

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Homologia simplicial e a característica de Euler-Poincaré**

**André Gomes Ventura Gonçalves**

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**André Gomes Ventura Gonçalves**

## Homologia simplicial e a característica de Euler-Poincaré

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

**USP – São Carlos**  
**Julho de 2019**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

G643h      Gonçalves, André Gomes Ventura  
            Homologia simplicial e a característica de Euler-  
Poincaré / André Gomes Ventura Gonçalves; orientador  
Alexandre Casassola Gonçalves. -- São Carlos, 2019.  
            102 p.

            Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de  
Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

            1. Homologia Simplicial. 2. Característica de  
Euler-Poincaré. 3. Invariante Topológico. 4. Grupos.  
5. Sequência Didática. I. Gonçalves, Alexandre  
Casassola, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:  
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938  
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

**André Gomes Ventura Gonçalves**

## Simplicial homology and the Euler-Poincaré characteristic

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

**USP – São Carlos**  
**July 2019**



*À minha mãe **Célia**, meu pai **Daniel**, minhas irmãs **Maíra** e **Miriã**, meu irmão **Alexandre** e  
companheiro **Caetano**.*



# AGRADECIMENTOS

---

---

Este trabalho não poderia ter chegado a tal ponto não fosse o precioso apoio de muitas pessoas, às quais tenho prazer em agradecer.

Em primeiro lugar, ao Prof. Dr. Alexandre Casassola, pela orientação pacienciosa e dedicada com que me conduziu durante esse longo período de estudo e aprendizado. Suas profundas contribuições extrapolam o contexto deste trabalho e enchem de vigor meu desejo de continuar aprendendo matemática. Agradeço, sobretudo, à confiança e constante incentivo ao meu progresso.

À CAPES, pela bolsa concedida.

Ao IMPA e à SBM pelo trabalho de excelência e fomento à produção e divulgação de matemática de alto nível. Em especial, pela manutenção e coordenação do PROFMAT, o qual segue como importante programa de aprofundamento para professores.

À USP e à UNICAMP pela gratuidade do ensino oferecido e excepcional corpo docente. Em especial, agradeço aos professores do DCM - Departamento de Computação e Matemática da USP Ribeirão Preto, pelas aulas ministradas e dedicação afetuosa à formação matemática dos seus alunos.

Ao Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio. Amigo e mestre, lançou luz onde antes havia sombra e esquecimento.

Aos amigos queridos, Angela Arndt Borges e Thomas Carvalho, pelas contribuições preciosas e apoio nos momentos difíceis desta trajetória.

À amiga Marília Gabriela Malavolta, agradeço os muitos momentos de reflexão e inspiração, sem os quais faltaria ingrediente para permanecer interessado nas questões sutis do mundo e de explicação quase nunca triviais.

Aos meus pais amados que atravessaram todo tipo de adversidade para garantirem educação de qualidade aos filhos, sem nunca esboçarem qualquer traço de cansaço ou arrependimento, mas com trabalho honrado e perseverança. Gratidão pelos bons valores transmitidos e dedicação incondicional à minha criação.

Ao amado e companheiro José Caetano, meu agradecimento especial pela espera paciente e apoio em todos os momentos.



*“O cientista não estuda a natureza pela sua utilidade,  
estuda-a porque se deleita com ela, e deleita-se porque ela é bela.  
Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena conhecê-la,  
e se a natureza não valesse a pena conhecer, a vida não valeria a pena viver.”*

*(POINCARÉ, 1913, p. 366)*



# RESUMO

GONÇALVES, A. G. V. **Homologia simplicial e a característica de Euler-Poincaré**. 2019. 102 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Desenvolvemos as ideias centrais da Homologia Simplicial e provamos a invariância topológica dos grupos de homologia para espaços homeomorfos. Discutimos também a invariância topológica da característica de Euler-Poincaré mostrando a sua relação com os grupos de homologia através dos números de Betti. Adicionalmente apresentamos conceitos da Álgebra Abstrata, especificamente da teoria de Grupos, importantes para o entendimento formal da álgebra homológica. Ao final, propomos atividades didáticas com objetivo de trazer as ideias de triangulação e invariância topológica ao contexto da sala de aula.

**Palavras-chave:** Homologia simplicial, Característica de Euler-Poincaré, Invariante topológico, Topologia algébrica, Teoria de grupos.



# ABSTRACT

GONÇALVES, A. G. V. **Simplicial homology and the Euler-Poincaré characteristic**. 2019. 102 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

We develop central ideas of Simplicial Homology and prove the topological invariance of homology groups for homeomorphic spaces. We also discuss topological invariance of Euler-Poincaré characteristic showing its relation with the homology groups through Betti numbers. In addition, we present concepts of abstract algebra, specifically of group theory, which are important to formal understanding of homological algebra. In the end, we propose didactic activities in order to bring the ideas of triangulation and topological invariance to context of math classes on basic education.

**Keywords:** Simplicial homology, Euler-Poincaré characteristic, Topological invariant, Algebraic topology, Group theory.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Núcleo e imagem de um homomorfismo $\phi : G \rightarrow H$ . . . . .	30
Figura 2 – Simplexos de dimensão 0, 1, 2 e 3. . . . .	50
Figura 3 – Orientações em um segmento de reta. . . . .	50
Figura 4 – Orientações possíveis em um triângulo. . . . .	51
Figura 5 – Orientação induzida nas arestas de um 2–simplexo. . . . .	52
Figura 6 – Orientações opostas induzidas numa face de dimensão $k - 2$ . . . . .	53
Figura 7 – (1) Simplexos cuja intersecção é uma face comum e (2) simplexos cuja intersecção não é uma face comum. . . . .	54
Figura 8 – Superfícies do octaedro, icosaedro e grande dodecaedro estrelado. . . . .	55
Figura 9 – Divisão da superfície do dodecaedro e do cubo em triângulos. . . . .	55
Figura 10 – Representação do homeomorfismo entre um 3–simplexo e a esfera $S^2$ . . . . .	56
Figura 11 – Bordos de simplexos. Adaptado de (BASENER, 2006, p. 275) . . . . .	58
Figura 12 – Exemplo de bordo de uma 2–cadeia. . . . .	58
Figura 13 – Realização de um complexo simplicial bidimensional $K$ . . . . .	61
Figura 14 – 1–ciclos em um complexo simplicial. . . . .	61
Figura 15 – O ciclo $B$ é a fronteira ou bordo de uma cadeia de triângulos. . . . .	62
Figura 16 – Dois ciclos em um complexo simplicial sobre a superfície de um toro. . . . .	62
Figura 17 – Poliedro homeomorfo à circunferência $S^1$ . . . . .	63
Figura 18 – Poliedro associado ao cone $ CK $ de vértice $v$ e base $K$ . . . . .	66
Figura 19 – Complexo $K'$ obtido de $K$ pela divisão estelar do simplexo $\sigma = (v_0, v_1, v_2) = \rho$ . . . . .	76
Figura 20 – Complexos $K^1$ e $K^2$ obtidos de $K$ pela primeira e segunda subdivisão bari-cêntrica. . . . .	77
Figura 21 – Resultado da aplicação de subdivisão, $\chi$ , sobre o simplexo $\rho$ . . . . .	78
Figura 22 – Estrela aberta de vértice $v$ em um complexo bidimensional $K$ . . . . .	83
Figura 23 – Identificação, ou colagem, das faces opostas de um dodecaedro para obtenção do espaço dodecaédrico de Poincaré. . . . .	87
Figura 24 – Atividade proposta 2 - Sugestão de regiões poligonais planas, limitadas, fechadas e com buracos. . . . .	95
Figura 25 – Atividade proposta 2 - Resultados acima do esperado. . . . .	96
Figura 26 – Atividade proposta 2 - Resultados acima do esperado. . . . .	97
Figura 27 – Atividade proposta 2 - Resultados abaixo do esperado. . . . .	97
Figura 28 – Atividade proposta 2 - Resultados abaixo do esperado. . . . .	98



# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	19
2	NOÇÕES DE ÁLGEBRA: GRUPOS . . . . .	23
2.1	Operação Binária . . . . .	23
2.2	Grupo e Subgrupo . . . . .	25
2.3	Homomorfismo de Grupos . . . . .	29
2.4	Grupo Cíclico . . . . .	33
2.5	Classe de Equivalência e Conjunto Quociente . . . . .	36
2.6	Classe Lateral . . . . .	37
2.7	Grupo Quociente . . . . .	40
2.8	Soma Direta de Grupos Abelianos . . . . .	42
2.9	Grupo Finitamente Gerado e Grupo Abelianos Livre . . . . .	44
2.10	Teoremas de Isomorfismo . . . . .	47
3	ELEMENTOS DE HOMOLOGIA SIMPLICIAL . . . . .	49
3.1	Simplexos . . . . .	49
3.2	Orientação nos Simplexos . . . . .	50
3.3	Complexo Simplicial e Poliedro . . . . .	54
3.4	Grupos de Homologia . . . . .	57
3.5	Exemplos . . . . .	61
4	INVARIANTES TOPOLÓGICOS . . . . .	69
4.1	Alguns Conceitos Topológicos . . . . .	69
4.2	Aplicação Simplicial . . . . .	72
4.3	Aplicação de Cadeia . . . . .	74
4.4	Subdivisão Baricêntrica . . . . .	75
4.5	Invariância Topológica . . . . .	81
5	CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ . . . . .	89
5.1	Relação com os Grupos de Homologia . . . . .	90
6	ALGUMAS APLICAÇÕES PARA SALA DE AULA . . . . .	93
	REFERÊNCIAS . . . . .	101



---

## INTRODUÇÃO

---

Na metade do século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) afirmou que o número de vértices somado ao número de faces de um sólido é sempre igual ao seu número de arestas acrescido de 2 unidades. A relação  $V + F = A + 2$  ficou conhecida, desde então, como a equação de Euler para poliedros.

Mesmo parecendo um teorema simples, ao menos na sua enunciação, Euler teve dificuldades em prová-lo. Talvez lhe faltasse uma noção precisa para “sólido”. O fato é que essa relação mostrou conter significados para além da matemática conhecida na época.

Há fortes indícios, e essa é uma tese defendida por diversos historiadores da matemática, que René Descartes (1596-1650) havia percebido essa mesma relação mais de um século antes, em 1630. O leitor curioso pode encontrar em (ACZEL, 2007) uma versão quase exotérica da história por trás da suposta descoberta de Descartes. Já em (SAMPAIO, 2012, p. 92-93), vemos com mais sobriedade o “esbarrão” de Descartes na relação de Euler.

O que há de especial no número 2? Por que não o número 4 ou qualquer outro? A resposta foi dada por Henri Poincaré (1854-1912), na última década do século XIX e seus desdobramentos marcaram o início da *Topologia Algébrica*.

Poincaré percebeu que a soma  $V - A + F$  poderia ser generalizada para poliedros de qualquer dimensão e mostrou tratar-se de uma característica intrínseca, portanto invariante, dos espaços topologicamente equivalentes ao poliedro. Assim concebeu o que atualmente denominamos a *característica de Euler-Poincaré*. O número 2 da equação de Euler é uma característica própria da esfera bidimensional e todos os espaços homeomorfos a ela, em particular os sólidos bidimensionais convexos, trazem consigo essa informação.

O trabalho de Poincaré evidenciou ainda outros dois invariantes topológicos: *os grupos de homologia* e o *grupo fundamental*. Sobre o grupo fundamental, reconhecemos não termos dado atenção merecida neste trabalho, sobretudo porque têm conexões interessantes com os

grupos de homologia. No entanto, em relação aos grupos de homologia, objetos do nosso estudo, temos bem mais a apresentar.

Os grupos de homologia são uma forma mais cuidadosa de computar a característica de Euler-Poincaré. No lugar de somar com sinais alternados o número de componentes  $n$ -dimensionais do poliedro, pode-se computar alternadamente a quantidade de *buracos*  $n$ -dimensionais deste espaço e o resultado será a característica de Euler-Poincaré. Desse modo, os grupos de homologia se apresentam como uma maneira elegante de computar os buracos de um espaço em qualquer dimensão. O adjetivo “simplicial” indica que são computados por meio uma abordagem predominantemente poliédrica, ou, como veremos, à partir de complexos simpliciais. Há uma teoria mais geral, a Homologia Singular, que dispensa a estrutura simplicial e se apresenta como uma alternativa mais robusta e com resultados mais imediatos.

A álgebra apresentada nos capítulos a seguir não se deve por completo à Poincaré. De fato é resultado do trabalho de muitos outros matemáticos, que se estendeu décadas adentro do século XX.

Convém destacar que a estrutura de grupo da homologia só foi notada na segunda década do século XX. Foram os trabalhos pioneiros da alemã Emmy Noether (1882-1935), no campo da álgebra abstrata, os responsáveis por organizar as ideias da homologia. Noether colocou à disposição da topologia as técnicas e teoremas da teoria algébrica dos grupos, permitindo um enfoque novo e poderoso.

No artigo de [Alexandrov \(1981, p. 153\)](#), *Em memória de Emmy Noether*, ele escreveu:

Hoje em dia, não ocorre a ninguém definir a topologia combinatória, de uma forma que não seja através da teoria dos... grupos; é, por isso, de todo apropriado recordar que foi Emmy Noether quem primeiro teve a ideia de tal construção. Ao mesmo tempo, ela percebeu como se torna simples e transparente a prova da fórmula de Euler-Poincaré, fazendo um uso sistemático do conceito de grupos de Betti.

A incorporação da álgebra à topologia desenvolveu um ramo novo da matemática, no qual este trabalho se insere, a Topologia Algébrica.

O Capítulo 2 trata de conceitos da Álgebra Abstrata e aparece mais como um registro da trajetória de estudo que seguimos do que uma apresentação sucinta das ideias centrais da álgebra homológica. Certamente poderíamos ter cortado algumas definições e exemplos para um conjunto de informações efetivamente essencial. No entanto, essa observação apenas ficou clara nos momentos finais da escrita, razão pela qual decidimos manter o excesso para não correr o risco de eliminar pedaços que pudessem comprometer o entendimento do leitor menos versado em álgebra. Para estes leitores, recomendamos expressamente a compreensão da ideia de grupo quociente (Seção 2.7) e que aceite o Teorema de classificação dos grupos abelianos finitamente gerados (Teorema 7).

Desenvolvemos a teoria de Homologia Simplicial no Capítulo 3. Começamos apresentando o conceito de simplexo, elemento central na divisão de um espaço topológico (triangulável) em regiões “triangulares”. A partir deles, munidos da noção de orientação, podemos realizar somas algébricas de simplexos com coeficientes inteiros. Com isso criamos a estrutura de base para construção dos grupos abelianos das cadeias de simplexos  $n$ -dimensionais, sobre as quais definimos o operador de fronteira, ou operador bordo. Algebricamente, esse operador é um homomorfismo entre os grupos de cadeia de simplexos com a propriedade de se anular quando composto uma vez com si mesmo. Tal propriedade é o ingrediente necessário para diferenciar, dentre todas as cadeias que são *ciclos*, aquelas que não são *bordos*. Parece abstrato, mas sob certas circunstâncias, em dimensões pequenas, é possível exibir uma imagem concreta dessas ideias. Fazemos isso nos Exemplos 28, 29 e 30. O  $n$ -ésimo grupo de homologia, é, portanto, a coleção das classes de equivalência dos  $n$ -ciclos que não são bordos. Dois  $n$ -ciclos são homólogos quando pertencem à mesma classe de homologia, isto é, quando diferem por um bordo.

O conjunto de simplexos provenientes da triangulação de um espaço topológico é um complexo simplicial e o que fizemos na parte final deste capítulo foi calcular os grupos de homologia de alguns complexos simpliciais interessantes. Levamos bom tempo debruçados nessa parte porque não há uma maneira direta e geral para fazê-lo. Cada complexo tem particularidades que precisam ser levadas em conta. Apesar disso, encontramos alguma generalidade nesse processo: complexos simpliciais conexos têm  $H_0 \simeq \mathbb{Z}$  (Proposição 23) e o número de componentes conexas do complexo corresponde número de geradores livres de  $H_0$  (Proposição 24). Do ponto de vista intuitivo, os grupos de homologia são uma forma de contar *buracos* no complexo e nos aproveitamos disso para não perder a intuição no meio do caminho.

Ainda no Capítulo 3 nos deparamos com uma definição inteiramente nova e surpreendente para *poliedro*. Assumimos essa definição, consagrada em favor da topologia, e reconhecemos um poliedro como uma “construção”, ou *imersão*, de um complexo simplicial no espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Uma observação deve ser feita a esse respeito: os poliedros tradicionais geralmente não são formados por faces triangulares, o que poderia sugerir que estivessem excluídos dessa nova definição. No entanto, as faces planas dos poliedros convencionais podem ser divididas em triângulos, de modo que, para qualquer poliedro de faces não triangulares sempre é possível construir um outro idêntico (no sentido de terem os mesmos pontos) à partir de um complexo simplicial adequado.

No Capítulo 4 apresentamos a maneira natural de definir os grupos de homologia em um espaço topológico compacto triangulável. Isso se dá ao identificar a homologia do espaço à homologia do complexo simplicial associado à sua triangulação. No entanto, tal definição carece de algumas verificações, entre elas, que a escolha da triangulação não altera os grupos de homologia. Mostramos isso definindo uma maneira de dividir o poliedro em subpoliedros com simplexos de diâmetro cada vez menores; a *subdivisão baricêntrica*. Na Seção 4.1 fazemos

referências à alguns resultados da topologia e, talvez aí, deixamos de lado alguns resultados quase evidentes, tais como: “a composição de funções contínuas é contínua” e sua implicação imediata: “a composição de homeomorfismos é ainda um homeomorfismo”. Na parte final do capítulo fazemos referência *grupo fundamental* e seu protagonismo em um dos maiores problemas do século XX.

Finalmente, no Capítulo 5, enunciamos o teorema de Euler para sólidos e provamos a sua versão mais robusta devida à Poincaré. A invariância topológica da característica de Euler-Poincaré segue como um resultado quase imediato da relação que tem com os grupos de homologia e os números de Betti são os responsáveis por essa conexão.

No último capítulo apresentamos sugestões para uma sequência didática com objetivo de fomentar e desenvolver os conceitos de triangulação e invariância topológica. Propomos também uma atividade concreta para compreender uma demonstração do teorema de Euler.

---

## NOÇÕES DE ÁLGEBRA: GRUPOS

---

### 2.1 Operação Binária

**Definição 1.** Uma *operação binária* ou simplesmente *operação* em um conjunto não vazio  $X$  é uma função  $\mu : X \times X \rightarrow X$ .

É comum adotar símbolos como por exemplo “ $*$ ” ou “ $+$ ” para representar a operação entre elementos de um conjunto. Nesses casos, escrevemos  $x*y$  ou  $x+y$  no lugar de  $\mu(x,y)$ . Isso não significa que os símbolos  $*$  e  $+$  devam necessariamente representar as conhecidas operações de multiplicação e adição sobre números. A convenção tradicionalmente aceita, mantida neste trabalho, é utilizar o símbolo  $+$  para designar operações *comutativas*, isto é, aquelas onde vale  $\mu(x,y) = \mu(y,x)$ .

Das muitas operações possíveis em  $X$ , existem algumas que conferem a um determinado elemento  $e$  de  $X$  a propriedade de ser neutro.

**Definição 2.** Chama-se *elemento neutro* ou *identidade* da operação  $*$  em  $X$  o elemento  $e \in X$  tal que  $e*x = x*e = x$ , para todo  $x \in X$ .

Resulta imediatamente da Definição 2 que o elemento neutro, quando existir, é único.

**Proposição 1.** Toda operação tem no máximo um elemento neutro.

*Demonstração.* Suponhamos que a operação  $*$  admita dois elementos neutros:  $e$  e  $e'$ . Como  $e$  é elemento neutro, ocorre  $e*e' = e'$ . Mas  $e'$  também é elemento neutro, donde  $e*e' = e$ . Assim resulta  $e' = e$ .  $\square$

Nas situações em que a operação tem elemento neutro, torna-se possível desenvolver a noção de elemento *inverso*.

**Definição 3.** Um elemento  $x \in X$  é *invertível* quando existe  $y \in X$  tal que  $x * y = y * x = e$ . Nesse caso,  $y$  é chamado *inverso* de  $x$ .

Quando ocorre apenas  $x * y = e$ , dizemos que  $y$  é *inverso à direita* de  $x$ , ou ainda que  $x$  é *inverso à esquerda* de  $y$ . Pela Definição 3,  $y$  é inverso de  $x$  se, e somente se for inverso à direita e à esquerda de  $x$ .

Nem sempre um inverso à direita é também inverso à esquerda. No entanto, se a operação for *associativa* em  $X$ , isto é,  $x * (y * z) = (x * y) * z$  quaisquer que sejam  $x, y, z \in X$ , podemos provar que os inversos à direita e à esquerda (caso existam) são iguais.

**Proposição 2.** Seja  $*$  uma operação associativa em  $X$ . Se  $x \in X$  tem inverso à direita  $y$  e inverso à esquerda  $z$  então  $y = z$  e  $x$  é invertível.

*Demonstração.* Segue da hipótese que  $x * y = e$  e  $z * x = e$ . Então,

$$\begin{aligned} z * (x * y) &= z * e = z, & e \\ (z * x) * y &= e * y = y. \end{aligned}$$

Como  $*$  é associativa, conclui-se

$$y = (z * x) * y = z * (x * y) = z.$$

Logo,  $x * y = y * x = e$  e, portanto,  $x$  é invertível. □

Estamos em condições de mostrar que não é permitido a um elemento invertível possuir dois inversos distintos.

**Proposição 3** (Unicidade do inverso). Seja  $*$  uma operação associativa em  $X$ . Se  $x \in X$  for invertível então seu inverso é único.

*Demonstração.* Suponha que existam  $y \in X$  e  $z \in X$ , ambos inversos de  $x$ . Por definição,  $y$  satisfaz  $x * y = e$  ( $y$  é inverso à direita de  $x$ ), e  $z$  satisfaz  $z * x = e$  ( $z$  é inverso à esquerda de  $x$ ). Com isso, segue imediatamente da Proposição 2 que  $y = z$ . □

**Exemplo 1.** A operação de adição no conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais tem como identidade o número 0. Em relação à adição, todo elemento de  $\mathbb{R}$  é invertível. Ainda em  $\mathbb{R}$ , o número 1 é a identidade da operação de multiplicação e todo número real não nulo tem inverso.

**Exemplo 2.** A operação de composição de funções reais, definida por  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ , tem como identidade a função  $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $i(x) = x$ . Assim, se existe  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \circ g = g \circ f = i$ , então  $f$  é invertível (é uma bijeção) e sua única inversa é a função  $g$ .

**Exemplo 3.** Considerando o conjunto  $I_3 = \{1, 2, 3\}$ , vamos representar cada uma das possíveis bijeções  $\pi : I_3 \rightarrow I_3$  por uma matriz de duas linhas: na primeira linha escrevemos os valores possíveis para  $x$  e na segunda linha os valores de  $\pi(x)$ .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A operação de composição de função sobre o conjunto das bijeções de  $I_3$  em  $I_3$ , representado por  $S_3 = \{I, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ , produz a seguinte tabela:

$\circ$	$I$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$
$I$	$I$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$
$\alpha$	$\alpha$	$I$	$\delta$	$\varepsilon$	$\beta$	$\gamma$
$\beta$	$\beta$	$\varepsilon$	$I$	$\delta$	$\gamma$	$\alpha$
$\gamma$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$	$I$	$\alpha$	$\beta$
$\delta$	$\delta$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\varepsilon$	$I$
$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha$	$I$	$\delta$

Não é difícil perceber que  $I$  é elemento neutro e que cada elemento de  $S_3$  tem inverso em  $S_3$ .

Destacamos, acima, propriedades válidas para uma infinidade de operações sem precisar exibir uma fórmula ou método de cálculo para elas. A condição de possuir inverso único, por exemplo, depende apenas de a operação ter identidade e ser associativa. Outras propriedades surgirão quando consideramos hipóteses adicionais para a operação e o conjunto onde está definida.

Do mesmo modo como ocorreu no percurso de axiomatização da álgebra, caminhamos para a noção geral de *estrutura algébrica*. No caso mais simples, uma *estrutura* é um par  $(X, \mu)$  formado por um conjunto não-vazio  $X$  e uma operação binária  $\mu : X \times X \rightarrow X$ . Acrescentando algumas poucas hipóteses sobre  $(X, \mu)$ , obtemos uma estrutura chamada de *grupo* que é particularmente importante para o desenvolvimento das teorias de homologia.

## 2.2 Grupo e Subgrupo

O primeiro a utilizar o termo *grupo*, em seu sentido técnico, foi o francês Évariste Galois (1811-1832) (EVES, 2004, p. 536). Embora possamos dizer que o estudo dos grupos tenha iniciado essencialmente com Galois, foram necessárias contribuições de muitos outros matemáticos do século XIX e XX para que a teoria chegasse à sua formulação atual. Ainda

hoje os grupos são um campo fecundo de pesquisa em matemática e outras áreas da ciência e tecnologia.

**Definição 4.** O par  $(G, *)$ , formado por um conjunto não vazio  $G$  e uma operação binária  $*$  sobre  $G$ , é chamado de *grupo* quando são satisfeitas as seguintes condições:

G1 (*associatividade*): para quaisquer  $x, y$  e  $z$  em  $G$ ,  $(x * y) * z = x * (y * z)$  ;

G2 (*identidade*): existe um (único) elemento  $e$  em  $G$  tal que, para todo  $x$  em  $G$ ,  $e * x = x * e = x$ ;

G3 (*existência de inversos*): para cada elemento  $x \in G$ , existe um (único) elemento  $x'$  em  $G$  tal que  $x * x' = x' * x = e$  .

Nessas condições, diz-se que  $*$  define uma estrutura de grupo sobre  $G$  ou que  $G$  é um grupo em relação à operação  $*$ .

Grosso modo, um grupo é uma estrutura algébrica com identidade, onde vale a propriedade associativa e cada elemento é invertível. Quando valer também a propriedade comutativa, o grupo é chamado *comutativo* ou *abeliano* - este último em homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829).

**Exemplo 4.**  $(\mathbb{R}, +)$  é um grupo abeliano infinito. O conjunto dos números reais não nulos,  $\mathbb{R}^*$ , com a operação de multiplicação também é um grupo abeliano. A soma usual de vetores define sobre o espaço  $\mathbb{R}^n$  uma estrutura de grupo abeliano.

**Exemplo 5.** O conjunto  $\{1, -1, i, -i\}$  com o produto usual de complexos é um grupo abeliano finito.

**Exemplo 6.** O conjunto  $S_3$ , definido no Exemplo 3, é um grupo com a operação de composição. Mais ainda, se  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$  então o conjunto  $S_n$  de todas as bijeções  $\pi : I_n \rightarrow I_n$  é um grupo finito, com a composição de função, chamado *grupo simétrico* (ROTMAN, 1973, p. 27-28). As bijeções sobre  $I_n$  são as *permutações* dos elementos de  $I_n$ . Nota-se que  $S_n$  tem  $n!$  elementos.

Há duas notações frequentemente utilizadas para grupos. A *notação aditiva* é geralmente empregada para destacar que a operação de grupo é comutativa e costuma ser bem sucedida na representação de grupos abelianos. Com ela,  $x * y$  é escrito como uma “soma”  $x + y$  e o inverso de um elemento  $x$  é denotado por  $-x$ . No caso geral, quando não há preocupação em distinguir grupos abelianos de não-abelianos, emprega-se a *notação multiplicativa* onde  $x * y$  é escrito como um “produto”  $xy$  e o inverso de  $x$  é representado por  $x^{-1}$ . Por simplicidade, é comum denotar um grupo  $(G, *)$  apenas por  $G$ .

**Proposição 4.** Se  $a$  e  $b$  são elementos de um grupo  $G$ , então a equação  $xa = b$  tem solução única em  $G$  dada por  $x = ba^{-1}$ . Analogamente, a única solução em  $G$  para equação  $ax = b$  é o elemento  $x = a^{-1}b$ .

*Demonstração.* Pela definição de grupo, se  $a, b \in G$  então  $a^{-1} \in G$  donde  $ba^{-1} \in G$ . Começaremos por mostrar que  $x = ba^{-1}$  é solução de  $xa = b$ . De fato, se  $x = ba^{-1}$  então,

$$xa = (ba^{-1})a = b(aa^{-1}) = be = b .$$

Para provar a unicidade, supomos que exista  $y \in G$  tal que  $ya = b$ . Então,

$$y = ye = y(aa^{-1}) = (ya)a^{-1} = ba^{-1} = x .$$

Logo,  $x = ba^{-1}$  é a única solução para  $xa = b$ .

A demonstração para o caso  $ax = b$  é análoga. □

As regras algébricas a seguir aplicam-se a elementos de qualquer grupo.

**Proposição 5.** Sejam  $x, y$  e  $z$  elementos de um grupo com identidade  $e$ . É sempre verdade que:

- i) se  $yx = zx$ , então  $y = z$ . Analogamente,  $xy = xz \implies y = z$  ;
- ii)  $xx = x \implies x = e$  .

*Demonstração.*

- i) Se  $yx = zx$  então, resolvendo a equação para  $y$ , de acordo com a Proposição 4, concluímos  $y = zxx^{-1} = ze = z$ . Analogamente,  $xy = xz \implies y = x^{-1}xz = ez = z$ .
- ii) Se  $xx = x$  então  $xx = xe$ . Do resultado anterior, cancelando  $x$  de ambos os lados, obtemos  $x = e$ . □

**Proposição 6.** Se  $x$  e  $y$  são elementos de um grupo, então:

- i)  $(x^{-1})^{-1} = x$  e
- ii)  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$  .

Para grupos abelianos, reescrevemos:

- i)  $-(-x) = x$  e
- ii)  $-(x+y) = (-y) + (-x) = (-x) + (-y)$  .

*Demonstração.*

- i) Uma vez que  $xx^{-1} = e$ , da Proposição 4 obtemos  $x = e(x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1}$ .
- ii) Como  $xy(xy)^{-1} = e$ , decorre novamente da Proposição 4 que  $y(xy)^{-1} = (x^{-1})e = x^{-1}$  e, finalmente,  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ . □

**Observação 1.** Do item ii) da proposição anterior, por associatividade, podemos estender a noção de inverso para um produto finito de elementos de um grupo  $G$ . Se  $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$  então:

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{-1} = x_n^{-1} \dots x_2^{-1} x_1^{-1}.$$

Considerando um grupo  $G$ , é conveniente investigar em que circunstâncias um subconjunto  $H$  de  $G$  ainda apresenta estrutura de grupo em relação à operação de  $G$ .

**Definição 5.** Um *subgrupo* do grupo  $G$  é um grupo  $(H, *)$  tal que  $H$  é um subconjunto não vazio de  $G$  e  $*$  é a operação do grupo  $G$  restrita a  $H$ . Escreveremos  $H \subset_{sub} G$ .

**Proposição 7.** Se  $e$  é a identidade do grupo  $G$ , então  $e$  também é a identidade de qualquer subgrupo de  $G$ .

*Demonstração.* Se  $H \subset_{sub} G$ , então, por definição,  $H \neq \emptyset$ . Seja  $a \in H$ . Como  $H$  tem estrutura de grupo, existe  $a^{-1} \in H$  tal que  $aa^{-1} = e_H \in H$  ( $e_H$  é a identidade em  $H$ ). Mas  $H \subset G$  implica que  $a \in G$ , onde também vale  $aa^{-1} = e$ . Desse modo,  $e_H = e$ .  $\square$

**Observação 2.** Uma vez que  $G \subseteq G$ , todo grupo pode ser considerado um subgrupo de si próprio. Também o subconjunto  $\{e\} \subset G$ , cujo único elemento é identidade de  $G$ , tem estrutura de grupo com respeito à operação em  $G$ . De fato, a igualdade  $ee = e$ , válida em  $\{e\}$ , implica que  $e = e^{-1} \in \{e\}$  e também que a operação de  $G$  é fechada em  $\{e\}$ . Os grupos  $G$  e  $\{e\}$  são chamados *subgrupos triviais* do grupo  $G$ .

O resultado a seguir fornece um critério para decidir quando um subconjunto  $H$  de  $G$  é subgrupo.

**Proposição 8.** Seja  $G$  um grupo e  $H$  um subconjunto não vazio de  $G$ . Então,  $H$  é subgrupo de  $G$  se, e somente se  $ab^{-1} \in H$  para quaisquer  $a, b \in H$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Supomos primeiro que  $H$  é subgrupo. Sejam  $a, b \in H \neq \emptyset$ . Logo, o inverso  $b^{-1}$  também é elemento de  $H$  e como a operação é fechada em  $H$ , concluímos  $ab^{-1} \in H$ .

( $\Leftarrow$ ) Supomos, agora,  $ab^{-1} \in H$  para quaisquer  $a, b \in H$ . Então:

- por hipótese, se  $a \in H$  então  $aa^{-1} \in H$ . Mas  $a$  também é elemento de  $G$ , onde vale  $aa^{-1} = e$ . Logo  $e \in H$ , donde concluímos que  $H$  contém a identidade;
- como  $e \in H$ , tomando qualquer  $a \in H$  devemos ter  $ea^{-1} \in H$ . Sabemos ainda que  $ea^{-1} = a^{-1}$  em  $G$ . Então  $a^{-1} \in H$  o que significa dizer que  $H$  contém os inversos dos seus elementos;
- falta mostrar que a restrição da operação de  $G$  ao conjunto  $H$  ainda é uma operação em  $H$ , ou seja, se  $a, b \in H$  então  $ab \in H$ . Tomando  $a, b \in H$ , acabamos de ver que  $b^{-1} \in H$ . Por

hipótese devemos ter  $a(b^{-1})^{-1} \in H$ . Mas  $a(b^{-1})^{-1} = ab$  (Proposição 6 (i)). Isso mostra que  $ab \in H$ . Observamos, por fim, que a associatividade da operação restrita a  $H$  está garantida, pois já era associativa em  $G$ .  $\square$

**Observação 3.** Em notação aditiva, a condição  $ab^{-1} \in H$  escreve-se como  $a + (-b) \in H$  ou ainda  $a - b \in H$ .

**Exemplo 7.** Considerando o grupo  $(\mathbb{R}, +)$  e o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ , sabemos que  $\mathbb{Z}$  é não vazio e que a diferença de dois inteiros é também um inteiro. Então  $(\mathbb{Z}, +)$  é um subgrupo de  $(\mathbb{R}, +)$ . O conjunto dos números inteiros pares é um subgrupo, com respeito à adição, do grupo  $\mathbb{Z}$ . Ainda em relação à adição,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  são todos subgrupos de  $\mathbb{C}$ .

**Exemplo 8.** Para o grupo  $(\mathbb{R}, +)$ , consideramos o subconjunto  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  dos números naturais. Como a diferença de dois naturais não é necessariamente um número natural, então  $(\mathbb{N}, +)$  não é um subgrupo de  $(\mathbb{R}, +)$ .

**Exemplo 9.** O subconjunto  $\{I, \alpha\} \subset S_3$ , é um subgrupo do grupo simétrico  $S_3$ .

## 2.3 Homomorfismo de Grupos

**Definição 6.** Sejam  $(G, *)$  e  $(H, \cdot)$  grupos. A função  $\phi : G \rightarrow H$  é um *homomorfismo* de  $G$  em  $H$  se, e somente se

$$\phi(g_1 * g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Uma forma de descrever a noção de homomorfismo é através do diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{*} & G \\ \phi \times \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ H \times H & \xrightarrow{\cdot} & H \end{array}$$

Esse tipo de diagrama é chamado comutativo pois pode ser percorrido por dois caminhos diferentes sem alterar o resultado de chegada.

Quando existe um homomorfismo bijetivo  $\phi : G \rightarrow H$ , ele é chamado *isomorfismo* e os grupos  $(G, *)$  e  $(H, \cdot)$  são ditos *isomorfos*. Utiliza-se a notação  $G \simeq H$  para indicar que  $G$  é isomorfo a  $H$ .

**Exemplo 10.** A função logaritmo  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\phi(x) = \log(x)$  é uma bijeção. Como vale  $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ , os grupos  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  e  $(\mathbb{R}, +)$  são isomorfos.

Veremos a seguir que um homomorfismo leva a identidade do grupo de origem na identidade do grupo de destino e faz a imagem do inverso de um elemento corresponder ao inverso da imagem desse elemento.

**Proposição 9.** Se  $(G, *)$  e  $(H, \cdot)$  são grupos com identidade  $e_G$  e  $e_H$ , e  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo, então:

i)  $\phi(e_G) = e_H$ .

ii)  $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1} \quad \forall g \in G$ .

*Demonstração.*

i) Como  $\phi$  é um homomorfismo, vale  $\phi(e_G) \cdot \phi(e_H) = \phi(e_G * e_G) = \phi(e_G)$ . Pela lei do cancelamento (Proposição 5 ii), concluímos  $\phi(e_G) = e_H$ .

ii) Seja  $g \in G$ . Primeiro observamos que  $\phi(g) \cdot \phi(g^{-1}) = \phi(g * g^{-1}) = \phi(e_G) = e_H \in H$ . Como  $H$  é grupo, existe  $\phi(g)^{-1} \in H$ , inverso de  $\phi(g)$ . Então,

$$\begin{aligned} \phi(g)^{-1} \cdot \phi(g) \cdot \phi(g^{-1}) &= \phi(g)^{-1} \cdot e_H \implies \\ e_H \cdot \phi(g^{-1}) &= \phi(g)^{-1} \implies \\ \phi(g^{-1}) &= \phi(g)^{-1}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 11.** Para os grupos  $(\mathbb{Z}, +)$  e  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ , a função  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ , definida por  $\phi(n) = i^n$ , é um homomorfismo. O inteiro 0, identidade de  $(\mathbb{Z}, +)$ , é transformado na identidade de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ , o complexo 1. Além disso, o simétrico de  $n$  é levado no inverso do complexo  $i^n$ .

**Definição 7.** Seja  $\phi : G \rightarrow H$  um homomorfismo. O *núcleo* de  $\phi$  é o conjunto:

$$\ker(\phi) = \{g \in G ; \phi(g) = e_H\},$$

e a *imagem* de  $\phi$  é o conjunto:

$$\text{Im}(\phi) = \{\phi(g) \in H ; g \in G\}.$$

A Figura 1, adaptada de (FERNANDES; RICO, 2014, p. 22), ilustra o conceito de núcleo e imagem de um homomorfismo.

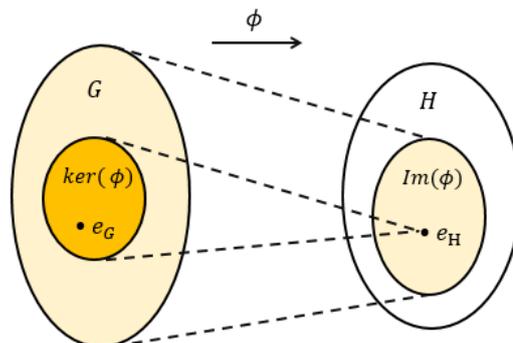


Figura 1 – Núcleo e imagem de um homomorfismo  $\phi : G \rightarrow H$ .

**Exemplo 12.** O núcleo do homomorfismo  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$  dado no Exemplo 11 é o conjunto dos números inteiros múltiplos de 4 e a imagem é o conjunto  $Im(\phi) = \{1, -1, i, -i\}$ .

O núcleo e a imagem de um homomorfismo preservam a estrutura do grupo que os contém. São, portanto, subgrupos.

**Proposição 10.** Para um homomorfismo  $\phi : G \rightarrow H$ ,

- i)  $ker(\phi)$  é subgrupo de  $(G, *)$  e
- ii)  $Im(\phi)$  é subgrupo de  $(H, \cdot)$ .

*Demonstração.* Utilizaremos o critério enunciado na Proposição 8 para verificar (i) e (ii).

- i)  $ker(\phi) \neq \emptyset$ . De fato, já mostramos que  $\phi(e_G) = e_H$ . Logo,  $e_G \in ker(\phi)$ .

Sejam  $n_1, n_2 \in ker(\phi) \subset G$ . Então

$$\begin{aligned} \phi(n_1 * n_2^{-1}) &= \phi(n_1) \cdot \phi(n_2^{-1}) \\ &= e_H \cdot \phi(n_2)^{-1} \\ &= e_H \cdot (e_H)^{-1} \implies \\ \phi(n_1 * n_2^{-1}) &= e_H. \end{aligned}$$

Isso mostra que  $n_1 * n_2^{-1} \in ker(\phi)$ . Logo,  $ker(\phi)$  é subgrupo.

- ii) Por definição,  $Im(\phi) \subset H$ . Além disso,  $Im(\phi) \neq \emptyset$  uma vez que  $\phi(e_G) = e_H \implies e_H \in Im(\phi)$ . Sejam  $h_1, h_2 \in Im(\phi)$ . Então, existem  $g_1, g_2 \in G$  tais que  $h_1 = \phi(g_1)$  e  $h_2 = \phi(g_2)$ .

$$\begin{aligned} h_1 \cdot h_2^{-1} &= \phi(g_1) \cdot \phi(g_2)^{-1} \\ &= \phi(g_1) \cdot \phi(g_2^{-1}) \\ &= \phi(g_1 * g_2^{-1}) \in Im(\phi) \\ \therefore h_1 \cdot h_2^{-1} &\in Im(\phi). \end{aligned}$$

Logo  $Im(\phi)$  é subgrupo. □

Definimos a seguir um tipo especial de subgrupo.

**Definição 8.** Seja  $H$  um subgrupo de  $G$ . Então  $H$  é um *subgrupo normal* de  $G$  se, e somente se, para qualquer  $h \in H$  e  $g \in G$ ,

$$ghg^{-1} \in H.$$

**Observação 4.** Se  $G$  é um grupo abeliano, todos os seus subgrupos são normais. Com efeito, para um subgrupo  $H$  qualquer e elementos  $h \in H$  e  $g \in G$ , fica claro pela comutatividade da operação de grupo que  $ghg^{-1} = hgg^{-1} = h \in H$ .

É interessante observar que o núcleo de um homomorfismo não é um subgrupo arbitrário, mas satisfaz a condição de ser normal.

**Teorema 1.** Se  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo então  $\ker(\phi)$  é subgrupo normal de  $G$ .

*Demonstração.* Sejam  $g \in G$  e  $n \in \ker(\phi)$ . Então

$$\begin{aligned}\phi(gng^{-1}) &= \phi(g)\phi(n)\phi(g^{-1}) \\ &= \phi(g)\phi(g^{-1}) \\ &= \phi(gg^{-1}) \\ &= \phi(e_G) \implies \\ \phi(gng^{-1}) &= e_H.\end{aligned}$$

Isso mostra que  $gng^{-1} \in \ker(\phi)$ . Logo,  $\ker(\phi)$  é subgrupo normal de  $G$ . □

O teorema seguinte mostra que a injetividade do homomorfismo depende apenas do seu núcleo.

**Teorema 2.** Seja  $\phi : G \rightarrow H$  um homomorfismo. Então,

- i)  $\phi(g_1) = \phi(g_2)$  se, e somente se  $g_1g_2^{-1} \in \ker(\phi)$ ,
- ii)  $\phi$  é injetiva se, e somente se  $\ker(\phi) = \{e_G\}$ .

*Demonstração.*

- i) Sejam  $g_1, g_2 \in G$ . Então

$$\begin{aligned}\phi(g_1) = \phi(g_2) &\iff \\ \phi(g_1)\phi(g_2)^{-1} = \phi(g_2)\phi(g_2)^{-1} &\iff \\ \phi(g_1)\phi(g_2^{-1}) = e_H &\iff \\ \phi(g_1g_2^{-1}) = e_H &\iff \\ g_1g_2^{-1} \in \ker(\phi).\end{aligned}$$

- ii) ( $\implies$ ) Já sabemos que  $\phi(e_G) = e_H$ . Por isso está claro que  $e_G \in \ker(\phi)$ , donde  $\{e_G\} \subset \ker(\phi)$ . Seja  $n \in \ker(\phi)$ . Então  $\phi(n) = e_H = \phi(e_G)$ . Da injetividade de  $\phi$  devemos ter  $n = e_G$ . Logo  $\ker(\phi) \subset \{e_G\}$ . Portanto  $\ker(\phi) = \{e_G\}$  sempre que  $\phi$  for injetiva.

( $\impliedby$ ) Sejam  $g_1, g_2 \in G$  tais que  $\phi(g_1) = \phi(g_2)$ . De i) sabemos que  $g_1g_2^{-1} \in \ker(\phi)$ . Como estamos supondo  $\ker(\phi) = \{e_G\}$ , concluímos  $g_1g_2^{-1} = e_G$ , donde  $g_1 = g_2$ . Logo,  $\phi$  é injetiva. □

## 2.4 Grupo Cíclico

**Definição 9.** Seja  $x$  elemento de um grupo e  $n$  um número inteiro positivo. A  $n$ -ésima potência de  $x$ , denotada por  $x^n$ , é definida recursivamente da seguinte maneira:

- $x^0 = e$  ;
- $x^n = x^{n-1}x$  ;
- $x^{-n} = (x^{-1})^n$  .

Em notação aditiva, escrevemos  $nx$  no lugar de  $x^n$  e falamos em *múltiplo* de  $x$ .

A definição anterior esclarece que se  $x$  é elemento de um grupo, então a  $n$ -ésima potência de  $x$  deve ser tomada de modo usual, como aplicações sucessivas da operação de grupo sobre o mesmo elemento  $x$ . Em notação multiplicativa,  $x^n$  é o produto de  $n$  fatores iguais a  $x$  quando  $n > 0$ ,

$$x^n = xx \dots x ,$$

e  $n$  fatores iguais a  $x^{-1}$  quando  $n < 0$ . Em notação aditiva,  $nx$  corresponde à soma de  $n$  parcelas iguais a  $x$  para o caso  $n > 0$ ,

$$nx = x + x + \dots + x ,$$

e  $n$  parcelas iguais a  $(-x)$  para  $n < 0$ .

É do nosso interesse, nesse momento, demonstrar as regras de potenciação. Para tanto, precisamos de um resultado anterior.

**Proposição 11.** Se  $x$  é elemento de um grupo e  $n$  é um número inteiro não negativo, então:

- i)  $x^n x = x x^n$  ;
- ii)  $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$ .

*Demonstração.*

- i) Provaremos por indução. Para  $n = 0$ , dado que  $x^0 = e$ , vale  $x^0 x = x = x x^0$ . Supondo ser verdade que  $x^{k-1} x = x x^{k-1}$  para algum  $n = k - 1 \geq 0$ , então, para  $n = k$  obtemos  $x^k x = x^{k-1} x x = x x^{k-1} x = x x^k$ . Logo, mostramos a validade da propriedade para qualquer inteiro  $n \geq 0$ .
- ii) Se  $n = 0$ , então  $(x^{-1})^0 = e = e^{-1} = (x^0)^{-1}$ , como desejado. Por indução, supondo  $(x^{-1})^{k-1} = (x^{k-1})^{-1}$  para algum  $n = k - 1 \geq 0$ , mostraremos que a propriedade ainda é

válida para  $n = k$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 (x^{-1})^k &= (x^{-1})^{k-1}(x^{-1}) && \text{(definição)} \\
 &= (x^{k-1})^{-1}x^{-1} && \text{(hipótese de indução)} \\
 &= (xx^{k-1})^{-1} && \text{(propriedade dos inversos, Proposição 6)} \\
 &= (x^{k-1}x)^{-1} && \text{(item anterior)} \\
 &= (x^k)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade  $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$  é verdadeira para todo inteiro  $n \geq 0$ .  $\square$

**Observação 5.** A Definição 9 e o item ii) da Proposição 11 permitem-nos escrever, em notação aditiva, para  $n$  inteiro e positivo, que

$$(-n)x = n(-x) = -(nx).$$

De modo geral, as regras habituais para expoentes inteiros de potências de um mesmo elemento são válidas em qualquer grupo.

**Proposição 12.** Se  $x$  é elemento de um grupo e  $m$  e  $n$  são números inteiros, então:

- i)  $x^m x^n = x^{m+n}$  e
- ii)  $(x^m)^n = x^{mn}$ .

*Demonstração.*

- i) Fixado  $n = 1$ , começaremos mostrando que  $x^m x^1 = x^{m+1}$  para todo inteiro  $m$ . De fato, se  $m = 0$  então  $x^0 x^1 = ex = x^1 = x^{0+1}$ . Para  $m > 0$ ,  $x^m x^1 = x^m x = x^{m+1}$  por definição e  $x^{-m} x^1 = (x^{-1})^m x = (x^{-1})^{m-1} (x^{-1}) x = (x^{-1})^{m-1} = x^{-m+1}$ .

Provaremos agora, por indução, o caso  $n > 0$ , com  $m \in \mathbb{Z}$ . Já mostramos ser verdade quando  $n = 1$ . Supondo que para algum inteiro  $k > 0$  vale  $x^m x^k = x^{m+k}$ , então, para  $n = k + 1$  concluímos  $x^m x^{k+1} = x^m x^k x = x^{m+k} x = x^{m+(k+1)}$ .

Finalmente, ainda com  $n > 0$ , resta-nos mostrar  $x^m x^{-n} = x^{m-n}$ . De fato,  $x^m = x^{(m-n)+n}$  e, do que acabamos de provar, podemos escrever  $x^m = x^{m-n} x^n$ . Da Proposição 11 e definição, sabemos que  $(x^n)^{-1} = x^{-n}$ . Então, operando ambos os lados por  $x^{-n}$  à direita, concluímos  $x^m x^{-n} = x^{m-n} x^n x^{-n} = x^{m-n} x^n (x^n)^{-1} = x^{m-n}$ , como desejado.

- ii) Sabemos que  $(x^m)^1 = x^m = x^{m \cdot 1}$ . Assumindo que  $(x^m)^k = x^{mk}$  para algum  $k > 0$  e pelo que provamos no item anterior,  $(x^m)^{k+1} = (x^m)^k (x^m) = x^{mk} x^m = x^{mk+m} = x^{m(k+1)}$ . Assim mostramos por indução (sobre  $n$ ) que para qualquer  $m \in \mathbb{Z}$  e inteiros  $n > 0$  vale a propriedade  $(x^m)^n = x^{mn}$ .

Notamos que se  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n = 0$ , então  $x^{mn} = e = (x^m)^n$ . Para  $m, n > 0$ , temos pela Proposição 11 e do que já provamos acima que  $(x^m)^{-n} = ((x^m)^n)^{-1} = (x^{mn})^{-1} = x^{-mn}$ .

Resta provar o caso  $(x^{-m})^{-n} = x^{mn}$ , com  $m, n > 0$ . De fato,  $(x^{-m})^{-n} = ((x^{-1})^m)^{-n} = (((x^{-1})^m)^{-1})^n = (((x^{-1})^{-1})^m)^n = (x^m)^n = x^{mn}$ .  $\square$

**Observação 6.** Em notação aditiva, as regras (i) e (ii) da Proposição 12 ficam:

$$\begin{aligned} mx + nx &= (m + n)x \text{ e} \\ n(mx) &= (nm)x . \end{aligned}$$

O conjunto de todas as potências inteiras de um elemento  $x \in G$  forma um subgrupo do grupo  $G$ , como mostra a proposição seguinte.

**Proposição 13.** Seja  $G$  um grupo e  $x \in G$ . Então, o conjunto

$$\langle x \rangle = \{x^n ; n \in \mathbb{Z}\}$$

é um subgrupo de  $G$ . Efetivamente,  $\langle x \rangle$  é um grupo abeliano.

*Demonstração.* O conjunto  $\langle x \rangle$  é não vazio. De fato,  $e = x^0 \in \langle x \rangle$ . Sejam  $a, b \in \langle x \rangle$ . Então existem inteiros  $m$  e  $n$  tais que  $a = x^m$  e  $b = x^n$ . Assim,

$$\begin{aligned} ab^{-1} &= x^m(x^n)^{-1} \\ &= x^m x^{-n} && \text{(Proposição 11 ii)} \\ &= x^{m-n} . && \text{(Proposição 12 i)} \end{aligned}$$

Uma vez que  $(m - n) \in \mathbb{Z}$ , temos  $ab^{-1} \in \langle x \rangle$ . Portanto, pela Proposição 8,  $\langle x \rangle$  é subgrupo de  $G$ . Logo,  $\langle x \rangle$  é, ele próprio, um grupo (com a operação induzida de  $G$ ). E já que vale  $x^m x^n = x^{m+n} = x^{n+m} = x^n x^m$ , concluímos que  $\langle x \rangle$  é abeliano.  $\square$

**Observação 7.** Em notação aditiva,  $\langle x \rangle = \{nx ; n \in \mathbb{Z}\}$  representa o conjunto dos múltiplos de  $x$ . Se  $m$  é um elemento do grupo abeliano  $(\mathbb{Z}, +)$ , costuma-se escrever o conjunto dos múltiplos de  $m$  como  $m\mathbb{Z} = \{nm ; n \in \mathbb{Z}\}$  ao invés de  $\langle m \rangle$ . Da proposição anterior observamos que para todo inteiro  $m$ ,  $(m\mathbb{Z}, +)$  é sempre um subgrupo de  $(\mathbb{Z}, +)$ . De fato, esses são os únicos subgrupos de  $(\mathbb{Z}, +)$  (GARCIA, 2015, p. 144).

O subgrupo  $\langle x \rangle$  é chamado de *subgrupo gerado* pelo elemento  $x$ . Quando existe  $x \in G$  tal que  $G = \langle x \rangle$ , dizemos que  $G$  é um *grupo cíclico* e que  $x$  é o elemento *gerador* de  $G$ .

**Exemplo 13.**  $(\mathbb{Z}, +)$  é um grupo cíclico gerado por 1 ou por  $-1$ . Por simplicidade, escrevemos apenas  $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ . É claro que vale também  $\mathbb{Z} = \langle -1 \rangle$ .

**Exemplo 14.** A multiplicação de racionais define sobre o conjunto  $A = \{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$  uma estrutura de grupo cíclico infinito. De fato,  $(A, \cdot) = \langle 2 \rangle$ . Além disso,  $(A, \cdot)$  é claramente um subgrupo do grupo  $(\mathbb{Q}, \cdot)$ .

## 2.5 Classe de Equivalência e Conjunto Quociente

**Definição 10.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios. Chama-se *relação* de  $A$  em  $B$  todo subconjunto  $R$  de  $A \times B$ . Para indicar que  $a \in A$  e  $b \in B$  estão relacionados segundo  $R$  costuma-se escrever  $aRb$  no lugar de  $(a, b) \in R$ .

**Definição 11.** Uma relação  $R \subset A \times A$  é uma *relação de equivalência* sobre  $A$  se, e somente se

- i) para todo  $x \in A$ ,  $xRx$  (**reflexiva**),
- ii) tomados  $x, y \in A$ ,  $xRy \implies yRx$ . (**simétrica**),
- iii) para  $x, y, z \in A$ ,  $xRy$  e  $yRz \implies xRz$ . (**transitiva**).

**Definição 12.** Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre  $A$ . Dado  $a \in A$ , o conjunto  $\bar{a}$  de todos os elementos de  $A$  que estão relacionados com  $a$  segundo  $R$  é chamado a *classe de equivalência de  $a$  módulo  $R$* .

$$\bar{a} = \{x \in A ; xRa\} .$$

A seguir mostramos que qualquer elemento de uma classe de equivalência é um representante dessa mesma classe.

**Proposição 14.** Sejam  $R$  uma relação de equivalência em  $A$  e  $\bar{a} \subset A$  uma classe de equivalência. Para qualquer  $b \in \bar{a}$  tem-se que  $\bar{a} = \bar{b}$ .

*Demonstração.* Da hipótese  $b \in \bar{a}$ , sabemos que  $bRa$ .

Tomemos  $x \in \bar{b}$ . Então  $xRb$  e como  $bRa$  concluímos por transitividade  $xRa$ . Logo,  $x \in \bar{a} \implies \bar{b} \subset \bar{a}$ . Analogamente,  $x \in \bar{a} \implies xRa$  e como  $bRa = aRb$  (pois  $R$  é simétrica) obtemos  $xRb \implies x \in \bar{b}$ . Assim,  $\bar{a} \subset \bar{b}$ , o que prova  $\bar{a} = \bar{b}$ .  $\square$

**Observação 8.** A recíproca da proposição anterior nos permite concluir que se duas classes de equivalência são diferentes, então elas não podem ter elemento em comum. Com efeito, se tiverem algum elemento em comum elas serão iguais.

**Definição 13.** Dado um conjunto não vazio  $A$  e uma relação de equivalência  $R$  sobre  $A$ , chama-se *conjunto quociente* de  $A$  por  $R$  à coleção de todas as classes de equivalência módulo  $R$ . Denotaremos esse conjunto por  $A/R$  de modo que:

$$A/R = \{\bar{a}, a \in A\} .$$

**Definição 14.** Seja  $A$  um conjunto não vazio. Uma coleção  $\mathcal{P}$  de subconjuntos não vazios de  $A$  é dito uma *partição* de  $A$  se, e somente se

- i)  $X, Y \in \mathcal{P} \implies X = Y$  ou  $X \cap Y = \emptyset$  e

$$\text{ii) } \bigcup_{X_i \in \mathcal{P}} X_i = A .$$

**Proposição 15.** Se  $R$  é uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ , então  $A/R$  é uma partição de  $A$ .

*Demonstração.* Já discutimos que duas classes de equivalência  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  em  $A/R$ , ou são iguais ou não possuem elementos em comum (Observação 8). Também sabemos que as classes de equivalência em  $A/R$  são subconjuntos de  $A$ , donde  $\bigcup_{\bar{x} \in A/R} \bar{x} \subset A$ . Resta-nos verificar que todo elemento de  $A$  faz parte de alguma classe de equivalência. Com efeito,  $\forall x \in A$  sabemos que  $xRx$ , pois  $R$  é reflexiva. Então  $x \in \bar{x}$ . Logo, temos  $A \subset \bigcup_{\bar{x} \in A/R} \bar{x}$ . Com isso, mostramos que  $A/R$  satisfaz as duas condições da Definição 14 e por isso é uma partição de  $A$ .  $\square$

## 2.6 Classe Lateral

Para um grupo  $G$  e um subgrupo  $H$  de  $G$ , definimos a *relação de congruência módulo  $H$* ,

$$R = \{(x, y) \in G \times G ; x^{-1}y \in H\} ,$$

e escrevemos  $x \equiv y \pmod{H}$  para indicar  $(x, y) \in R$ . Ou seja:

$$x \equiv y \pmod{H} \iff x^{-1}y \in H . \quad (2.1)$$

A relação (2.1) é uma *relação de equivalência*.

*Demonstração.*

- **(é reflexiva)** Se  $e$  é a identidade do grupo  $G$ , já sabemos que  $e \in H \subset_{\text{sub}} G$  (Proposição 7). Então, para  $x \in G$  temos  $x^{-1}x = e \in H$ . Logo  $x \equiv x \pmod{H}$ .
- **(é simétrica)** Sejam  $x, y \in G$  tais que  $x \equiv y \pmod{H}$ . Então,  $x^{-1}y \in H$ . Como  $H$  tem estrutura de grupo, o inverso  $(x^{-1}y)^{-1}$  é também elemento de  $H$ . Logo

$$(x^{-1}y)^{-1} = (y^{-1})(x^{-1})^{-1} = y^{-1}x \in H \iff y \equiv x \pmod{H} .$$

- **(é transitiva)** Sejam  $x, y, z \in G$  com  $x \equiv y \pmod{H}$  e  $y \equiv z \pmod{H}$ . Então,  $x^{-1}y \in H$  e  $y^{-1}z \in H$ . Logo,

$$x^{-1}yy^{-1}z = x^{-1}z \in H \iff x \equiv z \pmod{H} .$$

$\square$

Segundo a relação (2.1), para cada  $g \in G$ , definimos a classe de equivalência  $\bar{g}$ , como sendo o conjunto

$$\bar{g} = \{x \in G ; g^{-1}x \in H\} .$$

Observamos que todos os elementos  $x \in \bar{g}$  são da forma  $x = gh$ , para qualquer  $h \in H$ . De fato, denotando por  $gH$  o conjunto  $\{x \in G ; x = gh, h \in H\}$ , mostraremos que  $\bar{g} = gH$ . Se  $x \in \bar{g}$  então existe  $h \in H$  tal que  $g^{-1}x = h$ . Operando ambos os lados por  $g$  à esquerda, chegamos que  $x = gh$ . Logo,  $\bar{g} \subset gH$ . Mais ainda, se  $x \in gH$ , então  $x = gh$ , donde  $g^{-1}x = h$ , qualquer que seja  $h \in H$ . Logo,  $x \in \bar{g}$ , e, portanto,  $gH \subset \bar{g}$ . Assim provamos  $\bar{g} = gH$ .

**Definição 15.** Seja  $H$  um subgrupo do grupo  $G$ . Para cada  $g \in G$ , o conjunto  $gH = \{gh ; h \in H\}$ , chamado *classe lateral esquerda* de  $H$ , corresponde à coleção dos elementos  $x \in G$  tais que  $g^{-1}x \in H$ .

**Observação 9.** Em notação aditiva, representamos  $gH$  por  $g + H$ . Nesse caso, escrevemos  $\bar{g} = g + H = \{g + h ; h \in H\}$ .

O conjunto  $G/H = \{gH ; g \in G\}$  de todas as classes laterais esquerdas de  $H$  é um conjunto quociente. Logo  $G/H$  define uma partição sobre  $G$  (Proposição 15).

**Exemplo 15.** Considerando o grupo simétrico  $S_3 = \{I, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ , Exemplo 6, e o subgrupo  $H = \{I, \alpha\}$ , Exemplo 9, observamos que:

- A classe de equivalência de  $I$  é o conjunto  $\bar{I} = IH = H = \{I, \alpha\}$ . Logo,  $\bar{I} = \bar{\alpha}$ , ou seja,  $H = \alpha H$ .
- A classe de equivalência de  $\beta$  é o conjunto  $\bar{\beta} = \beta H = \{\beta I, \beta \alpha\} = \{\beta, \varepsilon\}$ . Então  $\bar{\beta} = \bar{\varepsilon}$  ou ainda  $\beta H = \varepsilon H$ .
- A classe  $\bar{\gamma}$  é o conjunto  $\gamma H = \{\gamma I, \gamma \alpha\} = \{\gamma, \delta\}$ . Isso quer dizer que  $\bar{\gamma} = \bar{\delta}$  ou ainda  $\gamma H = \delta H$ .

Assim, o quociente  $S_3/H$  tem três classes laterais esquerdas, cada uma delas com dois elementos. Escrevemos  $S_3/H = \{\bar{I}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\} = \{H, \beta H, \gamma H\}$ . (FERNANDES; RICOU, 2014, p.187)

**Exemplo 16.** Para o grupo  $(\mathbb{Z}, +)$ , consideremos o subgrupo cíclico  $\langle 3 \rangle = 3\mathbb{Z} = \{3n ; n \in \mathbb{Z}\}$ .

- A classe de equivalência de 0 é o conjunto  $\bar{0} = 0 + 3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z} = \{\dots, -3, 0, 3, \dots\}$ . Desse modo, todo elemento de  $3\mathbb{Z}$  é um representante para a classe  $\bar{0}$ .
- A classe de equivalência de 1 é o conjunto  $\bar{1} = 1 + 3\mathbb{Z} = \{\dots, -2, 1, 4, \dots\}$ .
- A classe de equivalência de 2 é o conjunto  $\bar{2} = 2 + 3\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 2, 5, \dots\}$ .

Assim, o quociente  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  é o conjunto das classes laterais esquerdas  $\{3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}\}$ . Por simplicidade, podemos escrever  $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$  no lugar de  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

No lugar da relação (2.1), é igualmente possível considerar a relação

$$R' = \{(x, y) \in G \times G ; xy^{-1} \in H\} ,$$

segundo a qual,  $x \equiv' y \pmod{H}$  indica que  $(x, y) \in R'$ . Ou seja,

$$x \equiv' y \pmod{H} \iff xy^{-1} \in H. \quad (2.2)$$

Não é difícil mostrar que essa também é uma relação de equivalência. A demonstração é análoga à adotada para a relação (2.1).

A classe de equivalência de um elemento  $g \in G$ , segundo a relação (2.2), é agora chamada *classe lateral direita* e será indicada por  $Hg$ , uma vez que seus elementos são obtidos pela operação de cada  $h$  em  $H$  por  $g$  à direita.

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \{x \in G ; xg^{-1} \in H\} \\ &= \{x \in G ; xg^{-1} = h, h \in H\} \\ &= \{x \in G ; x = hg, h \in H\} \\ &= \{hg ; h \in H\} = Hg. \end{aligned}$$

**Definição 16.** Seja  $H$  um subgrupo do grupo  $G$ . Para cada  $g \in G$ , o conjunto  $Hg = \{hg ; h \in H\}$  é chamado uma *classe lateral direita* de  $H$  e corresponde à coleção dos elementos  $x \in G$  tais que  $xg^{-1} \in H$ .

O conjunto  $\{Hg ; g \in G\}$ , de todas as classes laterais direitas, é uma partição do grupo  $G$ . No entanto, tal particionamento não é, em geral, igual àquele gerado pelas classes laterais esquerdas.

**Exemplo 17.** Para o grupo simétrico  $S_3 = \{I, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$  e o subgrupo  $H = \{I, \alpha\}$ , as classes laterais *direitas* são:

- $\bar{I} = HI = \{I, \alpha\}$ . Então  $\bar{I} = \bar{\alpha}$ .
- $\bar{\beta} = H\beta = \{I\beta, \alpha\beta\} = \{\beta, \delta\}$ . Então  $\bar{\beta} = \bar{\delta}$ .
- $\bar{\gamma} = H\gamma = \{I\gamma, \alpha\gamma\} = \{\gamma, \varepsilon\}$ . Então  $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$ .

Para este exemplo, embora ainda tenhamos três classes laterais direitas, cada uma com dois elementos, ocorre  $\beta H \neq H\beta$  e  $\gamma H \neq H\gamma$ . Veja Exemplo 15.

Convém investigar em que situação as classes laterais esquerda e direita são conjuntos iguais, e, portanto, definem a mesma partição em  $G$ . Veremos que isso ocorre quando  $H$  for um subgrupo normal de  $G$ .

**Proposição 16.**  $H \subset G$  é subgrupo normal de  $G$  se, e somente se,  $Hg = gH$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Dado  $g \in G$ , tomamos  $x \in gH$ . Então  $x = gh$ ,  $h \in H$ . Como  $H$  é subgrupo normal,  $ghg^{-1} = xg^{-1} \in H$ . Assim,  $x \in Hg$ , donde  $gH \subset Hg$ . De modo semelhante, para  $x \in Hg$  temos  $x = hg$ . Da normalidade do subgrupo  $H$  segue que  $g^{-1}x = g^{-1}hg = (g^{-1})h(g^{-1})^{-1} \in H$ . Logo  $x \in gH$ , donde  $Hg \subset gH$ . Assim provamos  $Hg = gH$ .

( $\Leftarrow$ ) Para  $g \in G$ , supomos  $Hg = gH$ . Então  $x \in Hg = gH$  significa que  $x = hg = gn$  para  $h, n \in H$ . Então  $h = gng^{-1} \in H$ . Logo  $H$  é subgrupo normal de  $G$ .  $\square$

**Observação 10.** Se  $G$  é um grupo abeliano e  $H$  é um subgrupo de  $G$  então para cada  $g \in G$  temos  $Hg = gH$ . Com efeito, já discutimos na Observação 4 que todo subgrupo de um grupo abeliano é normal. Em notação aditiva, escrevemos  $H + g$  no lugar de  $Hg$ . Então  $H + g = g + H$ .

Quando  $H$  é um subgrupo normal de  $G$ , falamos apenas em *classe lateral* pois não há necessidade de diferenciar as classes laterais esquerda e direita. Nesse caso, o conjunto das classes laterais é também denotado por  $G/H$  e, como veremos a seguir, tem estrutura de grupo com a operação induzida de  $G$ .

**Exemplo 18.** Se  $m$  é um número inteiro, o quociente  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  é o conjunto das classes laterais  $\{m\mathbb{Z}, 1+m\mathbb{Z}, \dots, (m-1)+m\mathbb{Z}\}$ . É comum adotar a notação  $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$  para  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

## 2.7 Grupo Quociente

Seja  $G$  um grupo e  $H$  um subgrupo de  $G$ . Queremos definir uma operação no conjunto das classes laterais esquerdas  $G/H$ . Um modo natural de fazer isso é utilizar a operação do grupo  $G$  e definir, para  $a, b \in G$ ,

$$(aH)(bH) = (ab)H.$$

A operação assim definida deve ser válida para qualquer escolha dos representantes das classes  $aH$  e  $bH$ . Dito de outro modo, para  $a' \in aH$  e  $b' \in bH$  arbitrários, devemos ter garantido  $(a'b')H = (ab)H$ . No entanto, o exemplo a seguir mostra que isso não ocorre sempre.

**Exemplo 19.** Consideremos novamente o grupo simétrico  $S_3$  e o subgrupo  $H = \{I, \alpha\}$ . Sabemos do Exemplo 15 que  $\beta H = \{\beta, \varepsilon\}$  e  $\gamma H = \{\gamma, \delta\}$  pertencem ao quociente  $S_3/H$ . Então

$$(\beta H)(\gamma H) = (\beta\gamma)H = \delta H.$$

Escolhendo novos representantes,  $\varepsilon \in \beta H$  e  $\delta \in \gamma H$ , temos

$$(\varepsilon H)(\delta H) = (\varepsilon\delta)H = IH = H.$$

Mas, como  $\delta \notin H$ , as classes  $\delta H$  e  $H$  são diferentes, ou seja  $\delta H = (\beta\gamma)H \neq (\varepsilon\delta)H = H$ .

Veremos que a operação induzida de  $G$  no quociente  $G/H$  estará bem definida, no sentido de não depender da escolha dos representantes das classes, quando o subgrupo  $H$  for normal.

**Proposição 17.** Para quaisquer  $a' \in aH$  e  $b' \in bH$  ocorre  $(ab)H = (a'b')H$  se, e somente se,  $H$  é um subgrupo normal de  $G$ .

*Demonstração.*

( $\Leftarrow$ ) Se  $H$  é subgrupo normal, então  $Hb = bH$  (Proposição 16). Escolhendo representantes  $a' \in aH$  e  $b' \in bH$ , sabemos que  $a'H = aH$  e  $b'H = bH$  (Proposição 14). Logo, da associatividade da operação em  $G$ , obtemos:

$$(ab)H = a(bH) = a(Hb) = (aH)b = (a'H)b = a'(Hb) = a'(b'H) = (a'b')H.$$

( $\Rightarrow$ ) Se  $a' \in aH$  e  $b' \in bH$ , então  $a' = ah$  e  $b' = bn$ , com  $h, n \in H$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} (ab)H = (a'b')H &\implies \\ (b^{-1}a^{-1})(ab)H = (b^{-1}a^{-1})(ahbn)H &\implies \\ H = (b^{-1}hb)H. \end{aligned}$$

Então devemos ter  $b^{-1}hb \in H$ . Como  $b = (b^{-1})^{-1} \in G$  e  $h \in H$ , temos satisfeitas as condições da Definição 8. Logo,  $H$  é normal.  $\square$

**Teorema 3.** Seja  $G$  um grupo e  $H$  um subgrupo normal de  $G$ . A operação induzida de  $G$  no conjunto das classes laterais  $G/H$ , dada por

$$(aH, bH) \mapsto abH,$$

define uma estrutura de grupo sobre  $G/H$ . Além disso, a *aplicação quociente*  $\pi : G \rightarrow G/H$  dada por  $\pi(g) = gH = \bar{g}$  é um homomorfismo e o respectivo núcleo,  $\ker(\pi)$ , é o subgrupo  $H$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 17 vimos que a operação está bem definida em  $G/H$ .

- A operação é *associativa*:

$$\begin{aligned} ((g_1H)(g_2H))(g_3H) &= ((g_1g_2)H)(g_3H) \\ &= ((g_1g_2)g_3)H \\ &= (g_1(g_2g_3))H \\ &= (g_1H)((g_2g_3)H) \\ &= (g_1H)((g_2H)(g_3H)) \end{aligned}$$

- Se  $e$  é a identidade de  $G$ , então  $e \in H$ , donde  $eH = H$ . Assim,  $(gH)H = (gH)(eH) = (ge)H = gH$  e também,  $H(gH) = (eH)(gH) = (eg)H = gH$ . Portanto,  $H$  é a *identidade* do grupo  $G/H$ .
- Todo elemento de  $G/H$  tem *inverso*. De fato,  $(gH)(g^{-1}H) = (g^{-1}H)(gH) = eH = H$ .

Com isso, mostramos que  $G/H$  é um grupo. Sendo  $\pi : G \rightarrow G/H$  dada por  $\pi(g) = gH$ , temos  $\pi(g_1)\pi(g_2) = (g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H = \pi(g_1g_2)$ , donde  $\pi$  é um homomorfismo. Finalmente, como  $H$  é a identidade do grupo  $G/H$ , temos  $\ker(\pi) = \{g \in G ; gH = H\}$ . Observando que  $gH = H \iff g \in H$  concluímos  $\ker(\pi) = H$ .  $\square$

**Exemplo 20.** No quociente  $\mathbb{Z}/\langle 3 \rangle = \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ , onde

$$\bar{0} = 0 + \langle 3 \rangle = \langle 3 \rangle + 0 = \{\dots, -3, 0, 3, \dots\} = \langle 3 \rangle,$$

$$\bar{1} = 1 + \langle 3 \rangle = \langle 3 \rangle + 1 = \{\dots, -2, 1, 4, \dots\},$$

$$\bar{2} = 2 + \langle 3 \rangle = \langle 3 \rangle + 2 = \{\dots, -1, 2, 5, \dots\},$$

o subgrupo  $\langle 3 \rangle$  é normal (pois é abeliano) e a adição induzida de  $\mathbb{Z}$  produz:

$$\bar{0} + \bar{0} = \overline{0+0} = \bar{0}$$

$$\bar{1} + \bar{1} = \overline{1+1} = \bar{2}$$

$$\bar{2} + \bar{2} = \overline{2+2} = \bar{4} = \bar{1}$$

$$\bar{0} + \bar{1} = \overline{0+1} = \bar{1} = \overline{1+0} = \bar{1} + \bar{0}$$

$$\bar{0} + \bar{2} = \overline{0+2} = \bar{2} = \overline{2+0} = \bar{2} + \bar{0}$$

$$\bar{1} + \bar{2} = \overline{1+2} = \bar{3} = \bar{0} = \overline{2+1} = \bar{2} + \bar{1}.$$

Esses resultados podem ser condensados na tabela seguinte:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

## 2.8 Soma Direta de Grupos Abelianos

Sejam  $(G, *)$  e  $(H, \cdot)$  grupos. Consideramos o produto cartesiano

$$G \times H = \{(g, h); g \in G \text{ e } h \in H\}.$$

Sobre  $G \times H$  definimos uma operação binária  $\circ$ , dada por

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \cdot h_2).$$

Mostraremos que a estrutura  $(G \times H, \circ)$  é um grupo chamado o *produto direto* de  $G$  e  $H$ . Quando  $G$  e  $H$  são grupos abelianos, escrevemos  $G \oplus H$  no lugar de  $G \times H$ , e denominamos o grupo  $(G \oplus H, \circ)$  de a *soma direta* de  $G$  e  $H$ .

*Demonstração.*

1. A operação  $\circ$  é **associativa**:

De fato, sejam  $g_1, g_2, g_3 \in G$  e  $h_1, h_2, h_3 \in H$ .

$$\begin{aligned} ((g_1, h_1) \circ (g_2, h_2)) \circ (g_3, h_3) &\implies (g_1 * g_2, h_1 \cdot h_2) \cdot (g_3, h_3) \\ &\implies (g_1 * (g_2 * g_3), h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3)) \quad (\text{associatividade em } G \text{ e } H) \\ &\implies (g_1, h_1) \circ (g_2 * g_3, h_2 \cdot h_3) \\ &\implies (g_1, h_1) \circ ((g_2, h_2) \circ (g_3, h_3)) . \end{aligned}$$

2.  $G \times H$  tem **identidade**:

Sejam  $e_G$  e  $e_H$  as identidades em  $G$  e  $H$ , respectivamente. Para qualquer  $(g, h) \in G \times H$ ,

$$(g, h) \circ (e_G, e_H) = (g * e_G, h \cdot e_H) = (g, h) .$$

De modo análogo,

$$(e_G, e_H) \circ (g, h) = (e_G * g, e_H \cdot h) = (g, h) .$$

Assim, concluímos que  $(e_G, e_H)$  é a identidade em  $G \times H$ .

3.  $G \times H$  contém todos os seus **inversos**.

Seja  $(g, h) \in G \times H$ . Mostraremos que  $(g^{-1}, h^{-1}) \in G \times H$  é o inverso de  $(g, h)$ . De fato,

$$(g, h) \circ (g^{-1}, h^{-1}) = (g * g^{-1}, h \cdot h^{-1}) = (e_G, e_H) .$$

E também

$$(g^{-1}, h^{-1}) \circ (g, h) = (g^{-1} * g, h^{-1} \cdot h) = (e_G, e_H) .$$

□

A noção de *produto direto* (ou *soma direta*) de grupos pode ser estendida a uma quantidade arbitrária, porém finita, de grupos. Por exemplo, se  $G, H$  e  $K$  são grupos, o produto direto  $G \times H \times K$  é obtido fazendo-se  $(G \times H) \times K$ . De modo geral, se  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$  formam uma coleção finita de grupos, então

$$G_1 \times G_2 \times G_3 \times \dots \times G_n = (\dots ((G_1 \times G_2) \times G_3) \times \dots) \times G_n .$$

Considerando o grupo aditivo  $\mathbb{Z}$ , podemos fazer a soma direta deste grupo com ele próprio um número finito de vezes. Assim,

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} ,$$

corresponde ao conjunto  $\mathbb{Z}^n = \{(a_1, \dots, a_n) ; a_i \in \mathbb{Z}\}$ . A identidade em  $\mathbb{Z}^n$  é a  $n$ -upla  $(0, \dots, 0)$  e a operação em  $\mathbb{Z}^n$  é a soma induzida de  $\mathbb{Z}$  dada por:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) .$$

O grupo  $\mathbb{Z}^n$ , como veremos com mais detalhes adiante, é um *grupo abeliano livre*.

## 2.9 Grupo Finitamente Gerado e Grupo Abelianamente Livre

Partindo da noção de grupo cíclico, interessa-nos o caso geral dos grupos gerados por mais de um elemento. Para tanto, precisaremos do resultado a seguir.

**Proposição 18.** Se  $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é uma família de subgrupos de um grupo  $G$ , então  $I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$  também é um subgrupo de  $G$ .

*Demonstração.* Já discutimos (Proposição 7) que a identidade  $e$  do grupo  $G$  pertence a todos os seus subgrupos. Logo,  $e \in I$ , donde  $I \neq \emptyset$ . Se  $a, b \in I$ , então  $a, b \in H_\lambda$  e, conseqüentemente,  $ab^{-1} \in H_\lambda$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Portanto,  $ab^{-1} \in I$ . Logo,  $I$  é subgrupo de  $G$ .  $\square$

Se  $X$  é um subconjunto qualquer do grupo  $G$ , definimos  $\langle X \rangle$  como sendo a intersecção de todos os subgrupos de  $G$  que contém  $X$ . Pela proposição anterior ele é um subgrupo de  $G$ , chamado *subgrupo gerado por  $X$* . Dizemos ainda que  $X$  é um *conjunto gerador* para o grupo  $G$  se, e somente se  $G = \langle X \rangle$ . Quando  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  é finito, dizemos que  $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  é um grupo *finitamente gerado*.

**Observação 11.** O grupo cíclico  $\langle x \rangle = \{x^n ; n \in \mathbb{Z}\} = \langle \{x\} \rangle$  é um caso particular de grupo finitamente gerado, onde o conjunto gerador tem apenas um elemento.

Da proposição a seguir, podemos obter uma descrição dos elementos de  $\langle X \rangle$ .

**Proposição 19.** Se  $X$  é um subconjunto não vazio de um grupo  $G$ , então  $\langle X \rangle$  é o conjunto de todos os elementos  $g \in G$  tais que  $g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ , onde  $\alpha_i = \pm 1$  e  $x_i \in X$ .

*Demonstração.* Seja  $S$  o conjunto de todos os elementos da forma  $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  com  $\alpha_i = \pm 1$  e  $x_i \in X$ . É claro que  $X \subset S \subset G$ . Lembramos que se  $b = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in S$ , então a Observação 1 nos permite concluir que  $b^{-1} = x_n^{-\alpha_n} \dots x_1^{-\alpha_1} \in S$ . Assim, para  $a, b \in S$  temos  $ab^{-1} \in S$ , donde  $S$  é subgrupo de  $G$ . Logo  $\langle X \rangle \subset S$ . Além disso, sabemos por definição que se  $x_i \in X$  então  $x_i \in \langle X \rangle$ . Como  $\langle X \rangle$  tem estrutura de grupo, o produto  $x = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ , com  $\alpha_i = \pm 1$ , que é um elemento genérico de  $S$ , também está em  $\langle X \rangle$ . Logo  $S \subset \langle X \rangle$ . Isso mostra que  $S = \langle X \rangle$ .

Adaptado de (ROBINSON, 1996, p. 9).  $\square$

Devemos observar que os  $x_i$  da Proposição 19 não precisam ser todos diferentes. Desse modo, quando  $G$  é abeliano, podemos agrupar os termos semelhantes e somar os expoentes. Portanto, se  $G$  é um grupo *abeliano* finitamente gerado por  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , para qualquer  $g \in G$  existem inteiros  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tais que

$$g = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n .$$

**Proposição 20.** Se  $G$  é um grupo abeliano finitamente gerado e  $H \subset_{\text{sub}} G$  então o quociente  $G/H$  é um grupo abeliano finitamente gerado.

*Demonstração.* Como  $G$  é abeliano, segue que  $H$  é normal (observação 4) e, por isso,  $G/H$  é um grupo com a operação induzida de  $G$ . Logo  $G/H$  também é abeliano. Seja  $\{g_1, \dots, g_n\}$  um conjunto gerador de  $G$ . Então todo elemento  $g \in G$  é da forma

$$g = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i,$$

para  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ . Considerando a aplicação quociente  $\pi : G \rightarrow G/H$ , dada no Teorema 3, para qualquer  $\bar{g} \in G/H$  temos

$$\bar{g} = \pi(g) = \pi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i\right).$$

E como  $\pi$  é homomorfismo, concluímos

$$\bar{g} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi(g_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{g}_i.$$

Logo,  $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$  é um conjunto finito e gerador de  $G/H$ .  $\square$

Quando dizemos que  $G$  é um grupo abeliano finitamente gerado por  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , não está excluída a possibilidade de escrever um elemento arbitrário  $g \in G$  de mais de uma maneira diferente. Interessa-nos o caso em que cada  $g \in G = \langle X \rangle$  possa escrito de forma única como combinação de todos os elementos de  $X$ , situação em que  $G$  é chamado de *grupo abeliano livre*.

**Definição 17.** Seja  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  e  $G$  um grupo abeliano gerado por  $X$ . Dizemos que  $G$  é um *grupo abeliano livre* quando

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = e_G \iff a_1 = \dots = a_n = 0.$$

Nesse caso, o conjunto  $X$  é dito uma base para  $G$ .

A definição anterior equivale a dizer que ocorre  $a x_i = e_G$  se, e somente se  $a = 0$ , para todo  $x_i \in X$ . Por esta razão chamamos  $x_i$  de um *gerador livre* do grupo  $G$ .

Vemos então que cada elemento  $g \in G$  se expressa de forma única como combinação inteira dos seus geradores. Com efeito, se  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  e  $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$  forem duas representações do mesmo elemento  $g \in G$ , então,

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n \iff (a_1 - b_1) x_1 + \dots + (a_n - b_n) x_n = e_G,$$

donde  $a_i = b_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Exemplo 21.** O grupo  $\mathbb{Z}_m$  é finitamente gerado. De fato,  $\bar{1}$  é um gerador natural de  $\mathbb{Z}_m$  pois para cada inteiro  $0 \leq x < m$  podemos escrever  $\bar{x} = x\bar{1}$ . No entanto,  $\mathbb{Z}_m$  não é um grupo abeliano livre uma vez que  $c\bar{1} = \bar{0}$  sempre que  $c$  for um inteiro múltiplo de  $m$ . Ao contrário, o grupo aditivo  $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$  é um grupo abeliano livre uma vez que  $c1 = 0$  se, e somente se  $c = 0$ .

**Teorema 4.** Se  $G$  é um grupo abeliano livre e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  é uma base para  $G$ , então  $G$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ , ou seja,

$$G \simeq \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n .$$

*Demonstração.* Seja  $\phi : \mathbb{Z}^n \rightarrow G$  dada por  $\phi(a_1, \dots, a_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ . Como vale

$$\begin{aligned} \phi((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)) &= \phi((a_1 + b_1), \dots, (a_n + b_n)) \\ &= (a_1 + b_1)x_1 + \dots + (a_n + b_n)x_n \\ &= (a_1x_1 + \dots + a_nx_n) + (b_1x_1 + \dots + b_nx_n) \\ &= \phi(a_1, \dots, a_n) + \phi(b_1, \dots, b_n) , \end{aligned}$$

temos que  $\phi$  é um homomorfismo. Como  $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , para cada  $g \in G$  existem inteiros  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  tais que  $g = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ . Logo,  $\phi$  é um homomorfismo sobrejetivo. Além disso,  $G$  é um grupo abeliano livre, donde  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = e_G \iff a_1 = \dots = a_n = 0$ . Logo,  $\ker(\phi)$  tem apenas a identidade  $(0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{Z}^n$  e, portanto,  $\phi$  é injetivo (Teorema 2). Isso mostra que  $\phi$  é um homomorfismo bijetivo, ou seja  $G \simeq \mathbb{Z}^n$ .  $\square$

**Observação 12.** No caso particular em que  $G = \langle x \rangle$  é um grupo cíclico infinito,  $x$  é um gerador livre e  $G \simeq \mathbb{Z}$ .

**Teorema 5.** Qualquer base de um grupo abeliano livre  $G$  tem sempre o mesmo número (finito) de elementos.

*Demonstração.* Sejam  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  e  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  duas bases para  $G$ . Vamos supor  $m > n$ . Então existem inteiros  $a_{ij}$ , com  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$  tais que:

$$y_j = a_{1j}x_1 + \dots + a_{nj}x_n .$$

Como  $Y$  é base para  $G$ , devemos ter  $\beta_1y_1 + \dots + \beta_my_m = e_G \iff \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$ , com  $\beta_j \in \mathbb{Z}$ . Isso significa que

$$\begin{aligned} \beta_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n) + \dots + \beta_m(a_{1m}x_1 + \dots + a_{nm}x_n) &= e_G \iff \\ (\beta_1a_{11} + \dots + \beta_ma_{1m})x_1 + \dots + (\beta_1a_{n1} + \dots + \beta_ma_{nm})x_n &= e_G . \end{aligned}$$

Mas  $X$  também é base de  $G$ , então:

$$\begin{cases} \beta_1a_{11} + \dots + \beta_ma_{1m} = 0 \\ \vdots \\ \beta_1a_{n1} + \dots + \beta_ma_{nm} = 0 . \end{cases}$$

Obtemos um sistema linear homogêneo com  $n$  equações e  $m$  incógnitas  $\beta_1, \dots, \beta_m$ . Como supomos  $m > n$ , o sistema admite solução não trivial em  $\mathbb{Q}$ . Multiplicando a solução não trivial em  $\mathbb{Q}$  por um inteiro adequado, obtemos inteiros  $\beta_1, \dots, \beta_m$ , não todos nulos, tais que  $\beta_1y_1 + \dots + \beta_my_m = e_G$ . Mas isso contradiz a hipótese de  $Y$  ser base. Logo, se  $X$  é uma base de  $G$  com  $n$  elementos, nenhuma outra base pode ter mais do que  $n$  elementos, o que nos dá  $m \leq n$ . Mas  $Y$  é também base de  $G$  com  $m$  elementos. Logo devemos ter  $n \leq m$ , donde  $m = n$ .  $\square$

## 2.10 Teoremas de Isomorfismo

**Teorema 6.** Seja  $f : A \rightarrow B$  um homomorfismo de grupos. Se  $N = \ker(f)$ , então

$$A/N \simeq f(A) .$$

*Demonstração.* Como  $N$  é subgrupo normal de  $A$  (Teorema 1), sabemos que  $A/N$  é grupo, com identidade  $N$ , onde vale a operação  $(aN)(bN) = (ab)N$  (Teorema 3). Seja  $\phi : A/N \rightarrow f(A)$  dada por  $\phi(aN) = f(a)$ . A aplicação  $\phi$  está bem definida. De fato,

$$\begin{aligned} aN = bN &\iff ab^{-1} \in N && \text{(definição classe lateral)} \\ &\iff f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} = e_B \in f(A) && \text{(} f \text{ é homomorfismo)} \\ &\iff f(a) = f(b) . \end{aligned}$$

Pelo que acabamos de argumentar,  $\phi$  é uma aplicação injetiva, já que  $\phi(aN) = \phi(bN) \iff f(a) = f(b) \iff aN = bN$ . Além disso, é sobrejetiva, pois dado  $y \in f(A)$  existe  $a \in A$  tal que  $y = f(a) = \phi(aN)$ . Resta mostrar que  $\phi$  é um homomorfismo. Com efeito,

$$\phi((aN)(bN)) = \phi((ab)N) = f(ab) = f(a)f(b) = \phi(aN)\phi(bN) .$$

Por tanto,  $\phi$  é isomorfismo. □

**Teorema 7.** Se  $G$  é um grupo abeliano finitamente gerado, então:

$$G \simeq \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_k} ,$$

onde  $d_i | d_{i+1}$ . O número  $n$  é chamado o *rank* de  $G$  e será denotado por  $rk(G)$ .

A demonstração do Teorema 7, conhecido também por *teorema de classificação dos grupos abelianos finitamente gerados*, pode ser encontrada em (JESUS, 2017, p. 35). O fato importante sobre ele é que todo grupo abeliano finitamente gerado pode ser representado como uma soma direta de um número finito  $n$  de grupos cíclicos infinitos, isomorfos a  $\mathbb{Z}$ , e um número finito  $k$  de grupos cíclicos finitos. O número  $n = rk(G)$  é justamente o número de geradores livres de  $G$  e desempenha papel importante na relação dos grupos de homologia de um espaço topológico com a característica de Euler-Poincaré do poliedro que triangula esse espaço.

Os grupos cíclicos finitos que aparecem na representação de  $G$  no teorema anterior, isomorfos a  $\mathbb{Z}_{d_i}$ , são chamados *grupos de torção*.

**Teorema 8.** Se  $G$  e  $H$  são grupos abelianos finitamente gerados, então

$$rk(G \oplus H) = rk(G) + rk(H) .$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 7, como  $G$  e  $H$  são grupos abelianos finitamente gerados, vamos supor  $G \simeq \mathbb{Z}^n \oplus T_1$  e  $H \simeq \mathbb{Z}^m \oplus T_2$ , onde  $T_1$  e  $T_2$  são somas diretas de grupos cíclicos finitos. Isso nos dá  $rk(G) = n$  e  $rk(H) = m$ . Observamos que a soma finita de grupos cíclicos finitos é ainda um grupo finito, então podemos escrever  $T_1 \oplus T_2 = T$ , donde

$$\begin{aligned} G \oplus H &\simeq \mathbb{Z}^n \oplus T_1 \oplus \mathbb{Z}^m \oplus T_2 \iff \\ &\simeq \mathbb{Z}^{n+m} \oplus T . \end{aligned}$$

Assim,  $rk(G \oplus H) = n + m = rk(G) + rk(H)$ . □

**Teorema 9.** Se  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo de grupos abelianos finitamente gerados, então

$$rk(G) = rk(ker(\phi)) + rk(Im(\phi)) .$$

**Corolário 1.** Se  $G$  é um grupo abeliano finitamente gerado e  $H \subset_{sub} G$ , então

$$rk(G) = rk(H) + rk(G/H) .$$

*Demonstração.* Como  $G$  é abeliano,  $H$  é subgrupo normal. Consideremos a aplicação quociente  $\pi : G \rightarrow G/H$  dada por  $\pi(g) = gH$ . Já discutimos no Teorema 3 que  $\pi$  é um homomorfismo com  $ker(\pi) = H$ . Mais ainda,  $\pi$  é sobrejetivo. De fato, todo elemento de  $G/H$  é uma classe lateral  $gH$ . Então, existe  $g \in G$  tal que  $gH = \pi(g)$ . Logo,  $Im(\pi) = G/H$ . Do Teorema 9, concluímos  $rk(G) = rk(ker(\pi)) + rk(Im(\pi))$ , como desejado. □

# ELEMENTOS DE HOMOLOGIA SIMPLICIAL

---



---

## 3.1 Simplexos

**Definição 18.** Os pontos  $v_0, v_1, \dots, v_k$  do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  estão em *posição geral* quando os vetores  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0$  são linearmente independentes.

Isso significa dizer que os pontos  $v_0, v_1, \dots, v_k$  não estão todos contidos em um mesmo plano  $k - 1$  dimensional do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 22.** Dois pontos distintos estão sempre em posição geral. Três pontos estão em posição geral quando não são colineares e quatro pontos estão em posição geral quando não são coplanares. O número máximo de pontos em posição geral no  $\mathbb{R}^n$  é  $n + 1$ .

**Definição 19.** Dado um conjunto  $X = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  de pontos em posição geral, um  $k$ -simplexo ou *simplexo de dimensão  $k$*  é o menor conjunto convexo que contém  $X$ . Os elementos de  $X$  são chamados *vértices* do  $k$ -simplexo.

A rigor, um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  encontra-se no menor conjunto convexo contendo  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  se e somente se pode ser escrito de forma única como combinação linear

$$x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, \quad (3.1)$$

onde cada  $\lambda_i$  é um número real não negativos e  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ . (ARMSTRONG, 1983, p. 120)

Desse modo, um simplexo de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_k$  é o conjunto dos pontos do  $\mathbb{R}^n$  que satisfazem (3.1). Fazendo a substituição  $\lambda_0 = 1 - (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)$  podemos reescrever

$$x = v_0 + \lambda_1(v_1 - v_0) + \dots + \lambda_k(v_k - v_0), \quad (3.2)$$

onde  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  com  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \leq 1$  e os vetores  $(v_1 - v_0), \dots, (v_k - v_0)$  são LI.

Da Equação (3.2) vemos que um 0–simplexo é um ponto; um 1–simplexo é um segmento de reta; um 2–simplexo é um triângulo (com seu interior) e um 3–simplexo é um sólido tetraédrico, como mostra a Figura 2. Simplexos de dimensão  $k > 3$  são difíceis de visualizar, mas podem ser pensados como subespaços fechados do  $\mathbb{R}^n$ , análogos ao tetraedro sólido.

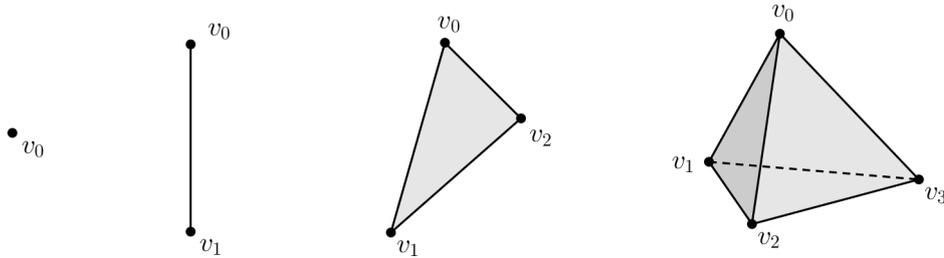


Figura 2 – Simplexos de dimensão 0, 1, 2 e 3.

**Definição 20.** Se  $A$  e  $B$  são simplexos tais que os vértices de  $B$  formam um subconjunto dos vértices de  $A$ , então dizemos que  $B$  é uma *face* de  $A$ .

**Exemplo 23.** Os vértices de um simplexo são as faces de dimensão 0 desse simplexo. As faces unidimensionais de um 2–simplexo são as três arestas do triângulo. Um 3–simplexo possui quatro faces de dimensão 0, seis faces de dimensão 1, quatro faces de dimensão 2 e uma face de dimensão 3. Todo simplexo é uma face de si próprio.

## 3.2 Orientação nos Simplexos

Intuitivamente, uma orientação em 1 dimensão define um sentido positivo a seguir: “para frente” ou “para cima”, por exemplo. Em 2 dimensões uma orientação define um sentido positivo de rotação; geralmente é escolhido o sentido “anti-horário” como positivo. Em 3 dimensões uma orientação positiva resulta na “regra da mão direita”. (BASENER, 2006, p. 94)

Seja  $A$  um segmento de reta com extremos em  $v_0$  e  $v_1$ . Estabelecemos uma orientação sobre  $A$  ao definir uma ordem para seus pontos extremos:  $(v_0, v_1)$  ou  $(v_1, v_0)$ . Assim, a orientação  $(v_0, v_1)$  sobre  $A$  indica que devemos seguir no sentido de  $v_0$  para  $v_1$ . Observamos que a orientação contrária de  $(v_0, v_1)$ , aqui denotada por  $-(v_0, v_1)$ , é  $(v_1, v_0)$



Figura 3 – Orientações em um segmento de reta.

Seja  $T$  é um triângulo com vértices  $v_0, v_1, v_2$ . Definimos uma orientação sobre  $T$  ao escolher uma ordem dos seus vértices, digamos  $(v_1, v_2, v_0)$ . Embora existam seis maneiras diferentes de ordenar os vértices de  $T$ , três delas implicam na mesma orientação sobre  $T$ , enquanto as outras três produzem orientação contrária. Observando a Figura 4 vemos com facilidade que  $(v_0, v_1, v_2)$ ,  $(v_1, v_2, v_0)$  e  $(v_2, v_0, v_1)$  correspondem à orientações “anti-horárias” sobre  $T$  enquanto  $(v_0, v_2, v_1)$ ,  $(v_2, v_1, v_0)$  e  $(v_1, v_0, v_2)$  são orientações no sentido oposto.

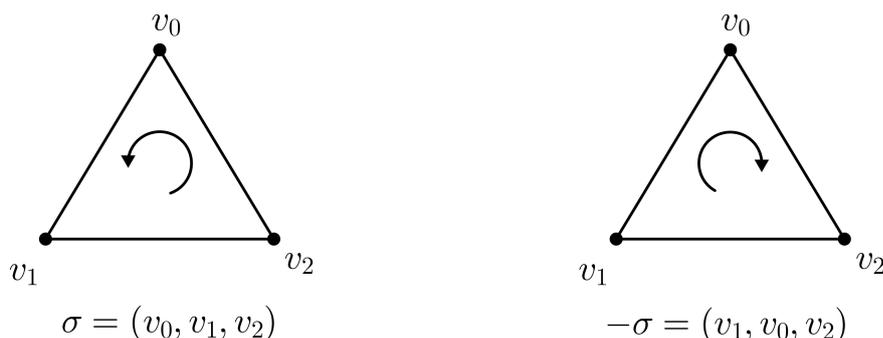


Figura 4 – Orientações possíveis em um triângulo.

Uma orientação em simplexos gerais equivale a escolher uma ordem para os seus vértices. Sabemos, contudo, que existem  $(k + 1)!$  maneiras diferentes de ordenar os vértices de um simplexo  $k$ -dimensional. Quantas orientações diferentes poderiam resultar de todos esses ordenamentos? Para responder a esta pergunta, precisamos recorrer às noções de *permutação par e ímpar*

Consideremos a sequência dos primeiros  $n$  números naturais,  $1, 2, 3, \dots, n$ . Uma *permutação* desses números é uma bijeção  $\pi : I_n \rightarrow I_n$ , onde  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Portanto, uma permutação desses números pode ser vista como uma maneira de dispor todos eles em uma ordem qualquer, e sem repetição:  $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ . O conjunto das permutações de  $I_n$  constitui um grupo com a operação de composição de funções (Exemplo 6).

Uma *transposição* é uma permutação que troca dois números de lugar e mantém os demais fixos. Por exemplo,  $1, 2, 5, 4, 3$  é uma transposição de  $1, 2, 3, 4, 5$ . Um fato básico da teoria das permutações é que qualquer permutação  $\pi$  de  $I_n$  pode ser gerada realizando um número finito de transposições na permutação identidade  $1, 2, \dots, n$ . Embora esse número de transposições necessárias não seja único, ele tem paridade bem definida. Assim, o conjunto das permutações de  $I_n$  se divide em duas classes: as permutações *pares* e as *ímpares*. De fato, a permutação  $1, 2, 5, 4, 3$  é *ímpar* pois só pode ser obtida da permutação identidade  $1, 2, 3, 4, 5$  por meio de um número ímpar de transposições.

**Definição 21.** Seja  $\sigma$  um simplexo de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_k$ . Uma *orientação* sobre  $\sigma$  é uma escolha de uma das classes de permutação para seus vértices. Escrevemos  $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_k)$

para denotar esse simplexo orientado. Duas orientações são iguais quando uma puder ser obtida da outra por meio de um número par de transposições.

Vemos que para cada conjunto de  $k + 1$  pontos em posição geral,  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ , haverá exatamente duas orientações possíveis para o mesmo simplexo:

$$\sigma = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k) \quad \text{e} \quad \sigma' = (v_1, v_0, v_2, \dots, v_k). \quad (3.3)$$

Qualquer outra ordem desses vértices será uma permutação *par* de uma das ordenações dadas em (3.3), e, por isso, não poderá resultar numa orientação diferente. Utilizaremos a notação alternativa

$$\sigma' = -\sigma,$$

para indicar que  $\sigma'$  é o simplexo  $\sigma$  munido da orientação oposta.

**Observação 13.** Em simplexos de dimensão zero não há maneiras diferentes de ordenar seus vértices. Assumiremos que orientar um ponto é apenas precedê-lo do sinal  $-$  ou do sinal  $+$ . (LIMA, 2012a, p. 89)

Ao escolher uma das duas orientações possíveis para um  $k$ -simplexo, todas as suas faces de dimensão  $k - 1$  ficam automaticamente orientadas. Com efeito, a exclusão de um dos vértices ainda mantém os vértices restantes ordenados.

Tomemos como exemplo o 2-simplexo orientado,  $\sigma$ , da Figura 5. Ao percorrer os vértices seguindo a ordenação  $(v_0, v_1, v_2)$ , somos levados a passar pelas arestas num sentido determinado, induzido pela orientação de  $\sigma$ . A face oposta ao vértice  $v_0$  herda a orientação  $(v_1, v_2)$ , a face oposta ao vértice  $v_1$  recebe a orientação  $-(v_0, v_2)$  e a face oposta ao vértice  $v_2$  herda a orientação  $(v_0, v_1)$ .

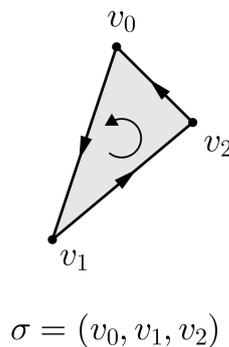


Figura 5 – Orientação induzida nas arestas de um 2-simplexo.

De modo geral, dado o simplexo orientado  $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ , a *orientação induzida* de  $\sigma$  na face oposta ao  $i$ -ésimo vértice  $v_i$  é dada por

$$(-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k), \quad (3.4)$$

onde  $\widehat{v}_i$  indica que o vértice  $v_i$  deve ser suprimido da lista ordenada de vértices. Observamos ainda que o índice  $i$  indica apenas a posição, começando em 0, do vértice  $v_i$  na ordenação do simplexo original.

É interessante observar que toda face  $(k-2)$ -dimensional de um  $k$ -simplexo pertence a exatamente duas faces de dimensão  $k-1$ . Mais ainda, cada uma dessas duas faces de dimensão  $k-1$ , orientadas à partir do simplexo original, induzem orientações contrárias sobre a face comum. Esse resultado é tratado como um teorema em (LIMA, 2012a, p. 91), e é a justificativa por trás do Teorema 10, adiante.

Seja  $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  um  $k$ -simplexo orientado. Denotaremos por  $\sigma_{(i)}$  a face de  $\sigma$  obtida pela exclusão de um único vértice  $v_i$ . Se  $\rho$  é a face de dimensão  $(k-2)$ , obtida de  $\sigma$  pela exclusão de dois vértices  $v_i$  e  $v_j$ , com  $i < j$ , então as duas faces  $(k-1)$ -dimensionais de  $\sigma$  que contêm  $\rho$  são dadas, com as respectivas orientações induzidas de  $\sigma$ , por:

$$\begin{aligned}\sigma_{(i)} &= (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) \quad \text{e} \\ \sigma_{(j)} &= (-1)^j (v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k).\end{aligned}$$

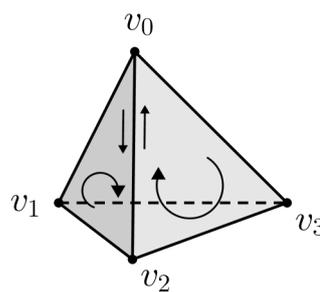
Já que  $i < j$ , a orientação que  $\sigma_{(j)}$  induz sobre  $\rho$  é:

$$(-1)^{i+j} (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k),$$

enquanto que a orientação sobre  $\rho$ , induzida por  $\sigma_{(i)}$ , é:

$$(-1)^{i+j-1} (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k).$$

São, portanto, orientações opostas, uma vez que  $(i+j)$  e  $(i+j-1)$  tem paridades distintas.



$$\sigma = (v_0, v_1, v_2, v_3)$$

Figura 6 – Orientações opostas induzidas numa face de dimensão  $k-2$ .

**Exemplo 24.** Como mostra a Figura 6, considere a orientação  $(v_0, v_1, v_2, v_3)$  sobre um 3-simplexo qualquer. A orientação induzida sobre a face oposta ao vértice  $v_1$  é  $-(v_0, v_2, v_3)$ , que, por sua vez, induz sobre a aresta de vértices  $v_0$  e  $v_2$  a orientação  $-(v_0, v_2)$ . Analogamente, sobre a face oposta ao vértice  $v_3$  a orientação induzida é  $-(v_0, v_1, v_2)$  a qual induz sobre a aresta de vértices  $v_0$  e  $v_2$  a orientação  $(v_0, v_2)$ .

### 3.3 Complexo Simplicial e Poliedro

**Definição 22.** Uma coleção finita  $K$  de simplexos do  $\mathbb{R}^n$  é chamada de *complexo simplicial* quando são satisfeitas as seguintes condições:

1. se  $\sigma$  é um simplexo de  $K$ , então cada uma das faces de  $\sigma$  é também um simplexo de  $K$ ;
2. a intersecção de dois simplexos de  $K$  é vazia ou ocorre em uma face comum.

Um complexo simplicial é dito  $k$ -dimensional se tiver ao menos um simplexo de dimensão  $k$  e nenhum outro simplexo de dimensão maior.

Na Figura 7, adaptada de (ARMSTRONG, 1983, p. 121), a coleção de todos os simplexos mostrados à esquerda é um exemplo de complexo simplicial de dimensão 2. Já os simplexos mostrados à direita não constituem um complexo simplicial pois há ao menos uma intersecção não vazia que não é uma face comum.

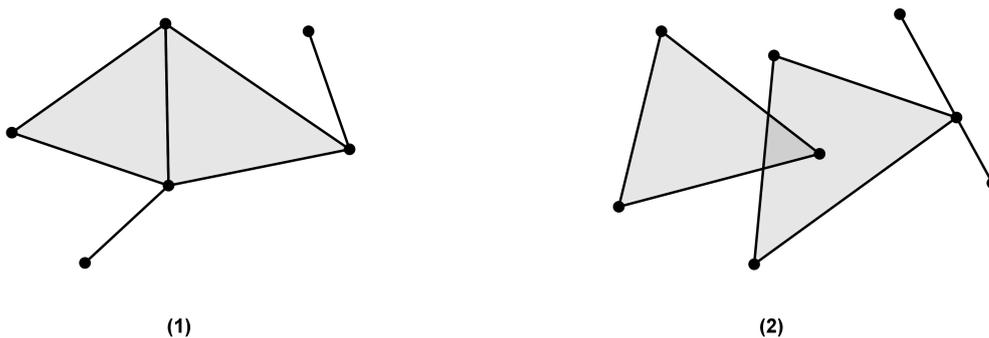


Figura 7 – (1) Simplexos cuja intersecção é uma face comum e (2) simplexos cuja intersecção não é uma face comum.

Um *subcomplexo* do complexo  $K$  é um conjunto de simplexos de  $K$  que também é um complexo. O conjunto de todos os simplexos de  $K$  que têm dimensão menor ou igual do que um certo número natural  $n$  é um caso particular de subcomplexo, chamado o *esqueleto  $n$ -dimensional* de  $K$  será denotado por  $K^n$ . Então, se  $K$  é, por exemplo, o complexo formado de um único 3-simplexo e as suas faces, o esqueleto 2-dimensional de  $K$  é o complexo  $K^2$  formado pelos vértices, arestas e triângulos de  $K$ .

**Definição 23.** Chama-se *poliedro* o subconjunto  $|K| \subset \mathbb{R}^n$  dado pela união de todos os simplexos de um complexo simplicial  $n$ -dimensional  $K$ . A dimensão do poliedro é a mesma do complexo simplicial ao qual está associado.

Enquanto um complexo simplicial  $K$  é uma coleção de simplexos que satisfaz as duas condições da Definição 22, o poliedro  $|K|$  é um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  e, por essa razão, é um espaço

topológico dado pela topologia de subespaços do  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que um poliedro é a *realização* de um complexo simplicial no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

A noção de poliedro, registrada desde a antiguidade, demorou vários séculos para ganhar uma definição mais precisa, capaz de abranger casos que antes eram considerados patológicos. Em *Provas e refutações, a lógica do descobrimento matemático*, Irme Lakatos ([LAKATOS, 1976](#)) desenvolve um debate fictício onde é posto em questão as diferentes definições para poliedro, numa alegoria à trajetória histórica desse tema durante os séculos XIX e XX.

Neste trabalho, assumimos a definição que se consolidou em favor da Topologia e é particularmente importante para a teoria da homologia simplicial.

No sentido da Definição 23, os simplexes são as “peças” com as quais são construídos os poliedros. Um único ponto, um segmento de reta, um triângulo (com seu interior) e um tetraedro sólido são os casos mais simples de poliedros de dimensão 0, 1, 2 e 3 ([LIMA, 2012a](#), p. 86). A superfície do octaedro, do icosaedro ou do grande dodecaedro estrelado são exemplos de poliedros bidimensionais, imersos no  $\mathbb{R}^3$ .

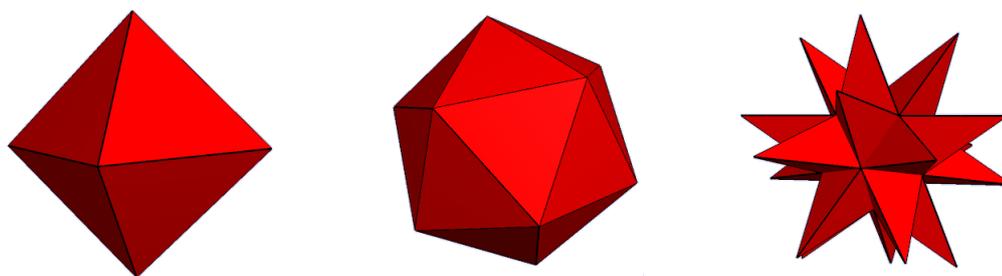


Figura 8 – Superfícies do octaedro, icosaedro e grande dodecaedro estrelado.

No caso de poliedros bidimensionais, pode parecer que a definição baseada em complexos simpliciais é mais restritiva, pois só considera os triângulos (2-simplexes) como “peças bidimensionais”, e não qualquer polígono. No entanto, como todo polígono pode ser decomposto em triângulos, cada um deles respeitando a segunda condição da Definição 22, essa restrição não faz qualquer diferença ([FERNÁNDEZ-SUAREZ, 2009](#)).



Figura 9 – Divisão da superfície do dodecaedro e do cubo em triângulos.

Na Figura 9ds escolhemos uma maneira bastante particular para dividir um polígono em triângulos. A divisão de um espaço topológico em simplexos que, em conjunto, compõem um complexo simplicial, é chamada uma *triangulação do espaço*.

**Definição 24.** Uma triangulação de um espaço topológico  $X$  consiste de um complexo simplicial  $K$  e um homeomorfismo  $h : |K| \rightarrow X$ .

Trataremos com mais detalhes as noções de *espaço topológico* e *homeomorfismos* na Seção 4.1 do Capítulo 4. No entanto, parece-nos oportuno mostrar que a esfera  $S^n$  é um espaço topológico triangulável.

Consideremos o complexo simplicial  $K$  formado por todas as faces próprias de único simplexo  $\sigma$ ,  $(n + 1)$ -dimensional, com  $n > 0$ . Observamos que  $\sigma \notin K$ . Então o poliedro  $|K^n|$  dado pela realização em  $\mathbb{R}^{n+1}$  do  $n$ -esqueleto de  $K$  é homeomorfo à esfera unitária  $S^n$ . De fato, a projeção radial à partir do baricentro  $b$  de  $\sigma$ ,  $f(x) = (x - b)/|x - b|$ , para  $x \in |K^n|$ , é um homeomorfismo de  $|K^n|$  em  $S^n$  (LIMA, 2014, p. 86). Isso mostra que a esfera  $S^n$  é um espaço triangulável  $K^n$  é o complexo associado a essa triangulação.

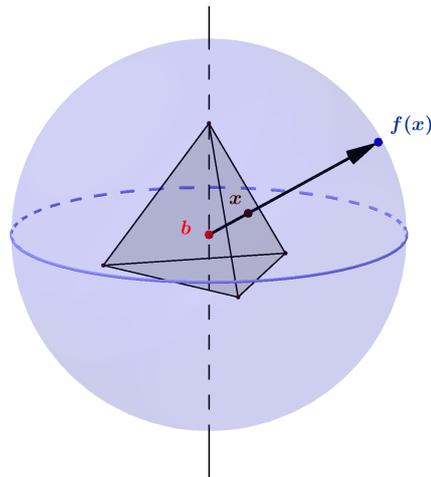


Figura 10 – Representação do homeomorfismo entre um 3-simplexo e a esfera  $S^2$ .

## 3.4 Grupos de Homologia

Seja  $K$  um complexo simplicial finito. Fixado um número natural  $k$ , denotamos os simplexes  $k$ -dimensionais de  $K$  por  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ . Assumimos que é dada uma orientação para cada um desses simplexes e utilizamos a notação  $-\sigma_i$  para indicar que foi tomada a orientação contrária de  $\sigma_i$ .

Consideramos o conjunto  $C_k(K)$  das combinações lineares formais

$$a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n, \quad \text{com } a_i \in \mathbb{Z}.$$

Um elemento  $c \in C_k(K)$  é chamado  $k$ -cadeia ou *cadeia de dimensão  $k$* .

Sobre  $C_k(K)$ , definimos uma operação de adição dada por:

$$\sum_{i=0}^n a_i\sigma_i + \sum_{i=0}^n b_i\sigma_i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)\sigma_i, \quad \text{com } a_i, b_i \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

O conjunto  $C_k(K)$  com a adição definida em (3.5) apresenta estrutura de grupo abeliano e, por isso, será chamado o *grupo das  $k$ -cadeias*. De fato, a operação herda as propriedades associativa e comutativa da adição usual sobre inteiros. O elemento inverso de uma cadeia  $c = \sum a_i\sigma_i$  é a cadeia  $-c = \sum a_i(-\sigma_i) = \sum (-a_i)\sigma_i$  e a identidade, aqui denotada por  $0$ , é a  $k$ -cadeia em que os coeficientes inteiros são todos nulos, ou seja:

$$\sum a_i\sigma_i = 0 \iff a_1 = \dots = a_n = 0.$$

Do que acabamos de dizer, vemos que  $C_k(K)$  é um *grupo abeliano livre* gerado pelo conjunto dos  $k$ -simplexes orientados  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ . Então, para  $k \geq 0$ , segue do Teorema 4 que  $C_k(K) \simeq \mathbb{Z}^n$ , onde  $n$  é o número de simplexes  $k$ -dimensionais em  $K$ . Para  $k < 0$ , definimos  $C_k(K) = \{0\}$ . Por simplicidade, escreveremos apenas  $C_k(K) = 0$  para indicar que se trata do grupo trivial.

Utilizamos a noção de cadeia para definir o *bordo* de um simplexo. O bordo de um  $k$ -simplexo orientado é uma  $(k-1)$ -cadeia, dada pela soma das suas faces de dimensão  $k-1$ , cada uma com a orientação induzida do simplexo original. Assim:

$$\partial(v_0, \dots, v_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k). \quad (3.6)$$

Como temos  $C_{-1}(X) = 0$ , concluímos que  $\partial(v_0) = 0$ . Isso nos diz que o bordo de um vértice é a cadeia nula.

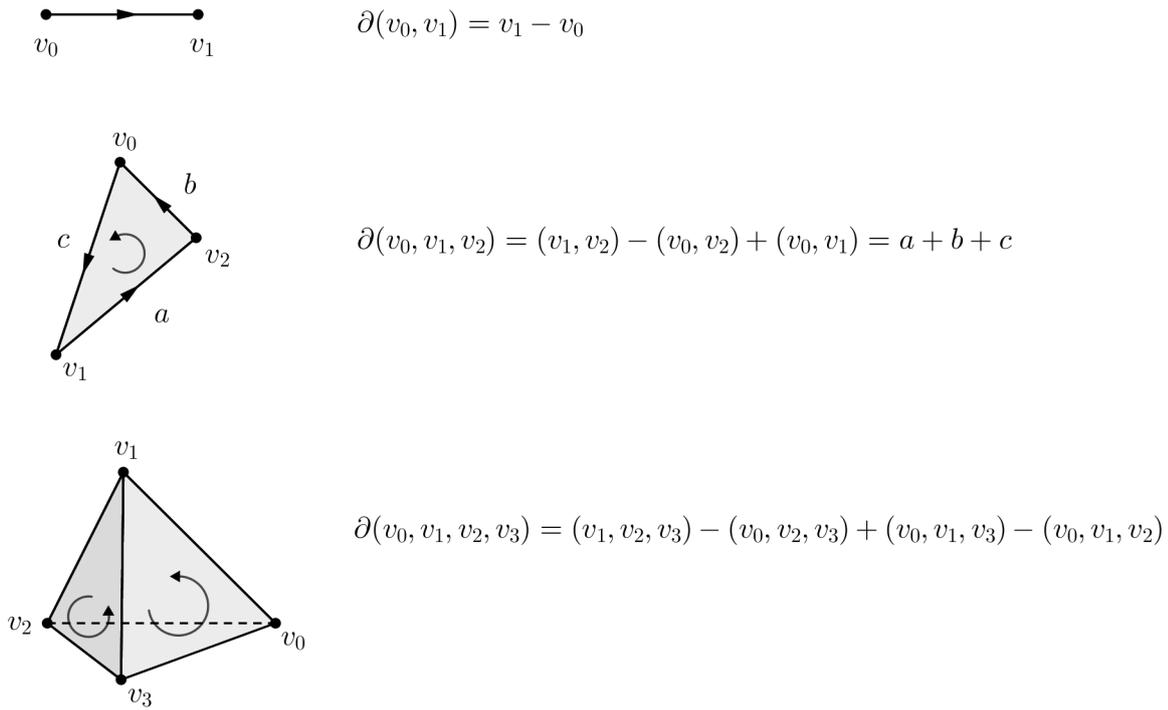


Figura 11 – Bordos de simplejos. Adaptado de (BASENER, 2006, p. 275)

**Exemplo 25.** De acordo com a Figura 11, o bordo de um 1–simplexo é a diferença entre seus dois vértices. O bordo de um 2–simplexo é a 1–cadeia dada pela soma das três arestas do triângulo. O bordo de um 3–simplexo é uma 2–cadeia formado pela soma das suas quatro faces triangulares.

Podemos estender a noção de bordo de um único simplexo para o bordo de uma cadeia de simplejos. Para tanto, definimos o  $k$ –ésimo homomorfismo de bordo, também chamado  $k$ –ésimo operador bordo,  $\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$ , fazendo:

$$\partial_k(a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n) = a_1\partial_k(\sigma_1) + \dots + a_n\partial_k(\sigma_n) , \tag{3.7}$$

onde cada  $\partial_k(\sigma_i)$  é calculado segundo (3.6).

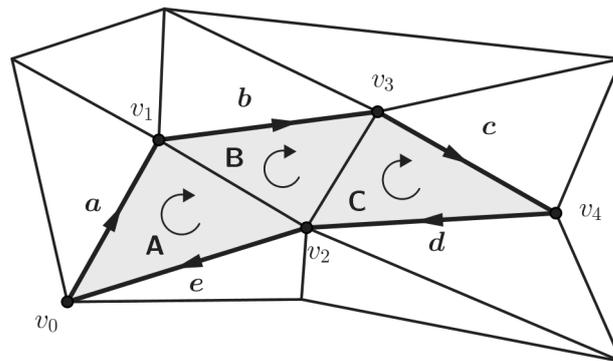


Figura 12 – Exemplo de bordo de uma 2–cadeia.

**Exemplo 26.** Considerando a 2-cadeia da Figura 12,  $A + B + C$ , com  $A = (v_0, v_1, v_2)$ ,  $B = (v_1, v_3, v_2)$  e  $C = (v_2, v_3, v_4)$ , vemos que seu bordo é a 1-cadeia  $a + b + c + d + e$ . De fato,

$$\begin{aligned} \partial_2(A + B + C) &= \partial(A) + \partial(B) + \partial(C) \\ &= (v_1, v_2) - (v_0, v_2) + (v_0, v_1) + (v_3, v_2) - (v_1, v_2) + (v_1, v_3) + (v_3, v_4) - (v_2, v_4) + (v_2, v_3) \\ &= (v_0, v_1) + (v_1, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_2) + (v_2, v_0) \\ &= a + b + c + d + e \in C_1. \end{aligned}$$

Quando o contexto deixar claro a dimensão de  $C_k$ , escreveremos apenas  $\partial$  no lugar de  $\partial_k$ . Veremos a seguir que o operador bordo satisfaz a propriedade fundamental:  $\partial \circ \partial = 0$ ; “o bordo de um bordo é zero”.

**Teorema 10.** A composição  $\partial_{k-1} \circ \partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-2}(K)$  é tal que  $\partial_{k-1} \circ \partial_k(c) = 0$ . Por simplicidade escrevemos apenas  $\partial \circ \partial = \partial^2 = 0$ .

*Demonstração.* Mostraremos primeiro que  $\partial \circ \partial(\sigma) = 0$  para qualquer simplexo orientado  $\sigma = (v_0, \dots, v_k) \in C_k(K)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \partial \circ \partial(\sigma) &= \partial \left( \sum_{i=0}^k (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) \right) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \left( \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) + \sum_{j=i+1}^k (-1)^{j-1} (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k) \right) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} (v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) + \sum_{i=0}^k \sum_{j=i+1}^k (-1)^{i+j-1} (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Todos os termos dessa última expressão se cancelam em pares, uma vez que cada  $(k-2)$ -simplexo orientado  $(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k)$  aparece duas vezes; na primeira com sinal  $(-1)^{i+j}$  e na segunda com sinal oposto,  $(-1)^{i+j-1}$ . Logo,  $\partial \circ \partial(\sigma) = 0$ . Como  $\partial$  é homomorfismo, para uma cadeia  $c = \sum_i a_i \sigma_i$ , temos

$$\partial \circ \partial(c) = \sum_i a_i \partial(\partial(\sigma_i)) = 0.$$

□

Em consequência do Teorema 10, podemos escrever a sequência

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(K) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(K) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0, \quad (3.8)$$

que resume a aplicação dos operadores bordo em todos os grupos cadeias de  $K$ . Essa coleção de grupos e homomorfismos recebe o nome de *complexo de cadeias de  $K$*  e é denotado por  $C(K)$ .

As cadeias  $c \in C_k(K)$  que não têm bordo, ou seja, tais que  $\partial(c) = 0$ , são chamadas *ciclos*. O conjunto  $Z_k$  dos  $k$ -ciclos é um subgrupo de  $C_k$ . De fato  $Z_k$  é o núcleo do homomorfismo  $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ .

$$Z_k(K) = \{c \in C_k(K) ; \partial(c) = 0\} = \ker(\partial_k) . \quad (3.9)$$

**Exemplo 27.** Na Figura 12, a 1-cadeia  $a + b + c + d + e$  é um ciclo.

Com efeito,  $\partial_1(a + b + c + d + e) = v_1 - v_0 + v_3 - v_1 + v_4 - v_3 + v_2 - v_4 + v_0 - v_2 = 0$ .

Definimos também o conjunto  $B_k$  das  $k$ -cadeias que são bordos de alguma  $(k+1)$ -cadeia. O conjunto  $B_k$  é um subgrupo de  $C_k$  pois corresponde à imagem do homomorfismo  $\partial_{k+1} : C_{k+1} \rightarrow C_k$ .

$$B_k(K) = \{b \in C_k(K) ; b = \partial(c), c \in C_{k+1}(K)\} = \text{Im}(\partial_{k+1}) . \quad (3.10)$$

Do Teorema 10, concluímos ainda que  $B_k$  é um subgrupo de  $Z_k$ , ou seja, que todo bordo é um ciclo. Com efeito,  $b \in B_k \implies \exists c \in C_k$  tal que  $b = \partial(c)$ . Assim,  $\partial(b) = \partial(\partial(c)) = 0$ . Logo  $b \in Z_k$ , donde  $B_k \subset_{\text{sub}} Z_k$ . E como  $Z_k$  é abeliano,  $B_k$  é normal.

Temos, agora, os requisitos para a construção dos grupos de homologia.

O  $k$ -ésimo grupo de homologia de  $K$  é definido como o quociente

$$H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K) . \quad (3.11)$$

Observamos que  $H_k$  tem, de fato, estrutura de grupo com a soma induzida de  $C_k$ .

Um elemento de  $H_k$ , determinado pelo  $k$ -ciclo  $c$ , é chamado a *classe de homologia* de  $c$  e corresponde à classe lateral  $[c] = c + B_k$ . Dois  $k$ -ciclos  $c$  e  $d$  são *homólogos* quando a sua diferença é um bordo. Assim, se  $c = d + b$ , com  $b \in B_k$ , então  $[c] = [d]$ . Isso significa dizer que todo bordo desempenha um papel de 0 do ponto de vista da homologia, isto é, todo  $k$ -bordo é homólogo à  $[0]$  em  $H_k$ .

Como também podemos escrever

$$H_k = \ker(\partial_k)/\text{Im}(\partial_{k+1}) , \quad (3.12)$$

o  $k$ -ésimo grupo de homologia, do ponto de vista algébrico, mede o grau de exatidão da sequência de homomorfismos de grupos (3.8), no nível  $k$ .

Apenas por curiosidade, uma sequência de homomorfismos de grupo

$$\dots \longrightarrow G_{p+1} \xrightarrow{f_{p+1}} G_p \xrightarrow{f_p} G_{p-1} \longrightarrow \dots ,$$

chama-se *exata* quando o núcleo de cada homomorfismo  $f_i$  é igual à imagem do homomorfismo anterior  $f_{i+1}$ . Desse modo, em uma sequência exata, os grupos de homologia são triviais em todas as dimensões. Para leitura mais aprofundada sobre esse assunto, sugerimos (LIMA, 2012a, Cap. 1).

## 3.5 Exemplos

Começamos com três exemplos ilustrativos dos conceitos de *complexo simplicial*, *cadeia*, *ciclo*, *bordo* e *grupos de homologia*, adaptados de (BASENER, 2006, p. 279).

**Exemplo 28.** Considere um complexo simplicial bidimensional,  $K$ , cuja realização em  $\mathbb{R}^2$ ,  $|K|$ , está representada pela figura 13.

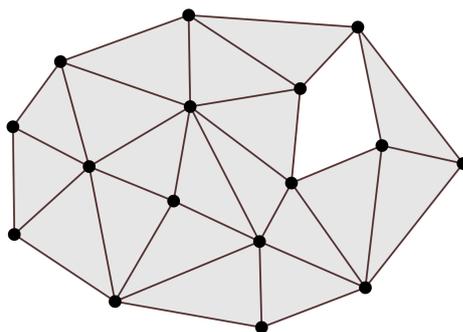


Figura 13 – Realização de um complexo simplicial bidimensional  $K$ .

O complexo  $K$  é formado por 16 vértices, 35 arestas e 19 triângulos. Interessante observar a existência de um buraco, ou furo, em  $|K|$ .

**Exemplo 29.** Considere as 1–cadeias  $A$  e  $B$  do complexo  $K$ , destacadas na Figura 14. As cadeias  $A$  e  $B$  não têm borda e, por isso, são representantes particulares de 1–ciclos. Embora ambas sejam ciclos, elas são topologicamente diferentes.

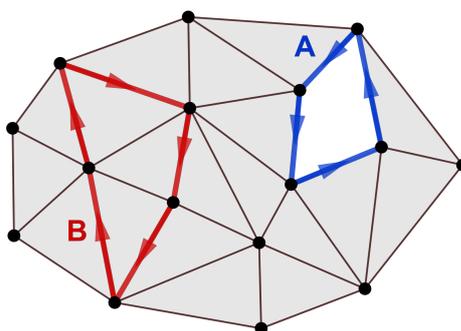


Figura 14 – 1–ciclos em um complexo simplicial.

O ciclo  $A$  circunda uma vez o buraco de  $|K|$ . Por causa disso,  $A$  não é bordo de nenhuma 2–cadeia de  $K$ . Então  $A$  representa a classe de equivalência dos ciclos em  $H_1(K)$  que circundam uma vez esse buraco. Todos os ciclos de  $K$  que circundam esse buraco uma única vez são homólogos a  $A$ .

Para o ciclo  $B$ , no entanto, existe uma 2-cadeia em  $K$  cuja fronteira é justamente  $B$ . De fato, chamando os triângulos do interior de  $B$  por  $T_1, T_2$  e  $T_3$ , vemos que  $\partial(T_1 + T_2 + T_3) = B$ .

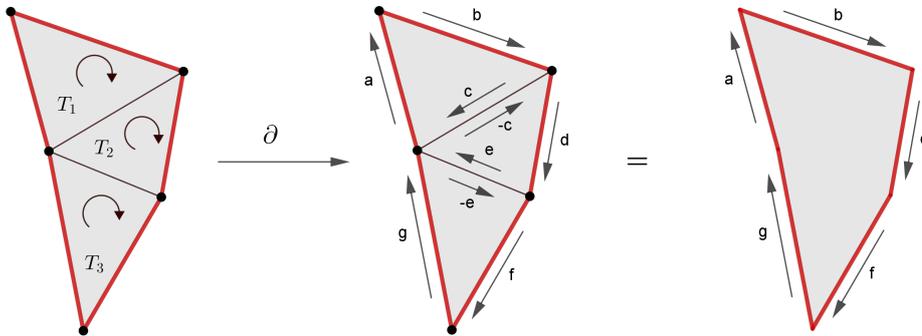


Figura 15 – O ciclo  $B$  é a fronteira ou bordo de uma cadeia de triângulos.

Assim, dizemos que  $B$  é um bordo. Logo, do ponto de vista da homologia,  $B$  é um ciclo trivial em  $H_1(K)$  e escrevemos  $[B] = 0$ .

**Exemplo 30.** A Figura 16 mostra a triangulação do toro com dois 1-ciclos orientados  $A$  e  $B$ . Assumimos  $K$  como sendo o complexo simplicial associado à essa triangulação particular do toro. Mostraremos que  $A$  e  $B$  são ciclos homólogos. Seja  $c \in C_2(K)$  a cadeia de triângulos com orientação anti-horária, compreendidos na região anular entre  $A$  e  $B$ . Então  $\partial c = B - A$ . Assim, em  $H_1(K)$ ,

$$[B - A] = 0 \implies [B] - [A] = 0 \implies [A] = [B].$$

$[A]$  é a classe de homologia de todos os 1-ciclos que circundam uma única vez o toro, do mesmo modo que  $A$ . A classe  $[2A]$  corresponde à classe dos ciclos que dão duas voltas ao redor do toro nessa mesma direção e sentido. Observamos que  $[A] + [B] = [2A]$ . De modo geral,  $[nA]$  é a classe dos ciclos que circundam  $n$  vezes o toro na direção de  $A$ . Quando  $n < 0$ , o sentido é invertido.

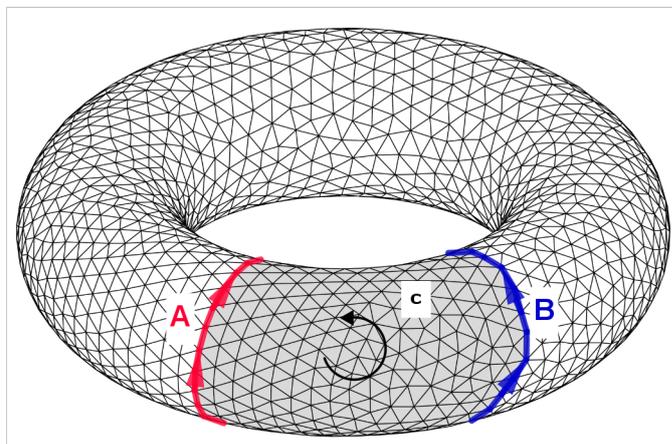


Figura 16 – Dois ciclos em um complexo simplicial sobre a superfície de um toro.

Antes de continuarmos com exemplos mais gerais, precisamos de algumas definições e resultados importantes.

**Definição 25.** Um complexo simplicial é dito *conexo* se dados dois vértices  $a, b \in K$  existirem vértices  $a = v_0, v_1, \dots, v_n = b$  em  $K$  tais que  $(v_{i-1}, v_i)$  é uma aresta (simplexo unidimensional) em  $K$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

É claro que se  $K$  é conexo, então o poliedro associado  $|K|$  também é conexo. De fato, a conexidade de  $K$  implica na existência de um caminho de arestas unindo quaisquer dois vértices de  $|K|$ . Quando  $K$  não é conexo, sempre podemos obter uma sequência finita de subcomplexos conexos  $K_1, \dots, K_r$  tais que  $K = \bigcup K_i$ . Com efeito, cada simplexo de  $K$  é conexo. Os subcomplexos  $K_i$  são chamados as *componentes conexas* de  $K$ .

**Definição 26.** Dado um complexo conexo  $K$ , definimos o homomorfismo  $In : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$  fazendo  $In(x) = \sum n_i$ , para cada 0-cadeia  $x = \sum n_i v_i$  em  $C_0(K)$ . O elemento  $In(x) \in \mathbb{Z}$  chama-se *índice de Kronecker* da 0-cadeia  $x$ .

**Proposição 21.** Dado um complexo simplicial conexo  $K$ , a cadeia  $x = \sum n_i v_i \in C_0(K)$  é um bordo se, e somente se, seu índice de Kronecker é igual a zero.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se existir  $y \in C_1(K)$  tal que  $\partial y = x$ , então, escrevendo  $y = \sum m_i (a_i, b_i)$ , temos  $x = \partial y = \sum m_i \partial(a_i, b_i) = \sum m_i b_i - \sum m_i a_i$ . Portanto,  $In(x) = \sum m_i - \sum m_i = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Se a 0-cadeia  $x = \sum n_i v_i$  é tal que  $In(x) = \sum n_i = 0$ , então, fixando um vértice arbitrário  $v \in K$ , usamos a conexidade de  $K$  para obter um caminho de arestas ligando  $v$  a  $v_i$ , para cada  $i$ . Denotando por  $c_i$  a 1-cadeia que liga os vértices  $v$  e  $v_i$ , temos  $\partial c_i = v_i - v$ . Então, consireando a 1-cadeia  $y = \sum n_i c_i$ , vemos que  $\partial y = \sum n_i \partial c_i = \sum n_i (v_i - v) = \sum n_i v_i - (\sum n_i) v = \sum n_i v_i = x$ . Portanto,  $x$  é um bordo. Adaptado de (LIMA, 2012a, p. 96).  $\square$

**Exemplo 31.** Seja  $K$  o complexo simplicial formado pelos simplexos da Figura 17. Então,  $K = \{v_0, v_1, v_2, (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_0)\}$ . Observamos que o poliedro associado,  $|K|$ , é homeomorfo à circunferência unitária  $S^1$ . Mostraremos que os grupos de homologia não triviais de  $K$  são  $H_0 \simeq \mathbb{Z}$ , e  $H_1 \simeq \mathbb{Z}$ .

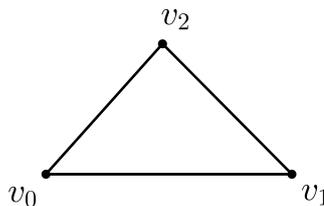


Figura 17 – Poliedro homeomorfo à circunferência  $S^1$ .

O grupo das 0-cadeias,  $C_0 = \{\sum n_i v_i ; n_i \in \mathbb{Z}\}$ , é gerado pelos vértices  $v_i$ , para  $i = 0, 1, 2$ . Como temos  $\partial(v_i) = 0$ , segue que  $\partial(\sum n_i v_i) = \sum n_i \partial(v_i) = 0$ . Logo, toda 0-cadeia de  $K$  é um ciclo. Em outras palavras,  $C_0 = Z_0$  e os vértices  $v_0, v_1, v_2$  são os geradores livres de  $Z_0$ . Isso significa dizer que as classes  $[v_0], [v_1]$  e  $[v_2]$  geram o primeiro grupo de homologia  $H_0 = Z_0/B_0$ .

Devemos notar, entretanto, que  $v_1 - v_0$  é o bordo da aresta  $(v_0, v_1) \in C_1$ . Logo,  $v_1 - v_0 \in \partial C_1 = B_0$ , o que nos permite concluir  $[v_0] = [v_1]$ . De modo análogo concluimos  $[v_0] = [v_1] = [v_2]$ , donde segue que  $H_0$  tem apenas um gerador. Resta-nos mostrar que  $[v_0]$  é um gerador livre de  $H_0$ , ou seja, escolhendo  $v_0$  como representante das classes de homologia de  $H_0$ , devemos ter  $[nv_0] \neq 0$ . Isso equivale a mostrar que se  $x = nv_0 \in C_0$  é um 0-ciclo não nulo então  $x$  não é bordo de qualquer 1-cadeia de  $K$ . De fato, o índice de Kronecker de  $x$  é  $n$ , donde se conclui que  $x$  é bordo apenas quando  $n = 0$ . Logo,  $[v_0]$  é um gerador livre o que nos leva a concluir que  $H_0 \simeq \mathbb{Z}$ .

Uma 1-cadeia genérica  $y \in C_1$  é dada por  $y = m_0(v_0, v_1) + m_1(v_1, v_2) + m_2(v_2, v_0)$ , com  $m_0, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ . O bordo de  $y$  é a 0-cadeia

$$\partial y = (m_2 - m_0)v_0 + (m_0 - m_1)v_1 + (m_1 - m_2)v_2 .$$

Assim, teremos

$$\partial y = 0 \iff m_2 - m_0 = m_0 - m_1 = m_1 - m_2 = 0 ,$$

donde

$$m_0 = m_1 = m_2 .$$

Isso mostra que os 1-ciclos de  $K$  são todos da forma  $m_0(v_0, v_1) + m_0(v_1, v_2) + m_0(v_2, v_0)$  e, portanto,  $Z_1 \simeq \mathbb{Z}$ . Convém observar, a esta altura, que os ciclos de  $C_1(K)$  são múltiplos inteiros da soma das três arestas do triângulo da Figura 17. Como não há 2-cadeia em  $K$ ,  $C_2 = 0$ . Portanto  $B_1 = \partial C_2 = 0$  e assim,  $H_1 = Z_1/B_1 = Z_1/0 \simeq \mathbb{Z}$ . Finalmente, já que não existe  $n$ -cadeia em  $K$  para  $n > 1$  concluimos  $H_n = 0$ .

**Proposição 22.** Se um complexo simplicial  $K$  tem dimensão  $n$ , então  $H_i(K) = 0$  para  $i < 0$  ou  $i > n$ .

*Demonstração.* Por definição  $C_i(K) = 0$  quando  $i < 0$ . Se  $i > n$ , então não há  $i$ -cadeia em  $K$ . Logo  $C_i(K) = 0$ . Assim,  $Z_i(K) = B_i(K) = 0$ . Por isso  $H_i(K) = Z_i(K)/B_i(K) = 0$ .  $\square$

O primeiro grupo de homologia de um complexo  $K$  carrega informação sobre a conexidade de  $K$ . Como mostraremos a seguir, o número de geradores livres ou *rank* de  $H_0(K)$  é justamente o número de componentes conexas de  $K$ .

**Proposição 23.** Se um complexo simplicial  $K$  é conexo, então  $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Seja  $K$  um complexo simplicial conexo de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ . Então  $C_0(K) = \{n_1 v_1 + \dots + n_k v_k ; n_i \in \mathbb{Z}\}$  e, conseqüentemente,  $Z_0(K) = C_0(K)$ . De fato,  $C_0 = Z_0$

para qualquer complexo, uma vez que definimos  $C_{-1}(K) = 0$ . Se  $v_i$  e  $v_j$  são vértices distintos então, da conexidade de  $K$ , sabemos que existe uma cadeia de arestas  $x \in C_1(K)$  conectando  $v_i$  a  $v_j$ . Logo,  $\partial x = v_j - v_i$  e  $v_i - v_j \in B_0(K)$  para todo  $i \neq j$ . Dessa maneira,  $[v_i] = [v_j]$  em  $H_0(K)$ . Sendo assim, para quaisquer  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$  temos

$$n_1[v_1] + \dots + n_k[v_k] = \left( \sum_{i=1}^k n_i \right) [v_1].$$

Se  $x$  é o 0-ciclo dado por  $x = (\sum_{i=1}^k n_i)v_1$ , então  $\partial x = 0 \iff In(x) = \sum_{i=1}^k n_i = 0$ . Isso mostra que  $[v_1]$  é um gerador livre de  $H_0$  e como é o único concluímos  $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Proposição 24.** Se  $K$  é um complexo simplicial não-conexo cujas componentes conexas são  $K_1, K_2, \dots, K_r$ , então  $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}^r$ .

*Demonstração.* Se  $K_1, \dots, K_r$  são as componentes conexas de  $K$ , então todo vértice em  $K_i$  representa a mesma classe de homologia em  $H_0(K)$ . Para cada  $i = 1, \dots, r$  escolhemos um vértice  $v_i \in K_i$ . Então as classes de homologia em  $H_0(K)$  podem ser escritas como

$$n_1[v_1] + \dots + n_r[v_r].$$

E já que não existe 1-cadeia em  $K$  conectando  $v_i$  a  $v_j$ , para  $i \neq j$ , temos  $[v_i] \neq [v_j]$ . Portanto,

$$H_0(K) = \{n_1[v_1] + \dots + n_r[v_r]; n_i \in \mathbb{Z}\}$$

é um grupo abeliano livre com *rank* igual a  $r$ , ou seja,  $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}^r$ .  $\square$

Se  $K$  é um complexo simplicial com poliedro  $|K| \subset \mathbb{R}^n$  podemos construir o *cone de vértice  $v$  e base  $K$* , denotado por  $CK$  da seguinte forma: consideramos  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , e tomamos um ponto  $v$  pertencente ao  $(n+1)$ -ésimo eixo cartesiano. Então  $v$  está em posição geral com os vértices de cada simplexo de  $K$ . Definimos

$$CK = \{\sigma; \sigma \in K \text{ ou } \sigma = (v, \tau), \tau \in K\} \cup \{v\}. \quad (3.13)$$

Tal como definimos, o cone de vértice  $v$  e base  $K$  é um complexo. De fato, seja  $\sigma \in CK$  tal que  $\sigma \notin K$ . Então  $\sigma = (v, \tau_1)$  com  $\tau_1 \in K$  e as faces de  $\sigma$  serão  $v \in CK$ ,  $\rho \subset \tau_1$ , onde  $\rho$  é uma face de  $\tau_1 \in K$ , ou da forma  $(v, \rho)$ . Logo todas as faces de  $\sigma$  são elementos de  $CK$ . Para mostrar que  $CK$  satisfaz a segunda propriedade dos complexos, consideraremos o simplexo adicional  $\beta \in CK$ . Se  $\beta \notin K$ , então  $\beta = (v, \tau_2)$ , com  $\tau_2 \in K$ . Nesse caso, pode-se ver que  $\sigma \cap \beta = (v, \tau_1 \cap \tau_2) \in CK$ , entendendo que se  $\tau_1 \cap \tau_2$  for vazio então  $\sigma \cap \beta = \{v\}$ . Em qualquer caso tem-se  $\sigma \cap \beta \in CK$ . Se  $\beta \in K$ , então  $\sigma \cap \beta = \tau_1 \cap \tau_2$ . Assim concluímos que a intersecção de dois simplexos de  $CK$  é vazia ou uma face comum de  $\sigma$  e  $\beta$ .

Como conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , o poliedro  $|CK|$  consiste de todos os segmentos de reta que unem  $v$  a qualquer ponto de  $|K|$  (Figura 18).

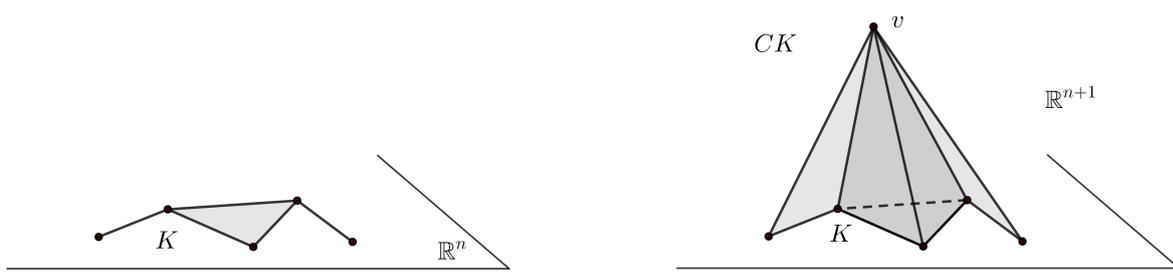


Figura 18 – Poliedro associado ao cone  $|CK|$  de vértice  $v$  e base  $K$ .

**Proposição 25.** Se  $CK$  é um cone de vértice  $v$  e base  $K$  então,

$$H_n(CK) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* O cone é conexo. De fato, por construção, dados dois vértices  $v_1, v_2 \in CK$ , as arestas  $(v_1, v), (v, v_2) \in CK$  formam um caminho (em  $|CK|$ ) ligando  $v_1$  a  $v_2$ . Logo, da Proposição 23 sabemos que  $H_n(CK) \simeq \mathbb{Z}$  para  $n = 0$ .

Seja  $n > 0$ . Mostraremos que todo ciclo  $A \in Z_n(CK)$  é o bordo de alguma  $(n+1)$ -cadeia. Para tanto, definimos o homomorfismo  $f : C_n(CK) \rightarrow C_{n+1}(CK)$  pondo, para cada simplexo orientado  $\sigma = (v_0, \dots, v_n) \in C_n(CK)$ ,

$$f(\sigma) = \begin{cases} (v, v_0, \dots, v_n) & \text{se } \sigma \in K, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma propriedade importante de  $f$  é que

$$\partial f(\sigma) = \sigma - f(\partial\sigma).$$

Vamos provar isso. Primeiro consideramos o caso em que  $\sigma \in K$ . Então

$$\begin{aligned} \partial f(\sigma) &= \partial(v, v_0, \dots, v_n) \\ &= (v_0, \dots, v_n) - \sum_{i=0}^n (-1)^i (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n) \\ &= \sigma - f(\partial\sigma). \end{aligned}$$

Se  $\sigma \notin K$ , então  $\sigma = (v, v_0, \dots, v_{n-1})$  com  $(v_0, \dots, v_{n-1}) \in K$ . Logo,

$$\sigma - f(\partial\sigma) = (v, v_0, \dots, v_{n-1}) - f\left((v_0, \dots, v_{n-1}) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{n-1})\right).$$

Observando que  $(v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{n-1}) \notin K$ , temos  $f(v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{n-1}) = 0$ , e então, pela linearidade de  $f$ , segue

$$\begin{aligned} \sigma - f(\partial\sigma) &= (v, v_0, \dots, v_{n-1}) - f(v_0, \dots, v_{n-1}) \\ &= 0 \\ &= \partial f(\sigma). \end{aligned}$$

É claro que se não existirem ciclos em  $Z_n(CK)$  teremos  $H_n(CK) = 0$ . No entanto, para qualquer ciclo  $A \in Z_n(CK)$ , a propriedade de  $f$ , verificada acima, nos dá que

$$\partial f(A) = A - f(\partial A) = A - f(0) = A.$$

Isso mostra que  $A$  é bordo de  $f(A) \in C_{n+1}(CK)$ . Logo  $Z_n(CK) = B_n(CK)$ . Assim,  $H_n(CK) = 0$  para  $n > 0$ .  $\square$

De uma maneira mais informal, podemos dizer que o *rank* do  $n$ -ésimo grupo de homologia de um complexo  $K$  é uma forma de contar os *buracos*  $(n+1)$ -dimensionais do poliedro  $|K|$ . O exemplo a seguir mostra essa ideia para uma classe bastante particular de complexos: aqueles cujo poliedro associado são sólidos  $n$ -dimensionais dados pela realização de um único  $n$ -simplexo. Mostraremos que o *rank* de todos os grupos de homologia de dimensão  $n > 0$  desses complexos é 0 e isso condiz com a observação de que não têm buracos (pois são sólidos).

**Exemplo 32.** Considere um  $n$ -simplexo orientado  $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$ . Como todo simplexo é uma face de si próprio, o complexo  $K$  formado pelas faces de  $\sigma$  tem dimensão  $n$ . Observamos que  $K$  é um cone de vértice  $v_0$  e cuja base é o subcomplexo constituído pelas faces de  $(v_1, \dots, v_n)$ . Então, da Proposição 25, sabemos que

$$H_n(K) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Os resultados e exemplos anteriores nos permitem obter os grupos de homologia de um complexo associado à triangulação da esfera  $S^n$ .

**Exemplo 33.** Considere um simplexo  $\sigma$  de dimensão  $(n+1)$ , com  $n > 0$ . Seja  $K$  o complexo formado por todas as faces próprias de  $\sigma$ . Denotando o  $n$ -esqueleto de  $K$  por  $K^n$ , sabemos que eles têm precisamente os mesmos simplexos até a dimensão  $n$ , inclusive. Assim, para  $i = 0, \dots, n-1$ , temos  $H_i(K^n) = H_i(K)$  e, pelo resultado do exemplo anterior, concluímos

$$H_i(K^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < i < n-1. \end{cases}$$

Resta calcular  $H_n(K^n)$ . Como não há  $(n+1)$ -cadeia em  $K^n$ , segue que  $B_n(K^n) = 0$  e então  $H_n(K^n) \simeq Z_n(K^n)$ . Mas  $Z_n(K^n) = Z_n(K)$ , pois todos os  $n$ -ciclos de  $K^n$  estão também em  $K$ . Do exemplo 32, sabemos que  $H_n(K) = 0$ , donde  $Z_n(K) = B_n(K) = \partial C_{n+1}(K)$ . Já que  $\sigma$  é o único simplexo  $(n+1)$ -dimensional de  $K$  e observando que  $\partial\sigma \neq 0$ , concluímos, para  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\partial C_{n+1}(K) = m\partial(\sigma) \simeq \mathbb{Z}.$$

Logo,  $H_n(K^n) \simeq Z_n(K^n) = \partial C_{n+1}(K) \simeq \mathbb{Z}$ .

Assim, os grupos de homologia do  $n$ -esqueleto  $K^n$ , para  $n > 0$  são:

$$H_i(K^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < i < n-1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = n. \end{cases}$$

No Exemplo 31 demonstramos um caso particular ( $n = 1$ ), da situação mais geral discutida no Exemplo 33.

Uma vez verificado que os grupos de homologia são um *invariante topológico*, assunto que desenvolveremos no próximo capítulo, poderemos então dizer que os grupos  $H_i(K^n)$  são os grupos de homologia da esfera  $n$ -dimensional,  $S^n$ .

---

# INVARIANTES TOPOLÓGICOS

---

Para mostrar que os grupos de homologia são um invariante topológico, isto é, que espaços homeomorfos têm os mesmos grupos de homologia, independente da triangulação considerada, precisamos de algumas ferramentas algébricas e definições extras. Necessitamos também de alguns conceitos e resultados próprios da Topologia, discutidos a seguir.

## 4.1 Alguns Conceitos Topológicos

**Definição 27.** Um *espaço topológico* é um par formado de um conjunto  $X$  e uma coleção  $T$  de subconjuntos de  $X$  que satisfazem:

- a união de elementos de  $T$  é um elemento de  $T$ ;
- a intersecção finita de elementos de  $T$  é um elemento de  $T$ ;
- $\emptyset$  e  $X$  são elementos de  $T$ .

Cada elemento de  $T$  é chamado um *aberto* de  $X$  e  $T$  é chamado uma *topologia* em  $X$ .

A definição anterior, embora abstrata, nos oferece uma estrutura que torna possível falar em *proximidade* de pontos, sem que precisemos definir, à priori, a ideia de distância. Por conta disso, os espaços topológicos constituem um ambiente adequado para o conceito de *continuidade*.

Topologia é a disciplina matemática que se ocupa do estudo das funções contínuas de um espaço topológico em outro (LIMA, 2014, p. 20).

Para esclarecer a noção de proximidade que a estrutura dos espaços topológicos nos permite construir vamos à definição seguinte.

**Definição 28.** Se  $X$  é um espaço topológico e  $x$  é um ponto de  $X$ , então dizemos que um subconjunto  $V \subseteq X$  é uma *vizinhança* de  $x$  quando existe um conjunto aberto  $A$  tal que  $x \in A \subseteq V$ . Chamamos  $V \subseteq X$  de uma *vizinhança aberta* de  $x$  se  $V$  for um conjunto aberto.

A ideia central é que se  $V$  é uma vizinhança de  $x$ , então  $V$  contém todos os pontos próximos de  $x$ .

**Definição 29.** A função  $f : X \rightarrow Y$  entre os espaços topológicos  $X$  e  $Y$  chama-se *contínua* se a imagem inversa de todo conjunto aberto de  $Y$  é também um aberto de  $X$ , ou seja,  $f^{-1}(A) \subseteq X$  é um aberto para todo aberto  $A \subseteq Y$ .

De acordo com a definição de continuidade e da noção de proximidade baseada em conjuntos abertos, uma função  $f$  é contínua quando podemos tomar  $f(x)$  e  $f(y)$  tão próximos quanto quisermos desde que  $x$  e  $y$  estejam suficientemente próximos.

**Definição 30.** Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos e  $h : X \rightarrow Y$  é uma função contínua com inversa também contínua então  $h$  é chamado um *homeomorfismo* e os espaços  $X$  e  $Y$  são ditos *homeomorfos*.

Espaços homeomorfos são topologicamente equivalentes, isto é, são indistinguíveis do ponto de vista da Topologia. Intuitivamente, dois espaços são homeomorfos quando é possível deformar continuamente um deles, esticando, entortando ou amassando, sem rasgar, até que fique com a mesma forma do outro. Vemos que as deformações citadas são continuamente reversíveis, razão pela qual são chamadas de homeomorfismos. Um círculo é topologicamente idêntico ao triângulo (2–simplexo), mas nenhum deles é equivalente a uma aresta (1–simplexo).

Uma propriedade que é preservada por homeomorfismo, isto é, que não se altera mesmo quando espaço é transformado em outro por meio de um número finito de deformações contínuas reversíveis, é chamada um *invariante topológico*.

Henri Poincaré (1854-1912), em sua publicação de 1895, *Analysis Situs* (POINCARÉ, 1895) inaugurou o ramo da matemática que hoje conhecemos como *Topologia Algébrica* e seus cinco suplementos posteriores fundamentaram o desenvolvimento da disciplina no século XX.

Trabalhando com um tipo especial de espaço topológico, as variedades  $n$ –dimensionais, que nada mais são do que uma generalização em qualquer dimensão das ideias de curvas e superfícies, Poincaré construiu dois invariantes topológicos: o *grupo fundamental* e os *grupos de homologia*, além de também generalizar o teorema de Euler para poliedros quaisquer.

Interessante notar que esses invariantes topológicos estão intimamente associados a uma triangulação do espaço. De fato, no começo da Topologia acreditou-se que toda variedade admitia uma triangulação (MASSEY, 1977, p. 52). No entanto, estudos posteriores, alguns dos quais são relativamente recentes, mostraram que existem variedades que não podem ser trianguladas.

Evidentemente, foge do nosso interesse investigar as condições de triangulação de uma variedade. De fato, estamos interessados em espaços que admitem triangulação e, por essa razão são homeomorfos à um poliedro o qual é, por definição, um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .

Vale ressaltar que  $\mathbb{R}^n$  é um tipo de espaço topológico em que é possível associar a cada par de pontos  $x, y \in \mathbb{R}^n$  um número real positivo  $d(x, y)$ , chamado a *distância* do ponto  $x$  ao ponto  $y$ , de tal modo que

- $d(x, x) = 0$  e  $d(x, y) > 0$ , se  $x \neq y$ ;
- $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , quaisquer que sejam  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ .

Todo espaço topológico  $X$  com essa propriedade é chamado um *espaço métrico* e a função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *métrica* em  $X$ . Desse modo, os poliedros, enquanto subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , são, de fato, espaços métricos. Mais ainda, como topo poliedro  $|K|$  é uma união finita de subconjuntos *fechados e limitados* do  $\mathbb{R}^n$ , os simplexes de  $K$ , temos que os poliedros são espaços *compactos* e, portanto, satisfazem as condições da definição a seguir.

**Definição 31.** Se  $X$  é um espaço topológico e  $\mathcal{F}$  é uma coleção de abertos de  $X$  tal que a união de todos os abertos em  $\mathcal{F}$  é o próprio espaço  $X$ , então  $\mathcal{F}$  é chamada uma *cobertura aberta* de  $X$ . Um subconjunto  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  que também é uma cobertura de  $X$  é chamada uma *subcobertura* de  $\mathcal{F}$ . Uma cobertura é finita se tiver uma quantidade finita de abertos. O espaço topológico  $X$  é dito *compacto* se toda cobertura aberta de  $X$  admite uma subcobertura finita.

Vamos enunciar um importante resultado sobre espaços métricos compactos, devido ao matemático francês Henri Lebesgue (1875-1941), cuja demonstração pode ser encontrada em (ARMSTRONG, 1983, p. 49). Faremos uso desse resultado na Seção 4.5.

**Lema 1** (Lema de Lebesgue). Seja  $X$  um espaço métrico compacto e  $\mathcal{F}$  uma cobertura aberta de  $X$ . Então existe um número real  $\delta > 0$  tal que todo subconjunto de  $X$  com diâmetro menor que  $\delta$  está contido em algum membro de  $\mathcal{F}$ .

**Teorema 11.** Se  $X$  é um conjunto compacto e  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua, então  $f(X)$  é compacto.

O teorema anterior, demonstrado em (ARMSTRONG, 1983, p. 47), mostra que todo espaço triangulável é compacto. De fato, se  $h : |K| \rightarrow X$  é o homeomorfismo associado à uma triangulação de  $X$  então  $h(|K|) = X$  é compacto.

**Definição 32.** Se  $A$  é um subconjunto de um espaço métrico então o *diâmetro* de  $A$  é o número real  $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) ; x, y \in A\}$ .

Empregando a métrica usual do  $\mathbb{R}^n$ , podemos mostrar que o diâmetro de um simplexo é igual ao comprimento da sua maior aresta.

**Proposição 26.** Se  $\sigma$  é um simplexo de vértices  $v_0, \dots, v_n$  então  $\text{diam}(\sigma) = \max\{|v_i, v_j|\}$ .

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in \sigma$ . Então podemos escrever  $x = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i$  e  $y = \sum_{j=0}^n \beta_j v_j$ , com  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = \sum_{j=0}^n \beta_j = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} |x - y| &= \left| x \sum_{j=0}^n \beta_j - \sum_{j=0}^n \beta_j v_j \right| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^n \beta_j (x - v_j) \right| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^n \beta_j \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i - v_j \sum_{i=0}^n \alpha_i \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^n \beta_j \sum_{i=0}^n \alpha_i |v_i - v_j| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^n \beta_j \sum_{i=0}^n \alpha_i \max\{|v_i - v_j|\} = \\ &= \max\{|v_i - v_j|\}. \end{aligned}$$

Isso mostra que  $\text{diam}(\sigma) = \max\{|v_i - v_j|\}$ . □

## 4.2 Aplicação Simplicial

**Definição 33.** Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais. Uma função  $s : |K| \rightarrow |L|$  chama-se *simplicial* quando leva linearmente simplexos de  $K$  sobre simplexos de  $L$ .

Isso significa dizer que se  $\sigma$  é um simplexo de  $K$ , então  $s(\sigma)$  é um simplexo de  $L$ . A linearidade de  $s$  indica ainda que se  $\sigma$  tem vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  e  $x \in \sigma \subset \mathbb{R}^n$  é o ponto  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ , onde  $\lambda_i$  são números reais não negativos com  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ , então  $s(x)$  pode ser escrito em termos dos vértices de  $s(\sigma)$  como

$$s(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i s(v_i).$$

Observamos que a dimensão de  $s(\sigma)$  poderá ser menor (mas nunca maior) do que a dimensão de  $\sigma$ , uma vez que não foi exigida a injetividade de  $s$  e, por isso, pode ocorrer  $s(v_i) = s(v_j)$ , para  $i \neq j$ .

Toda aplicação simplicial  $s$  de um poliedro  $|K|$  noutro poliedro  $|L|$  é contínua, já que  $|K|$  é uma reunião finita de conjuntos compactos (os seus simplexos), e a restrição de  $s$  a cada um deles é contínua. (LIMA, 2012a, p. 86).

Sejam  $K, L$  complexos simpliciais e  $s : |K| \rightarrow |L|$  uma função simplicial. Usando  $s$  podemos construir homomorfismos  $s_n : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$  entre os grupos das  $n$ -cadeias de  $K$  e  $L$ , para cada  $n$ . Para tanto, procedemos da seguinte maneira: dado um  $n$ -simplexo orientado  $\sigma = (v_0, \dots, v_n) \in K$ , definimos  $s_n(\sigma)$  como sendo o simplexo orientado  $(s(v_0), \dots, s(v_n)) \in L$  se todos os vértices  $s(v_0), \dots, s(v_n)$  forem distintos, e fazemos  $s_n(\sigma) = 0$  caso ocorra  $s(v_i) = s(v_j)$  para algum  $i \neq j$ . Estendendo linearmente para todos os  $n$ -simplexos geradores de uma cadeia em  $C_n(K)$ , finalizamos a construção do homomorfismo  $s_n$ .

Mostraremos que  $s_n$  leva  $n$ -ciclos de  $K$  em  $n$ -ciclos de  $L$  e  $n$ -bordos de  $K$  em  $n$ -bordos de  $L$ . Para mostrar isso, usaremos o resultado a seguir.

**Proposição 27.** Se  $\partial_n$  é o  $n$ -ésimo operador bordo  $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  e  $s_n : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$  é o homomorfismo tal qual definimos anteriormente, então  $\partial_n \circ s_n = s_{n-1} \circ \partial_n$ . Por simplicidade escreveremos apenas  $\partial s_n = s_{n-1} \partial$ .

Isso significa dizer que vale o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_n(K) & \xrightarrow{s_n} & C_n(L) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ C_{n-1}(K) & \xrightarrow{s_{n-1}} & C_{n-1}(L) . \end{array}$$

*Demonstração.* Por se tratarem homomorfismos, basta mostrar a validade da proposição para um único  $n$ -simplexo orientado  $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$ . Se os vértices  $s(v_0), \dots, s(v_n)$  forem todos distintos, então é imediato que  $\partial s_n(\sigma) = s_{n-1} \partial(\sigma)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \partial s_n(\sigma) &= \partial(s(v_0), \dots, s(v_n)) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (s(v_0), \dots, \widehat{s(v_i)}, \dots, s(v_n)) \\ &= s_{n-1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) \right) \\ &= s_{n-1} \partial(\sigma) . \end{aligned}$$

Vamos supor que ocorra  $s(v_j) = s(v_k)$ , para  $j < k$ . Então, por definição temos  $s_n(\sigma) = 0$  donde  $\partial s_n(\sigma) = 0$ . Agora,

$$\begin{aligned} s_{n-1} \partial(\sigma) &= s_{n-1} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i s_{n-1}(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) . \end{aligned}$$

Observando os termos dessa soma, quando  $i$  for diferente de  $j$  e de  $k$ , teremos

$$s_{n-1}(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) = 0 ,$$

o que nos leva a escrever

$$s_{n-1}\partial(\sigma) = (-1)^j s_{n-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n) + (-1)^k s_{n-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_n) .$$

Vemos ainda que cada parcela acima será não nula apenas quando  $v_j$  e  $v_k$  forem os únicos vértices de  $\sigma$  que têm a mesma imagem por  $s$ . Mas, mesmo nesse caso, os dois termos se cancelam, pois

$$\begin{aligned} s_{n-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n) &= (s(v_0), \dots, s(\widehat{v}_j), \dots, s(v_k), \dots, (v_n)) \\ &= (-1)^{k-1-j} (s(v_0), \dots, s(v_j), \dots, s(\widehat{v}_k), \dots, s(v_n)) \\ &= (-1)^{k-1-j} s_{n-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_n) , \end{aligned}$$

donde

$$s_{n-1}\partial(\sigma) = \left( (-1)^{k-1} + (-1)^k \right) s_{n-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_n) = 0 .$$

□

Suponha agora que  $z$  é um  $n$ -ciclo de  $K$ . Então  $\partial(z) = 0$ . Da proposição anterior, vemos que  $\partial s_n(z) = s_{n-1}\partial(z) = 0$ , logo  $s_n(z)$  é um  $n$ -ciclo em  $L$ . Analogamente, se  $b \in B_n(K)$ , então existe  $c \in C_{n+1}(K)$  tal que  $b = \partial c$ . Mas  $\partial s_{n+1}(c) = s_n\partial(c) = s_n(b)$  o que nos permite concluir que  $s_n(b) \in B_n(L)$ . Isso mostra que  $s_n$  preserva as características homológicas, levando ciclos de  $K$  em ciclos de  $L$  e bordos de  $K$  em bordos de  $L$ .

A propriedade de levar ciclos em ciclos e bordos em bordos não é uma exclusividade dos homomorfismos  $s_n : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$  induzidos da aplicação simplicial  $s : |K| \rightarrow |L|$ . De fato, qualquer homomorfismo que comute com o operador bordo terá essa propriedade. Discutiremos isso com mais detalhes na próxima seção.

### 4.3 Aplicação de Cadeia

De maneira geral, um homomorfismo  $\varphi : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$  que comuta com o operador bordo de um complexo de cadeias, isto é, que satisfaz

$$\partial\varphi = \varphi\partial , \tag{4.1}$$

é chamado uma *aplicação de cadeia*. Então, dados dois complexos de cadeia  $C(K)$  e  $C(L)$  podemos escrever o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial} & C_n(K) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(K) & \xrightarrow{\partial} & \dots \xrightarrow{\partial} & C_0(K) & \xrightarrow{\partial} & 0 \\ & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & & \varphi \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial} & C_n(L) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(L) & \xrightarrow{\partial} & \dots \xrightarrow{\partial} & C_0(L) & \xrightarrow{\partial} & 0 , \end{array}$$

e abreviamos a notação dizendo apenas  $\varphi : C(K) \rightarrow C(L)$  para indicar que  $\varphi$  leva grupos de cadeia de  $K$  em grupos de cadeia em  $L$ .

De acordo com o que discutimos na Seção 4.2, uma função simplicial  $s : |K| \rightarrow |L|$  induz uma aplicação de cadeia entre os complexos  $C(K)$  e  $C(L)$ .

De modo análogo ao que já fizemos, podemos mostrar que toda aplicação de cadeia leva ciclos em ciclos e bordos em bordos. De fato, se  $c \in K$  é um ciclo, então  $\partial\varphi(c) = \varphi\partial(c) = 0$  e  $\varphi(c)$  é um ciclo em  $L$ . Se  $b \in K$  é bordo de uma cadeia  $c$ , então  $\partial(c) = b$  o que nos dá  $\partial\varphi(c) = \varphi\partial(c) = \varphi(b)$ . Logo  $\varphi(b) \in L$  é bordo da cadeia  $\varphi(c)$ .

Dito isso, parece razoável supor que uma aplicação de cadeia define uma relação entre as homologias de  $K$  e  $L$ . De fato, a aplicação  $\varphi : C(K) \rightarrow C(L)$  induz um homomorfismo natural  $\varphi_* : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$  dado por  $\varphi_*[x] = [\varphi(x)]$ . Uma vez que  $\varphi$  leva bordos em bordos, o homomorfismo  $\varphi_*$  está bem definido. Com efeito, se  $b$  é um bordo qualquer então

$$\varphi_*[x + b] = [\varphi(x + b)] = [\varphi(x) + \varphi(b)] = [\varphi(x)] = \varphi_*[x],$$

e isso mostra que a classe  $\varphi_*[x] \in H_*(L)$  é a mesma para qualquer representante escolhido.

**Proposição 28.** Se  $\varphi : C(K) \rightarrow C(L)$  e  $\psi : C(L) \rightarrow C(M)$  são duas aplicações de cadeia, então a composta  $\psi \circ \varphi : C(K) \rightarrow C(M)$  também é uma aplicação de cadeia e vale

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : H_*(K) \rightarrow H_*(M).$$

*Demonstração.* Como  $\varphi$  e  $\psi$  são aplicações de cadeia, elas comutam com o operador bordo  $\partial$ . Desse modo, vale

$$\partial(\psi \circ \varphi) = \psi \circ (\partial\varphi) = (\psi \circ \varphi)\partial.$$

Além disso, se  $[x] \in H_*(K)$ , então

$$(\psi \circ \varphi)_*[x] = [(\psi \circ \varphi)(x)] = [\psi(\varphi(x))] = \psi_*[\varphi(x)] = \psi_* \circ \varphi_*[x].$$

□

## 4.4 Subdivisão Baricêntrica

Vamos apresentar uma maneira de dividir os simplexes de um complexo  $K$  construindo um novo complexo  $K^1$ , chamado a *primeira subdivisão baricêntrica de  $K$* , de modo que  $K$  e  $K^1$  tenham o mesmo poliedro. Faremos isso repetindo em cada simplexo de  $K$  um tipo de divisão mais elementar chamada *subdivisão estelar*.

Seja  $\sigma$  um simplexo de vértices  $v_0, \dots, v_n$ . Já vimos que cada ponto de  $x \in \sigma \subset \mathbb{R}^n$  pode ser escrito de forma única como  $x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n$ , onde  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$  e todos os  $\lambda_i$  são números reais não negativos. Os coeficientes  $\lambda_i$  são chamados as *coordenadas baricênticas* do ponto  $x$ . Se tivermos  $\lambda_i > 0$ , para todo  $0 \leq i \leq n$ , então dizemos que  $x$  é um *ponto interior* de  $\sigma$ .

**Definição 34.** O *baricentro* de um simplexo  $\sigma$  é o ponto interior  $v \in \sigma$  cujas coordenadas baricêntricas são todas iguais. Então,

$$v = \frac{1}{n+1}(v_0 + \cdots + v_n).$$

Consideremos um simplexo  $\sigma \in K$  e o baricentro  $v$  de  $\sigma$ . Vemos que  $\sigma$  sempre é face de algum simplexo  $\rho \in K$ . Com efeito, todo simplexo é face de si próprio. Vamos denotar por  $L$  o subcomplexo formado pela fronteira de  $\rho$  que não têm  $\sigma$  como face e substituir os simplexos  $\rho$  e  $\sigma$  pelo cone de base  $L$  e vértice  $v$ . De fato se trata de um cone bem definido uma vez que  $v$  está em posição geral com os vértices de qualquer simplexo de  $L$ . Vamos denotar o complexo resultante por  $K'$  e dizemos que  $K'$  é obtido de  $K$  pela *subdivisão estelar* do simplexo  $\sigma$ . Pode-se mostrar que  $K'$  é realmente um complexo simplicial e que  $|K'| = |K|$ .

Para o complexo  $K = \{(v_0, v_1, v_2), (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_0), v_0, v_1, v_2\}$  da Figura 19, a subdivisão estelar do simplexo  $\sigma = (v_0, v_1, v_2) = \rho$ , de baricentro  $v$ , tem como resultado o complexo  $K' = \{(v, v_0, v_1), (v, v_1, v_2), (v, v_2, v_0), (v_0, v_1), (v, v_0), (v, v_1), (v, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_0), v, v_0, v_1, v_2\}$ .

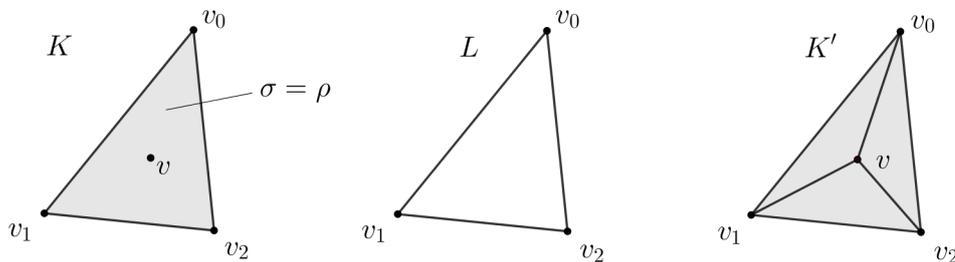


Figura 19 – Complexo  $K'$  obtido de  $K$  pela divisão estelar do simplexo  $\sigma = (v_0, v_1, v_2) = \rho$ .

Repetindo o processo de subdivisão estelar para todos os simplexos de  $K$ , tomados em ordem decrescente de dimensão, obtemos a primeira subdivisão baricêntrica, denotada por  $K^1$ . Então  $K^1$  também é um complexo simplicial com mesmo poliedro de  $K$ . Poderíamos ter definido  $K^1$  partindo diretamente de  $K$  como sendo a coleção de simplexos cujos vértices são os baricentros de todos os simplexos de  $K$ . Essa definição, contudo, não é prática para a demonstração do Teorema 12 e Corolário 2, os quais estabelecem que a subdivisão baricêntrica não altera os grupos de homologia. Por esta razão escolhemos fazer uso da subdivisão estelar.

Podemos continuar com o processo de subdivisão dos novos simplexos de  $K^1$  produzindo mais simplexos e de diâmetro cada vez menor, como ilustra a Figura 20. Indicamos por  $K^m$  o complexo obtido pela  $m$ -ésima subdivisão baricêntrica de  $K$ .

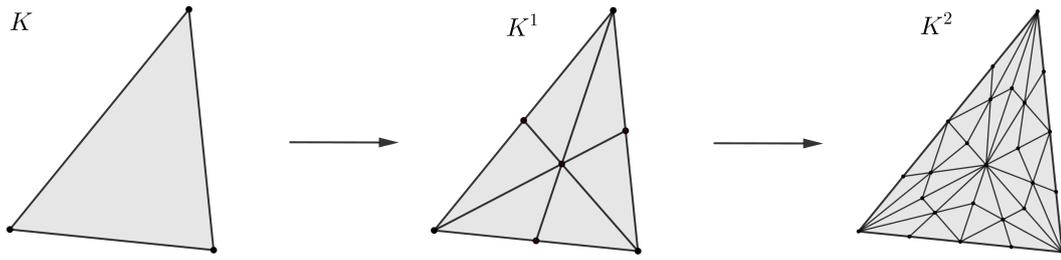


Figura 20 – Complexos  $K^1$  e  $K^2$  obtidos de  $K$  pela primeira e segunda subdivisão baricêntrica.

Definimos o número real  $\mu(K)$  como sendo o maior diâmetro dos simplexes de  $K$ . Escrevemos  $\mu(K) = \max\{\text{diam}(\sigma) ; \sigma \in K\}$ .

**Proposição 29.** Se a dimensão de  $K$  é  $n$  e  $K^1$  é a primeira subdivisão baricêntrica de  $K$  então  $\mu(K^1) \leq \frac{n}{n+1}\mu(K)$ .

*Demonstração.* É suficiente mostrar que um  $n$ -simplexo  $\alpha$  obtido da subdivisão baricêntrica de um  $n$ -simplexo  $\sigma$  satisfaz  $\text{diam}(\alpha) \leq \frac{n}{n+1}\text{diam}(\sigma)$ . Sejam  $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  e  $\alpha = (b_0, b_1, \dots, b_n)$  onde os vértices  $b_i$  são baricentros de faces de  $\sigma$ . Sem perder generalidade, podemos assumir que  $b_0 = v_0$ ,  $b_1 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1), \dots, b_n = \frac{1}{n+1}(v_0 + v_1 + \dots + v_n)$ . A distância entre os baricentros  $b_k$  e  $b_\ell$ , com  $k > \ell$ , é

$$\begin{aligned}
 |b_k - b_\ell| &= \left| \sum_{i=0}^{\ell} \frac{1}{\ell+1} (b_k - v_i) \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell} \left| \sum_{j=0}^k \frac{1}{k+1} (v_j - v_i) \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{\ell+1} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^k |v_j - v_i| \leq \\
 &\leq \frac{1}{\ell+1} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{\ell} k \text{diam}(\sigma) = \\
 &= \frac{1}{\ell+1} \frac{1}{k+1} (\ell+1)k \text{diam}(\sigma) = \\
 &= \frac{k}{k+1} \text{diam}(\sigma).
 \end{aligned}$$

E como  $k \leq n$  obtemos a afirmação acima, o que conclui a demonstração.  $\square$

Podemos concluir indutivamente que  $\mu(K^m) \leq \frac{n}{n+m}\mu(K)$ . Isso significa que a  $m$ -ésima subdivisão baricêntrica de  $K$  torna o diâmetro dos simplexes de  $K$  tão pequeno quanto queiramos, bastando tomar  $m$  grande o suficiente.

**Teorema 12.** Se  $K^l$  é o complexo obtido de  $K$  por uma única subdivisão estelar, então  $K^l$  e  $K$  tem grupos de homologia isomorfos.

Para provar esse teorema, vamos construir uma aplicação de cadeia  $\chi : C(K) \rightarrow C(K')$  e mostrar que ela induz isomorfismos entre os grupos de homologia  $H_*(K)$  e  $H_*(K')$ .

Se  $K'$  é obtido de  $K$  por meio de uma subdivisão estelar do  $n$ -simplexo  $\sigma \in K$  e  $\rho$  é um  $k$ -simplexo que tem  $\sigma$  como face,  $n \leq k$ , vemos que  $\rho$  é dividido em  $k$ -simplexos menores com os quais formamos  $K'$ . Definimos, então,  $\chi(\rho)$  como sendo a  $k$ -cadeia formado por esses simplexos menores, cada um deles com a orientação induzida de  $\rho$ . Formalmente, se  $v_0, \dots, v_n$  são os vértices de  $\sigma$ , com baricentro  $v$ , e  $v_0, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k$  são os vértices de  $\rho$ , então

$$\chi(\rho) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k). \quad (4.2)$$

Se  $\rho$  não tiver  $\sigma$  como face, então fazemos  $\chi(\rho) = \rho$ .

Na Figura 21, exibimos o complexo  $K'$  obtido de  $K$  pela subdivisão estelar do simplexo  $\sigma = (v_0, v_1)$  que é face de  $\rho = (v_0, v_1, v_2)$ . Destacamos a aplicação de  $\chi$  sobre o simplexo  $\rho$  que resultou na 2-cadeia  $(v, v_1, v_2) - (v, v_0, v_2)$ , gerada por novos simplexos em  $K'$ , cada um deles com a orientação induzida de  $\rho$ .

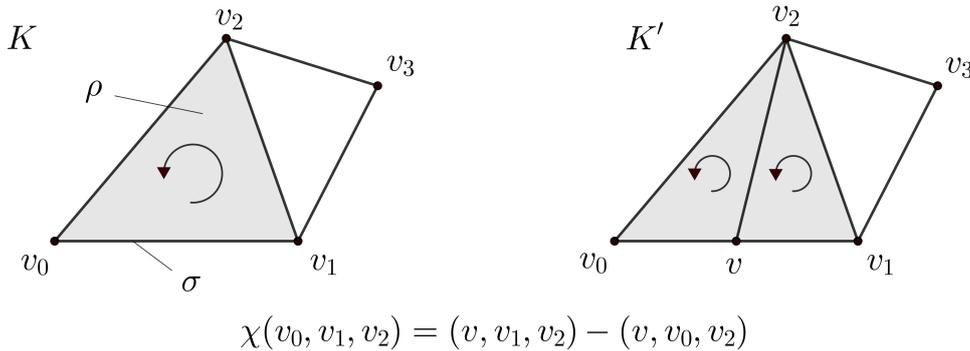


Figura 21 – Resultado da aplicação de subdivisão,  $\chi$ , sobre o simplexo  $\rho$ .

De modo natural, escrevemos o homomorfismo  $\chi : C_k(K) \rightarrow C_k(K')$  entre as  $k$ -cadeias de  $K$  e  $K'$  fazendo  $\chi(\sum a_i \rho_i) = \sum a_i \chi(\rho_i)$ .

**Proposição 30.**  $\chi$  é uma aplicação de cadeia.

*Demonstração.* É suficiente mostrar que vale  $\partial \chi(\rho) = \chi \partial(\rho)$  para um  $k$ -simplexo genérico  $\rho \in K$ . Pela linearidade de  $\chi$  concluiremos a validade para qualquer cadeia em  $C_k(K)$ . Seja  $v$  o baricentro de  $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$  e  $\rho = (v_0, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k)$  um  $k$ -simplexo de  $K$ , então

$$\begin{aligned} \chi \partial(\rho) &= \chi \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k) \right) + \\ &+ \chi \left( \sum_{i>n}^k (-1)^i (v_0, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) \right). \end{aligned}$$

E como  $\sigma$  não é face de  $(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k)$ , temos

$$\begin{aligned} \chi \partial(\rho) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k) + \\ &+ \sum_{j=0}^n \sum_{i>n}^k (-1)^{i+j} (v, v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k) . \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\partial \chi(\rho) = \partial \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k) \right) ,$$

desenvolvido de maneira conveniente, nos dá:

$$\begin{aligned} \partial \chi(\rho) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k) + \\ &- \sum_{i=0}^n \sum_{j<i}^n (-1)^{i+j} (v, v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k) + \\ &+ \sum_{i=0}^n \sum_{j>i}^n (-1)^{i+j} (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_k) + \\ &+ \sum_{i=0}^n \sum_{j>n}^k (-1)^{i+j} (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k) . \end{aligned}$$

Os dois somatórios do meio se cancelam completamente, resultando  $\partial \chi(\rho) = \chi \partial(\rho)$ .  $\square$

Há um significado geométrico interessante na proposição anterior que apareceu na parte final da demonstração. Toda fronteira extra criada no interior de  $\rho$  pela aplicação  $\chi$  é formada por pares de  $(k-1)$ -simplexos com orientações contrárias, os quais se cancelam. Podemos ver isso na Figura 21, onde

$$\begin{aligned} \partial \chi(v_0, v_1, v_2) &= \partial(v, v_1, v_2) - \partial(v, v_0, v_2) \\ &= \chi \partial(v_0, v_1, v_2) + (v, v_2) - (v, v_2) . \end{aligned}$$

Falta verificar que a aplicação (de cadeia) de subdivisão,  $\chi$ , induz homomorfismos bijetivos  $\chi_* : H_*(K) \rightarrow H_*(K')$ .

É importante ressaltar que o poliedro  $|K'|$  tem exatamente os mesmos vértices de  $|K|$  exceto pelo único vértice extra,  $v$ , adicionado pela subdivisão estelar de  $\sigma$ . Seja  $s : |K'| \rightarrow |K|$  a função simplicial que leva  $v$  em  $v_0$  e mantém fixos todos os outros vértices de  $K'$ . Então  $s$  define uma aplicação de cadeia,  $\theta : C(K') \rightarrow C(K)$  tal que  $\theta \circ \chi : C(K) \rightarrow C(K)$  é o homomorfismo

identidade. De fato,

$$\begin{aligned}
\theta \circ \chi(\rho) &= \theta \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, \dots, v_k) \right) \\
&= \theta(v, v_1, \dots, v_k) + \sum_{i=1}^n (-1)^i \theta(v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n, \dots, v_k) \\
&= (s(v), s(v_1), \dots, s(v_k)) \\
&= \rho,
\end{aligned}$$

pois  $s(v) = v_0$ , implica  $\theta(v, v_0, \dots, v_n, \dots, v_k) = 0$ .

Então  $(\theta \circ \chi) = Id$  induz sobre os grupos de homologia o homomorfismo identidade  $Id_* = (\theta \circ \chi)_* : H_*(K) \rightarrow H_*(K)$ . Assim, pela Proposição 28 concluímos que

$$Id_* = (\theta \circ \chi)_* = \theta_* \circ \chi_* .$$

Embora saibamos que  $\chi \circ \theta \neq Id$ , mostraremos que no nível das homologias ocorre  $(\chi \circ \theta)_* = Id_*$ , condição necessária para concluir que  $\theta_*$  é a inversa de  $\chi_*$ .

Seja  $L$  o subcomplexo de  $K'$  formado pelos simplexos que têm  $v$  como vértice, junto com todas as suas faces. Vemos que  $L$  é um cone de vértice  $v$ . Como  $\chi\theta(x) = x$  para todo simplexo  $x$  fora de  $L$ , então para qualquer  $k$ -cadeia  $z \in K'$  temos que  $z - \chi\theta(z)$  é uma  $k$ -cadeia em  $L$ . Em particular, se  $z$  é um  $k$ -ciclo, então  $\partial(z - \chi\theta(z)) = \partial(z) - \chi\theta\partial(z) = 0$  implica que  $z - \chi\theta(z)$  é um  $k$ -ciclo em  $L$ . Da Proposição 25, sabemos que  $H_k(L) = 0$  para  $k > 0$ . Logo, o  $k$ -ciclo  $z - \chi\theta(z)$  é bordo de alguma  $(k+1)$ -cadeia em  $L \subset K'$  donde  $z$  e  $\chi\theta(z)$  representam a mesma classe de homologia em  $H_k(K')$ . Isso nos dá

$$[\chi\theta(z)] = (\chi \circ \theta)_*[z] = [z] .$$

Assim,  $(\chi \circ \theta)_* = Id_*$  e isso mostra que  $H_k(K) \simeq H_k(K')$  para todo  $k > 0$ .

Para o caso  $k = 0$ , sabemos que qualquer cadeia  $z \in C_0(K')$  é uma combinação linear de vértices de  $K'$ , logo é um 0-ciclo. Vemos ainda que  $z - \chi\theta(z)$  é um múltiplo de  $v - v_0$ , portanto, é um bordo. Isso nos dá,  $[z - \chi\theta(z)] = 0$  em  $H_0(K')$ , donde  $(\chi \circ \theta)_* = Id_*$ .

**Corolário 2.** A subdivisão baricêntrica não altera os grupos de homologia de um complexo.

*Demonstração.* Seja  $K$  um complexo simplicial finito. Obtemos a  $m$ -ésima subdivisão baricêntrica  $K^m$  de  $K$  por meio de um número grande, porém finito, de subdivisões estelares.

$$K \xrightarrow{\chi} K' \xrightarrow{\chi} K'' \xrightarrow{\chi} \dots \xrightarrow{\chi} K^1 \xrightarrow{\chi} \dots \xrightarrow{\chi} K^m .$$

Em cada etapa do processo a aplicação de cadeia,  $\chi$ , induz isomorfismos entre os grupos de homologia (Teorema 12). Como a composta de isomorfismos é também um isomorfismo, concluímos  $H_k(K) \simeq H_k(K') \simeq \dots \simeq H_k(K^m)$ .  $\square$

A composição do número finito de subdivisões estelares para obtenção da  $m$ -ésima subdivisão baricêntrica de  $K$  nos dá uma aplicação de cadeia  $\chi_m : C(K) \rightarrow C(K^m)$  que também chamaremos por *aplicação (de cadeia) de subdivisão*. Na outra direção, de  $K^m$  para  $K$ , temos uma aplicação  $\theta$  para cada subdivisão estelar de  $K$ . Embora  $\theta$  não seja única, sempre podemos fazer uma escolha particular em cada estágio, de modo que a composição de todas elas nos leva a escrever a *aplicação simplicial* resultante  $\theta_m : |K^m| \rightarrow |K|$ .

## 4.5 Invariância Topológica

Queremos definir a homologia de um espaço topológico compacto e triangulável  $X$ . Se  $h : |K| \rightarrow X$  é o homeomorfismo associado à triangulação de  $X$ , parece natural definir

$$H_*(X) = H_*(K) . \quad (4.3)$$

No entanto, para que esta definição tenha sentido, precisamos mostrar que  $H_*(X)$  independe da triangulação escolhida. Em outras palavras, para qualquer outro homeomorfismo  $g : |L| \rightarrow X$ , devemos provar  $H_*(K) \simeq H_*(L)$ .

É claro que dois poliedros  $|K|$  e  $|L|$  associados à triangulação de  $X$  são homeomorfos.

$$|K| \xrightarrow{h} X \xrightarrow{g^{-1}} |L| .$$

Seguindo uma série de etapas, provaremos a invariância topológica dos grupos de homologia mostrando a existência de um isomorfismo  $f_* : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$  a partir de um homeomorfismo  $f = g^{-1} \circ h : |K| \rightarrow |L|$  conhecido à priori.

Inicialmente mostraremos que qualquer função contínua  $f : |K| \rightarrow |L|$  induz um homomorfismo  $f_* : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ . Tal homomorfismo vem da induzida de uma aplicação simplicial  $s : |K| \rightarrow |L|$  que aproxima  $f$ .

**Definição 35.** Dizemos que a função simplicial  $s : |K| \rightarrow |L|$  é uma *aproximação simplicial* de uma função contínua  $f : |K| \rightarrow |L|$  se  $s(x)$  pertencer ao único simplexo de  $L$  que tem  $f(x)$  em seu interior.

A importância de se obter uma aproximação simplicial  $s$  de  $f$  é que ela é sempre *homotópica* a  $f$ . Com efeito, a função  $F : |K| \times [0, 1] \rightarrow |L|$  dada por  $F(x, t) = (1-t)s(x) + tf(x)$  é tal que  $F(x, 0) = s(x)$  e  $F(x, 1) = f(x)$ . Para  $x \in |K|$ , da definição de aproximação simplicial sabemos que algum simplexo de  $L$  contém  $s(x)$  e  $f(x)$ . Como o simplexo é um conjunto convexo, todos os pontos da forma  $(1-t)s(x) + tf(x)$  também pertencem a este simplexo. Por isso, a imagem de  $F$  está em  $|L|$  e podemos concluir que  $F$  é uma *homotopia* de  $s$  para  $f$ . Isso significa dizer que  $s$  pode ser continuamente deformada em  $f$  e toda informação homológica que  $s$  transmite é a mesma transmitida por  $f$ , como afirma o Teorema 15.

Suponhamos  $s : |K| \rightarrow |L|$  e  $t : |K| \rightarrow |L|$  duas aproximações simpliciais de uma mesma função contínua  $f : |K| \rightarrow |L|$ . Então, é imediato da Definição 35 que elas satisfazem a seguinte propriedade: para todo  $x \in |K|$  existe um único simplexo  $\rho \in L$  tal que  $s(x) \in \rho$  e  $t(x) \in \rho$ . Basta considerar  $\rho$  o simplexo para o qual  $f(x)$  é um ponto interior. Aplicações simpliciais que satisfazem essa propriedade são chamadas de *simplicialmente próximas* e o fato importante relacionado a elas está expresso no resultado a seguir.

**Proposição 31.** Duas aplicações entre poliedros que são simplicialmente próximas definem o mesmo homomorfismo entre as homologias dos complexos associados.

*Demonstração.* Queremos mostrar  $s_* = t_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$ , para todo  $n$ . Para tanto é suficiente provar que as aplicações  $s$  e  $t$  são homotópicas por cadeia, ou seja, devemos exibir um homomorfismo  $T : C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(L)$ , tal que para  $x \in C_n(K)$  ocorre

$$s(x) - t(x) = \partial \circ T(x) + T \circ \partial(x) . \quad (4.4)$$

Para facilitar a notação, estamos indicando com o mesmo símbolo  $s$  e  $t$  as aplicações de cadeia induzidas. Conhecida a homotopia de cadeia  $T$  concluímos a demonstração já que, para qualquer classe  $[x] \in H_n(K)$ , sabemos que  $x$  é um  $n$ -ciclo em  $C_n(K)$  e  $s_n(x) - t_n(x) = \partial T(x)$  é um bordo em  $C_{n+1}(L)$ . Logo, no nível das homologias,  $s_*[x] - t_*[x] = 0$ , donde  $s_*[x] = t_*[x]$ .

Vamos construir  $T$  definindo uma expressão conveniente para cada  $n$ -simplexo de  $K$  e o homomorfismo surgirá naturalmente ao estender linearmente para as cadeias de  $C_n(K)$ .

- ( $n = 0$ ). Seja  $\sigma_0$  um vértice de  $K$ . Como  $s$  e  $t$  são simplicialmente próximas, sabemos que  $s(\sigma_0)$  e  $t(\sigma_0)$  são vértices de um único simplexo  $\rho_{\sigma_0} \in L$ . Definimos

$$T(\sigma_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } t(\sigma_0) = s(\sigma_0), \\ (t(\sigma_0), s(\sigma_0)) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vemos que essa definição satisfaz a Equação (4.4). Mais ainda, no caso não trivial  $T(\sigma_0)$  é uma aresta de  $\rho_{\sigma_0}$ .

- ( $n = 1$ ). Seja  $\sigma_1 = (u, v)$ , 1-simplexo de  $K$ . Então  $s(\sigma_1)$  e  $t(\sigma_1)$  pertencem a um único simplexo  $\rho_{\sigma_1} \in L$ . Mais ainda,  $T\partial(\sigma_1) = T(v) - T(u)$  é uma cadeia formada por arestas de  $\rho_{\sigma_1}$ . Olhando para  $\rho_{\sigma_1}$  como um subcomplexo de  $L$ , podemos verificar que a 1-cadeia  $c = s(\sigma_1) - t(\sigma_1) - T\partial(\sigma_1) \in \rho_{\sigma_1}$  é um ciclo. De fato, como a aplicação de  $T$  em um vértice satisfaz a Equação (4.4), calculamos  $\partial T\partial(\sigma_1) = \partial T(v) - \partial T(u) = s\partial(\sigma_1) - t\partial(\sigma_1)$  e isso nos dá  $\partial(s(\sigma_1) - t(\sigma_1) - T\partial(\sigma_1)) = \partial(c) = 0$ . Vimos no Exemplo 32 que  $H_1(\rho_{\sigma_1}) = 0$ , donde sabemos que  $c$  é bordo de alguma 2-cadeia  $\beta_2 \in \rho_{\sigma_1} \in L$ . Assim, para também satisfazer 4.4, definimos convenientemente

$$T(\sigma_1) = \beta_2 .$$

- Para  $n > 0$ , repetimos o argumento anterior para um  $n$ -simplexo  $\sigma_n$  qualquer de  $K$ . Se  $\rho_{\sigma_n}$  denota o único simplexo que contém  $s(\sigma_n)$  e  $t(\sigma_n)$ , destacando sabermos que  $H_n(\rho_{\sigma_n}) = 0$ , então é suficiente definir

$$T(\sigma_n) = \beta_{n+1} ,$$

onde  $\beta_{n+1}$  é a  $(n + 1)$ -cadeia em  $\rho_{\sigma_n} \in L$  tal que  $\partial(\beta_{n+1}) = s(\sigma_n) - t(\sigma_n) - T\partial(\sigma_n)$ .

□

Em geral não esperamos obter aproximações simpliciais para funções contínuas arbitrárias. No entanto, o Teorema 13 mostra que sempre é possível encontrar uma aproximação simplicial se considerarmos uma subdivisão baricêntrica conveniente para o poliedro. Com objetivo de demonstrar esse teorema, seguiremos com algumas definições e resultados úteis.

**Definição 36.** Se  $v$  é um vértice de  $K$ , definimos a *estrela aberta de vértice  $v$*  como sendo união dos interiores dos simplexos de  $K$  que têm  $v$  como vértice. Escrevemos

$$\text{star}(v, K) = \bigcup_{\sigma \in K, v \in \sigma} \text{int}\sigma .$$

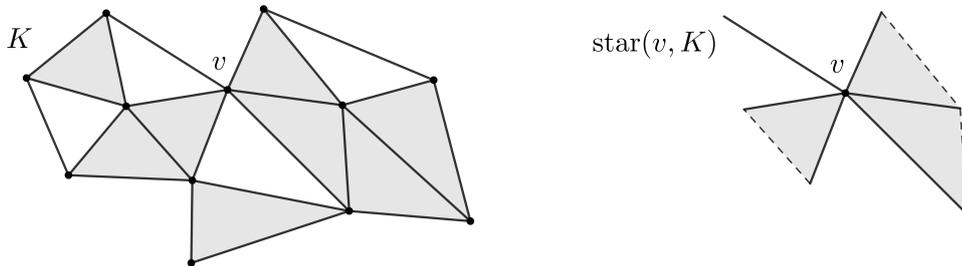


Figura 22 – Estrela aberta de vértice  $v$  em um complexo bidimensional  $K$ .

**Proposição 32.** Os vértices  $v_0, \dots, v_n$  de um complexo simplicial  $K$  geram  $\sigma = (v_0, \dots, v_n) \in K$  se e somente se  $\bigcap_{i=0}^n \text{star}(v_i, K) \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* Se  $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$  então os pontos interiores de  $\sigma$  são também pontos de todas as estrelas abertas de vértices  $v_0, \dots, v_n$ . Por outro lado, tomando  $x \in \bigcap_{i=0}^n \text{star}(v_i, K)$ , seja  $\rho$  o único simplexo de  $K$  que tem  $x$  como ponto interior. Então cada  $v_i$  deve ser um vértice de  $\rho$  donde  $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$  é uma face de  $\rho$ . □

O complementar de uma estrela aberta é uma união de simplexos. Então  $\text{star}(v, K)$  é um conjunto aberto na topologia de  $|K|$  e a união de todas as estrelas abertas de  $K$  é uma *cobertura aberta* do poliedro.

**Proposição 33.** Se  $\mathcal{F} = \{U_i\}$  é uma cobertura aberta de  $|K|$  então existe um inteiro  $m > 0$  tal que toda estrela aberta da  $m$ -ésima divisão baricêntrica de  $K$  está contida em algum aberto  $U_i \subseteq |K|$ .

*Demonstração.* Como  $|K|$  é um espaço métrico compacto, seja  $\delta$  o número de Lebesgue para a cobertura aberta  $\mathcal{F} = \{U_i\}$ . Sua existência é garantida pelo Lema 1. Escolhemos, então, um inteiro  $m > 0$  suficientemente grande para o qual  $\mu(K^m) < \delta/2$ . Então, como toda estrela aberta de um complexo tem diâmetro menor ou igual do que duas vezes o valor  $\mu$  desse complexo, temos

$$\text{diam}(\text{star}(v, K^m)) \leq 2\mu(K^m) < \delta ,$$

donde  $\text{star}(v, K^m)$  está contida em algum aberto  $U_i \subseteq |K|$ , qualquer que seja o vértice  $v \in K^m$ .  $\square$

**Teorema 13.** Dada uma função contínua  $f : |K| \rightarrow |L|$  sempre podemos escolher um inteiro  $m$  suficientemente grande para o qual existe uma aproximação simplicial  $s : |K^m| \rightarrow |L|$  para  $f$ .

*Demonstração.* As estrelas abertas  $\text{star}(u_i, L)$  de todos os vértices  $u_i \in L$  formam uma cobertura aberta para  $|L|$ . Como  $f : |K| \rightarrow |L|$  é contínua, a imagem inversa por  $f$  desses abertos de  $|L|$  nos dá uma cobertura aberta  $\mathcal{F} = \{f^{-1}\text{star}(u_i, L)\}$  de  $|K|$ . Pela Proposição 33 existe  $m > 0$  tal que cada estrela aberta  $\text{star}(v, K^m)$  está contida em  $f^{-1}(\text{star}(u, L))$  para algum vértice  $u \in L$ .

Assim podemos definir a aplicação  $s : |K^m| \rightarrow |L|$  escolhendo para cada vértice  $v$  de  $K^m$  um vértice  $u$  em  $L$  tal que  $f(\text{star}(v, K^m)) \subseteq \text{star}(u, L)$  e fazemos  $s(v) = u$ . Precisamos verificar que a aplicação  $s$  é simplicial. Sejam  $\sigma = (v_0, \dots, v_n) \in K^m$  e  $x$  um ponto interior de  $\sigma$ . Então  $x \in \bigcap_{i=0}^n \text{star}(v_i, K^m)$  e  $f(x) \in \bigcap_{i=0}^n \text{star}(s(v_i), L)$ . Portanto,  $f(x)$  pertence ao interior de um único simplexo  $\rho \in L$  que tem  $s(v_0) = u_0, \dots, s(v_n) = u_n$  entre os seus vértices, ou seja, esses vértices geram uma face de  $\rho$ . Isso mostra que  $s$  leva simplexos de  $K^m$  em simplexos de  $L$  e, portanto, está bem definida como aplicação simplicial. Mais ainda, o simplexo  $\rho \in L$  que tem  $f(x)$  em seu interior contém o simplexo  $(u_0, \dots, u_n)$  o qual contém  $s(x)$ . Logo,  $s$  é uma aproximação simplicial de  $f$ .  $\square$

A existência de uma aproximação simplicial  $s$  para  $f$  nos permite definir o homomorfismo

$$f_* = s_* \circ \chi_{m*} : H_*(K) \rightarrow H_*(L) , \quad (4.5)$$

onde  $s_* : H_*(K^m) \rightarrow H_*(L)$  é o homomorfismo induzido de  $s$  e  $\chi_{m*} : H_*(K) \rightarrow H_*(K^m)$  é o isomorfismo oriundo da aplicação de subdivisão.

Essa definição para  $f_*$  pressupõe uma escolha para  $s$ , pois certamente existem outras aproximações simpliciais de  $f$ . Devemos mostrar que essas diferentes escolhas não mudam o homomorfismo resultante.

**Proposição 34.** Dados inteiros  $n \geq m \geq 0$  e aproximações simpliciais  $s : |K^m| \rightarrow |L|$  e  $t : |K^n| \rightarrow |L|$  da mesma função contínua  $f : |K| \rightarrow |L|$ . Então  $s_* \circ \chi_{m*} = t_* \circ \chi_{n*} : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ .

*Demonstração.* Lembramos da aplicação simplicial  $\theta : |K'| \rightarrow |K|$ , que ocorre naturalmente na subdivisão estelar de  $K$  e que inverte  $\chi : C(K) \rightarrow C(K')$  no nível das homologias. Compondo uma quantidade finita dessas aplicações, relativas às subdivisões estelares que transformam  $K^m$  em  $K^n$ , obtemos uma aplicação simplicial  $\theta_{n,m} : |K^n| \rightarrow |K^m|$  tal que  $(\theta_{n,m})_*$  é a inversa de  $(\chi_{m,n})_* : H_*(K^m) \rightarrow H_*(K^n)$ . É imediato ver que  $\chi_{n*} = (\chi_{m,n})_* \circ \chi_{m*}$ , portanto

$$s_* \circ \chi_{m*} = s_* \circ (\theta_{n,m})_* \circ (\chi_{m,n})_* \circ \chi_{m*} = s_* \circ (\theta_{n,m})_* \circ \chi_{n*}.$$

Devemos mostrar que  $s_* \circ (\theta_{n,m})_*$  é igual a  $t_*$ . Notamos que  $s \circ \theta_{n,m}$  e  $t$  são duas aproximações simpliciais para  $f$ , logo são simplicialmente próximas. Isso nos permite concluir, em vista da Proposição 31, que  $s_* \circ (\theta_{n,m})_* = t_*$ . Assim,

$$s_* \circ \chi_{m*} = t_* \circ \chi_{n*},$$

concluindo a demonstração. □

Desse modo, mostramos que a qualquer função contínua  $f$  entre os poliedros  $|K|$  e  $|L|$  podemos definir o homomorfismo  $f_* = s_* \circ \chi_{m*}$  sem ambiguidades.

**Teorema 14.** Se  $Id : |K| \rightarrow |K|$  é a identidade então  $Id_* : H_*(K) \rightarrow H_*(K)$  é o homomorfismo identidade. Se tivermos duas funções contínuas  $h : |K| \rightarrow |L|$  e  $g : |L| \rightarrow |M|$ , então a composta  $(g \circ h)_* = g_* \circ h_* : H_n(K) \rightarrow H_n(M)$  para todo  $n$ .

*Demonstração.* Mostra-se a primeira afirmação observando que se  $Id : |K| \rightarrow |K|$  é a identidade, então ela é uma função simplicial, já que leva cada simplexo de  $K$  nele próprio. A induzida  $Id_*$  leva ciclos e bordos de  $C_n(K)$  neles próprios, de modo que fica claro o homomorfismo identidade no nível das homologias.

Escolhemos uma aproximação simplicial  $t : |L^n| \rightarrow |M|$  para  $g$  e outra aproximação simplicial  $s : |K^m| \rightarrow |L^n|$  para  $h$ . Sejam  $\chi_m : C(K) \rightarrow C(K^m)$  e  $\chi_n : C(L) \rightarrow C(L^n)$  aplicações cadeia de subdivisão e  $\theta_n : |L^n| \rightarrow |L|$  a aplicação simplicial tal que  $\theta_{n*} : H_*(L^n) \rightarrow H_*(L)$  é inversa de  $\chi_{n*}$ . Temos então o diagrama seguinte.

$$\begin{array}{ccccc} |K| & \xrightarrow{h} & |L| & \xrightarrow{g} & |M| \\ \chi_m \downarrow & & \chi_n \downarrow & \nearrow \theta_n & \nearrow t \\ |K^m| & \xrightarrow{s} & |L^n| & & \end{array}$$

Vemos que  $\theta_n \circ s$  é uma aproximação simplicial de  $h$  e  $t \circ s$  é uma aproximação simplicial de  $g \circ h$ . No nível das homologias temos

$$\begin{array}{ccccc} H_*(K) & \xrightarrow{h_*} & H_*(L) & \xrightarrow{g_*} & H_*(M) \\ \chi_{m*} \downarrow & & \chi_{n*} \downarrow & \nearrow \theta_{n*} & \nearrow t_* \\ H_*(K^m) & \xrightarrow{s_*} & H_*(L^n) & & \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 (g \circ h)_* &= (t \circ s)_* \chi_{m*} \\
 &= t_* \circ (\chi_{n*} \circ \theta_{n*}) \circ s_* \circ \chi_{m*} \\
 &= (t_* \circ \chi_{n*}) \circ (\theta_{n*} \circ s_*) \circ \chi_{m*} \\
 &= g_* \circ h_* .
 \end{aligned}$$

como queríamos. □

Se  $h : |K| \rightarrow X$  e  $g : |L| \rightarrow X$  são duas triangulações diferentes do espaço topológico  $X$ , então  $f = g^{-1} \circ h : |K| \rightarrow |L|$  é um homeomorfismo com inversa  $f^{-1} = h^{-1} \circ g : |L| \rightarrow |K|$ . Do que mostramos antes, as induzidas  $f_*$  e  $f_*^{-1}$  são homomorfismos entre as homologias. De fato, temos aí um isomorfismo, já que o Teorema 14 nos permite escrever

$$(Id)_* = (f \circ f^{-1})_* = f_* \circ f_*^{-1} : H_*(L) \rightarrow H(L) ,$$

e também

$$(Id)_* = (f^{-1} \circ f)_* = f_*^{-1} \circ f_* : H_*(K) \rightarrow H(K) .$$

Isso mostra que  $H_n(K) \simeq H_n(L)$ , para todo  $n$  e garante a definição (4.3) para os grupos de homologia de um espaço topológico compacto triangulável, independente da triangulação escolhida.

Na realidade, a igualdade (a menos isomorfismo) dos grupos de homologia ocorre em uma situação ainda mais fraca do que supor os espaços homeomorfos. Não só os grupos de homologia mas também a *característica de Euler-Poincaré* e o *grupo fundamental* são invariantes por uma classe de funções muito maior do que a classe dos homeomorfismos. Eles são conhecidos como invariantes do *tipo de homotopia* do espaço.

Dois espaços  $X$  e  $Y$  têm o mesmo tipo de homotopia, ou são *homotopicamente equivalentes*, se existirem funções contínuas  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  tais que  $g \circ f : X \rightarrow X$  e  $f \circ g : Y \rightarrow Y$  são as identidades. É imediato verificar que espaços homeomorfos têm o mesmo tipo de homotopia.

O Teorema 15, cuja referência encontramos em (ARMSTRONG, 1983, p. 189) é central para demonstrar a invariância dos grupos de homologia em espaços com mesmo tipo de homotopia. Sua demonstração segue raciocínio análogo ao que desenvolvemos na prova do Teorema 13 e será omitida.

**Teorema 15.** Se  $f, g : |K| \rightarrow |L|$  funções contínuas homotópicas, então  $f_* = g_* : H_*(K) \rightarrow H_*(L)$ .

Retomando o caso mais forte, de espaços homeomorfos, provamos completamente a invariância dos grupos de homologia. Parece razoável perguntar se existe alguma situação para a qual a recíproca é igualmente verdadeira. Ou seja, se existe alguma coleção interessante de espaços topológicos para os quais a “igualdade” dos grupos de homologia implica numa equivalência topológica.

Em 1900 Poincaré publicou um artigo onde afirmou serem os grupos de homologia “poderosos o suficiente para caracterizar topologicamente a 3–esfera”(STEWART, 2013, p. 222). Em outras palavras, sua afirmação dizia que espaços topológicos com os mesmos grupos de homologia da esfera  $S^3$  eram homeomorfos a ela. Em 1904, no entanto, provou estar errado ao exibir um espaço de dimensão 3 que não pode ser continuamente deformado na 3–esfera, embora apresente os mesmos grupos de homologia. Esse espaço é atualmente conhecido como *espaço dodecaédrico de Poincaré* e consiste, segundo a interpretação de Herbert Seifert e Constantin Weber em publicação de 1933, de um dodecaedro com as faces opostas identificadas com uma torção de  $36^\circ$ , como mostra a Figura 23, adaptada de (STEWART, 2013, p. 223).

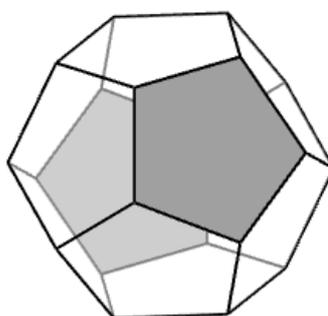


Figura 23 – Identificação, ou colagem, das faces opostas de um dodecaedro para obtenção do espaço dodecaédrico de Poincaré.

Devemos enfatizar que a esfera  $S^3$  não é uma “bola” sólida. As esferas são variedades fechadas, o que significa dizer que não têm bordo. Já a “bola” sólida tem como fronteira uma esfera  $S^2$ . De fato a 3–esfera está totalmente imersa em  $\mathbb{R}^4$  de modo que a sua construção no espaço tridimensional é impossível.

Como os grupos de homologia falharam em diferenciar a 3–esfera do espaço dodecaédrico, Poincaré precisou de outro invariante topológico, o *grupo fundamental*, para evidenciar essa diferença. Em uma hipótese análoga a que fez para os grupos de homologia, conjecturou que espaços topológicos com grupo fundamental trivial, portanto isomorfos ao de uma  $n$ –esfera, seriam topologicamente equivalentes a esfera  $n$ –dimensional. Esse problema ficou conhecido como a *conjectura de Poincaré* e permaneceu em aberto por quase um século, razão pela qual integrou a lista dos sete problemas do milênio. Em 2002 o matemático russo Grigori Perelman pôs fim ao suspense e provou com técnicas novas e revolucionárias a validade da conjectura.

No capítulo a seguir falaremos de outro invariante topológico, a *característica de Euler-Poincaré*, e mostraremos sua estreita relação com os grupos de homologia.



## CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ

Ao tentar obter uma classificação para os sólidos, Leonhard Euler (1707-1783) percebeu que as características essenciais de um poliedro são as componentes de dimensão 0, 1 e 2 da sua superfície. Em (RICHESON, 2015, p. 76), encontramos uma tradução do que Euler escreveu:

“Portanto, devem ser considerados três tipos de elementos na fronteira de qualquer corpo sólido; nomeadamente 1) pontos, 2) linhas e 3) superfícies, ou, com os nomes usados especificamente para esta finalidade: 1) ângulos sólidos, 2) arestas e 3) faces. Estes três tipos de elementos determinam completamente o sólido” (EULER, 1758b).

O emprego da palavra *aresta* para designar as linhas retas de um poliedro foi uma contribuição do Euler e apareceu pela primeira vez, com esse sentido, numa carta de 14 novembro de 1750 endereçada ao matemático Christian Goldbach (1690-1764), originalmente publicada por (FUSS, 1843, p. 536).

Nessa mesma carta, na proposição de número 6, pode ser lida a relação que encontrou para os poliedros: “*In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum binario superat numerum acierum, seu est  $H + S = A + 2$* ” cuja tradução pode ser “*Em cada sólido delimitado por faces planas, a soma do número de faces com o número de ângulos sólidos excede por duas unidades o número de arestas, ou seja  $H + S = A + 2$* ” (RICHESON, 2015, p. 78).

Na proposição de Euler, as letras  $H$ ,  $S$  e  $A$  representam o número de faces (*hedra*), vértices (*anguli solidi*) e arestas (*acies*), respectivamente. Renomeando e rearranjando os termos, obtemos a conhecida *fórmula de Euler*

$$V - A + F = 2, \quad (5.1)$$

onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  o número de arestas e  $F$  o número de faces do poliedro.

É provável que Euler “considerasse como poliedro apenas aqueles que são homeomorfos à esfera  $S^2$ , para os quais, a igualdade acima é certamente verdadeira” (LIMA, 1985).

É curioso observar que apesar de ter sido um matemático notável e altamente produtivo, Euler só apresentou uma prova para o seu teorema oito anos mais tarde, no artigo intitulado “*Demonstratio nonnullatum insifnium proprietatum, quibus solidahedris planis inclusa sunt praedita*” (EULER, 1758a). Contudo, sua demonstração parece ter tido problemas, razão pela qual diversos outros matemáticos trabalharam tentando corrigí-la. Depois de Euler, muitas demonstrações corretas para o seu teorema foram apresentadas. Uma boa leitura sobre esse assunto, e de fácil entendimento, pode ser encontrada em (LIMA, 2012b, p. 73-112). No entanto, foi Poincaré o primeiro a compreender que o teorema de Euler é, de fato, um teorema de Topologia, ao observar que o número  $V - A + F$  é um *invariante topológico*.

Seguindo a noção iniciada por Euler, de que as características de um poliedro estão associadas às suas componentes de dimensão 0, 1 e 2, vamos indicar por  $\chi(P)$  a soma alternada do número de componentes  $k$ -dimensionais de um poliedro  $n$ -dimensional  $P$ , para  $0 \leq k \leq n$ . Assim, denotando por  $c_k$  o número de componentes  $k$ -dimensionais de  $P$ , escrevemos

$$\chi(P) = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k . \quad (5.2)$$

Em uma publicação de 1893, Poincaré mostrou que  $\chi(P)$  equivale à soma, também alternada, dos *números de Betti* de  $P$ , (POINCARÉ, 1893), e, com isso, não só estendeu a noção de Euler para poliedros de qualquer dimensão como estabeleceu o seu significado topológico. Em razão disso, o número  $\chi(P)$  é hoje conhecido como a *característica de Euler-Poincaré* do poliedro  $P$ .

## 5.1 Relação com os Grupos de Homologia

Os números de Betti são a ponte que conecta a característica de Euler ao seu significado topológico. Antes de apresentar a sua definição formal, vamos recordar algumas ideias importantes desenvolvidas nos capítulos anteriores.

O  $k$ -ésimo grupo de homologia de um complexo simplicial  $K$  é um grupo abeliano finitamente gerado,  $H_k(K)$ , dado pelo quociente do grupo  $Z_k$  dos  $k$ -ciclos pelo grupo  $B_k$  dos  $k$ -bordos em  $K$ . Cada elemento de  $H_k$  é então uma classe de equivalência de  $k$ -ciclos que diferem pelo bordo de  $(k+1)$ -cadeias em  $K$ . De acordo com o Teorema 7, o *rank* de  $H_k$ , isto é, a quantidade de classes em  $H_k$  que são geradores livres, corresponde ao número de cópias de  $\mathbb{Z}$  em qualquer representação de  $H_k$ . Assim, se tivermos  $H_k(K) \simeq \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_3$ , sabemos por esse teorema que  $rk(H_k) = 2$ .

**Definição 37.** O número de geradores livres do  $k$ -ésimo grupo de homologia de um complexo  $K$  é chamado o  $k$ -ésimo *número de Betti* e será representado por  $\beta_k$ .

Então, pelo que dissemos acima,

$$\beta_k = rk(H_k(K)) .$$

Vimos também que as componentes  $k$ -dimensionais do poliedro  $|K|$  são os  $k$ -simplexos do complexo associado  $K$ . Logo, são os geradores do grupo abeliano livre das  $k$ -cadeias de  $K$ . Então cada número  $c_k$  da Equação (5.2) corresponde exatamente ao rank de  $C_k(K)$ .

$$c_k = rk(C_k(K)) . \quad (5.3)$$

Aproveitamos também para indicar o rank dos grupos abelianos livres  $Z_k$  e  $B_k$  por

$$z_k = rk(Z_k(K)) \text{ e}$$

$$b_k = rk(B_k(K)) .$$

Considerando o  $k$ -ésimo operador bordo  $\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$ , como  $Z_k = \ker(\partial_k)$  e  $B_{k-1} = \text{Im}(\partial_k)$ , aplicamos o Teorema 9 para escrever

$$c_k = z_k + b_{k-1} . \quad (5.4)$$

Na demonstração da Proposição 23 observamos que  $C_0(K) = Z_0(K)$ , qualquer que seja o complexo  $K$ . Isso nos dá  $c_0 = z_0$ . Mais ainda, se  $n$  é a dimensão de  $K$ , então  $C_{n+1} = 0$ , pois não existe  $n+1$ -cadeia em  $K$ , o que nos dá  $B_n = \partial_{n+1}(C_{n+1}) = 0$ . Logo  $b_n = rk(B_n) = 0$ .

Finalmente, aplicando o Corolário 1, para  $H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K)$ , já que  $B_k$  é subgrupo de  $Z_k$ , temos

$$\beta_k = rk(H_k(K)) = z_k - b_k . \quad (5.5)$$

Com a notação adequada, estamos prontos para provar o teorema de Poincaré.

**Teorema 16.** Para um espaço triangulável  $X$ , de dimensão  $n$ ,

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k .$$

*Demonstração.* Seja  $K$  o complexo simplicial associado à triangulação de  $X$ . Então pelas Equações (5.2), (5.3) e (5.4), temos:

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k rk(C_k(K)) \\ &= c_0 - c_1 + \cdots + (-1)^n c_n \\ &= (z_0) - (z_1 + b_0) + (z_2 + b_1) - \cdots + (-1)^n (z_n + b_{n-1}) \end{aligned}$$

Como não há  $(n+1)$ -cadeia em  $K$ , temos  $B_n = \{0\}$ , donde  $b_n = 0$ . Reagrupando os termos convenientemente e aplicando a Equação (5.5) concluímos

$$\begin{aligned} \chi(X) &= (z_0 - b_0) - (z_1 - b_1) + \cdots + (-1)^n (z_n) \\ &= \beta_0 - \beta_1 + \cdots + (-1)^n \beta_n . \end{aligned}$$

□

Embora Poincaré tenha afirmado explicitamente que  $\chi(X)$  é um invariante topológico, ele nunca se preocupou em demonstrar a invariância dos números de Betti (LIMA, 1985, p. 50). No entanto, tendo mostrado a invariância dos grupos de homologia para espaços homeomorfos (Capítulo 4), a invariância dos número de Betti sege imediatamente da Definição 37.

No Exemplo 33, apresentamos a homologia da esfera  $S^n$ .

$$\begin{aligned}H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z} &\implies \beta_0(S^n) = 1, \\H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} &\implies \beta_n(S^n) = 1 \quad \text{e} \\H_k(S^n) \simeq 0 &\implies \beta_k(S^n) = 0 \text{ se } k \neq 0, n.\end{aligned}$$

É fácil verificar que  $\chi(S^n) = 2$  se  $n$  for um número par e igual a 0 se  $n$  for ímpar.

Fica claro, então, que todo poliedro homeomorfo à esfera  $S^2$ , em particular os poliedros convexos, terão a característica de Euler-Poincaré igual a 2. Daí que a Equação (5.1) acaba saindo como um resultado evidente, embora nada trivial. De fato, foi ela quem primeiro inspirou a realização deste trabalho.

---

## ALGUMAS APLICAÇÕES PARA SALA DE AULA

---

O primeiro contato dos estudantes com a relação de Euler para poliedros, de maneira geral, ocorre nos anos finais do Ensino Fundamental. Na ocasião é comum a apresentação da fórmula (5.1) sem demonstração e o que se costuma fazer em seguida é verificar que ela funciona para uma quantidade de poliedros, quase sempre regulares.

O assunto retorna no Ensino Médio, normalmente no segundo ano, como um conteúdo da Geometria Espacial. Dessa vez, com alguma demonstração. As aplicações, nessa altura da escolarização, limitam-se a encontrar a quantidade de uma das três componentes da superfície do poliedro (vértices, arestas e faces) quando as outras duas são dadas.

É difícil, senão extremamente raro, ocorrer qualquer menção ao significado topológico do teorema de Euler. De fato não encontramos em livros didáticos atuais referências à sua natureza invariante ou estreita relação com a esfera bidimensional. Tão pouco costuma ser discutido a irrelevância de se aplicar a fórmula de Euler a um poliedro *sólido*, quando, na verdade, o que importa são os elementos da sua *superfície*. Mais ainda, não se destaca que esse mesmo cálculo pode ser efetuado sobre qualquer estrutura onde é possível identificar vértices, arestas e faces, inclusive àquelas desenhadas no plano.

Diante disso, propomos uma pequena sequência didáticas com o objetivo de desenvolver as noções de triangulação e invariância topológica, utilizando ideias simples e pouco recurso. As duas primeiras parecem adequadas ao currículo do Ensino Fundamental. As demais, evidentemente dependentes das duas anteriores, fazem mais sentido para o contexto do Ensino Médio e seguem num crescente de dificuldade e abstração.

**Atividade Proposta 1.**

**Objetivo:** *Perceber que a divisão de uma região plana em triângulos, seguindo algumas regras para a triangulação, não modifica a característica de Euler dessa região.*

**Descrição dos procedimentos:** Num primeiro momento, pede-se aos alunos que desenhem uma região poligonal plana em uma folha de papel. É necessário explicar com cuidado a construção dessa região enfatizando que deve ser limitada por uma linha poligonal fechada, simples ou não. Em seguida, pede-se que calculem a característica de Euler utilizando a fórmula  $\chi(R) = V - A + F$  e registrem o resultado obtido.

O professor deve estar atento ao resultado encontrado pelos alunos, o qual já é esperado e deve ser sempre igual a 1. De fato, trata-se de uma região conexa e sem buracos.

Os alunos são então desafiados a dividir a região  $R$  em triângulos, obtendo uma versão completamente triangulada da região inicial. Esse processo deve satisfazer as regras a seguir:

- 1) novos pontos podem ser criados, no interior da região desenhada ou na fronteira, mas ao final da triangulação todos os pontos devem ser vértices dos triângulos ao redor;
- 2) nenhum triângulo pode estar sobreposto a outro.

Pede-se então que computem as novas quantidades de vértices, arestas e faces, e anotem o resultado para  $V - A + F$ .

**Discussão:** Os alunos são estimulados a compartilhar seus resultados com os colegas e a discussão subsequente pode sugerir respostas às perguntas:

- a) A igualdade entre  $\chi(R)$  e  $\chi(R')$  pode indicar que existam outras características compartilhadas entre  $R$  e  $R'$  que permanecem inalteradas, mesmo após a triangulação?
- b) Se no lugar de triângulos, a região desenhada tivesse sido dividida em quadriláteros, ou algum outro polígono, o que poderia ocorrer com o valor de  $\chi$ ?
- c) Como a característica de Euler apresentou o mesmo resultado para todas as regiões desenhadas pelos alunos, por mais diversas que tenham sido, poderia-se presumir que todas elas fizessem parte de alguma classe mais geral de regiões, para a qual todas seriam indistinguíveis?
- d) De que maneira deveríamos alterar a região inicial de modo a produzir, sem equívoco, outro valor para a característica de Euler?

**Atividade Proposta 2.**

**Objetivo:** *Generalizar uma fórmula que relacione  $\chi$  ao número de buracos de uma região plana dada.*

- **Descrição dos procedimentos:** Entregam-se uma folha aos alunos com algumas regiões planas impressas e com quantidades variadas de buracos interiores, necessariamente delimitados por linhas poligonais. Pede-se então que triangulem as regiões dadas e que efetuem o cálculo da característica de Euler. Um cuidado aqui precisa ser levado em consideração: uma quantidade alta de buracos pode implicar numa divisão em regiões triangulares mais complexa. Isso certamente dificulta a contagem de vértices, arestas e faces e leva a um número possivelmente alto de equívocos.

Apresentamos uma sugestão para a folha impressa na figura a seguir.

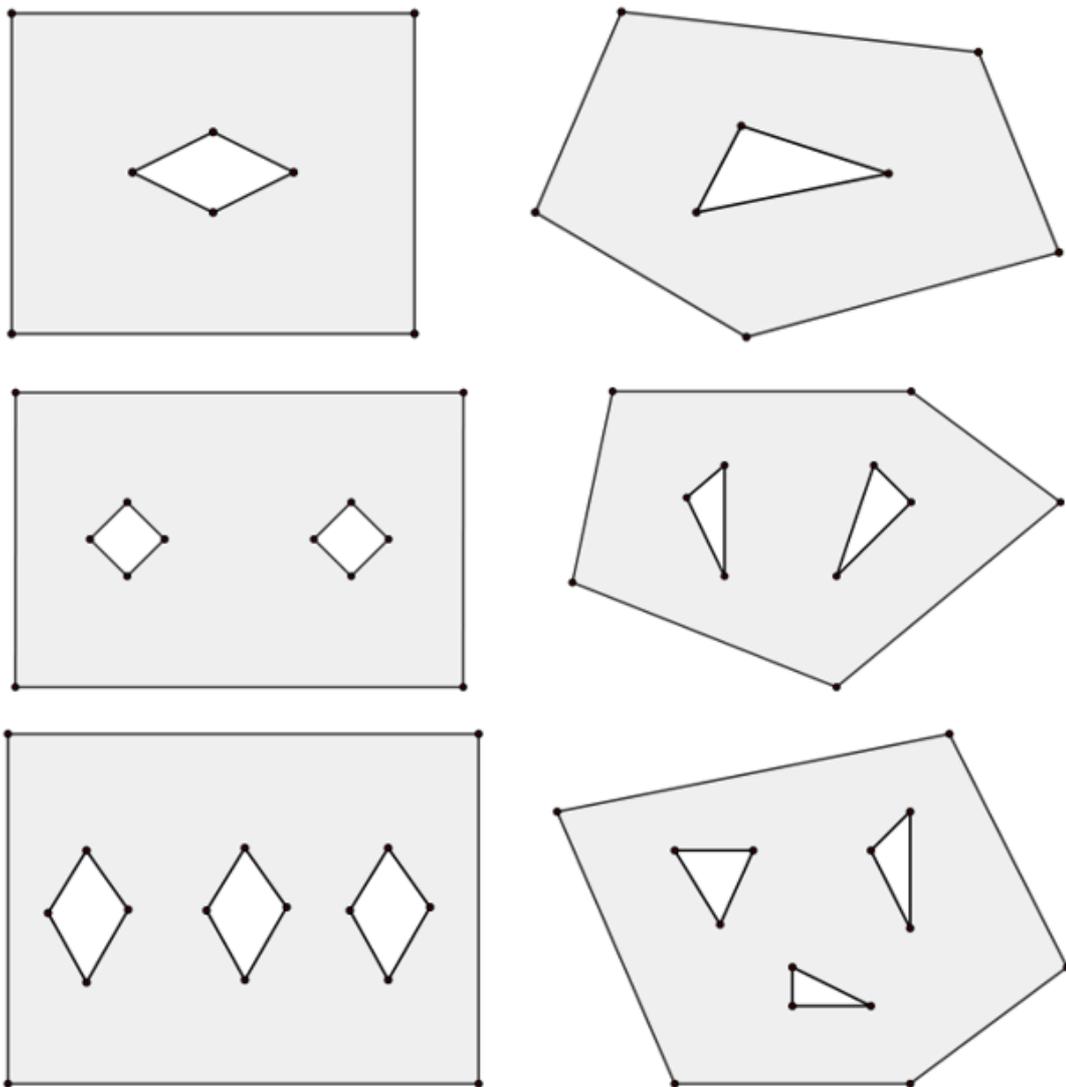


Figura 24 – Atividade proposta 2 - Sugestão de regiões poligonais planas, limitadas, fechadas e com buracos.

**Conclusões:** Interessante resgatar as observações levantadas da atividade anterior: regiões poligonais planas e sem buracos tem característica de Euler igual a 1.

- De que maneira o número de buracos da região  $R$  altera o valor de  $\chi(R) = V - A + F$ ?
- Que relação poderíamos obter entre  $\chi$  e o número  $g$  de buracos da região?
- Regiões diferentes, mas com o mesmo número de buracos apresentariam o mesmo valor para  $\chi$ ?

### Resultados após a aplicação

Foi realizada com estudantes do último ano do ensino fundamental de uma escola privada do município de Ribeirão Preto.

#### Aspectos positivos

- \* Foi uma boa oportunidade para falar sobre Euler e contar um pouco da história da matemática;
- \* os estudantes que não conheciam os termos “vértices”, “arestas” e “faces” puderam construí-los de forma lúdica e criativa;
- \* vários estudantes perceberam uma maneira ótima de triangular a região, minimizando o número de arestas, facilitando o cálculo de  $\chi = V - A + F$ ;
- \* dentre aqueles que conseguiram obter o valor correto para  $\chi(R)$ , alguns especularam o seu valor para outras regiões.

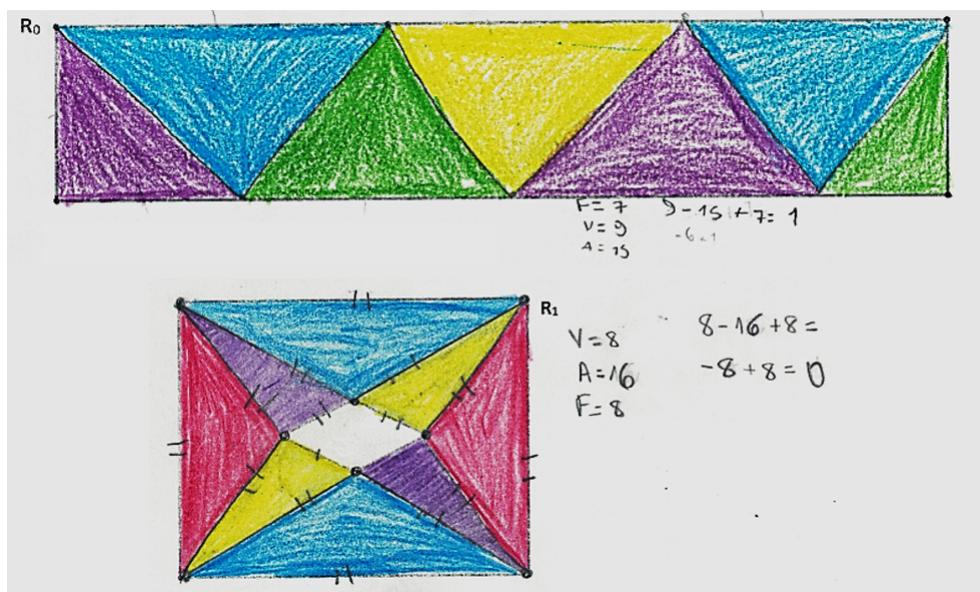


Figura 25 – Atividade proposta 2 - Resultados acima do esperado.

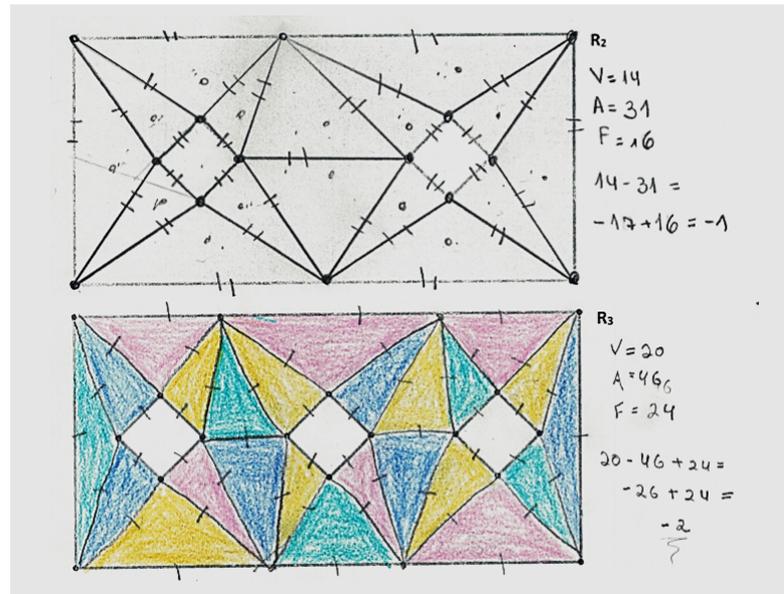


Figura 26 – Atividade proposta 2 - Resultados acima do esperado.

### Aspectos negativos

- \* de modo geral, os alunos tiveram dificuldade em compreender as instruções iniciais, sobretudo as regras permitidas para triangulação;
- \* o tempo pensado para realização da atividade, de 90 minutos, mostrou-se insuficiente;
- \* muitos alunos não conseguiram contar corretamente o número de vértices, arestas e faces da sua triangulação. Em alguns casos, a triangulação ficou tão complicada que inviabilizava o cálculo;
- \* foram poucos os estudantes que conseguiram relacionar o resultado de  $V - A + F$  ao número de buracos da figura original.

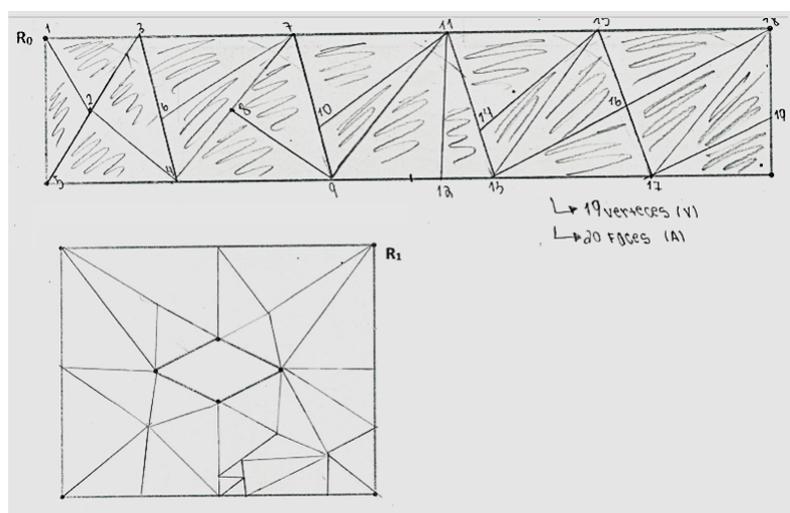


Figura 27 – Atividade proposta 2 - Resultados abaixo do esperado.

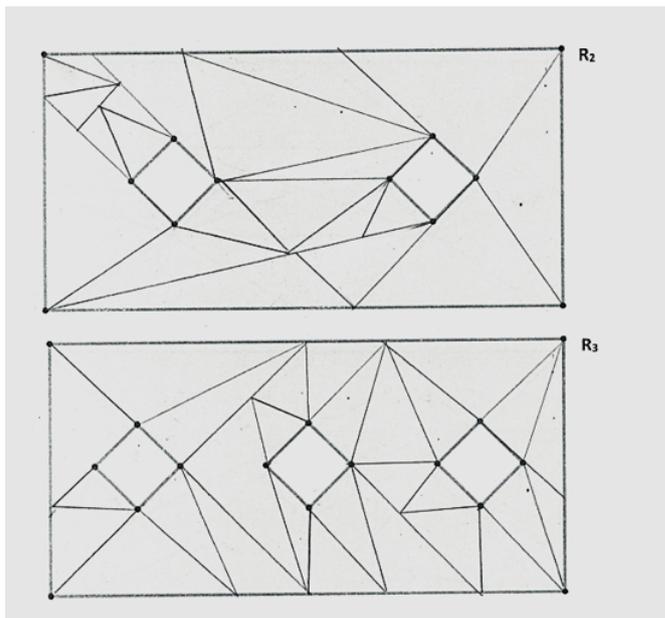


Figura 28 – Atividade proposta 2 - Resultados abaixo do esperado.

### Atividade Proposta 3.

**Objetivo:** *Propor o importante conceito de “invariante topológico”, ou seja, um elemento matematicamente mensurável num objeto, mas que não se altera quando este objeto sofre transformações de um certo tipo.*

**Desenvolvimento e Discussão:** O professor conversa com os alunos sobre algumas deformações que podem ser aplicadas às regiões das atividades anteriores. O que aconteceria com as respectivas características de Euler? Uma região de formato retangular, por exemplo, com ou sem “buracos”, poderia ser dobrada com vincos ao longo de algumas arestas, mas o desenho de sua triangulação, embora ganhasse expressão tridimensional, permaneceria inalterado no seu número de vértices, faces e arestas. As dobras inclusive poderiam não acompanhar as arestas, e poderia-se mesmo pensar em amassar o papel, mas sem rasgá-lo.

A discussão poderia seguir com questões sobre que tipos de “deformações” seriam aceitáveis, e quais não poderiam ocorrer. Pode-se sugerir que os alunos imaginem no lugar do papel rígido uma membrana de borracha flexível, altamente elástica. Amassar, torcer e esticar são deformações relativamente mais fáceis de imaginar com esse “material maleável”. O debate poderia seguir com o entendimento de que as regiões desenhadas na atividade 1 podem ser transformadas umas nas outras, razão pela qual a característica de Euler apresentou o mesmo resultado.

#### Atividade Proposta 4.

Seja  $R$  é uma região poligonal plana como definida na atividade 1, e triangulada. Propõe-se agora uma “deformação” sobre  $R$  que afeta simultaneamente sua forma e sua triangulação. A seguinte instrução deve ser enunciada: *acrescentar a  $R$  ou retirar de  $R$  um triângulo  $T$  que compartilha apenas um vértice, ou uma aresta, ou duas arestas com os demais triângulos de  $R$ .*

Isso permite passar de  $R$  para uma outra região  $R'$ .

Em seguida discute-se porque a característica de Euler de  $R'$  é igual a de  $R$ . Nota-se a importância de se ater ao tipo de deformação acima especificada. Ela equivale a “ampliar”, ou “reduzir” a região  $R$  através de uma pequena deformação na sua região de fronteira.

E se permitirmos que o triângulo anexado ou retirado possa compartilhar as três arestas com as arestas dos outros triângulos de  $R$ ? Essa condição equivale a “tapar” ou “criar” um buraco na região  $R$ , e os alunos devem concluir que a característica de Euler irá aumentar ou diminuir de uma unidade, respectivamente. Pode-se usar essa ideia para simplificar regiões, obtendo formas mais práticas de calcular a característica de Euler. Por exemplo, qualquer região do plano sem buracos pode, por essa estratégia, ser transformada em um único triângulo. Logo terá  $\chi = 1$ .

#### Atividade Proposta 5.

**Objetivo:** *Concluir a fórmula de Euler (5.1) válida para poliedros convexos.*

**Desenvolvimento:** Começamos com um tal poliedro, cuja superfície chamamos de  $R$ , e característica de Euler  $\chi(R)$ . Retirando de  $R$  uma face triangular (ou mesmo poligonal) obtemos uma região  $R'$ . A conclusão da atividade 4 é que  $\chi(R') = \chi(R) - 1$ . Imaginamos então que  $R'$  é feita de um material elástico bastante flexível, e podemos esticar  $R'$  ampliando sua abertura e aproximando-a cada vez mais de um plano. Após essa planificação é imediato ver que  $\chi(R') = 1$ , e portanto,  $\chi(R) = 2$ , o que justifica (5.1).

#### Atividade Proposta 6.

Consideramos uma região retangular e triangulada  $R$ . Sobrepondo dois lados opostos deste retângulo obtemos uma região  $C$  equivalente a um cilindro sem as bases. Então  $\chi(C) = \chi(R) - 1 = 0$ . Chamaremos  $C$  de uma “alça”. A ideia é que a qualquer superfície triangulada  $S$  que possua dois buracos possamos anexar uma alça, identificando cada uma de suas bordas com

um buraco de  $S$ . Criamos assim uma nova superfície que tem a mesma característica de Euler de  $S$ . Por exemplo, anexando uma alça a um cilindro obtemos o toro, uma superfície que lembra uma câmara de pneu. Em geral, assumindo uma triangulação de uma superfície fechada sem buracos podemos retirar duas faces triangulares não adjacentes e anexar uma alça, criando uma nova superfície fechada cuja característica de Euler será duas unidades menor que da superfície original.

## REFERÊNCIAS

---

- ACZEL, A. D. **O caderno secreto de Descartes**. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.
- ALEXANDROV, P. S. In memory of Emmy Noether. In: **Emmy Noether 1882–1935**. [S.l.]: Birkhäuser Boston, 1981. p. 153–179.
- ARMSTRONG, M. A. **Basic topology**. New York: Springer, 1983.
- BASENER, W. F. **Topology and its applications**. Hoboken: Wiley-Interscience, 2006.
- EULER, L. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. In: **Novi commentarii academiae scientiarum petropolitanae**. [S.l.: s.n.], 1758. vol. 4, p. 140–160.
- \_\_\_\_\_. Elementa doctrinae solidorum. In: **Novi commentarii academiae scientiarum petropolitanae**. [S.l.: s.n.], 1758. vol. 4, p. 109–140.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- FERNANDES, R. L.; RICOU, M. **Introdução à álgebra**. Lisboa: IST Press, 2014.
- FERNÁNDEZ-SUAREZ, L. O que é a característica de Euler? **Gazeta de matemática**, n. 158, p. 42, 2009.
- FUSS, P. H. **Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle**. [S.l.]: l'Académie impériale des sciences, 1843.
- GARCIA, A. **Elementos de álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- JESUS, E. V. de. **Módulos e grupos abelianos finitamente gerados**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Sergipe, 2017.
- LAKATOS, I. **Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery**. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
- LIMA, E. L. A característica de Euler-Poincaré. **Matemática Universitária**, n. 1, p. 47–62, 1985.
- \_\_\_\_\_. **Homologia básica**. 2.ed.. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- \_\_\_\_\_. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- \_\_\_\_\_. **Elementos de topologia geral**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- MASSEY, W. S. **Algebraic topology: an introduction**. New York: Springer, 1977.
- POINCARÉ, H. Sur la généralisation d'un théorème d'euler relatif aux polyèdres. **CRAS**, vol. 117, p. 144, 1893.
- \_\_\_\_\_. Analysis situs. **Journal de l'École polytechnique**, p. 1–123, 1895.

\_\_\_\_\_. The foundations of science: science and hypothesis, the value of science, science and method. In: **Science and Education**. Nova Iorque: The Science Press, 1913.

RICHESON, D. S. **A pérola de Euler: A fórmula dos poliedros e o nascimento da topologia**. Lisboa: Gradiva, 2015.

ROBINSON, D. J. S. **A course in the theory of groups**. New York: Springer, 1996.

ROTMAN, J. J. **The theory of groups: an introduction**. Boston: Allyn and Bacon, 1973.

SAMPAIO, J. C. V. **Uma introdução à topologia geométrica: passeios de Euler, superfícies e o teorema das quatro cores**. São Carlos: EdUFSCar, 2012.

STEWART, I. **Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

