



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO EM MATEMÁTICA

RICARDO HUGO NUNES MEDEIROS FILHO

**MODELAGEM MATEMÁTICA: UM EXEMPLO NO ENSINO DA ENGENHARIA
MECÂNICA**

MOSSORÓ-RN

2019

RICARDO HUGO NUNES MEDEIROS FILHO

**MODELAGEM MATEMÁTICA: UM EXEMPLO NO ENSINO DA ENGENHARIA
MECÂNICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Centro de Ciências Exatas e Naturais para a obtenção do título de Mestre em Matemática do programa PROFMAT.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia – UFERSA.

MOSSORÓ-RN

2019

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

MM488 Medeiros Filho, Ricardo Hugo Nunes.
m Modelagem matemática: um exemplo no ensino da
engenharia mecânica / Ricardo Hugo Nunes Medeiros
Filho. - 2019.
74 f. : il.

Orientador: Antonio Ronaldo Gomes Garcia.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em
Matemática, 2019.

1. Ferramentas Matemáticas. 2. Engenharia
mecânica. 3. VANT. 4. Quadrotor. I. Gomes Garcia,
Antonio Ronaldo, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

RICARDO HUGO NUNES MEDEIROS FILHO

**MODELAGEM MATEMÁTICA: UM EXEMPLO NO ENSINO DA ENGENHARIA
MECÂNICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Centro de Ciências Exatas e Naturais para a obtenção do título de Mestre em Matemática do programa PROFMAT.

APROVADO EM: 23 / 05 / 2019

BANCA EXAMINADORA



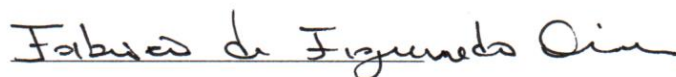
Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia – UFERSA

Presidente



Prof. Dr. Francisco Edson Nogueira Fraga – UFERSA

Segundo Membro



Prof. Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira – UFERSA

Primeiro Membro

AGRADECIMENTOS

Ao orientador deste trabalho, Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia, agradeço a dedicação com a qual se dispôs a ajudar neste estudo.

Ao Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira, sou grato por aceitar o convite para participar da minha banca, e pela grande orientação para a conclusão desse trabalho.

Ao Dr. Francisco Edson Nogueira Fraga, agradeço a disponibilidade em participar deste trabalho, e da sua contribuição para a conclusão do mesmo.

À minha família, meus pais, Ricardo e Iara, e a minha irmã, Mayara, pelo carinho orientação, paciência, dedicação e apoio incondicional que sempre recebi, que sem dúvida nenhuma foram fundamentais para transpor mais esse desafio.

À minha namorada, Ana Paula, pelo incentivo, orientação, carinho, companhia e por estar sempre disposta a me ajudar, a quem sem dúvidas compartilha comigo dessa conquista.

Ao meu amigo, Me. João Marcos, pelos ensinamentos, livros, amizade, momentos de lazer e de reflexões filosóficas.

Aos meus amigos, Luan, Jonatha, Edglay, Brayán e Niellys, por suas amizades mesmo que as vezes distantes geograficamente.

Ao meu amigo, Maciel, pela orientação, dedicação, paciência e disponibilidade em me ajudar, cuja contribuição para esta conquista foi inestimável.

Aos meus amigos e colegas de profissão, Airton e Aderson, os quais em tão pouco tempo aprendi a admirar e que contribuíram de forma direta e indireta para minha formação.

Aos meus professores, Jusciane e Quirino, que me orientaram durante a minha graduação, obrigado pela amizade e dedicação.

RESUMO

A matemática é vista como uma disciplina que sofre rejeição por grande parte dos alunos, esse fato ocorre devido não ser apresentada uma utilidade para as ferramentas vistas em sala de aula. Com o intuito de explicar um caso real para algumas ferramentas matemáticas será utilizado um problema da engenharia mecânica, que se trata da análise de um veículo aéreo não tripulado (VANT) do tipo quadrotor, que utiliza ferramentas como matrizes, transformações lineares, derivadas e integrais. Esses veículos vêm ganhando bastante notoriedade nos últimos anos devido a sua simples manipulação. Dessa forma, este trabalho tem como objetivo apresentar a utilização dessas das ferramentas matemáticas para o estudo das equações que governam o movimento dessas aeronaves. Para isso, foi apresentado um breve histórico acerca dos VANTs, apresentando também a importância do lúdico no ensino da matemática como facilitador na aprendizagem, em seguida foi apresentada a teoria por trás do problema, destacando todas as ferramentas matemáticas envolvidas, e por fim foi obtido o equacionamento que norteia o controle de um quadrotor. Assim foi possível apresentar o problema de forma mais compreensiva e detalhada. Dessa forma, foi apresentada uma aplicação real para tais ferramentas demonstrando assim, importância do estudo da matemática.

Palavras-chave: Ferramentas Matemáticas. Engenharia mecânica. VANT. Quadrotor.

ABSTRACT

Mathematics is seen as a subject that is rejected by most students; this fact is due to the lack of usefulness for the tools seen in the classroom. In order to explain a real case for some mathematical tools we will use a mechanical engineering problem that deals with the analysis of a unmanned aerial vehicle (UAV) of the type quadrotor, which uses tools such as matrices, linear map, derivative and integral. These vehicles have gained a lot of notoriety in recent years due to their simple handling. Thus, this paper aims to present the use of these mathematical tools to study the equations that guide the motion of these aircraft. For this, we presented a brief history about the UAVs, also presenting the importance of the ludic in the teaching of mathematics as a facilitator in learning, then presented the theory behind the problem, highlighting all the mathematical tools involved, and finally the equations that guide the control of a quadrotor. Thus it was possible to present the problem in a more comprehensive and detailed way. Thus, a real application for such tools was presented thus demonstrating the importance of the study of mathematics.

Keywords: Mathematical Tools. Mechanical Engineering. UAV. Quadrotor.

LISTA DE SÍMBOLOS

p_n	posição inicial do veículo com relação ao eixo \hat{i}^i em \mathfrak{R}^i
p_e	posição inicial do veículo com relação ao eixo \hat{j}^i em \mathfrak{R}^i
h	a altura do veículo com relação ao eixo $-\hat{k}^i$ em \mathfrak{R}^i
u	velocidade do veículo com relação ao eixo \hat{i}^b em \mathfrak{R}^b
v	velocidade do veículo com relação ao eixo \hat{j}^b em \mathfrak{R}^b
w	velocidade do veículo com relação ao eixo \hat{k}^b em \mathfrak{R}^b
ϕ	ângulo de <i>roll</i> (rolagem) com relação a \mathfrak{R}^{v2}
θ	ângulo de <i>pitch</i> (arfagem) com relação a \mathfrak{R}^{v1}
ψ	ângulo de <i>yaw</i> (guinada) com relação a \mathfrak{R}^v
p	derivada do ângulo de <i>roll</i> com relação ao tempo em torno do eixo \hat{i}^b em \mathfrak{R}^b
q	derivada do ângulo de <i>pitch</i> com relação ao tempo em torno do eixo \hat{j}^b em \mathfrak{R}^b
r	derivada do ângulo de <i>yaw</i> com relação ao tempo em torno do eixo \hat{k}^b em \mathfrak{R}^b
\mathfrak{R}^0	sistema referencial com os vetores unitários $(\hat{i}^0, \hat{j}^0, \hat{k}^0)$
\mathfrak{R}^1	sistema referencial com os vetores unitários $(\hat{i}^1, \hat{j}^1, \hat{k}^1)$
\mathfrak{R}^i	sistema referencial inercial com os vetores unitários $(\hat{i}^i, \hat{j}^i, \hat{k}^i)$
\mathfrak{R}^v	sistema referencial do veículo com os vetores unitários $(\hat{i}^v, \hat{j}^v, \hat{k}^v)$
\mathfrak{R}^{v1}	sistema referencial do veículo-1 com os vetores unitários $(\hat{i}^{v1}, \hat{j}^{v1}, \hat{k}^{v1})$
\mathfrak{R}^{v2}	sistema referencial do veículo-2 com os vetores unitários $(\hat{i}^{v2}, \hat{j}^{v2}, \hat{k}^{v2})$
\mathfrak{R}^b	sistema referencial do corpo com os vetores unitários $(\hat{i}^b, \hat{j}^b, \hat{k}^b)$
\mathbf{v}_b	vetor velocidade do quadrotor com relação à \mathfrak{R}^b com as coordenadas (u, v, w)
m	massa do quadrotor
F	vetor força resultante sobre o quadrotor com as coordenadas (F_x, F_y, F_z)
\mathbf{a}_b	vetor aceleração do quadrotor com relação à \mathfrak{R}^b com as coordenadas $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$
$\omega_{b/i}$	vetor velocidade angular com relação à \mathfrak{R}^i com as coordenadas (p, q, r)
\mathbf{h}_b	momento angular com relação ao sistema referencial \mathfrak{R}^b
M	vetor torque resultante
M'	momento causado pelo efeito giroscópio da rotação de hélices
J	tensor de inércia do quadrotor
J_x	momento de inércia com relação ao eixo x

J_y momento de inércia com relação ao eixo y
 J_z momento de inércia com relação ao eixo z
 J_p momento de inércia da hélice
 ω_p velocidade angular da hélice

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Modelo Draganflyer X4-P launch.....	16
Figura 1.2 - Modelo do Mesicopter.	17
Figura 1.3 - Estrutura do quadrotor.....	17
Figura 1.4 - Movimentos do quadrotor, a largura das setas é proporcional à velocidade angular das hélices.	18
Figura 1.5 - Semente de bordo, Acer pseudoplatanus.	19
Figura 1.6 - Top Chinês.	19
Figura 1.7 - Helical Air Screw.....	20
Figura 1.8 - Gyroplane n:01.....	20
Figura 3.1 - Movimento de translação retilínea (a) e curvilínea (b).	27
Figura 3.2 - Movimento de rotação em torno de um eixo fixo.....	27
Figura 3.3 - Vetores posição \mathbf{r}_{A1} e \mathbf{r}_{A2} em um corpo rígido.....	29
Figura 3.4 - Soma de dois vetores.....	29
Figura 3.5 - Rotação em torno de um eixo fixo.	33
Figura 3.6 - Movimento plano geral.	35
Figura 3.7 - Vetores \mathbf{v}_B , \mathbf{v}_A e $\mathbf{v}_{B/A}$ do movimento plano geral.....	36
Figura 3.8 - Exemplo da ação da força de Coriolis.....	38
Figura 3.9 - Sistemas de coordenadas $OXYZ$ e $Oxyz$	38
Figura 3.10 - Ação de diferentes forças sobre um corpo rígido.....	42
Figura 3.11 - Cálculo do momento de inércia.....	43
Figura 3.12 - Objetos utilizados para a determinar o momento de inercia.	44
Figura 3.13 - Objetos O , D e P em rotação com relação ao centro de massa.....	44
Figura 3.14 - Objetos O , D e P em rotação após a alteração da posição do objeto P	45
Figura 3.15 - Vetor posição e o vetor velocidade da partícula P_i	46
Figura 3.16 - Rotação de θ radianos de um sistema cartesiano $Ox_1y_1z_1$ em relação a um sistema $Oxyz$	53
Figura 3.17 - Ângulos de Cardan.....	55
Figura 3.18 - Ângulo de Roll no quadrotor.....	55
Figura 3.19 - Ângulo de Pitch no quadrotor.	56
Figura 3.20 - Ângulo de Yaw no quadrotor.	56
Figura 4.1 - Veículo Quadrotor.....	57

Figura 4.2 - Definição dos Eixos.	58
Figura 4.3 - Rotação de um sistema de três coordenadas em relação ao eixo z.	59
Figura 4.4 - Sistema de coordenadas inercial.	61

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
CAPÍTULO 1 O QUADROTOR	16
1.1. ESTADO DA ARTE.....	16
1.2. ESTRUTURA BÁSICA.....	17
1.3. BREVE HISTÓRICO DOS HELICÓPTEROS.....	18
1.3.1. A era dos VANTs	21
CAPÍTULO 2 O ENSINO DA MATEMÁTICA	22
2.1. O ENSINO DA MATEMÁTICA.....	22
2.2. O LÚDICO COMO FERRAMENTA NO ENSINO DA MATEMÁTICA.....	23
2.3. ETNOMATEMÁTICA.....	24
2.4. ENGENHARIA DIDÁTICA.....	24
CAPÍTULO 3 A TEORIA POR TRÁS DO PROBLEMA	26
3.1. CINEMÁTICA DOS CORPOS RÍGIDOS.....	26
3.1.1. Translação	28
3.1.2. Rotação em torno de um eixo fixo	33
3.1.3. Movimento plano geral	35
3.2. ACELERAÇÃO DE CORIOLIS.....	37
3.3. DINÂMICA DOS CORPOS RÍGIDOS.....	41
3.3.1. Equações de movimento para um corpo rígido	41
3.3.2. Momento de Inércia	42
3.3.2.1. Tensor de inércia.....	45
3.4. REFERENCIAIS EM ROTAÇÃO.....	49
3.4.1. Matriz de uma Transformação linear	50
3.4.2. Operador Linear	52
3.5. ÂNGULOS DE EULER.....	54
CAPÍTULO 4 ANÁLISE CINEMÁTICA E DINÂMICA DO QUADROTOR	57
4.1. VARIÁVEIS DO PROBLEMA.....	57
4.2. SISTEMA DE REFERÊNCIA.....	58
4.2.1. Matrizes de Rotação	59
4.2.2. Sistemas de coordenadas do Quadrotor	61
4.2.2.1. Referencial inercial \mathcal{R}_i	61
4.2.2.2. Referencial do veículo \mathcal{R}_v	61
4.2.2.3. Referencial do veículo-1 \mathcal{R}_{v1}	62

4.2.2.4.	Referencial do veículo-2 $\mathcal{R}v2$.	62
4.2.2.5.	Referencial do corpo $\mathcal{R}b$.	62
4.3.	CINEMÁTICA DO QUADROTOR	63
4.4.	DINÂMICA DO QUADROTOR	64
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
	REFERÊNCIAS	71

INTRODUÇÃO

A matemática realmente apresenta uma grande rejeição entre os alunos do Ensino Básico, Técnico ou Superior? Na maioria das vezes esta questão parece ter uma resposta positiva, e muito se deve ao fato das ferramentas matemáticas não serem oferecidas dentro de um contexto de aplicações de forma significativa que evidencie sua necessidade. Nesse sentido, muitos professores de matemática não possuem o conhecimento da real aplicação de algumas dessas ferramentas ensinadas em sala de aula. Essa situação, muitas vezes, deixa os alunos desmotivados para o estudo da matemática, uma vez que ao estudar as ferramentas matemáticas sem um contexto real surgem questionamentos muito comuns em sala de aula. Questionamentos como: Por que estudar tais ferramentas? Como e quando essas ferramentas serão utilizadas?

Em termos gerais, a presente pesquisa objetiva apresentar um exemplo de uma modelagem matemática empregada na engenharia mecânica, na qual serão destacadas todas as principais ferramentas matemáticas envolvidas no problema. Dentre estas ferramentas, destacam-se as matrizes, as transformações lineares, as derivadas e as integrais. O exemplo a ser estudado é a modelagem matemática para o controle de um veículo aéreo não tripulado (VANT) do tipo quadrotor.

Para atingir este objetivo, será apresentado inicialmente, um breve histórico acerca dos VANTs, depois será apresentado um estudo sobre o ensino da matemática e a importância do mesmo ser realizado de forma lúdica e didática. Em seguida, será realizado o estudo teórico, no qual será destacado as ferramentas matemáticas necessárias para a modelagem do problema. Além disso, serão apresentadas as variáveis envolvidas na modelagem matemática do quadrotor, como os ângulos de Euler, em especial os de Cardan, principais responsáveis pela movimentação do quadrotor. E por fim, será exibido detalhadamente os cálculos para a obtenção das equações que norteiam o estudo do controle do quadrotor.

Os estudos acerca dos veículos aéreos não tripulados têm ganhado um relevante destaque no cenário mundial nos últimos anos, sobre isso, cabe destacar que os desenvolvimentos dos VANTs têm estimulado grandes avanços tecnológicos nos últimos anos. Tais avanços permitiram melhorias nas tecnologias dos sistemas de posicionamento global (GPS, em inglês *Global Positioning System*), no armazenamento de energia de alta densidade e no processamento de dados. Em particular, os veículos *Quadrotor* vêm se destacando em relação aos demais VANTs, devido, principalmente, sua simplicidade de construção e manutenção, além da sua capacidade de planar e capacidade decolagem e aterrissagem vertical,

em inglês *Vertical Take-Off and Landing* (VTOL) (BALASUBRAMANIAN; VASANTHARAJ, 2013; BOUABDALLAH; SIEGWART, 2007).

Nesse sentido diversos trabalhos vêm sendo desenvolvidos nessa área. Em comum, estes trabalhos, trazem a complexidade do problema, não apresentando, por exemplo a obtenção de equação, ou a teoria por traz do problema. Essa complexidade dificulta o entendimento para o público que não possui conhecimento científico nessa área. Dessa maneira, este trabalho surge como alternativa para aproximar esse público do estudo acerca dos VANTs, além de apresentar uma aplicação para diversas ferramentas matemáticas estudadas desde o Ensino Básico até o Ensino Superior.

O quadrotor, também conhecido como helicóptero quadrotor ou ainda quadricóptero, são veículos aéreos que podem ser empregados para exploração de ambientes internos ou externos, coleta de informações, segurança, vigilância, aplicações meteorológicas e agrícolas, gerenciamento de tráfego e direção e gerenciamento de crises após desastres naturais. Estas aplicações são tanto de uso militar quanto para o entretenimento (BALASUBRAMANIAN; VASANTHARAJ, 2013; ABREU, 2014).

Sob a perspectiva de controle, o quadrotor é um veículo sob atuação de forças controladas com seis graus de liberdade, três relacionadas as coordenadas de posição e três relacionadas aos ângulos de *pitch*, *yaw* e *roll*, em português arfagem, guinada e rolagem, nesta ordem. Essas forças geram movimentos de rotação e translação, e o controle da estabilidade parte da compreensão de como essas forças atuam sobre o quadrotor (SA; CORKE, 2012).

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1 será apresentado o quadrotor bem como um breve histórico. No Capítulo 2 será abordado o ensino da matemática, e a sua importância para motivação dos alunos. Em seguida, no Capítulo 3, será apresentada a teoria necessária para o entendimento do estudo do quadrotor. Já no Capítulo 4 é apresentada a modelagem matemática da aeronave. Por fim, serão realizadas as considerações finais.

CAPÍTULO 1 O QUADROTOR

Neste capítulo será apresentado, inicialmente, o quadrotor e a sua configuração que, como o próprio nome diz, consiste em quatro rotores, nos quais possuem configuração cruzada. Por fim, será exposto um breve histórico dos helicópteros que foram o pontapé inicial para a criação e evolução dos quadrotores.

1.1. ESTADO DA ARTE

Os diversos avanços nas tecnologias atuais fizeram com que ocorresse um avanço significativo no Estado da Arte dos VANTs, que têm recebido diversas contribuições, sendo a maior parte dessas, concentradas nas estruturas de quadrotores. Em relação a isso, deve-se mencionar que alguns projetos se baseiam em estruturas já disponíveis comercialmente como o *Draganflyer*, outros têm como objetivo construir sua própria estrutura como foi o caso do *Mesicopter*, um projeto da universidade de Stanford que teve início em 1999 e terminou em 2001, e tinha como objetivo estudar a viabilidade de um quadrotor em escala centimétrica (BOUABDALLAH, 2007; BRESCIANI, 2008; ELKHOLY, 2014).

Na Figura 1.1 é apresentado um modelo de *Draganflyer*.

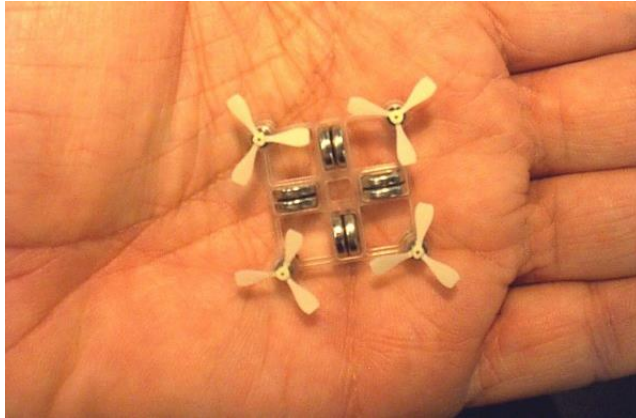
Figura 1.1 - Modelo *Draganflyer X4-P launch*.



Fonte: Mortimer (2012).

Na Figura 1.2 é apresentado um modelo de *Mesicopter*.

Figura 1.2 - Modelo do *Mesicopter*.

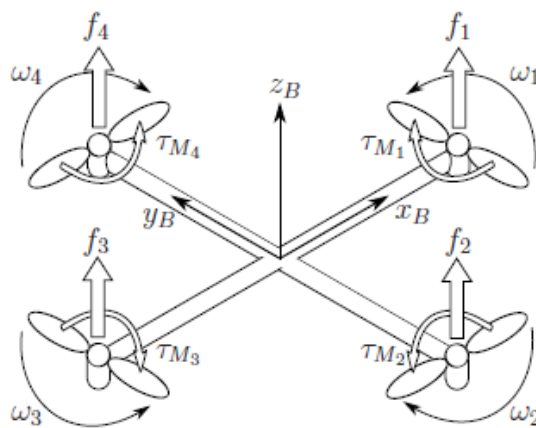


Fonte: Bouabdallah (2007).

1.2. ESTRUTURA BÁSICA

O quadrotor possui esse nome porque é modelado com quatro rotores em uma configuração cruzada. Esta estrutura, em geral, é fina e leve, porém apresenta robustez nas regiões onde se encontram os motores. Na Figura 1.3 é apresentada uma arte conceitual da estrutura do quadrotor, nela são apresentadas as velocidades, os torques e as forças que cada rotor está submetido. Cada hélice é conectada ao motor através das engrenagens de redução. Todos os eixos de rotação das hélices são fixos e paralelos entre si. Essas configurações proporcionam uma estrutura bastante rígida fazendo com que os únicos parâmetros variantes sejam as velocidades da hélice (BRESCIANI, 2008).

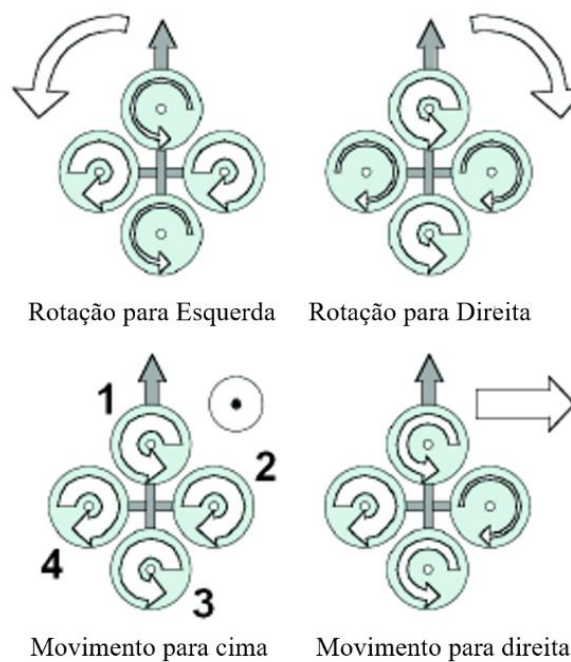
Figura 1.3 - Estrutura do quadrotor.



Fonte: Luukkonen (2011).

Com esta configuração, a rotação vertical é obtida criando uma diferença de velocidade angular entre os dois pares de rotores, para isso é necessário conduzir os dois pares de hélices em direções opostas, eliminando a necessidade de um rotor de cauda. Para o movimento de subida ou descida basta aumentar ou diminuir a velocidade das quatro hélices simultaneamente. Já a rotação em torno do eixo longitudinal e lateral e, conseqüentemente, os movimentos horizontais são obtidos através da inclinação do veículo e isso é possível mudando a velocidade da hélice de um par de rotores conforme descrito na Figura 1.4 (BOUABDALLAH, 2007).

Figura 1.4 - Movimentos do quadrotor, a largura das setas é proporcional à velocidade angular das hélices.



Fonte: Bouabdallah (2007) Adaptado.

1.3. BREVE HISTÓRICO DOS HELICÓPTEROS

O fascínio da humanidade por voar foi expresso ao longo da história, tomando a forma de lendas, mitos ou mesmo relatos religiosos. O sonho de voar foi um dos maiores desafios para o homem, gerando séculos de frustração e centenas de tentativas (BOUABDALLAH, 2007).

Os primeiros brinquedos voadores foram, provavelmente, os tops chineses. Esses brinquedos eram inspirados pelo formato das sementes de algumas árvores, como a *Acer pseudoplatanus* (Ver a Figura 1.5), que se assemelhavam a asas (GESSOW; MYERS JUNIOR, 1999; BOUABDALLAH, 2007).

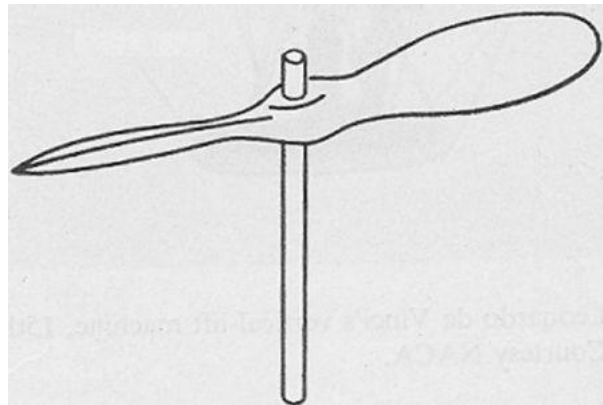
Figura 1.5 - Semente de bordo, *Acer pseudoplatanus*.



Fonte: Allix (2019).

O brinquedo consistia em uma semente dessas árvores fixa em uma haste, simulando um rotor de helicóptero, que voa quando a haste é girada rapidamente. Na Figura 1.6 é apresentado um modelo de top chinês.

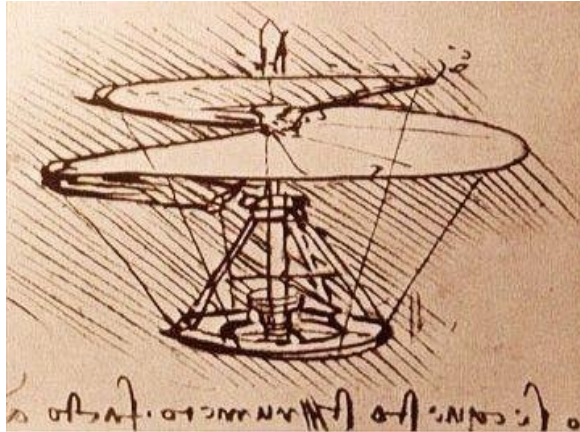
Figura 1.6 - Top Chinês.



Fonte: Gessow e Myers Junior (1999).

Em 1490, Leonardo Da Vinci criou o *Helical Air Screw* (em tradução livre: Parafuso de Ar Helicoidal) (ver Figura 1.7), que é frequentemente citado como a primeira tentativa de produzir um helicóptero funcional (BOUABDALLAH, 2007).

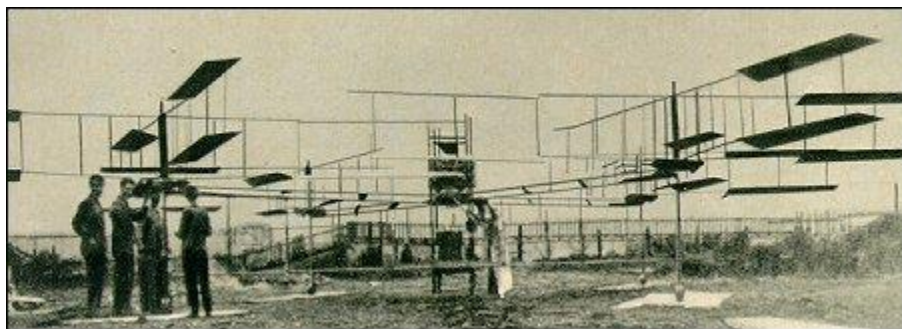
Figura 1.7 - Helical Air Screw.



Fonte: Bouabdallah (2007).

Ponton d'Amécourt foi o primeiro a usar a palavra "Helicóptero", em 1863. A palavra teve origem de duas palavras gregas *Helikos* que significa hélice e *Pteron* que significa asa. Além disso, d'Amécourt também descreveu um helicóptero coaxial e várias maneiras de guiá-lo. Baseado nisso, em 1877, Forlanini construiu um modelo a vapor em escala reduzida, capaz de voar 20 segundos a 12 metros. Em 29 de setembro de 1907, os franceses Louis e Jacques Breguet e o professor Charles Richet realizaram o primeiro voo tripulado com seu *Gyroplane n:01* (ver Figura 1.8), que consistia em um quadrotor, em grande escala, com uma dupla camada de hélices e sem superfícies de controle. E em 13 de novembro de 1907, o primeiro voo livre controlado manualmente foi realizado por Paul Cornu em seu helicóptero (MCGOWEN, 2005) (BOUABDALLAH, 2007).

Figura 1.8 - Gyroplane n:01.



Fonte: Bouabdallah (2007).

1.3.1. A era dos VANTs

Alguns anos após o primeiro voo de avião tripulado, o Dr. Cooper e o Elmer Sperry inventaram o estabilizador giroscópico automático, que ajudava a manter a aeronave voando reta e nivelada. Essa tecnologia foi usada para converter uma aeronave de treinamento *US Navy Curtiss N-9* no primeiro veículo aéreo não tripulado controlado por rádio. Os primeiros VANTs foram testados nos Estados Unidos durante a Primeira Guerra Mundial, no entanto nunca foram utilizados em combates. Foi somente na Segunda Guerra Mundial que os VANTs foram utilizados, pela Alemanha, nos campos de batalha, obtendo assim uma grande vantagem (BOUABDALLAH, 2007).

O primeiro helicóptero não tripulado foi o construído por Forlanini em 1877, esse não era estável e nem dirigível. Porém foram com os avanços tecnológicos após a Segunda Guerra Mundial que se tornou possível construir e controlar helicópteros não-tripulados. Evidenciando o mercado militar de helicópteros não tripulados (BOUABDALLAH, 2007).

Dessa forma, os estudos com estes VANTs foram avançando ao longo dos anos, com o objetivo garantir o seu controle e a sua estabilidade. Nesse sentido este trabalho apresenta a modelagem matemática de um VANTs do tipo quadrotor apresentando a matemática básica envolvida para o entendimento do problema.

CAPÍTULO 2 O ENSINO DA MATEMÁTICA

2.1. O ENSINO DA MATEMÁTICA

A matemática está presente na vida de todos os membros de uma sociedade sendo um componente importante para a convivência nesse meio. Isso porque a matemática pode ser observada durante tarefas simples do cotidiano, como a realização de compras, operações bancárias, entre outras. Nesse contexto, é necessário preparar os alunos para a vida em sociedade, desenvolvendo a capacidade de pensar matematicamente, a utilização de raciocínio lógico e a resolução de problemas.

Nessa perspectiva, a Secretaria de Educação Básica (2014) estabeleceu em seu Pacto Nacional pela Alfabetização que o ensino da matemática deve ser pautado na criação de um ambiente problematizador e este ambiente deve servir como um cenário de investigação e segundo esse pacto:

Investigar é experimentar coletivamente, ler, escrever e discutir matematicamente, levantar hipóteses, buscar indícios, observar regularidades, registrar resultados provisórios, compartilhar diferentes estratégias, variar procedimentos, construir argumentos matemáticos, como também ouvir os argumentos matemáticos dos colegas, buscar generalizar, conceituar. Professor e alunos participam desse movimento questionando, apresentando seu ponto de vista, oferecendo contraexemplos, argumentando, matematizando. A comunicação acontece por meio da dialogicidade. (BRASIL, 2014, p.18)

Ainda sobre esse aspecto, D'Ambrosio (1989) menciona que a comunidade da Educação Matemática vem estudando a maneira de como a matemática pode ser abordada em sala de aula. O modelo tradicional de aula expositiva faz com que os alunos acreditem que a aprendizagem de matemática é limitada a decorar fórmulas e utilizar algoritmos. Ainda segundo D'Ambrosio (1989):

Os professores em geral mostram a matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido. Ao aluno não é dado em nenhum momento a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada, nem mesmo uma solução mais interessante. O aluno assim, passa a acreditar que na aula de matemática o seu papel é passivo e desinteressante. (D'AMBROSIO, 1989)

Desta forma, surge o questionamento, as competências matemáticas desenvolvidas em sala de aula estão compatíveis com as exigidas no cotidiano? Sobre este questionamento, é

possível refletir acerca de como o ensino da matemática deve ser direcionado em sala de aula. Sobre isso, Lira (2016) discorre que:

Em uma reflexão sobre o ensino da matemática, é fundamental que o professor identifique as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações, também é preciso que tenha clareza das próprias concepções sobre a matemática, (LIRA, 2016)

Como consequência, o professor irá contribuir para melhorar a simpatia da matemática perante os alunos, tornando-a mais didática e dinâmica. Concomitantemente, vai construir no discente a ideia de que ele está estudando uma ciência útil, necessária para conviver em sociedade e desenvolver relações humanas.

2.2. O LÚDICO COMO FERRAMENTA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O Lúdico é a forma de desenvolver a criatividade e o conhecimento, através da realização de brincadeiras, jogos, dança, esportes entre outras. Tendo como finalidade educar e ensinar enquanto se diverte e interage com outras pessoas (ALMEIDA, 2007).

Para Vygotsky (1991), a aprendizagem e o desenvolvimento estão intimamente relacionados, sendo que o desenvolvimento do ser humano se dá por meio do aprendizado, que por sua vez envolve a interferência direta ou indireta de outros seres humanos. Desta forma, um jogo pode proporcionar desafios e estímulos, desenvolvendo o que Vygotsky (apud SANT'ANNA; NASCIMENTO, 2011) nomeia como zona de desenvolvimento proximal (ZDP). Sobre isso, Vygotsky (apud SANT'ANNA; NASCIMENTO, 2011) afirma:

(...) a zona de desenvolvimento proximal (ZDP) é o percurso que o ser humano faz até chegar a um nível de amadurecimento real, sendo chamado por ele de zona de desenvolvimento real (ZDR) que é a capacidade do ser humano realizar tarefas independentes. (VYGOTSKY, 1998 *apud* SANT'ANNA; NASCIMENTO, 2011)

Assim, ao utilizar o lúdico durante o ensino da matemática, de forma planejada e adequada aos conteúdos a serem lecionados, o professor está contribuindo para o aprendizado de forma efetiva.

Em vista disso, o ensino da matemática nas séries iniciais deve ser associado à parte lúdica do ensino, uma vez que durante o ensino as crianças precisam dar significado aos conceitos matemáticos, e o lúdico irá auxiliar a associação desses conceitos com jogos, brincadeiras entre outras abordagens (LIRA, 2016).

Segundo Silva e Angelim (2017):

A introdução de jogos como recurso didático nas aulas de matemática é tido como facilitador, como um contribuinte, uma vez que os estudantes ainda apresentam medo, receios com relação à disciplina e os jogos acabam diminuindo os bloqueios apresentados pelos estudantes, com relação à matemática, considerando assim o lúdico como ferramenta no aprendizado. (SILVA; ANGELIM, 2017)

Nesse sentido, os jogos funcionam não só como aprendizado, mas também como forma de manter a atenção desses alunos. O que torna o processo de ensino-aprendizagem muito mais agradável e estimulante para o aluno.

2.3. ETNOMATEMÁTICA

A Etnomatemática teve como principal idealizador Ubiratan D'Ambrosio, importante matemático brasileiro, tendo como principal objetivo estudar os costumes, cultura e modo de vida de um povo, e a partir desses conhecimentos identificar como é utilizada a matemática durante a solução de problemas do cotidiano (PAIVA; PAULA; CALADO, 2017).

Nesse sentido, a Etnomatemática pode ser sintetizada, segundo D'Ambrosio (1998) como “um programa que visa explicar os processos de geração, organização e transmissão de conhecimento em diversos sistemas culturais e as forças interativas que agem entre os três processos”.

Desta forma, a etnomatemática busca compreender ao longo da humanidade o saber e o fazer. Podendo assim, ser desenvolvida no cotidiano, se manifestando através da relação do adulto com o seu conhecimento informal, que vão se aprimorando durante a experiência diária (VELHO; LARA, 2011).

2.4. ENGENHARIA DIDÁTICA

A palavra didática tem origem da palavra grega *didaktikós*, que significa arte ou técnica de dirigir e/ou orientar a aprendizagem. No caso específico da didática voltada para o ensino de matemática, Brousseau (*apud* MANGUEIRA; SILVA, 2018, *idem*) destaca que

(...) a Didática da Matemática estuda as atividades didáticas que tem como objetivo o ensino naquilo que tem de específico dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise, incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos

(referência a Piaget), além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber.

Dentro dessa perspectiva, ressalta-se que a Engenharia Didática surgiu ao final da década de 1960, na França, durante discussões desenvolvidas no Instituto de Investigação do Ensino de Matemática (IREM) e tem como objetivo conceber, realizar, observar e analisar as situações didáticas. Inicialmente, o instituto proporcionava um complemento na formação de professores de matemática e na produção de materiais de apoio para a sala de aula, como jogos, brinquedos, problemas, exercícios e experimentos (MANGUEIRA; SILVA, 2018).

Brousseau desenvolveu uma teoria para compreender as relações entre os alunos, o professor e o saber que acontece em sala de aula. Essa teoria ficou conhecida como Teoria das Situações Didáticas e apresenta docentes e discentes como seres indispensáveis na relação de ensino e aprendizagem, além do meio em que a situação didática ocorre (TEIXEIRA; PASSOS, 2014).

A Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau associada a Engenharia Didática podem contribuir de forma significativa para a construção de conhecimentos em sala de aula e assim melhorar o processo de ensino e aprendizagem em matemática.

CAPÍTULO 3 A TEORIA POR TRÁS DO PROBLEMA

Neste capítulo serão abordados os aspectos teóricos necessários para uma melhor compreensão do problema proposto. Para tanto, de início, será apresentada uma explanação sobre cinemática dos corpos rígidos. Em seguida, será realizada uma abordagem acerca da dinâmica dos corpos rígidos. Por último, serão apresentados os ângulos que fornecem uma parametrização para o problema.

3.1. CINEMÁTICA DOS CORPOS RÍGIDOS

Um corpo rígido é todo objeto que não pode ser descrito como um ponto, ou seja, pode ser considerado como um sistema de partículas, cada uma com sua respectiva massa. Quando todas as partículas se movem de modo a se manterem equidistantes, dizemos que o corpo está em movimento plano (HIBBELER, 2011).

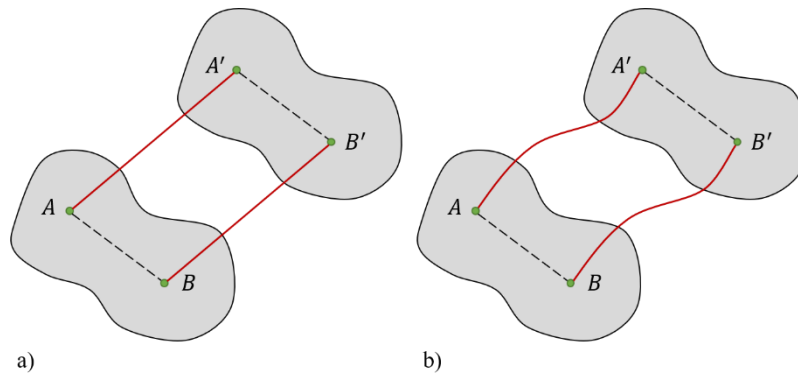
Esta definição de corpo rígido é um modelo idealizado, na prática, todos os corpos submetidos a forças externas se deformam, mesmo que seja imperceptível ao olho humano. Portanto, estruturas reais não podem ser consideradas absolutamente rígidas. No entanto, este modelo é utilizado para a realização de estudos da cinemática e dinâmica, e em muitos casos oferece uma boa aproximação com a realidade. Neste trabalho o quadrotor será assumido como um corpo rígido.

Nesse sentido, cabe definir o conceito de cinemática, tendo em vista sua importância dentro da pesquisa. De modo geral, a cinemática é o estudo do movimento que relaciona deslocamento, velocidade, aceleração e tempo sem referências as causas do movimento (BEER; JOHNSTON JUNIOR; CORNWELL, 2012).

Quanto ao movimento, existem três tipos de movimentos planos que são eles: Translação; Rotação em torno de um eixo fixo e Movimento plano geral (BEER; JOHNSTON JUNIOR; CORNWELL, 2012) (HIBBELER, 2011).

O movimento de translação se dá quando qualquer linha reta dentro do corpo mantiver a mesma direção durante o movimento, este movimento pode ocorrer de duas formas, quando todas as partículas do corpo movem-se de forma paralela, denomina-se translação retilínea (Figura 3.1.a), ou quando a trajetória é curva chama-se translação curvilínea (Figura 3.1.b) (BEER; JOHNSTON JUNIOR; CORNWELL, 2012).

Figura 3.1 - Movimento de translação retilínea (a) e curvilínea (b).

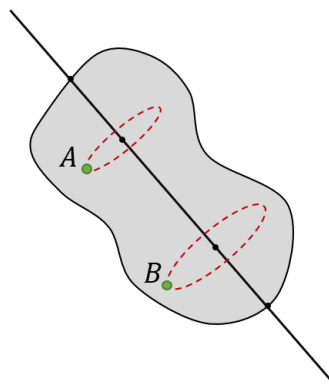


Fonte: Autoria Própria (2019).

Um exemplo do movimento de translação é o movimento realizado por um elevador, quando esse se desloca de um andar para o outro. Durante esse movimento todos os componentes do elevador realizam o movimento de subida ou descida de forma retilínea. No caso do quadrotor, o movimento de translação pode ser identificado nos movimentos de subida e de descida, e no movimento ao longo do eixo longitudinal.

O movimento de rotação em torno de um eixo fixo (Figura 3.2) ocorre quando todas as partículas do corpo se movem em planos paralelos ao longo de círculos cujos centros estão sobre um mesmo eixo fixo, a este eixo chamamos eixo de rotação (BEER; JOHNSTON JUNIOR; CORNWELL, 2012).

Figura 3.2 - Movimento de rotação em torno de um eixo fixo



Fonte: Autoria Própria (2019).

Um exemplo de movimento de rotação é o movimento realizado pela hélice de um ventilador em torno do seu centro que é acoplado ao motor, durante esse movimento as pás do ventilador possuem a mesma velocidade angular. De maneira semelhante, no quadrotor, durante o movimento de subida e descida, as hélices dos rotores realizam um movimento de rotação e

durante a mudança de direção o quadrotor realiza o movimento de rotação em torno do seu centro de massa.

Chama-se movimento plano geral quando um corpo está submetido a uma combinação dos movimentos de rotação e translação (HIBBELER, 2011). Isto é, a ocorrência simultânea dos movimentos supramencionados.

Um exemplo desse movimento são as rodas de um carro em movimento, que realizam um movimento de rotação em torno do eixo do motor, ao mesmo tempo que realiza o movimento de translação, responsável pelo deslocamento do veículo. Já no quadrotor esse movimento pode ser observado, de forma semelhante, pelo movimento realizado pelas hélices durante o movimento do quadrotor ao longo do eixo longitudinal, uma vez que as hélices realizam o movimento de rotação em torno do eixo do rotor e realizam o movimento de translação durante o deslocamento ao longo do eixo longitudinal.

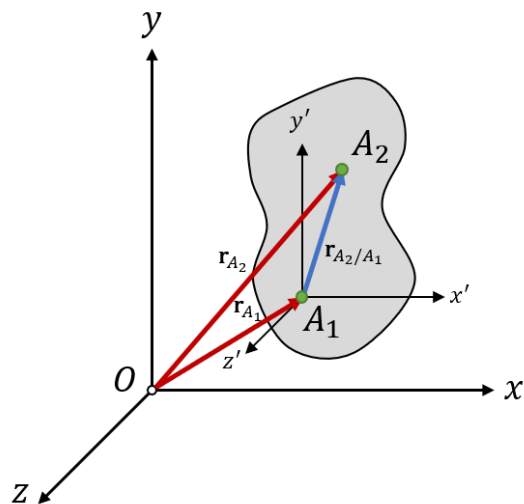
3.1.1. Translação

As partículas do corpo rígido podem ser tratadas como pontos no espaço, e a partir desses pontos podem-se determinar vetores relacionados ao posicionamento dessas partículas com relação a um sistema referencial inercial ortogonal. Esses vetores são chamados vetores posição ou vetores deslocamento e as equações relacionadas ao movimento de translação são obtidas com relação a esses vetores.

A seguir serão obtidas essas equações considerando um sistema de referencial ortogonal fixo $Oxyz$, com origem em $O = (0, 0, 0)$, no qual um ponto $A = (x, y, z)$ tem como vetor posição o vetor $\mathbf{r}_A = (x(t), y(t), z(t))$, com $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ funções com relação ao tempo ao longo dos eixos x , y e z respectivamente. Com o objetivo de deixar os cálculos mais simplificados será omitida a variável das funções com relação ao tempo, ou seja, um vetor posição \mathbf{r}_A será representado apenas como $\mathbf{r}_A = (x, y, z)$.

Desta forma, dados dois pontos A_1 e A_2 quaisquer de um corpo rígido, com coordenadas $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$ com relação aos sistema $Oxyz$, pode-se definir os vetores posição $\mathbf{r}_{A_1} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{r}_{A_2} = (x_2, y_2, z_2)$ relacionados respectivamente a A_1 e A_2 , como mostrado na Figura 3.3. Considerando um outro sistema de referencial ortogonal $A_1x'y'z'$ cuja origem é o ponto A_1 podemos escrever um vetor \mathbf{r}_{A_2/A_1} , que relaciona os pontos A_1 e A_2 , formando um vetor posição de A_2 com relação a A_1 , no qual o ponto final do vetor \mathbf{r}_A (o ponto A_1) coincide com o ponto inicial do vetor \mathbf{r}_{A_2/A_1} .

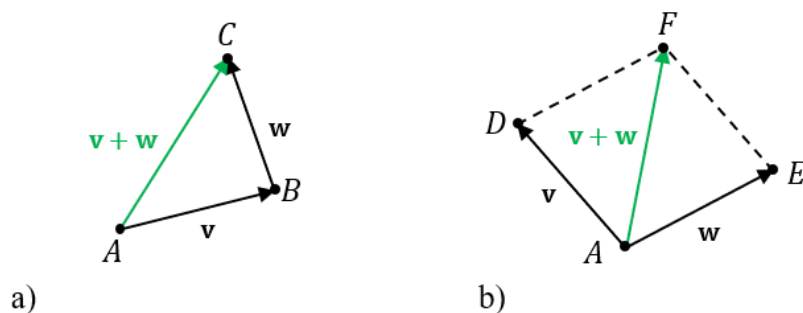
Figura 3.3 - Vetores posição \mathbf{r}_{A_1} e \mathbf{r}_{A_2} em um corpo rígido.



Fonte: Autoria Própria (2019).

A soma de dois vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} pode ser definida de duas maneiras. A primeira consiste em representar o vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ e o vetor $\mathbf{w} = \overrightarrow{BC}$, onde o ponto final do vetor \mathbf{v} coincide com o ponto inicial do vetor \mathbf{w} , e o vetor soma $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$ consiste no ponto inicial de \mathbf{v} com o ponto final de \mathbf{w} , como pode ser observado na Figura 3.4a. A segunda consiste em representar os vetores $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{AE}$, com o mesmo ponto inicial, e o vetor soma $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{AF}$ como sendo a diagonal que parte de A até F do paralelogramo cujos lados paralelos são AD e AE (Ver Figura 3.4b) (LIMA, 2014).

Figura 3.4 - Soma de dois vetores.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Observando a Figura 3.3 podem-se relacionar os vetores posição \mathbf{r}_{A_1} , \mathbf{r}_{A_2} e \mathbf{r}_{A_2/A_1} a partir das somas de vetores.

Desta forma, tem-se

$$\mathbf{r}_{A_2} = \mathbf{r}_{A_1} + \mathbf{r}_{A_2/A_1}. \quad (3.1)$$

Os vetores podem ser representados por matrizes colunas, matrizes que possuem apenas uma coluna. Essas matrizes são relacionadas as coordenadas do vetor, desta forma um vetor $\mathbf{r} = (u, v, w)$ pode ser representado pela matriz $[\mathbf{r}]_{3 \times 1}$, uma matriz com três linhas e uma coluna,

$$[\mathbf{r}]_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Logo, a equação (3.1) pode ser rescrita em função das coordenadas dos vetores como matrizes da ordem 3×1 , fazendo $\mathbf{r}_{A_2/A_1} = (x_{1/2}, y_{1/2}, z_{1/2})$, tem-se

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{1/2} \\ y_{1/2} \\ z_{1/2} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Um corpo que possui o seu movimento definido como uma função do tempo, de modo que o corpo percorre $s(t)$ até um instante t . No intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, o corpo tem um deslocamento de $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, e a velocidade média nesse intervalo é obtida pelo quociente entre o deslocamento e o intervalo de tempo,

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Desta forma, para se obter a velocidade instantânea do corpo no instante t basta fazer Δt se aproximar de 0, aplicando no limite,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Em particular, para um vetor posição a velocidade pode ser obtida pela derivada do vetor com relação ao tempo. Como cada coordenada do vetor é função do tempo, a derivada é obtida pela derivada de cada uma das coordenadas de forma independente, ou seja, para um vetor $\mathbf{r} = (u, v, w)$, tem-se

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}$$

Desta forma, matematicamente, para encontrar o vetor velocidade basta derivar a equação (3.1) com relação ao tempo. Pela regra da soma das derivadas, a derivada do vetor \mathbf{r}_{A_2} será a soma da derivada do vetor \mathbf{r}_{A_1} com a derivada do vetor do \mathbf{r}_{A_2/A_1} . Pela definição de translação (Seção 3.1), o vetor \mathbf{r}_{A_2/A_1} , que pode ser interpretado geometricamente como uma linha reta que liga dois pontos do corpo, se mantém constante durante todo o movimento. Uma vez que a derivada de uma função constante é igual a zero, tem-se que a derivada do vetor \mathbf{r}_{A_2/A_1} com relação ao tempo também será igual a zero, (BEER; JOHNSTON JUNIOR; CORNWELL, 2012).

Desta forma, tem-se

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_{A_2} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_{A_1} + \mathbf{r}_{A_2/A_1}) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{A_1} + \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{A_2/A_1} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{A_1},$$

denotando como \mathbf{v}_{A_2} o vetor velocidade do ponto A_2 e \mathbf{v}_{A_1} o vetor velocidade do ponto A_1 , assim, tem-se como equação do vetor velocidade

$$\mathbf{v}_{A_2} = \mathbf{v}_{A_1}. \quad (3.3)$$

Desta forma, o vetor velocidade tem direção tangente a curva, e o sentido é determinado pela regra da mão direita. Em termos das coordenadas do vetor, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

O conceito de aceleração é análogo ao conceito de velocidade, nesse sentido a aceleração média no intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$ é dada por

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

na qual $v(t)$ é a função velocidade com relação ao tempo.

Para obtermos a aceleração instantânea no instante t basta fazer Δt se aproximar de 0, aplicando no limite, tem-se

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}(t)$$

De modo análogo, para obter o vetor aceleração basta derivar a equação (3.3) com relação ao tempo, assim tem-se

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_{A_2} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_{A_1}$$

denotando \mathbf{a}_{A_2} como o vetor aceleração e do ponto A_2 e \mathbf{a}_{A_1} o vetor aceleração do ponto A_1 , assim, tem-se como equação do vetor aceleração

$$\mathbf{a}_{A_2} = \mathbf{a}_{A_1}. \quad (3.5)$$

Em termos de coordenadas, tem-se

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Assim pelas equações (3.1), (3.3) e (3.5) podemos concluir que um corpo rígido em translação possui a mesma velocidade e aceleração em todos os seus pontos.

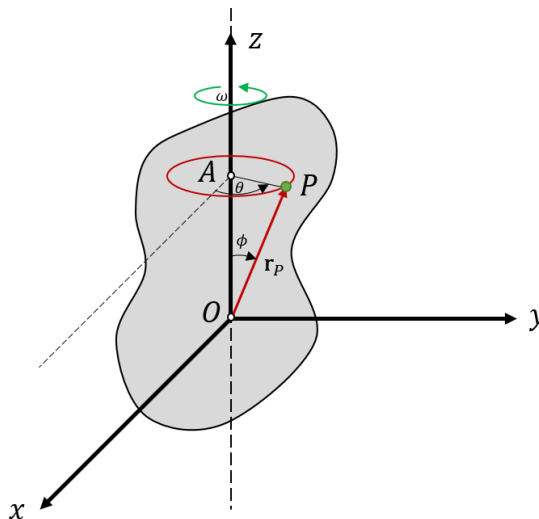
3.1.2. Rotação em torno de um eixo fixo

Para as equações relacionadas ao movimento de rotação, será considerado um sistema de referencial ortogonal fixo $Oxyz$, com origem em $O = (0, 0, 0)$.

Seja $P = (x, y, z)$, com x, y e z funções da variável tempo, um ponto de um corpo rígido que realiza o movimento de rotação em torno do eixo z (Ver Figura 3.5), tem-se que o vetor posição \mathbf{r}_P do ponto P com relação ao sistema $Oxyz$ é o vetor que vai da origem O até o ponto P de modo que $\mathbf{r}_P = (x, y, z)$.

Pela própria definição do movimento de rotação, o ponto P deve realizar uma trajetória circular, de modo que o centro dessa circunferência estará sobre o eixo z . Desta forma, essa circunferência está contida em um plano paralelo ao plano xy de tal sorte que o seguimento formado pelo centro da circunferência e o ponto P será perpendicular ao eixo z . Denotando esse centro pelo ponto A e o ângulo formado entre \mathbf{r}_P e o eixo z por ϕ , o raio dessa circunferência pode ser calculado observando o triângulo retângulo AOP (Ver Figura 3.5), no qual o seguimento OP é a hipotenusa e o seguimento AP é o raio da circunferência de centro em A que passa pelo ponto P . Seja r o comprimento do vetor \mathbf{r}_P tem-se, pelas relações trigonométricas, que o segmento AP será igual a $r \sin \phi$.

Figura 3.5 - Rotação em torno de um eixo fixo.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Seja a coordenada angular do corpo $\theta = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$, com θ_x, θ_y e θ_z funções com relação ao tempo, o ângulo formado pelo plano zx com o segmento AP (Ver Figura 3.5) tem-se que o vetor velocidade angular ω é obtida, matematicamente, a partir da derivada de θ com relação ao tempo, de modo que $\omega = (\dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_z)$, com direção ao longo do eixo de rotação e o sentido obtido pela regra da mão direita.

Para obter o vetor velocidade \mathbf{v}_P do ponto P , basta obter a derivada do vetor posição \mathbf{r}_P com relação ao tempo. De modo que o vetor velocidade será tangente a trajetória, ou seja, o vetor velocidade será perpendicular ao vetor posição. Além disso, o vetor velocidade será ortogonal ao vetor velocidade angular, uma vez que esse tem direção ao longo do eixo z . Desta forma, o vetor \mathbf{v}_P será ortogonal aos vetores ω e \mathbf{r}_P .

Sabendo que dado dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{w} , o produto vetorial entre estes vetores, representado por $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$, resulta no vetor ortogonal aos vetores \mathbf{u} e \mathbf{w} . Pode-se relacionar os ω e \mathbf{r}_P ao vetor \mathbf{v}_P a partir do produto vetorial $\omega \times \mathbf{r}_P$, assim tem-se

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \omega \times \mathbf{r}_P. \quad (3.7)$$

Em termos das coordenadas

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_y z - \dot{\theta}_z y \\ \dot{\theta}_z x - \dot{\theta}_x z \\ \dot{\theta}_x y - \dot{\theta}_y x \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

O vetor aceleração \mathbf{a}_P da partícula P é determinada pela derivada da Equação (3.7) com relação ao tempo. Assim, pela regra do produto da derivada tem-se

$$\mathbf{a}_P = \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \times \mathbf{r}_P) = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r}_P + \omega \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r}_P + \omega \times \mathbf{v}_P$$

denotando o vetor aceleração angular por α e como $\mathbf{v}_P = \omega \times \mathbf{r}_P$ tem-se,

$$\mathbf{a}_P = \alpha \times \mathbf{r}_P + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_P). \quad (3.9)$$

Em termos das coordenadas

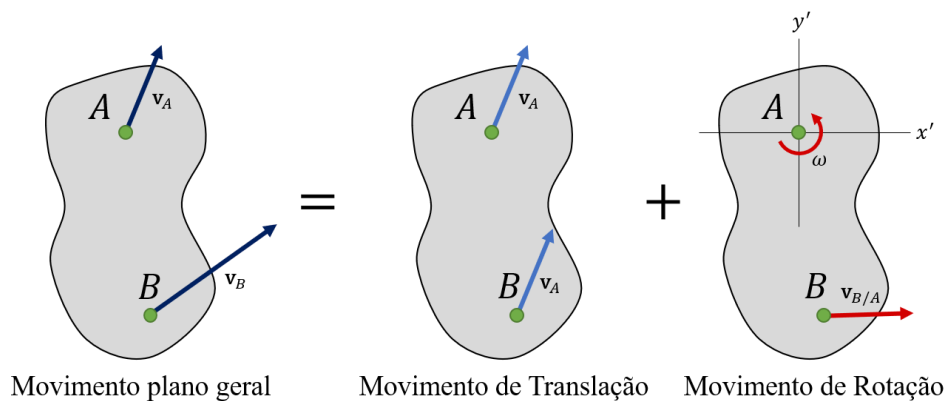
$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_y z - \ddot{\theta}_z y \\ \ddot{\theta}_z x - \ddot{\theta}_x z \\ \ddot{\theta}_x y - \ddot{\theta}_y x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_y(\dot{\theta}_x y - \dot{\theta}_y x) - \dot{\theta}_z(\dot{\theta}_z x - \dot{\theta}_x z) \\ \dot{\theta}_z(\dot{\theta}_y z - \dot{\theta}_z y) - \dot{\theta}_x(\dot{\theta}_x y - \dot{\theta}_y x) \\ \dot{\theta}_x(\dot{\theta}_z x - \dot{\theta}_x z) - \dot{\theta}_y(\dot{\theta}_y z - \dot{\theta}_z y) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Desta forma, o vetor aceleração pode ser dividido em duas componentes, $\mathbf{a}_t = \alpha \times \mathbf{r}_P$ e $\mathbf{a}_n = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_P)$. A componente \mathbf{a}_t é denominada aceleração tangencial e tem direção paralela ao vetor velocidade e o sentido depende do movimento, se o movimento for acelerado o sentido é o mesmo do vetor velocidade, se o movimento for retardado o sentido é contrário ao do vetor velocidade. Já a componente \mathbf{a}_n é denominada aceleração normal, ou centrípeta, e tem direção normal a trajetória, ou seja, ortogonal ao vetor velocidade e o sentido é para o centro da trajetória.

3.1.3. Movimento plano geral

Como visto na seção 3.1, um corpo rígido pode estar submetido a uma combinação dos movimentos de translação e rotação. Dessa forma, qualquer movimento plano de um corpo rígido pode ser dividido em um movimento de translação em relação a um ponto de referência arbitrária A e por uma rotação simultânea em torno desse ponto A , como pode ser observado na Figura 3.6.

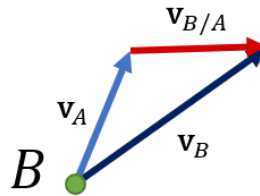
Figura 3.6 - Movimento plano geral.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Pela Figura 3.6 tem-se, \mathbf{v}_B como sendo o vetor velocidade de uma partícula qualquer B de um corpo rígido submetido ao movimento geral do plano, \mathbf{v}_A o vetor velocidade do corpo rígido relacionado ao movimento de translação, e $\mathbf{v}_{B/A}$ como o vetor velocidade da partícula B no movimento de rotação em torno de um ponto A com velocidade angular de ω . Assim, esses vetores podem ser relacionados segundo a soma vetorial apresentada na Figura 3.7.

Figura 3.7 - Vetores \mathbf{v}_B , \mathbf{v}_A e $\mathbf{v}_{B/A}$ do movimento plano geral.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Desta forma, o vetor velocidade \mathbf{v}_B pode ser obtido por

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}. \quad (3.11)$$

Como o vetor $\mathbf{v}_{B/A}$ está associado ao movimento de rotação, tem-se pela equação (3.7) que este vetor é obtido pelo produto vetorial do vetor aceleração angular e um vetor relativo a posição, assim denotando por $\mathbf{r}_{B/A}$ o vetor posição de B relativo a A , tem-se

$$\mathbf{v}_{B/A} = \omega \times \mathbf{r}_{B/A} \quad (3.12)$$

Substituído a equação (3.12) na equação (3.11),

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{B/A}. \quad (3.13)$$

Da mesma forma, para a aceleração tem-se

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}. \quad (3.14)$$

Na qual, \mathbf{a}_B é o vetor aceleração do movimento geral no plano, \mathbf{a}_A o vetor aceleração do corpo rígido com relação ao movimento de translação e $\mathbf{a}_{B/A}$ o vetor aceleração da partícula B com relação ao movimento de rotação.

Dessa forma, pela equação (3.9), tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{B/A} &= (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n \\ \mathbf{a}_{B/A} &= \alpha \times \mathbf{r}_{B/A} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{B/A}).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Substituindo a equação (3.15) na equação (3.14), tem-se que a aceleração de uma partícula B de um corpo rígido submetido ao movimento geral no plano é dada pela equação

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{B/A} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{B/A}).\tag{3.16}$$

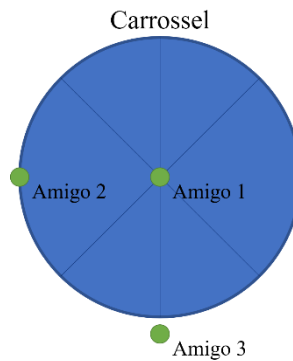
3.2. ACELERAÇÃO DE CORIOLIS

Além dos sistemas de referência inercial existem os sistemas chamados não-inerciais que são sistemas nos quais as leis de Newton não se aplicam, um caso particular de um sistema não-inercial é o sistema de referência em rotação que se encontra em rotação relativa a um referencial inercial.

Para estudar um movimento em um referencial não inercial pode-se adaptar as leis de Newton acrescentando as chamadas forças fictícias. As forças fictícias também recebem o nome de força d'Alembert ou ainda força inercial e são um efeito que pode ser percebido por um observador em repouso, são exemplos dessas forças a força centrífuga e a força de Coriolis. A força centrífuga atuará na direção do raio para fora da curva enquanto a força de Coriolis tenderá a desviar lateralmente o movimento do corpo.

Um exemplo da ação da força de Coriolis, pode ser observado em um carrossel. Imagine três amigos, dois em cima de um carrossel e o terceiro fora do carrossel observando os outros dois, como apresentado na Figura 3.8. Com o carrossel parado o Amigo 1 joga uma bola em direção ao Amigo 2, desprezando qualquer ação do vento, a bola realiza uma trajetória retilínea em direção ao Amigo 2. Quando o carrossel é colocado em movimento, o Amigo 1 lança novamente a bola em direção ao Amigo 2. Para o Amigo 3, referencial inercial, a bola continua fazendo uma trajetória retilínea, no entanto para o Amigo 2, referencial em rotação, a bola passa a ter uma trajetória curva. Assim, a “força” responsável por esse efeito é a força de Coriolis.

Figura 3.8 - Exemplo da ação da força de Coriolis.

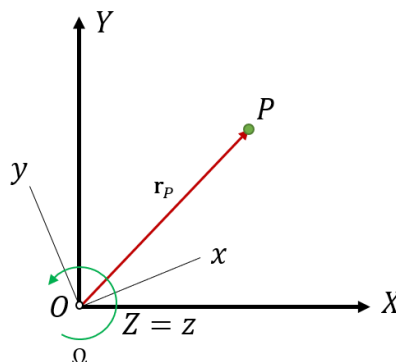


Fonte: Autoria Própria (2019).

No quadrotor esse efeito surge ao estudar os diversos sistemas de referência que envolve o quadrotor, entre os sistemas têm-se os sistemas inerciais e rotativos. Esses sistemas serão apresentados na seção 4.2.2.

Considerando, dois sistemas de referência centrados em $O = (0, 0, 0)$ como mostrado na Figura 3.9, um fixo $OXYZ$ e um rotativo $Oxyz$, no qual o sistema rotativo tem velocidade angular Ω com relação ao sistema inercial. Dado uma partícula P cujo vetor posição em relação ao referencial em rotação é $\mathbf{r}_r = (x_r(t), y_r(t), z_r(t))$, com $x_r(t)$, $y_r(t)$ e $z_r(t)$ funções do tempo e o vetor com relação ao referencial fixo é $\mathbf{r}_f = (x_f(t), y_f(t), z_f(t))$, com $x_f(t)$, $y_f(t)$ e $z_f(t)$ funções do tempo.

Figura 3.9 - Sistemas de coordenadas $OXYZ$ e $Oxyz$.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Com relação aos vetores unitários i , j e k do sistema $OXYZ$, o vetor \mathbf{r}_f pode ser escrito como,

$$\mathbf{r}_f = x_f \mathbf{i} + y_f \mathbf{j} + z_f \mathbf{k},$$

na qual esses vetores unitários são constantes com relação ao tempo. De forma semelhante, o vetor \mathbf{r}_r pode ser escrito em relação aos vetores unitários i_r , j_r e k_r , no entanto, esses vetores unitários variam de posição e sentido com relação ao tempo,

$$\mathbf{r}_r = x_r i_r + y_r j_r + z_r k_r,$$

dessa forma, para se obter o vetor velocidade da partícula \mathbf{v}_P com relação ao sistema inercial basta obter a derivada do vetor posição \mathbf{r}_f com relação ao tempo, ou seja,

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{r}_f}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{z}_f \end{bmatrix}$$

em termos dos vetores unitários

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{r}_f}{dt} = \frac{dx_f}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_f}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz_f}{dt} \mathbf{k} = \dot{x}_f \mathbf{i} + \dot{y}_f \mathbf{j} + \dot{z}_f \mathbf{k}.$$

Assumindo, o mesmo vetor posição para ambos os sistemas, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_f = \mathbf{r}_r$, tem-se que a velocidade da partícula P com relação ao sistema em rotação,

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x_r i_r + y_r j_r + z_r k_r) = \frac{d}{dt} (x_r i_r) + \frac{d}{dt} (y_r j_r) + \frac{d}{dt} (z_r k_r),$$

como os vetores unitários i_r , j_r e k_r são função do tempo, deve se aplicar a regra da derivada do produto, dessa forma, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \frac{dx_r}{dt} i_r + x_r \frac{di_r}{dt} + \frac{dy_r}{dt} j_r + y_r \frac{dj_r}{dt} + \frac{dz_r}{dt} k_r + z_r \frac{dk_r}{dt} \\ \mathbf{v}_P &= \left(\frac{dx_r}{dt} i_r + \frac{dy_r}{dt} j_r + \frac{dz_r}{dt} k_r \right) + \left(x_r \frac{di_r}{dt} + y_r \frac{dj_r}{dt} + z_r \frac{dk_r}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (3.17)$$

na qual o vetor \mathbf{v}_r é a velocidade da partícula com relação ao sistema de referencial rotativo e $\boldsymbol{\Omega}$ é o vetor velocidade angular do sistema rotativo.

Em termos, das coordenadas dos vetores na forma de matriz, assumindo o vetor velocidade angular do sistema rotativo como sendo $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{z}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{z}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_y z_r - \Omega_z y_r \\ \Omega_z x_r - \Omega_x z_r \\ \Omega_x y_r - \Omega_y x_r \end{bmatrix}.$$

Assim o vetor aceleração \mathbf{a}_P da partícula é definido pela derivada de \mathbf{v}_P com relação ao tempo. Desta forma, considerando a regra do produto, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \\ \mathbf{a}_P &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \end{aligned}$$

sendo que a derivada do vetor \mathbf{v}_r pode ser obtida de modo análogo ao do vetor \mathbf{r} , assim a derivada de \mathbf{v}_r pode ser expressa como

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{v}_r] = \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r \quad (3.18)$$

na qual \mathbf{a}_r é o vetor aceleração da partícula P com relação ao sistema de coordenadas em rotação. Por fim, a aceleração absoluta da partícula P é definida como:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r \\ \mathbf{a}_P &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r) + \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r \\ \mathbf{a}_P &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r \\ \mathbf{a}_P &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como visto na seção 3.1.3 na equação (3.15) os termos $\dot{\Omega} \times \mathbf{r}$ e $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ correspondem respectivamente as componentes tangenciais e normais da aceleração e o termo \mathbf{a}_r corresponde à aceleração com relação ao sistema de referência Oxy . Comparando com a equação (3.16) a equação (3.19) apresenta um termo desconhecido, que é o termo $2\Omega \times \mathbf{v}_r$, a esse termo denotaremos de aceleração de Coriolis. A aceleração de Coriolis é o termo responsável pelo efeito da força de Coriolis.

3.3. DINÂMICA DOS CORPOS RÍGIDOS

A dinâmica dos corpos rígidos tem como finalidade o estudo das relações que existem entre as forças que atuam sobre um corpo rígido, bem como a forma e a massa desse corpo e o movimento resultante (BEER; JOHNSTON JUNIOR; CORNWELL, 2012).

Um corpo entra em movimento quando uma força age sobre ele, desta forma pode-se definir a força como uma ação capaz de alterar o estado de inércia de um corpo e modificar a sua velocidade.

Em uma partida de cabo de guerra o objetivo é puxar o grupo oponente através de uma corda, ganhando o grupo que conseguir puxar o adversário até uma região demarcada. Dessa forma, a corda realiza um movimento de acordo com as forças realizadas pelos componentes dos grupos disputantes, assim diz-se que o movimento da corda é o resultado do somatório de todas as forças que agem sobre ela.

No caso do quadrotor, o movimento é o resultado das forças internas e externas da qual o quadrotor está submetido. Um exemplo de forças internas é a força gerada pelos quatro rotores e um exemplo de força externa é a força de arrasto. Neste trabalho não serão detalhadas as ações dessas forças.

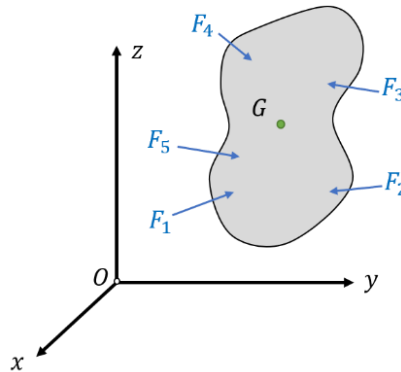
3.3.1. Equações de movimento para um corpo rígido

Um corpo rígido pode estar sob a ação de diversas forças externas como mostrado na Figura 3.10. Assumindo um sistema de coordenadas newtoniano $Oxyz$, o movimento resultante pode ser obtido pelo somatório de todas as forças envolvidas, dessa forma tem-se

$$\sum F = m\mathbf{a}_G \quad (3.20)$$

na qual m é a massa total do corpo e \mathbf{a}_G é a aceleração do centro de massa G (BEER; JOHNSTON JUNIOR; CORNWELL, 2012).

Figura 3.10 - Ação de diferentes forças sobre um corpo rígido.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Quando uma força é aplicada em um corpo de modo a gerar um movimento de rotação, diz-se que o corpo está submetido a um torque. Um exemplo no qual um torque é gerado, se dá durante a utilização de uma chave de boca para afrouxar um parafuso, ao aplicar uma força na haste da chave um torque é gerado de modo a colocar o parafuso em rotação.

Assim com relação ao centro de massa G estas forças geram diferentes torques e o somatório destes torques com relação ao centro de massa pode ser definido como

$$\sum M_G = \bar{J}_G \alpha \quad (3.21)$$

na qual α é a aceleração angular e \bar{J}_G o momento de inércia, muitas vezes o momento de inércia é denotado por I , porém, neste trabalho será utilizado a notação J para não confundir com o conceito de matriz identidade.

3.3.2. Momento de Inércia

Todo corpo possui tamanho e forma bem definidos, o momento de inércia é uma medida da resistência de um corpo ao movimento de rotação quando é submetido a uma aceleração angular. O momento de inércia varia conforme o tamanho, a massa e de como essa massa está distribuída pelo corpo (HIBBELER, 2011).

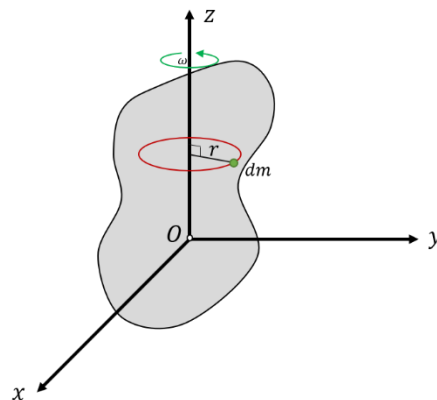
O efeito do momento de inércia pode ser observado durante o movimento de uma bailarina. Quando ela gira em torno da ponta do pé realiza um movimento de rotação, ao girar com o braço encostado ao corpo, a resistência a rotação diminui e sua velocidade angular aumenta, girando mais rápido. Quando a bailarina abre os braços, ela aumenta a resistência a rotação diminuindo sua velocidade angular, girando mais devagar. Esses efeitos ocorrem porque ao fechar os braços, a bailarina concentra sua massa em relação ao eixo de rotação, diminuindo seu momento de inércia e ao abrir os braços a bailarina distribui a sua massa, aumentando o momento de inércia.

Por definição o momento de inércia pode ser determinado por

$$J = \int_m r^2 dm, \quad (3.22)$$

ou seja, a integral do quadrado da distância r do elemento de massa dm em relação ao eixo z como mostrado na Figura 3.11, de todos os elementos de massa dm que compõem o corpo rígido, onde r é a distância (HIBBELER, 2011).

Figura 3.11 - Cálculo do momento de inércia.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Dessa forma, o momento de inércia varia conforme se dá a distribuição da massa em um corpo, um método prático de se obter de maneira aproximada o momento de inércia de um objeto qualquer é utilizando o princípio da conservação do momento angular, ou quantidade de movimento angular. Esse princípio, estabelece, para um objeto em rotação em torno de um eixo fixo, que o produto entre momento de inércia e a velocidade angular permanece constante durante o movimento de rotação em torno de um eixo fixo. Esse método consiste em utilizar

um disco que gira em torno do seu centro de massa sobre uma estrutura com o mínimo atrito, um objeto cujo momento de inércia é conhecido e outro cujo momento de inércia é desconhecido.

Denotando por O o objeto que se deseja encontrar o momento de inércia J_O com relação ao seu centro de massa, por P o objeto que se conhece o momento de inércia J_P com relação ao seu centro de massa e D o disco cujo momento de inércia com relação ao seu centro de massa pode ser obtido por $J_D = \frac{1}{2}MR^2$, na qual M é a massa do disco e R é o raio do disco. Os objetos são apresentados na Figura 3.12. De modo que o momento de inércia do conjunto com relação ao centro de massa será igual a $J_C = J_O + J_P + J_D$, na qual apenas J_O é desconhecido.

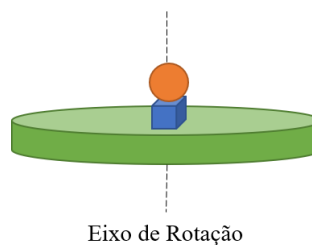
Figura 3.12 - Objetos utilizados para a determinar o momento de inércia.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Inicialmente deve se colocar os objetos sobre disco para girar com relação ao centro de massa do conjunto, como apresentado na Figura 3.13, e medida a velocidade angular. De modo que o momento angular será $\mathbf{H}_{G_1} = J_{C_1} \omega_1$, na qual J_{C_1} é o momento de inércia do conjunto com relação ao centro de massa do conjunto, ou seja, $J_{C_1} = J_O + J_P + J_D$ e ω_1 é a velocidade angular do conjunto.

Figura 3.13 - Objetos O , D e P em rotação com relação ao centro de massa.

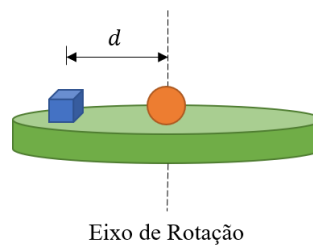


Fonte: Autoria Própria (2019).

Em seguida, deve-se alterar a posição do objeto P , como apresentado na Figura 3.14, e colocado o conjunto novamente para girar em torno do mesmo eixo de rotação, medindo a nova velocidade angular. Dessa forma, entre os momentos de inércia, apenas o momento de inércia do objeto P será alterado e o novo momento de inércia J_{P_2} pode ser obtido pelo teorema dos

eixos paralelos $J_{P_2} = J_P + M_P d^2$, na qual M_P é a massa do objeto P e d a distância do eixo de rotação ao centro de massa do objeto (Ver Figura 3.14). Por fim, o momento angular, após a alteração na posição do objeto P , pode ser obtido $\mathbf{H}_{G_2} = J_{C_2} \omega_2$, na qual J_{C_2} é o momento de inércia do conjunto com relação ao mesmo eixo de rotação anterior, ou seja, $J_{C_2} = J_O + J_{P_2} + J_D = J_O + J_P + M_P d^2 + J_D$ e ω_2 é a velocidade angular do conjunto após a alteração.

Figura 3.14 - Objetos O , D e P em rotação após a alteração da posição do objeto P



Fonte: Autoria Própria (2019).

Pela conservação do momento angular tem-se $\mathbf{H}_{G_1} = \mathbf{H}_{G_2}$, pode-se determinar o momento de inércia J_O , uma vez que as demais variáveis envolvidas no processo são conhecidas. Para obter com relação aos demais eixos de rotação, basta rotacionar o objeto O e realizar o mesmo procedimento.

No quadrotor a massa está concentrada nas regiões dos quatro rotores e o momento de inércia varia com relação aos eixos x , y e z .

3.3.2.1. Tensor de inércia

O momento de inércia está relacionado ao movimento de rotação em relação a um único eixo de rotação, dessa forma a generalização do momento de inércia de um corpo para os três eixos de rotação se dá através de uma matriz de ordem 3×3 conhecida como tensor de inércia ou ainda matriz de inércia. A seguir será desenvolvida o tensor de inércia de um corpo rígido com centro de massa num ponto G , sendo considerado um sistema ortogonal $OXYZ$ com origem em $O = (0, 0, 0)$ e um sistema ortogonal $Gxyz$ cuja a origem é o centro de massa do corpo rígido.

A equação (3.21) pode ser escrita em função do momento angular \mathbf{H}_G de um corpo em torno de seu centro de massa G , assim a equação (3.21) torna-se

$$\sum M = \dot{\mathbf{H}}_G, \quad (3.23)$$

por sua vez, o momento angular de uma partícula é definido pelo produto vetorial do vetor posição da partícula pelo seu momento linear, na qual o momento linear é o produto da massa pelo vetor velocidade. Desse modo, tem-se que o momento angular de uma partícula P é da forma

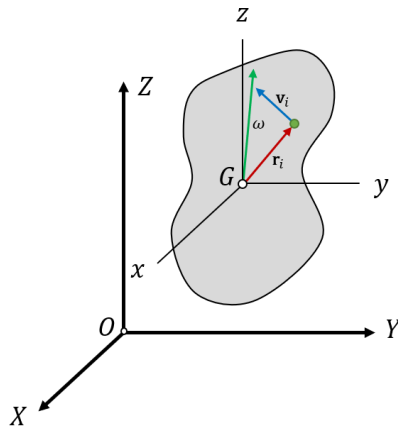
$$\mathbf{H}_P = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}, \quad (3.24)$$

já a quantidade de movimento angular de corpo rígido pode ser obtido pela soma de todos os momentos angulares de cada partícula que compõem esse corpo, ou seja,

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) \Delta m_i \quad (3.25)$$

na qual \mathbf{r}_i e \mathbf{v}_i são respectivamente o vetor posição e o vetor velocidade da partícula P_i com relação ao sistema de coordenadas $Gxyz$ e tem massa igual a Δm_i (ver Figura 3.15). Aqui Δm_i tem papel de um escalar e, diferente do usual apresentado na (3.24), está posicionado ao final do produto vetorial para aparecer a soma de Riemann, para que esse somatório seja interpretado como uma integral de Riemann.

Figura 3.15 - Vetor posição e o vetor velocidade da partícula P_i .



Fonte: Autoria Própria (2019).

Como visto na seção 3.1.2 o vetor velocidade de uma partícula em rotação é obtido pelo produto vetorial da aceleração angular com o vetor posição $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, dessa forma a equação (3.25) torna-se,

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) \Delta m_i. \quad (3.26)$$

Seja $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ tem-se que o produto vetorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ é, termos de coordenadas,

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} \omega_y z_i - \omega_z y_i \\ \omega_z x_i - \omega_x z_i \\ \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{bmatrix}$$

e o produto vetorial $\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$ é, em termos de coordenadas,

$$\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \begin{bmatrix} y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i) \\ z_i(\omega_y z_i - \omega_z y_i) - x_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) \\ x_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i) - y_i(\omega_y z_i - \omega_z y_i) \end{bmatrix}$$

logo a equação (3.26) em termos das coordenadas será,

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i) \\ z_i(\omega_y z_i - \omega_z y_i) - x_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) \\ x_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i) - y_i(\omega_y z_i - \omega_z y_i) \end{bmatrix} \Delta m_i. \quad (3.27)$$

Separando a equação (3.27) para a componente x , tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x &= \sum_{i=1}^n [y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i)] \Delta m_i \\ \mathbf{H}_x &= \omega_x \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) \Delta m_i - \omega_y \sum_{i=1}^n x_i y_i \Delta m_i - \omega_z \sum_{i=1}^n x_i z_i \Delta m_i \end{aligned}$$

de modo análogo para os eixos y e z , e fazendo Δm_i muito pequeno, ou seja $\Delta m_i \rightarrow 0$, temos que as somas de Riemann tornam-se as integrais de Riemann, dessa forma

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x &= \omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int (xy) dm - \omega_z \int (xz) dm \\ \mathbf{H}_y &= -\omega_x \int (yx) dm + \omega_y \int (x^2 + z^2) dm - \omega_z \int (yz) dm \\ \mathbf{H}_z &= -\omega_x \int (zx) dm - \omega_y \int (zy) dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Assim as integrais das equações (3.28) representam diferentes momentos de inércia do corpo, com relação aos diferentes referenciais. Portanto, as equações (3.28) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x &= \bar{J}_x \omega_x - \bar{J}_{xy} \omega_y - \bar{J}_{xz} \omega_z \\ \mathbf{H}_y &= -\bar{J}_{yx} \omega_x + \bar{J}_y \omega_y - \bar{J}_{yz} \omega_z \\ \mathbf{H}_z &= -\bar{J}_{zx} \omega_x - \bar{J}_{zy} \omega_y + \bar{J}_z \omega_z \end{aligned} \quad (3.29)$$

na qual, \bar{J}_x , \bar{J}_y e \bar{J}_z são os momentos de inércia com relação aos eixos x , y e z respectivamente. e os termos \bar{J}_{xy} , \bar{J}_{xz} e \bar{J}_{yz} são chamados produtos de inércia e medem a antissimétrica da distribuição de massa de um corpo em relação a um par de eixos, dessa forma no caso de objetos simétricos com relação aos eixos tem-se que $\bar{J}_{xy} = \bar{J}_{xz} = \bar{J}_{yz} = 0$.

Escrevendo a equação (3.29) na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \\ \mathbf{H}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_x & -\bar{J}_{xy} & -\bar{J}_{xz} \\ -\bar{J}_{yx} & \bar{J}_y & -\bar{J}_{yz} \\ -\bar{J}_{zx} & -\bar{J}_{zy} & \bar{J}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = J\omega \quad (3.30)$$

na qual a matriz J define o tensor de inércia.

No caso do quadrotor será considerada a simetria com relação aos eixos, dessa forma, os produtos de inércia são nulos e a matriz de inércia se resume a uma matriz diagonal de ordem 3×3 cujos elementos da diagonal são os momentos de inércia com relação aos eixos x , y e z respectivamente.

3.4. REFERENCIAIS EM ROTAÇÃO

Como visto na Secção 0, os referenciais podem estar sob o movimento de rotação, os chamados referenciais não inerciais. Do ponto de vista matemático, podemos definir uma rotação como uma transformação linear envolvendo dois sistemas de referência, um inercial e outro rotacionado.

Uma transformação linear é uma função que associa a cada vetor \mathbf{v} , pertencente a um espaço vetorial V , um outro vetor \mathbf{w} pertencente a um espaço vetorial W , $T: V \rightarrow W$, e além disso são satisfeitas para qualquer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ as relações

$$\begin{aligned}T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) \\T(\alpha\mathbf{v}_1) &= \alpha T(\mathbf{v}_1)\end{aligned}$$

na qual, $T(\mathbf{v})$ é chamado de imagem de \mathbf{v} pela transformação T (LIMA, 2014).

Um espaço vetorial, por sua vez, é um conjunto de elementos no qual estão definidas duas operações: a adição e a multiplicação por um número real. A todos os elementos deste conjunto dão-se o nome de vetores. A adição faz corresponder a cada dois vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ um outro vetor $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$. A multiplicação por um escalar, dado um $\alpha \in \mathbb{R}$, faz corresponder a cada vetor $\mathbf{v} \in V$ um outro vetor $\alpha\mathbf{v} \in V$ (LIMA, 2014).

Além disso, essas operações devem satisfazer as propriedades de comutatividade; associatividade; existência de elementos neutros das operações; existência de simétrico e distributividade, isto é, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ vale os seguintes axiomas:

- i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (comutatividade);
- ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ e $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$ (associatividade);
- iii) existe um vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$ (vetor nulo, elemento neutro da soma de vetores);
- iv) para cada vetor $\mathbf{v} \in V$ existe um vetor $-\mathbf{v} \in V$, chamado de simétrico \mathbf{v} , tal que $-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ (inverso aditivo);
- v) $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ e $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{u}$ (distributividade);
- vi) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ (multiplicação por 1, elemento neutro da multiplicação por um escalar).

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é dito linearmente independente (LI) se a combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ que resulta no vetor nulo implica necessariamente em todos os escalares serem nulos, isto é, dada a combinação

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que os vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ são linearmente dependentes (LD) (BOLDRINI et al., 1980).

Dito isto, pode-se definir uma base de um espaço vetorial como um conjunto finito de vetores linearmente independentes tais que qualquer outro vetor de V seja combinação linear deles, assim um conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de vetores de V será uma base de V se o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ gera V e são LI (STEINBRUCH; WINTERLE, 1995).

Uma transformação linear pode ser associada a uma matriz denominada matriz de transformação, uma vez que matrizes permitem representar transformações lineares arbitrárias de forma organizada e consistente, de fácil manipulação e implementação computacional. A seguir será apresentada a obtenção geral de uma matriz de transformação.

3.4.1. Matriz de uma Transformação linear

Considerando uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ com $\beta_V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de V e $\beta_W = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ uma base de W , um vetor $\mathbf{v} \in V$ pode ser escrito como

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$$

e a imagem $T(\mathbf{v}) \in W$ como

$$T(\mathbf{v}) = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 + \dots + y_m\mathbf{w}_m$$

por outro lado,

$$T(\mathbf{v}) = T(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) = x_1T(\mathbf{v}_1) + x_2T(\mathbf{v}_2) + \dots + x_nT(\mathbf{v}_n).$$

Como $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_n) \in W$,

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m \\
T(\mathbf{v}_2) &= a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\
&\vdots \\
T(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m
\end{aligned}$$

tem-se que,

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{v}) &= x_1(a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m) + x_n(a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m) \\
T(\mathbf{v}) &= (x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n})\mathbf{w}_1 + \cdots + (x_1a_{m1} + \cdots + x_na_{mn})\mathbf{w}_m
\end{aligned}$$

como $T(\mathbf{v}) = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 + \cdots + y_m\mathbf{w}_m$ e todo vetor é escrito de maneira única como combinação dos vetores de uma base

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n} \\
y_2 &= x_1a_{21} + \cdots + x_na_{2n} \\
&\vdots \\
y_m &= x_1a_{m1} + \cdots + x_na_{mn} \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&Y = AX
\end{aligned}$$

na qual A é a matriz de transformação denotada por $[T]_{\beta_W}^{\beta_V}$, e Y são as coordenadas de $T(\mathbf{v})$ com relação a base β_W e X são as coordenadas de \mathbf{v} com relação a base β_V , ou seja,

$$[T(\mathbf{v})]_{\beta_W} = [T]_{\beta_W}^{\beta_V} \cdot [\mathbf{v}]_{\beta_V}.$$

Para a transformação inversa, assumindo que o determinante da matriz $[T]_{\beta_W}^{\beta_V}$ é diferente de zero, tem-se

$$\begin{aligned}
\left([T]_{\beta_W}^{\beta_V}\right)^{-1} \cdot [T(\mathbf{v})]_{\beta_W} &= \left([T]_{\beta_W}^{\beta_V}\right)^{-1} \cdot [T]_{\beta_W}^{\beta_V} \cdot [\mathbf{v}]_{\beta_V} \\
\left([T]_{\beta_W}^{\beta_V}\right)^{-1} \cdot [T(\mathbf{v})]_{\beta_W} &= I \cdot [\mathbf{v}]_{\beta_V}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ([T]_{\beta_W}^{\beta_V})^{-1} \cdot [T(\mathbf{v})]_{\beta_W} &= [\mathbf{v}]_{\beta_V} \\ [\mathbf{v}]_{\beta_V} &= [T]_{\beta_V}^{\beta_W} \cdot [T(\mathbf{v})]_{\beta_W}, \end{aligned}$$

na qual I é a matriz identidade e $[T]_{\beta_V}^{\beta_W}$ é a matriz inversa da matriz $[T]_{\beta_W}^{\beta_V}$, assim para obter a transformação inversa, basta obter a inversa da matriz de transformação.

3.4.2. Operador Linear

Quando uma transformação linear é do tipo $T: V \rightarrow V$, ou seja, faz uma correspondência de um espaço vetorial V para o mesmo espaço vetorial V são chamadas de operadores lineares, em particular as transformações envolvidas neste trabalho serão operadores lineares do tipo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma vez que os quadrotoros serão estudados no espaço.

Existem dois tipos especiais de operadores lineares os ditos auto-adjunto quando a matriz de transformação, com relação a uma base ortonormal, for uma matriz simétrica e os operadores ortogonais quando a matriz de transformação, com relação a uma base ortonormal, for uma matriz ortogonal, ou seja, uma matriz cuja sua inversa é igual a sua transposta. Além disso, uma matriz ortogonal possui outra propriedade relacionada ao seu determinante, dada uma matriz A ortogonal, ou seja, $A^{-1} = A^t$, tem-se

$$\begin{aligned} \det(A \cdot A^{-1}) &= \det I \\ \det(A \cdot A^t) &= \det I \\ \det(A) \cdot \det(A^t) &= 1. \end{aligned}$$

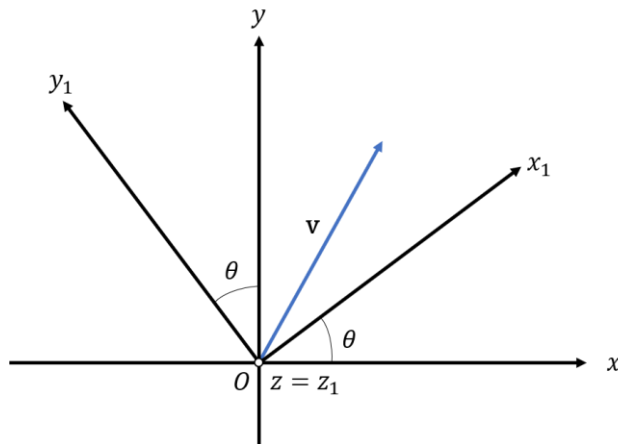
Pelas propriedades do determinante tem-se que o determinante de uma matriz A é igual ao determinante da sua matriz transposta A^t , ou seja, $\det(A) = \det(A^t)$, dessa forma tem-se

$$\begin{aligned} \det(A) \cdot \det(A) &= 1 \\ \det(A)^2 &= 1 \\ \det(A) &= \pm 1 \end{aligned}$$

logo toda matriz ortogonal possui determinante igual a ± 1 .

A seguir será apresentado um exemplo de uma matriz de rotação de um operador linear ortogonal do \mathbb{R}^3 , a matriz a ser obtida é análoga as matrizes que serão obtidas no Capítulo 4 na secção 4.2.1. Para esse exemplo, serão considerados dois sistemas cartesianos ortogonais com a mesma origem $Oxyz$ e $Ox_1y_1z_1$, esse último rotacionado θ radianos em torno do eixo z como apresentado na Figura 3.16.

Figura 3.16 - Rotação de θ radianos de um sistema cartesiano $Ox_1y_1z_1$ em relação a um sistema $Oxyz$.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Considerando uma transformação linear que leva um vetor $\mathbf{v} = (x, y, z)$ a um vetor $T(\mathbf{v}) = (x_1, y_1, z_1)$, rotacionado de θ , pela Figura 3.16 tem-se que,

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta + z \cdot 0 \\ y_1 &= x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta + z \cdot 0 \\ z_1 &= x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 1 \end{aligned}$$

logo, pode-se associar as coordenadas do vetor $T(\mathbf{v})$ na base canônica com as coordenadas do vetor \mathbf{v} também na base canônica a partir da matriz de transformação

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz R , chamada de matriz de rotação, é uma matriz ortogonal, uma vez que a matriz inversa de R , denotada por R^{-1} é igual a matriz transposta de R , denotada por R^t , ou seja, $R^{-1} = R^t$.

Dessa forma têm-se,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
$$T(\mathbf{v}) = R\mathbf{v},$$

na qual o vetor rotacionado pode ser obtido pelo produto da matriz de rotação com o vetor com relação ao sistema inercial. Durante essa transformação é preservado o comprimento dos vetores e a sua orientação. Dessa forma o módulo do vetor será igual independentemente do sistema de coordenadas.

Para a relação inversa, ou seja, um vetor que sai do sistema rotacionado para o inercial basta obter a matriz inversa da matriz de rotação, dessa forma têm-se

$$\mathbf{v} = R^{-1}T(\mathbf{v})$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Em geral, quando se está trabalhando com aeromodelos são utilizados sistemas referenciais em rotação, esses sistemas estão rotacionados de um certo ângulo em cada uma das três direções do espaço. Em particular, neste trabalho o quadrotor será modelado seguindo os chamados ângulos de Euler, que servem como uma parametrização do espaço, a seguir esses ângulos serão apresentados.

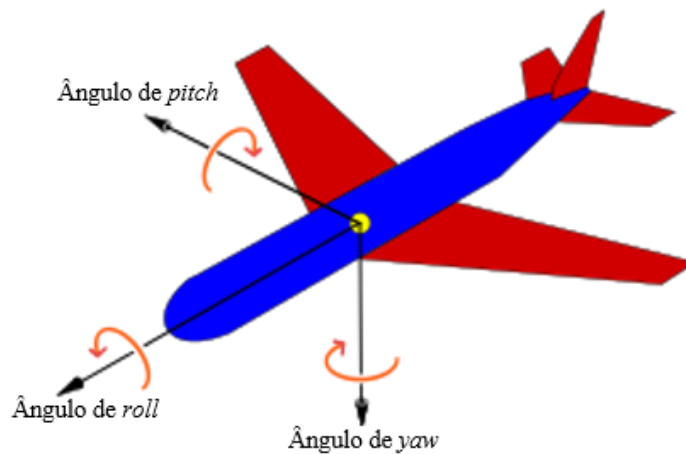
3.5. ÂNGULOS DE EULER

Em 1775, Euler desenvolveu uma parametrização de rotações finitas de um corpo rígido no Espaço Euclidiano a uso de três rotações sequenciais, no qual conseguiu demonstrar que a rotação de um corpo com ponto fixo pode ser descrita em torno de um eixo de rotação, conhecido como Eixo de Euler, que coincide com o giro do próprio corpo (JAMBERSI; SILVA, 2016).

As três rotações sequenciais são parametrizadas por três diferentes ângulos, chamados de ângulos de Euler, estes ângulos têm como objetivo descrever a orientação de um corpo rígido no espaço euclidiano tridimensional (CARRERA, 2010).

Um tipo específico dos ângulos de Euler são os ângulos de Cardan (ou Tait-Bryan) que geralmente são utilizados em aplicações aeroespaciais com o objetivo de definir a orientação do aeromodelo. Os três ângulos de Cardan são conhecidos como ângulo de rolagem ou *roll* (ϕ) de arfagem, empinamento ou *pitch* (θ) de guinada, cabeceio ou *yaw* (ψ) identificados na Figura 3.17.

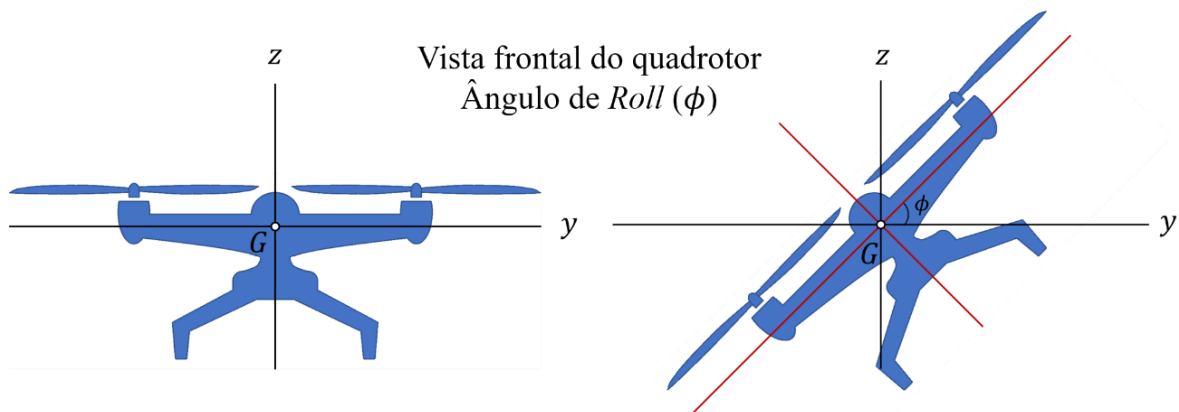
Figura 3.17 - Ângulos de Cardan.



Fonte: Lara (2016) Adaptado.

Os ângulos de *roll*, *pitch* e *yaw* controlam respectivamente os movimentos nos eixos longitudinal, transversal e vertical. Na Figura 3.18 é apresentada a ação do ângulo de roll no Quadrotor.

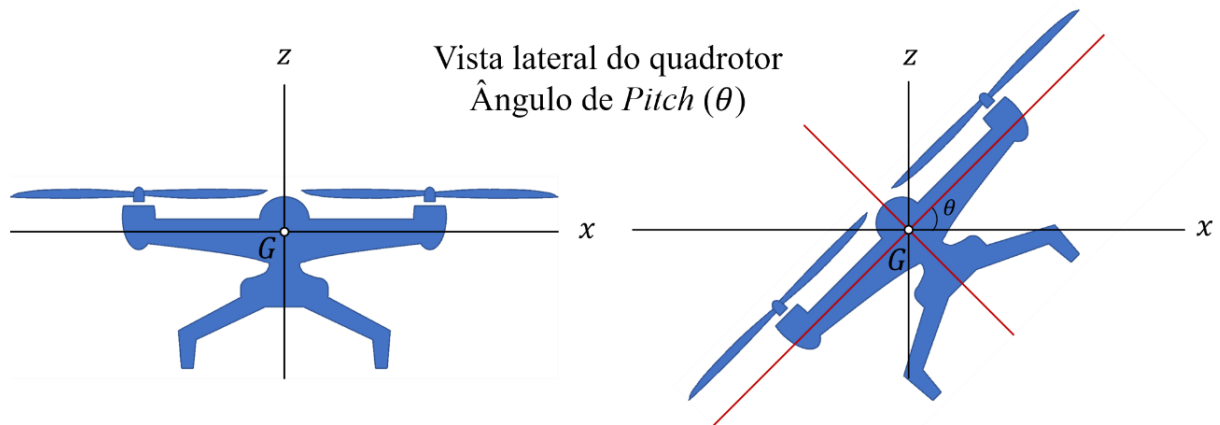
Figura 3.18 - Ângulo de Roll no quadrotor.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Na Figura 3.19 é apresentada a ação do ângulo de *pitch* no quadrotor.

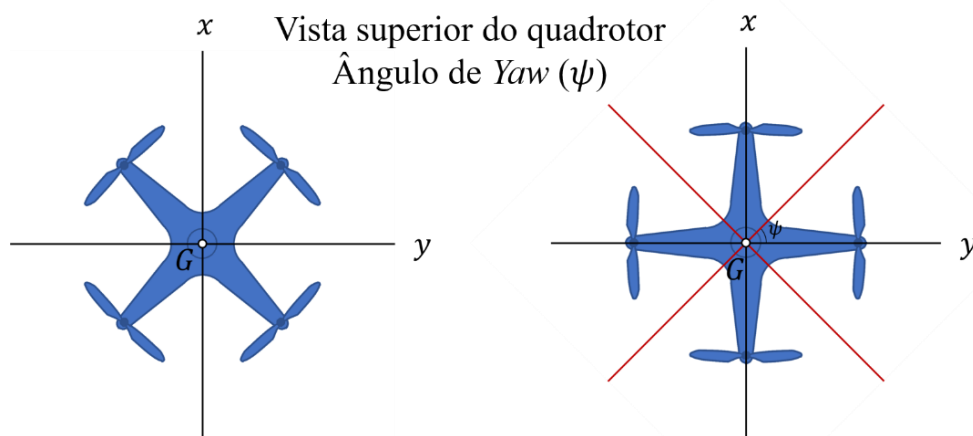
Figura 3.19 - Ângulo de *Pitch* no quadrotor.



Fonte: Autoria Própria (2019).

Na Figura 3.20 é apresentada a ação do ângulo de *yaw* no quadrotor.

Figura 3.20 - Ângulo de *Yaw* no quadrotor.



Fonte: Autoria Própria (2019).

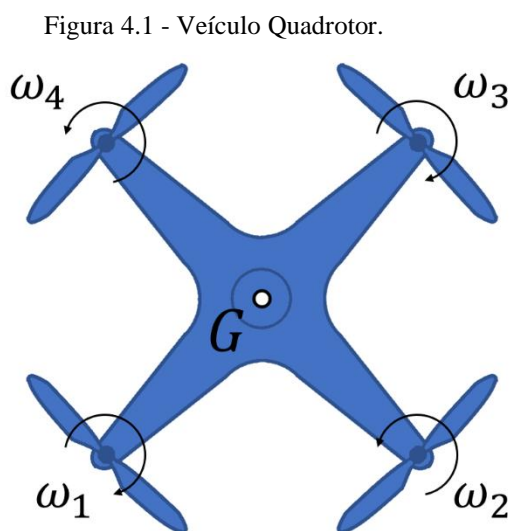
Dessa forma, os ângulos de Cardan são variáveis que compõem o movimento dos quadrotor, o domínio desses ângulos irá garantir a controlabilidade e estabilidade do quadrotor, uma vez que estes ângulos estão diretamente relacionados a movimentação do quadrotor.

CAPÍTULO 4 ANÁLISE CINEMÁTICA E DINÂMICA DO QUADROTOR

Após a abordagem teórica acerca dos principais pressupostos que norteiam o problema, neste capítulo será apresentada a análise dinâmica dos diferentes modos de voo do VANT. Deste modo, objetivando otimizar a análise, tornando mais didática sua compreensão, a discussão será apresentada em quatro etapas, na primeira etapa serão apresentadas as variáveis do problema, na etapa seguinte serão abordados os diversos sistemas de referências do problema, nas etapas finais serão deduzidas as equações utilizadas para o controle dessas aeronaves, através das análises cinemática e dinâmica.

4.1. VARIÁVEIS DO PROBLEMA

O veículo estudado consiste em quatro rotores montados em configuração cruzada das quais o par de hélices opostas giram no mesmo sentido como é apresentado na Figura 4.1 (SHAHID et al., 2016).



Fonte: Autoria Própria (2019).

As variáveis envolvidas no sistema são:

p_n = posição inicial do veículo com relação ao eixo \hat{i}^i em \mathcal{R}^i ,

p_e = posição inicial do veículo com relação ao eixo \hat{j}^i em \mathcal{R}^i ,

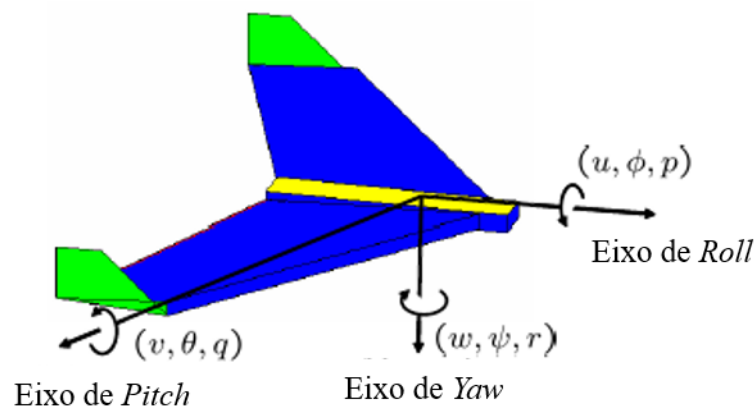
h = a altura do veículo com relação ao eixo $-\hat{k}^i$ em \mathcal{R}^i ,

u = velocidade do veículo com relação ao eixo \hat{i}^b em \mathcal{R}^b ,

v = velocidade do veículo com relação ao eixo \hat{j}^b em \mathfrak{R}^b ,
 w = velocidade do veículo com relação ao eixo \hat{k}^b em \mathfrak{R}^b ,
 ϕ = ângulo de *roll* (rolagem) com relação a \mathfrak{R}^{v2} ,
 θ = ângulo de *pitch* (arfagem) com relação a \mathfrak{R}^{v1} ,
 ψ = ângulo de *yaw* (guinada) com relação a \mathfrak{R}^v ,
 p = derivada do ângulo de *roll* com relação ao tempo em torno do eixo \hat{i}^b em \mathfrak{R}^b ,
 q = derivada do ângulo de *pitch* com relação ao tempo em torno do eixo \hat{j}^b em \mathfrak{R}^b ,
 r = derivada do ângulo de *yaw* com relação ao tempo em torno do eixo \hat{k}^b em \mathfrak{R}^b .

Estas variáveis podem ser visualizadas na Figura 4.2, com exceção das variáveis p_n , p_e e h que dizem respeito à posição com relação ao sistema de coordenadas inerciais. A velocidade (u, v, w) e a velocidade angular (p, q, r) da aeronave são relacionadas ao sistema de coordenadas do corpo. Já os ângulos de Euler (ϕ, θ, ψ) dizem respeito aos sistemas do veículo-2, veículo-1 e veículo respectivamente (BEARD, 2008).

Figura 4.2 - Definição dos Eixos.



Fonte: Beard (2008).

4.2. SISTEMA DE REFERÊNCIA

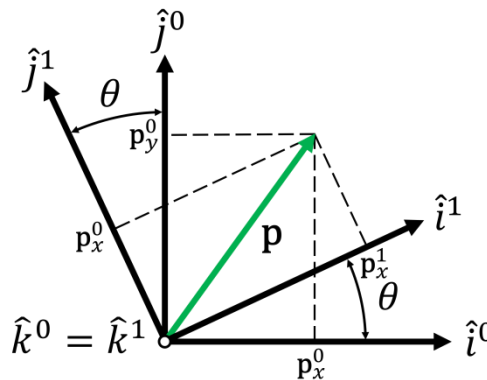
Esta seção descreve os diferentes sistemas de referência utilizados para descrever a posição e orientação das aeronaves de quatro rotores. Devido a estes diferentes sistemas é necessário realizar a transformação de um sistema para outro, esta transformação é obtida através dos movimentos de rotação e translação (BEARD, 2008).

Na seção 4.2.1. será apresentado o desenvolvimento das matrizes de rotação, que são responsáveis pela mudança de sistemas. Já na seção 4.2.2. será apresentado os diferentes sistemas de coordenadas que serão utilizados.

4.2.1. Matrizes de Rotação

Para o sistema de três coordenadas exibido na Figura 4.3, o vetor \mathbf{p} pode ser obtido a partir de qualquer um dos dois sistemas de referência, o sistema \mathfrak{R}^0 com os vetores unitários $(\hat{i}^0, \hat{j}^0, \hat{k}^0)$ e o sistema \mathfrak{R}^1 com os vetores unitários $(\hat{i}^1, \hat{j}^1, \hat{k}^1)$ obtido pela rotação do sistema \mathfrak{R}^0 de θ radianos com relação ao eixo z (BEARD, 2008).

Figura 4.3 - Rotação de um sistema de três coordenadas em relação ao eixo z .



Fonte: Autoria Própria (2019).

Em relação ao sistema \mathfrak{R}^0 tem-se:

$$\mathbf{p} = p_x^0 \hat{i}^0 + p_y^0 \hat{j}^0 + p_z^0 \hat{k}^0.$$

De modo análogo tem-se para o sistema \mathfrak{R}^1 :

$$\mathbf{p} = p_x^1 \hat{i}^1 + p_y^1 \hat{j}^1 + p_z^1 \hat{k}^1.$$

Pode-se relacionar as coordenadas de \mathbf{p} em \mathfrak{R}^0 com as coordenadas de \mathbf{p} em \mathfrak{R}^1 , a partir de uma matriz, semelhante à obtida na seção 3.4.2. A essa matriz será denotada por R_0^1 e chamada de matriz de rotação do sistema \mathfrak{R}^0 para \mathfrak{R}^1 .

Como visto na seção 3.4.1, para obter a matriz de transformação basta escrever a base $(\hat{i}^0, \hat{j}^0, \hat{k}^0)$ como combinação da base $(\hat{i}^1, \hat{j}^1, \hat{k}^1)$, dessa forma pela Figura 4.3 tem-se

$$\begin{aligned}\hat{i}^0 &= \cos \theta \cdot \hat{i}^1 + (-\text{sen } \theta) \cdot \hat{j}^1 + 0 \cdot \hat{k}^1 \\ \hat{j}^0 &= \text{sen } \theta \cdot \hat{i}^1 + \cos \theta \cdot \hat{j}^1 + 0 \cdot \hat{k}^1 \\ \hat{k}^0 &= 0 \cdot \hat{i}^1 + 0 \cdot \hat{j}^1 + 1 \cdot \hat{k}^1\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{bmatrix} \\ p^1 &= R_0^1 p^0\end{aligned}\tag{4.1}$$

então,

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, considerando a rotação de β radianos sobre o eixo y

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix},$$

e para uma rotação de α radianos sobre eixo x

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ 0 & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Essas matrizes de rotação são ortogonais e, portanto, possuem algumas propriedades particulares, que são elas, com a , b e c bases dos diferentes referencias:

P.1. $(R_a^b)^{-1} = (R_a^b)^T = R_b^a;$

P.2. $R_b^c R_a^b = R_a^c;$

P.3. $\det R_a^b = 1$.

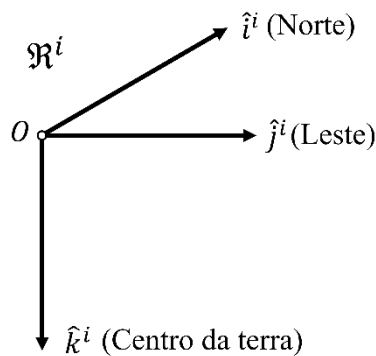
4.2.2. Sistemas de coordenadas do Quadrotor

Nesta seção serão apresentados os diferentes sistemas referenciais que estão envolvidos nos quadrotores. Serão trabalhados os seguintes sistemas: referencial inercial, referencial do veículo, referencial do veículo-1, referencial do veículo-2, referencial do corpo.

4.2.2.1. Referencial inercial \mathcal{R}^i .

O sistema de coordenadas inerciais é um sistema de coordenadas fixas com origem em um local definido, neste sistema o vetor unitário \hat{i}^i tem sentido para o norte, o vetor unitário \hat{j}^i tem sentido para o leste e o vetor unitário \hat{k}^i tem sentido para o centro da terra. Como pode ser visto na Figura 4.4 (BEARD, 2008).

Figura 4.4 - Sistema de coordenadas inercial.



Fonte: Autoria Própria (2019).

4.2.2.2. Referencial do veículo \mathcal{R}^v .

Este sistema tem como origem o centro de massa do veículo e segue o mesmo sentido do sistema inercial apresentado na seção 4.2.2.1. ou seja, o vetor unitário \hat{i}^v tem sentido para o norte, o vetor unitário \hat{j}^v tem sentido para o leste e o vetor unitário \hat{k}^v tem sentido para o centro da terra.

4.2.2.3. Referencial do veículo-1 \mathfrak{R}^{v1} .

A origem desse sistema de coordenadas é o centro de gravidade da aeronave, assumindo que o centro de gravidade coincide com o centro de massa, temos que esta origem é a mesma do sistema \mathfrak{R}^v , no entanto \mathfrak{R}^{v1} é obtido pela em torno do eixo \hat{k}^v pelo ângulo de guinada ψ (GOPALAKRISHNAN, 2017).

Dessa forma, a matriz de transformação do sistema \mathfrak{R}^v para o sistema \mathfrak{R}^{v1} é

$$R_v^{v1}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtida da mesma forma que a matriz R_0^1 da seção 4.2.1.

4.2.2.4. Referencial do veículo-2 \mathfrak{R}^{v2} .

Assim como o sistema \mathfrak{R}^{v1} a origem desse sistema é o centro de gravidade e é obtido pela rotação sistema \mathfrak{R}^{v1} com relação ao eixo \hat{j}^{v1} pelo ângulo de arfagem θ .

A matriz de transformação do sistema \mathfrak{R}^{v1} para o sistema \mathfrak{R}^{v2} é

$$R_{v1}^{v2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

4.2.2.5. Referencial do corpo \mathfrak{R}^b .

Este sistema é obtido a partir da rotação do sistema \mathfrak{R}^{v2} sobre o ângulo de rolagem ϕ .

A matriz de transformação do sistema \mathfrak{R}^{v2} para o sistema \mathfrak{R}^b é

$$R_{v2}^b(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Assim a matriz da transformação do sistema do veículo \mathfrak{R}^v para o sistema do corpo \mathfrak{R}^b pela propriedade 2 da seção 4.2.1. é,

$$R_v^b(\phi, \theta, \psi) = R_{v2}^b(\phi)R_{v1}^{v2}(\theta)R_v^{v1}(\psi)$$

$$R_v^b(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_v^b(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

4.3. CINEMÁTICA DO QUADROTOR

Seja p_n , p_e e h as variáveis da posição com relação ao sistema de coordenadas inercial a velocidade, com relação a esse mesmo sistema, é dada pela derivada com relação ao tempo. As variáveis da velocidade u , v e w dizem respeito ao sistema do corpo, portanto a relação entre as variáveis de posição com as de velocidade é

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_n \\ p_e \\ -h \end{bmatrix} = R_b^i \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Como o sistema inercial é um sistema fixo, pode-se escolher a sua origem de forma a coincidir com o sistema do veículo, ou seja, com a origem no centro de massa da aeronave, e pela propriedade 1 das matrizes de rotação (Seção 4.2.1.) tem-se

$$R_b^i = R_b^v = (R_v^b)^T$$

Assim a relação entre a posição e a velocidade é

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_n \\ p_e \\ -h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Para relacionar os ângulos de arfagem (θ), rolagem (ϕ) e guinada (ψ) com as velocidades angulares p , q e r também devem ser considerados os diferentes sistemas dos quais os ângulos estão relacionados. Sejam $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ as derivadas dos ângulos de arfagem, rolagem e guinada respectivamente com relação ao tempo tem-se

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = R_{v_2}^b(\dot{\phi}) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{v_2}^b(\phi) R_{v_1}^{v_2}(\dot{\theta}) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{v_2}^b(\phi) R_{v_1}^{v_2}(\theta) R_v^{v_1}(\dot{\psi}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Aproximando $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ para ângulos pequenos tem-se

$$R_{v_2}^b(\dot{\phi}) = R_{v_1}^{v_2}(\dot{\theta}) = R_v^{v_1}(\dot{\psi}) = I$$

logo, a equação (4.2) torna-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= I \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{v_2}^b(\phi) I \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{v_2}^b(\phi) R_{v_1}^{v_2}(\theta) I \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{v_2}^b(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{v_2}^b(\phi) R_{v_1}^{v_2}(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \\ -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para a relação inversa basta obter a matriz inversa da matriz de rotação assim,

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \operatorname{tg} \theta & \cos \phi \operatorname{tg} \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \operatorname{sec} \theta & \cos \phi \operatorname{sec} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

4.4. DINÂMICA DO QUADROTOR

Nesta seção será assumindo que todos os componentes da estrutura são rígidos, assim sua forma não varia mesmo quando submetido a forças externas, ou seja, a distância entre as partículas que compõe o corpo mantém-se invariável ao longo do tempo e será possível utilizar as relações estudadas na seção 3.3 (GOPALAKRISHNAN, 2017).

Denotando por $\mathbf{v}_b = (u, v, w)$ o vetor velocidade da aeronave com relação ao sistema referencial \mathfrak{R}^b , a lei de Newton é dada por

$$m \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} = \sum F. \quad (4.3)$$

na qual m é a massa do veículo e $F = (F_x, F_y, F_z)$ a força total a qual o quadrotor está submetido.

Como o sistema referencial \mathfrak{R}^b é um referencial em rotação a derivada do vetor velocidade é dada pela equação (3.18), ou seja,

$$\frac{d\mathbf{v}_b}{dt} = \mathbf{a}_b + \omega_{b/i} \times \mathbf{v}_b$$

na qual $\mathbf{a}_b = (\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ é a aceleração do corpo do quadrotor e $\omega_{b/i} = (p, q, r)$ é a velocidade angular da aeronave relativa ao sistema de referência inercial. Substituindo na equação (4.3)

$$m \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} = m(\mathbf{a}_b + \omega_{b/i} \times \mathbf{v}_b) = F \quad (4.4)$$

em função das coordenadas dos vetores a equação (4.4) torna-se

$$\begin{aligned} m \left(\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \\ m \left(\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qw - rv \\ ur - wp \\ pv - qu \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} rv - qw \\ wp - ur \\ qu - pv \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com relação ao momento angular resultante da ação das forças sobre o quadrotor tem-se

$$\frac{d\mathbf{h}_b}{dt} = \sum M \quad (4.5)$$

na qual \mathbf{h}_b é o momento angular com relação ao sistema referencial \mathfrak{R}^b .

Assim, seja M o torque resultante do sistema e M' o momento causado pelo efeito giroscópico da rotação de hélices (BOUABDALLAH; NOTH; SIEGWART, 2004).

De modo análogo a aceleração, tem-se para o momento angular, devido ao sistema referencial em rotação,

$$\frac{d\mathbf{h}_b}{dt} = \dot{\mathbf{h}}_b + \omega_{b/i} \times \mathbf{h}_b.$$

Substituindo na equação (4.5) tem-se

$$\frac{d\mathbf{h}_b}{dt} = \dot{\mathbf{h}}_b + \omega_{b/i} \times \mathbf{h}_b = M + M'. \quad (4.6)$$

Como visto na seção 3.3.2.1 o momento angular pode ser obtido pela equação (3.30), ou seja, $\mathbf{h}_b = J\omega_{b/i}$, na qual J é o tensor de inércia, dado por

$$J = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}.$$

Assumindo que a aeronave é essencialmente simétrica então $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$, logo o tensor de inércia pode ser resumido a

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix}.$$

Em termos das coordenadas, seja $M = (\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)$ os torques em relação aos eixos e $M' = (-J_p q \omega_p, J_p p \omega_p, 0)$ os torques do efeito giroscópico no qual J_p é o momento de inércia das hélices e ω_p é a velocidade angular residual da hélice.

Pode-se reescrever a equação (4.6) em função das coordenadas do corpo como sendo

$$\begin{aligned} \frac{dJ\omega_{b/i}}{dt} + \omega_{b/i} \times J\omega_{b/i} &= M + M' \\ \frac{d\omega_{b/i}}{dt_b} &= J^{-1}(M + M' - \omega_{b/i} \times J\omega_{b/i}) \\ \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/J_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/J_z \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -J_p q \omega_p \\ J_p p \omega_p \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right\} \\ \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/J_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/J_z \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -J_p q \omega_p \\ J_p p \omega_p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (J_y - J_z)qr \\ (J_z - J_x)pr \\ (J_x - J_y)pq \end{bmatrix} \right\} \\ \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\tau_\phi}{J_x} \\ \frac{\tau_\theta}{J_y} \\ \frac{\tau_\psi}{J_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{J_p q \omega_p}{J_x} \\ \frac{J_p p \omega_p}{J_y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(J_y - J_z)qr}{J_x} \\ \frac{(J_z - J_x)pr}{J_y} \\ \frac{(J_x - J_y)pq}{J_z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Desta forma, o sistema de seis graus de liberdade pode ser resumido as seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{p}_e \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta & -\cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv - qw \\ wp - ur \\ qu - pv \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \operatorname{tg} \theta & \cos \phi \operatorname{tg} \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \operatorname{sec} \theta & \cos \phi \operatorname{sec} \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_\phi}{J_x} \\ \frac{\tau_\theta}{J_y} \\ \frac{\tau_\psi}{J_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{J_p q \omega_p}{J_x} \\ \frac{J_p p \omega_p}{J_y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(J_y - J_z)}{J_x} qr \\ \frac{(J_z - J_x)}{J_y} pr \\ \frac{(J_x - J_y)}{J_z} pq \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Dessa forma, os movimentos do quadrotor vistos na seção 1.2 na Figura 1.4, podem ser obtidos a partir das equações (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10) com o controle das variáveis envolvidas no problema, uma vez que os movimentos do quadrotor estão relacionados ao controle da velocidade e da velocidade angular do quadrotor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada a modelagem matemática de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadrotor, com o objetivo de ilustrar a importância da matemática para a dedução da dinâmica e cinemática de um corpo rígido estudado na engenharia mecânica. Esse exemplo foi escolhido devido a sua crescente relevância no cenário científico, o que muito se deve a popularização dos quadrotores, em especial dos drones.

Nesse sentido, o exemplo apresenta uma grande variedade de ferramentas matemáticas a serem utilizadas durante a obtenção do equacionamento responsável pelo seu controle e estabilidade, dentre essas se destacam as matrizes, as transformações lineares, as derivadas e as integrais.

Dessa forma, esta pesquisa facilita os estudos relativos à modelagem matemática de um VANT, além de ilustrar a importância da matemática para o seu desenvolvimento, uma vez que a matemática, assim como qualquer outra área, quando trabalhada sem nenhuma motivação concreta, ou seja, sem ser amparado por um problema real, é visto sem significado, podendo se tornar desmotivante e/ou desinteressante para o aluno.

Assim, este trabalho apresenta um problema real através de um exemplo estudado na engenharia mecânica, com o objetivo demonstrar ao aluno a importância do estudo da matemática, além de servir como auxílio para o professor de matemática que ao ensinar algumas ferramentas matemáticas não conhece ou tem pouco conhecimento das aplicações dessas ferramentas.

Ressalta-se ainda que ao apresentar um breve histórico foi possível compreender o funcionamento de um VANTs, além de entender o crescente interesse nos estudos acerca deles. Destaca-se ainda que ao apresentar um estudo sobre o ensino da matemática pode-se compreender a importância do estudo ser fundamentado de forma lúdica, sendo um fator motivador para os alunos. Ademais, ao realizar o estudo teórico foi possível destacar toda a matemática envolvida durante o processo de modelagem de um quadrotor.

Por fim, ao apresentar os cálculos de forma detalhada foi possível entender a obtenção do equacionamento responsável pelo controle do quadrotor. E, dessa forma, se obteve uma análise do quadrotor mais detalhada, facilitando o entendimento acerca da análise da aeronave. Assim, foi possível demonstrar a importância do estudo da matemática ao apresentar a sua utilização em um problema real.

Em suma, ao final da pesquisa pode-se observar que é possível aliar o ensino de matemática com outras áreas do conhecimento, ou mesmo, notar a sua aplicação em áreas promissoras e ainda em constante expansão dentro da ciência, como é o caso da situação aqui exposta. Assim, tal pesquisa desponta com uma fonte de consulta para professores poderem utilizar como norte para entender, apresentar e/ou exemplificar aplicações dos conteúdos matemáticos vistos em sala de aula.

Concomitantemente, é importante salientar que torna-se necessário que os órgãos competentes ofereçam formações para os professores. Haja vista que, assim facilita o acesso destes, a novos conhecimentos, novas pesquisas e metodologias, que podem servir de suporte ou alternativas para melhorar o processo de ensino e aprendizagem deste componente curricular.

No que se refere à continuidade da pesquisa, deixa-se em aberto para que novos exemplos, como esse, possam ser explorados. E, assim, novos materiais e pesquisas possam ser desenvolvidas a fim de ampliar o leque de opções e alternativas, para melhor ensinar matemática; partindo premissa que fora tomada nesta pesquisa, na qual ela é considerada um componente curricular com aplicações diretas em situações reais do cotidiano dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ABREU, Thiago Probst de. **Modelagem Matemática para um Sistema de Controle para Aeronaves do Tipo Quadrotor**. 2014. 95 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Industrial Elétrica, Departamento Acadêmico de Eletrônica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

ALLIX, Benjamin. **Acer pseudoplatanus – Bordo**. Disponível em: <<http://www.arvoresearbustosdeportugal.com/portfolio-item/bordo-acer-pseudoplatanus-2/>>. Acesso em: 10 ago. 2019.

ALMEIDA, Paulo Nunes de. **Língua Portuguesa e Ludicidade: Ensinar brincando não é brincar de ensinar**. 2007. 130 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Língua Portuguesa, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - Puc-sp, São Paulo, 2007.

BALASUBRAMANIAN, E.; VASANTHARAJ, R. Dynamic Modeling and Control of Quad Rotor. **IJET: International Journal of Engineering and Technology**. Chennai, p. 63-69. fev. 2013.

BEARD, Randal W.. **Quadrotor Dynamics and Control Rev 0.1**. Provo: Byu Scholarsarchive, 2008. 47 p.

BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON JUNIOR, E. Russell; CORNWELL, Phillip J.. **Mecânica Vetorial para Engenheiros: Dinâmica**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 776 p. Tradução: Antônio Eustáquio de Melo.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. 411 p.

BOUABDALLAH, Samir; SIEGWART, Roland. **Full Control of a Quadrotor**. Zurich: Autonomous Systems Lab, 2007. 6 p.

BOUABDALLAH, Samir. **Design and control of quadrotors with application to autonomous flying**. 2007. 155 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciências, La Faculté Des Sciences Et Techniques de L'ingénieur, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 2007.

BOUABDALLAH, S.; NOTH, A.; SIEGWART, R.. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. **2004 IEEE/RSJ International Conference On Intelligent Robots**

And Systems (iros) (iee Cat. No.04ch37566), Sendai, v. 3, n. 1, p.2451-2456, 28 set. 2004. IEEE. <http://dx.doi.org/10.1109/iros.2004.1389776>.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014.

BRESCIANI, Tommaso. **Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter**. 2008. 180 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Automação, Department Of Automatic Control, Lund University, Lund, 2008.

CARRERA, Danny Hernán Zambrano. **Movimento de Rotação Sem Restrição de um Corpo Rígido**. 2010. 120 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer**. 5. ed. São Paulo: Autêntica Editora, 1998.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

ELKHOLY, Heba Talla Mohamed Nabil. **Dynamic Modeling and Control of a Quadrotor Using Linear and Nonlinear Approaches**. 2014. 143 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Robótica, Controle e Sistemas Inteligentes., School Of Sciences And Engineering, The American University In Cairo (AUC), Cairo, 2014.

GESSOW, Alfred; MYERS JUNIOR, Garry C.. **Aerodynamics of the Helicopter**. New York: Macmillan Company, 1999.

GOPALAKRISHNAN, Eswarmurthi. **Quadcopter flight mechanics model and control algorithms**. 2017. 65 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Elétrica, Department Of Control Engineering, Luleå University Of Technology, Prague, 2017.

HIBBELER, R. C.. **Dinâmica: Mecânica para engenharia**. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 591 p. Tradução: Jorge Ritter.

JAMBERSI, Andreyson Bicudo; SILVA, Samuel da. A Sutileza dos Quaternions no Movimento de Rotação de Corpos Rígidos. **Rev. Bras. Ensino Fís.**, São Paulo, v. 38, n. 2, e2313, 2016. Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-

11172016000200411&lng=en&nrm=iso> . access on 11 Jan. 2019. Epub May 10, 2016. <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0015>.

LARA, Fabrício Rodrigues de. **Sistema de controle de ângulos de *Pitch* e *Roll* em veículo aéreo não tripulado de asa fixa**. 2016. 56 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Elétrica, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porta Alegre, 2016.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 357 p. (Coleção matemática universitária).

LIMA, Elon Lages. **Geometria analítica e álgebra linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 324 p. (Coleção matemática universitária)

LIRA, Josivaldo Albuquerque de. **Ensinar e aprender matemática nas séries iniciais do ensino fundamental**. In: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2016, Campina Grande, Anais IX EPBEM, João Pessoa, Editora Realize, 2016.

LUUKKONEN, Teppo. **Modelling and control of quadcopter**. 2011. 25 f., School Of Science, Aalto University, Espoo, 2011.

MANGUEIRA, Milena Carolina dos Santos; SILVA, Matheus Klisman de Castro e. **Engenharia didática como metodologia para o ensino de matemática**. In: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2018, Cajazeiras, Anais X EPBEM, João Pessoa, Editora Realize, 2018.

MCGOWEN, Stanley S.. **Helicopters: An illustrated history of their impact**. Santa Barbara: Abc-clio, 2005. 351 p.

MORTIMER, Gary. **Draganflyer X4-P launch**. 2012. Disponível em: <<https://www.suasnews.com/2012/05/draganflyer-x4-p-launch/>>. Acesso em: 10 ago. 2019.

PAIVA, Dalliva Stephani Eloi; PAULA, Hudson Diego Aquino de; CALADO, Vânia Aparecida. Os recursos lúdicos no ensino da matemática entre alunos do ensino fundamental. **RECEI: Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**, Mossoró, v. 3, n. 9, p.476-492, 27 set. 2017. Revista Eletronica Cientifica Ensino Interdisciplinar. <http://dx.doi.org/10.21920/recei7201739476492>.

SA, Inkyu; CORKE, Peter. System identification, estimation and control for a cost effective open-source quadcopter. **2012 Ieee International Conference On Robotics And Automation**,

Saint Paul, v. 1, n. 1, p.2202-2209, maio 2012. Anual. IEEE. <http://dx.doi.org/10.1109/icra.2012.6224896>.

SANT'ANNA, Alexandre; NASCIMENTO, Paulo Roberto. A história do lúdico na educação. **Revemat**: Revista eletrônica de educação matemática, Florianópolis, v. 6, n. 2, p.19-36, 10 maio 2011. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p19>.

SHAHID, Faizan et al. Dynamical Modeling and Control of Quadrotor. **Transactions On Machine Design**, Pakistan, v. 5, n. 2, p.50-63, ago. 2016.

SILVA, Luciana Verêda da; ANGELIM, Clenilson Panta. O Lúdico como Ferramenta no Ensino da Matemática. **Id On Line Revista de Psicologia**: Revista Multidisciplinar e de Psicologia, [s.l.], v. 11, n. 38, p.897-909, 30 nov. 2017. Lepidus Tecnologia. <http://dx.doi.org/10.14295/online.v11i38.959>.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra linear**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1995. 583 p.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. *Zetetike*, v. 21, n. 1, p. 155-168, 16 abr. 2014.

VELHO, Eliane Maria Hoffmann; LARA, Isabel Cristina Machado de. O Saber Matemático na Vida Cotidiana: um enfoque etnomatemático. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, [s.i.], v. 4, n. 2, p.3-30, nov. 2011.

VYGOTSKY, L.S. **A formação social da mente**. 4. ed. Tradução de José Cipolla Neto e outros. São Paulo: Martins Fontes, 1991.168p.