.....	47
4	SUPERFÍCIES REGRADAS	54
4.1	DEFINIÇÃO DE SUPERFÍCIES REGRADAS.....	54
4.2	EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DAS SUPERFÍCIES REGRADAS..	55
4.2.1	Cilindro	55
4.2.2	Cone	56
4.2.3	Hiperboloide de uma folha.....	56
4.2.4	Paraboloide hiperbólico.....	57
4.2.5	Helicoide regrado.....	58
4.2.6	Conoide regrado.....	59
5	A CATENÁRIA	61
5.1	A HISTÓRIA DA CATENÁRIA.....	61
5.2	A EQUAÇÃO DA CATENÁRIA.....	62
6	AS QUÁDRICAS E A CATENÁRIA NA ARQUITETURA.....	65
6.1	INFOYS HEADQUARTERS.....	65
6.2	MONTREAL BIOSPHERE.....	66
6.3	CATEDRAL DE BRASÍLIA	67
6.4	RESTAURANTE LOS MANANTIALES	67
6.5	MUSEU DE ARTE POPULAR DA PARAÍBA	68
6.6	PALÁCIO DOS TRÊS PODERES.....	69
6.7	CATEDRAL BASÍLICA MENOR.....	70
6.8	GATEWAY ARCH.....	71
7	AS FORMAS GEOMÉTRICAS DE GAUDÍ.....	72
7.1	A RELAÇÃO DE GAUDÍ COM OS ARCOS CATENÁRIOS	72
7.2	OS ARCOS CATENÁRIOS NAS OBRAS DE GAUDÍ.....	73
7.3	GAUDÍ E AS QUÁDRICAS	75
7.4	APLICAÇÕES DAS QUÁDRICAS NAS OBRAS DE GAUDÍ	76
7.4.1	Paraboloide elíptico, esfera e elipsoide.....	76
7.4.2	Quádricas regradadas.....	77
7.4.2.1	Cilindros e cones	78
7.4.2.2	Hiperboloide elíptico de uma folha	79
7.4.2.3	Paraboloide hiperbólico.....	81
7.4.2.4	Conoide e helicoide.....	82

8	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	84
	REFERÊNCIAS.....	86

1 INTRODUÇÃO

O estudo da geometria exige dois importantes aspectos por parte do discente. O primeiro aspecto é o intuitivo, que norteia o educando na obtenção dos resultados e o segundo aspecto é o raciocínio que confirma ou nega o que foi apresentado pela intuição. Além disso, são necessárias muita dedicação e perseverança para se colher os frutos desejados.

1.1 A GEOMETRIA AO LONGO DA HISTÓRIA

Onde e por qual motivo nasceu a geometria?

É muito comum ouvirmos que a geometria surgiu às bordas do rio Nilo devido às enchentes e à necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas entre aqueles que haviam sofrido prejuízos. Essa hipótese tem a origem nos escritos de Heródoto. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.60)

Porém, a geometria dos egípcios era na sua essência voltada para medições no cálculo de perímetros, áreas e volumes, utilizando-se de modelos simplificados e aplicando propriedades geométricas frágeis no que se refere à comprovação dos resultados.

Os gregos Tales de Mileto (624 – 546 a.C) e Pitágoras (570 – 495 a.C) eram grandes admiradores da geometria egípcia e foram considerados os introdutores dela na Grécia e muito contribuíram para a evolução do estudo da geometria.

Porém, num momento histórico conhecido como período helenístico entre os séculos IV e I antes de Cristo, a geometria deixou de ser vista apenas como procedimento de medidas e passou a apresentar enunciados mais gerais nascendo, portanto, o que os matemáticos chamam de método dedutivo. Vários matemáticos dessa época contribuíram fortemente para a evolução da geometria, entre os quais podemos citar:

- Euclides de Alexandria (século III a.C): Criou a geometria plana e é autor de “Os elementos”, sua obra prima escrita em treze volumes.
- Apolônio de Perga (262 – 190 a.C): Escreveu o tratado “As cônicas”, introduzindo termos como elipse, hipérbole e menciona o cone duplo.

- Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C): Determinou o volume das superfícies de revolução e o valor aproximado do número pi (π), obtendo como resultado aproximado 3,1458.

Mas com toda essa evolução da geometria, ainda faltava algo que iria tornar mais forte o estudo dela. Isso veio a acontecer no século XVII quando os matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat, trabalhando paralelamente, criaram a geometria analítica.

Observamos que o papel das coordenadas na geometria de Descartes participa do objetivo de introduzir métodos algébricos na geometria para resolver problemas de construção que, mesmo mais sofisticados, não escapam à natureza essencial da geometria grega, dedicada a problemas deste tipo. Resolver problemas sobre os quais os mais brilhantes geômetras gregos haviam se debruçado era motivo de glória para o espírito vaidoso que caracterizava este que é considerado o pai da geometria analítica. (ROQUE; CARVALHO, 2012, P.254)

Conhecido como o príncipe dos amadores, Fermat era meio recatado e isso fazia com que não publicasse as suas descobertas, o que veio a acontecer por meio de cartas através do padre Mersene a partir de 1636. Por ser mais habituado a publicar os seus trabalhos, René Descartes obteve um maior reconhecimento no que tange a criação da geometria analítica.

Mais adiante, apareceram outros geniais matemáticos como Leonard Euler (1707 – 1783) que teve inúmeras contribuições em quase todas as áreas da matemática, Gaspar Monge (1746 – 1818) que criou a geometria descritiva com o fim de representar, por projeções, objetos tridimensionais e Johann Friedrich Gauss (1777 – 1855) que, entre todas as suas inúmeras contribuições em prol da matemática, criou a geometria diferencial.

Nos dias atuais, tem-se uma geometria fincada em bases mais sólidas e rigorosas. O uso da tecnologia facilita substancialmente a análise dos problemas e a construção das formas geométricas, o que não quer dizer que se deva deixar de lado obviamente às construções manuais.

1.2 AS QUÁDRICAS, A CATENÁRIA E A ARQUITETURA

As quádricas são superfícies geradas por uma equação do segundo grau. Surgiram pelas mãos de Arquimedes através de rotações das cônicas em torno de seus respectivos eixos.

Porém, nessa época, não foi possível trabalhar algebricamente as superfícies quádricas, o que só veio a acontecer no século XVII. Os principais responsáveis pelo tratamento algébrico dado às superfícies quádricas foram Fermat e Euler.

Falaremos agora um pouco da catenária. Trata-se da curva gerada pelo gráfico do cosseno hiperbólico e fisicamente representada pela curva de um fio flexível preso em suas extremidades sob ação exclusiva da gravidade. Achou-se, por muito tempo que essa curva se tratava de uma parábola, mas no final do século XVII, Johann Bernoulli, Huygens e Leibnitz, que a batizou, conseguiram provar que essa impressão era falsa. Esse período ficou conhecido como era das curvas.

No presente trabalho, estudaremos a utilização das quádricas e da catenária na arquitetura. Vários arquitetos como Oscar Niemayer, Félix Candela e Eero Saarinen utilizaram essas formas geométricas em suas obras dando a elas beleza e garantindo sua funcionalidade. Niemayer utilizou o parabolóide de revolução na praça dos três poderes, o cilindro no museu de arte da Paraíba e o hiperbolóide de uma folha na catedral de Brasília. Candela usou o parabolóide hiperbólico no restaurante “Los Manantiales” no México e no restaurante submarino em Valência na Espanha. Saarinen empregou a catenária no “Gateway Arch” localizado em St. Louis nos EUA.

Porém, Gaudí foi um dos que utilizou bastante essas formas geométricas na arquitetura. Esse renomado arquiteto espanhol foi o pioneiro em colocar a catenária e as superfícies quádricas em destaque. Ele tinha grande preferência por essas formas geométricas por obtê-las de suas observações feitas da natureza, a maior fonte de inspiração em sua carreira. Gaudí se distinguiu por criar um estilo próprio de trabalho fazendo uma aliança entre a natureza e a arquitetura.

1.3 A CONCEPÇÃO DO TRABALHO

Desde as séries iniciais de minha vida estudantil, estudar geometria causa-me uma enorme satisfação. Ao me deparar com um problema geométrico, sentia-me desafiado a resolvê-lo e ficava frustrado quando não conseguia.

Quando ingressei no PROFMAT, já tinha em mente realizar o meu trabalho final usando formas geométricas. Foi na disciplina de Geometria analítica, ministrada pelos professores Tiago Caúla Ribeiro e Claudemir Silvino Leandro, que

me deparei com formas geométricas, das quais não tinha muito conhecimento, e que despertaram minha atenção: as superfícies quádricas e a catenária. Daí, conversando com meu orientador sobre meu intento, ele sugeriu unir essas formas geométricas com a arquitetura.

O objetivo desse trabalho é relacionar às formas geométricas com a arquitetura, identificando-as nas obras arquitetônicas de Gaudí, explicando os motivos da utilização dos arcos catenários e da sua preferência pelas superfícies quádricas regradas.

A motivação dessa pesquisa é o fato de poder trabalhar com meus alunos do ensino médio, pelo menos a título de visualização, às superfícies quádricas e a catenária. Essa aliança entre a arquitetura e a geometria, pode facilitar essa abordagem, tornando-a mais prazerosa e dinâmica. Isso pode ser feito tanto em sala de aula quanto em aulas de campo.

Dividimos esta dissertação da seguinte forma:

No capítulo 1, fizemos uma abordagem geral, apresentando dados históricos sobre a evolução da geometria. Falamos também um pouco das quádricas e da catenária, mencionando suas aplicações na arquitetura e em outras áreas.

No capítulo 2, apresentamos um pouco sobre a vida de Gaudí, citando fatos de sua infância, vida acadêmica e de sua carreira, assim como seu estilo de trabalho e suas obras mais importantes.

No capítulo 3, definimos as superfícies quádricas e mostramos as suas equações na forma canônica.

No capítulo 4, tratamos das superfícies quádricas regradas, por meio de equações paramétricas.

No capítulo 5 falamos sobre a catenária, sua história e sua equação.

No capítulo 6, exibimos o uso das superfícies quádricas e da catenária em obras arquitetônicas em geral.

No capítulo 7, mostramos o uso da catenária e das superfícies quádricas exclusivamente nas obras de Antoni Gaudí, além dos motivos que o levou a preferir trabalhar com os arcos catenários e as quádricas regradas, como o paraboloide hiperbólico e o hiperboloide de uma folha.

Por fim, transmitimos as considerações finais e apresentamos a lista das referências bibliográficas utilizadas na construção dessa dissertação.

2 A VIDA E A OBRA DO ARQUITETO ESPANHOL ANTONI GAUDÍ

2.1 ASPECTOS GERAIS DA VIDA DE GAUDÍ

Figura 1 - Antoni Gaudí



Fonte: <https://caminocatolico.com/1510-2/>

Antoni Plàcid Guillem Gaudí i Cornet nasceu em 25 de junho de 1852 em Réus, cidade espanhola localizada na região da Catalunha.

Filho de Francesc Gaudí i Serra e Antonia Cornet i Bertran, Gaudí não nasceu no seio de uma família abastada, pois viviam basicamente da funilaria. Porém ele nunca se lamentou disso, pelo contrário, tinha muito orgulho da atividade desempenhada por seu pai e que se encontrava na família há várias gerações.

As limitações físicas de Gaudí, por sofrer de problemas reumáticos, não deixavam que ele tivesse uma vida ativa como as outras crianças de sua idade. Por esse motivo, viajava para repousar na residência campestre da família em Riudoms, onde aprendeu a contemplar as belezas naturais que ele considerava obra suprema de Deus, absorvendo conceitos que serviram de inspiração para seus trabalhos.

Ainda na infância, Gaudí já apresentava sua veia artística trabalhando com artesanato, já mostrando o talento que tinha para criar e ser o grande arquiteto que se tornou.

Figura 2 - Residência da família de Gaudí em Riudoms



https://ca.wikipedia.org/wiki/Mas_de_la_Calderera

Gaudí estudou por seis anos no colégio Padri Scolapi, localizado em Réus, entre os anos de 1863 a 1868, partindo para Barcelona em 1869 para iniciar sua vida acadêmica. Chegando lá, prestou serviço militar e trabalhou em oficinas de carpintaria, serralheria e vidraçaria para juntar dinheiro e ajudar seu pai a pagar seus estudos. Em 1873, Gaudí ingressa na escola de arquitetura de Barcelona e finaliza seu curso em 1878.

Gaudí tornou-se um dos grandes expoentes do movimento modernista catalão que teve seu ápice no fim do século XIX e início do século XX. Suas obras tinham um estilo orgânico, bem pessoal e todo inspirado na natureza.

Gaudí morreu em 10 de julho de 1926, aos 73 anos, vítima de atropelamento. Ao tomar ciência do fato, a população ficou muito chocada e comovida, querendo saudar seu artista dando-lhe o último adeus. O cortejo fúnebre percorreu toda a cidade de Barcelona, onde ele viveu a maior parte de sua vida, com um enorme contingente de pessoas. Seu enterro se deu na cripta do Templo Expiratório da Sagrada Família, obra a qual dedicou seus últimos anos de vida.

Figura 3 - Cortejo do último adeus a Gaudí



Fonte: <https://www.oggiscopri.it/morte-di-gaudi/s>

2.2 ESTILOS QUE INFLUENCIARAM A CARREIRA DE GAUDÍ

Gaudí tinha um estilo arquitetônico diferenciado. Porém, ao longo de sua carreira, ele sofreu influências de alguns movimentos artísticos que serão citados a seguir.

2.2.1 A fase “mourisca”

Figura 4 - Parque Guell (mosaicos coloridos)



Fonte: <https://skipheline.tickets/barcelona/park-guell>

A fase Mourisca fez parte do início da carreira de Gaudí. Nessa fase ele se utilizou abundantemente de mosaicos na confecção de seus trabalhos combinando recursos como cores, formas e materiais na obtenção de seu intento, interligando sua obra com a natureza de uma forma bem equilibrada e agradável, causando um efeito visual maravilhoso.

2.2.2 O estilo gótico

Figura 5 - Palácio Episcopal de Astorga



Fonte: <https://durnaqueda.blogs.sapo.pt/a-historia-de-antoni-gaudi-936701>

No início de sua carreira, Gaudí sofreu influências de inúmeros arquitetos. Um deles foi francês Eugene Viollet-le-Duc, que foi responsável por promover o retorno das formas góticas à arquitetura francesa.

Nessa fase Gaudí começou usar em seus trabalhos os arcos catenários ao invés dos arcos circulares, pois os mesmos proporcionavam uma estrutura de sustentação mais simples e possibilitava a construção de paredes mais finas. Além disso, passou a utilizar os vitrais ao invés do concreto.

2.2.3 Estilo arte nova e o modernismo catalão

Figura 6 - Casa Calvet



Fonte: <https://www.winsiderbarcelona.com/en/items/item/126>

O movimento modernista catalão foi um movimento artístico que teve origem no fim do século XIX. As formas onduladas substituem as formas retilíneas dando mais elegância artística a seus trabalhos. A decoração era muito bem elaborada e era considerada bem exótica. Suas obras apresentavam quase sempre linhas graciosas, espiraladas com traços alongados e bem exageradas. Essa fase ficou conhecida como estilo floral.

2.2.4 O estilo próprio de Gaudí

Junto com a inspiração na natureza, os estilos que foram apresentados anteriormente concederam a Gaudí uma forma de trabalhar a arquitetura que o diferenciava de outros arquitetos pelo mundo, dando às suas obras um cunho muito pessoal e único na história da arquitetura.

Porém, é muito difícil definir precisamente as linhas de orientação que representam fidedignamente o seu estilo e por isso, Gaudí sofreu muito preconceito de seus colegas de profissão no início, pois era tão ousada e exótica a sua forma de

trabalhar a arquitetura que o povo de Barcelona, mesmo tendo muita consideração e afeição por ele, considerava algumas de suas obras estapafúrdias.

2.3 AS OBRAS ARQUITETÔNICAS DE ANTONI GAUDÍ

A seguir, serão apresentadas algumas das inúmeras obras que Gaudí projetou durante toda a sua carreira de arquiteto que começou antes da sua formatura.

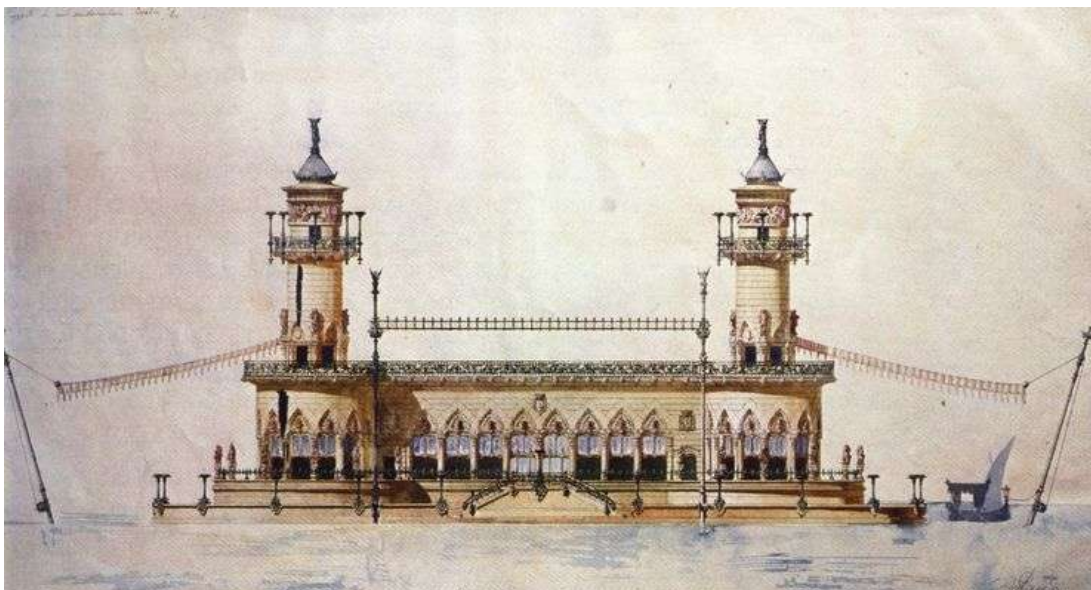
2.3.1 As primeiras obras de Antoni Gaudí

Enquanto acadêmico Gaudí já era autor de inúmeros projetos arquitetônicos, chamando muita atenção pela grande precisão nos detalhes na confecção de seus trabalhos.

Entre as principais obras projetadas por Gaudí antes de concluir a sua graduação podemos citar:

- Portal de cemitério em 1875
- Embarcadouro em 1877 (Figura 7)
- Fonte para a praça da Catalunha em 1877
- Pavilhão universitário em 1877

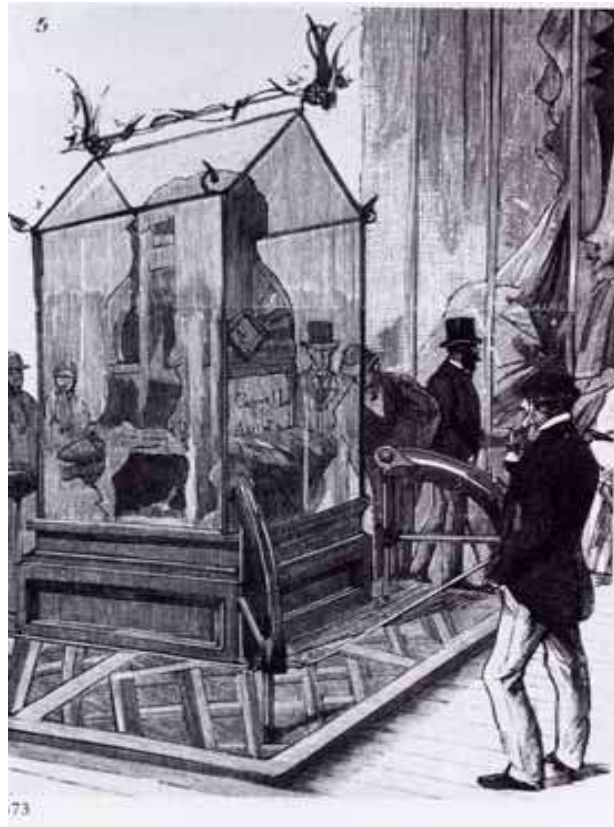
Figura 7 - Embarcadouro



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/155303887129167954/>

Após concluir sua graduação, em 1878, Gaudí participou de uma exposição que veio a ser um divisor de águas em sua carreira. Nessa exposição estava presente Eusebi Güell, um grande industrial e político da Catalunha que se encantou por uma de suas obras intitulada Vitrine Comella (Figura 8). A partir dali, iniciou-se um laço de amizade entre os dois e Güell passou a ser o que se pode chamar de mecenas, ou seja, o principal financiador de suas obras.

Figura 8 - Vitrine Comella



<http://www.gaudiallengaudi.com/gaudi-furniture/>

2.3.2 Obras de maior destaque na carreira de Gaudí

Gaudí é autor de inúmeras obras de destaque pelo mundo, porém as suas principais obras estão localizadas em Barcelona. Entre essas obras pode-se citar o Pavilhão Güell, construída entre 1884 e 1887 em Barcelona; o Colégio de las Teresianas, construída entre 1888 e 1898 em Barcelona; o Palácio Episcopal de Astorga, construído entre 1889 e 1915; a Casa Botines, construída entre 1891 e 1900 em León, a Casa Calvet, construída entre 1898 e 1900 em Barcelona; entre

outras. Porém, será dado maior destaque às sete obras que a UNESCO requisitou como patrimônio do mundo, sendo três delas em 1984 (Casa Milà, Parque Güell e Palácio Güell) e as outras quatro (Casa Batlló, Casa Vincens, Cripta da Colônia Güell e o Templo expiratório da Sagrada Família) em 2005.

1) A CASA MILÀ

A casa Milà foi uma obra arquitetônica desenvolvida entre 1906 e 1910 e faz parte do período modernista catalão.

Figura 9 - Casa Milà



Fonte: <https://www.ticketea.co.uk/tickets/tickets-casa-mila-pedrera-skip-line/>

2) A CASA BATLLÓ

A casa Batllò foi edificada entre 1904 e 1906 a pedido do empresário Josep Batllò e localizada na ilha da discórdia, bairro modernista de Barcelona.

Essa obra se insere dentro da visão naturalista de Gaudí e se inspira no ambiente marinho.

Figura 10 - Casa Batllò



Fonte: www.elenshan.com/blog/2017/5/10/tgmne64ohmjtz578ox31q1vwgh1lno

3) O PARQUE GÜELL

O parque Güell foi encomendado pelo seu amigo Eusebi Güell. Foi construído entre 1900 e 1914 inspirado nas formas orgânicas.

Figura 11 - Parque Güell



Fonte: <https://www.vivadecora.com.br/pro/arquitetos/antoni-gaudi/>

4) O PALÁCIO GUELL

Concebido entre 1885 e 1890, o Palácio Güell foi destinado a ser a moradia da família de Eusebi Güell.

Figura 12 - Palácio Güell



Fonte: <https://guiadebcn.com/quer-ver-barcelona/lugares-de-interes/palacio-guell/>

5) CASA VINCENS

Figura 13 - Casa Vincens



Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Casa_Vincens

A Casa Vincens, foi construída entre 1883 e 1888, encomendada pelo empresário Manuel Vincens para ser sua residência.

6) CRIPTA DA COLÔNIA GÜELL

Iniciada em 1898 e finalizada em 1917, a Cripta da Colônia Güell é um edifício que tem como elementos básicos os arcos catenários e os pilares inclinados com a predominância da cor escura e muito semelhante a uma colina.

Figura 14 - Crípta da Colônia Güell



Fonte: <http://cabinetdelart.com/en/art/architecture-as-an-art-gaudi/>

7) O TEMPLO EXPIRATÓRIO DA SAGRADA FAMÍLIA

Começou a ser construído em 1882 e ainda não foi finalizado, tendo previsão para conclusão em 2026, ano em que se completará o centenário da morte de Antoni Gaudí.

Pegando o projeto já em andamento, Gaudí deu uma nova abordagem a ele, aliando nessa obra as três maiores paixões de sua vida: a arquitetura, a religião e a natureza.

Figura 15 - Templo Expiratório da Sagrada Família



Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Templo_Expiratorio_da_Sagrada_Familia

É uma obra gigantesca e cheia de detalhes, fato que fez com que Gaudí se dedicasse a ela exclusivamente de 1914 até o fim de sua vida.

3 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

3.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Não se pode falar das superfícies quádricas sem citar três matemáticos que muito contribuíram para o surgimento e o desenvolvimento do estudo delas: Arquimedes de Siracusa, Pierre de Fermat e Leonard Euler.

Figura 16 - Arquimedes de Siracusa



Fonte: fisicaessencial.blogspot.com

Arquimedes (287 a.C – 212 a.C), discípulo de Euclides, nasceu e viveu na Grécia e foi autor de inúmeros trabalhos sendo que dois deles faziam referências às superfícies quádricas.

O primeiro trabalho se intitulava “Cilindro e Esfera”, no qual Arquimedes descobriu que se essas superfícies tivessem bases com mesmo raio e tivessem mesma altura, ou seja, se a esfera pudesse ser inscrita no cilindro, a razão entre o volume do cilindro e o volume da esfera era de $3/2$ e essa mesma razão também valia para as suas áreas nessa mesma ordem.

O segundo recebeu o título “Conoides e Esferoides”, onde Arquimedes trabalhou com a rotação de elipse, hipérbole e parábola em torno de seus respectivos eixos.

Porém, naquela época não era possível dar um tratamento algébrico a tais sólidos. Isto veio acontecer com o surgimento da geometria analítica.

Pierre de Fermat (1601 – 1665), em um de seus trabalhos não publicados intitulado Introdução aos Lugares Planos e Sólidos, considerado marco inicial da geometria analítica, introduziu a ideia de eixos perpendiculares e apresentou equações simplificadas para parábolas, elipses e hipérbolas.

Outro grande matemático que contribuiu nos estudos sobre as superfícies quádricas foi o suíço Leonard Euler (1707 – 1783), que com a publicação de seu livro Introdução a Análise Infinita, fez menção às superfícies quádricas no espaço, representando-as no plano tridimensional.

3.2 DEFINIÇÃO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Define-se como quádrica toda superfície que tem como lugar geométrico uma equação do 2º grau nas variáveis x , y e z , representadas algebricamente pela expressão

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (3.1)$$

onde $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e J são números reais, sendo que A, B, C, D, E ou F não são simultaneamente nulos.

A partir da equação 3.1, as quádricas podem ser classificadas em dois grandes grupos: degeneradas e não degeneradas.

As quádricas não degeneradas são: o elipsoide, o hiperboloide elíptico de uma folha, o hiperboloide elíptico de duas folhas, o paraboloides elíptico, o paraboloides hiperbólico, o cone elíptico, o cilindro elíptico, o cilindro hiperbólico e o cilindro parabólico

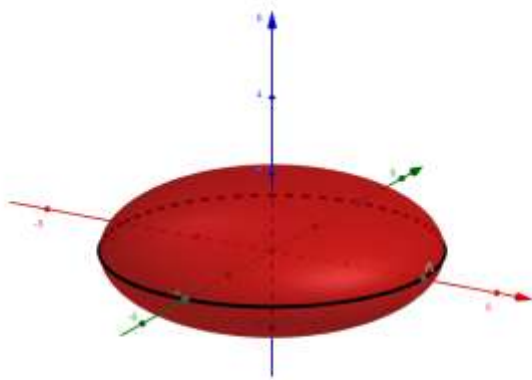
As quádricas degeneradas podem ser classificadas como: um conjunto vazio, um ponto, uma reta, um plano, um par de planos paralelos ou um par de planos concorrentes.

3.3 QUÁDRICAS NÃO DEGENERADAS

A seguir serão apresentadas as superfícies quádricas não degeneradas e suas equações canônicas, sendo as constantes a , b e c reais e positivas.

3.3.1 Elipsoide

Figura 17 – Elipsoide



Fonte: Elaborada pelo autor

Define-se elipsoide como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.2)$$

Se pelo menos duas das três constantes a , b e c forem iguais, o elipsoide obtido é dito de revolução e pode ser classificado em:

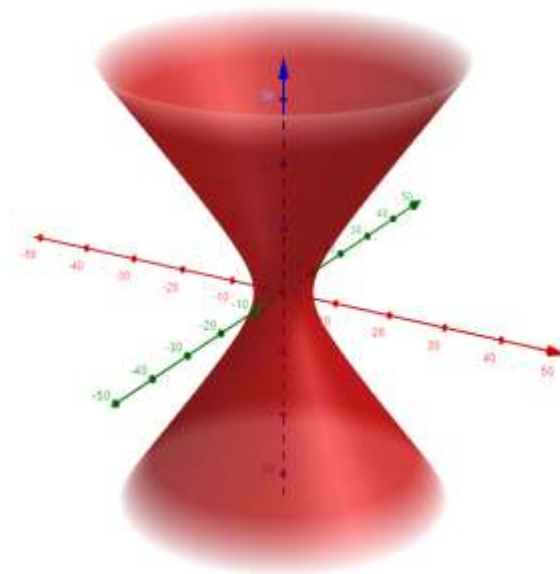
- Oblato: Quando duas das três constantes forem iguais e a terceira constante for menor que as outras duas ($a = b > c$).
- Prolato: Quando duas das três constantes forem iguais e a terceira constante for maior que as outras duas ($a = b < c$).
- Esfera: Quando as três constantes forem iguais ($a = b = c$) e sua equação terá a forma $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, onde r é o raio da esfera.

3.3.2 Hiperboloide elíptico de uma folha

O hiperboloide elíptico de uma folha é definido como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ que satisfazem a equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad (3.3)$$

Figura 18 - Hiperboloide elíptico de uma folha



Fonte: Elaborada pelo autor

O hiperboloide elíptico de uma folha também pode ser obtido pelas equações

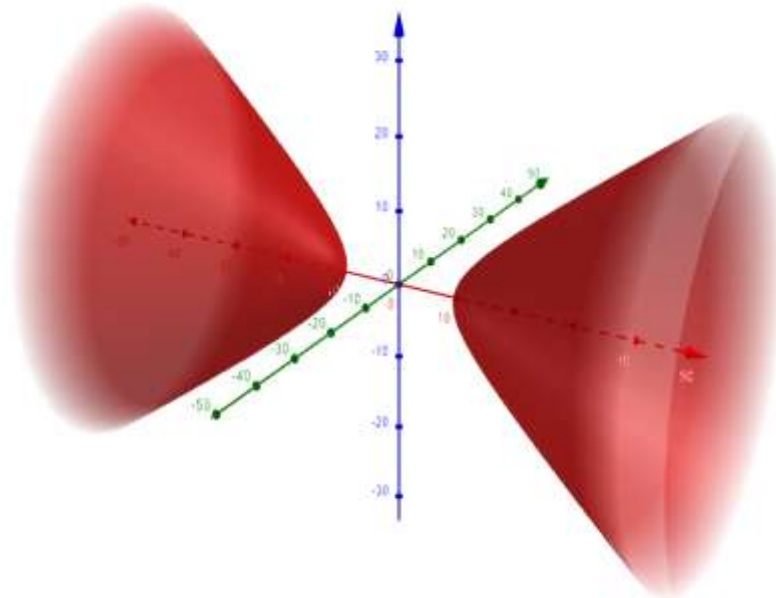
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Se as constantes dos termos positivos da equação forem iguais, o hiperboloide de uma folha obtido é dito de revolução.

3.3.3 Hiperboloide elíptico de duas folhas

Figura 19 - Hiperboloide elíptico de duas folhas



Fonte: Elaborada pelo autor

Define-se hiperboloide elíptico de duas folhas como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ que satisfazem a equação

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad (3.4)$$

O hiperboloide elíptico de duas folhas também pode ser obtido através das equações a seguir

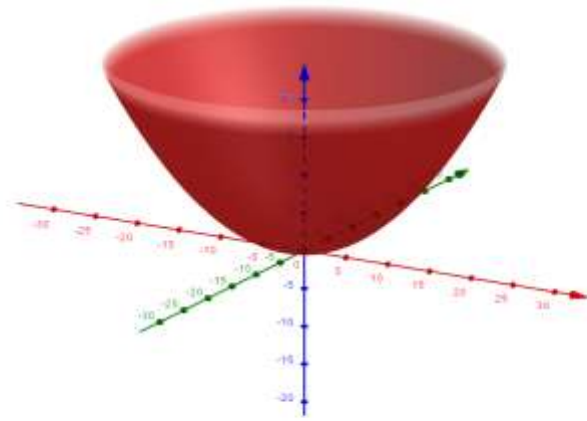
$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

Se as constantes dos termos negativos forem iguais, o hiperboloide de duas folhas é dito de revolução.

3.3.4 Paraboloide elíptico

Figura 20 - Paraboloide elíptico



Fonte: Elaborada pelo autor

Define-se como paraboloide elíptico o conjunto formado por todos os pontos $P = (x, y, z)$ que satisfazem a equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm cz} \quad (3.5)$$

O paraboloide elíptico também pode ser obtido através das equações:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm by}$$

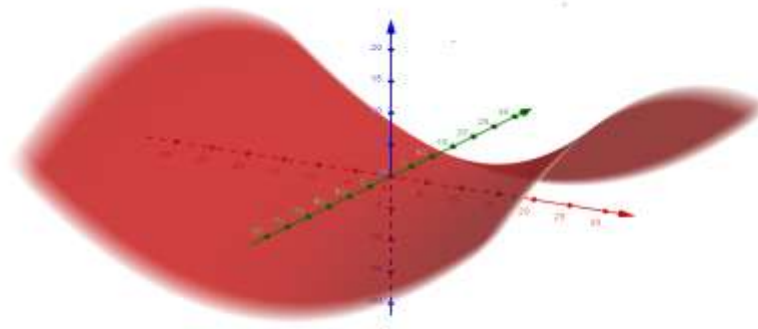
$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm ax}$$

3.3.5 Paraboloide hiperbólico

Define-se como paraboloide hiperbólico o conjunto de todos os pontos $P = (x, y, z)$ que satisfazem a equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz} \quad (3.6)$$

Figura 21 - Paraboloide hiperbólico



Fonte: Elaborada pelo autor

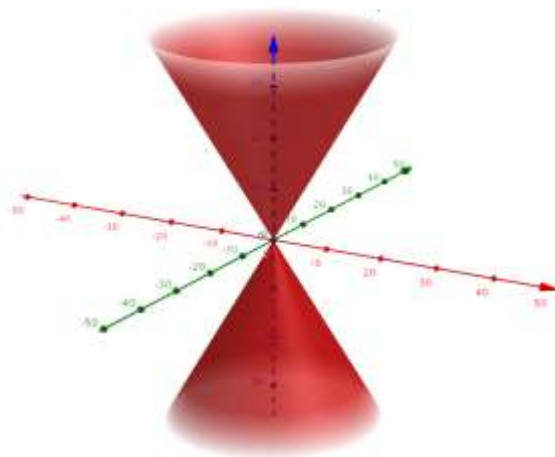
O paraboloid hiperbólico também pode ser obtido através das equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = by$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax$$

3.3.6 Cone elíptico

Figura 22 - Cone Elíptico



Fonte: Elaborada pelo autor

Define-se como cone elíptico o conjunto de todos os pontos $P = (x, y, z)$ que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (3.7)$$

Também podemos obter um cone elíptico através das equações

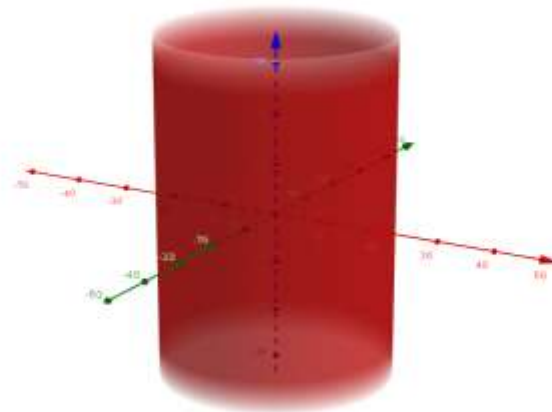
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

3.3.7 Superfícies cilíndricas

3.3.7.1 Cilindro elíptico

Figura 23 - Cilindro elíptico



Fonte: Elaborada pelo autor

Define-se como cilindro elíptico o conjunto formado por todos os pontos da forma $P = (x, y, z)$ que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.8)$$

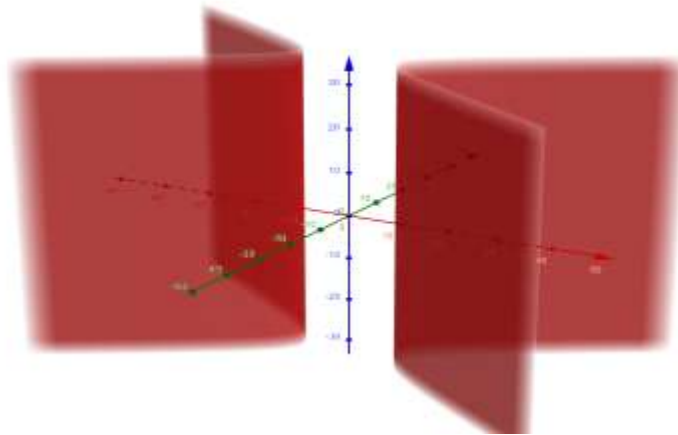
Quando as constantes forem iguais, tem-se o cilindro de revolução ou cilindro circular. O cilindro elíptico também pode ser obtido através das equações:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3.3.7.2 Cilindro hiperbólico

Figura 24 - Cilindro hiperbólico



Fonte: Elaborada pelo autor

Define-se como cilindro hiperbólico o conjunto formado por todos os pontos da forma $P = (x, y, z)$ que satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.9)$$

O cilindro hiperbólico também pode ser obtido através das equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

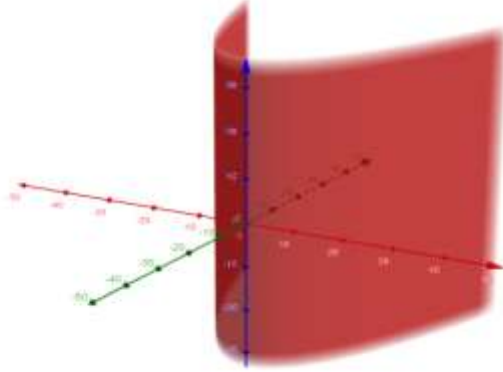
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3.3.7.3 Cilindro parabólico

Figura 25 - Cilindro parabólico



Fonte: Elaborada pelo autor

Define-se como um cilindro parabólico o conjunto formado pelos pontos da forma $P = (x, y, z)$ que satisfazem a equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} = by} \quad (3.10)$$

Obtém-se também o cilindro parabólico utilizando-se as equações:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} = cz}$$

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} = ax}$$

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} = cz}$$

$$\boxed{\frac{z^2}{c^2} = ax}$$

$$\boxed{\frac{z^2}{c^2} = by}$$

Exercício 01: Identifique e obtenha a equação característica das quádricas que tem como equação geral

a) $x^2 - 4y^2 + 8z^2 - 3 = 0$

b) $2x^2 - 4y^2 - 8z = 0$

Soluções:

a) Tem-se que

$$x^2 - 4y^2 + 8z^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4y^2 + 8z^2 = 3$$

Dividindo-se os dois termos da equação por 3, chega-se a

$$\frac{x^2}{3} - \frac{4y^2}{3} + \frac{8z^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{4}} + \frac{z^2}{\frac{3}{8}} = 1$$

A equação encontrada representa um hiperbolóide elíptico de uma folha

b) Seguindo o mesmo raciocínio do exercício anterior, tem-se que

$$2x^2 - 4y^2 - 8z = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4y^2 = 8z$$

Dividindo os dois membros da equação por 8, temos que

$$\frac{2x^2}{8} - \frac{4y^2}{8} = \frac{8z}{8} \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = z .$$

A equação encontrada representa um parabolóide hiperbólico

Exercício 02: Dada a equação do 2º grau $2x^2 + ky^2 + z^2 - 4 = 0$, identifique a superfície quádrlica obtida quando se tem

a) $k = 0$

b) $k \neq 0$

Soluções:

a) Se $k = 0$, o termo em y^2 desaparece e daí tem-se que $2x^2 + z^2 = 4$.

Dividindo-se os membros dessa equação por 4, tem-se

$$\frac{2x^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$$

A superfície obtida é um cilindro elíptico.

b) Se $k \neq 0$, tem-se $2x^2 + ky^2 + z^2 = 4$. Dividindo-se os membros da equação por 4, tem-se

$$\frac{2x^2}{4} + \frac{ky^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{4}{k}} + \frac{z^2}{4} = 1$$

i) Se $k > 0$, a superfície obtida é um elipsoide.

ii) Se $k < 0$, a superfície obtida é um hiperboloide elíptico de uma folha.

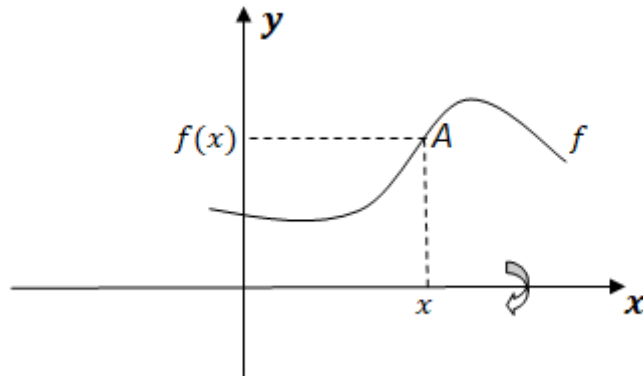
3.4 QUÁDRICAS DE REVOLUÇÃO

Ao realizar-se a rotação de uma curva plana em torno de um de seus eixos ou de uma reta fixa, obtemos um grupo de superfícies que são classificadas como superfícies de revolução. A reta ou eixo em torno do qual a curva faz a rotação é denominada eixo da superfície e a curva recebe o nome de geratriz.

Nesta seção, mostraremos os procedimentos para se determinar as equações do elipsoide, dos hiperboloides e do parabolóide de revolução por meio da rotação de uma elipse, de uma hipérbole e de uma parábola.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função cujo gráfico vemos representado na figura 26

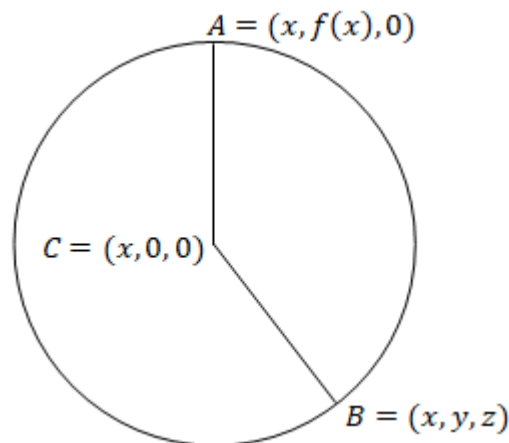
Figura 26 - Gráfico da função f



Fonte: Elaborada pelo autor

Dado um ponto $A = (x, f(x))$. Se rotacionarmos a curva f em torno do eixo x , o ponto A gera uma circunferência cujo centro é $C = (x, 0, 0)$ como podemos visualizar na figura 27.

Figura 27 - Circunferência produzida pelo ponto A após rotação da curva f



Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, se for tomado um ponto $B = (x, y, z)$ qualquer dessa circunferência, tem-se que $AC = BC = r$, onde r é o raio da circunferência descrita por A e daí,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-x)^2 + (f(x)-0)^2 + (0-0)^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \\ \Rightarrow f^2(x) &= y^2 + z^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Serão feitas agora as seguintes ponderações sobre a curva f .

i) Se f for uma elipse cuja equação é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sendo $(x, f(x))$ um ponto dessa elipse, tem-se que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{f^2(x)}{b^2} = 1 \Rightarrow f^2(x) = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (**)$$

Comparando (*) e (**) tem-se

$$y^2 + z^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1} \quad (3.11)$$

A equação obtida representa um elipsoide de revolução.

ii) Se f for uma hipérbole cuja equação é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sendo $(x, f(x))$ um ponto dessa hipérbole tem-se que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{f^2(x)}{b^2} = 1 \Rightarrow f^2(x) = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \quad (***)$$

Comparando (*) e (***) tem-se

$$y^2 + z^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1} \quad (3.12)$$

A equação obtida é do hiperboloide de duas folhas de revolução.

iii) Se f for uma hipérbole cuja equação é $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sendo $(x, f(x))$ um ponto dessa hipérbole tem-se que

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{f^2(x)}{b^2} = 1 \Rightarrow f^2(x) = b^2\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (***)$$

Comparando (*) e (***) tem-se

$$y^2 + z^2 = b^2\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1} \quad (3.13)$$

A equação obtida é do hiperboloide de uma folha de revolução.

iv) Se f for uma parábola cuja equação é $\frac{y^2}{b^2} = ax$. Sendo $(x, f(x))$ um ponto dessa parábola, tem-se que

$$\frac{f^2(x)}{b^2} = ax \Rightarrow f^2(x) = b^2 ax \quad (*****)$$

Comparando (*) e (*****) tem-se

$$y^2 + z^2 = b^2 ax \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = ax} \quad (3.14)$$

A equação obtida é do parabolóide circular ou de revolução

Exercício 03: Determine a equação do hiperboloide de revolução gerada pela rotação da hipérbole $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ em torno do eixo x .

Solução: Seja $A = (x, f(x), 0)$ um ponto da hipérbole $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Daí, temos que

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{f^2(x)}{9} = 1 \Rightarrow \frac{f^2(x)}{9} = 1 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow f^2(x) = 9 \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) \quad (*)$$

O ponto A ao girar em torno do eixo x , descreve uma circunferência cujo centro é $C = (x, 0, 0)$. Tomando-se o ponto $B = (x, y, z)$ pertencente a hipérbole dada, então tem-se que $AC = BC = r$, onde r é o raio da circunferência obtida pela rotação do ponto A . Daí,

$$\sqrt{(x-x)^2 + (f(x)-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$$

$$\Rightarrow f^2(x) = y^2 + z^2 \quad (**)$$

De (*) e (**) tem-se que

$$9 \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) = y^2 + z^2 \Rightarrow 1 + \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} \Rightarrow -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$$

A equação representa um hiperboloide elíptico de uma folha de revolução.

Exercício 04: Determine a equação do parabolóide de revolução obtido pela rotação da parábola $x^2 = 4y$ em torno do eixo y .

Solução: Seja $A = (f(x), y, 0)$ um ponto da parábola. Daí, tem-se $f^2(x) = 4y$ (*)
Ao rotacionarmos a parábola em torno do eixo y , o ponto P gerará uma

circunferência cujo centro é $C = (0, y, 0)$. Dado $B = (x, y, z)$ pertencente à parábola, então tem-se $AC = BC = r$, onde r é o raio da circunferência obtida. Daí,

$$\sqrt{(f(x) - 0)^2 + (y - y)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - y)^2 + (z - 0)^2}$$

$$\Rightarrow f^2(x) = x^2 + z^2 \quad (**)$$

De (*) e (**) tem-se que $x^2 + z^2 = 4y$, que representa um parabolóide elíptico de revolução.

3.5 INTERSEÇÃO DE UMA QUÁDRICA COM UM PLANO

Teorema: *A interseção de uma quádrlica com um plano qualquer é uma cônica ou uma cônica degenerada.*

Prova: Seja α um plano qualquer. Fazendo-se mudanças de coordenadas, o mesmo pode ser apresentado na forma XOY , ou seja, $z = 0$. Agora, fazendo-se a interseção da quádrlica Q representada pela equação geral 3.1 e o plano α , tem-se

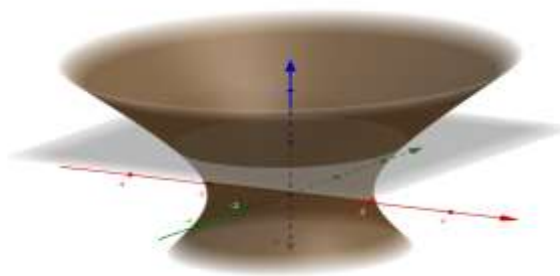
$$Ax^2 + By^2 + C \cdot 0^2 + Dxy + Ex \cdot 0 + Fy \cdot 0 + Gx + Hy + I \cdot 0 + J = 0$$

Daí, temos $Ax^2 + By^2 + Dxy + Gx + Hy + J = 0$, que representa uma cônica ou uma cônica degenerada. ■

Exercício 5: A figura 28 mostra um hiperboloide de equação $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$ intersectado pelo plano $z = 2$. Determine a equação da cônica resultante dessa interseção.

Solução: A figura a seguir mostra a interseção do hiperboloide $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$ pelo plano $z = 2$.

Figura 28 - hiperboloide de uma folha intersectado por um plano



Daí, temos

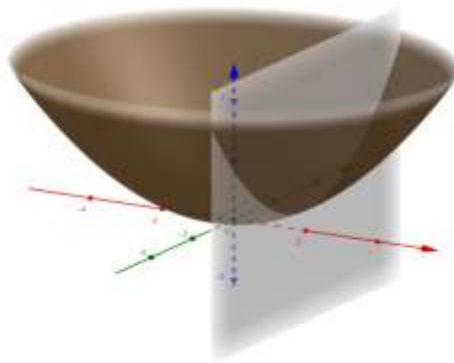
$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{2^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1}$$

A equação obtida representa uma elipse.

Exercício 6: A figura 29 mostra um parabolóide elíptico de equação $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = z$ com o plano $x = 2$. Determine a equação da cônica resultante dessa interseção.

Solução: A figura a seguir mostra a Interseção do parabolóide elíptico $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = z$ e o plano $x = 2$.

Figura 29 - Interseção entre um parabolóide elíptico e um plano



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, temos

$$\frac{2^2}{6} + \frac{y^2}{5} = z \Rightarrow \frac{4}{6} + \frac{y^2}{5} = z \Rightarrow \frac{y^2}{5} = z - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y^2 = 5 \cdot \left(z - \frac{2}{3}\right)}$$

A equação obtida representa uma parábola.

3.6 RECONHECIMENTO DE QUÁDRICAS

Uma quádrlica pode ser representada algebricamente por sua equação na forma canônica ou por sua equação na forma geral como vimos no capítulo 3.

Nesta seção, serão analisados os casos para se reconhecer uma superfície quádrlica quando sua equação geral aparece sem a presença dos termos mistos ou com a presença dos mesmos.

3.6.1 Equação geral das quádricas sem os termos mistos

Uma quádrica sem a presença dos termos mistos tem como equação:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0} \quad (3.15)$$

Para se chegar a sua equação na forma canônica partindo da equação 3.15, vamos utilizar a técnica de completar quadrados e a translação de eixos.

1° caso: Se as três constantes A , B e C forem não nulas.

$$Ax^2 + Dx + By^2 + Ey + Cz^2 + Fz = -G$$

$$\Rightarrow A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{E}{2B}\right)^2 + C\left(z + \frac{F}{2C}\right)^2 = -G + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} + \frac{F^2}{4C}$$

$$\text{Fazendo } x + \frac{D}{2A} = x_1, \quad y + \frac{E}{2B} = y_1, \quad z + \frac{F}{2C} = z_1 \quad \text{e} \quad -G + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} + \frac{F^2}{4C} = K,$$

tem-se a expressão $Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 = K$, que poderá representar um elipsóide, um ponto, um conjunto vazio, um hiperboloide de uma folha, um hiperboloide de duas folhas ou um cone

2° caso: Se apenas uma das constantes A , B ou C for nula.

Sem perda de generalidade vamos tomar $C = 0$ e daí temos que

$$Ax^2 + Dx + By^2 + Ey + Fz = -G$$

$$\Rightarrow A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{E}{2B}\right)^2 + Fz = -G + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}$$

$$\text{Fazendo } x + \frac{D}{2A} = x_1, \quad y + \frac{E}{2B} = y_1, \quad z = z_1 \quad \text{e} \quad -G + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} = K, \text{ tem-se}$$

$Ax_1^2 + By_1^2 + Fz_1 = K$ que poderá representar um parabolóide elíptico, um parabolóide hiperbólico, um cilindro elíptico, um cilindro hiperbólico ou um ponto.

3° caso: Se exatamente duas das constantes A , B e C forem nulas.

Sem perda de generalidade vamos tomar $B = C = 0$ e daí temos que

$$Ax^2 + Dx + Ey + Fz = -G$$

$$\Rightarrow A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{E}{2B}\right)^2 + Fz = -G + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B}$$

Fazendo $x + \frac{D}{2A} = x_1$, $y + \frac{E}{2B} = y_1$, $z = z_1$ e $-G + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} = K$, tem-se $Ax_1^2 + By_1^2 + Fz_1 = K$ que poderá representar um parabolóide elíptico, um parabolóide hiperbólico, um cilindro elíptico, um cilindro hiperbólico ou um ponto.

Exercício 7: Identifique e obtenha a equação características das quádricas que tem como equação geral $x^2 - 4y^2 + 8z^2 + 6x - 8y - 3 = 0$.

Solução: Reorganizando os termos e completando quadrados, tem-se:

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 - 4y^2 - 8y - 4 + z^2 &= 3 \\ \Rightarrow (x + 3)^2 - 4(y + 1)^2 + 8z &= 3 + 9 - 4 \\ \Rightarrow (x + 3)^2 - 4(y + 1)^2 + 8z &= 8\end{aligned}$$

Dividindo-se os membros dessa igualdade por 8, chega-se a

$$\frac{(x+3)^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{2} + z = 1$$

A equação obtida representa um hiperboloide elíptico de uma folha cujo centro é $(-3, 1, 0)$.

Exercício 8: Identifique e obtenha a equação características da quádrica que tem como equação geral $2x^2 - y^2 + 4x - 2y + 3z + 2 = 0$.

Solução: Seguindo o mesmo raciocínio do exercício anterior, tem-se a equação

$$\begin{aligned}2x^2 + 4x - y^2 - 3z &= -2 \\ \Rightarrow 2(x^2 + 2x + 1) - y^2 - 3z &= -2 + 2 \\ \Rightarrow 2(x + 1)^2 - y^2 - 3z &= 0.\end{aligned}$$

Dividindo os dois membros da equação por 2, tem-se à equação

$$(x + 1)^2 - \frac{1}{2}y^2 = \frac{3}{2}z \quad (\text{representa um parabolóide hiperbólico})$$

3.6.2 Equação geral das quádricas com os termos mistos

Se a equação geral das quádricas apresentarem os termos mistos, ou seja, pelo menos uma das constantes que acompanham xy , xz ou yz for não nula, para se fazer o reconhecimento da quádrica não é um processo tão trivial, sendo necessário utilizar o processo de diagonalização de matrizes.

Conforme (HEFEZ; FERNANDES p. 273) “Se $M \in Mn(\mathbb{R})$ é simétrica, então existe uma matriz ortogonal $P \in Mn(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}MP$ é diagonal”. Essa afirmação é conhecida como Teorema Espectral Versão Matricial e permite que se possa realizar o processo de diagonalização de uma matriz simétrica no reconhecimento de quádricas cujas equações apresentem termos mistos.

Consideremos a equação do segundo grau nas variáveis x, y e z .

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

A mesma pode ser reescrita sob a forma

$$\langle M(x, y, z), (x, y, z) \rangle + \langle (G, H, I), (x, y, z) \rangle + J = 0 \quad (3.16)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix}$$

Como M é uma matriz simétrica, pelo teorema espectral ela é diagonalizável e para iniciar o seu processo de diagonalização, devemos determinar seus autovalores como segue:

O polinômio característico da matriz M é

$$P(t) = \det(M - tI) = \det \begin{pmatrix} A - t & D/2 & E/2 \\ D/2 & B - t & F/2 \\ E/2 & F/2 & C - t \end{pmatrix}, \text{ sendo } I \text{ a matriz identidade.}$$

Daí, calculando o determinante da matriz $(M - tI)$, teremos o polinômio característico $p(t)$, cujas raízes serão $t_1 = a$, $t_2 = b$ e $t_3 = c$, todas reais e denominadas autovalores de M .

Agora iremos determinar os autovetores de M utilizando-se a expressão $M \cdot N = t_n \cdot N$, onde $N = (x, y, z)$ e $n = 1, 2$ ou 3

Daí, temos os autovetores: $\vec{u} = (r, s, t)$, $\vec{v} = (i, j, k)$ e $\vec{w} = (m, n, p)$ que formam a base espectral $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \{(r, s, t), (i, j, k), (m, n, p)\}$

Para determinarmos β' ortonormal a β , deve-se calcular a norma dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} e multiplicarmos cada um deles pelo inverso de suas respectivas normas como segue

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \text{ e } \vec{w}' = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$$

Daí temos, $\vec{u}' = (r', s', t')$, $\vec{v}' = (i', j', k')$ e $\vec{w}' = (m', n', p')$.

Assim, tem-se que $\beta' = \{\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'\} = \{(r', s', t'), (i', j', k'), (m', n', p')\}$ e agora escreveremos a matriz Q formada com os vetores de β' , onde as coordenadas de cada vetor de β' é linha de Q como vemos a seguir

$$Q = \begin{pmatrix} r' & s' & t' \\ i' & j' & k' \\ m' & n' & p' \end{pmatrix} \text{ (matriz de rotação)}$$

Assim, temos D como a matriz diagonal dada por

$$D = Q^t \cdot M \cdot Q = \begin{pmatrix} r' & i' & m' \\ s' & j' & n' \\ t' & k' & p' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' & s' & t' \\ i' & j' & k' \\ m' & n' & p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Agora será feita uma rotação de eixos saindo do sistema $OXYZ$ para o sistema $OX'Y'Z'$ cujos eixos OX', OY' e OZ' têm a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores \vec{u}', \vec{v}' e \vec{w}' respectivamente e (x', y', z') as coordenadas de um ponto qualquer desse novo sistema de coordenadas, então

$$Q(x', y', z') = (x, y, z) \quad (*)$$

Substituindo (*) na equação 3.16 obtemos:

$$\begin{aligned} &< M(Q(x', y', z')), Q(x', y', z') > + < (G, H, I), Q(x', y', z') > + J = 0 \\ &< Q^t(MQ(x', y', z')), (x', y', z') > + < Q^t(G, H, I), (x', y', z') > + J = 0 \\ &< Q^tMQ(x', y', z'), (x', y', z') > + < Q^t(G, H, I), (x', y', z') > + J = 0 \end{aligned}$$

Chamemos $Q^t(G, H, I) = (g, h, i)$ e como $Q^tMQ = D$, então

$$< D(x', y', z'), (x', y', z') > + < (g, h, i), (x', y', z') > + J = 0$$

Assim, a equação geral das quádricas poderá ser escrita na forma:

$$a(x')^2 + b(y')^2 + c(z')^2 + gx' + hy' + iz' + J = 0. \quad (3.17)$$

Logo, os termos mistos foram todos eliminados da equação bastando agora utilizar a técnica de completar quadrados para se chegar à equação característica da quádrica.

Exercício 09: Identifique e obtenha a equação característica da quádrica cuja equação geral é dada por $9x^2 - 5y^2 + 6z^2 + 4xz + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}z = 0$.

Solução:

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz simétrica e pelo teorema espectral é}$$

diagonalizável.

O polinômio característico de M é dado pela expressão:

$$P(t) = \det(M - t.I_3) = \det \begin{pmatrix} 9-t & 0 & 2 \\ 0 & 5-t & 0 \\ 2 & 0 & 6-t \end{pmatrix}$$

$$P(t) = (9-t) \cdot (5-t) \cdot (6-t) - 4 \cdot (5-t)$$

$$P(t) = (5-t) \cdot (50 - 15t + t^2)$$

$$P(t) = (5-t) \cdot (t-5) \cdot (t-10).$$

Calculando as raízes de $P(t)$, obtemos: $t_1 = 5$, $t_2 = 5$ e $t_3 = 10$

Daí, 5, 5 e 10 são os autovalores da matriz simétrica M .

Agora, vamos determinar os autovetores associados à matriz simétrica.

Para $t = 5$, temos:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$9x + 0y + 2z = 5x \Rightarrow 4x + 2z = 0 \Rightarrow z = -2x$$

$$0x + 5y + 0z = 5y \Rightarrow 5y = 5y \Rightarrow y = y$$

$$2x + 0y + 6z = 5z \Rightarrow 2x + z = 0 \Rightarrow z = -2x$$

Assim, um autovetor associado a M é $\vec{u} = (1, 0, -2)$

Mas 5 é um autovalor duplo, logo $\vec{v} = (0, 1, 0)$ é autovetor associado a M .

para $t = 10$, temos:

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$9x + 0y + 2z = 10x \Rightarrow -x + 2z = 0 \Rightarrow x = 2z$$

$$0x + 5y + 0z = 10y \Rightarrow 5y = 10y \Rightarrow y = y$$

$$2x + 0y + 6z = 10z \Rightarrow 2x - 4z = 0 \Rightarrow x = 2z$$

Assim, um autovetor associado a M é $\vec{w} = (2, 0, 1)$.

Daí, conclui-se que $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base espectral e para determinarmos β_1 base ortonormal a β , devemos multiplicar cada vetor pelo inverso de sua respectiva norma e daí, temos

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, -2) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\|\vec{v}_1\| = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = (0, 1, 0)$$

$$\|\vec{w}_1\| = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, 0, 1) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

Logo, temos $\beta_1 = \{\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1\}$ e assim, temos

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \text{ (matriz de rotação)}$$

Agora a equação da quádrlica será dada pela expressão

$$\langle D(x', y', z'), (x', y', z') \rangle + \langle (G', H', I'), (x', y', z') \rangle + J = 0$$

$$\text{Mas } (G', H', I') = (2\sqrt{5} \ 0 \ 4\sqrt{5}) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = (10, 0, 0)$$

Daí, temos

$$5(x')^2 + 5(y')^2 + 10(z')^2 + \langle (10, 0, 0), (x', y', z') \rangle = 0$$

$$5(x')^2 + 5(y')^2 + 10(z')^2 + 10x' = 0$$

$$5(x' + 1)^2 + 5(y')^2 + 10(z')^2 = 5 \text{ (dividindo os membros da igualdade por 5)}$$

$$(x' + 1)^2 + (y')^2 + 2(z')^2 = 1 \text{ (elipsoide de revolução)}$$

Exercício 10: Identifique e obtenha a equação na forma canônica da superfície quádrlica cuja equação geral é dada por $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 6\sqrt{2}x + 3y = 0$.

Solução:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ é simétrica e pelo teorema espectral é uma matriz}$$

diagonalizável.

Seu polinômio característico é dado pela expressão

$$P(t) = \det(M - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & -2 & 0 \\ -2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$P(t) = (1-t) \cdot (1-t) \cdot (1-t) - 4 \cdot (1-t)$$

$$P(t) = (1-t) \cdot (1-2t+t^2-4)$$

$$P(t) = (1-t) \cdot (t^2-2t-3) = (1-t) \cdot (t-3) \cdot (t-1).$$

Calculando as raízes de $P(t)$, obtemos: $t_1 = -1$, $t_2 = 1$ e $t_3 = 3$

Daí, -1 , 1 e 3 são os autovalores da matriz simétrica M .

Agora, vamos determinar cada um dos autovetores associados à matriz simétrica M .

Para $t = -1$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x - 2y + 0z = -x \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$-2x + y + 0z = -y \Rightarrow -2x + 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$0x + 0y + z = -z \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Daí, temos $\vec{u} = (1, 1, 0)$ um autovetor associado a M

Para $t = 1$ temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x - 2y + 0z = x \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$-2x + y + 0z = y \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$0x + 0y + z = z \Rightarrow z = z$$

Assim, temos $\vec{v} = (0, 0, 1)$ um autovetor associado a M .

Para $t = 3$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x - 2y + 0z = 3x \Rightarrow -2x - 2y = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$-2x + y + 0z = 3y \Rightarrow -2x - 2y = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$0x + 0y + z = 3z \Rightarrow -2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Assim, temos $\vec{w} = (1, -1, 0)$ como um autovetor associado a M .

Temos que $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base espectral e para determinarmos β_1 base ortonormal a β , devemos multiplicar cada vetor pelo inverso de sua respectiva norma e daí,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\|\vec{v}\| = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = (0, 1, 0)$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Logo, temos $\beta_1 = \{\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1\}$ e assim, tem-se

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ (matriz de rotação)}$$

Agora a equação da quádrlica será dada pela expressão

$$\langle D(x', y', z'), (x', y', z') \rangle + \langle (G', H', I'), (x', y', z') \rangle + J = 0$$

$$\text{Mas } (G', H', I') = (6\sqrt{2} \quad 3 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} = (6, 6, 3)$$

Daí, temos

$$-(x')^2 + (y')^2 + 3(z')^2 + \langle (6, 6, 3), (x', y', z') \rangle = 0$$

$$-(x')^2 + (y')^2 + 3(z')^2 + 6x' + 6y' + 3z' = 0$$

$$-(x' + 3)^2 + (y' + 3)^2 + 3(z' + \frac{1}{2})^2 = -9 + 9 + \frac{1}{4}$$

$$-(x' + 3)^2 + (y' + 3)^2 + 3(z' + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}. \text{ (multiplicando a igualdade por 4)}$$

$$-4(x' + 3)^2 + 4(y' + 3)^2 + 12(z' + \frac{1}{2})^2 = 1,$$

A equação representa um hiperbolóide elíptico de uma folha de revolução.

4 SUPERFÍCIES REGRADAS

Este capítulo será dedicado às superfícies regradas, dando-se mais ênfase às quádricas, ao conoide e ao helicóide, sendo apresentadas suas respectivas equações paramétricas.

4.1 DEFINIÇÃO DE SUPERFÍCIES REGRADAS

Dada uma superfície S . Se essa superfície for gerada por uma reta movendo-se ao longo dela, ela é classificada como superfície regradada, ou seja, por cada um de seus pontos, passa uma reta nela contida.

Considere uma família diferenciável a 1 – parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$ como sendo uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $w(t) \in \mathbb{R}^3$, $w(t) \neq 0$, tais que ambos sejam diferenciáveis em t . Para cada $t \in I$, a reta L_t que passa por $\alpha(t)$ e é gerada por $w(t)$, chamada-se reta da família em t .

Figura 30 - Superfície regradada (Conoide)

:



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=orBEPeBZnEQ>

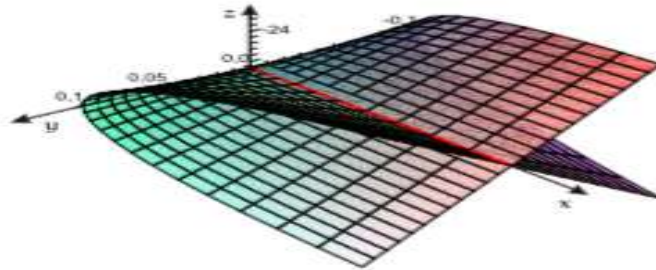
Dada uma família a 1 – parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$, a superfície parametrizada $X(t, v) = \alpha(t) + v \cdot w(t)$, $t \in I$, $v \in \mathbb{R}$, é chamada de superfície regradada gerada pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$. As retas L_t são as geratrizes e a curva $\alpha(t)$ é uma diretriz da superfície X .

Uma superfície pode ser classificada como duplamente regradada, se ela for formada pela união de duas famílias disjuntas de retas.

As superfícies regradadas na forma mais simples são o plano, o cone e o cilindro. Porém, há outras superfícies regradadas das quais citamos: o hiperboloide de

uma folha, o parabolóide hiperbólico, o helicóide, o conóide, as superfícies tangentes, guarda chuva de Whitney e a faixa de Möbius.

Figura 31 - Guarda chuva de Whitney



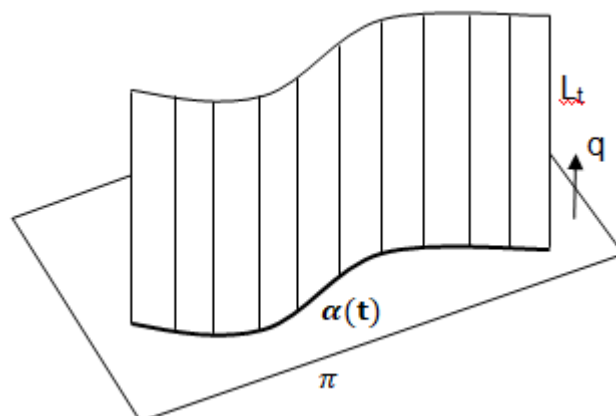
Fonte: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v08a05-superficies-regradadas.pdf>

4.2 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DAS SUPERFÍCIES REGRADAS

4.2.1 Cilindro

O cilindro é uma superfície regradada gerada pela família 1 – parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$, $t \in I$, onde $\alpha(t)$ está contida em um plano π e $w(t)$ é paralelo a uma direção fixa em \mathbb{R}^3 não paralela a π .

Figura 32 - Cilindro generalizado



Fonte: Elaborada pelo autor

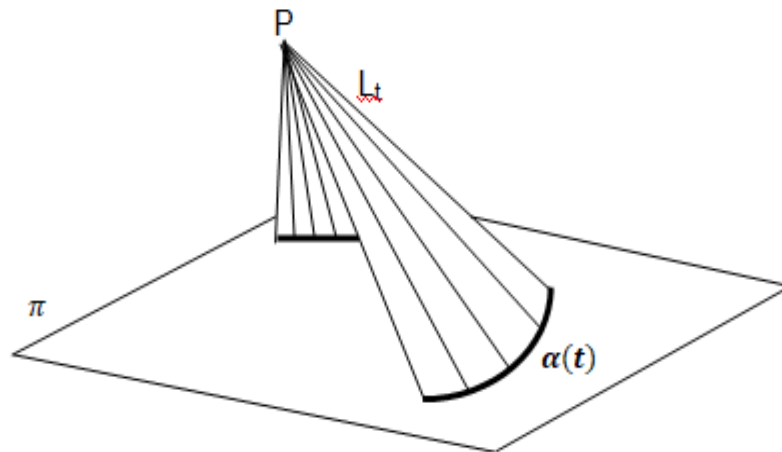
Assim, uma parametrização para o cilindro é dada por:

$X(t, v) = \alpha(t) + v \cdot q$, onde $q \in \mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$ é um vetor fixo não paralelo a π .

4.2.2 Cone

Um cone é uma superfície regrada gerada por uma família 1 – parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$, $t \in I$, onde $\alpha(t)$ está contida em um plano π e todas as retas L_t passam pelo vértice do cone $P \in \mathbb{R}^3$ e não pertencente ao plano π .

Figura 33 - Cone generalizado



Fonte: Elaborada pelo autor

Como o vértice P pertence a todas as retas geratrizes L_t , então, para cada $t \in I$, existe $v_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$P = \alpha(t) + v_0 \cdot w(t) \Rightarrow \alpha(t) = P - v_0 \cdot w(t)$$

Assim uma parametrização para o cone pode ser dado por:

$$X(t, v) = P + v \cdot w(t), \text{ onde } P \text{ é o vértice do cone.}$$

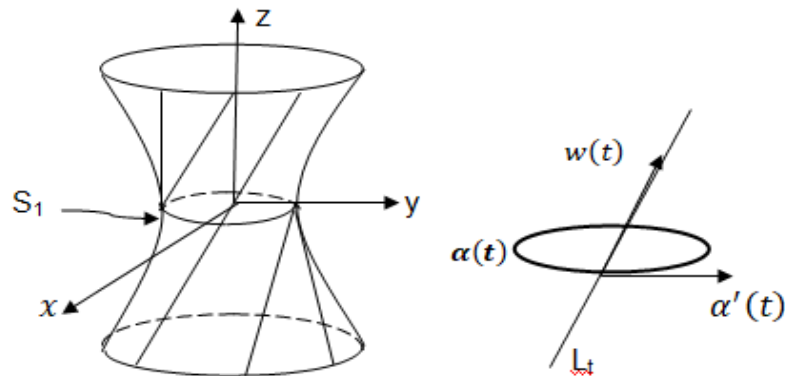
4.2.3 Hiperboloide de uma folha

O Hiperboloide de uma folha é gerado por uma reta diretriz que gira em torno de um eixo vertical reverso à mesma, ou seja, a reta diretriz e o eixo vertical estão em planos diferentes.

Seja S^1 o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy e $\alpha(t)$ uma parametrização de S^1 pelo comprimento do arco.

Considere $w(t) = \alpha'(t) + e_3$, onde e_3 é o vetor unitário do eixo z . A superfície regrada gerada pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$ é um hiperboloide de uma folha.

Figura 34 - Hiperboloide de uma folha



Fonte: Elaborada pelo autor

Seja $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ uma parametrização pelo comprimento de arco de S^1 . Assim, $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ e daí,

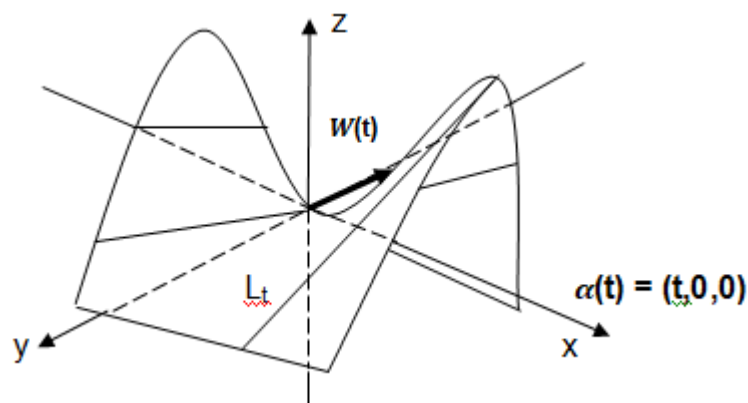
$$w(t) = \alpha'(t) + e_3 = (-\sin(t), \cos(t), 0) + (0, 0, 1) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

$$X(t, v) = \alpha(t) + v \cdot w(t) = (\cos(t) - v\sin(t), \sin(t) + v\cos(t), v)$$

O hiperboloide de uma folha é uma superfície duplamente regrada, pois tomando $w(s) = -\alpha(s) + e_3$, temos $X(t, v) = (\cos(t) - v\sin(t), \sin(t) + v\cos(t), v)$

4.2.4 Paraboloides hiperbólicos

Figura 35 - Paraboloides hiperbólicos



Fonte: Elaborada pelo autor

Dado um paraboloides hiperbólico, será feita uma mudança de variável adequada para representá-lo num sistema de coordenadas ortogonais (u, v, w) de forma que sua equação seja dada por $w = kuv$, $k \neq 0$. Assim será exibida a seguir

uma família 1 – parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$ para esse parabolóide. Observe que as retas $y = \frac{z}{tk}$ e $x = t$ para cada $t \neq 0$ pertencem ao parabolóide hiperbólico.

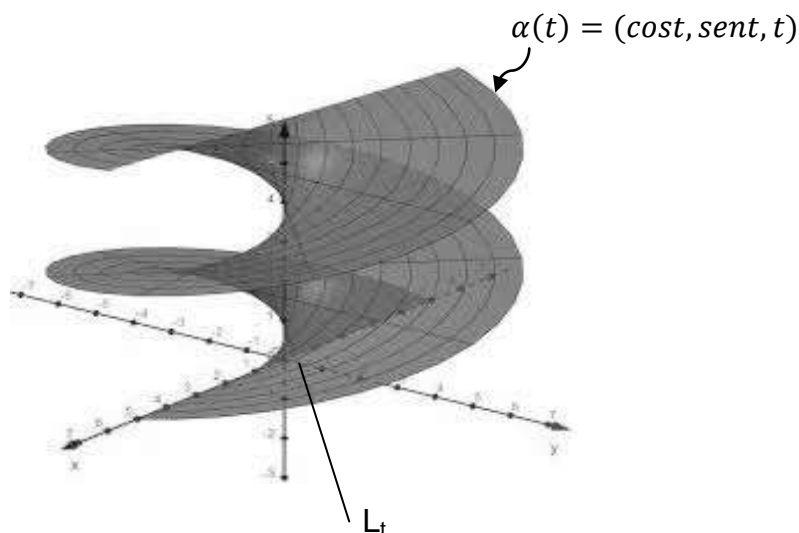
Da intersecção desta família de retas com o plano $z = 0$, é obtido a curva $\alpha(t) = (t, 0, 0)$ que será tomada como diretriz que junto com os vetores unitários $w(t)$ paralelos às retas $y = \frac{z}{tk}$ e $x = t$ formam a família 1 – parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$, sendo $\alpha(t) = (t, 0, 0)$ e $w(t) = \frac{(0, 1, kt)}{\sqrt{1+k^2t^2}}$ que gera a superfície regrada S .

$$X(t, v) = \alpha(t) + v \cdot w(t)$$

$$X(t, v) = \left(t, \frac{v}{\sqrt{1+k^2t^2}}, \frac{vkt}{\sqrt{1+k^2t^2}} \right); t, v \in \mathbb{R}$$

4.2.5 Helicóide regrado

Figura 36 - Helicóide



https://www.mspc.eng.br/dir10/helix_helc_transp.php

Considere uma hélice. Se de cada ponto dela traçarmos uma reta paralela ao plano xy que intersecte o eixo OZ , é gerada uma superfície regrada chamada helicóide.

Seja $\{\alpha(t), w(t)\}$, $t \in I$ a família 1-parâmetro que gera o helicóide com $\alpha(t) = (cost, sent, t)$ e $w(t) = (cost, sent, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, então uma parametrização para o helicóide é dada por:

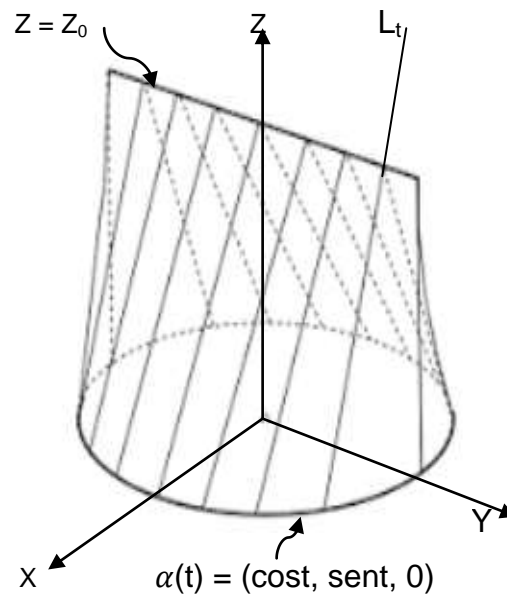
$$X(t, v) = \alpha(t) + v \cdot w(t) = (cost, sent, t) + v \cdot (cost, sent, 0)$$

$$X(t, v) = ((1 + v) \cdot cost, (1 + v) \cdot sent, t)$$

4.2.6 Conoide regrado

O conoide é uma superfície regrada gerada pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$, $t \in I$, em que α é uma reta que se desloca paralelamente a um plano diretor que se apóia em duas diretrizes: Uma reta e uma curva que não pertencem ao mesmo plano.

Figura 37 - Conoide circular reto



Fonte: Elaborada pelo autor

Seja $\{\alpha(t), w(t)\}$, $t \in I$ a família 1-parâmetro que gera o conoide circular reto com $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ e $w(t) = (0, -\sin t, z_0)$, $t \in \mathbb{R}$. Então, temos que uma parametrização para esse conoide é:

$$X(t, v) = \alpha(t) + v \cdot w(t) = (\cos t, \sin t, 0) + v \cdot (0, -\sin t, z_0)$$

$$X(t, v) = (\cos t, (1 - v)\sin t, vz_0)$$

Exercício 10: Mostre que o hiperbolóide de uma folha $H: x^2 - y^2 + z^2 = 1$ é uma superfície duplamente regrada.

Solução:

Será mostrado que H é uma superfície duplamente regrada determinando uma diretriz e as expressões de suas geratrizes.

Uma diretriz para H é a elipse $x^2 + z^2 = 1$, contida no plano $y = 0$. Assim, sendo $A = (x_0, 0, z_0)$ um ponto dessa elipse e $\vec{v} = (k, u, w)$ a direção da geratriz LA_0 que passa por A_0 , as equações paramétricas dessa diretriz são

$$LA_0: A = A_0 + t \cdot \vec{v}; \quad t \in \mathbb{R}$$

Daí, temos que

$$LA_0: \begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = ut \\ z = z_0 + wt \end{cases}$$

Como os pontos A de LA_0 pertencem ao hiperboloide, vai-se determinar k, u e w pois sabe-se que $x_0^2 + z_0^2 = 1$ já que A_0 pertence a elipse.

Tem-se que $A = A_0 + t \cdot \vec{v}$ pertence ao hiperboloide para todo $t \in \mathbb{R}$, se, e somente se,

$$\begin{aligned} (x_0 + k \cdot t)^2 - (u \cdot t)^2 + (z_0 + w \cdot t)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x_0^2 + 2ktx_0 + k^2t^2 - u^2t^2 + z_0^2 + 2wtz_0 + w^2t^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (x_0^2 + z_0^2) + t(2kx_0 + 2wz_0) + t^2(k^2 - u^2 + w^2) &= 1 \end{aligned}$$

Como $x_0^2 + z_0^2 = 1$, tem-se que $2kx_0 + 2wz_0 = 0$ e $k^2 - u^2 + w^2 = 0$ que nos dá $\langle (k, w), (2x_0, 2z_0) \rangle = 0$ (I) e $u^2 = k^2 + w^2$ (II)

De I, tem-se $k = -z_0$ e $w = x_0$ e substituindo na equação II, obteremos a expressão $u^2 = (-z_0)^2 + (x_0)^2 = 1$ que nos dá $u^2 = 1 \Rightarrow u = -1$ ou $u = 1$.

Assim, temos como vetores diretores das geratrizes $\vec{v}_1 = (-z_0, -1, x_0)$ e $\vec{v}_2 = (-z_0, 1, x_0)$.

$$LA_0: \begin{cases} x = x_0 - z_0t \\ y = t \\ z = z_0 + x_0t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad LA_0: \begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = ut \\ z = z_0 + wt \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}$$

Logo, o hiperbolóide de uma folha H é uma superfície duplamente regradada.

5 CATENÁRIA

5.1 A HISTÓRIA DA CATENÁRIA

A catenária é uma forma geométrica bidimensional, semelhante a uma parábola, que é obtida pela suspensão de um fio fixo em seus extremos submetido exclusivamente à ação da força gravitacional.

Figura 38 - Curva catenária



Fonte: crimons.com

SIMMONS (1987, P.611) diz que “A curva catenária, da palavra latina *catena*, que significa cadeia, é a forma exata da curva feita por um fio flexível de densidade uniforme suspenso entre dois pontos e que se sustenta por seu próprio peso”.

No decorrer da história houve muita confusão entre essas duas curvas. Na primeira metade do século XVII, Galileu em seus estudos chegou à conclusão de que a curva formada por um fio suspenso sob ação da gravidade se tratava de uma parábola. Essa afirmação perdurou até meados desse mesmo século quando Christiaan Huygens (1629 – 1695) desmentiu Galileu usando apenas raciocínio físico. Contudo ficou a grande dúvida: que curva era essa? Preocupados em resolver essa confusão, o problema foi oficialmente lançado perante a comunidade dos matemáticos causando um enorme alvoroço entre os mesmos que queimaram pestanas em busca dessa resposta. Os irmãos Johann Bernoulli (1667 – 1748) e

Jakob Bernoulli (1655 – 1705) trabalharam paralelamente em busca da resposta assim como Huygens e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Em 1691, Johann Bernoulli e Leibniz, utilizando métodos analíticos conseguiram provar que realmente a curva estudada não se tratava de uma parábola e Huygens chegou à mesma conclusão utilizando-se de métodos geométricos. Daí nasceu a catenária que foi batizada com esse nome por Leibniz.

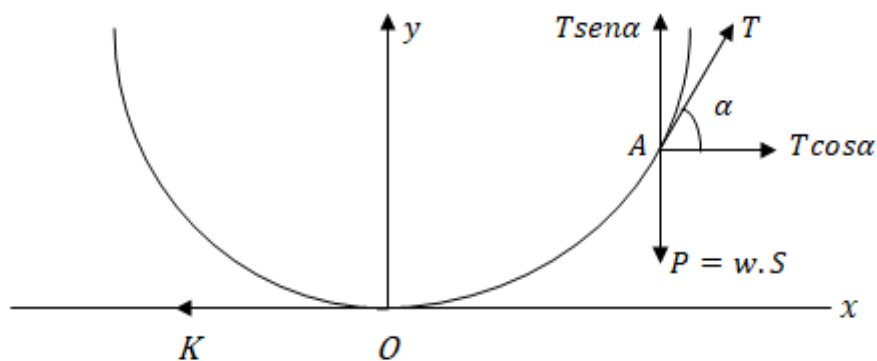
5.2 A EQUAÇÃO DA CATENÁRIA

Enquanto a parábola é representada algebricamente por um polinômio de segundo grau, a catenária é expressa algebricamente pela equação

$$f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (3.18)$$

Para demonstrar tal fato, será tomado um sistema de coordenadas cartesianas de forma que o eixo y passe pelo ponto mais baixo da curva e coincida com a vertical (Figura 39).

Figura 39 - A catenária sob ação das forças de tração e da força peso



Fonte: Elaborada pelo autor

K representa a tensão no cabo em seu ponto mais baixo, T representa a tensão no cabo no ponto A , P é o peso do cabo no trecho AO , S é o comprimento do cabo no trecho AO e α o ângulo entre T e o eixo x .

Considerando o equilíbrio do cabo no trecho AO , tem-se que

$$-K + T \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow T \cdot \cos\alpha = K \quad (1)$$

$$-P + T \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow T \cdot \sin\alpha = P \quad (2)$$

De (1) e (2), tem-se que:

$$\frac{T \sin\alpha}{T \cos\alpha} = \frac{P}{K} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{P}{K}$$

Mas como $P = w \cdot S$, onde w é o peso do cabo por unidade de comprimento, segue-se que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{w \cdot S}{K}$ e como w e K são constantes reais, fazamos $\frac{w}{K} = c$ com $c \in \mathbb{R}$ e assim chega-se a expressão $\operatorname{tg}\alpha = c \cdot S$. Mas o comprimento do cabo S é uma função de x e daí concluímos que $\operatorname{tg}\alpha = c \cdot S(x)$.

Seja f a função cujo gráfico é a catenária. Podemos dizer que f é uma função par, pois seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y . Assim, sendo f uma função par e de classe C^2 , temos que

$$f'(x) = c \cdot S(x) \quad (*)$$

O comprimento do gráfico de uma função do tipo $y = f(t)$ com $a \leq t \leq b$ é dado por $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$

Assim, como f é uma função do tipo $y = f(t)$, o comprimento do arco OA no intervalo $0 \leq t \leq x$ é dado por $S(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$

Substituindo em (*) temos

$$f'(x) = c \cdot \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$f''(x) = c \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Fazendo agora $f'(x) = g(x)$, segue-se que

$$g'(x) = c \cdot \sqrt{1 + (g(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{1 + (g(x))^2}} = c$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{g'(x)}{\sqrt{1 + (g(x))^2}} dx = \int c \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \ln \left| g(x) + \sqrt{1 + (g(x))^2} \right| = cx + D$$

Como $g(0) = 0$, então $D = 0$ e daí, g satisfaz

$$\ln \left| g(x) + \sqrt{1 + (g(x))^2} \right| = cx$$

$$\Rightarrow g(x) + \sqrt{1 + (g(x))^2} = e^{cx} \quad (i)$$

Como $g = f'$ e f é par, conclui-se que g é ímpar e daí,

$$g(-x) + \sqrt{1 + (g(-x))^2} = e^{-cx}$$

$$\Rightarrow -g(x) + \sqrt{1 + (g(x))^2} = e^{-cx} \quad (ii)$$

Das expressões (i) e (ii), obtém-se

$$2g(x) = e^{cx} - e^{-cx}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} (e^{cx} - e^{-cx})$$

$$\Rightarrow g(x) = \operatorname{senh}(cx)$$

Daí, como $g = f'$ chega-se a expressão

$$f'(x) = \operatorname{senh}(cx)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{c} \operatorname{cosh}(cx) + D$$

Fazendo $\frac{1}{c} = a$, temos então a expressão

$$f'(x) = a \cdot \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{a}\right) + D$$

■

6 AS QUÁDRICAS E A CATENÁRIA NA ARQUITETURA

Segundo meu nobre amigo José Bernardo de Araújo Torres: “A matemática e a arte por vezes se relacionam, podendo ser na emoção sentida por quem as contempla ou até pelas técnicas e objetos concretos ou abstratos que utilizam”. Partindo desse pressuposto, pode-se dizer que uma das formas de artes mais belas que existe no mundo e que mantém uma forte relação com a matemática é a arquitetura.

Em muitas obras arquitetônicas espalhadas pelo mundo, percebe-se o uso de superfícies quádricas e de arcos catenários em suas estruturas. Essas superfícies possibilitam, muitas vezes, além de beleza visual, funcionalidade, resistência e economia.

Serão apresentadas obras arquitetônicas pelo Brasil e pelo mundo de alguns arquitetos famosos como o espanhol Felix Candela, o indiano Hafeez Contractor, o americano Richard Buckminster Fuller, o finlandês Eero Saarinen e os brasileiros Oscar Niemayer e José Augusto Belucci.

6.1 INFOYS HEADQUARTERS

Figura 40 – Infoys Headquarters



Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Infoys>

O Infos Headquarters é uma obra arquitetônica que foi projetada pelo arquiteto indiano Hafeez Contractor em Pune, na Índia, no ano de 1981.

Importante centro comercial do país tem a forma de um elipsóide com uma pequena inclinação em relação ao solo toda espelhada na cor azul.

6.2 MONTREAL BHIOSPHERE

Essa obra arquitetônica foi projetada pelo arquiteto Richard Buckminster Fuller e está localizada na cidade de Montreal no Canadá.

Figura 41 - Montreal Bhiosphere



Fonte: <http://br.pinterest.com./pin/787637422300213911/>

Trata-se de um museu canadense que se dedica integralmente ao meio ambiente. Possui à forma de uma esfera com 78 metros de diâmetro, 61 metros de altura e tem a estrutura principal feita de tubos de aço.

6.3 CATEDRAL DE BRASÍLIA

Obra arquitetônica projetada pelo arquiteto Oscar Niemeyer a catedral de Brasília, oficialmente chamada Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida, foi inaugurada em 1970.

Figura 42 - Catedral de Brasília



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Catedral_Metropolitana_de_Brasília

Com a maior parte abaixo do solo, possui uma estrutura formada por um hiperbolóide de uma folha utilizando-se de 16 colunas de concreto. O teto, uma das poucas partes visíveis acima do solo, é todo de vidro e tem como base um hiperbolóide com seções assimétricas. O batistério pode ser acessado por uma escadaria em forma de espiral pela praça.

6.4 RESTAURANTE LOS MANANTIALES

Obra arquitetônica, localizada na cidade do México, projetada pelo arquiteto espanhol Félix Candela.

A cobertura do restaurante é formada por quatro parabolóides hiperbólicos iguais com uma altura máxima de 8,25 metros e altura mínima de 5,90 metros, construídos em concreto armado com rotações e interseções em seu centro, formando um desenho simétrico composto por oito lados.

Candela, assim como Gaudí, do qual falaremos mais adiante, tinha uma grande inclinação em utilizar as superfícies regradas, principalmente nas coberturas de suas obras.

Figura 43 - Restaurante Los Manantiales



Fonte: <https://www.archdaily.com/496202/ad-classics-los-manantiales-felix-candela>

6.5 MUSEU DE ARTE POPULAR DA PARAÍBA

Localizado sobre uma praça as margens de um açude velho é composto por três prédios suspensos com a forma de cilindros circulares espelhados e ligados por uma plataforma. É uma das maiores atrações turísticas da cidade.

Figura 44 - Museu de Arte Popular da Paraíba



Fonte: guiacomercialcampinagrande.com.br

6.6 PALÁCIO DOS TRÊS PODERES

Figura 45 - Palácio dos Três Poderes



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Palácio_Nereu_Ramos

Projetado por Oscar Niemayer, o palácio dos três poderes teve sua construção finalizada no ano de 1960 junto com a cidade de Brasília no governo de Juscelino Kubitscheck.

O edifício é composto por duas cúpulas. A primeira cúpula, sede do senado federal, foi construída na forma de um parabolóide de revolução com a concavidade voltada para baixo e a segunda, sede da câmara dos deputados, foi segmentada em três trechos onde de cima para baixo se utilizou um tronco de cone, uma calota esférica e um elipsóide de revolução, respectivamente. Além disso, há duas torres gêmeas em forma de prismas quadrangulares com cem metros de altura onde funcionam escritórios de apoio.

6.7 CATEDRAL BASÍLICA MENOR

Figura 46 - Catedral Basílica Menor



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Arquidiocese_de_Maringá

Catedral Basílica Menor foi construída entre os anos de 1959 e 1972, na cidade de Maringá no Paraná, sendo ela projetada pelo arquiteto brasileiro José Augusto Belucci.

Possui uma forma cônica com uma altura de 114m, diâmetro interno de 35m e o externo mede 50m. No topo possui uma cruz de 10m de altura e sua capacidade chega a 3500 pessoas.

É o mais alto monumento religioso localizado na América Latina e o vigésimo quinto do mundo.

6.8 GATEWAY ARCH

Gateway Arch, localizado em St. Louis nos Estados Unidos, foi projetado pelo arquiteto finlandês Eero Saarinen em 1947. O arco tem a forma de uma catenária invertida com uma altura de 192 metros de altura sendo reforçado a metade inferior por concreto e a metade superior por carbono.

Figura 47 - Gateway Arch



Fonte: pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:st_Louis_Gateway_Arch.jpg

7 AS FORMAS GEOMÉTRICAS DE GAUDÍ

A paixão de Gaudí pela natureza iniciou-se quando ainda era criança, observando-a e contemplando-a de uma forma bem intensa. Dessa contemplação, nasceu uma imensa paixão pelas árvores, pelos animais, pelas montanhas e pelo mar, permitindo a ele uma inesgotável fonte de inspiração para seus trabalhos que por esse fato tem um estilo único e muito pessoal.

Segundo Gaudí “para que um objeto seja extraordinariamente belo é necessário que sua forma não tenha nada de supérfluo”. Gaudí utilizava essas formas não pensando apenas na beleza que elas proporcionavam, mas também pela funcionalidade delas nas obras.

“Segundo Gaudí para que uma obra seja bela, é necessário que se ajuste todos os elementos enquanto a situação, dimensão, forma e cor, pois todas essas qualidades da obra arquitetônica estão intimamente relacionadas.” (Giralt-Miracle, 2002, p. 22)

Dessa forma, as obras de Gaudí sempre foram frutos de profundas análises experimentais das formas geométricas a serem utilizadas, pois ele avaliava as possibilidades construtivas e o sentido arquitetônico que elas davam ao seu trabalho utilizando para isso maquetes e fotografias.

Dessa relação íntima entre Gaudí e à natureza, nasceram formas geométricas que foram utilizadas em grande escala em suas obras. Entre essas formas destacam-se:

- Os arcos catenários
- As superfícies quádricas regradadas e não regradadas
- Os helicoides e os conoides

7.1 A RELAÇÃO DE GAUDÍ COM OS ARCOS CATENÁRIOS

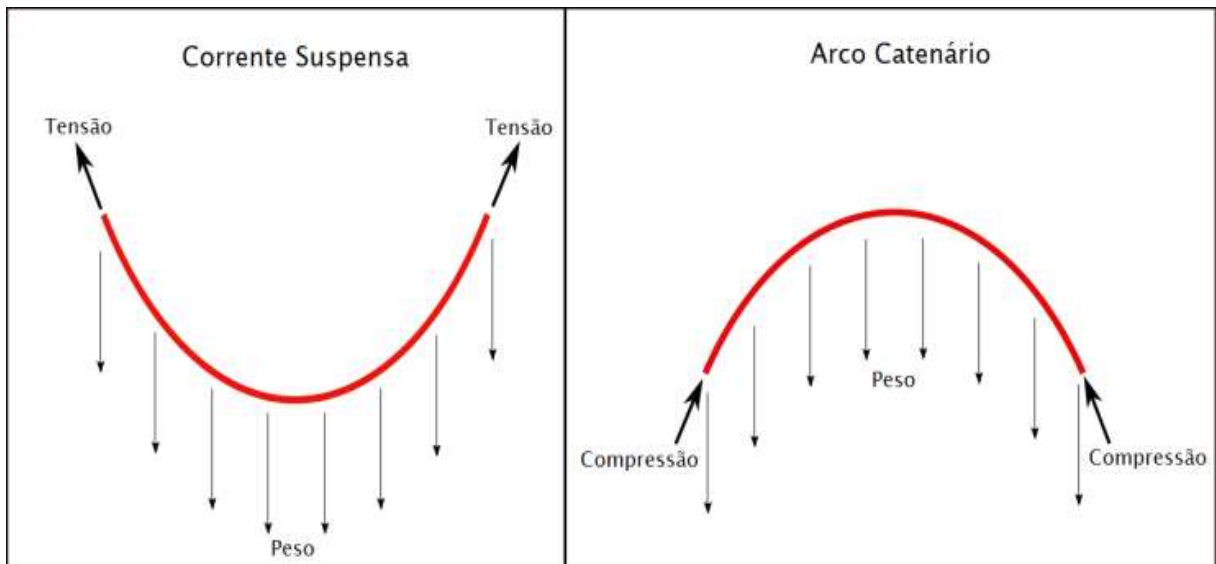
A catenária é uma forma geométrica muito utilizada em obras arquitetônicas e um dos arquitetos que mais a utilizou em seus trabalhos foi Gaudí.

Desde as primeiras obras, Gaudí começou a utilizar os arcos catenários ao invés dos arcos derivados de círculos. Gaudí se utilizou dos estudos de Robert Hooke que afirmou “a forma ideal de um arco é a de uma catenária invertida”. Além

disso, descobriu em suas pesquisas que ao suspender uma corrente por dois pontos, ela sofre somente forças de tração em seu corpo e se ela for invertida, sofre somente forças de compressão e dessa forma, podia criar arcos com estruturas mais firmes e resistentes, deixando a estrutura menos pesada e fazendo uma substancial economia de material.

Assim quando Gaudí queria construir um arco catenário, ele prendia uma corrente em suas extremidades deixando-a sob ação da gravidade e quando a mesma adquiria estabilidade, tirava uma foto e a analisava de forma invertida ou usava um espelho no chão para ajudar na visualização da mesma. A figura 48 mostra as cargas que atuam na catenária e na catenária invertida.

Figura 48 - Fotos da catenária e da catenária invertida



Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Catenary>

7.2 OS ARCOS CATENÁRIOS NAS OBRAS DE GAUDÍ

Como já foi dito, Gaudí utilizou os arcos catenários em grande escala em suas obras, dando às mesmas uma enorme beleza arquitetônica. Dessa forma, vamos apresentar a seguir algumas obras de Gaudí em que ele usa arcos catenários.

No sótão da Casa Batlló, um local de serviço, não deixou de fazer uma área que combinasse estética e funcionalidade. Ao invés de corredores brancos sem graça ele criou arcos com formas de catenárias em número de 60.

No sótão da Casa Milà (Figura 49), Gaudí utilizou arcos catenários como estrutura de apoio para o telhado causando um visual maravilhoso. O sótão é uma sala bem ventilada composto por 270 abóbadas formadas por arcos catenários. A forma e a localização dos pátios são formadas por arcos de diferentes alturas dependendo da distância entre eles, sendo uma relação inversamente proporcional, ou seja, arcos maiores para distâncias menores e vice versa.

Figura 49 - Sótão da casa Milà



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/305330049730603891/>

Além das obras citadas anteriormente, Gaudí utilizou com muita propriedade a catenária em outras obras entre elas:

- Os arcos da sala da Fazenda Güell
- As portas do Palácio Güell (Figura 11)
- Os arcos da arcada do Colégio das Teresianas
- Os arcos no galpão da Cooperativa Obrera Maratonense
- Os arcos da arcada da Casa Batlló
- Nas portas da Casa Milà

7.3 GAUDÍ E AS QUÁDRICAS

Dentre as formas geométricas que Gaudí estudou em suas observações sobre a natureza, nenhuma foi tão utilizada quanto às superfícies quádricas. Excetuando o hiperboloide elíptico de duas folhas, de pouquíssimas aplicações até hoje, todas as outras foram utilizadas por ele em suas obras. Gaudí utilizou esferas, cilindros, elipsoides, cones e paraboloides elípticos em seus trabalhos, mas tinha uma enorme afeição pelo paraboloides hiperbólico e pelo hiperboloide elíptico de uma folha.

Mas uma pergunta ficava no ar: Qual o porquê de Gaudí gostar tanto das quádricas? A resposta é que tais superfícies são facilmente encontradas na natureza. Ele via o hiperboloide elíptico nos troncos de árvores ou em ossos do corpo humano como o fêmur, via o paraboloides hiperbólico no tendão entre os dedos das mãos, nas raízes das árvores e no dorso de cavalos, via o elipsoide nos nós em tronco de árvores e assim por diante.

Figura 50 - Coluna de duplo giro



Fonte: baulitoadelrte.blogspot.com

7.4 APLICAÇÕES DAS QUÁDRICAS NAS OBRAS DE GAUDÍ

A seguir serão apresentadas aplicações de quádricas regradas e não regradas nas obras de Gaudí.

7.4.1 Paraboloide elíptico, esfera e elipsoide

Por não serem regradas Gaudí não utilizou o parabolóide elíptico, a esfera e o elipsoide com tanta frequência.

Na Casa Vincens, Gaudí utilizou na cúpula de sua torre mais alta o parabolóide de revolução (Figura 13), todo circundado por azulejos azuis e brancos lembrando sua primeira fase, chamada Mourisca, dando uma beleza estética descomunal. Essa mesma superfície quádrica foi utilizada em cúpulas no Palácio Güell.

Outra aplicação do parabolóide elíptico foi na cúpula da sacristia da Sagrada Família através de uma interseção de parabolóides que a tornou muito bela e funcional como podemos observar na figura 50.

Figura 51 - Cúpula da sacristia da Sagrada Família



Fonte: baulitoadelrte.blogspot.com

A esfera foi utilizada nas chaminés da Casa Batlló e da Casa Milà e no caminho do rosário de pedras no Parque Güell, onde um rosário foi representado por um caminho ladrilhado por uma fileira de esferas de pedra, dando um sentido religioso à obra.

O elipsoide foi utilizado na Sagrada Família nos nós e capteis das colunas de duplo giro (Figura 52), dividindo-as em duas partes sendo a inferior contínua e a superior ramificada em forma de galhos de árvores dividindo as cargas entre eles.

Figura 52 - Nós em forma nas colunas de duplo giro



Fonte: baulitoadelrte.blogspot.com

7.4.2 Quádricas regradas

Gaudí tinha uma grande preferência pelas superfícies quádricas regradas, pois elas se encontravam bem presentes na natureza. Além disso, elas tinham uma facilidade construtiva e grande beleza plástica.

Mas quais as quádricas preferidas de Gaudí

“Das superfícies regradas, utilizou mais os conoides, os paraboloides hiperbólicos e os hiperboloides de uma folha de revolução, esta última a mais completa. Gaudí entrou em contato com essas formas quando estudava geometria na escola de arquitetura de Barcelona, segundo o texto C.F.A. Leroy (Leroy, 1875) sucessor de Gaspar Monge na escola politécnica de Paris”. (BUXADÉ; MARGARIT, 2002, p. 113)

Porém Gaudí também utilizou bastante as superfícies cilíndricas, as superfícies cônicas, os conoides e os helicoides em suas obras, como será visto logo a seguir.

7.4.2.1 Cilindros e cones

Os cilindros e os cones são as mais tradicionais das formas regradas utilizadas na arquitetura e são encontradas facilmente na natureza. Gaudí utilizou essas superfícies principalmente em suas primeiras obras.

No subsolo do Palácio Güell vê-se essas belas colunas que se inicia da base até certa altura na forma cilíndrica e de certa altura até o topo tem a forma de um hiperboloide elíptico de uma folha proporcionando boa resistência para suportar as forças de compressão, uma economia de material e a formação de belos arcos como observamos na figura 53.

Figura 53 - Subsolo do Palácio Güell



Fonte: <https://ideiasnamala.com/2013/09/05/barcelona-palau-guell-visitando-uma-das-primeiras-obras-de-gaudi/>

Outras aplicações importantes das superfícies cilíndricas nas obras arquitetônicas de Gaudí foram:

- Nas bases das torres da Casa Vincens (figura 13).
- Nas colunas dóricas na sala Hipostila (cem colunas) no Parque Güell.

- Na torre principal do El Capricho.
- Nas torres e nas cobertas dos pavilhões na Fazenda Güell.
- Nas torres do Palácio Episcopal de Astorga (figura 5).

Figura 54 - Casa Botines de Leon



Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Casa_Botines_Leon.JPG

No caso das superfícies cônicas as mesmas foram utilizadas por Gaudí em outras obras, entre elas:

- Nas chaminés da Casa Batlló
- Nas torres do Palácio Episcopal de Astorga
- Nos capiteis das colunas interiores da sala de jantar do Palácio Güell.
- Nas torres das esquinas da Casa Botines de Leon (Figura 54).
- No Parque Güell há um cone de pedra que forma um telhado para o lado dos edifícios da portaria.

7.4.2.2 Hiperboloide elíptico de uma folha

No Parque Güell, Gaudí utilizou o hiperboloide de uma folha nas colunas bem na sua entrada, construída toda de pedra bem onde se encontra um jardim sobre o teto que ele sustenta.

Gaudí modificou a forma dos sinos no Templo Expiratório da Sagrada Família com a finalidade de melhorar a sonoridade. Ele retirou a parte esférica que vinha na parte superior e deu continuidade ao seu corpo na forma hiperboloide aberto também na sua parte superior, o que proporcionou a saída do som das badaladas tanto por cima quanto por baixo do mesmo.

Na nave principal da Sagrada Família, Gaudí construiu uma cobertura formada por enormes janelas em forma de hiperboloides de uma folha com entrada de luz pelos vãos elípticos. A partir de suas observações, Gaudí concluiu que o hiperboloide de uma folha tinha uma ótima qualidade de reflexão e ainda mais, refletiam os raios luminosos para o interior do templo a partir de qualquer ponto. Partindo desse pressuposto, haveria um ganho substancial na acústica e na iluminação do templo, como pode ser observado na figura 55

Figura 55 - Bovedas hiperboloides da Sagrada Família



Fonte: <https://www.pinterest.fr/pin/308496643196728404/>

Além dessas aplicações citadas, pode-se observar o uso do hiperboloide de uma folha também:

- Nas quadras da Fazenda Güell
- Nas quadras da Casa Calvet

- No subsolo do Palácio Güell na parte superior das colunas (Figura 52)
- Nos sinos da Cripta Güell
- Nas janelas da Cripta Güell cobertas por vidros coloridos.

7.4.2.3 Paraboloide hiperbólico

O parabolóide hiperbólico era a quádrlica que Gaudí mais gostava de utilizar em suas obras. Ele era tão entusiasmado por elas, que chegou a compará-la com a santíssima trindade no alto de sua religiosidade.

O que mais despertou o interesse de Gaudí pelo parabolóide hiperbólico foi o fato de serem regradas, ou seja, elas podem ser construídas pelo uso de linhas retas facilitando sua construção para utilização principalmente nas coberturas das obras como na cripta da colônia Güell (Figura 56).

Figura 56 - Cobertura da Cripta Güell



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/186547609540793035/>

Gaudí utilizou o parabolóide hiperbólico combinado com o hiperboloide de uma folha no teto da nave principal do Templo Expiratório da Sagrada Família com a finalidade de direcionar a água da chuva para os canais e tubulações de drenagem.

Outra aplicação dos parabolóides hiperbólicos foi nas quatro torres da fachada do nascimento que são formadas por parabolóides hiperbólicos com grande altura e forte curvatura, o que se pensava ser possível fazer somente com as torres

retilíneas. As torres da sacristia são formadas por doze paraboloides hiperbólicos sendo quatro simétricos e oito assimétricos definindo uma superfície de ótima resistência e as duas mais altas representam Maria e Jesus Cristo, dando um total de dezoito torres, como mostra a figura 15.

7.4.2.4 Conoide e helicoides

Além das quádricas, há duas outras superfícies regradas as quais Gaudí tinha também um grande apreço que são o conoide e o helicoides.

O conoide está presente na natureza nas folhas e nas flores de árvores e Gaudí utilizou essa superfície em algumas de suas obras entre as quais citamos:

- As cobertas e muros das escolas provinciais do Templo Expiratório da Sagrada Família (Figura 57)
- A coberta do armazém de esculturas da oficina de Gaudí

Figura 57 - Cobertas das escolas provinciais da Sagrada Família



Fonte: baulitoaldelrte.blogspot.com

O helicoides encontra-se presente na natureza em algumas plantas ou em animais como na concha de um caracol. Foram mais utilizadas em forma de rampas ou escadarias. Gaudí utilizou os helicoides:

- Na rampa do Palácio Güell (Figura 58)
- Na escadaria do Templo Expiratório da Sagrada Família (Figura 59)

- Na escadaria em El Capricho
- Na rampa da Cripta da Colônia Güell

Figura 58 - Rampa do Palácio Güell



Fonte: <https://ideiasnamala.com/2013/09/05/barcelona-palau-guell-visitando-uma-das-primeiras-obras-de-gaudi/>

Figura 59 - Escadaria do Templo Expiratório da Sagrada Família



Fonte: <https://www.pinterest.fr/pin/287104544972311818/>

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização desse trabalho oportunizou-me relacionar conhecimentos matemáticos, em especial às formas geométricas, com essa maravilhosa e tão antiga arte de projetar e construir chamada arquitetura. Além disso, proporcionou-me conhecer um pouco da vida e da arte desse fantástico arquiteto chamado Antoni Gaudí.

A catenária, as superfícies quádricas e as superfícies regradas eram para mim pouco conhecidas, o que me deu mais estímulo a ter vontade de estudá-las. Quando meu orientador Prof. Dr Claudemir Silvino Leandro me propôs relacionar essas formas geométricas com as obras arquitetônicas de Gaudí, não pensei duas vezes e parti para a pesquisa em livros, sites e dissertações em busca de informações relevantes para a realização desse trabalho.

Outro ganho importante na realização dessa dissertação foi conhecer e utilizar uma ferramenta poderosa na construção de formas geométricas: o Geogebra. Esse software permite construir formas geométricas com ou sem as equações das mesmas, utilizando-se de pontos, retas, planos, polígonos entre outros entes geométricos. O Geogebra proporcionou-me construir em torno de 20% das formas geométricas que aparecem nesse trabalho.

A falta de documentação escrita diretamente por Gaudí, principalmente a parte de cálculo, que se perdeu num incêndio durante a guerra espanhola fez com que fossem utilizados apenas relatos de seus discípulos e colaboradores presentes nas fontes de pesquisas o que não diminuiu a vontade e o estímulo de realizá-lo. Procurei explicitar o maior número de informações que espero que possa ajudar às pessoas que por ventura venha ter acesso a esse trabalho.

As obras arquitetônicas de Gaudí são apaixonantes e de uma beleza descomunal. Não é a toa que ninguém pode visitar a cidade de Barcelona sem conhecê-las. O número de turistas que as visitam periodicamente é muito grande e o encantamento por parte deles faz com que muitos deles voltem para visitá-las novamente em especial o Templo Expiratório da Sagrada Família, que ainda não foi concluída e a cada visita tem coisa nova para contemplar.

Podemos afirmar que a matemática é uma área de conhecimento que tem aplicações nos mais diversos setores. A ligação da geometria com a arquitetura é muito íntima e Gaudí, fazendo esse link entre as formas geométricas e a natureza,

fez com que suas obras tivessem grande destaque no cenário arquitetônico e inspirasse outros arquitetos a seguir essa linha de pensamento.

Finalizando, afirmo que tudo que aprendi com a realização desse trabalho, acrescentou muito a minha vida, tanto profissional quanto pessoal. Nunca fui muito ligado a arte, o que considero uma falha, mas tudo o que pude obter de conhecimento com a realização desse trabalho fez despertar algo que estava escondido no meu íntimo e precisava apenas de um estímulo para ser despertado. Hoje por onde passo e vejo uma obra arquitetônica que me chame atenção, paro para contemplar e tirar fotos a fim de utilizá-las em aulas contextualizadas para meus alunos.

REFERÊNCIAS

- ALSINA, Claudí; GOMEZ-SERRANO, Josep. Geometria Gaudiana. In: **Gaudí. La búsqueda de la forma: espacio, geometría, estructura y construcción**. Barcelona: Lunweg, 2002, p. 96 – 103.
- ARMENGOL, Jordi Bonet. **L'últim/ the essential GAUDÍ**. Barcelona: Editorial Pòrtic, 2000.
- BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra LTDA, 1986.
- BUXADÉ, Carles; MARGARIT, Joan. Bovedas Hiperbólicas. In: GAUDÍ. **La búsqueda de la forma: espacio, geometría, estructura y construcción**. Barcelona: Lunweg, 2002, p. 112 – 117.
- CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Higini H.; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- FILHO, Manoel Ferreira de Azevedo. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Fortaleza: Ao Livro Técnico, 2003.
- GIRALT-MIRACLE, Daniel. Introdução. In: **Gaudí. La búsqueda de la forma: espacio, geometría, estructura y construcción**. Barcelona: Lunweg, 2002, p. 16 - 25.
- GOMEZ-SERRANO, Josep. Arcos Catenários. In: **Gaudí. La búsqueda de la forma: espacio, geometría, estructura y construcción**. Barcelona: Lunweg, 2002, p. 96 – 103.
- HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília S. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).
- LEITHOLD, Louis. **O cálculo com Geometria Analítica vol. 2**. 2. ed. São Paulo: Harbra LTDA, 1986.
- LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- PERES, Eduardo dos Santos. **Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica**. 2014. 95 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro 2014. Disponível em: <<http://www.profmatt-sbm.org.br/dissertacoes>>. Acesso em: 24 fev. 2018.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

SMITH, Percy F.; NEELEY, John Haven; GALE, Arthur Sullivan. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1964.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.