Universidade Estadual de Londrina

FRANCELISE IDE ALVES FERREIRA

UMA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA O ESTUDO DE NÚMEROS INTEIROS

LONDRINA

2019

FRANCELISE IDE ALVES FERREIRA

UMA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA O ESTUDO DE NÚMEROS INTEIROS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Profª. Drª. Magna Natalia Marin Pires.

LONDRINA
2019

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Ferreira, Francelise Ide Alves.
Uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem para o Estudo de Números Inteiros / Francelise Ide Alves Ferreira. - Londrina, 2019.
100 f. : il.

Orientador: Magna Natalia Marin Pires.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática Realística - Tese. 2. Trajetória de Ensino e Aprendizagem - Tese. 3. Números Inteiros - Tese. I. Pires, Magna Natalia Marin. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

FRANCELISE IDE ALVES FERREIRA

UMA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA O ESTUDO DE NÚMEROS INTEIROS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina

Profª. Drª. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina

Profª. Drª. Marcele Tavares Mendes
UTFPR – Campus Londrina

Londrina, 07 de março de 2019.

A todos que se dedicam a ensinar e a aprender matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, Senhor do meu viver, que me proporcionou tudo em tempo bom, perfeito e agradável. Ele que sempre esteve comigo em cada momento de estudo e tornou a solidão impossível. A ele agradeço pelo privilégio de conviver com pessoas maravilhosas. Por proporcionar tempos inusitados de estudo e por permitir que fosse possível depois de anos retornar a posição de estudante.

Aos meus pais que me ensinaram a importância do estudo desde a primeira infância, pelo incentivo, pela vida de dedicação e exemplo. Em especial, por todo suporte dado pela minha mãe, sem o qual este trabalho não teria início.

Ao meu esposo pela paciência, colaboração, compreensão e incentivo, pois com seu exemplo, me inspira e encoraja a seguir em frente com alegria.

Aos meus filhos, que mesmo pequenos e entre reclamações, lançaram palavras de incentivo e encorajamento, mostrando acreditar que a mamãe poderia vencer sem desistir.

A todos os colegas de classe, companheiros de trajeto pelo suporte, por ser este grupo animado que me proporcionou um rejuvenescimento de espírito nessa caminhada.

Aos professores do PROFMAT que com dedicação e paciência exerceram a arte de nos ensinar.

A todos do Colégio Estadual Antônio Racanello Sampaio por permitir que este trabalho fosse realizado, pela confiança e participação dos alunos e de suas famílias, em especial, aos meus colegas de trabalho pelos conselhos, carinho e apoio prestado em conversas e em momentos de reclusão que o estudo me obrigou.

À professora Magna, que me acolheu carinhosamente e me orientou com toda paciência, incentivando e encorajando a prosseguir acreditando na relevância deste trabalho.

Enfim a todos que colaboraram de maneira direta ou não para que este trabalho se realizasse.

FERREIRA, Francelise Ide Alves. **Uma trajetória de Ensino e Aprendizagem para o Estudo de Números Inteiros**. 2019. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma pesquisa qualitativa na qual uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA) foi elaborada e aplicada na perspectiva da Educação Matemática Realística (EMR) a respeito dos Números Inteiros. Seu desenvolvimento está dividido em duas etapas: a primeira foi a elaboração da trajetória, na qual busca-se prever as possibilidades de compreensão, dúvidas e estratégias de resolução das tarefas pensadas pelos alunos e a segunda etapa constitui o relato dessa trajetória aplicada em uma sala de aula do 7º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais e uma análise interpretativa dos desdobramentos das aulas à luz dos princípios da EMR e algumas relações com o desenvolvimento histórico. As tarefas foram direcionadas como uma forma de proporcionar um ambiente em que os alunos pudessem ser ativos no processo de aprendizagem e, dessa maneira, realizar uma reinvenção guiada do conceito e de operações com números inteiros. Durante a aplicação da TEA as estratégias de resolução e as discussões entre os alunos e entre professor e alunos, conduziram às conclusões das regras operatórias e do conceito de Números Inteiros. A experiência de elaborar e aplicar uma TEA e, em seguida, refletir a respeito dos caminhos conduzidos revela grande potencial na formação do professor.

Palavras-chave: Educação Matemática Realística. Trajetória de Ensino e Aprendizagem. Reinvenção Guiada. Números Inteiros. Princípios EMR.

FERREIRA, Francelise Ide Alves. **A Learning- Teaching Trajectory for the Study of Integers Numbers**. 2019. 100 f. Dissertation (Professional National Master's in Mathematics) – State University of Londrina, Londrina, 2019.

ABSTRACT

This paper presents a qualitative research in with a Learning-Teaching Trajectory (LTT) was elaborated and applied from the perspective of Realistic Mathematics Education (RME) regarding the Integers Numbers. Its development is divided in two stages: the first one was the elaboration of the trajectory, in which it is tried to predict the possibilities of understanding, doubts and strategies of solving the tasks thought by the students and the second stage constitutes the report of this trajectory applied in a class of the 7th grade of Elementary School – Final Years and an interpretative analysis of the lessons unfolding in the light of the principles of the RME and some relations with the historical development. Tasks were directed as a way to provide an environment in which students could be active in the learning process and thus perform a guided reinvention of the concept and operations with integers. During the application of the LTT the strategies of resolution and the discussions between the students and, between teacher and students, led to the conclusions of the operative rules and the concept of Integers Numbers. The experience of developing and applying a LTT and then reflecting on the paths taken shows great potential in teacher training.

Key-words: Realistic Mathematics Education. Learning-Teaching Trajectory. Guided Reinvention. Integers Numbers. Principles of RME.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A experiência como professora da Educação Básica provocou o encontro com muitos alunos do Ensino Fundamental e Médio que expressam dúvidas e dificuldades ao realizarem operações que envolvam números negativos. A frequência corriqueira que ocorriam foram intrigantes e levantaram o questionamento: há alguma forma de ensino que pode contribuir para que os estudantes não apenas realizem as operações corretamente, mas que as compreendam?

Na Educação Básica a introdução dos Números Inteiros ocorre no 7º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais. Há neste conjunto numérico uma mudança em relação ao significado dos sinais de mais e de menos, que além de operadores agora também tem o significado de predicativos o que causa confusões e dúvidas que acompanham os alunos até o Ensino Médio. A dificuldade apresentada em compreender os números negativos não se restringe ao estudante deste tempo, pois, segundo Glaeser (1985), os números relativos são conhecidos historicamente desde Diofanto (século III) até os dias atuais, mas por mais de 1500 anos vários obstáculos se opuseram à sua compreensão. Por conta disso o objetivo deste trabalho é fazer um estudo a respeito dos Números Inteiros, considerando seus conceitos matemáticos e seu desenvolvimento histórico, elaborar, aplicar e refletir sobre uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem apoiada na abordagem da Educação Matemática Realística (EMR). Nesta direção, e baseados nesse objetivo, a pergunta dessa pesquisa se apresenta: como a EMR pode orientar um professor na elaboração e desenvolvimento do processo de construção de conceitos de Números Inteiros por alunos do Ensino Fundamental – Anos Finais?

Para Gravemeijeir (2005) a noção popular de aprendizagem como estabelecer conexões não se adequa para transmitir o conhecimento matemático abstrato. Em vez disso, o autor sugere que devemos tentar ajudar os alunos a construir um novo conhecimento matemático a partir do que eles já sabem. A Educação Matemática Realística defende a reinvenção como uma alternativa para este fim.

Para Freudenthal (1991) apenas uma pequena minoria aprende a matemática ensinada como um assunto pronto, no qual os alunos recebem definições, regras e algoritmos, de acordo com os quais se espera que eles prossigam e que o jovem aprendiz deve reivindicar o privilégio de reinventar o conhecimento.

> O princípio da reinvenção guiada leva em conta que o conhecimento não deve ser transmitido pelo professor, mas sim elaborado pelo aluno. O processo de reinvenção exige que os alunos se envolvam com situações realísticas, com a intenção de matematizá-las, em um processo semelhante ao vivenciado pelo matemático profissional. (PIRES, 2013, p.24)

Para que os alunos possam reinventar os números inteiros foi elaborada e aplicada uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA) na qual o professor vai além da elaboração de um plano de aula, pois segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2010) uma trajetória está ligada aos significados de aprendizagem, ensino e de perfil de conteúdo programático. Em seguida foi feito um movimento de reflexão sobre aplicação da TEA à luz dos princípios da EMR e de alguns obstáculos superados durante o desenvolvimento histórico.

O texto deste trabalho está dividido em cinco capítulos que tratam de aspectos teóricos metodológicos que nortearam o desenvolvimento desta pesquisa, uma possível Trajetória de Ensino e Aprendizagem e o relato de uma prática em sala de aula.

No capítulo 1 há uma explanação sobre os Números Inteiros, iniciando pelo seu desenvolvimento no processo histórico desde o homem primitivo, passando pela evolução do sistema de numeração decimal posicional até o século XIX. Este capítulo também traz um estudo sobre os conceitos e fundamentos do Conjunto dos Números Relativos, como é a abordagem de ensino dos números inteiros nos documentos oficiais (Base Nacional Comum Curricular, Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná e Caderno de Expectativas de Aprendizagem do Paraná) e como é apresentado em alguns livros didáticos.

O capítulo 2 traz conceitos básicos da Educação Matemática Realística: origem, ideias centrais e seus princípios. E descreve conceitualmente uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem apontando seus significados, aspectos e características com base nas ideias de Van Den Heuvel-Panhuizen.

O capítulo 3 descreve o encaminhamento metodológico deste trabalho.

No capítulo 4 encontra-se a Trajetória de Ensino e Aprendizagem e o relato de sua aplicação em uma sala do 7º ano de um colégio público estadual do Paraná.

O capítulo 5 faz uma relação entre o ocorrido em sala de aula e os princípios da EMR com possíveis ligações entre o aprendizado do aluno e o processo de desenvolvimento histórico.

Para finalizar, são apresentadas algumas considerações a respeito da pesquisa realizada e de sua contribuição na formação profissional da autora.

CAPÍTULO 1

NÚMEROS INTEIROS

Em relação aos Números Inteiros, este capítulo apresenta um pouco da História da Matemática, elementos de definição e propriedades, breve análise da abordagem curricular apresentada nos documentos: Diretrizes Curriculares Estaduais e Base Nacional Comum Curricular e de como o conteúdo é apresentado em três livros didáticos.

1.1 Um Pouco de História

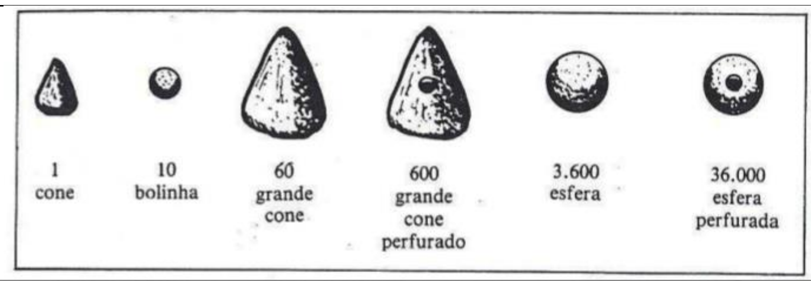
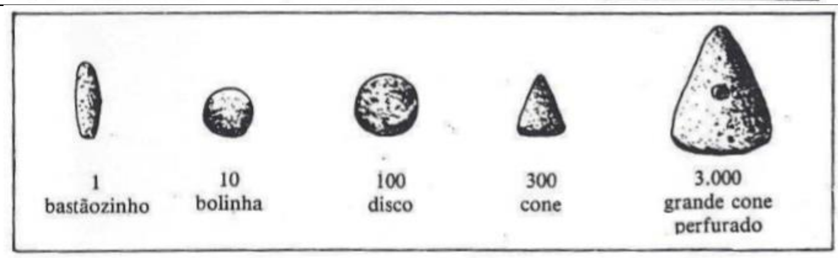
O desenvolvimento do conceito de números teve como motivação a necessidade de contagem, segundo Boyer (2010) as noções primitivas de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas mais com contrastes que com semelhanças, por exemplo, a diferença entre um lobo e vários lobos, ou seja, a diferença entre um e muitos. Já Eves (2004) afirma que o conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se muito antes dos registros históricos e a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Ambos os autores, Boyer (2010) e Eves (2004), concordam que provavelmente a maneira primitiva de contagem ocorreu por meio do princípio de correspondência biunívoca.

O registro dos números, segundo Eves (2004), era feito por entalhe em ossos, nós em cordas, inscrições em pedras, em papiros ou lâminas de bambu e cada povo desenvolveu seu sistema de numeração. Segundo este autor, há evidências de que as primeiras bases numéricas foram de 2, 3 e 4, mas o sistema quinário (base 5) e o decimal foram mais utilizados. Boyer (2010) relata que estudos de tribos de índios americanos mostraram que a maioria usava o sistema decimal, quinário ou quinário-decimal.

Os registros históricos relatam sobre a relação do desenvolvimento do conceito de número com a estrutura da linguagem. Boyer (2010) afirma que o homem difere-se de outros animais de modo mais acentuado pela sua linguagem, cujo desenvolvimento foi essencial para que surgisse o pensamento matemático abstrato. Porém ele também considera que seja mais provável que os sinais de incisão em bastão, por exemplo, tenham antecedido as palavras para números. Eves (2004) também considera que talvez o desenvolvimento de sons vocais para expressar quantidades tenha surgido após os registros de ranhuras, nós ou entalhes para quantidades e, depois, com o aprimoramento da escrita, surgiram símbolos para representar esses números.

Segundo Boyer (2010), o conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. Porém, o Conjunto dos Números Inteiros como conhecemos hoje não foi totalmente desenvolvido na pré-história, pois nem o zero nem os inteiros negativos tiveram sua presença registrada nesse período. Ao longo dos séculos, diferentes civilizações criaram seus sistemas próprios de numeração. De acordo com Ifrah (1985) os primeiros algarismos da história foram criados por volta de 3300 a.C. pelos sumérios e elamitas, duas civilizações rivais e vizinhas, situadas respectivamente nas regiões do Iraque e Irã, porém equivalentes em avanço. Devido às necessidades de registro duradouro de seus recenseamentos, inventários, compra, venda e distribuição, passaram a fazer entalhes no barro, os símbolos entalhados eram parecidos com as formas de contas que eles utilizavam para fazer a contagem anteriormente, logo estas marcas passaram a ser o primeiro sistema de numeração escrito da história. Os sumérios utilizavam um sistema sexagesimal contando com a dezena como uma unidade auxiliar e os elamitas contavam por dezenas números que representavam quantias menores e utilizavam as bases dez e sessenta para unidades de ordem superior.

Figura 1 – *Calculi*, usado pelos sumérios e elamitas.

Calculi, usado pelos sumérios.	
Calculi, usado pelos elamitas.	

Fonte: adaptado de Ifrah (1985).

Segundo Ifrah (1997), as notações numéricas imaginadas ao longo dos anos repartem-se em três tipos fundamentais, que por sua vez, encontram-se subdivididos em categorias.

Quadro 1 – Tipos de sistemas de numeração.

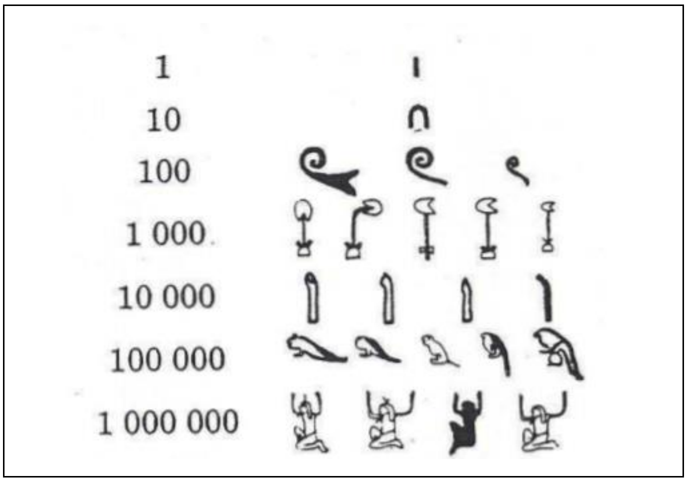
Os sistemas aditivos	Possuem o princípio da adição, cada algarismo tem um valor próprio, independente de sua posição.	Numerações aditivas de primeira espécie.
		Numerações aditivas de segunda espécie.
		Numerações aditivas de terceira espécie.
Os sistemas híbridos.	Utilizam a multiplicação e a adição ao mesmo tempo.	Numerações híbridas de primeira espécie.
		Numerações híbridas de segunda espécie.
		Numerações híbridas de terceira espécie.
		Numerações híbridas de quarta espécie.
		Numerações híbridas de quinta espécie.
Os sistemas posicionais.	O valor dos algarismos é determinado pela posição que ocupa na escrita dos números.	Numerações posicionais de primeira espécie.
		Numerações posicionais de segunda espécie.

Fonte: adaptado de Ifrah (1997).

Numerações aditivas de primeira espécie têm por característica que cada algarismo possui um valor próprio e são repetidos até atingir a quantidade numérica que se queira representar.

Um exemplo é o sistema hieroglífico egípcio. Os egípcios desenvolveram sua escrita também por volta de 3000 a.C. independentemente da escrita dos sumérios. A numeração egípcia era decimal e não posicional, sendo que cada classe decimal era representada por um símbolo diferente.

Figura 2 – Algarismos hieroglíficos egípcios.



Fonte: Ifrah (1985).

Para representar o número 1426, por exemplo, dispõe-se de um algarismo equivalente a 1000, quatro algarismos equivalentes a 100, dois equivalentes a 10 e seis equivalentes a 1.

Figura 3 – Representação do número 1426 no sistema hieroglífico egípcio.

1000+100+100+100+100+10+10+1+1+1+1+1+1

Fonte: da autora.

Numerações aditivas de segunda espécie têm uma base principal e uma base auxiliar que deve ser um divisor da principal. A numeração suméria é um exemplo dessa espécie, pois sua base é 60 e a base auxiliar é 10.

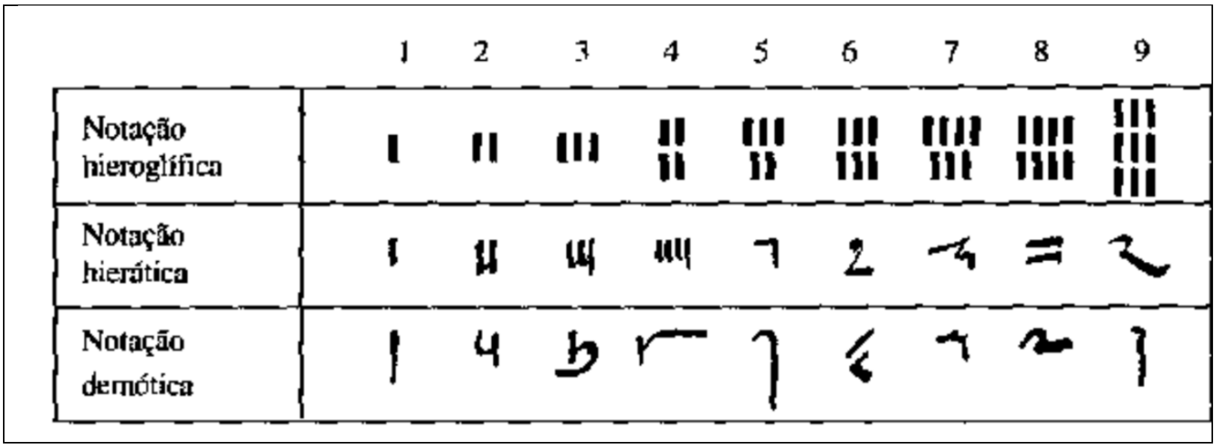
Quadro 2 – Sistema de numeração aditivo de segunda espécie.

1	10	60	60^2	10×60^2	60^3	...
1ª ordem		2ª ordem		3ª ordem		...

Fonte: Ifrah adaptado (1985).

De acordo com Ifrah, um exemplo da numeração aditiva de terceira espécie é a numeração egípcia hierática. A escrita egípcia passou da hieroglífica para a escrita hierática e depois para a escrita demótica, alterando também os algarismos.

Figura 4 – Escrita egípcia.



Fonte: Ifrah (1997).

Podemos notar que na escrita hierática a partir do número 5 não há mais as repetições do algarismo da unidade, como acontecia na numeração hieroglífica, mas um único sinal para representar os números. Esta escrita era, de acordo com este autor, mais corrente que a hieroglífica, pois possibilitava maior rapidez no momento do registro. Como permanecia o *princípio aditivo* eles criaram símbolos para as potências de 10 e seus múltiplos, havendo uma notação particular para cada ordem.

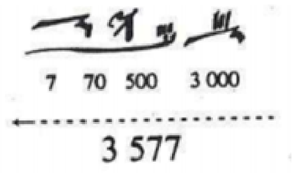
Quadro 3 – Sistema de numeração aditiva de terceira espécie.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	2X10	3x10	4x10	5x10	6x10	7x10	8x10	9x10
10^2	$2x10^2$	$3x10^2$	$4x10^2$	$5x10^2$	$6x10^2$	$7x10^2$	$8x10^2$	$9x10^2$
10^3	$2x10^3$	$3x10^3$	$4x10^3$	$5x10^3$	$6x10^3$	$7x10^3$	$8x10^3$	$9x10^3$
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Fonte: Ifrah (1997).

Por exemplo, para escrever o número 3577, eram utilizados apenas quatro algarismos, um que representa 3000, outro 500, outro 70 e outro 7.

Figura 5 – Notação hierática.



Fonte: Ifrah (1985).

Ifrah (1997) apresenta a primeira e a segunda espécie dos sistemas híbridos fundados em base 10. Tendo como exemplo de primeira espécie os sistemas de numeração assírio-babilônico e dos povos semíticos ocidentais nos quais atribuem um algarismo particular a cada um dos números 1, 10, 100, 1000, etc. e dão notação multiplicativa aos múltiplos consecutivos de cada uma das potências de dez, mas as unidades simples e as dezenas são representadas por justaposição aditiva.

Quadro 4 – Sistema de numeração híbrido de primeira espécie.

1ª ordem (unidades)	2ª ordem (dezenas)	3ª ordem (centenas)	4ª ordem (milhares)
1	10	$1x10^2$	$1x10^3$
1+1	10+10	$(1+1)x10^2$	$(1+1)x10^3$
1+1+1	10+10+10	$(1+1+1)x10^2$	$(1+1+1)x10^3$
…	…	…	…

Fonte: Ifrah, 1997.

Os de segunda espécie apresentam um algarismo particular para cada unidade simples, dezena e potência de 10, um exemplo dessa espécie é o sistema de numeração cingalês.

Quadro 5 – Sistema de numeração híbrido de segunda espécie.

1ª ordem (unidades)	2ª ordem (dezenas)	3ª ordem (centenas)	4ª ordem (milhares)
1	10	$1x10^2$	$1x10^3$
2	20	$2x10^2$	$2x10^3$
3	30	$3x10^2$	$3x10^3$
…	…	…	…
9	90	$9x10^2$	$9x10^3$

Fonte: Ifrah, 1997.

Os sistemas de terceira e quarta espécies apresentados por esse autor (1997) são fundados na base 100, sendo que o de terceira relaciona um algarismo particular à unidade, à dezena e a cada potência de 100, enquanto que o de quarta espécie atribui um algarismo particular para cada unidade simples, dezena e para cada potência de 100.

Quadro 6 – Sistema de numeração híbrido de terceira espécie.

1ª ordem centesimal		2ª ordem centesimal	
Unidades	Dezenas	Centenas	Milhares
1	10	$1x10^2$	$1x10^3$
1+1	10+10	$(1+1)x10^2$	$(1+1)x10^3$
1+1+1	10+10+10	$(1+1+1)x10^2$	$(1+1+1)x10^3$
…	…	…	…

Fonte: Ifrah, 1997.

Quadro 7 – Sistema de numeração híbrido de quarta espécie.

1ª ordem centesimal		2ª ordem centesimal	
Unidades	Dezenas	Centenas	Milhares
1	10	$1x10^2$	$1x10^3$
2	20	$2x10^2$	$2x10^3$
3	30	$3x10^2$	$3x10^3$
…	…	…	…
9	90	$9x10^2$	$9x10^3$

Fonte: Ifrah, 1997.

Os sistemas híbridos de quinta espécie, fundados em base 10, atribuem um algarismo particular para cada unidade simples e para cada potência de dez. Um exemplo para essa espécie é o sistema de numeração chinês.

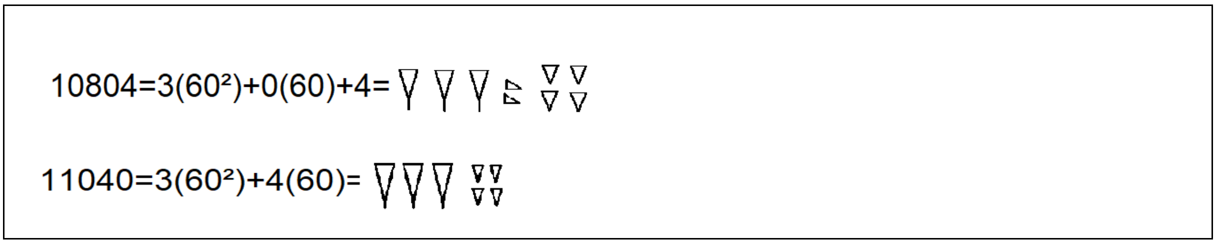
Quadro 8 – Sistema de numeração híbrido de quinta espécie.

1ªordem (unidades)	2ª ordem (dezenas)	3ª ordem (centenas)	4ª ordem (milhares)
1	1x10	$1x10^2$	$1x10^3$
2	2x10	$2x10^2$	$2x10^3$
3	3x10	$3x10^2$	$3x10^3$
…	…	…	…
9	9x10	$9x10^2$	$9x10^3$

Fonte: Ifrah, 1997.

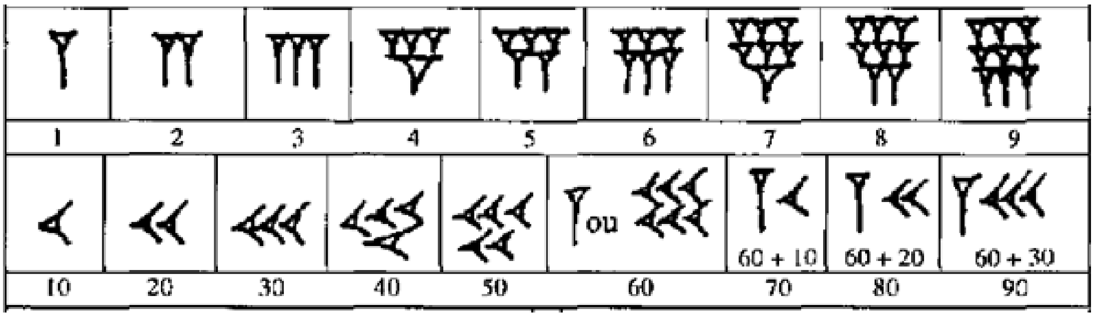
Os sistemas de numeração posicional de primeira espécie são numerações posicionais que possuem dois algarismos propriamente ditos, um para a unidade e outro para um divisor da base. Por exemplo, o sistema de numeração babilônico com base sexagesimal que representa o valor de sua base 60 com o mesmo símbolo que representa a unidade, porém posicionado à esquerda de outros símbolos. Segundo Eves (2004), a falta de um símbolo para o zero causava mal entendidos até que foi introduzido um símbolo de duas cunhas inclinadas para indicar uma potência ausente de 60 dentro de um número, mas não no final. Por exemplo, nos números 10804 e 11040.

Figura 6– Representação dos números no sistema de numeração babilônico.



Fonte: adaptado de Eves (2004).

Figura 7 – Expressão assírio-babilônia dos números inferiores à centena.



Fonte: Ifrah (1997).

O sistema de numeração atual é um exemplo para o sistema de numeração posicional de segunda espécie. De acordo com Ifrah (1997) de todos os sistemas de numeração estudados pela humanidade, o sistema de numeração decimal atual é o mais prático e evoluído, permitindo assim os avanços conquistados pela matemática, os sistemas de numeração posicionais alcançaram o último grau de abstração nesse domínio e representaram o aperfeiçoamento último da notação numérica.

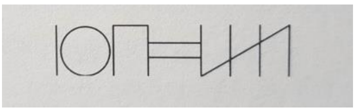
Para o autor três pontos foram fundamentais para a construção do atual sistema de numeração:

1. o valor posicional;
2. a estrutura gráfica dos sinais numéricos;
3. o zero.

Segundo Ifrah (1997) no século IX foi copiado do original (datado de três ou quatro séculos antes) um tratado de astronomia e adivinhações dos maias no qual há registros numéricos que comprovam a utilização de um sistema de numeração posicional de base vinte que faz uso de um zero. Segundo este autor pode-se atribuir a elaboração de sistema de numeração posicional e a invenção do zero aos matemáticos e astrônomos maias. Os números negativos, segundo este autor, eram inconcebíveis, uma operação como $3 - 5$ foi considerada impossível durante muito tempo e, somente com a invenção do zero, pode-se fazer uma extensão do conjunto dos números naturais por adjunção de seus simétricos em relação ao zero.

De acordo com registros históricos o conceito de número negativo surgiu de forma lenta e em civilizações e tempos diferentes, por exemplo, os chineses consideravam o negativo como algo que se devia, segundo Eves (2004), o chinês Li Yeh usava um traço diagonal no dígito da direita de um número escrito no sistema de barras chinês para representar a dívida. Desse modo, $-10\ 724$ apareceria assim:

Figura 8 – Representação do número $-10\ 724$ no sistema de barras chinês.



Fonte: Eves (2004)

Segundo Glaeser (1985), desde Diofanto, século III que o estudo de números relativos surge concomitante ao estudo da álgebra, a ele é atribuída a regra de sinais, pois no início de seu Livro I a “Aritmética”, Diofanto escreve:

> o que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta. (DIOFANTO, SEC. III? Apud GLAESER, 1985, p. 47, grifo nosso).

Porém, de acordo com Boyer (2010), Diofanto, matemático do século III, não considerava as raízes negativas. Segundo Eves (2004) encontram-se registros de que os hindus aceitavam os números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática tinha duas soluções reais formais. De acordo com Boyer (2010), Brahmagupta, que viveu por volta de 628 na Índia Central, considerou soluções positivas e negativas para as equações quadráticas e uma sistematização da aritmética dos números negativos e do zero aparecem pela primeira vez em sua obra.

> Positivo dividido por positivo, ou negativo por negativo, é afirmativo. Cifra dividida por cifra é nada. Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo. Positivo ou negativo dividido por cifra é uma fração com esse denominador. (BOYER, 2010, p. 150).

Para o autor, o matemático do século VII entrou em conflito afirmando que $0 \div 0 = 0$ e não se comprometeu na questão $a \div 0$ para $a \neq 0$.

De acordo com Cyrino e Pasquini (2010) os indianos do século VII foram os primeiros a reconhecer a existência de quantidades absolutamente negativas. Enquanto que na Europa, somente no século XVI os números negativos começaram a ser aceitos. O alemão Michael Stifel (1486?-1567) usava coeficientes negativos em suas equações, porém, recusou admitir raízes negativas (Boyer, 2010) (Eves, 2004). Cajori (2007) afirma que Stifel fala de números “absurdos” ou “fictícios abaixo de zero” que surgem quando números reais acima de zero são subtraídos de zero. Segundo Eves (2004), Gerônimo Cardano (1501-1576) em seu mais importante livro, o *Ars Magna,* o primeiro grande tratado dedicado exclusivamente à álgebra, dá alguma atenção às raízes negativas de uma equação. De acordo com Cajori (2007), Cardano e Rafael Bombelli, assim como Bhaskara, viram as raízes negativas, mas não as aprovaram, François Viète, as descartou, Fibonacci raramente as usou e o monge toscano Luca Pacioli (1445-1517) estabeleceu a regra em que “menos vezes menos resulta mais”, aplicando-as somente no desenvolvimento do produto $(a - b) \cdot (c - d)$, não aparecendo em seu trabalho, as quantidades negativas puras.

Atualmente os números estão classificados em conjuntos de acordo com suas características. O conjunto dos números inteiros é dado por $\mathbb{Z} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$.

Em 1634, Simon Stevin havia publicado uma prova da regra de sinais na operação de multiplicação, superando o que Glaeser (1985) chama de inaptidão de manipular quantidades isoladas. Mesmo que desejassem evitar o emprego dos números negativos, a prática do cálculo vai forçá-los à sua introdução. O autor afirma que a partir do século XVII os números negativos aparecem naturalmente nos trabalhos científicos e que no final do século XVIII, as quantidades negativas não tinham adquirido status de número. Mas em “O Tratado de Álgebra” de Colin

Maclaurin, publicado postumamente, que se tornou referência no continente europeu, as quantidades negativas e a regra dos sinais são apresentadas da seguinte forma.

> Chamam-se quantidades positivas, ou afirmativas, as que são precedidas do sinal $+$, e negativas, as que são precedidas do sinal $-$. Para se ter uma ideia clara e exata desses dois tipos de quantidades, deve-se notar que toda quantidade pode entrar num cálculo algébrico, acrescentada, ou subtraída, ou seja, como aumento, ou como diminuição; ora, a oposição que se observa entre aumento e diminuição ocorre na comparação das quantidades. Por exemplo: entre o valor do dinheiro devido a um homem, e o do dinheiro que ele deve; entre uma linha traçada à direita, e uma linha traçada à esquerda; entre a elevação sobre o horizonte e o posicionamento abaixo dele. Assim, a quantidade negativa, longe de ser rigorosamente menor que nada, não é menos real na sua espécie do que a positiva, mas é tomada num sentido oposto; segue-se daí que uma quantidade considerada isoladamente não poderia ser negativa, pois ela só o será por comparação; e que quanto a quantidade que chamamos positiva não tem outra que lhe seja oposta, não se poderia dela subtrair outra maior. Por exemplo: seria absurdo querer subtrair uma quantidade maior de matéria, de outra menor.
> (…)
> Poder-se-ia deduzir daí a regra dos sinais tal como se costuma enunciá-la, ou seja, que os sinais iguais nos termos do multiplicador e do multiplicando dão $+$ no produto, e os sinais diferentes dão $-$. Evitamos esta maneira de apresentar a regra, para poupar aos iniciantes a revoltante expressão $-$ por $-$ dá $+$, que, todavia, é uma consequência necessária da regra. Pode-se, como fizemos, disfarçá-la, mas não anulá-la, nem contradizê-la; o leitor, sem perceber, observou todo o seu sentido nos exemplos precedentes. Familiarizado com a coisa, como iria perturbar-se com as palavras? Se ainda conserva alguma dúvida, que preste atenção à seguinte demonstração, que ataca diretamente a dificuldade. $+a - a = 0$; assim, multiplicando $+a$ por qualquer quantidade, o produto deve ser 0; se multiplico por n, terei como primeiro termo $+na$, portanto o segundo será $-na$, pois é preciso que os dois termos se destruam. Logo sinais diferentes dão $-$ no produto. Se multiplico $+a - a$ por $-n$, de acordo com o caso precedente, obterei $-na$ como primeiro termo; logo terei $+na$ como segundo, pois é sempre necessário que os dois termos se destruam. Logo $-$ multiplicado por $-$ dá $+$ no produto. (MACLAURIN, 1748 apud GLAESER, 1985, p.59-61).

De acordo com Glaeser (1985), o avanço histórico que se vê no tratado de Maclaurin seria provisoriamente perdido para a posteridade. Léonard Euler (1707-1783) manejava os números relativos e complexos com engenhosidade e arrojo, apresentou uma justificativa para a regra dos sinais, mas não conseguiu transpor o que se refere à incompreensão da unificação da reta numérica. Segundo o autor, D'Alembert (1717 - 1783) e Carnot (1753 - 1823), em suas publicações, revelaram sua incompreensão dos números relativos, mas seus estudos acabaram influenciando Chasles e Möbius, que elaboraram a geometria orientada, eles usaram todo um eixo para representar a reta $\mathbb{R}$, sem que recorressem a raciocínios isolados sobre semirretas opostas.

Para Glaeser (1985), a passagem ao negativo esbarra na presença de duas significações do zero, o zero absoluto, abaixo do qual nada é concebível e o zero origem, ideia proposta por convenção na qual o zero propicia a criação dos números negativos. O autor afirma que as dificuldades concernentes às propriedades aditivas só foram ultrapassadas com introdução da orientação da reta e, tendo uma compreensão satisfatória das propriedades aditivas, inicia-se um novo período, no qual os obstáculos passam a ser a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos e um desejo de um modelo unificador. No século XIX, Augustin Cauchy (1789-1857) ao publicar um curso para a escola Politécnica, faz distinção entre números positivos e negativos e os sinais (+ ou −) são vistos como operatórios (designam uma ação: aumentar ou diminuir) e predicativos (qualificam um estado: positivo ou negativo). O autor afirma:

> é então que Cauchy adota o novo ponto de vista (que encontramos em embrião em MacLaurin e Laplace). Ele tem vontade de apresentar a multiplicação de um modo formal, sem evocar modelos concretos ou metafóricos. Ele avisa que vai operar com símbolos (formados por um sinal e um valor absoluto) e expõe as regras operacionais a que tais símbolos serão submetidos. Essa transposição de barreira, porém, não ocorrerá sem percalços. De início, ele comete a confusão entre sinais operatórios e predicativos. Ele demonstra a composição apenas para sinais predicativos e depois aplica-as aos sinais operatórios, sem chamar a atenção para esse abuso. (GLAESER, 1985, p. 99)

Por fim, de acordo com Glaeser (1985), em 1867, surge a obra de Herman Hankel, "Teoria dos sistemas dos números complexos", na qual todos os obstáculos referentes à teoria dos números são ultrapassados. A mudança da passagem do ponto de vista "concreto" ao ponto de vista "formal" foi efetuada antes em outros campos da Matemática. Hankel apenas aplicou ideias que já começavam a desenvolver. Seu livro é dedicado a uma exposição formal da teoria dos números complexos, foi apenas a título de preliminares, que ele liquidou o problema dos números relativos.

> Hankel propõe explicitamente estender a multiplicação de IR + a IR, respeitando um princípio de permanência: a estrutura algébrica procurada deve ter boas propriedades. A existência e a unicidade dessa extensão resultam do seguinte teorema: a única multiplicação em IR, que estende a multiplicação usual em IR+, respeitando a distributividade (à esquerda e à direita), está de acordo com a regra dos sinais. Uma vez formulado o problema, a demonstração é trivial:
> $0 = a \times 0 = a \times (b + \mathit{oposto\ de\ b}) = ab + a \times (\mathit{oposto\ de\ b})$

> $0 = 0 \times (oposto\ de\ b) = (oposto\ de\ a) \times (oposto\ de\ b) + a \times (oposto\ de\ b)$. Donde: $(oposto\ de\ a) \times (oposto\ de\ b) = ab$. (GLAESER, 1985, p. 105-106).

1.2 Conceitos Fundamentais dos Números Relativos

Caraça (2005) afirma que a todas as pessoas é constantemente imposta a realização de contagens nas mais variadas circunstâncias. E à medida que a vida social vai aumentando de intensidade a contagem torna-se mais importante e urgente. A solução encontrada pelo homem para esta necessidade são os números naturais. A ideia de que a criação dos números naturais surgiu das necessidades ligadas a condições de vida é comprovada pelo estudo de povos, em estado muito atrasado de civilização, encontrados na África e na Austrália. Há tribos na África Central que não conhecem os números além de 5 ou 6 e outras que vão até 10 000. O autor considera o fato de que as condições da vida econômica e humana desses povos determinam seu conhecimento dos números.

Caraça (2005) chama de números naturais à sequência a partir do 1 (um), argumentando que um homem civilizado de hoje começaria a escrever os números naturais a partir do zero, mas o homem primitivo, de hoje ou dos tempos pré-históricos, não considera o zero como um número, assim chama a sequência 0, 1, 2, 3, 4, ... de sucessão de números inteiros.

Quanto à criação de um símbolo para o nada, Caraça atribui às exigências da numeração escrita, datando, provavelmente, durante os primeiros séculos da era cristã.

O autor define o princípio de extensão como

> a tendência que o homem tem de generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento seja, qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. (CARAÇA, 2005, p.9).

E é fazendo a aplicação deste princípio que o autor mostra a construção dos conjuntos numéricos desde tempos em que o homem tinha apenas a necessidade da contagem até a construção dos números relativos e complexos.

Desse modo o homem primitivo poderia ter pensado que o maior número não iria além de 5, mas atualmente não se pode deixar de aceitar que dada a sequência de números inteiros $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ existe a possibilidade de repetição ilimitada do ato mental de juntar uma unidade, assim se *n* é um número inteiro, podemos efetuar sobre ele uma operação mental e obter um número maior $n + 1$, logo não há um número inteiro maior.

Caraça define conjunto dizendo que é dado um conjunto de certos elementos quando:

a) eles são, de si, identidades determinadas;
b) além disso, há a possibilidade de averiguar se um elemento qualquer, dado ao acaso, pertence ou não ao conjunto.

Portanto, conclui o autor, temos o direito de falar no conjunto dos números inteiros e que esse conjunto é infinito. Em um conjunto infinito as partes podem ser equivalentes ao todo.

Antes de falar sobre os números inteiros negativos, o princípio de extensão leva o autor a definir o conjunto dos números reais positivos relacionando cada número real a um ponto sobre a reta. Desse modo descreve os números relativos com base nos números reais fazendo uma analogia

> ao tomarmos o nascimento de Cristo como a origem no nosso calendário, podemos considerar o movimento de um ponto saindo de certa posição inicial e realizando-se ao longo de uma trajetória retilínea precisamos, para indicar a posição do ponto, saber em qual dos dois sentidos opostos, sobre a reta, o movimento se realiza. Se aos números juntamos um sinal indicativo de sentido, a dúvida desaparece. (CARAÇA, 2005, p.90)

O conceito de número relativo dado pelo autor é: sejam a e b dois números reais quaisquer: à diferença $a - b$ chamaremos número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo conforme for $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Dados dois números reais relativos a e b, aos quais correspondem bijetivamente os pontos P e Q, diz-se que é $a > b$, $a = b$ ou $a < b$ conforme P está a direita de Q, P coincide com Q ou P está a esquerda de Q.

Caraça afirma que um número relativo pode ser escrito como uma infinidade de diferenças entre números reais, exigindo apenas que a diferença não varie o sinal nem o valor absoluto. Todo número negativo pode ser considerado como uma diferença em que o aditivo é zero e o subtrativo é o número real igual ao seu módulo. Assim dado $p - q$ um número negativo qualquer e chamando de r a diferença $q - p$, temos: $p - q = 0 - r = -r$.

Do mesmo modo como ocorre uma relação bijetiva do número real absoluto com os pontos da reta, obtemos uma relação no campo real relativo. Desse modo dada uma reta orientada, ou seja, uma reta na qual se tomou um ponto O para origem e dois sentidos opostos: de O para direita (positivo) e de O para a esquerda (negativo), obtém-se uma relação entre o conjunto de pontos com o conjunto de números relativos.

Quanto às operações no campo dos relativos, Caraça as define por extensão imediata das operações no campo real. Quanto à adição e à subtração temos:

$(p-q)+(r-s)=p-q+r-s=p+r-q-s=(p+r)-(q+s)$ e

$(p-q)-(r-s)=p-q-r+s=p+s-q-r=(p+s)-(q+r)$.

Em particular, tem-se que somar um número negativo equivale a subtrair um número positivo com o mesmo módulo e subtrair um número negativo equivale a somar um número positivo de mesmo módulo. No campo dos relativos, a adição e a subtração aparecem unificadas em uma só, o que se chama operação algébrica.

Quanto à multiplicação tem-se:

$(p-q).(r-s)=p.(r-s)-q.(r-s)=pr-ps-(qr-qs)=pr-ps-qr+qs=$
$pr+qs-ps-qr=(pr+qs)-(ps+qr)$.

O autor apresenta as igualdades conhecidas como regra de sinal como uma particularidade da multiplicação, assim tem-se:

$(+a)\cdot(+b)=(a-0)\cdot(b-0)=+a\cdot b$,

$(+a)\cdot(-b)=(a-0)\cdot(0-b)=-a\cdot b$,

$(-a)\cdot(+b)=(0-a)\cdot(b-0)=-a\cdot b$,

$(-a)\cdot(-b)=(0-a)\cdot(0-b)=+a\cdot b$.

A divisão é definida como inversa da multiplicação valendo a regra de sinais semelhante à da multiplicação.

A potenciação é analisada se o expoente é um número positivo, então servem as mesmas definições com os resultados ampliados, o autor cita o seguinte exemplo:

> da regra dos sinais resulta que, se o expoente é inteiro e a base é positiva, a potência é positiva, mas que, se a base é negativa, há que atender a paridade do expoente – se o expoente é par, a potência é positiva, se o expoente é ímpar a potência é negativa. (CARAÇA, 2005, p. 96).

Em seguida, é analisado se o expoente é negativo e uma nova definição é dada pelo critério formal do princípio da extensão, tomando a^{-r}, um valor qualquer, querendo que sobre esta potência se opere da mesma maneira que no campo real, em particular deve ser que $a^r \cdot a^{-r} = a^{r+(-r)} = a^{r-r} = a^0$ e, como $a^0 = 1$, temos que $a^r \cdot a^{-r} = 1$, de onde $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

1.3 Os Documentos Oficiais e Alguns Livros Didáticos

Na Diretriz Curricular Estadual do Paraná (2008) - DCE, os Números Inteiros são apresentados como um conteúdo básico, pertencente ao conteúdo estruturante Números e Álgebra do 7º ano do Ensino Fundamental II e na lista de avaliação apresenta dois itens relacionados a este conteúdo:

a) reconheça os números inteiros em diferentes contextos
b) realize operações com números inteiros.

Em relação à expectativa deste conteúdo estruturante espera-se que os alunos compreendam os conceitos da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números pertencentes aos conjuntos dos naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais e suas propriedades.

Já no documento Caderno de Expectativas de Aprendizagem (2012) encontramos as seguintes expectativas de aprendizagem sobre números inteiros no 7º ano do Ensino Fundamental:

a) reconheça, interprete e represente números inteiros;
b) localize e represente números inteiros na reta numérica;
c) compare números inteiros;
d) resolva expressões numéricas envolvendo operações com números inteiros;
e) resolva situações-problema envolvendo operações com números inteiros;

A Base Nacional Comum Curricular (2018) - BNCC apresenta na unidade temática números o objeto de conhecimento:
Números Inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações.

E para este objeto de conhecimento as habilidades que seguem:

a) (EF07MA03) comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração;
b) (EF07MA04) resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

A expectativa da BNCC (2018) em relação à unidade temática números é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos.

A seguir apresentamos uma descrição de alguns livros didáticos, nos quais encontramos os requisitos presentes na DCE (2008) e no Caderno de expectativas de Aprendizagem (2012). Ressaltamos, porém, que suas edições são de 2012 e 2015, anos anteriores à BNCC (2018).

1.3.1 Livro Projeto Teláris – Ensino Fundamental – Anos Finais – Matemática

Autor: Luiz Roberto Dante

Ano: 2015

Os números inteiros são contemplados no primeiro capítulo deste livro. Antes de iniciar o capítulo há algumas questões sobre o que será desenvolvido na unidade.

A introdução é feita por meio de uma situação que envolve o saldo de gols de dois times de futebol. Sendo que a solução para a situação é um saldo positivo para um dos times e saldo negativo para o outro.

No item 2 sob o título: “Explorando a ideia de número positivo e número negativo”, é apresentada uma atividade envolvendo um termômetro colocado em dois ambientes distintos e questões sobre as temperaturas indicadas. Faz uma anotação a respeito da simbologia do positivo (+) e (-) e do zero como não sendo um número positivo nem negativo. Em seguida apresenta os números inteiros em outros dois contextos: altitude e fuso horário civil.

Após uma lista de 11 tarefas há algumas questões envolvendo a operação de subtração, como sendo sempre possível com números inteiros, e mais duas tarefas.

Enfim apresenta o conjunto dos números inteiros como uma união do conjunto dos números naturais sendo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ e o conjunto dos números inteiros negativos $\{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$. Orienta como construir uma reta numérica seguida de uma lista de tarefas.

Define:

- módulo ou valor absoluto do número inteiro como sendo a distância do ponto que representa esse número até a origem.
- números opostos ou simétricos quando representados por pontos que estão à mesma distância de uma determinada origem.

Faz uma análise de comparação dos números inteiros dispostos em uma reta vertical e em uma reta horizontal. Usa a simbologia de “maior do que”, “menor do que” e “igual” (>, <, =) para comparar.

Apresenta as operações na seguinte sequência:

1. adição
2. subtração
3. multiplicação
4. divisão
5. potenciação
6. radiciação

As expressões numéricas são apresentadas concomitantemente às operações. É proposto um desenvolvimento para as operações de adição e subtração a partir de contextos externos a Matemática. Já as demais operações partem de um contexto interno da Matemática. A ideia de sequência é explorada para o desenvolvimento da operação de multiplicação. A divisão é tratada como a operação inversa da multiplicação. A potenciação parte da própria operação dentro do conjunto dos números naturais e a radiciação segue de uma discussão envolvendo a potenciação.

1.3.2 Livro Vontade de Saber Matemática

Autores: Joamir Souza e Patricia Rosana Moreno Pataro

Ano: 2015

O livro não traz uma unidade específica para tratar dos Números Inteiros. Mas apresenta no capítulo 4 uma sequência para o estudo dos números positivos e números negativos. O primeiro contexto envolve temperaturas abaixo de zero na Antártica com uma proposta de discussão e pesquisa.

No próximo subtítulo há uma explanação dos números negativos em três contextos diferentes: saldo bancário, temperatura e altitude.

Na sequência temos um método para construir uma reta numérica com os números inteiros, a definição de módulo, números opostos ou simétricos, uma lista de tarefas com ou sem contextos, comparação de números positivos e negativos e operações com números positivos e negativos.

Há uma contextualização externa da Matemática para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, as potências são estudadas a partir de análises de sequências. Para cada uma dessas operações é apresentado uma lista de propriedades e uma lista de exercícios. No final do capítulo é apresentada uma proposta de reflexão sobre o capítulo com questões sobre o conteúdo abordado, seguida de uma lista de exercícios de revisão. As expressões numéricas aparecem nos exercícios da lista em uma quantidade crescente de cálculos.

1.3.3 Livro Matemática Ideias e Desafios

Autores: Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga

Ano: 2012

O Conjunto dos Números Inteiros é desenvolvido na primeira e segunda unidade, sendo a primeira intitulada “Números inteiros” e a segunda “Números inteiros: operações e problemas”.

A primeira unidade está dividida em quatro capítulos:

1) a ideia de números menores que o zero
2) números inteiros
3) aprendendo mais sobre números inteiros
4) tratamento da informação

No primeiro capítulo dessa unidade é desenvolvida a ideia de números menores do que zero por meio de situações cujos contextos variam, tratando de temperatura, saldo devedor ou positivo e altitude. Há uma sequência de questões a respeito de situações apresentadas e uma lista de tarefas contextualizadas.

O segundo capítulo inicia com uma comparação da operação de subtração no conjunto dos Números Naturais e os números negativos, seguida da definição do conjunto dos Números Inteiros como sendo a reunião dos números inteiros positivos, os números inteiros negativos e o zero, da definição de antecessor e sucessor e da relação de pertinência dos Números Naturais e Inteiros aos seus respectivos conjuntos. Na sequência há uma lista de tarefas, todas contextualizadas, e indicações do uso da calculadora.

O capítulo três refere-se à representação geométrica com indicações de construção da reta numérica, números simétricos ou opostos, definição de módulo ou valor absoluto, localização no plano cartesiano e comparação dos números inteiros, neste capítulo ao final de cada tópico há uma lista de exercícios.

O quarto capítulo é uma integração com o conteúdo estruturante Tratamento da Informação apresentando situações nas quais a estatística usa os números negativos, as situações são sobre pesquisa no mercado de trabalho, orçamento e fuso horário.

Ao final da unidade há uma lista de tarefas nominada "Revisão cumulativa e testes".

A unidade dois é composta pelos capítulos:

1) adição e subtração
2) multiplicação
3) divisão
4) potenciação
5) raiz quadrada exata

As operações de adição e subtração estão envolvidas em um contexto de lucro, prejuízo e variação de temperatura. Primeiro se desenvolve o estudo da adição apresentada de diferentes formas: resolução de uma situação, comparação geométrica na linha reta, escrita formal (operação simbólica). Destaca a propriedade comutativa e a do elemento neutro. A subtração também está envolvida no contexto de temperatura com um destaque maior para o conceito de número oposto. Há neste capítulo um subtítulo tratando de expressões numéricas na qual há um destaque para as regras de eliminar parênteses.

A operação de multiplicação inicia com uma situação na qual é necessário somar uma dívida repetitiva de dois reais, ou seja, a multiplicação de um positivo por um número negativo, seguindo para a multiplicação de dois números positivos, um número negativo e outro positivo e finalmente dois números negativos. São contempladas as propriedades: comutativa, elemento neutro, associativa e distributiva da multiplicação.

A operação de divisão é apresentada como a inversa da multiplicação. No capítulo referente à potenciação são tratadas algumas propriedades da potência (multiplicação e divisão de potências de bases iguais e potência de potência). Também é dada uma atenção especial à potência de base 10.

No capítulo sobre raiz quadrada exata é feita uma analogia da operação no conjunto dos números naturais e, exemplifica que um número negativo elevado ao quadrado resulta no mesmo número que seu relativo positivo. E a unidade termina com a revisão cumulativa e testes.

CAPÍTULO 2

A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

A Educação Matemática Realística (EMR), segundo Van Den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2014), é uma abordagem de ensino que iniciou por volta da década de 1970 com o projeto Wiskobas na educação primária por Edu Wijdeveld e Fred Goffree e, em seguida, por Adri Treffers. Juntos, eles criaram a base da EMR. Em 1971, o projeto Wiskobas tornou-se parte do então instituto IOWO que estava sob a direção de Hans Freudenthal. Em 1973, com a expansão deste instituto com o projeto Wiskivon para Educação Matemática secundária essa base recebeu um impulso decisivo para reformar a Educação Matemática na Holanda onde, na época, predominava o movimento da Matemática Moderna.

As ideias de Freudenthal foram fundamentais para o desenvolvimento dessa abordagem. Ele considerava a matemática como uma atividade humana, defendia que estudantes de matemática devem ser participantes ativos de sua aprendizagem desenvolvendo suas próprias ferramentas. De acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2014), para Freudenthal, a Matemática tem que estar conectada a realidade, permanecer próxima às crianças e ser relevante à sociedade, para ser de valor humano. Segundo Freudenthal (1991) a Matemática deve ser tratada não como uma ciência pronta, axiomática, mas sim, como uma atividade humana, na qual, os estudantes devem experimentar o processo pelo qual um matemático vive quando descobre algo novo, mesmo que esse estudante esteja realizando algo já anteriormente criado.

Portanto, a fim de que os estudantes realizem esta atividade em suas mentes, Freudenthal (1991) defende que eles devem ter a oportunidade guiada para reinventar a matemática. Para isso é necessário que o professor seja um guia que seleciona as tarefas, inicia e encaminha as discussões e construções matemáticas dos estudantes. De acordo com Mendes (2014) nessa perspectiva, ao estudante cabe ser o autor do seu próprio conhecimento e ao professor se estabelece a responsabilidade de criar um cenário que oportunize “essa autoria”. Segundo Pires (2013), Freudenthal utilizou o termo “reinvenção guiada” para explicar como ele imaginou que a matemática poderia ser aprendida.

De acordo com Pires (2013) a reinvenção guiada juntamente com a matematização são duas das ideias centrais da EMR.

Para tanto,

> espera-se que o ambiente em sala de aula oportunize ao estudante se colocar em um contexto em que seu compromisso com a aula de matemática transpasse o desenvolvimento fragmentado, mecânico e reprodutor de competências, para que possa tornar-se o condutor do próprio processo de aprendizagem, por meio de tarefas que suscitem e abranjam competências cognitivas dos níveis de reflexão. (MENDES, 2014, p. 26)

A matematização segundo Mendes (2014) ocorre quando o estudante busca organizar a realidade usando ideias e conceitos matemáticos. De acordo com Streefland (2003, apud FERREIRA, 2016 p. 246) para Freudenthal era possível “matematizar a realidade” e “matematizar a matemática” e, assim, Freudenthal e Treffers, em 1987, dividiram a matematização em duas partes: matematização horizontal e matematização vertical. Segundo Treffers (1987, apud PIRES, 2013 p. 26), na matematização horizontal o estudante usa a matemática para resolver problemas da vida real ou imaginário, sendo assim trata-se de um processo que descreve um fenômeno utilizando a matemática e na matematização vertical o estudante reorganiza sistemas, buscando conexões, conceitos e melhorando modelos dentro da matemática.

De acordo com Ferreira (2016), Treffers e Goffree consideraram a distinção entre a matematização horizontal e a matematização vertical como sendo artificial já que a matematização é um processo dinâmico e as duas vertentes estão fortemente inter-relacionadas.

> Na componente horizontal a estrada para a matemática é pavimentada por meio de formação de modelo, esquematização e atalhos. A componente vertical atua por processamento matemático, aumentando o nível de estrutura no campo do problema correspondente. Sem dúvida, separar grupos de atividade sem dois componentes parece um pouco artificial. (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 109, apud FERREIRA, 2016, p. 247).

Segundo Ferreira (2016) para Freudenthal as duas formas de matematização tem igual valor.

A composição entre a matematização horizontal e a matematização vertical é chamada de matematização progressiva. De acordo com Pires (2013) é nesse processo que os alunos constroem, reinventam ou até inventam matemática. A elaboração de tais tarefas não é algo simples de fazer, pois elas devem promover a reinvenção e a matematização em diferentes níveis. As tarefas devem iniciar com algo que os alunos possam resolver tendo o professor como guia, em seguida os alunos são levados ao próximo nível que pode ser um aprimoramento da primeira tarefa dentro da própria matemática ou pode ser um novo problema com uma exigência um pouco maior na elaboração de uma solução. De acordo com Gravemeijer (2005) o desenvolvimento curricular começa com um experimento pensado, imaginado e guiado mediante o qual o estudante deve chegar a uma solução pessoal.

O termo “realística”, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2014), tem a ver com fazer uma atividade real em sua mente. Portanto não se limita a uma conexão apenas com o mundo real, mas os contextos podem envolver situações do mundo real, imaginário ou, até mesmo, da matemática formal. A contextualização torna-se necessária na abordagem da EMR, pois os problemas contribuem para aplicar conceitos matemáticos, assim o estudante pode desenvolver ferramentas e estratégias matemáticas que podem servir de modelo para um novo problema.

De acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2014) a EMR envolve princípios fundamentais para o ensino da Matemática que estão ligados a ela de modo inalienável. A maioria deles foi articulada por Treffers em 1978, mas sendo reformulados ao longo dos anos, a autora distingue seis princípios:

- princípio da atividade – estudantes são participantes ativos do seu processo de aprendizagem. A matemática é melhor aprendida quando se faz matemática, o que reflete a interpretação de Freudenthal da matemática como uma atividade humana.
- princípio da realidade – dividida em duas partes, primeiro aplicar a matemática para resolver problemas da vida real e a segunda é que a educação matemática deve partir de situações problema com significados para os estudantes.
- princípio de nível – os estudantes passam por níveis de entendimento, desde soluções informais passando por várias etapas até chegar a uma sistematização.
- princípio de entrelaçamento – os conteúdos de matemática não podem ser considerados de forma isolada, mas de maneira integrada. Os problemas devem ser ricos no sentido de que os estudantes possam utilizar várias ferramentas e conhecimento de matemática.

- princípio de interatividade – significa que aprender matemática não é só uma atividade individual, mas também social. Além disso, a EMR favorece discussões com toda classe e trabalho em grupo oportunizando a troca de estratégias e invenções adquirindo ideias para aprimorar suas estratégias. E ainda, promovem reflexões em que os estudantes podem melhorar o nível de entendimento.
- princípio de orientação – refere-se à ideia de Freudenthal de reinvenção guiada. Professores devem ter papel proativo na aprendizagem dos alunos e os programas educacionais devem conter um cenário que possibilitem um trabalho como uma alavanca para alcançar um avanço no entendimento dos alunos. Para tanto, a didática e os programas educacionais devem estar baseados em uma trajetória de aprendizagem em longo prazo.

2.1 TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2010), uma trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA) descreve o processo pelo qual os alunos passam para aprender. Mostrando o caminho que seguem até chegar aos objetivos do ensino. A autora defende que tal trajetória não deve se prender somente à perspectiva de aprendizagem, mas que pode ter os significados entrelaçados. Seguem três exemplos desses significados:

1) uma trajetória de aprendizagem que dá uma visão geral do processo de aprendizagem dos alunos.
2) uma trajetória de ensino que consiste em indicações didáticas que descreve como o ensino pode articular de maneira mais eficaz com o processo próprio de aprendizagem das crianças e estimulá-lo.
3) um perfil do conteúdo programático, pois indica quais os elementos centrais dos conteúdos de matemática que se deve ensinar.

A intenção de uma trajetória, de acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen (2010) é nortear as ações do professor, servindo de guia para as práticas de ensino, mas não de forma rígida, como se seguisse uma receita. Sabemos que não se podem prever as sutilezas do processo de ensino e de aprendizagem que ocorrem em sala de aula, pois o processo de aprendizagem é muito complexo para ser limitado e nunca acontece da mesma maneira. Mas ao analisar o processo de aprendizagem de um grupo podem-se identificar linhas gerais. De acordo com a autora é necessário ter uma visão geral do processo. E considerar os seguintes aspectos:

> - singularidades no processo de aprendizagem de cada aluno;
> - a descontinuidade no processo de aprendizagem, pois às vezes os alunos aprendem a saltos e outras vezes têm recaídas;
> - o fato de que os alunos são capazes de aprender múltiplas habilidades simultaneamente e que diferentes conceitos podem estar em desenvolvimento ao mesmo tempo, tanto dentro como fora da área de matemática;
> - as diferenças que podem aparecer no processo de aprendizagem na escola como resultado de disparidades em situações de aprendizagem fora da escola;
> - os diferentes níveis de domínio de certas habilidades que os alunos possuem. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010. p. 28).

Uma TEA, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2001), segue duas perspectivas: a perspectiva micro didática na qual o foco está em como o aluno aprende, destacando as sutilezas desse processo e a perspectiva macro didática que diz respeito ao o que o aluno aprende em longo prazo, possuindo as seguintes características:

- é mais do que reunir uma coleção para atingir metas, em vez de uma lista de verificação de habilidades isoladas, uma trajetória torna clara a forma como as habilidades são desenvolvidas, mostrando o que vem antes e o que vem depois.
- dupla perspectiva de metas e quadro de ensino, pois não apenas descreve os marcos de aprendizagem de um estudante que podem ser reconhecidos, como também retrata as principais atividades de ensino que conduzem a esses marcos.
- coerência própria, com base na distinção de níveis, pois o que é aprendido em um estágio é entendido e realizado em um nível superior, um padrão recorrente de travamento entre a transição de níveis forma o elemento de conexão da trajetória. Outra implicação dessa característica é que os alunos podem trabalhar com os mesmos problemas sem ter o mesmo nível de compreensão.
- novo formato de descrição, pois não se trata de uma simples lista de competências e insights para ser alcançada, nem uma rigorosa definição de parâmetros comportamentais que pode ser testado diretamente. Em vez disso, uma descrição narrativa e esquemática, completada com

muitos exemplos, é dada a continuação do desenvolvimento que tem lugar no processo ensino-aprendizagem.

De acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen (2010) uma trajetória de Ensino e Aprendizagem não acontece de forma isolada, caso não se estabeleça certas limitações, não é fácil ver como as trajetórias se conectam. Ao mesmo tempo focar em um assunto específico não justifica perder de vista como se conectam com outras áreas da matemática.

CAPÍTULO 3

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Esta dissertação é uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. Segundo Bogdan e Biklen (1994), uma pesquisa qualitativa apresenta as seguintes características:

1) na investigação qualitativa a fonte de dados é o ambiente natural;
2) a investigação qualitativa é descritiva;
3) os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo que simplesmente pelo resultado ou produto;
4) os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
5) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Esta pesquisa teve início com estudos sobre sua base teórica. Começando pela Educação Matemática Realística, abordagem que a fundamentou teoricamente.

A escolha do conteúdo Números Inteiros ocorreu por conta da observação em relação a dúvidas frequentes de alunos tanto do Ensino Fundamental – Anos Finais quanto do Ensino Médio sobre operações nas quais os números negativos estavam presentes.

Após escolhido o tema matemático foi feito um estudo sobre os conceitos dos Números Relativos segundo Caraça (2005) e um estudo sobre os aspectos históricos do desenvolvimento da noção de número, concomitantemente ao estudo da EMR e da Trajetória de Ensino e Aprendizagem de acordo com as ideias de Van Den Heuvel-Panhuizen.

Como o conteúdo de Números Inteiros está listado nas Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná e na Base Nacional Comum Curricular para o 7º Ano do Ensino Fundamental – Anos Finais e de que a autora era professora de um único 7º ano em 2018, essa turma foi convenientemente escolhida para participar deste trabalho.

A fim de escrever a trajetória aqui descrita foram, primeiramente, delineados os objetivos que esperam ser alcançados pelos alunos, em seguida foi feita uma pesquisa de tarefas em livros didáticos e na internet sobre o conteúdo de

Números Inteiros. Diante disso, as tarefas foram selecionadas de modo que se pudesse obter uma sequência para o cumprimento dos objetivos. Com a sequência de tarefas pronta, iniciou-se a escrita de um roteiro procurando pensar em detalhes como a aprendizagem do conteúdo poderia ocorrer na sala de aula.

Esta trajetória está dividida em quatro tarefas, cuja previsão de possíveis dúvidas e estratégias, que os alunos poderiam ter ou elaborar para resolver as situações, estão escritas em forma de diálogo entre professor e alunos inspirados pelo texto de Deguire (1997), neste diálogo os personagens são o professor fictício (PF) e os alunos fictícios, denominados AF1, AF2, AF3, AF4, AF5 e AF6. A tarefa 1 foi dividida em três etapas, a primeira para apresentar o símbolo de menos como predicativo de uma quantidade, representando um valor devido em uma negociação financeira simples, a segunda trata da ordenação dos Números Inteiros na reta numérica, valor absoluto e simétricos ou opostos e a terceira faz a introdução das operações de adição e subtração com números relativos. As tarefas 2 e 3 apresentam os símbolos de mais e menos com os significados de predicativos e operatórios e os alunos são guiados a usarem a reta numérica como apoio ao efetuar as operações. A tarefa 4 trata das operações de multiplicação, como a adição de números repetidos, e de divisão.

Em agosto de 2018, antes de dar início à aplicação da trajetória, a professora conversou com os alunos, pais ou responsáveis explicando a respeito do trabalho e como seria seu procedimento, os pais ou responsáveis assinaram termo de consentimento livre e esclarecido. A aplicação iniciou em setembro de 2018 e terminou no início do mês de novembro de 2018. Como são distribuídas 5 aulas semanais para a disciplina de Matemática no Ensino Fundamental, todas foram utilizadas para desenvolvimento deste trabalho. Para que a realização das tarefas e as discussões em sala de aula não se perdessem, os materiais produzidos pelos alunos foram fotografados e o áudio das aulas foi gravado em um aparelho celular. As falas da professora/autora, no relato, estão indicadas pelo código P. A turma era composta de 23 alunos frequentes, denominados A01, A02, A03, A04, A05, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21, A22 e A23.

Procurou-se guiar as aulas fazendo perguntas e promovendo discussões em pequenos ou grande grupos, procurando conduzir os alunos a fim de que realizassem a reinvenção do tema matemático estudado.

No relato das tarefas são apresentadas algumas produções dos alunos que foram selecionadas a partir da similaridade das ideias utilizadas em suas produções.

Durante a aplicação das tarefas, a professora continuou seus estudos sobre Educação Matemática Realística e aspectos históricos dos Números Inteiros.

A análise desta pesquisa foi feita entrelaçando a teoria com o desenvolvimento da Trajetória de Ensino e Aprendizagem. Durante a aplicação da trajetória foi possível constatar os princípios da Educação Matemática Realística que foram evidenciados ao observar as reações, falas e produções dos alunos na medida em que as tarefas foram sendo realizadas, perceberam-se obstáculos semelhantes aos enfrentados no decorrer do desenvolvimento histórico dos números relativos. Esta experiência contribuiu para nortear as ações da autora a fim de refinar a trajetória aqui descrita e suas atitudes enquanto guia.

CAPÍTULO 4

UMA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS BÁSICOS DE NÚMEROS INTEIROS

Com o desenvolvimento da sequência de tarefas propostas espera-se que os alunos alcancem os objetivos que seguem.

a) Conceituar números positivos e negativos historicamente e de acordo com as definições matemáticas.
b) Reconhecer que a representação dos inteiros pode descrever situações do seu cotidiano.
c) Entender a reta numerada como um objeto matemático para compreender a ordenação dos inteiros.
d) Efetuar as operações básicas com números inteiros.

4.1 TAREFA 1

4.1.1 Etapa 1 – uma possibilidade de diálogo

Quadro 9 – Enunciado da etapa 1.

Carlos e Fernanda fizeram uma conta na cantina de sua escola para pagar uma vez por semana. Veja os gastos deles durante uma semana.

Gastos de Carlos.

Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
R$ 5,00	R$ 3,00	R$4,00	R$4,00	R$3,00

Gastos de Fernanda

Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
R$ 4,00	R$ 5,00	R$6,00	R$5,00	R$3,00

Em relação aos gastos de Carlos na cantina, responda se é possível pagar a conta com uma cédula de 20 reais. Irá sobrar ou faltar dinheiro? Quanto?
E, em relação aos gastos de Fernanda na cantina, responda se é possível pagar a conta com uma cédula de 20 reais. Irá sobrar ou faltar dinheiro? Quanto?

Fonte: da autora.

Apresentamos agora um diálogo simulando uma possível conversa entre professor e alunos ao tentarem encontrar uma solução para esta etapa.

Diálogo fictício

PF: vocês já leram o problema?

AF2: sim.

Os alunos tentam resolver o problema individualmente, depois de um tempo iniciam uma discussão.

PF: como podemos resolvê-lo?

AF2: é muito simples, é só somar os gastos e ver quanto dá.

PF: então vamos começar!

AF1: para os gastos do Carlos o dinheiro dá e ainda sobra um real.

PF: como você fez?

AF1: somei os valores $5 + 3 + 4 + 4 + 3$, deu 19, então sobra um real! (É provável que os alunos apenas comparem o resultado com a quantia de 20 reais, encontrando mentalmente a diferença).

PF: Alguém fez diferente?

AF: eu somei os gastos, também deu 19 e eu fiz $20 - 19 = 1$. (Algum aluno pode fazer o registro da operação de subtração).

PF: certo. Vamos anotar! (Anota no quadro) E os gastos de Fernanda?

AF3: eu já fiz, a soma deu 23 e $23 - 20 = 3$.

PF: (anota no quadro deixando as resoluções dos gastos de Carlos e de Fernanda lado a lado) sobram 3?

AF3: não, faltaram 3 reais.

PF: e como eu posso registrar isso?

AF4: eu escrevi a palavra faltaram antes do 3.

PF: será que existe algum símbolo na matemática para registrar que um valor numérico representa um valor devido?

AF5: eu já vi, no banco usa o sinal de menos.

PF: certo, então é correto dizer que $23 - 20 \ = -3$?

AF1: não. $23 - 20 = 3$.

PF: então vamos observar como foi feito o cálculo de quanto sobra ou falta no caso de Carlos.

AF2: de 20 reais tirou o que ele devia.

PF: e se fizéssemos isso com o caso de Fernanda, como ficaria?

AF2: de 20 tirar 23!

AF3: ah! Então precisa fazer $20 - 23$!

AF6: mas não pode tirar o maior do menor!

AF3: não pode tirar, por isso fica devendo. Então $20 - 23 = -3$.

PF: certo, chegamos a um acordo?

Alunos: sim.

Neste momento o professor pode apresentar outras operações semelhantes às escritas para resolver a situação dos gastos de Fernanda e Carlos para que os alunos resolvam.

Quadro 10 – Sugestão de operações.

Efetue:

a) 12-10=
b) 28-30=
c) 15-16=
d) 20-14=
e) 13-50=
f) 200-198=
g) 275-300=
h) 2018-2030=

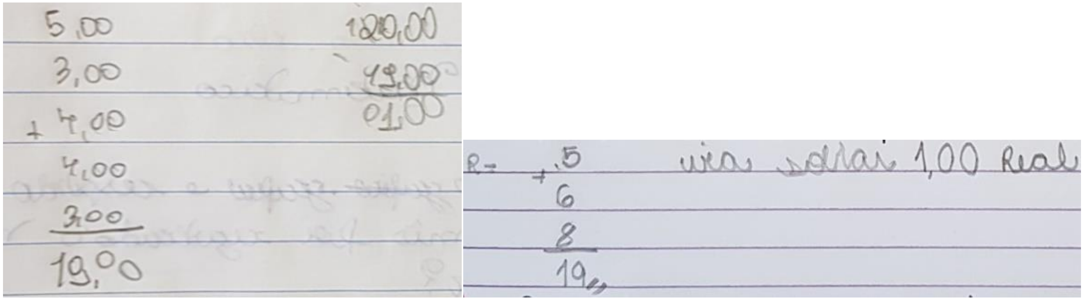
Fonte: da autora.

4.1.2 Relato da etapa 1

A tarefa 1 foi proposta para os alunos de um 7º ano do Ensino Fundamental em um colégio estadual do Paraná. Eles ficaram divididos em grupos de 3 a 5 pessoas, resolvem a situação dos gastos de Carlos sem dificuldades, já de imediato respondem que para solucioná-la "tem que somar tudo".

Figura 9 – Resolução da etapa 1: sobre os gastos de Carlos.

A19 A04



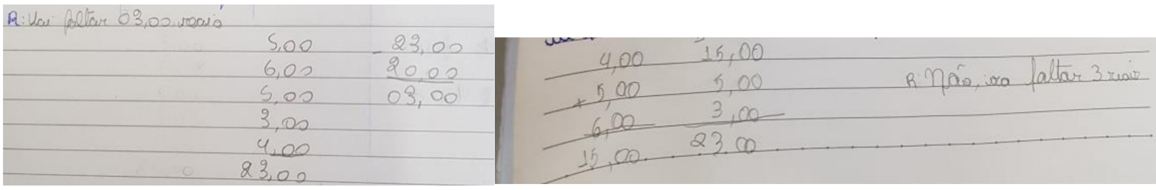
Fonte: caderno dos alunos.

Alguns efetuaram a subtração vertical, outros compararam 20 com 19, chegando à resposta de que irá sobrar 1 real.

Em relação aos gastos de Fernanda há concordância em relação ao resultado, a aluna A04 disse: "eu fiz a mesma coisa professora, só que faltou 3 reais".

Figura 10 - Resolução da etapa 1: sobre os gastos de Fernanda.

A03 A07



Fonte: caderno dos alunos.

Quando é perguntado se existe algum símbolo na matemática para representar uma dívida ocorre a seguinte discussão:

A01: aquele negócio de menos…

A03: menos três.

A16: negativo?

P: o negativo serve para representar o que falta?

A04: eu acho que sim professora, porque é <u>menos</u> 3 (dando ênfase à palavra menos).

P: vocês já viram o sinal de menos em outros lugares?

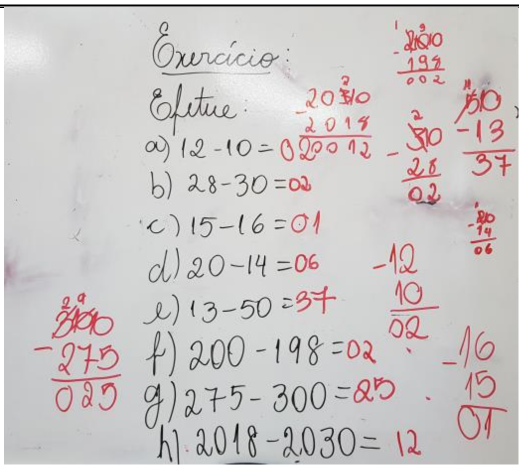
A12: na temperatura.

A14: na calculadora do celular aparece.

Ao questionar se a operação $23 - 20 = -3$ estava correta, a aluna A04 argumentou o seguinte: “não está certo. O certo é $20 - 23 = 0 - 3$, porque a pessoa não levou esses 3 para pagar. Ela tem zero e está devendo esses 3”. Tal raciocínio pode ser mostrado ao decompor 23 em $20 + 3$, desse modo a expressão ficaria $20 - (20 + 3) = 20 - 20 - 3 = (20 - 20) - 3 = 0 - 3 = -3$. Embora a maneira formal não tenha sido apresentada aos alunos, o argumento da colega foi aceito por toda turma como correto.

Apresenta-se algumas operações e espera-se um tempo para que os alunos resolvam (a resolução é individual). As alunas A01 e A16 resolvem os exercícios no quadro da seguinte forma:

Figura 11 – Resolução da sugestão de operações feita pelos alunos.



Fonte: da autora.

Para o item a, a resolução segue tranquila sem polêmicas, mas para o item b, os alunos iniciam a discussão na qual a aluna A12 apresenta um método de resolução: “na b é $28 - 30$ e você faz $30 - 28$, como dá o mesmo resultado, é só colocar o sinal de menos na frente”.

O sinal de menos não foi escrito nas soluções apresentadas no quadro, o que gerou a discussão seguinte:

A07: tem que colocar o sinal de menos porque de 28 você tirou 30, só que você não tem 30, você ficou devendo 2.

P: vocês concordam com ela?

A13: eu concordo. Seria mais fácil se fosse $50 - 13$ (referindo-se ao item e).

P: mas situações como a dessa conta podem existir?

A17: pode. Uma pessoa pode ter 13 reais e comprar uma coisa de 50 reais, faltaram 37.

P: então qual é a regra?

Houve uma pausa para discutir se situações como $13 - 50$ acontecem, os alunos concordaram que é muito comum no comércio uma pessoa ficar devendo parte do valor da compra. Conclui-se a discussão colocando os sinais de menos quando "a dívida era maior do que o que a pessoa tinha" e com a apresentação da sentença dada pela aluna A07: "Quando a gente tira um número maior de um número menor, não dá… por isso é que fica o sinal de menos".

4.1.3 Etapa 2 – uma possibilidade de diálogo

Quadro 11 – Enunciado da etapa 2.

Desenhe uma linha reta com 28 pontos equidistantes e enumere em ordem decrescente a partir do número 23.

Fonte: da autora.

Diálogo fictício

PF: vamos desenhar uma linha reta e numerá-la a partir do 23 na ordem decrescente, desse modo: (professor desenha no quadro uma linha reta com 28 pontos destacados e começa a numerá-la de modo decrescente a partir do número 23, mas para de preencher no número 18 e diz para os alunos completarem o restante).

AF1: Quando chegamos ao zero acabou. Não pode haver nada antes do zero.

PF: (preenchendo a reta até o zero) vamos pensar nos gastos de Fernanda, ela tinha quantos reais?

AF1: ela tinha 20 reais.

PF: (apontando para o número 20 na reta numerada) então vamos dizer que ela pague um real de cada vez, se ela paga um ela fica com...

AF1: 19, depois 18, 17, 16, 15, 14.

PF: certo. E o que vocês acham? Quantas vezes temos que fazer isto?

AF3: bem se ela devia 23 reais, então são 23 vezes. Se depois de pagar 20 ela fica com nada, agora ela deve um de cada vez, deve 1, deve 2 e deve 3 reais.

AF1: agora já sei completar a reta! Fica -1, -2, -3 e o próximo será -4 e se tivesse espaço, o próximo era -5, -6 e assim vai.

Nesta reta numérica, o professor pode explorar a distância do número até o zero (origem), mostrando que os números simétricos ou opostos, em relação ao zero, tem o mesmo valor absoluto. Trazendo ao conhecimento do aluno o conceito de módulo e sua notação como duas barras verticais.

Quadro 12 – Sugestão de exemplos.

a)	$\lvert -3 \rvert = 3$
b)	$\lvert +3 \rvert = 3$
c)	$\lvert -2 \rvert = 2$
d)	$\lvert +2 \rvert = 2$
e)	$\lvert -11 \rvert = 11$

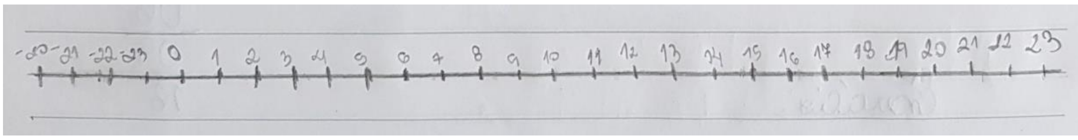
Fonte: da autora.

4.1.4 Relato da etapa 2

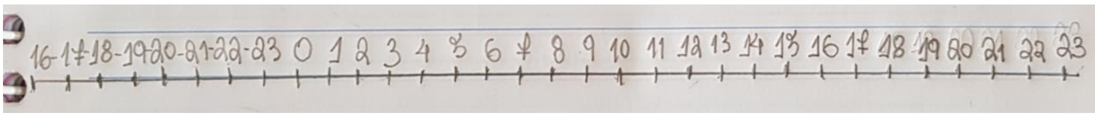
Para construir a reta numérica foi sugerido aos alunos que fizessem uma reta dividida por 28 pontos equidistantes, em seguida, que eles começassem a numerá-la na ordem decrescente da direita para a esquerda partindo do número 23. Isso causou alguns conflitos, pois os alunos argumentaram que a professora mandou fazer 28 pontos e não 23, outros disseram que sobraram 5 pontos sem números na reta, houve a sugestão de alguns alunos para que colocassem o zero então sobrariam apenas 4 pontos. Tal discussão nos remete ao fato histórico de que o zero não surgiu logo no início da atividade humana de contagem. Alguns alunos tiveram a ideia de continuar a completar a reta com números negativos, o que ocorreu de duas formas diferentes.

Figura 12 – Reta numérica desenhada pelos alunos.

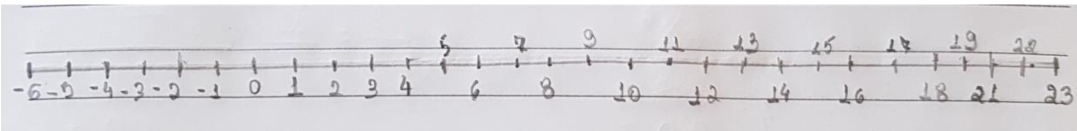
Aluno: A13



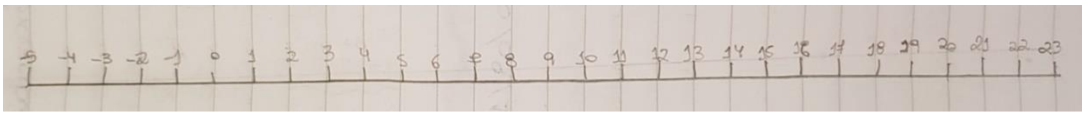
Aluno: A17



Aluno: A07



Aluno: A12



Fonte: caderno dos alunos.

Observe que a aluna A07 não registrou o número 20, razão pela qual sua reta chegou ao -6 enquanto a da aluna A12 chegou ao -5. Mas a falta do registro não interfere no raciocínio que ela teve em ordenar os números relativos na reta.

Os alunos concordaram que deveriam usar números negativos para completar a reta. A fim de entrar em um acordo sobre qual modelo de reta era o mais apropriado, usou-se a situação de dívida de Fernanda na etapa1. Sabendo que ela devia -23 reais na cantina e tinha apenas 20 reais, a professora aponta para o ponto de abscissa 20 e anda 23 pontos na reta para a esquerda, simulando uma situação na qual Fernanda paga um real de cada vez, até que na vigésima terceira vez sabe-se que a abscissa deve ser o número -3. Desse modo, a turma concluiu que a reta mais apropriada é a reta numerada pelas alunas A07 e A12.

Chama-se a atenção dos alunos sobre a distância na reta dos pontos de abscissa 7 e -7 em relação ao zero. Os alunos percebem que números com sinais opostos tem a mesma distância até o zero. Desse modo é discutido o conceito e a notação do módulo de um número.

4.1.5 Etapa 3 – uma possibilidade de diálogo

O professor propõe outras questões, afirmando ser possível explorar as operações de adição e subtração nesta mesma reta numérica:

Quadro 13 – Enunciado da etapa 3.

Questão 1: Nícolas tem 14 reais e ganha 5 reais de seu avô, com quantos reais Nícolas irá ficar? Questão 2: A irmã de Nícolas, Flávia, devia 14 reais na cantina da escola, seu avô, muito gentil, pagou 10 reais de sua dívida. Como ficou a conta de Flávia na cantina? Questão 3: Clara, amiga de Flávia, já devia 12 reais quando comprou um lanche de 4 reais. Como ficou a conta na cantina para Clara?

Fonte: da autora.

Diálogo fictício

Discussão da questão 1:

AF2: essa é fácil é só fazer $14 + 5$ que é 19.

PF: tentem mostrar como esta operação pode acontecer na reta numérica.

AF1: (dirigindo-se ao quadro e apontando para o número 14) adicionando 1 sucessivamente até obter 19: $14 + 1 = 15$, $15 + 1 = 16$, $16 + 1 = 17$, $17 + 1 = 18$ e $18 + 1 = 19$.

Discussão da questão 2:

AF3: se ela devia 14, então escrevo -14, se o avô pagou 10, escrevo $+10$. Então é $-14 + 10$.

AF2: mas você fica com uma operação de adição e esta não é a conta certa, porque precisa fazer subtração.

PF: vamos analisar esta operação na reta numérica, (apontando para o -14 na reta) -14 mais 10, como proceder?

AF1: anda 10 números para a direita. Vai parar no -4. Tá certo! Ela deve 4 na cantina.

Discussão da questão 3:

AF6: se ela deve 12 e gasta 4, ela deve 16 reais.

PF: então como podemos registrar esta operação?

AF3: se é dívida, usa o sinal de menos, $-12 - 4 = -16$.

AF2: mas o sinal é de menos e você fez adição!

AF6: tá certo.

AF2: como eu vou saber se a conta é adição ou subtração?

PF: vamos analisar os casos! (escrevendo as informações no quadro, formando uma tabela). Carlos tinha 20 reais e devia 19, escrevemos $20 - 19$, Fernanda tinha 20 reais e devia 23, escrevemos $20 - 23$, Nícolas tinha 14 e ganhou 5 reais, escrevemos $14 + 5$, Flávia devia 14 e seu avô pagou 10 reais, escrevemos -$14 + 10$, Clara devia 12 reais e gastou outros 4 reais, escrevemos $-12 - 4$.

Quadro 14 – Operações para uma resolução das etapas 1 e 3.

Carlos	$20 - 19 = 1$
Fernanda	$20 - 23 = -3$
Nícolas	$14 + 5 = 19$
Flávia	$-14 + 10 = -4$
Clara	$-12 - 4 = -16$

Fonte: da autora.

PF: Agora me digam quais operações realizamos em cada caso?

AF1: Carlos e Fernanda usamos a subtração! $20 - 19 = 1$ e $20 - 23 = -3$.

AF2: tá! Sinal de menos, operação de subtração! No caso do Nicolas, usamos adição. Mas os outros casos estão confusos! Os resultados estão corretos, mas quando o sinal era mais, a operação foi de subtração e quando o sinal era menos, a operação foi de adição.

PF: certo! Então temos os seguintes resultados. (separando as operações em duas colunas, uma para adição e outra para subtração).

Quadro 15 – Operações de adição e subtração discriminadas.

Subtração	Adição
$+20 - 19 = +1$	$+14 + 5 = +19$
$+20 - 23 = -3$	$-12 - 4 = -16$
$-14 + 10 = -4$	

Fonte: da autora.

AF6: na operação de subtração o sinal de menos aparece só uma vez, não importa o lugar. Se aparecer duas vezes tem que fazer adição.

AF3: na adição, os sinais são iguais e na subtração os sinais são diferentes!

PF: sim! E o que dizer do sinal do resultado?

AF1: se tem é mais, se deve é menos. Então se tem mais do que deve, fica o sinal de mais!

AF6: Ah! Então se a pessoa dever mais do que tem, fica o sinal de menos. E se a pessoa só dever, também fica o sinal de menos, que é o caso da Clara.

PF: vamos escrever isso como uma regra. (O professor pode escrever a regra com as palavras dos alunos).

“Na adição, os sinais são iguais e na subtração os sinais são diferentes”.
“Se o valor que a pessoa tem é maior do que o valor devido, então fica o sinal de mais”.
“Se a pessoa dever mais do que tem ou se ela só tiver dívidas, então fica o sinal de menos”.

Neste momento, o professor pode sugerir outras operações que envolvam adição e subtração para serem mostradas na reta numérica.

Sugestões (as operações sugeridas são com números baixos para facilitar o uso da reta numérica):

Quadro 16 – Sugestão de operações.

a) $-4-5$
b) $5-7$
c) $-8+12$
d) $9+3$
e) $-6-5$
f) $-7-7$
g) $8-5$
h) $3+8$
i) $-6+2$
j) $-13+5$

Fonte: da autora.

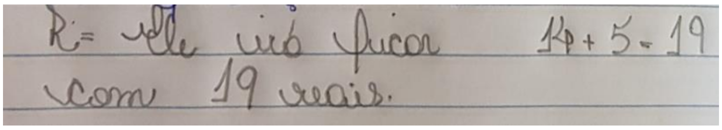
4.1.6 Relato da etapa 3

As questões 1,2 e 3 foram resolvidas individualmente e discutidas em grande grupo posteriormente.

A questão 1 foi resolvida sem divergências, todos concordaram que a operação deveria ser $14 + 5 = 19$.

Figura 13 – Resolução da etapa 3: questão 1.

A17

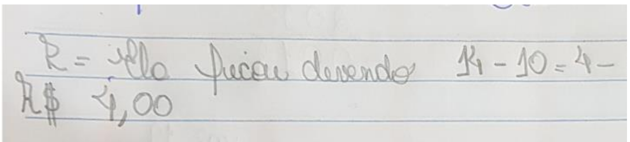


Fonte: caderno dos alunos.

A discussão em grande grupo mostrou discordância em relação aos sinais dos números na questão 2, pois a maioria resolveu subtraindo 10 de 14 o que resultou em uma dívida de 4 reais ($14 - 10 = 4$, ela ficou devendo 4 reais), mas alguns alunos afirmavam que deveria ser -14, e quando a aluna A13 apresenta sua solução ($-14 - 10 = -4$), provoca uma mudança na fala de alguns colegas, a aluna A17, argumenta que como o avô havia pago essa quantia de 10 reais, então deveria ser $+10$. Assim a resolução foi corrigida pelos alunos como $-14 + 10 = -4$.

Figura 14 – Resolução da etapa 3: questão 2 (aluna A17).

A17

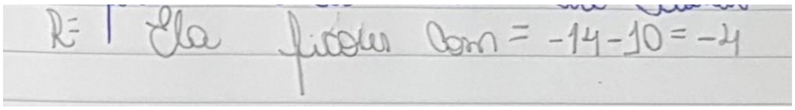


Fonte: caderno dos alunos.

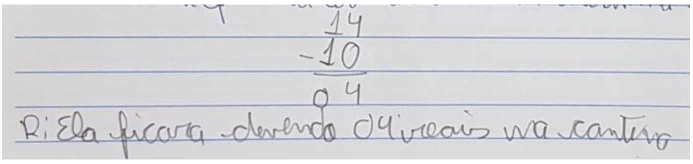
A aluna A17 escreveu o sinal de menos após o número, o que foi de imediato notado pela colega A13, essa escrita pode ter ocorrido devido à leitura que se faz de -4 como quatro negativo, fazendo com que o aluno escreva como está ouvindo.

Figura 15 – Resolução da etapa 3: questão 2.

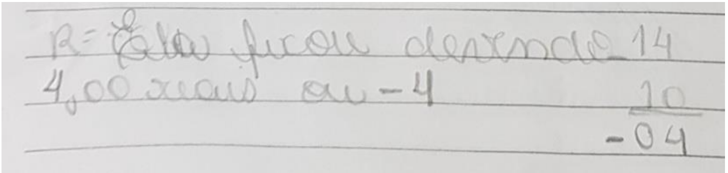
A13



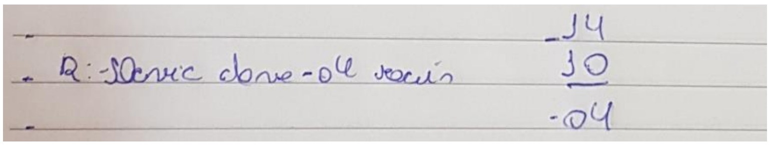
A15



A16



A10

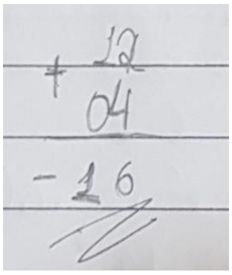


Fonte: caderno dos alunos.

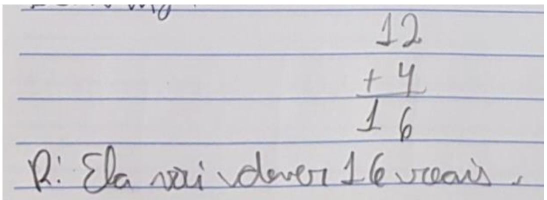
A maioria dos alunos resolveu a questão 3 efetuando a operação de adição, mas considerando que a resposta era uma dívida.

Figura 16 – Resolução da etapa 3: questão 3.

A07



A15



Fonte: caderno dos alunos.

Na discussão em grande grupo alguns alunos defenderam que a operação deveria ser escrita como $-12 + 4$, pois é a adição que resolve a situação. A professora sugere que eles usem a reta numérica como apoio para seus argumentos. O aluno A09 disse: "professora, estava devendo. E devendo é menos!". Ao perguntar como deve ficar a operação o aluno A09 dita a seguinte sentença: $-12 - 4 = -16$. Ao escrevê-la no quadro, os colegas concordam que por se tratar de dívidas os sinais deveriam ser de menos.

As operações foram resolvidas visualizando-as na reta numérica. Para determinar o sinal da resposta, os alunos não tiveram muitas dificuldades, mas para verbalizar uma regra a aluna A01, contando com a ajuda de suas colegas, elaborou a regra da seguinte maneira: "se o número negativo for maior do que o positivo, o resultado é negativo. Se o número negativo for menor do que o positivo, o resultado é positivo".

Ao notar que os alunos significavam melhor as operações se estiverem envolvidas em um contexto, foi elaborada uma lista com situações em contexto que envolviam operações similares às do exercício. Os alunos foram divididos em pequenos grupos e, foram convidados a discutir as soluções com seus pares.

Quadro 17 – Lista de atividades.

1) Um tênis custa R$ 120,00, mas à vista tem um desconto de R$ 30,00. Calcule o preço à vista desse tênis.

2) Renato está devendo R$ 800,00 de aluguel, R$ 110,00 de energia elétrica e R$ 80,00 de água. Calcule o valor total da dívida de Renato.

3) O saldo bancário de Laura era R$ 470,00 quando ela emitiu um cheque no valor de R$ 320,00. Calcule o saldo de Laura após esse cheque ser compensado.

4) Após um cheque de R$ 250,00, emitido por Paulo, ser compensado, seu saldo passa a ser de R$ 300,00. Calcule o saldo de Paulo antes do cheque ser compensado.

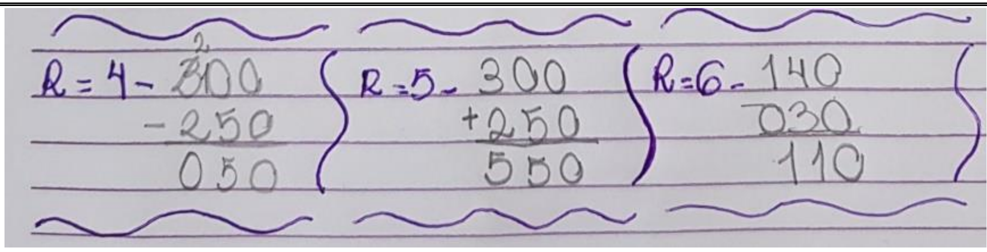
5) Após um cheque de R$ 250,00 emitido por Paulo ser compensado, seu saldo passa a ser de -R$ 300,00. Calcule o saldo de Paulo, antes do cheque ser compensado.

6) O saldo de Mariana era de –R$ 30,00 quando ela emitiu um cheque de R$ 140,00. Calcule o saldo de Mariana depois desse cheque ser compensado.

Fonte: da autora.

As atividades 1, 3 e 5 foram resolvidas com a operação de subtração e as atividade 2, 4 e 6 foram resolvidas aplicando a operação de adição. As atividades nas quais os alunos não concordam com a resposta geram maiores discussões, enriquecendo a análise que fazem das regras das operações, as atividades 4, 5 e 6, por exemplo, foram resolvidas pela aluna A04 desse modo:

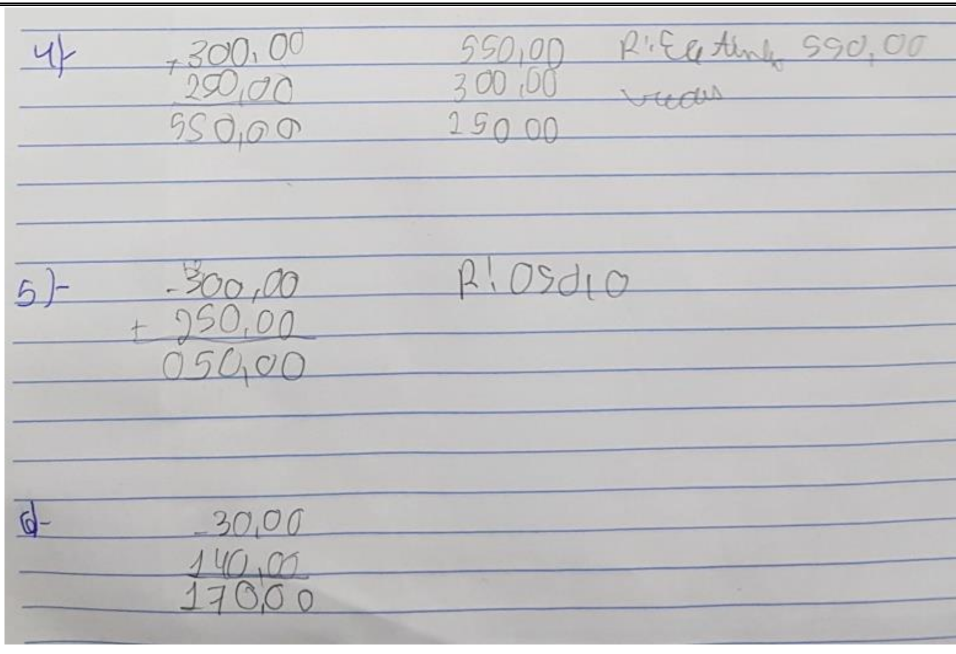
Figura 17 – Resolução das atividade pela aluna A04.



Fonte: caderno dos alunos.

Mas outros alunos resolveram assim:

Figura 18 – Outra resolução para as atividades.



Fonte: caderno dos alunos.

O que gerou uma discussão sobre as operações a serem aplicadas, mas apoiados no contexto eles chegaram à solução correta e desse modo, as regras foram surgindo de forma que puderam demonstrar maior confiança. A aluna A04 estabeleceu a seguinte regra: “quando tem dois sinais iguais faz conta de adição e quando tem dois sinais diferentes, já é subtração”.

4.2 TAREFA 2

4.2.1 Uma possibilidade de diálogo

Quadro 18– Enunciado da tarefa 2.

(Dante, 2015-adaptado) Coloquem um termômetro de ambiente em diferentes locais, como pátio, quadra, sala de aula, copo com gelo, geladeira e congelador. Verifique a medida da temperatura indicada e registre no caderno os valores correspondentes. Depois, respondam: a) qual foi o local em que o termômetro indicou a maior temperatura? E a menor? b) qual é a diferença entre a maior e a menor temperatura? Como podemos mostrar essa operação na reta numerada? c) faça um desenho de um termômetro gradual e anote as temperaturas encontradas.

Fonte: adaptado de Dante, 2015.

Diálogo fictício

PF: (trazendo alguns termômetros para a sala de aula) Antes de fazer esta atividade, vamos conversar sobre a medida de temperatura que nós utilizamos. Alguém sabe dizer qual é e como funciona?

AF3: sei que é grau Celsius.

PF: muito bem! Esta é uma escala que considera o ponto de fusão (temperatura em que a substância passa do estado sólido para o líquido) e o ponto de ebulição (temperatura em que a substância passa do estado líquido para o gasoso). Alguém pode dar um exemplo de ponto de fusão?

AF3: é quando o gelo começa a derreter.

PF: e um exemplo do ponto de ebulição?

AF1: se é do líquido para o gasoso, então é quando a água começa a ferver.

PF: muito bem! Ao ponto de fusão, na escala Celsius, é atribuído o valor 0°C e ao ponto de ebulição, 100°C. Agora vamos ao trabalho!

Os alunos saem da sala, em grupos, munidos de seus termômetros e cadernos. Medem e anotam as temperaturas nos locais indicados no enunciado da tarefa, voltam para a sala com suas anotações e resolvem as atividades enquanto o professor caminha na sala de aula e auxilia os grupos. Após resolverem, o professor media a discussão com toda a sala.

PF: o que me dizem? Qual é a reposta do item a?

Cada grupo começa a falar os locais em que encontraram a maior e a menor medida de temperatura. Há mais de uma resposta correta.

PF: e o item b, como vocês registraram a resposta?

AF1: a menor temperatura foi -2°C e a maior foi 36°C. Então de -2 até zero são 2 e $36 + 2$ resulta em 38.

PF: como iremos escrever esta operação?

AF2: Fizemos $36 + 2 = 38$. Sabemos que a resposta está correta porque verificamos na reta numérica, mas a medida da temperatura é -2°C e não 2°C e a operação deve ser de subtração. E como escrever esta operação usando o -2? Não sabemos explicar.

PF: muito bem! A variação da temperatura que é a diferença entre a maior e a menor temperatura pode ser escrita como $36 - (-2)$. Na reta numérica vocês fizeram a operação em duas partes, sabiam que a distância de 36 até zero é 36 e que a distância de -2 até o zero é 2, logo perceberam que deveriam efetuar a adição, está correto?

AF1: sim!

PF: desse modo podemos dizer que $36 - (-2) = 36 + 2 = 38$.

AF1: como pode ser o menos virou mais!

PF: isso mesmo, dois sinais de menos foram trocados por um sinal de mais. Vamos fazer algumas operações desse tipo e verificar na reta numérica se os resultados conferem. (Neste momento o professor escreve as operações no quadro e visita os grupos a fim de auxiliá-los).

Operações:

a) $9-(+5)$

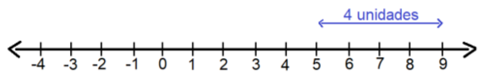
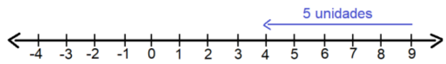
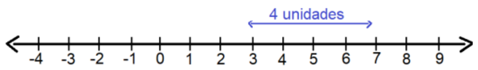
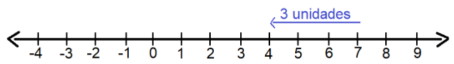
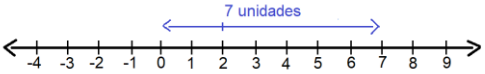
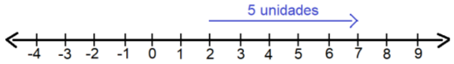
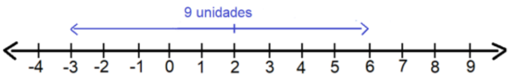
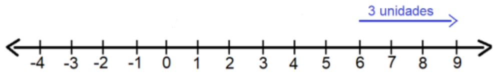
b) $7+(-3)$

c) $2+(+5)$

d) $6-(-3)$

Para cada operação é desenhada uma reta numérica.

Quadro 19 – Operações realizadas com apoio da reta numérica.

	1ª maneira	2ª maneira
$9-(+5)$		
$7+(-3)$		
$2+(+5)$		
$6-(-3)$		

Fonte: da autora.

PF: (após um tempo para a execução da tarefa) quais respostas vocês encontraram para as operações?

AF1: no item a, nosso grupo decidiu que o correto era efetuar $9-5=4$, no item b, $7-3=4$, no item c, $2+5=7$ e no item d, $6+3=9$.

PF: está bem, então vamos escrever essas equivalências?

AF3: do mesmo modo que foi feito o anterior, podemos escrever assim: (levantando e pedindo para ir ao quadro, escreve as igualdades).

a) $9-(+5)=9-5=4$
b) $7+(-3)=7-3=4$
c) $2+(+5)=2+5=7$
d) $6-(-3)=6+3=9$

PF: então o que podemos dizer quando temos dois sinais juntos, ou seja, dois sinais vizinhos?

AF2: se os dois sinais são diferentes, trocamos pelo sinal de menos e se forem iguais, trocamos pelo sinal de mais.

Com essa discussão, o professor tem a oportunidade para apresentar o jogo de sinais aos alunos.

4.2.2 Relato da tarefa 2

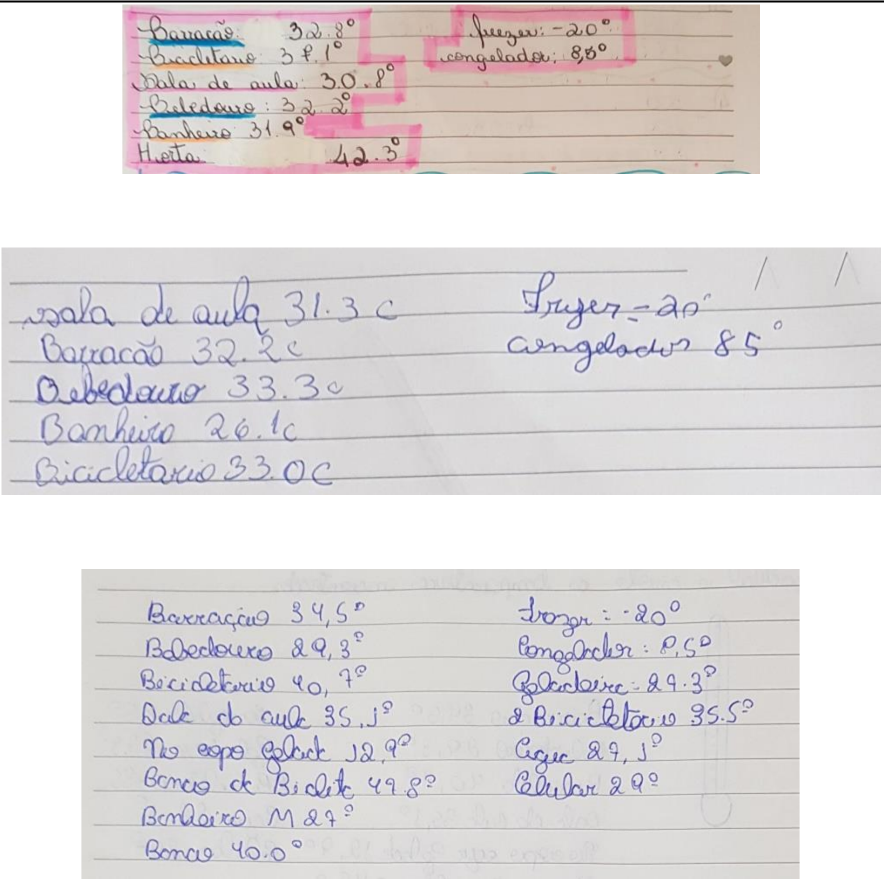
Os alunos foram divididos em quatro grupos e cada grupo recebeu um termômetro de ambiente e orientações sobre os procedimentos (funcionamento do termômetro, comportamento, locais que poderiam circular e registros). Desse modo saíram da sala de aula com seus cadernos, mediram e anotaram a temperatura de diferentes ambientes dentro do colégio e de superfícies como metais, bancos de concreto e de bicicletas.

Figura 19 – Termômetro utilizado pelos alunos.

Fonte: da autora.

Como o termômetro indicava uma ordem decimal foi decidido em grande grupo que anotariam o valor correspondente ao indicado pelo instrumento.

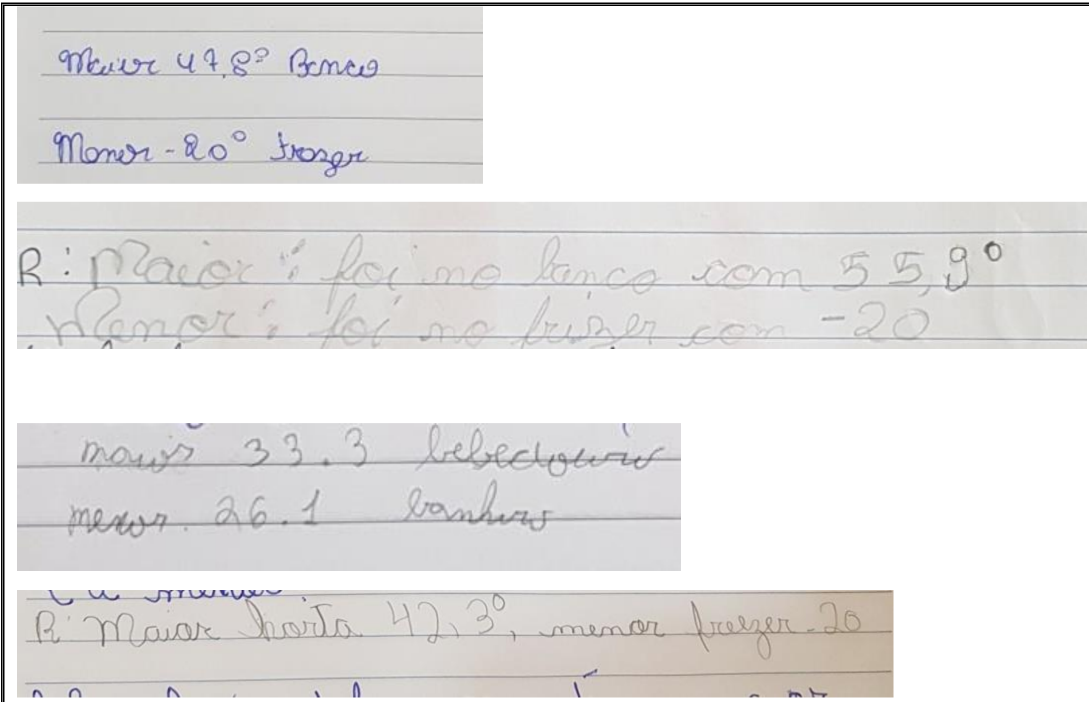
Figura 20 – Registro das temperaturas em diferentes locais do colégio.



Fonte: caderno dos alunos.

Assim o item a foi respondido sendo que a menor temperatura registrada foi no freezer (-20°C) e esta medida foi compartilhada por três dos quatro grupos.

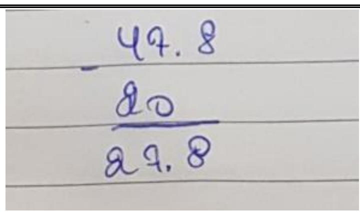
Figura 21 – Registro do local de maior e de menor temperatura.



Fonte: caderno dos alunos.

Já para responder ao item b, alguns alunos calcularam a diferença entre as temperaturas com os valores relativos das medidas. O que deveria ser $47{,}8 - (-20) = 47{,}8 + 20 = 67{,}8$; foi resolvido como $47{,}8 - 20 = 27{,}8$.

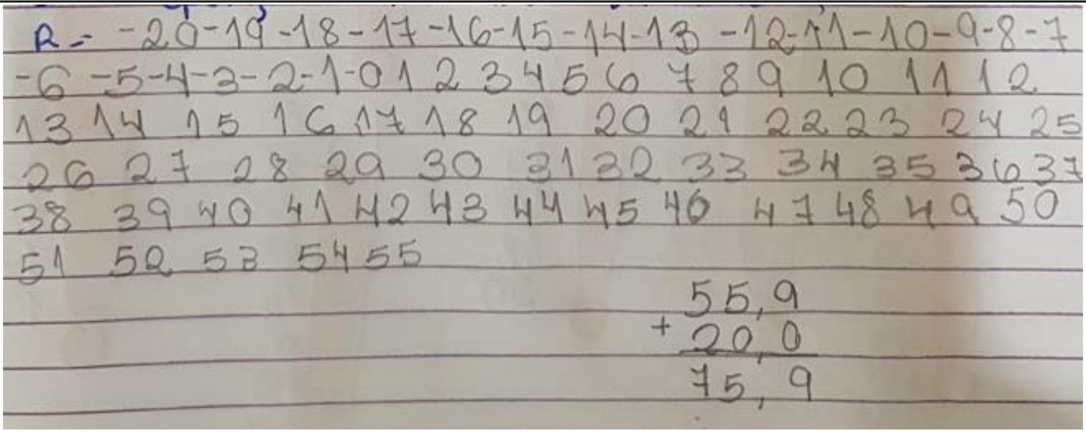
Figura 22 – Calculando a diferença entre as temperaturas.



Fonte: caderno dos alunos.

Porém, ainda no item b pede-se para mostrar a operação na reta numérica, assim os alunos começam a perceber que a diferença entre um número positivo e um número negativo deve ser a adição de seus valores absolutos. Alguns alunos escreveram os números em ordem crescente de -20 até a temperatura máxima aproximada (sequência que eles denominaram reta numérica).

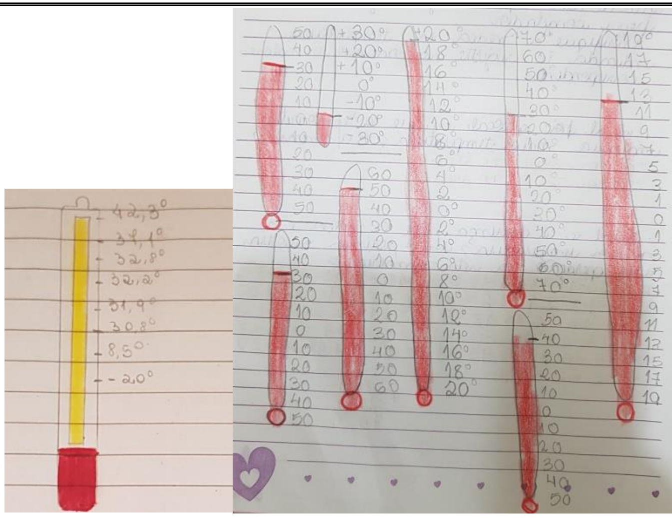
Figura 23 – Utilizando a reta numérica como apoio para calcular a diferença de temperaturas.



Fonte: caderno dos alunos.

Para resolver o item c, no qual os alunos deveriam desenhar um termômetro gradual, houve a necessidade de se apresentar o termômetro para eles, para isso a professora levou um termômetro para que os grupos analisassem seu formato, modo de graduação e como se faz a leitura de temperatura. O uso de instrumentos mostrou o quanto os alunos são curiosos e podem ficar empolgados quando envolvidos em atividades semelhantes.

Figura 24 – Desenhos dos termômetros.



Fonte: caderno dos alunos.

Mas havia um empasse provocado pela palavra “diferença” que os alunos relacionavam com a operação de subtração, porém todos concordaram que a operação deveria ser de adição. Então apresenta-se verbalmente algumas situações do tipo: “qual a diferença entre as idades do aluno A08 e da aluna A04?” ou “se a aluna A06 deve 2 reais e aluna A01 tem 6 reais, qual é a diferença entre as quantias?” e representa essas situações em retas numéricas desenhadas no quadro. Até que a aluna A05 descreve como proceder para fazer a diferença entre $+6$ e -2 da seguinte maneira: “é só você fazer a conta do seis até chegar no -2 e o resultado dá 8.” Mas desta vez, a professora escreve a expressão $+6-(-2)$, lendo-a como: “a diferença entre $+6$ e -2”, assim houve concordância da escrita com o significado atribuído à palavra diferença, questionando sobre qual operação efetuar os alunos prontamente responderam que deveria ser a adição, logo a expressão fica $+6-(-2)=+6+2=+8$, desse modo chegaram à conclusão de que dois sinais de menos devem ser trocados por um sinal de mais. Há uma aceitação dessa regra sem questionamentos, apenas admiração. A aluna A05 disse: “Ah! Então quando tem dois sinais de menos troca por um de mais!”.

Neste momento a aluna A05 sugere a operação: “10 até chegar no -3”. Aproveitando a operação sugerida pela aluna e a professora coloca como sendo o item a do exercício proposto, ficando:

a) $10-(-3)$

b) $9-(+5)$

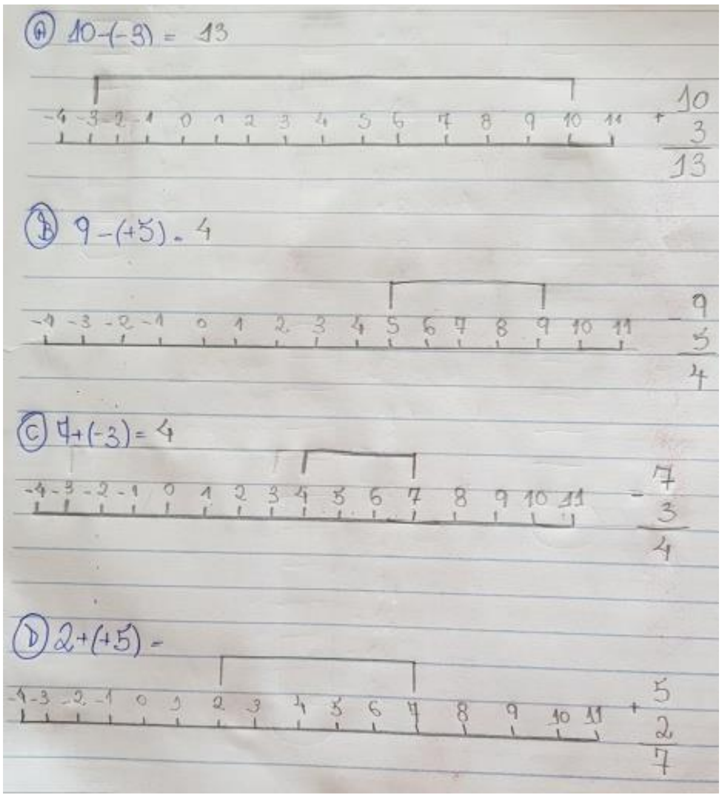
c) $7+(-3)$

d) $2+(+5)$

Considerando necessário contextualizar as operações, a professora o faz verbalmente. Para resolver a tarefa os alunos usaram a reta numérica como apoio, mas alguns alunos preferiram fazer a troca pela equação equivalente, as operações ficaram como segue:

Figura 25 – Utilizando a reta numérica como apoio. Resolução da aluna A17.

A17

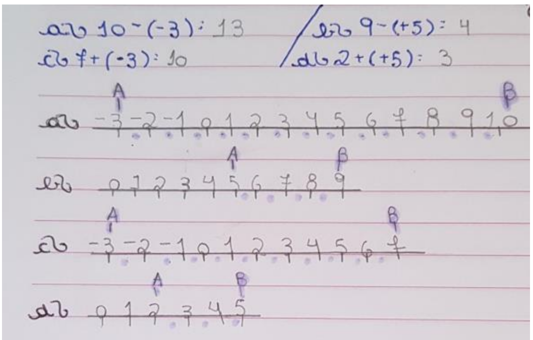


Fonte: caderno dos alunos.

A aluna A17 usou a reta numérica e as operações como apoio para chegar às soluções. Na reta numérica ela fez uma comparação entre os números no item a e b, nos quais a operação era subtração. Já no item c temos a adição, mas entre uma quantidade positiva e outra negativa e a aluna tira 3 unidades de 7. No item d ela parte do número 2 deslocando 5 unidades para a direita alcançando o resultado 7.

Figura 26 – Utilizando a reta numérica como apoio. Resolução da aluna A12.

A12

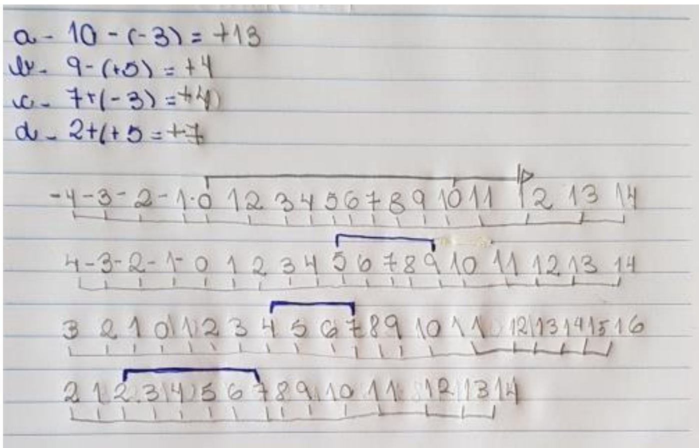


Fonte: caderno dos alunos.

Apesar de chegar ao resultado correto somente nas operações de subtração, pois em todos os itens faz a comparação entre os valores, a aluna usa um código de letras para indicar os números na reta numérica.

Figura 27 – Utilizando a reta numérica como apoio. Resolução da aluna A03.

A03



Fonte: caderno dos alunos.

No item a, a aluna partindo do zero e indo até o 10, segue mais 3 unidades para a direita alcançando o número 13 como solução. No item b ela compara os valores 9 e 5, no item c ela caminha sobre a reta 3 unidades para a esquerda de 7 e no item d ela caminha 5 unidades para a direita de 2.

Com o apoio da reta numérica e após a discussão em grande grupo, os alunos perceberam que dois sinais iguais devem ser trocados por um sinal de mais e dois sinais diferentes devem ser trocados por um sinal de menos. Escreve-se a regra estabelecida da seguinte maneira:

$$+ + \rightarrow +$$
$$- - \rightarrow +$$
$$+ - \rightarrow -$$
$$- + \rightarrow -$$

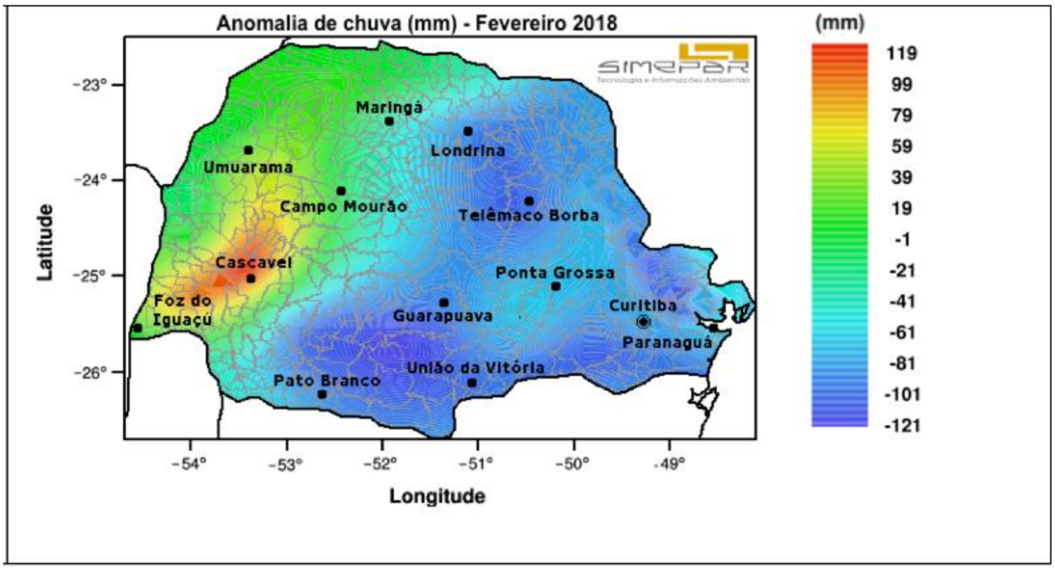
A esta regra deu-se o nome de "regra dos sinais".

4.3 Tarefa 3

4.3.1 Uma possibilidade de diálogo

Quadro 20 – Enunciado da tarefa 3.

O Sistema Meteorológico do Paraná (SIMEPAR) registra anomalias de chuva em um mês comparando o volume de chuva com a média registrada nesse mesmo mês nos últimos anos. Veja no gráfico a anomalia de chuva do mês de fevereiro de 2018.



Fonte: boletim climatológico do SIMEPAR.

Em relação ao gráfico, responda:

a) considerando que o volume de chuvas da região de Londrina foi 81 mm abaixo da média e que o volume de chuvas na região de Campo Mourão foi 19 mm acima da média, calcule a diferença do volume de chuvas dessas duas regiões.

b) considerando que o volume de chuvas na região de Maringá foi 41 mm abaixo da média, qual é a diferença de volume de chuvas entre as regiões de Maringá e Londrina?

Fonte: da autora.

Diálogo fictício

Após apresentar esta tarefa aos alunos, o professor conversa com os alunos sobre média aritmética, volume e anomalias de chuva.

AF3: a média é o zero?

PF: sim. E as anomalias?

Aluno2: o tanto de chuva acima ou abaixo da média.

PF: Agora, antes de resolvermos o problema, vamos assistir a um vídeo que irá explicar a forma como medimos o volume de chuvas.

Após assistir ao filme os alunos partem para a resolução. O professor auxilia aos alunos que estão divididos em grupos. Após a resolução, o professor conduz a discussão em grande grupo.

PF: como vocês resolveram o item a?

AF6: nós fizemos assim: $81 + 19 = 100$. A diferença foi de 100mm.

AF4: mas a diferença é resultado da subtração!

PF: então como podemos representar esta situação usando a subtração?

AF1: nós fizemos $19 - (-81) = 19 + 81 = 100$. A diferença foi de 100mm.

AF4: ah! Entendi! Foi por causa do jogo de sinal! Então tá certo!

PF: muito bem! Usamos a subtração, mas por conta do jogo de sinal, obtemos uma adição! E o item b?

AF1: nosso grupo fez $-41 - (-81) = -41 + 81 = 40$.

AF4: nós fizemos $-81-(-41)=-81+41=-40$. Qual resposta esta correta -40 ou 40?

AF1: acho que o correto é 40, porque a pergunta pede a diferença entre as regiões de Maringá e Londrina, então tem que fazer -41 primeiro, que é o volume de chuva de Maringá, depois -81, que é o volume de chuva de Londrina! Assim você responde que a diferença do volume de chuvas entre as regiões de Maringá e Londrina é de 40mm.

4.3.2 Relato da tarefa 3

Ao ler o problema discute-se sobre o que poderia ser anomalia de chuva. Os alunos entendem a palavra anomalia como “aquilo que não é normal”. O aluno A09 descreve que cada milímetro de chuva significa que choveu um litro em um quadrado de um metro e que a média é o zero. Após a explicação do colega, todos assistem a um vídeo[1] com explicações mais detalhadas a respeito do modo de medir o volume de chuva. Buscando compreender melhor o problema, há uma discussão sobre o mapa, analisando as cores, localizando a cidade na qual moram e considerando que a legenda funciona como uma reta numérica vertical.

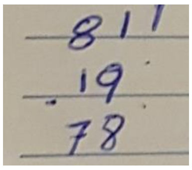
Contribui-se com as discussões dos alunos que resolvem a atividade em grupo. Há algumas divergências entre os grupos sobre a resposta correta, pois alguns resolveram ao item a utilizando a operação de adição e outros, como se tratava da diferença entre as anomalias, efetuaram a subtração dos valores absolutos. Nota-se que ainda não há uma compreensão efetiva do número relativo enquanto quantidade. Na discussão em grande grupo a aluna A01 coloca que como um valor está à esquerda do zero e outro à direita do zero, então é necessário somar. Com o argumento da colega e a contagem na reta numérica, os alunos chegam a um acordo sobre a resposta correta.

---

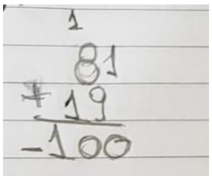
[1] CLIMA TEMPO. **Saiba como se mede a chuva**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gZSCrirZ5c4>. Aceso em 03 out. 2018.

Figura 28 – Resolução do item a da tarefa 3.

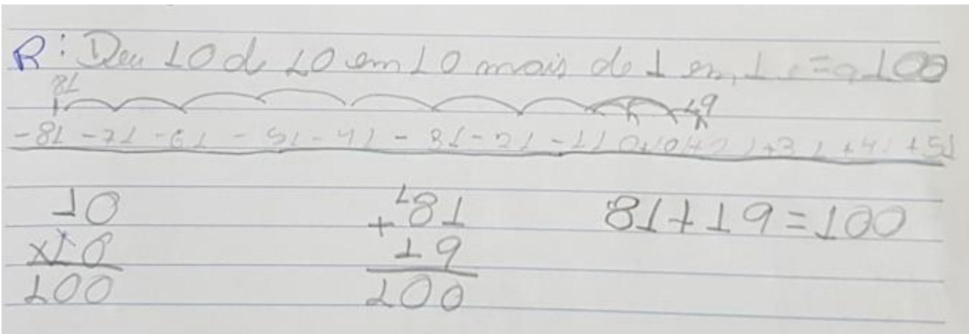
A09



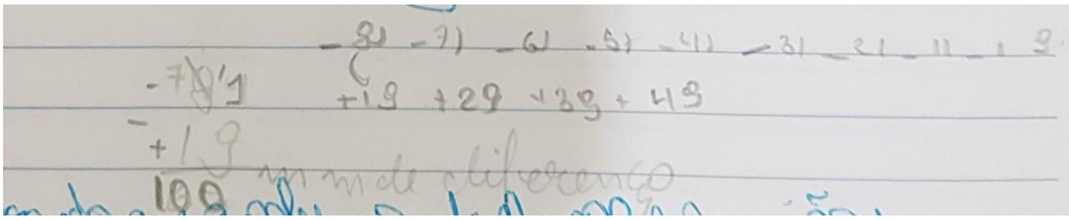
A14



A01



A18

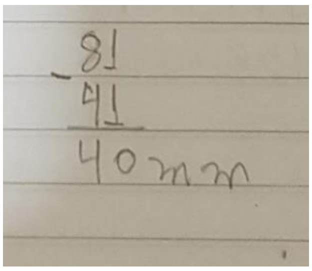


Fonte: caderno dos alunos.

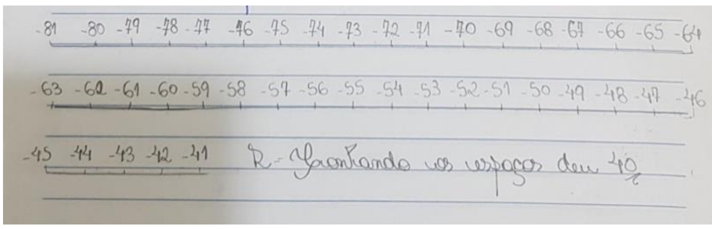
O item b é resolvido sem muitos empasses, visto que o item a foi resolvido com apoio da reta numérica, os alunos argumentaram do mesmo modo. Porém alguns aparentemente resolveram sem considerar o sinal do número e como todos chegaram ao mesmo resultado não discordaram um do outro.

Figura 29 – Resolução do item b da tarefa 3.

A06



A17



Fonte: caderno dos alunos.

4.4 TAREFA 4

4.4.1 Uma possibilidade de diálogo para o item a

Quadro 21 – Enunciado da tarefa 4.

(Mori e Onaga, 2012-adaptado) Seu Antônio é dono de uma padaria. Lá, Juca toma café da manhã e também almoça. Às vezes ele paga na hora; outras vezes, “pendura”. Seu Antônio anota tudo em seu caderno. Mas duas manchas de café borraram suas anotações. Observe.

Dia	Café	Almoço
3	-2,00	
9	-2,00	
10	-2,00	
15	-2,00	
Total		-48

a) Em relação ao café, qual é a dívida de Juca com Seu Antônio?

b) O preço do almoço na padaria de seu Antônio é sempre o mesmo. Se a dívida de almoço de Juca nessa padaria é de R$ 48,00 em quatro dias, o que estava escrito nas anotações de seu Antônio, na coluna de almoço?

Fonte: adaptado de Mori e Onaga, 2012.

Diálogo fictício

AF2: $-2-2-2-2=-8$

PF: certo! Mas existe outra maneira de registrar esta operação?

AF3: pode fazer multiplicação!

AF6: como assim?

AF3: se você tem 2 quatro vezes, então pode fazer 4×2.

AF2: mas não é 2, e sim, -2.

AF6: ah! Então, se ela estiver certa, então faz $4 \times (-2)$.

AF3: está certo sim.

PF: então escrevemos $-2-2-2-2 = 4 \cdot (-2) = -8$. O que vocês podem observar em relação ao sinal nesta multiplicação?

AF3: em 4x(-2) o sinal do 4 é mais e o sinal do 2 é menos! O resultado ficou menos! O sinal de menos porque era a dívida de Juca!

AF2: já sei! Fez o jogo de sinal, pois mais com menos dá menos!

PF: muito bem!

AF3: mas o jogo de sinal vale para qualquer multiplicação de inteiros?

AF2: como assim?

AF3: se tiver que multiplicar dois números com sinal de menos, tipo: -4x(-2) vai dar +8, então vale a regra de sinais para quaisquer números?

PF: vamos verificar! (O professor apresenta uma tabela com sequências numéricas e pede aos alunos para completá-la).

Quadro 23 – Tabela de sequência de multiplicação.

$\times$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3	-4
$+4$	$+16$	$+12$	$+8$	$+4$	0	-4	-8	-12	
$+3$	$+12$	$+9$	$+6$	$+3$					
$+2$	$+8$								
$+1$	$+4$								
0	0								
-1	-4								
-2	-8								
-3									
-4									

Fonte: adaptado de Dante, 2015.

Enquanto os alunos completam a tabela o professor caminha pela sala, auxiliando na resolução da tarefa.

PF: como ficou a tabela depois de completa?

AF6: a primeira linha é só diminuir de 4 em 4, a segunda diminui de 3 em 3, a terceira linha, diminui de 2 em 2, a quarta linha diminui de 1 em 1, depois é tudo zero e começa a aumentar, primeiro de 1 em 1, depois de 2 em 2, 3 em 3 e 4 em 4.

AF3: é a tabuada! Tem até o sinal de vezes no canto!

AF2: é mesmo! É a tabuada com números negativos! E eu fiz adição e subtração igual o AF6!

AF3: eu percebi que era multiplicação, mas fiz a sequência somando e subtraindo também!

PF: (Preenchendo a tabela no quadro). Como ela é uma tabela de multiplicação, podemos usá-la para verificar como fica o sinal na multiplicação de números inteiros.

AF1: se multiplicamos dois números com sinal positivo, o resultado também é positivo.

AF3: se multiplicamos um positivo por um número negativo ou vice-versa, o sinal é negativo. Até aqui tudo bem!

PF: o que quer dizer?

AF3: o estranho é quando multiplicamos dois números negativos.

AF2: é verdade o sinal ficou positivo! Achei estranho, pensei que tinha errado, mas a sequência estava certa, então acho que a multiplicação também está correta!

PF: já podemos dizer algo sobre a regra da multiplicação em relação ao sinal?

AF6: sim, é o jogo de sinal, com certeza!

PF: vamos verificar se funciona aplicarmos o jogo de sinal nas multiplicações feitas aqui na tabela.

AF3: está correto, se usarmos o zero para separar a tabela temos uma cruz que divide o retângulo em quatro partes. Na primeira parte positivo com positivo resulta em positivo, na segunda e terceira parte é positivo com negativo ou negativo com positivo que resulta em negativo e na quarta parte negativo com negativo fica positivo. Está tudo de acordo com o jogo de sinal!

Quadro 23 – Tabela de sequência de multiplicação preenchida.

$\times$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3	-4
$+4$	$+16$	$+12$	$+8$	$+4$	0	-4	-8	-12	-16
$+3$	$+12$	$+9$	$+6$	$+3$	0	-3	-6	-9	-12
$+2$	$+8$	$+6$	$+4$	$+2$	0	-2	-4	-6	-8
$+1$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3	-4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
-2	-8	-6	-4	-2	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
-3	-12	-9	-6	-3	0	$+3$	$+6$	$+9$	$+12$
-4	-16	-12	-8	-4	0	$+4$	$+8$	$+12$	$+16$

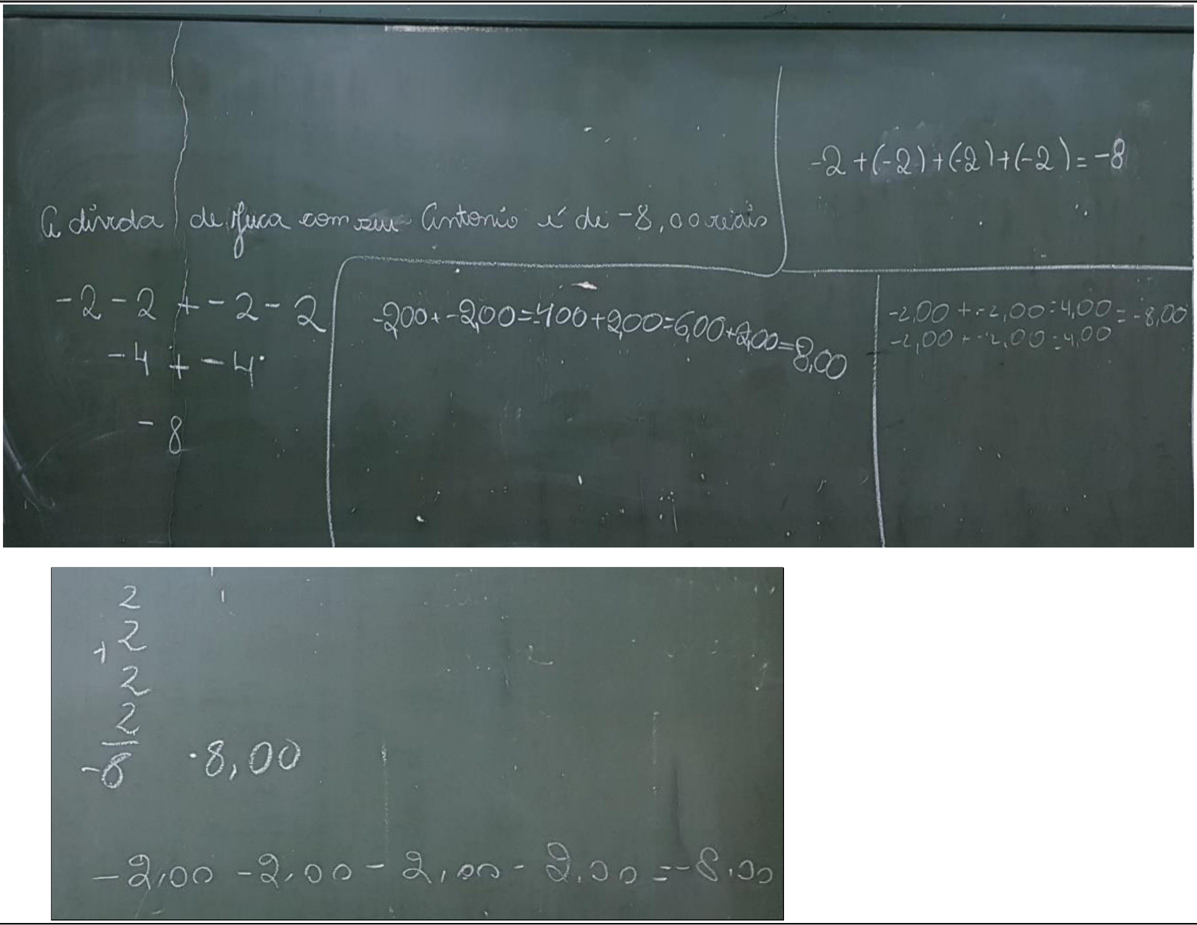
Fonte: adaptado de Dante, 2015.

PF: se aplicarmos o jogo de sinal, obtemos os resultados com o sinal correto.

4.4.2 Relato do item a

Os alunos não apresentaram dificuldades para resolver a situação. Alguns aplicaram a operação de adição com o valor absoluto 2 e responderam que Juca devia oito reais. Outros usaram o número -2 durante o processo aritmético, nem todos usaram os parênteses corretamente, mas decidiram que deveriam somar o valor negativo escrevendo ou não o sinal $+$.

Figura 30 – Resolução do item a da tarefa 4.

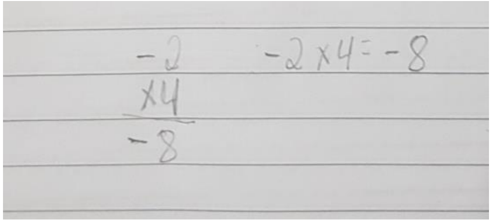


Fonte: da autora.

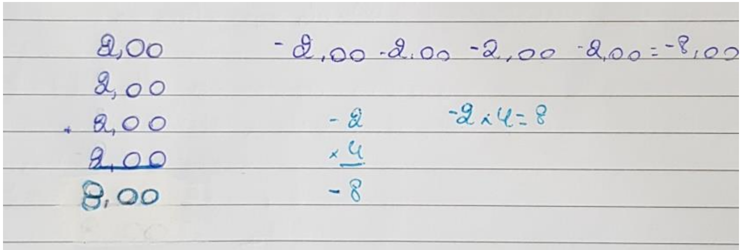
Pergunta-se aos alunos se há alguma outra maneira de resolver esta situação e a aluna A06 disse que poderiam resolver utilizando a operação de multiplicação, então foi pedido para que eles refizessem o item a, mas desta vez aplicando a multiplicação e que procurassem escrevê-la na forma de expressão horizontal.

Figura 31 – Aplicando a multiplicação para resolver o item a da tarefa 4.

A06



A10



Fonte: caderno dos alunos.

Após escrever a expressão de multiplicação levanta-se a questão do sinal da resposta, mais que depressa os alunos responderam: “é porque menos com mais dá menos”. Essa justificativa não é confirmada como correta, porém muitos estavam convictos da resposta. Apresenta-se a tabela como um meio de verificar se o jogo de sinal funcionaria nas multiplicações de números com sinais variados.

Entrega-se a tabela e pede-se que a completem. Não há uma explicação expositiva de como deveriam efetuar a tarefa, ouvem-se as perguntas e a expressão “não entendi!” (dita por vários alunos), então é feita uma orientação para que analisem com calma a fim de descobrir como fazer. Como parte da tabela já estava completa, alguns alunos notaram um padrão de repetição dizendo: “é igual! É só fazer uma parte e depois repetir”.

Na discussão em grande grupo a aluna A17 explicou que percebendo simetria entre os números (valores absolutos) em relação ao zero, dividiu mentalmente a tabela em quadrantes, completou o primeiro quadrante com todos os valores positivos efetuando a multiplicação e em seguida apenas repetiu os números simetricamente, mas com sinais invertidos. Essa foi a maneira mais usada pelos alunos para completar a tabela. Outra maneira que encontraram foi efetuar todas as multiplicações.

Figura 32 – Tabela de sequência de multiplicação preenchida pelos alunos.

A17

×	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4
+4	+16	+12	+8	+4	0	−4	−8	−12	-16
+3	+12	+9	+6	+3	0	-3	-6	-9	-12
+2	+8	+6	+4	+2	0	-2	-4	-6	-8
+1	+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−1	−4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4
−2	−8	-6	-4	-2	0	+2	+4	+6	+8
−3	-12	-9	-6	-3	0	+3	+6	+9	+12
−4	-16	-12	-8	-4	0	+4	+8	+12	+16

Fonte: caderno dos alunos.

A aluna A01 faz a observação: “na tabela dá pra ver o jogo de sinal!”. Desse modo os alunos chegam à conclusão de que na operação de multiplicação devem fazer o jogo de sinal com os sinais dos números.

4.4.3 Uma possibilidade de diálogo para o item b

Diálogo fictício

O preço do almoço na padaria de seu Antônio é sempre o mesmo. Se a dívida de almoço de Juca nessa padaria é de R$ 48,00 em quatro dias, o que estava escrito nas anotações de seu Antônio, na coluna de almoço?

Após um tempo para a resolução, o professor convida os alunos para a discussão.

AF1: bem, como são 4 dias eu pensei: 4x12=48, então o almoço na padaria do seu Antônio é de 12 reais. Ele pode ter anotado -12 na coluna do almoço já que o Juca estava devendo.

AF6: é só fazer a divisão de 48 por 4. O resultado é 12.

Aluno4: ah! Eu fiz a divisão e escrevi usando o sinal de menos nos números!

PF: como ficou?

AF4: ficou -48 dividido por 4 igual a -12. Daí o seu Antônio pode ter escrito -12 no caderno.

PF: muito bem! Anote a operação no quadro, por favor. (O AF4 escreve: $-48 \div 4 = -12$). O que podemos dizer sobre o sinal do número 4?

AF6: como representa número de dias, não é dívida, então o sinal é positivo.

PF: então podemos escrever esta operação como: $-48 \div (+4) = -12$?

AF2: acho que pode!

AF6: está certo!

PF: o que podemos dizer sobre os sinais nesta operação?

AF3: foi feito o jogo de sinal!

AF6: é verdade, é só fazer o jogo de sinal igual na multiplicação.

PF: o aluno1 utilizou a multiplicação para resolver esta situação. Como ficaria a operação que ele montou, se utilizássemos os sinais dos números?

AF2: seria: $+4 \times (-12) = -48$!

PF: certo! Na multiplicação aplicamos o jogo de sinal para resolver a operação. E esta situação pode ser resolvida usando a divisão ou a multiplicação. Assim:

Quadro 25 – Tabela com algumas operações de multiplicação e de divisão.

Divisão	Multiplicação
$-48 \div (+4) = -12$	$+4 \times (-12) = -48$
	$-8 \times (+4) = -32$
	$-3 \times (-9) = +27$
	$+7 \times (+6) = +42$

Fonte: da autora.

O professor apresenta a tabela do quadro 25 em um primeiro momento com as duas primeiras linhas, em seguida completa a coluna da multiplicação com mais três operações e pede para que os alunos a completem.

Após um tempo para que os alunos terminem a tarefa, o professor retoma a discussão.

PF: como ficou a tabela completa?

AF1: (se prontificando a preencher a tabela no quadro) $-32 \div (-8) = +4$; $+27 \div (-3) = -9$; $+42 \div (+7) = +6$.

AF2: em todas as operações pode comprovar o uso do jogo de sinal.

PF: muito bem! Tal qual aplicamos o jogo de sinal para fazer a operação de multiplicação, também aplicamos para fazer a operação de divisão.

AF6: mas dá pra completar a tabela de outro jeito.

PF: como?

AF6: é só por ao contrário, $-48 \div (-12) = +4$; $-32 \div (+4) = -8$; $+27 \div (-9) = -3$; $+42 \div (+6) = +7$.

AF3: ah! É verdade, posso escrever no quadro?

PF: pode sim.

A tabela fica da seguinte maneira:

Quadro 26 – Tabela com algumas operações de multiplicação e de divisão preenchida.

Divisão	Multiplicação
$-48 \div (+4) = -12$	$+4 \times (-12) = -48$
$-32 \div (-8) = +4$ ou $-32 \div (+4) = -8$	$-8 \times (+4) = -32$
$+27 \div (-3) = -9$ ou $+27 \div (-9) = -3$	$-3 \times (-9) = +27$
$+42 \div (+7) = +6$ ou$+42 \div (+6) = +7$	$+7 \times (+6) = +42$

Fonte: da autora.

PF: já estudamos como fazer as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros.

Neste momento retomam-se as regras usadas para as operações de adição e subtração e as regras para as operações de multiplicação e divisão. Ampliando as regras de multiplicação para a operação de potenciação.

PF: como resolvemos as operações: 3^4 e 2^5?

AF1: $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ e $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

PF: e como resolvemos as operações $(-3)^4$e $(-2)^5$?

AF2: tem que fazer o -3 vezes ele mesmo 4 vezes: $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$. Daí faz o jogo de sinal, porque é multiplicação. Então fica $+81$. E $(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$.

AF6: se for par é mais se for ímpar é menos.

PF: explique melhor!

AF6: quando a gente multiplica uma quantidade par de números negativos o resultado é sempre positivo e quando a gente multiplica uma quantidade ímpar de números negativos o resultado vai ser negativo também.

AF3: isso pode ser uma regra, porque a cada dois sinais negativos temos um sinal positivo, então se temos uma quantidade par de números negativos, o resultado é positivo e se temos uma quantidade ímpar de números negativos temos um sinal de menos sobrando e o resultado será negativo.

Professor: sim, temos uma regra para a potenciação.

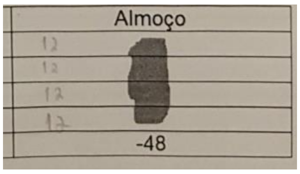
“Se a base é positiva, então a potência tem sinal positivo.”
“Se a base é negativa e o expoente é par, então a potência tem sinal positivo.”
“Se a base é negativa e o expoente é ímpar, então a potência tem sinal negativo.”

4.4.4 Relato do item b

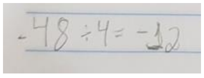
Para resolver a situação do valor do almoço na padaria de seu Antônio os alunos efetuaram a divisão de 48 em 4 partes iguais, alguns efetuaram mentalmente, outros aplicaram o algoritmo da divisão.

Figura 33 – Resolução do item b da tarefa 4.

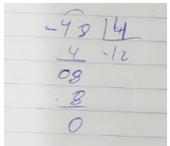
A11



A06



A18

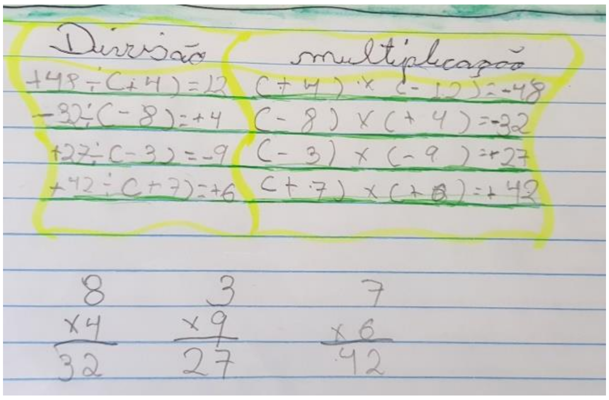


Fonte: caderno dos alunos.

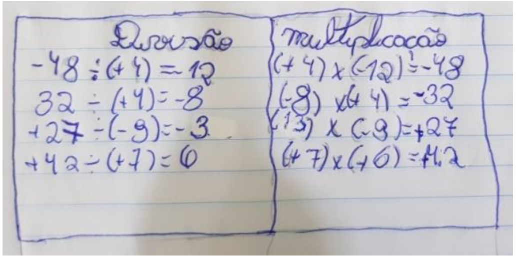
A aluna A04 afirma que “o sinal da resposta é menos porque menos com mais dá menos”, mas não há consenso se na operação de divisão é necessário ou não fazer o jogo de sinal. Desse modo, com a dúvida pairando no ar, escreve-se uma tabela no quadro pedindo que os alunos a completassem.

Figura 34 – Tabela com algumas operações de multiplicação e de divisão preenchida pelos alunos.

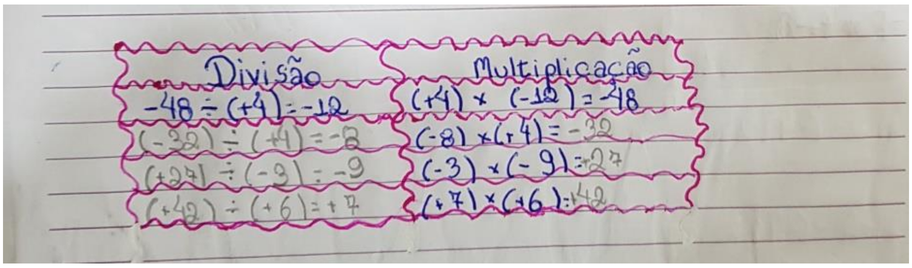
A01



A20



A07



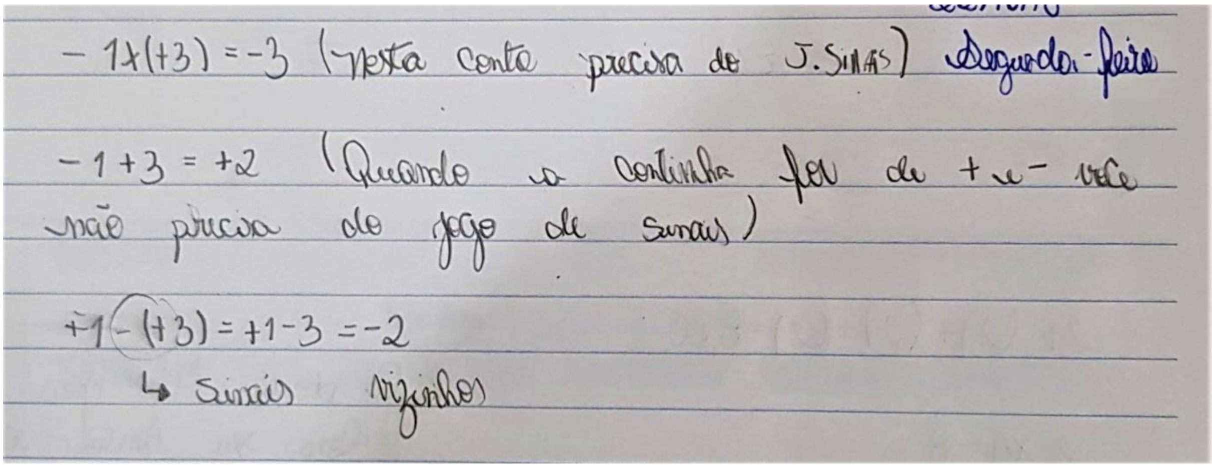
Fonte: caderno dos alunos.

Houve uma discussão sobre os valores colocados como divisor e quociente, pois alguns ficaram invertidos, então escrevemos das duas maneiras que apareceram e a turma concluiu que: “dá para fazer dos dois jeitos que fica correto”. Ao perguntar se na divisão deveria fazer o jogo de sinal, um coro descompassado recitou a leitura dos sinais na coluna da divisão para verificar se as divisões apresentadas respeitavam a regra, ao findar a leitura os alunos chegaram à conclusão de que a operação de divisão deveria ser feita utilizando a regra do jogo de sinal.

Retomam-se as regras para adição, subtração e multiplicação já estudadas. Os alunos responderam que para fazer adição e subtração não faz o jogo de sinal.

Figura 35 – Reinventando regras das operações. Parte I.

A17


– 1x(+3) = -3 (nesta conta precisa do J. SINAIS) Segunda-feira

-1 + 3 = +2 (Quando a continha for de + e - você não precisa do jogo de sinais)

+1 - (+3) = +1 - 3 = -2

↳ Sinais vizinhos

Fonte: caderno dos alunos.

A discussão se estendeu com exemplos numéricos das operações.

Apresentando a potenciação como uma multiplicação de números iguais e relembrando a potenciação de números naturais, pede-se aos alunos que resolvam as operações: $(-3)^4$ e $(-2)^5$. Alguns alunos consideraram que ambas as operações resultariam em quantidades positivas, pois “a potenciação é multiplicação e, portanto deve ser feito o jogo de sinal, assim menos com menos dá mais”. Ao serem questionados sobre a certeza de suas afirmações, partem para uma análise com um olhar mais cauteloso. Há muita discussão em pequenos grupos antes de manifestarem estar prontos para apresentar as resoluções.

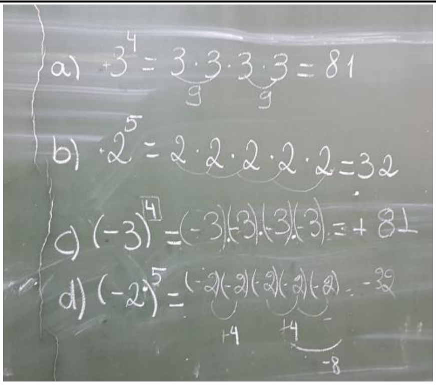
Em discussão em grande grupo a aluna A04 descreve que efetuou $(-3)^4$ e $(-2)^5$ multiplicando os números em sequência como segue:

$$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = (+9) \times (-3) \times (-3) = (-27) \times (-3) = +81.$$

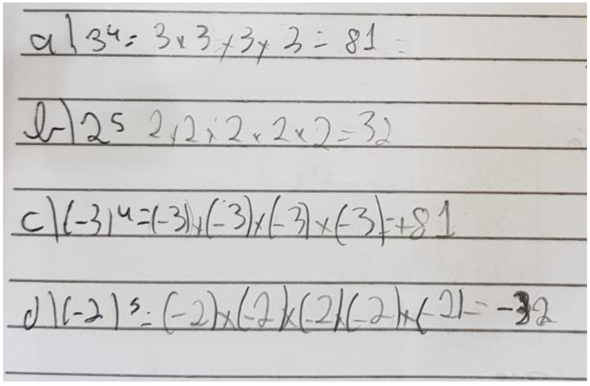
$$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (+4) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$$
$$= (-8) \times (-2) \times (-2) = (+16) \times (-2) = -32.$$

A aluna A06 percebe que são necessários dois sinais de menos para formar um de mais, mas mesmo assim ela efetua o jogo de sinal em sequência, assim como a colega A04. O aluno A10 agrupa os sinais de menos em pares e se sobrar um conclui que a resposta é menos, caso contrário o resultado é positivo. Após a resolução no quadro os alunos iniciam a discussão destacando que estava faltando escrever os parênteses na sentença então a operação ficaria correta.

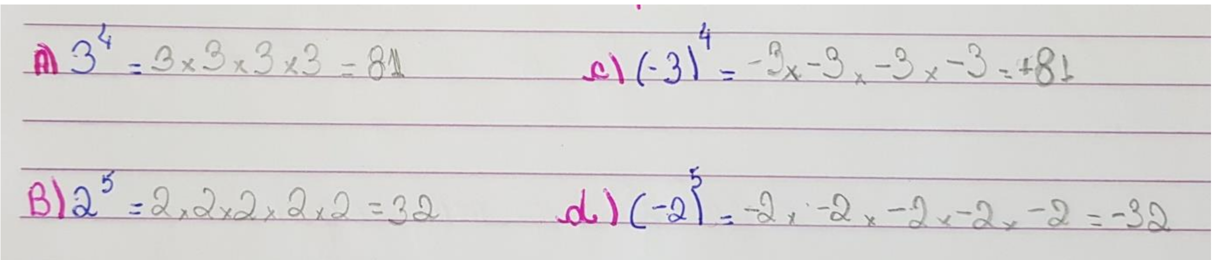
Figura 36 – Calculando potências.



A15



A07

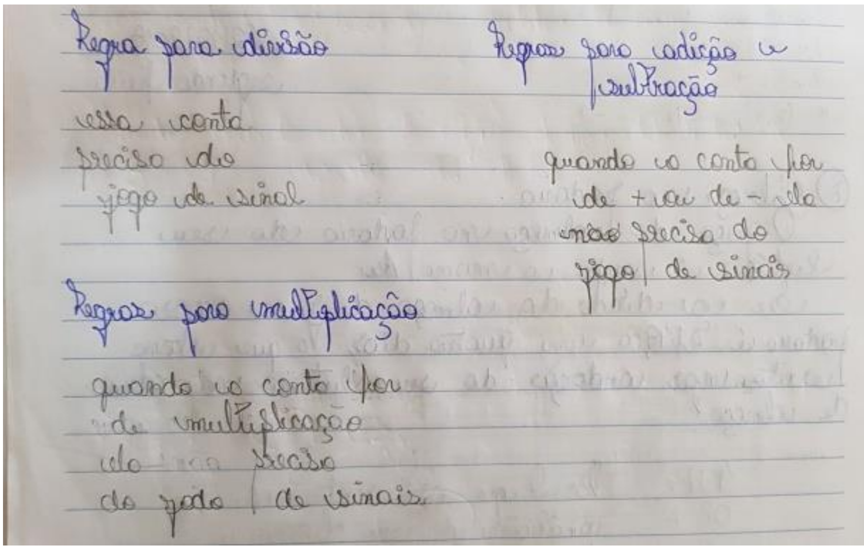


Fonte: caderno dos alunos e da autora.

Quando é perguntado se existe alguma relação entre o expoente e o sinal do resultado, a aluna A17 destaca que se o expoente é par, então o resultado é positivo e se o expoente é ímpar, o resultado é negativo, quando a base é negativa. Ao discutir se a regra da colega estava certa, pediu-se que os alunos escrevessem a relação.

Figura 37 – Reinventando regras das operações. Parte II.

A17

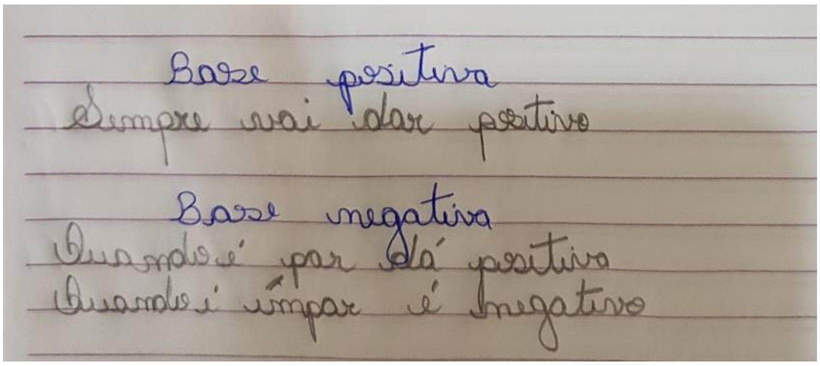


Regra para divisão
essa conta
preciso do
jogo de sinal

Regras para multiplicação
quando a conta for
de multiplicação
do preciso
do jogo de sinais

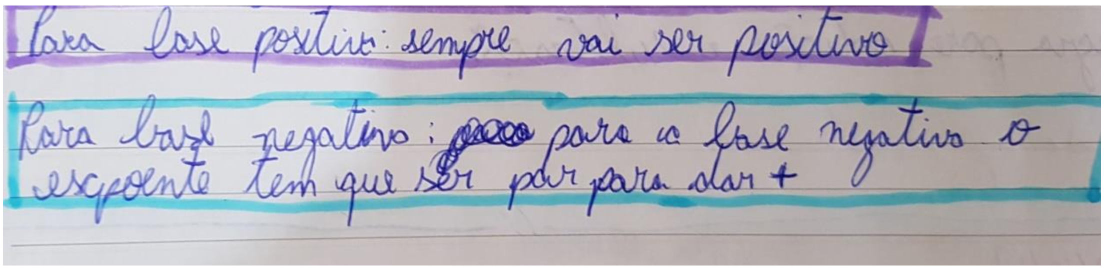
Regras para adição e
subtração
quando a conta for
de + ou de - do
não preciso do
jogo de sinais

A07



Base positiva
Sempre vai dar positivo
Base negativa
Quando é par dá positivo
Quando é ímpar é negativo

A06



Para base positiva: sempre vai ser positivo
Para base negativa: para a base negativa o
expoente tem que ser par para dar +

Fonte: caderno dos alunos.

CAPÍTULO 5

ANÁLISES: O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA À LUZ DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Este capítulo traz reflexões a respeito da relevância da construção de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem por um professor, da vivência de alunos no desenvolvimento de uma TEA, e da implicação dos princípios da Educação Matemática Realística no processo de ensinar e aprender Matemática. Essas reflexões se dão no entrelaçamento entre teoria, elaboração e aplicação da trajetória.

Ao elaborar a trajetória percebe-se que há a necessidade de se fazer uma reflexão mais profunda do que um plano de aula exige, a respeito do conteúdo a ser ministrado e sobre detalhes do processo pelo qual o aluno aprende. A TEA delineou o caminho, mas não o determinou de forma rígida, de acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen (2010) isso não ocorre porque os processos de aprendizagem reais são muito complexos para delimitá-los, desse modo não se repetem da mesma maneira. Porém, traçando o processo de aprendizagem de um grupo de alunos, podem ser identificadas certas linhas gerais.

Durante a aplicação desta trajetória, os princípios da Educação Matemática Realística são percebidos de forma integrada. No início da aplicação das tarefas, os alunos mais ativos são os mesmos que se dispõe a participar das atividades. Porém, a maioria dos alunos da turma permanece em silêncio, até que, quando dispostos em pequenos grupos e envolvidos em aulas nas quais a professora assume atitudes de orientadora e não apresenta soluções prontas, faz perguntas procurando guiá-los a fim de que cheguem a uma matematização, começam aos poucos a expor suas opiniões sobre como poderiam resolver as situações. Percebe-se aqui o princípio da orientação conectado ao da atividade e da interatividade.

Segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2014), o princípio da atividade refere-se à interpretação de Freudenthal da matemática como uma atividade humana, assim o aluno é agente de sua aprendizagem. O princípio da interatividade refere-se à aprendizagem da matemática como uma atividade social e, portanto o aluno deve ter a oportunidade de compartilhar suas estratégias e invenções com outros. Estes princípios foram percebidos durante toda a aplicação da trajetória, destacando os alunos A18, A20 e A22, que permaneciam calados em relação aos conteúdos estudados e apresentavam poucas tarefas resolvidas durante o ano letivo, mas no decorrer das atividades foram modificando as atitudes diante das tarefas, tornando-se mais participativos nas discussões, buscando e compartilhando estratégias de soluções. As discussões entre os alunos e entre professora e alunos estiveram presentes em todas as aulas, foi por meio delas que a professora guiou os alunos para que reinventassem as operações com números inteiros.

Toma-se a posição de guia, e as tarefas contém contextos que são conhecidos pelos alunos permitindo, assim, que eles desenvolvam estratégias para solucioná-las. Esses contextos fazem parte do princípio da realidade que, de acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen (2014), coloca o aluno em um caminho de estratégias de soluções informais, faz com que ele aplique a Matemática. A autora também afirma que a aprendizagem deve iniciar a partir de um contexto que seja significativo para o estudante. Isto manifesta-se quando as atividades propostas mostram-se em situações conhecidas pelos alunos, ou seja, possuem significado para eles, que elaboram estratégias de soluções, aplicando a matemática que conhecem. Quando os alunos formavam grupos para resolver as situações em contexto, os princípios de realidade, interação e de atividade tornavam-se mais evidentes, os alunos interagiram de forma natural na busca dos resultados, apoiando-se em seus próprios raciocínios, mostrando para a professora a importância de contextos ricos e da organização do ambiente de sala de aula, de modo a proporcionar tal interação entre os alunos e a liberdade de exporem suas estratégias na solução de problemas.

Durante a elaboração da trajetória houve a preocupação em relação ao contexto da tarefa 3, que por se tratar de anomalias do volume de chuva em relação à média dos últimos anos, poderia ser um contexto fora da realidade dos alunos e não possuir significado para eles. Porém logo que o problema foi apresentado, houve uma discussão sobre o significado da palavra anomalia e de volume de chuva, na qual os alunos além de mostrarem já conhecer essas palavras, apresentaram seus conhecimentos sobre milímetros cúbicos em um metro quadrado e construíram o significado de anomalias de chuva em relação à média, partindo do significado da palavra anomalia.

O contexto das tarefas desta trajetória envolve noção de média aritmética, medidas de temperatura e operações básicas com Números Inteiros, passando pelo princípio do entrelaçamento que de acordo com Van Den Heuvel-

Panhuizen (2014), significa que os domínios matemáticos como número, geometria, medição e manipulação de dados são fortemente integrados.

O princípio de nível, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2014) significa que os alunos passam por diferentes níveis de compreensão, da capacidade de inventar uma solução informal até a criação de vários níveis de atalhos e esquematizações, à aquisição de insights sobre como conceitos e estratégias estão relacionados. De acordo com Freudenthal (1991) a transitividade pode evoluir de uma experiência matematizadora horizontal para uma atividade matematizadora vertical, apenas para se tornar parte da própria realidade em longo prazo.

Ao analisar o processo pelo qual os alunos passaram para resolver a tarefa1 podemos perceber que enquanto a professora focava em querer que os alunos pensassem: sinais iguais somam-se os valores; sinais diferentes subtraem-se os valores, os alunos não significavam essa questão dos sinais e as regras apareciam em partes em suas falas, eles pensavam: “tem que olhar para o texto”, “tem que usar aquela régua”, “tenho duas dívidas, soma as dívidas e continuo devendo” ou “tenho uma quantia, mas estou devendo, pago e vejo se sobra ou falta”, “se os sinais são de menos, soma tudo porque é o que ela deve”. Para Gravemeijeir (2005) a concepção usual de aprendizagem, como o estabelecimento de conexões entre o conhecimento interno do aluno e certo conhecimento externo que tem de ser adquirido, leva os professores a forçar os alunos a fazerem conexões com o conhecimento externo que para eles não existe. O autor conclui que a tradição de tentar ensinar seguindo esta perspectiva faz com que a Matemática seja difícil de aprender. No entanto, nota-se aqui que os alunos já estão construindo as regras, mas estão em um nível de contexto-conectado. Quando os alunos estão estudando a operação de divisão há uma discussão sobre as regras das operações já estudadas anteriormente (adição, subtração e multiplicação) e os alunos apresentam as regras em forma de sentenças e dão exemplos numéricos para cada operação, mostrando que estão em um nível mais avançado e não precisam mais apoiar-se em contextos.

Na atividade contextualizada observa-se que os alunos encontraram uma liberdade maior para discutir sobre a adição e a subtração diminuindo a complexidade em se obter uma regra para as operações proporcionando um crescimento de conhecimento e um entendimento maior das operações em questão, isto é, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2001), um enfoque característico da EMR, havendo um progresso na maneira em que estavam pensando nas operações, chegando a uma maneira mais formal da apresentação da regra para adição e subtração, que pode ser exemplificado a fala da aluna A04: “quando tem dois sinais iguais faz conta de adição e quando tem dois sinais diferentes, já é subtração”. O professor precisa estar atento às soluções informais dos alunos para guiar o reinventor. Além disso, de acordo com Freudenthal (1991), o professor precisa de planos de instrução, pré-concebidos por desenvolvedores capazes, mas em um estilo que não restringe desnecessariamente a liberdade do professor de tirar proveito da situação de classe como se apresenta em um dado momento, para que a situação possa ser entendida pela intuição e experiência e ajustada de acordo com os princípios do professor.

Em duas situações foi possível notar ocorrências do desenvolvimento de conceitos no processo histórico semelhantes às da sala de aula, por exemplo, na tarefa 1, quando os alunos precisam numerar uma reta de 28 pontos na ordem decrescente iniciando pelo número 23, é possível notar, mesmo fazendo uso do zero desde a educação infantil, que nem todos o colocaram na reta. Percebe-se uma relação com o desenvolvimento histórico do número, visto que, de acordo com Ifrah (1997), o zero aparece como último algarismo inventado, de valor fundamental para o desenvolvimento do sistema de numeração decimal e para se fazer uma extensão do conjunto dos números naturais por adjunção do seu simétrico em relação ao zero. Houve também a percepção de que, enquanto os alunos discutiam a tarefa 3 e usavam a reta numérica como apoio para resolver as operações, que eles não identificavam o número relativo como sendo uma quantidade. Vimos que este empasse atravessou séculos, Glaeser (1985) afirma que no século XVII os números negativos apareciam naturalmente nos trabalhos científicos, mas foi somente em 1867 na obra de Herman Hankel que todos os obstáculos sobre a teoria dos números são ultrapassados, quando ele trata os números inteiros como números inventados, imaginados. O autor afirma que no final do século XVIII as quantidades negativas não tinham atingido status de número.

De acordo com Freudenthal (1991) as crianças devem repetir o processo de aprendizado da humanidade, não como aconteceu de fato, mas como teria acontecido se as pessoas no passado soubessem um pouco do que sabemos agora.

A aplicação dessa trajetória mostrou o entrelaçamento dos princípios da EMR refletidos na sala de aula de modo a favorecer o ensino e a aprendizagem, também apresenta a importância da História da Matemática durante este processo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Freudenthal (1991) afirma que apenas uma pequena minoria aprende a matemática quando ela é ensinada apresentando ao estudante as definições, regras e algoritmos, ou seja, quando é ensinada como um assunto pronto. O autor afirma que se o aprendiz for ensinado a reinventar, então conhecimento e habilidades valiosos serão mais facilmente aprendidos, retidos e transferidos do que quando são impostos.

Guiar o aluno nesse processo de reinvenção da matemática é uma tarefa que exige do professor mais do que um simples transmissor de informações, exige que este conheça o processo de aprendizagem. Segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2010), o professor pode convidar regularmente os alunos a proporem ideias e soluções para serem analisadas pelo grupo e comparadas a outras, gerando a possibilidade de um progresso comum, para tanto é necessário que o docente avalie e esclareça as ideias e soluções dos alunos, o que a autora afirma só ser possível quando o professor tem um panorama claro de aprendizagem e sabe os momentos em que pode esperar determinadas ideias e métodos de soluções.

Uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2010) não só explica em que ponto os alunos devem chegar, mas também ilumina o amplo caminho que seguem. Desse modo, oferece ao professor um norte apresentando os objetivos a serem alcançados pelos alunos, desde uma perspectiva em longo prazo até os aspectos micro didáticos do cotidiano das aulas de matemática.

Pensando em proporcionar aos alunos a oportunidade de reinventar o conteúdo de Números Inteiros, elaborou-se a trajetória aqui descrita. O que exigiu uma busca do conhecimento da fundamentação teórica e do conteúdo matemático, e, que diante dos objetivos traçados, refletisse a respeito dos possíveis caminhos que os alunos poderiam trilhar para alcançá-los, considerando os obstáculos e os avanços durante o processo. Foi necessário aprofundar o conhecimento sobre Números Inteiros, estudar seu conceito, aspectos históricos, os documentos norteadores Estaduais e Nacionais e a apresentação do conteúdo nos livros didáticos com foco nos princípios da EMR. De forma que este estudo ampliou a visão da autora, trazendo uma nova perspectiva para sua prática docente.

Aplicar a trajetória foi uma experiência única, pois proporcionou vislumbrar os princípios da EMR. Um dos momentos mais marcantes foi contemplar os princípios da interatividade e da atividade surgindo, aparentemente, de forma natural em sala de aula. Diante da exposição de ideias e trocas de soluções pode-se avaliar não apenas o que e como os alunos estão aprendendo, mas, também, fazer uma avaliação do procedimento e das atitudes assumidas como professora, contribuindo para uma tomada de decisão ou um redirecionamento do processo de ensino e de aprendizagem. De acordo com De Lange (1999) o objetivo da avaliação em sala de aula é produzir informações que contribuam para o processo de ensino e aprendizagem e auxilie na tomada de decisões educacionais, e que os tomadores de decisão incluem alunos, professores, pais e administradores.

Entende-se que os princípios da EMR surgiram a partir da atitude assumida enquanto guia e do encaminhar das aulas de modo que os alunos eram regularmente provocados a exporem suas ideias e a trocarem soluções.

Embora considerando que uma Trajetória de Ensino Aprendizagem seja mais do que um planejamento, esta experiência mostrou que um professor, enquanto está elaborando ou aplicando seu plano de aula, deve ter em mente uma visão holística dos conteúdos matemáticos que vem desenvolvendo. Englobando nesta visão o conceito, a estrutura matemática e os aspectos históricos, com foco nos objetivos a serem alcançados pelos alunos. Além disso, procurar compreender e respeitar como e quando os alunos aprendem, permitindo que reinventem a matemática.

Essa experiência dá caminhos para que outras pesquisas sejam desenvolvidas, dentre elas podemos sugerir uma escrita mais refinada da própria trajetória aqui apresentada e mesmo a elaboração de outras trajetórias que abordem outros conteúdos matemáticos.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Ed. Porto. 1994. Título original: Qualitative research for education.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 3 ed. São Paulo. Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**: Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ >. Acesso em: 19 dez. 2018.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CARAÇA, B.de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa. 6 ed. Gradiva, 2005.

CLIMA TEMPO. **Saiba como se mede a chuva**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gZSCrirZ5c4 >. Aceso em 03 out. 2018.

CYRINO, M. C. de C. T.; PASQUINI, R. C. G. **Multiplicação e divisão de números inteiros: uma proposta para a formação de professores de Matemática.** Londrina, PR. SBHMat, 2010.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris: matemática**: ensino fundamental 2. 2 ed. São Paulo. Ática, 2015. 7ºano.

DEGUIRE, L. J. Polya visita a sala de aula. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo, 5ª reimpr. São Paulo: Atual, 1997.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madisons, WI: NICLA/WCER, 1999. Disponível em: <http://scholar.google.com.br/scholar_url?url=http://www.cdbeta.uu.nl/catch/product/f

ramework/de_lange_framework.doc&hl=ptBR&sa=X&scisig=AAGBfm19BSUpX88XSlc5k7M-IRutK6xslw&nossl=1&oi=scholarr>. Acesso em 10 fev. 2019.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP. Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. de. Educação Matemática Realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem**. Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.18, n.1, pp. 237-252, 2016. Disponível em: < https://revistas.pucsp.br/emp/issue/view/1442 >. Acesso em: 09 jan. 2018.

FERREIRA, P. E. A.. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GLAESER, G. Epistemologia dos Números Relativos. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 17, p. 29 - 124, 1985. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=issue&op=archive>. Acesso em: 12 out. 2018.

GRAVEMEIJER, K. P. E. **What makes mathematics so difficult, and what can we do about it?** In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas (pp. 83101). Lisboa: APM, 2005. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/gravemeijer%2006a.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2018.

IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos**. Rio de Janeiro. Nova Fronteira, 1997. v.1.

____, G. **Os Números**: história de uma grande invenção. 3 ed. Globo, 1985.

MENDES, M. T. **Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática: ideias e desafios**. 17ed. São Paulo. Saraiva, 2012. 7º ano.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes curriculares de matemática para educação básica***.* Curitiba: SEED, 2008.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno de Expectativas**. Curitiba: SEED, 2012. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/caderno_expectativas.pdf > Acesso em: 17 jun. 2018.

PIRES, M. N. M. **Oportunidade para aprender**: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases. 2013. 122 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SIMEPAR. **Boletim climatológico**. Disponível em: <http://www.simepar.br/prognozweb/simepar/timeline/boletim_climatologico>. Acesso em: 03 jun. 2018.

SOUZA, J. R. de; PATARO, P. R. M. **Vontade de Saber Matemática**. 3ed. São Paulo. FTD, 2015. 7º ano.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and realistic mathematics education,**1996. Disponível em: <https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/1705 >. A cesso em 25 nov 2018.

__________, M.(org.). **Los niños aprenden matemáticas.** México: Correo del maestro: La vasija, 2010a.

__________, M. Realistic Mathematics Education as work in progress. F. L. Lin (Ed.) **Common Sense in Mathematics Education**, 1-43. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan, 19 – 23 November 2001. Disponível em: <http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/documents/Marja_Work-in-progress.pdf>. Acesso em 12 de maio de 2018.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M., & DRIJVERS, P. (in press). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of Mathematics Education** (pp. xxx-xxx). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. Disponível em: < https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_170>. Acesso em: 14 dez. 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento de projeto de pesquisa de Mestrado, sob a responsabilidade de Francelise Ide Alves Ferreira, professora do Colégio Estadual Antônio Racanello Sampaio – Ensino Fundamental e Médio e aluna de Mestrado do Programa de Pós-graduação PROFMAT, sob a orientação da Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires, docente do Programa de Pós-Graduação PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize integralmente ou em partes, os registros escritos do(a) meu(minha) filho(a) nas aulas, atividades e avaliações da disciplina de Matemática, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área, sem restrições de prazo e citações, com a condição de que o nome de meu(minha) filho(a) não seja citado, garantido o anonimato no relato da pesquisa. Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida. Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Nome do aluno(a):

____

Nome do responsável:

____

RG do responsável:

____

Assinatura:

____