

MARCELA DOS REIS FRANÇA

NÚMEROS COMPLEXOS: ABORDAGENS ALTERNATIVAS,
CONTEXTUALIZAÇÃO E APLICAÇÕES

Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional
(PROFMAT)

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)

Três Lagoas/MS

2019

MARCELA DOS REIS FRANÇA

NÚMEROS COMPLEXOS: ABORDAGENS ALTERNATIVAS,
CONTEXTUALIZAÇÃO E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob a orientação do Professor Doutor Antônio Tamarozzi.

BANCA EXAMINADORA:



Prof Dr Antonio Tamarozzi - UFMS
Orientador
UFMS/CPTL



Prof. Dr. Rangel Ferreira do Nascimento
UFMS/CPTL



Prof. Dr Renato César da Silva
UFMS/CPTL

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)

Três Lagoas/MS

2019

AGRADECIMENTOS

A Deus, que sempre é presente em minha vida me dando força para os momentos de provações e me ajudando a compreender e aprender as lições que a própria vida ensina.

À minha filha Ana Luíza por apoiar minha decisão de continuar me aperfeiçoando profissionalmente.

Ao Tamarozzi, meu orientador, por, mesmo em meio a problemas, proporcionar ensinamentos importantes.

Aos professores do Programa em Matemática, Alan, Antonio Carlos Tamarozzi (orientador), Edivaldo Romanini, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Fernando Pereira de Souza, Osmar Jesus Macedo, Renato César da Silva, Vitor por proporcionarem situações de construção de conhecimentos e enriquecimento profissional e aos colegas da turma de 2016 por tudo que vivemos e aprendemos juntos nessa etapa de nossas vidas.

RESUMO

O presente trabalho apresenta a descrição da pesquisa de Mestrado desenvolvida no Programa de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT que tem como foco explorar o conjunto dos números complexos com metodologias alternativas e propor aplicações na obtenção das equações algébricas de algumas curvas no plano. Apresentamos também uma associação entre \mathbb{C} e um subconjunto das matrizes quadradas de ordem 2, que é um isomorfismo, sendo possível exibir uma visualização concreta de números complexos através de matrizes. Ao longo do trabalho, esta relação é desenvolvida como método de ensino, acessível aos alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Curvas no Plano; Equações de Cônicas ; Matrizes.

ABSTRACT

This work presents the description of the Research Master Thesis developed in mathematics program in the National Network - PROFMAT that focuses on a historical analysis of the emergence of complex numbers and Teaching this content in Middle School. Has as general objective to present and analyze the properties of complex numbers and associate them with the conics for Middle School. For this we will have a brief historical analysis of the emergence of complex numbers. Bring the definitions of elements and properties found in the set of complex numbers. Associate the complex numbers with the equations of conics.

Keywords: Complex Numbers; equations of conics with complex numbers; didactic sequence.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	8
CAPÍTULO 1	10
O SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA HISTÓRIA.....	10
1.1. CARDANO E TARTAGLIA	11
1.2. O SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS	12
CAPÍTULO 2	13
OS NÚMEROS COMPLEXOS	13
2.1. DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES	13
2.2. OUTRAS PROPRIEDADES DOS NÚMEROS COMPLEXOS.....	16
CAPÍTULO 3	25
Regiões no plano	25
3.1. CIRCUNFERÊNCIAS	26
3.2. CÍRCULOS	27
3.3. EXTERIOR DA CIRCUNFERÊNCIA	28
3.4. COROA CIRCULAR.....	29
3.5. ELIPSE.....	30
3.6 HIPÉRBOLE	36
3.7 EXEMPLOS	42
CAPÍTULO 4	53
MATRIZES E NÚMEROS COMPLEXOS	53
CAPÍTULO 5	58
SEQUÊNCIA DIDÁTICA	58
CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
REFERÊNCIAS	63
APÊNDICE	64
FONTES DAS FIGURAS	64
TÍTULO DAS FIGURAS.....	65

INTRODUÇÃO

A intenção de trabalhar com o Conjunto dos Números Complexos foi escolhida ao pesquisar os temas mais frequentes nas dissertações do banco de dados do ProfMat. Percebemos que, o Conjunto dos Números Complexos, embora já tenha sido um conteúdo bastante trabalhado no Ensino Médio, poucos mestres optam por trabalharem com este tema hoje.

Chagas (2013) realizou uma pesquisa com professores do ensino médio sobre a relevância do conjunto dos números complexos ser estudado no Ensino Médio. Esse conteúdo consta nos livros dessa etapa escolar, porém, não é exigido na matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O resultado da pesquisa de Chagas mostra que a “maioria dos professores considera o ensino de números complexos relevante para o Ensino Médio” e também que a “falta ou o desconhecimento de aplicações compreensíveis para alunos do Ensino Médio é um dos principais fatores considerados ao se julgar a relevância do ensino de números complexos.”

Nesse contexto em que o Conjunto dos Números Complexos é deixado de lado por alguns professores, ou mesmo em processos oficiais da educação brasileira, nossa proposta é mostrar alguns aspectos importantes deste conjunto e a sua relação com outros conteúdos da Matemática. Neste sentido a proposta deste trabalho procura revitalizar o tema no ensino médio com sugestões de abordagens alternativas, contextualizações e aplicações.

Inicialmente apresentamos um pouco da história do surgimento dos Números Complexos e suas aplicações. Na sequência o conjunto \mathbb{C} é introduzido formalmente como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ acompanhado das operações que lhe conferem a estrutura de corpo. Estabelecemos a associação de um número complexo (a,b) à sua forma clássica $a + bi$, e desenvolvemos os elementos e conceitos como conjugado, inverso, módulo, cálculo de raízes e raízes da unidade. Embora as definições e desenvolvimento apresentados estejam de acordo com coleções do Ensino Médio utilizados na rede Estadual de Ensino na cidade de Três Lagoas – MS, destacamos a abordagem das fórmulas de De Moivre.

É bem conhecido que o surgimento dos números complexos está relacionado à solução de equações polinomiais e esta tem sido a principal aplicação que é associada aos números complexos. Uma vez que o estudo das equações polinomiais vem em sequência a dos números complexos, esta vinculação é harmoniosa para uma grade curricular do

ensino médio. Contudo, o desenvolvimento de certas equações e inequações modulares com números complexos levam a equações algébricas de curvas importantes do plano, possibilitando também aplicações importantes envolvendo a álgebra e a geometria. Esta abordagem constitui o foco do capítulo 3 deste trabalho.

Uma das notáveis qualidades da matemática é possibilitar a representação de certos conjuntos através de outros, mantendo-se a estrutura algébrica e propriedades dos seus elementos. Neste sentido, descrevemos no capítulo 4 a possibilidade de vislumbrar \mathbb{C} em um contexto diferente, como subconjunto de $M_2(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2.

No capítulo 5 apresentamos uma sequência didática elaborada com base nas orientações didáticas da rede estadual de ensino.

CAPÍTULO 1

O SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA HISTÓRIA

Neste capítulo trataremos da evolução dos números complexos ao longo da história e mostraremos que estes não surgiram simplesmente para que algumas equações que antes não tinham solução passassem a ter raízes e soluções. Até porque os matemáticos antigos da Babilônia já conseguiam resolver algumas equações do segundo grau baseados no que hoje chamamos de “completamento de quadrados” e, durante séculos, em uma espécie de conformidade, ficou garantido que a equação do segundo grau com discriminante negativo não tinha solução.

O domínio da Matemática grega praticamente acabou quando Roma conquistou a Grécia. Quando a Europa entrou na Idade Média (Idade das Trevas) o desenvolvimento da Matemática deu-se em grande parte pelos árabes e hindus, com contribuições principalmente na Álgebra.

Ao falarmos em Equações do Segundo Grau, um matemático que logo lembramos é Bhaskara, pois por muito tempo, a fórmula resolutive da Equação do Segundo Grau ficou conhecida como “Fórmula de Bhaskara”. No entanto, a história mostra que a fórmula foi descoberta pelo matemático hindu Sridhara, no século XI.

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, a fórmula resolutive da Equação do Segundo Grau nos garante que as raízes desta equação são dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Mesmo não encontrando solução para o caso em que $b^2 - 4ac < 0$, os Matemáticos da época não ficaram intrigados, nem tampouco tentavam desenvolver pesquisas para avançar matematicamente na solução de raízes negativas, pois afirmavam não ter solução.

Em meados do século XVI, a Europa, mais precisamente na Itália, voltou a avançar nas pesquisas matemáticas. Em meio às disputas entre Cardano e Tartaglia para resolver as equações de terceiro grau é que surgiram os primeiros indícios de que os números reais não eram suficientes para abranger essas soluções e o conjunto dos Números Complexos começam a tomar forma.

1.1. CARDANO E TARTAGLIA

Apresentamos agora uma breve descrição da história do confronto protagonizado por dois matemáticos importantes na resolução de equações polinomiais, descrição baseada em uma publicação de 2001 pelo CAEM - Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática: dois importantes matemáticos italianos foram Girolamo Cardano (1501-1577) e Nicoló Fontana (1500-1557). Girolamo Cardano foi autor das obras *Liber de Ludo Aleae* (noção de probabilidade e menção a maneiras desonestas de alcançar a vitória em jogos) e *Ars Magna* uma coleção dos mais relevantes conteúdos algébricos da época, lançado no ano de 1545 na Alemanha, destacava-se também por ser um sujeito de moral questionável, que usava meios sórdidos para alcançar êxito na busca pelo sucesso. Nicoló Fontana, também conhecido por seu apelido Tartaglia (que significa gago), devido a problemas na fala oriundos de uma cicatriz na boca por conta de um ataque sofrido na infância, produziu relevantes obras de conteúdo matemático, sua biografia é marcada pela tragédia (assassinato do pai, ataque sofrido na infância, pobreza na maior parte de sua história) e também pelas disputas de caráter científico com Girolamo Cardano. Um episódio particularmente interessante ocorreu por volta do ano 1510. O matemático conhecido por Scipione del Ferro desenvolveu um método para o cálculo de equações do tipo: $x^3 + px + q = 0$, um aluno de Scipione, Antonio Maria Fior, teve acesso a esse método e aproveitou o fato de seu professor ter falecido antes de publicar sua descoberta para apropriar-se do trabalho de Scipione. Para tal propôs um desafio a Tartaglia que a época era uma referência intelectual. Tartaglia prevendo a estratégia de Fior e valendo-se de seu talento em matemática foi capaz de deduzir um método para o cálculo de equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ e também para o cálculo de equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, derrotando Fior de maneira espetacular. Girolamo, extremamente ardiloso, tomou conhecimento do fato e tentou incorporar as descobertas de Tartaglia em seu livro *Ars Magna*, que durante esse período estava em fase de elaboração. Tartaglia resistiu, uma vez que pretendia publicar suas descobertas em uma obra de sua autoria. A pressão de Girolamo e suas promessas foram tantas que Tartaglia cedeu. Reafirmando ser de moral questionável Girolamo apropriou-se do trabalho de Tartaglia, alegando que como Scipione teria descoberto a fórmula para o cálculo de equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ anteriormente e, portanto, sua publicação não iria ferir a promessa feita a Tartaglia. Assim a fórmula de Tartaglia passou a ser

fórmula de Girolamo.

Propondo exercícios de equações do terceiro grau e resolvendo-os, surgem os primeiros indícios de que os números reais não eram suficientes. E essas questões não mais podiam ser ignoradas.

1.2. O SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A necessidade de estender os conhecimentos dos números pareceu mais evidente com a descoberta das soluções de equações do terceiro grau. Quando encontrou raízes negativas nas equações do segundo grau, ficou determinado que não existia solução e não buscou se aprofundar os conhecimentos matemáticos, mas nas equações do terceiro grau, a solução existia e fazia-se necessário avançar a pesquisa.

Não tinha como negar que os números reais não eram mais suficientes para se tratar de equações algébricas. Este fato no século XVI era semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou que os números racionais não eram mais suficientes e com a construção do número $\sqrt{2}$, que não era racional: o conceito de número precisava ser estendido.

Foi Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1530, quem conseguiu atravessar a barreira e chegar aos novos números. Conforme seu próprio relato em 1572 no livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, sua ideia foi supor que os números $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente. Com algumas contas, ele chegou à conclusão que $a = 2$ e $b = 1$

A partir da ideia pioneira de Bombelli, ainda demorou mais de dois séculos para que se conseguisse, através de Euler, saber como extrair raízes de números complexos.

CAPÍTULO 2

OS NÚMEROS COMPLEXOS

Inicialmente consideremos o conjunto dos números reais \mathbb{R} e o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Desta forma, teremos

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \}$$

Sejam dois pares ordenados pertencentes a \mathbb{R}^2 : (a, b) , (c, d) e as definições abaixo de igualdade, soma e multiplicação:

1. Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$
2. Soma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
3. Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

2.1. DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Denominamos conjunto dos números complexos e indicamos pela letra \mathbb{C} ao conjunto formado pelos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que satisfazem as definições de igualdade, soma e multiplicação descritas anteriormente, comumente indicamos os pares ordenados por z :

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y), \text{ onde } x, y \in \mathbb{R}$$

O número complexo $(0, 1)$ é indicado pela letra i e denominado *unidade imaginária*:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$i^2 = -1$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z = (x, y)$, onde $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (x, 0) + (0, y) \cdot (0, 1) \end{aligned}$$

Desta forma:

$$z = x + y.i$$

Assim dado $z \in \mathbb{C}$, $z = (x, y)$, podemos escrever z sob a forma $z = x + y.i$, denominada *forma algébrica*. Chamamos x de *parte real* e y de *parte imaginária* de z .

Logo todo $z \in \mathbb{C}$ será um *número real* caso sua parte imaginária seja nula, e todo $z \in \mathbb{C}$ será um *número imaginário puro* caso sua parte real seja nula.

Para desenvolvimento da teoria consideramos as seguintes propriedades que permitem uma melhor descrição de \mathbb{C} .

Proposição 2.1.1: *As operações de soma e multiplicação acima descritas são comutativas.*

Demonstração:

Consideremos $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ arbitrários em \mathbb{C} , temos

$$z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = w + z$$

e da mesma forma,

$$z \cdot w = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) = (ca - db, cd + da) = (c, d) \cdot (a, b) = w \cdot z.$$

Proposição 2.1.2: *O conjunto \mathbb{C} tem elementos neutros aditivo e multiplicativo.*

Demonstração:

Temos que o número complexo $(0, 0)$ é neutro aditivo porque dado $z = (a, b)$ arbitrário em \mathbb{C} temos,

$$z + (0, 0) = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = z$$

De acordo com a proposição anterior também temos $(0, 0) + z = z$, o que é suficiente para concluir que $(0, 0)$ é elemento neutro aditivo.

Similarmente $(1, 0)$ é o elemento neutro multiplicativo.

Demonstração:

Temos que o número complexo $(1, 0)$ é neutro multiplicativo porque dado $z = (a, b)$ arbitrário em \mathbb{C} temos,

$$z \cdot (1, 0) = (a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, b \cdot 1 + a \cdot 0) = (a - 0, b + 0) = (a, b) = z$$

De acordo com a proposição anterior também temos $(1, 0) \cdot z = z$, o que é suficiente para concluir que $(1, 0)$ é elemento neutro multiplicativo.

Proposição 2.1.3: Para cada $z = (a, b)$, elemento de \mathbb{C} definimos oposto de z por:

$$-z = (-a, -b),$$

Graficamente o oposto de z significa o simétrico de (a, b) em relação ao eixo y .

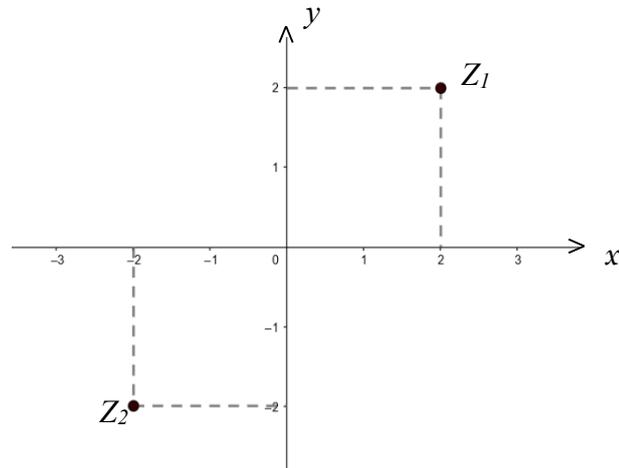


Fig 1: Z_2 é simétrico de Z_1

Observemos que $z + (-z) = (0,0)$

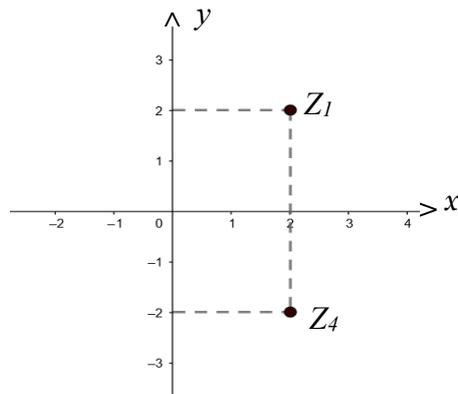
Proposição 2.1.4: Para cada $z = (a, b) \neq (0, 0)$, temos $a^2 + b^2 \neq 0$, logo tem sentido definir o inverso de z :

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

O número z^{-1} , também é denotado por $1/z$.

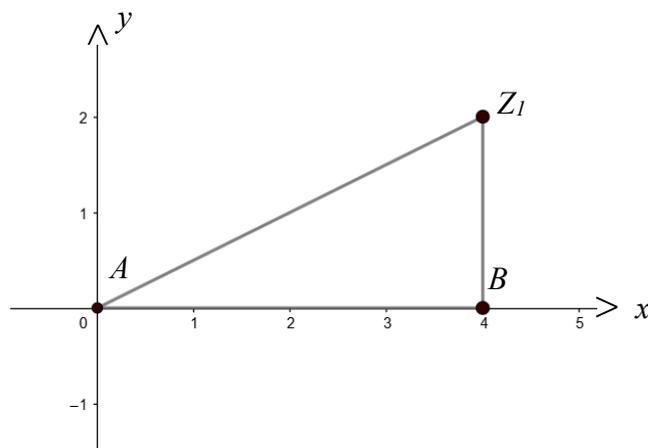
Proposição 2.1.5: Para cada $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, definimos conjugado de z :

$$\bar{z} = (a, -b)$$

Fig 2 : Z_4 é conjugado de Z_1

Proposição 2.1.6: Para cada $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, definimos módulo de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Fig 3: Distância entre A e Z_1

Ao calcularmos a distância entre A e Z_1 , temos em ABZ_1 um triângulo retângulo, e, por esse motivo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras.

2.2. OUTRAS PROPRIEDADES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ e $t = (x, y)$ pertencentes ao Conjunto dos Números Complexos \mathbb{C} .

a) **Associatividade da Adição:** $z + (w + t) = (z + w) + t$

Demonstração:

$$\begin{aligned} z + (w + t) &= (a, b) + [(c, d) + (x, y)] = (a, b) + (c + x, d + y) \\ &= (a + c + x, b + d + y) = (a + c, b + d) + (x, y) \\ &= [(a, b) + (c, d)] + (x, y) = (z + w) + t \end{aligned}$$

Logo: $z + (w + t) = (z + w) + t$

b) **Associatividade da Multiplicação:** $z \cdot (w \cdot t) = (z \cdot w) \cdot t$

Demonstração:

$$\begin{aligned} z \cdot (w \cdot t) &= (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (x, y)] = (a, b) \cdot (cx - dy, cy + dx) \\ &= (a(cx - dy) - b(cy + dx), a(cy + dx) + b(cx - dy)) \\ &= (acx - ady - bcy - bdx, acy + adx + bcx - bdy) \\ &= ((ac - bd)x - (ad + bc)y, (ac - bd)y \\ &\quad + (ad + bc)x)(ac - bd, ad + bc) \cdot (x, y) \\ &= [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (x, y) = (z \cdot w) \cdot t \end{aligned}$$

Logo, $z \cdot (w \cdot t) = (z \cdot w) \cdot t$

c) **Comutatividade da Multiplicação:** $z \cdot w = w \cdot z$

Demonstração:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) \\ &= (c, d) \cdot (a, b) = w \cdot z \end{aligned}$$

Logo. $z \cdot w = w \cdot z$

d) **Elemento Unidade:** $1 \cdot z = z$

Demonstração:

$$1 \cdot z = (1, 0) \cdot (a, b) = (1a - 0b, 1b + 0a) = (1a, 1b) = (a, b) = z$$

Logo. $1 \cdot z = z$

e) **Elemento Inverso:** $z \cdot z^{-1} = 1$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 z \cdot z^{-1} &= (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \\
 &= \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}, a \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right) \\
 &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) \\
 &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = 1
 \end{aligned}$$

Logo, $z \cdot z^{-1} = 1$

f) Distributividade da Multiplicação em relação à Adição: $z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 z \cdot (w + t) &= (a, b) \cdot [(c, d) + (x, y)] = (a, b) \cdot (c + x, d + y) \\
 &= (a(c + x) - b(d + y), a(d + y) + b(c + x)) \\
 &= (ac + ax - bd - by, ad + ay + bc + bx) \\
 &= (ac - bd + ax - by, ad + bc + ay + bx) \\
 &= (ac - bd, ad + bc) + (ax - by, ay + bx) \\
 &= (a, b)(c, d) + (a, b)(x, y) = z \cdot w + z \cdot t
 \end{aligned}$$

Logo, $z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t$

Até aqui, nós estamos identificando números complexos como pares ordenados (a, b) . Onde a é a coordenada no eixo das abscissas e b é a coordenada do eixo das ordenadas.

Temos, então, que a é a parte real e determina a distância entre o ponto z e o eixo imaginário. Já a parte imaginária é determinada por bi e determina a distância entre o ponto z e o eixo real.

Consideremos um conjunto \mathbb{R}' de \mathbb{C} formado pelos pares ordenados cujo valor no eixo das ordenadas é zero.

Temos que:

$$\mathbb{R}' = \{(a, b) \in \mathbb{C}, b = 0\}$$

Alguns exemplos de elementos pertencentes a \mathbb{R}' são os pares ordenados: $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(a + b, 0)$ e $(a \cdot b, 0)$.

Consideraremos, agora, uma função que leve cada número real x ao seu par $(x, 0)$.

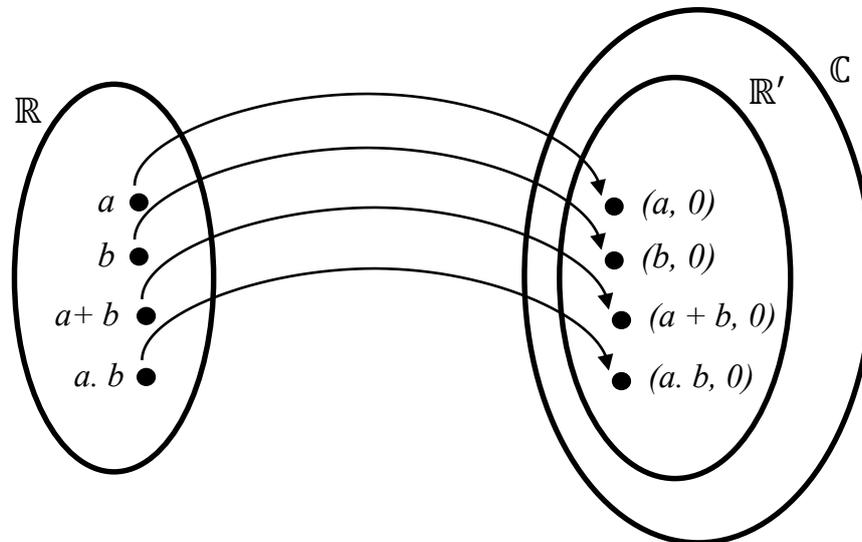


Fig 4: Função

Destacamos algumas características dessa função:

1. A função é bijetora, pois:

- Temos que f é sobrejetora, pois todo par $(x, 0) \in \mathbb{R}'$ é correspondente a algum $x \in \mathbb{R}$.

- Temos que f é injetora, pois dados x e $x' \in \mathbb{R}$ diferentes, temos que os pares $(x, 0)$ e $(x', 0) \in \mathbb{R}'$ também são diferentes.

1. A função conserva as operações de adição e multiplicação, pois:

- À soma $a + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, está associado ao par $(a + b, 0) \in \mathbb{R}'$ que pode ser obtido pela soma dos pares $(a, 0)$ e $(b, 0)$, correspondentes de a e b , respectivamente: $f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$

• Ao produto $a \cdot b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, está associado ao par $(a \cdot b, 0) \in \mathbb{R}'$ que pode ser obtido pelo produto dos pares $(a, 0)$ e $(b, 0)$, correspondentes de a e b , respectivamente:

$$f(a \cdot b) = (a \cdot b + 0, 0, a \cdot 0 - b \cdot 0) = (b \cdot a, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b)$$

Como existe uma função bijetora de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ e que conserva as operações de adição e multiplicação, podemos dizer que \mathbb{R} e \mathbb{R}' são isomorfos.

E o isomorfismo nos leva a resultados análogos aos obtidos em x .

Isso nos justifica a igualdade:

$$x = (x, 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

notação que usaremos daqui por diante.

Seja $z = a + bi$ um número complexo não nulo e consideremos a figura abaixo

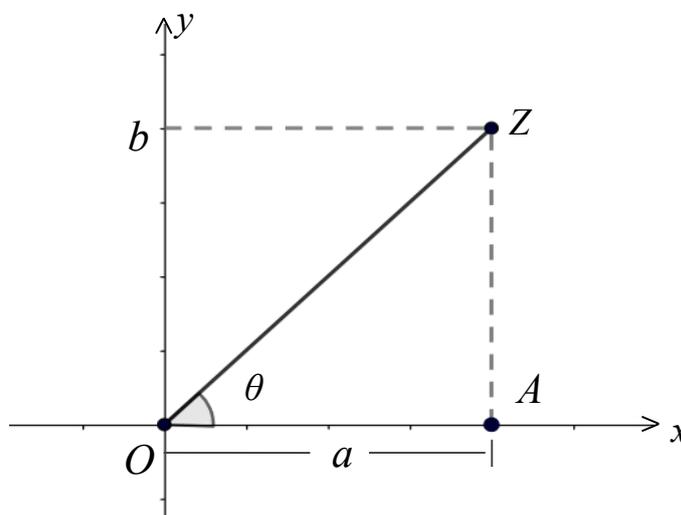


Fig 5: Plano Cartesiano

Proposição 2.1.7: Para cada $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, definimos a forma trigonométrica, ou forma polar, de z :

$$z = |z|(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$$

onde:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{|z|} \text{ e } \cos \theta = \frac{a}{|z|}$$

Logo:

$$b = |z| \operatorname{sen} \theta \text{ e } a = |z| \operatorname{cos} \theta$$

A fórmula apresentada acima é conhecida “fórmula de De Moivre” e nos permite simplificar os cálculos operacionais com números complexos na forma polar e, ainda, realizar o cálculo de raízes de números complexos.

Proposição 2.1.8: *Dado $z = \rho(\operatorname{cos} \theta + i \operatorname{sen} \theta) \in \mathbb{C}$, então para qualquer $n \in \mathbb{Q}$ vale a seguinte igualdade*

$$z^n = \rho^n(\operatorname{cos}(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

Demonstração:

Como $z \in \mathbb{C}$, escrevendo em sua forma polar temos que $z = \rho(\operatorname{cos} \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, com $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Como $n \in \mathbb{Q}$, então existem $m, p \in \mathbb{Z}$, com $p \neq 0$, tais que $n = \frac{m}{p}$.

Vamos, primeiramente, considerar $p = 1$ e $m \geq 0$.

Utilizaremos o método de indução para fazer a demonstração que é válido para qualquer $m \geq 0$.

Assim, para $n = 0$ temos:

$$z^0 = \rho^0(\operatorname{cos}(0 \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(0 \cdot \theta)) = 1(\operatorname{cos} 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1 \cdot (1 + 0) = 1$$

O que é válido, pois $z^0 = 1$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

Consideraremos, agora que essa relação seja válida para m , ou seja,

$$z^m = \rho^m(\operatorname{cos}(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta))$$

Fazendo uso da validade para m , mostraremos, agora, a validade para $m + 1$.

Temos:

$$z^{m+1} = z^m \cdot z = [\rho^m (\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta))] \cdot [\rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]$$

pela propriedade de multiplicação de números complexos em forma polar, temos que:

$$z^{m+1} = \rho^{m+1} (\cos((m+1)\theta) + i \operatorname{sen}((m+1)\theta))$$

Provamos assim que vale para qualquer $m \geq 0$.

Consideraremos agora a ideia de $m < 0$, onde podemos definir

$$z^m = \frac{1}{z^{-m}}$$

Como $-m > 0$, afirmamos que:

$$z^{-m} = \rho^{-m} (\cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta))$$

E consideramos:

$$1 = 1 + 0i = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

Temos, então:

$$z^m = \frac{1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)}{\rho^{-m} (\cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta))}$$

Pela propriedade de divisão de complexos em forma polar, nos garante que:

$$z^m = \frac{1}{\rho^{-m}} (\cos(0 - (-m\theta)) + i \operatorname{sen}(0 - (-m\theta))) = \rho^m (\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta))$$

Provando assim que essa propriedade é válida para qualquer $m \in \mathbb{Z}$.

Vamos considerar agora $p \neq 1$, assim, temos

$$\frac{m}{z^p} = \left(\frac{1}{z^p} \right)^m$$

Como já provamos que é válido para z^m , basta provarmos se vale também para $z^{\frac{1}{p}}$ para qualquer $p \in \mathbb{Z}$.

Observemos que não há necessidade de considerarmos $p < 0$, pois assim teríamos $-p > 0$ e como

$$z^{\frac{1}{p}} = z^{-p}$$

o resultado seguirá da demonstração para qualquer potência positiva.

Considerando, $z^{\frac{1}{p}} = w$ para os próximos cálculos, temos:

Como z e z_w são números complexos, então os escreveremos em sua forma polar, assim, para $p_w \in \mathbb{R}^+$ e $0 \leq \theta_w \leq 2\pi$, teremos

$$z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad (1)$$

$$w = \rho_w(\cos \theta_w + i \operatorname{sen} \theta_w) \quad (2)$$

Sabemos que

$$z_w^p = \left(z^{\frac{1}{p}}\right)^p = z^{\frac{p}{p}} = z^1 = z \quad (3)$$

assim, como já provado anteriormente para potências de complexos na forma polar, temos através de (2) que:

$$z_w^p = \rho_w^p(\cos(p\theta_w) + i \operatorname{sen}(p\theta_w)) \quad (4)$$

substituindo (1) e (4) em (3) temos

$$\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \rho_w^p(\cos(p\theta_w) + i \operatorname{sen}(p\theta_w))$$

Assim, pela igualdade de números complexos temos que

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_w^p \Leftrightarrow \rho_w = \rho^{\frac{1}{p}} \\ \cos \theta &= \cos(p\theta_w) \\ \sin \theta &= \sin(p\theta_w) \end{aligned}$$

E portanto,

$$z^{\frac{1}{p}} = w = \rho^{\frac{1}{p}}\left(\cos\left(\frac{1}{p}\theta\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{p}\theta\right)\right)$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned} z^n = z^{\frac{m}{p}} &= \left(z^{\frac{1}{p}} \right)^m = \left[\rho^{\frac{1}{p}} \left(\cos \left(\frac{1}{p} \theta \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{1}{p} \theta \right) \right) \right]^m \\ &= \rho^{\frac{m}{p}} \left(\cos \left(\frac{m}{p} \theta \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{m}{p} \theta \right) \right) = \rho^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) \end{aligned}$$

o que completa a validade da “fórmula de De Moivre” para qualquer $n \in \mathbb{Q}$.

CAPÍTULO 3

Regiões no plano

Mostraremos agora a aplicação do Conjunto dos Números Complexos com as Equações das Cônicas: Circunferência, Elipse e Hipérbole.

Neste capítulo traremos as definições das Cônicas.

As cônicas são figuras geométricas planas que são definidas a partir da intersecção de um cone circular com o plano.

A introdução dos números complexos como ferramenta para a resolução de equações algébricas é bastante conhecida, conforme destacamos no capítulo anterior. Por outro lado, algumas generalizações do conjunto dos números reais para o conjunto \mathbb{C} dos complexos, são bastante intuitivas, destacamos, por exemplo, a noção de módulo de um número real. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, o módulo de a pode ser definido por,

$$|a| = \sqrt{a^2} \quad (*)$$

que é uma particularidade natural do módulo de um número complexo $z = a + bi$, definido por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (**)$$

De fato, a pode ser identificado ao número complexo $a+0i$, e assim as definições de $|a|$ e de $|a+0i|$ são coincidentes.

A definição (*) possibilita a resolução de equações em \mathbb{R} , de maneira interessante, como podemos observar com $a > 0$.

$$\begin{aligned} |x| = a &\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = a \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow \\ &x^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &x = a \text{ ou } x = -a \end{aligned}$$

De forma similar, a inequação em \mathbb{R} , $|x| < a$, ($a > 0$) pode ser resolvida com a técnica aplicada neste contexto,

$$\begin{aligned} |x| < a &\Leftrightarrow \sqrt{x^2} < a \Leftrightarrow \\ &x^2 < a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 < 0 \Leftrightarrow \\ &-a < x < a \end{aligned}$$

Ainda em \mathbb{R} , com uma adaptação simples, podemos abordar, com a mesma técnica, as equações e inequações da forma $|x - b| = a$ ou $|x - b| < a$.

Ou seja, as técnicas transformam uma equação ou inequação modular em uma equação ou inequação quadrática equivalente, cuja resolução já foi explorada em momento anterior da aprendizagem matemática.

A proposta de nosso trabalho consiste em aplicar a mesma técnica no campo complexo, para esta finalidade usamos a identificação natural de um número complexo $a+bi$ ao ponto (a,b) do plano cartesiano, conforme foi descrito no capítulo 1 deste trabalho.

3.1. CIRCUNFERÊNCIAS

Seja z_0 um número complexo da forma $z_0 = a + bi$ e r um número real positivo. Para a resolução da equação $|z - z_0| = r$, temos, considerando $z = x + yi$ que

$$\begin{aligned} |z - z_0| = r &\Leftrightarrow \\ |x + yi - (a + bi)| = r &\Leftrightarrow \\ |(x - a) + (y - b)i| = r &\Leftrightarrow \\ \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r &\Leftrightarrow \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 & \end{aligned}$$

Ou seja, se o número complexo $z = x + yi$ é solução da equação modular, então o ponto (x, y) está em uma circunferência de centro (a, b) e raio r , conforme mostra a figura abaixo.

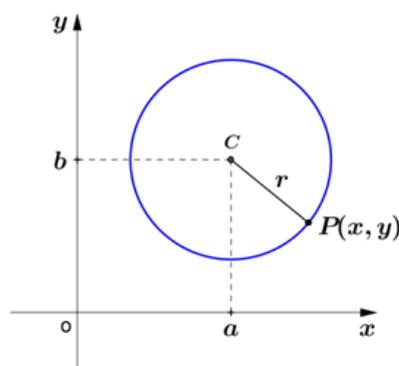


Fig 6: Circunferência

Observemos que o módulo $|z - z_0|$ representa a distância entre os pontos representados pelos números complexos z e z_0 , logo a solução da equação $|z - z_0| = r$, realmente representa uma circunferência, por se tratar do conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo C , desse plano.

Apresentaremos na sequencia outras regiões do plano que tomam como base a equação da circunferência:

3.2. CÍRCULOS

Fixados os números $s > 0$ e $z_0 = a + bi$ real e complexo respectivamente, vamos explorar o conjunto de todos os números complexos z que satisfazem a inequação $|z - z_0| < s$. Considerando que já analisamos uma igualdade da forma $|z - z_0| = r$, podemos interpretar este conjunto como a união de todos os conjuntos da forma $|z - z_0| = r$, onde r pode assumir qualquer valor real que atenda a desigualdade

$$0 \leq r < s$$

Assim, obteremos circunferências concêntricas, como mostra a figura abaixo para alguns valores de r : $r_1 > \dots > r_4$.

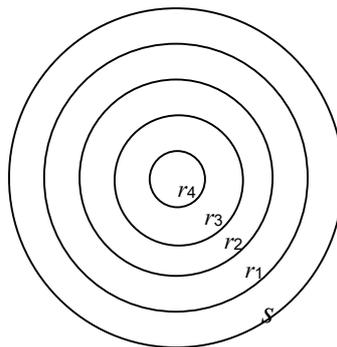


Fig 7: Circunferências Concêntricas

Ampliando o número de circunferências podemos preencher ainda mais a circunferência, de forma que o preenchimento completo ocorre quando se considera todos os valores de r da desigualdade $0 \leq r < s$.

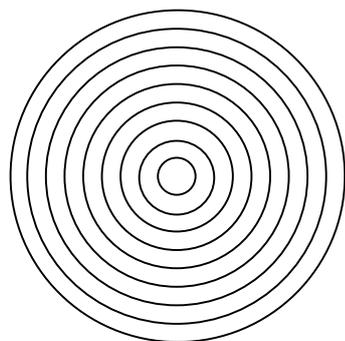


Fig 8: Circunferências Concêntricas

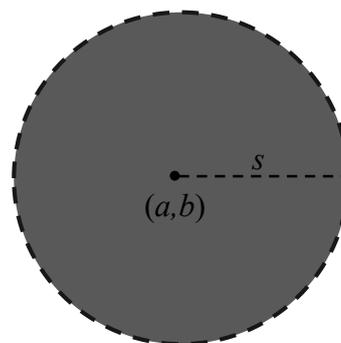


Fig 9: Circunferência Aberta

Portanto, a figura acima à direita é a região determinada pela desigualdade $|z - z_0| < s$ chamada de círculo aberto (ou disco aberto) de raio s . O disco fechado (ou círculo fechado) de raio s é obtido similarmente pela desigualdade modular $|z - z_0| \leq s$ e sua representação inclui a circunferência pontilhada $|z - z_0| = s$, como mostra a figura a seguir.

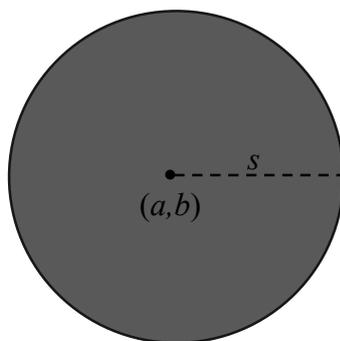


Fig 10: Circunferência Fechada

3.3. EXTERIOR DA CIRCUNFERÊNCIA

Seja $z_0 = a + bi$ um número complexo fixo e s um número real positivo. O exterior da circunferência de centro z_0 e raio s é o conjunto do plano dado pela união de todas as circunferências de centro z_0 e raio r , onde $r > s$. Cada uma destas circunferências é expressa pela igualdade $|z - z_0| = r$, e então utilizando o mesmo raciocínio esboçado no caso do círculo, podemos obter o exterior como o conjunto dos pontos z que atendem a desigualdade $|z - z_0| > s$, correspondente à região em negrito a seguir

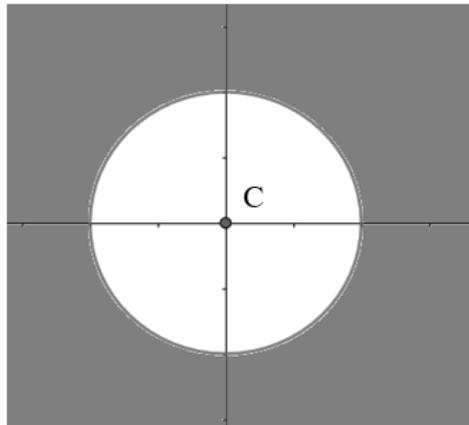


Fig 11: Exterior da Circunferência

3.4. COROA CIRCULAR

Uma coroa circular é obtida a partir de duas circunferências concêntricas de centro $z_0 = a + bi$ e raios r e s . Supondo $r < s$, consiste da interseção entre o disco de raio s e o exterior da circunferência de raio r . Portanto os pontos z que estão na referida coroa satisfazem a desigualdade:

$$r < |z - z_0| < s$$

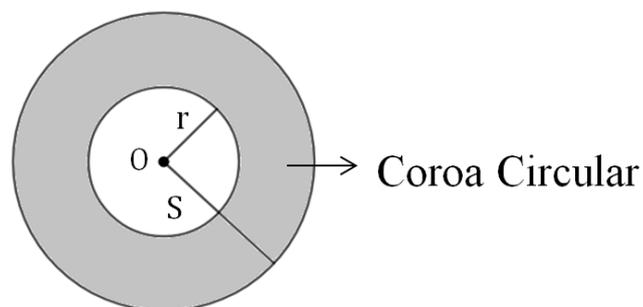


Fig 12: Coroa Circular

3.5. ELIPSE

Definição: Dados dois pontos F_1 e F_2 quaisquer do plano distantes $2c$ unidades. A elipse de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é uma constante fixa $2a$, sendo $2a$ maior que $2c$ ($2a > 2c$).

Com base nestas definições e na figura seguinte, vamos elencar os elementos básicos componentes da elipse. Os pontos F_1 e F_2 são chamados os focos da elipse e a distância entre eles é a distância focal ($2c$). O segmento de reta A_1A_2 é o maior eixo da elipse, passa pelos focos e sua medida é a soma da definição $2a$. O segmento B_1B_2 é o menor eixo da elipse e sua medida corresponde a $2b$. O centro C é o ponto médio entre os eixos da elipse e os focos A_1A_2 e F_1F_2 .

Por definição, a excentricidade e da elipse é calculada pela razão entre c e a , ou seja,

$$e = \frac{c}{a}$$

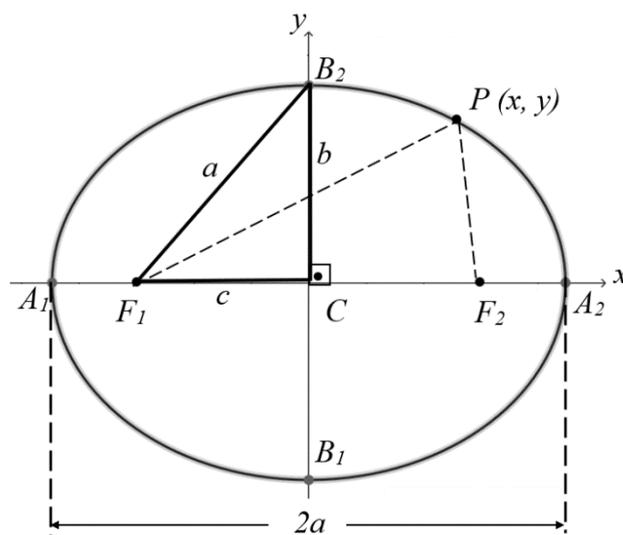


Fig 13: Elipse

Há uma relação notável entre os valores a , b e c , temos $a^2 = b^2 + c^2$, que segue do fato de que o triângulo formado por a , b e c é retângulo (o centro da elipse é um dos vértices do triângulo, o segmento de reta $\overline{F_1C} = c$ está totalmente sobre o eixo x e o

segmento de reta $\overline{CB_2} = b$ está totalmente sobre o eixo y) e da aplicação do Teorema de Pitágoras neste triângulo.

EQUAÇÃO DA ELIPSE.

1º caso: *Elipse com focos sobre o eixo x .*

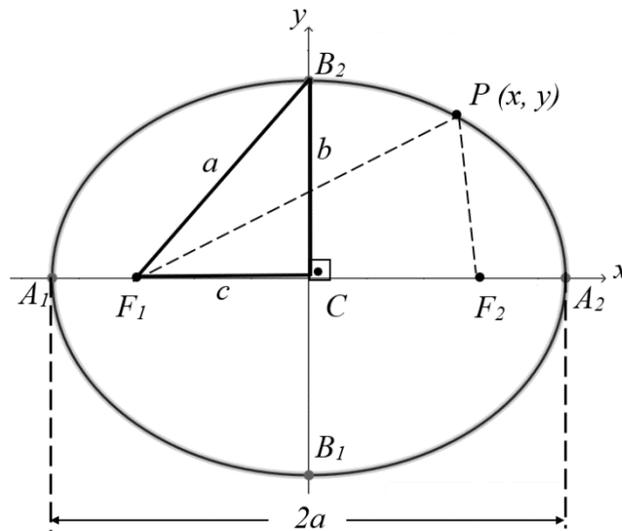


Fig 14: Elipse com Focos no eixo das abscissas

Estando no eixo das abscissas do plano cartesiano, as coordenadas dos pontos representativos dos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, uma vez que podemos escolher um sistema de coordenadas cartesianas de modo que a origem seja o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$.

De acordo com a definição, a elipse é o conjunto dos pontos $z = (x, y)$, ou ainda ($z = x + yi$) cuja soma das distâncias até os focos é igual ao número real $2a$ e uma vez que $|F_1 - F_2| = \sqrt{(c + c)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(2c)^2} = \sqrt{4c^2} = 2c$, devemos ter $a > c$.

Da definição e das representações de z , F_1 e F_2 , temos

$$|z - F_1| + |z - F_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y)^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + (y)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x - c)^2 + (y)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x + c)^2 + (y)^2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
(x-c)^2 + (y)^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} + (x+c)^2 + (y)^2 \\
x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \\
4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} &= 4a^2 + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2 \\
4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} &= 4a^2 + x^2 - x^2 + 2xc + 2xc + c^2 - c^2 + y^2 - y^2 \\
4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} &= 4a^2 + 4xc \\
\frac{4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}}{4} &= \frac{4a^2 + 4xc}{4} \\
a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} &= a^2 + xc \\
\left(a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}\right)^2 &= (a^2 + xc)^2 \\
(a)^2 \left(\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}\right)^2 &= (a^2 + xc)^2 \\
a^2((x+c)^2 + (y)^2) &= (a^2 + xc)^2 \\
a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) &= a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 \\
a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 \\
a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 + 2a^2xc - 2a^2xc \\
a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}$$

Como $a > c > 0$, implica $a^2 - c^2 > 0$, chamaremos, por conveniência, $a^2 - c^2 = b^2$, para algum $b > 0$, logo

$$\begin{aligned}
x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
x^2b^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\
\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

Portanto, a elipse formada pelo conjuntos de pontos Z , $Z = x + yi$ cuja soma das distâncias até os focos $F_1 = -c + 0i$ e $F_2 = c + 0i$ é igual a uma constante $2a$, tem como equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sendo $b > 0$, o número que satisfaz $a^2 = b^2 + c^2$.

As intersecções da elipse com os eixos cartesianos serão os $A_1 = a + 0i$ e $A_2 = -a + 0i$; $B_1 = 0 + bi$ e $B_2 = 0 - bi$.

Os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são chamados, respectivamente, eixo maior e eixo menor da elipse.

2º Caso: Elipse com focos sobre o eixo y.

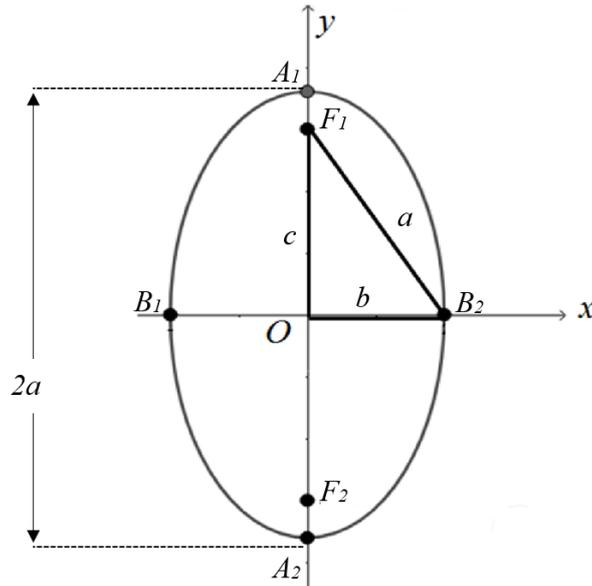


Fig 15: Elipse com Focos no eixo das ordenadas

Suponhamos um plano π fixado e dois pontos $F_1 = 0 - ci$ e $F_2 = 0 + ci$ que pertencem a π , sobre o eixo y. A definição de elipse é o conjunto dos pontos $Z = x + yi$ do plano π cuja soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é constante. Esses pontos F_1 e F_2 são chamados focos. Para obtermos uma equação da elipse na forma reduzida, vamos escolher um sistema de coordenadas cartesianas de modo que os focos estejam no eixo dos x e a origem seja o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Assim, teremos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, para algum número real positivo c.

Calculando a distância entre os focos, temos:

$$|F_1 - F_2| = \sqrt{(0 - 0)^2 + (c + c)^2} = \sqrt{(2c)^2} = \sqrt{4c^2} = 2c$$

Portanto, a distância entre os focos $|F_1 - F_2|$ é $2c$.

Suponhamos que a soma das distâncias de um ponto da elipse até os focos seja igual ao número real positivo que, por conveniência, chamaremos de $2a$.

Observe que $a > c$.

Um ponto Z , $Z = (x, y)$, $Z = x + yi$, pertence à elipse se e somente se:

$$|Z - F_1| + |Z - F_2| = 2a$$

Sendo, $Z = x + yi$, $F_1 = 0 - ci$ e $F_2 = 0 + ci$, temos:

$$|Z - F_1| + |Z - F_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x+0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x)^2 + (y-c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x)^2 + (y-c)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}\right)^2$$

$$(x)^2 + (y-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2} + (x)^2 + (y+c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yc + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2} + x^2 + y^2 + 2yc + c^2$$

$$4a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2} = 4a^2 + x^2 + 2yc + c^2 + y^2 - x^2 + 2yc - c^2 - y^2$$

$$4a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2} = 4a^2 + x^2 - x^2 + 2yc + 2yc + c^2 - c^2 + y^2 - y^2$$

$$4a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2} = 4a^2 + 4yc$$

$$\frac{4a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}}{4} = \frac{4a^2 + 4yc}{4}$$

$$a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2} = a^2 + yc$$

$$\left(a\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}\right)^2 = (a^2 + yc)^2$$

$$(a)^2 \left(\sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}\right)^2 = (a^2 + yc)^2$$

$$a^2((x)^2 + (y+c)^2) = (a^2 + yc)^2$$

$$a^2(x^2 + y^2 + 2yc + c^2) = a^4 + 2a^2yc + y^2c^2$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^2yc + a^2c^2 = a^4 + 2a^2yc + y^2c^2$$

$$a^2x^2 - y^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 + 2a^2yc - 2a^2yc$$

$$a^2y^2 - y^2c^2 + a^2x^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$y^2(a^2 - c^2) + a^2x^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a > c > 0$, implica $a^2 - c^2 > 0$, chamaremos, por conveniência, $a^2 - c^2 = b^2$, para algum $b > 0$.

Logo:

$$\begin{aligned}y^2(a^2 - c^2) + a^2x^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\y^2b^2 + a^2x^2 &= a^2b^2 \\ \frac{y^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2x^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} &= 1\end{aligned}$$

Portanto, a elipse formada pelo conjuntos de pontos Z ($Z = x + yi$) cuja soma das distâncias até os focos $F_1 = 0 - ci$ e $F_2 = 0 + ci$ é igual a uma constante $2a$, tem como equação reduzida

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Sendo $b > 0$, o número que satisfaz $a^2 = b^2 + c^2$.

As intersecções da elipse com os eixos cartesianos serão os $A_1 = 0 + ai$ e $A_2 = 0 - ai$; $B_1 = b + 0i$ e $B_2 = -b + 0i$.

Os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são chamados, respectivamente, eixo menor e eixo maior da elipse.

Ao trabalharmos com números complexos, temos que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é a equação reduzida da elipse com foco sobre o eixo x e

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

é a equação reduzida da elipse com foco sobre o eixo y , e permite determinar os elementos essenciais para a construção da elipse.

Logo, o Lugar Geométrico onde a soma da distância entre dois pontos é constante, temos que a elipse em questão é dada por:

$$|z - z_0| + |z - z_1| = e$$

onde e é maior que a distância entre os pontos.

3.6 HIPÉRBOLE

Consideremos um plano β , sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos deste plano, onde $2c$ representa a distância entre estes dois pontos. Chamamos de Hipérbole ao conjunto de todos os pontos cuja a diferença em módulo das distâncias a F_1 e F_2 será a constante $2a$, onde $0 < 2a < 2c$.

Por exemplo, sendo P, Q, R, S, F_1 e F_2 pontos de um mesmo plano e $\overline{F_1F_2} = 2c$

$$\begin{aligned} |PF_1 - PF_2| &= 2a \\ |QF_1 - QF_2| &= 2a \\ |RF_1 - RF_2| &= 2a \\ |SF_1 - SF_2| &= 2a \end{aligned}$$

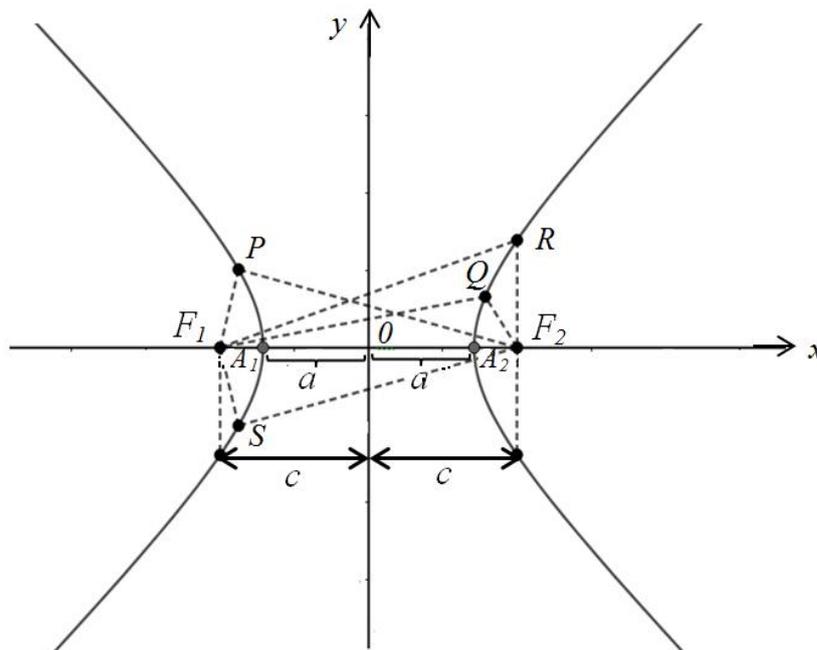


Fig 16: Hipérbole

A figura obtida é uma hipérbole.

Observação: os dois ramos da hipérbole são determinados por um plano paralelo ao eixo de simetria de dois cones circulares retos e opostos pelo vértice:

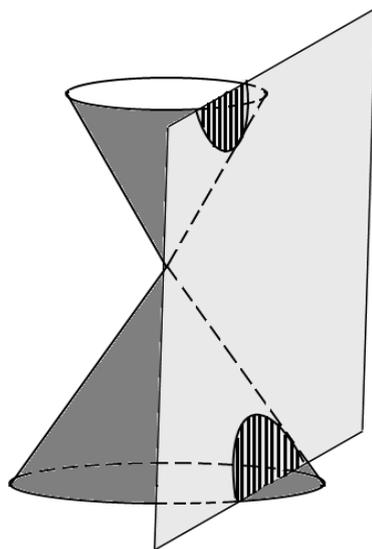


Fig 17: Hipérbole cortada por um Plano

A figura a seguir mostra os principais elementos da hipérbole onde os pontos F_1 e F_2 são chamados focos da hipérbole, sendo $2c$ a distância focal (distância entre os focos), o ponto O é o centro, o segmento de reta A_1A_2 denominado eixo real sendo $2a$ a medida do eixo real, o segmento de reta B_1B_2 denominado eixo imaginário sendo $2b$ a medida do eixo imaginário, e $\frac{c}{a}$ denominada excentricidade da hipérbole e representada pela letra e . Destacamos a *Relação Notável*: $c^2 = a^2 + b^2$.

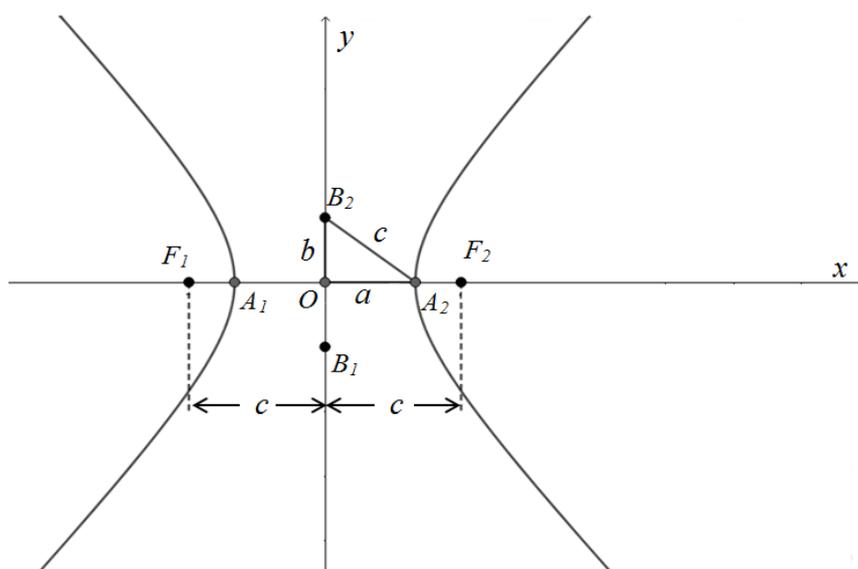


Fig 18: Hipérbole e seus Elementos

EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE

1º Caso: *Hipérbole com focos no eixo x*

Considerando os Pontos F_1 e F_2 com coordenadas no eixo das abcissas do plano cartesiano, teremos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ uma vez que podemos escolher um sistema de coordenadas cartesianas de modo que a origem seja o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$.

De acordo com a definição, a hipérbole é o conjunto dos pontos $z = (x, y)$, ou ainda $(z = x + yi)$ cuja diferença das distâncias até os focos é igual ao número real $2a$ e uma vez que $|F_1 - F_2| = \sqrt{(c + c)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(2c)^2} = \sqrt{4c^2} = 2c$, devemos ter $0 < a < c$.

Da definição e das representações de z , F_1 e F_2 , temos

$$\begin{aligned}
 |Z - F_1| - |Z - F_2| &= 2a \\
 \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} &= 2a \\
 \sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y)^2} &= 2a \\
 \sqrt{(x - c)^2 + (y)^2} &= 2a + \sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} \\
 \left(\sqrt{(x - c)^2 + (y)^2}\right)^2 &= \left(2a + \sqrt{(x + c)^2 + (y)^2}\right)^2 \\
 (x - c)^2 + (y)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} + (x + c)^2 + (y)^2 \\
 x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \\
 -4a\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} &= 4a^2 + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2 \\
 -4a\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} &= 4a^2 + x^2 - x^2 + 2xc + 2xc + c^2 - c^2 + y^2 - y^2 \\
 -4a\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} &= 4a^2 + 4xc \\
 \frac{4a\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2}}{4} &= \frac{4a^2 + 4xc}{4} \\
 -a\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} &= a^2 + xc \\
 \left(-a\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2}\right)^2 &= (a^2 + xc)^2 \\
 (-a)^2 \left(\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2}\right)^2 &= (a^2 + xc)^2 \\
 a^2((x + c)^2 + (y)^2) &= (a^2 + xc)^2 \\
 a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) &= a^4 + 2a^2xc + x^2c^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 \\
 a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 + 2a^2xc - 2a^2xc \\
 a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
 x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
 \end{aligned}$$

Como $0 < a < c$, implica $a^2 - c^2 < 0$, chamaremos, por conveniência, $a^2 - c^2 = -b^2$ para algum $b > 0$, logo

$$\begin{aligned}
 x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
 -x^2b^2 + a^2y^2 &= -a^2b^2 \\
 -\frac{x^2b^2}{(-a^2b^2)} + \frac{a^2y^2}{(-a^2b^2)} &= -\frac{a^2b^2}{(-a^2b^2)} \\
 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1
 \end{aligned}$$

Portanto, a hipérbole formada pelo conjuntos de pontos Z , $Z = x + yi$ cuja diferença das distâncias até os focos $F_1 = -c + 0i$ e $F_2 = c + 0i$ é igual a uma constante $2a$, tem como equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sendo $b > 0$, o número que satisfaz $c^2 = a^2 + b^2$.

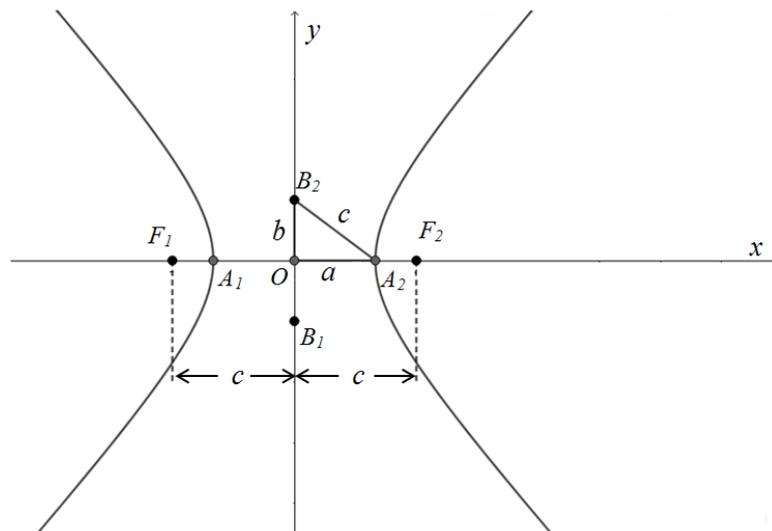


Fig 19: Hipérbole com focos no eixo x

As intersecções da hipérbole com os eixos cartesianos serão os $A_1 = -a + 0i$ e $A_2 = a + 0i$.

2º Caso: *Hipérbole com focos no eixo y*

Sejam os Pontos F_1 e F_2 com coordenadas no eixo das ordenadas do plano cartesiano, teremos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ uma vez que podemos escolher um sistema de coordenadas cartesianas de modo que a origem seja o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$.

Seguindo a definição, a hipérbole é o conjunto dos pontos $z = (x, y)$, ou ainda ($z = x + yi$) cuja diferença das distâncias até os focos é igual ao número real $2a$ e uma vez que $|F_1 - F_2| = \sqrt{(0 + 0)^2 + (c + c)^2} = \sqrt{(2c)^2} = \sqrt{4c^2} = 2c$, devemos ter $0 < a < c$.

Sendo, $Z = x + yi$, $F_1 = 0 - ci$ e $F_2 = 0 + ci$, temos:

$$|Z - F_1| - |Z - F_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x + 0)^2 + (y + c)^2} - \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y + c)^2} - \sqrt{(x)^2 + (y - c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y - c)^2} = 2a + \sqrt{(x)^2 + (y + c)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x)^2 + (y - c)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x)^2 + (y + c)^2}\right)^2$$

$$(x)^2 + (y - c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x)^2 + (y + c)^2} + (x)^2 + (y + c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yc + c^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x)^2 + (y + c)^2} + x^2 + y^2 + 2yc + c^2$$

$$-4a\sqrt{(x)^2 + (y + c)^2} = 4a^2 + x^2 + 2yc + c^2 + y^2 - x^2 + 2yc - c^2 - y^2$$

$$-4a\sqrt{(x)^2 + (y + c)^2} = 4a^2 + x^2 - x^2 + 2yc + 2yc + c^2 - c^2 + y^2 - y^2$$

$$-4a\sqrt{(x)^2 + (y + c)^2} = 4a^2 + 4yc$$

$$-\frac{4a\sqrt{(x)^2 + (y + c)^2}}{4} = \frac{4a^2 + 4yc}{4}$$

$$-a\sqrt{(x)^2 + (y + c)^2} = a^2 + yc$$

$$\left(-a\sqrt{(x)^2 + (y + c)^2}\right)^2 = (a^2 + yc)^2$$

$$(-a)^2 \left(\sqrt{(x)^2 + (y + c)^2}\right)^2 = (a^2 + yc)^2$$

$$a^2((x)^2 + (y + c)^2) = (a^2 + yc)^2$$

$$\begin{aligned}
a^2(x^2 + y^2 + 2yc + c^2) &= a^4 + 2a^2yc + y^2c^2 \\
a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^2yc + a^2c^2 &= a^4 + 2a^2yc + y^2c^2 \\
a^2x^2 - y^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 + 2a^2yc - 2a^2yc \\
a^2y^2 - y^2c^2 + a^2x^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
y^2(a^2 - c^2) + a^2x^2 &= a^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}$$

Como $0 < a < c$, implica $a^2 - c^2 < 0$, chamaremos, por conveniência, $a^2 - c^2 = -b^2$ para algum $b > 0$, logo

$$\begin{aligned}
y^2(a^2 - c^2) + a^2x^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
-y^2b^2 + a^2x^2 &= -a^2b^2 \\
-\frac{y^2b^2}{(-a^2b^2)} + \frac{a^2x^2}{(-a^2b^2)} &= -\frac{a^2b^2}{(-a^2b^2)} \\
\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} &= 1
\end{aligned}$$

Portanto, a hipérbole formada pelo conjuntos de pontos Z , $Z = x + yi$ cuja diferença das distâncias até os focos $F_1 = 0 - ci$ e $F_2 = 0 + ci$ é igual a uma constante $2a$, tem como equação reduzida

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

sendo $b > 0$, o número que satisfaz $c^2 = a^2 + b^2$.

As intersecções da hipérbole com os eixos cartesianos serão os $A_1 = 0 - ai$ e $A_2 = 0 + ai$.

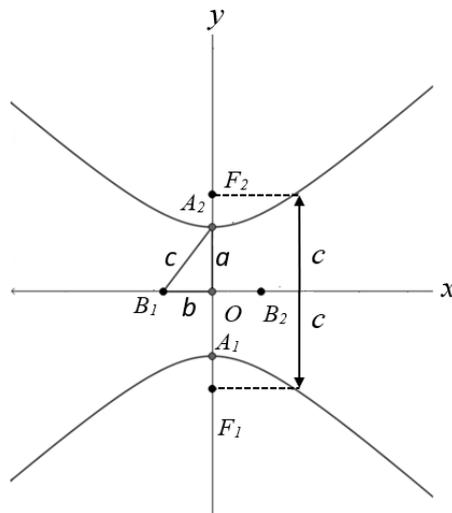


Fig 20: Hipérbole com focos no eixo y

3.7 EXEMPLOS

Apresentamos agora alguns exercícios resolvido referente ao tema relacionado nesse capítulo.

Exemplo 1. Vamos apresentar a equação da Circunferência de centro em $(2,1)$ e raio 3.

Temos que $|z - z_0| = r$, $z = x + yi$, $C = z_0 = 2 + 1i$ e $r = 3$

Temos ainda que $|z - z_0|$ determina a distância entre os pontos z e z_0 .

Logo:

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= r \\ \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} &= 3 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 &= 3^2 \end{aligned}$$

$\therefore (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$ é a equação da circunferência de raio 3 e centro em $(2,1)$.

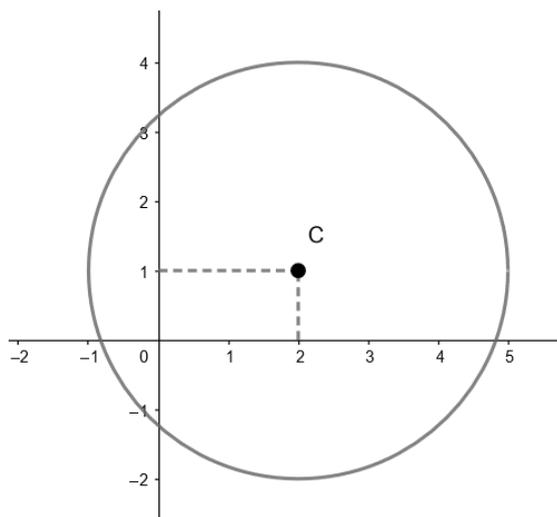


Fig 21: Exemplo 1

Exemplo 2. Vamos traçar a circunferência $|z - 2| = 5$

Temos que $A = z_0 = 2 + 0i$ e $r = 5$

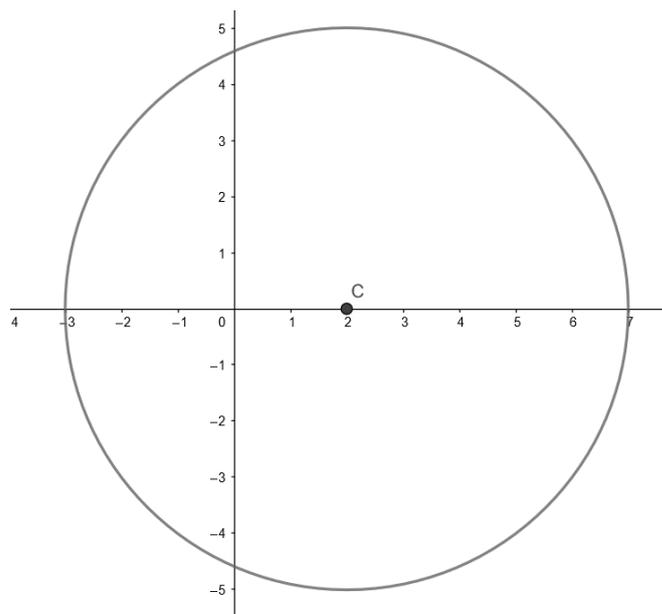


Fig 22: Exemplo 2

Exemplo 3. Traçar o disco fechado tal que $|z - 2| \leq 5$

Temos que $A = z_0 = 2 + 0i$ e $r = 5$

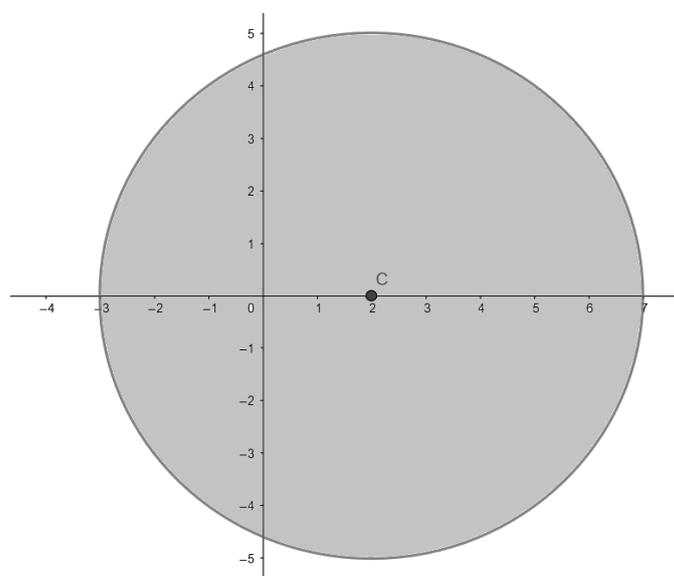


Fig 23: Exemplo 3

Exemplo 4. Definir o conjunto dos pontos z tal que $|z + 2 - 2i| < 2$.

Temos que $|z + 2 - 2i| < 2$ pode ser reescrito da forma $|z - (-2 + 2i)| < 2$.

Portanto, temos um disco aberto de centro em $z_0 = -2 + 2i$ e $r = 2$.

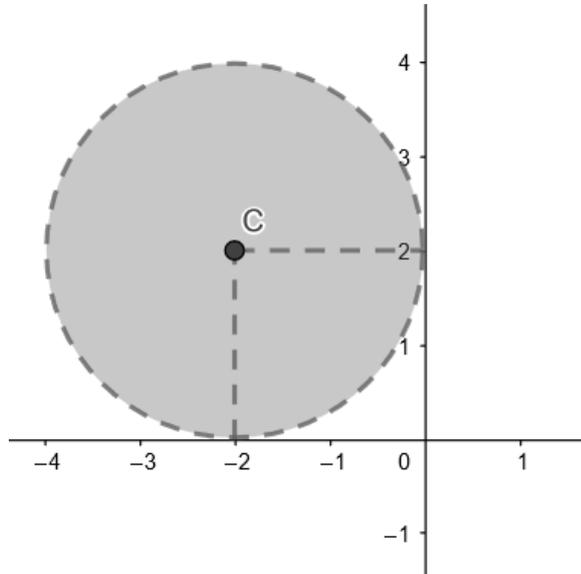


Fig 24: Exemplo 4

Exemplo 5. Definir o conjunto dos pontos z tal que $|z + i - 1| \leq 5$.

Temos que $|z + i - 1| \leq 5$ pode ser reescrito da forma $|z + (-1 + i)| \leq 5$.

Portanto, temos um disco fechado de centro em $z_0 = -1 + i$ e $r = 5$.

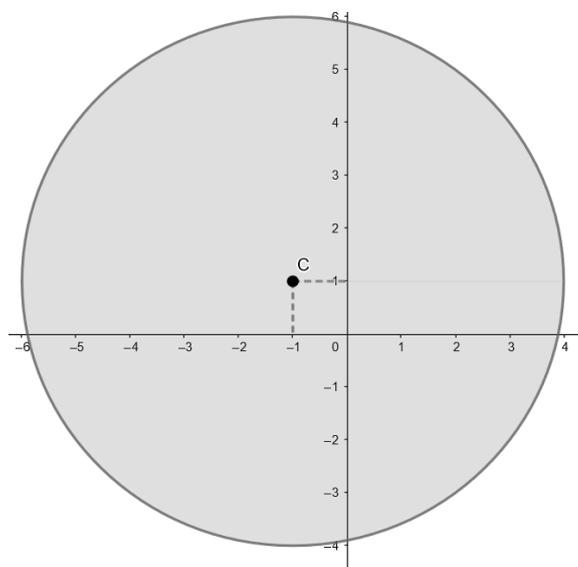


Fig 25: Exemplo 5

Exemplo 6. Definir o conjunto dos pontos z tal que $4 \leq |z + i - 1| \leq 5$.

Temos que $4 \leq |z + i - 1| \leq 5$ pode ser reescrito da forma

$$4 \leq |z + (-1 + i)| \leq 5.$$

Portanto, temos um conjunto conexo ou coroa de centro em $z_0 = -1 + i$ e raios $r = 4$ e $s = 5$.

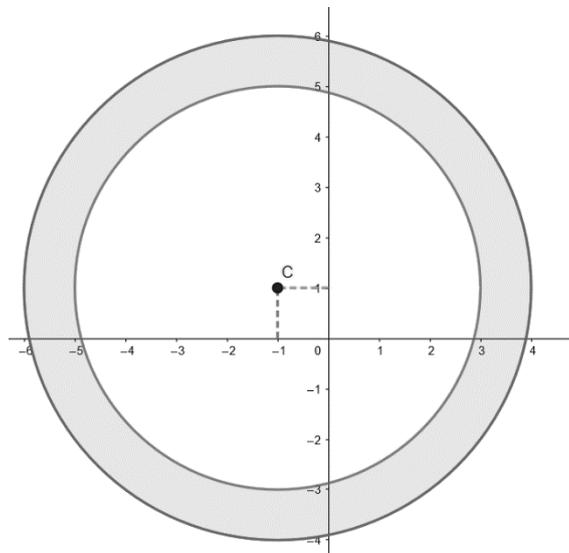


Fig 26: Exemplo 6

Exemplo 7. Definir o conjunto dos pontos z tal que $2 \leq |z + 2i - 1| \leq 6$.

Temos que $2 \leq |z + 2i - 1| \leq 6$ pode ser reescrito da forma $2 \leq |z + (-1 + 2i)| \leq 6$. Portanto, temos um conjunto conexo ou coroa de centro em $z_0 = -1 + 2i$ e raios $r = 2$ e $s = 6$.

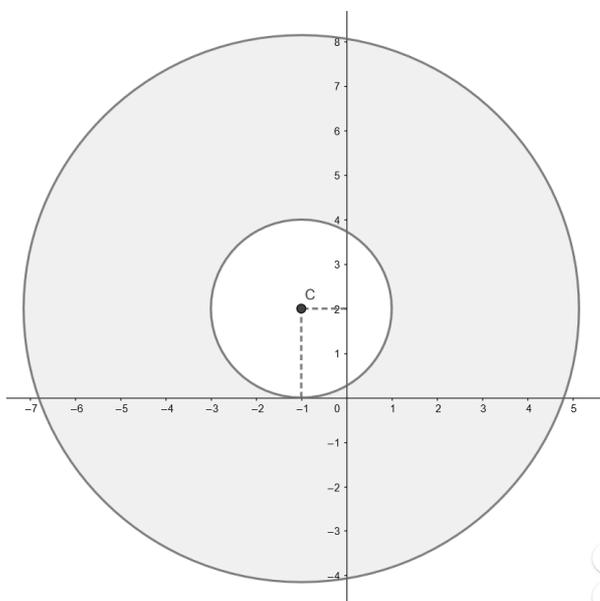


Fig 27: Exemplo 7

Exemplo 8. Os vértices de uma elipse são os pontos $(4, 0)$ e $(-4, 0)$, e seus focos são os pontos $(3, 0)$ e $(-3, 0)$. Determine a equação da elipse.

Temos que a Elipse tem focos sobre o eixo x .

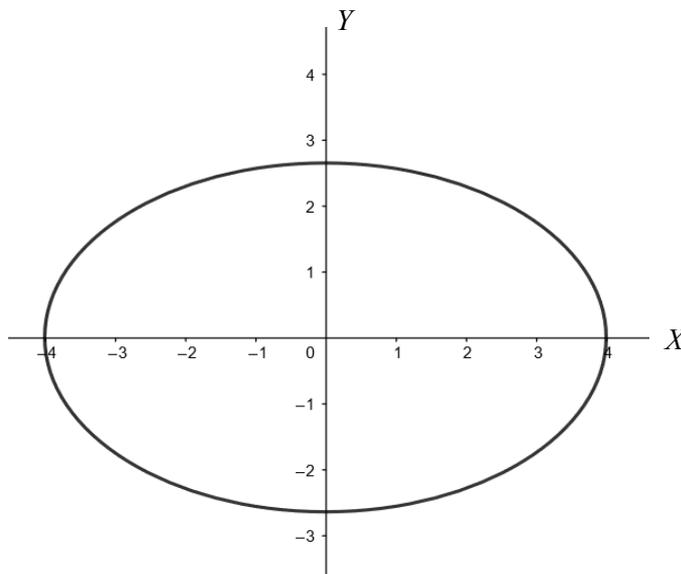


Fig 28: Exemplo 8

Temos um plano π fixado e dois pontos $F_1 = -3 + 0i$ e $F_2 = 3 + 0i$ que pertencem a π , sobre o eixo x .

Calculando a distância entre os focos, temos:

$$|F_1 - F_2| = \sqrt{(3 + 3)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(6)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Portanto, a distância entre os focos $|F_1 - F_2|$ é $2c = 6$.

Temos $A_1 = (-4, 0)$, $A_1 = -4 + 0i$, e $A_2 = (4, 0)$, $A_2 = 4 + 0i$, são os vértices sobre a reta focal l .

Temos que

$$C = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{A_1 + A_2}{2} = (0,0)$$

Portanto $C = (0,0)$ é o centro da Elipse.

Sabemos que $a = |C - A_1| = |C - A_2| = \sqrt{(0 - 4)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$

Sabemos, ainda que $c = |C - F_1| = |C - F_2| = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

E vale a relação: $a^2 = b^2 + c^2$

Substituindo os valores de a e c , temos:

$$4^2 = b^2 + 3^2$$

$$16 = b^2 + 9$$

$$16 - 9 = b^2$$

$$b^2 = 16 - 9$$

$$b^2 = 7$$

$$b = \sqrt{7}$$

Substituindo os valores de a , na expressão $|Z - F_1| + |Z - F_2| = 2a$, temos:

$$|Z - F_1| + |Z - F_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 0)^2} = 2 \cdot 4$$

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + (y)^2} = 8$$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y)^2} = 8 - \sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x - 3)^2 + (y)^2}\right)^2 = \left(8 - \sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2}\right)^2$$

$$(x - 3)^2 + (y)^2 = 64 - 16\sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2} + (x + 3)^2 + (y)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 64 - 16\sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2$$

$$16\sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2} = 64 + x^2 + 6x + 9 + y^2 - x^2 + 6x - 9 - y^2$$

$$16\sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2} = 64 + x^2 - x^2 + 6x + 6x + 9 - 9 + y^2 - y^2$$

$$16\sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2} = 64 + 12x$$

$$\frac{16\sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2}}{4} = \frac{64 + 12x}{4}$$

$$4\sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2} = 16 + 3x$$

$$\left(4\sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2}\right)^2 = (16 + 3x)^2$$

$$16\left(\sqrt{(x + 3)^2 + (y)^2}\right)^2 = (16 + 3x)^2$$

$$16((x + 3)^2 + (y)^2) = (16 + 3x)^2$$

$$16(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 256 + 96x + 9x^2$$

$$16x^2 + 96x + 144 + 16y^2 = 256 + 96x + 9x^2$$

$$\begin{aligned}
16x^2 - 9x^2 + 16y^2 &= 256 - 144 + 96x - 96x \\
7x^2 + 16y^2 &= 112 \\
\frac{7x^2}{112} + \frac{16y^2}{112} &= \frac{112}{112} \\
\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} &= 1
\end{aligned}$$

Portanto, a elipse formada pelos conjuntos de pontos Z ($Z = x + yi$) cuja soma das distâncias até os focos $F_1 = -3 + 0i$ e $F_2 = 3 + 0i$ é igual a uma constante δ , tem como equação reduzida

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

As intersecções da elipse com os eixos cartesianos serão os $A_1 = 4 + 0i$ e $A_2 = -4 + 0i$; $B_1 = 0 + \sqrt{7}i$ e $B_2 = 0 - \sqrt{7}i$.

O segmento $\overline{A_1A_2}$ dado por $|A_1 - A_2| = \sqrt{(4 + 4)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(8)^2} = \sqrt{64} = 8$ é chamado de eixo maior da elipse e $\overline{B_1B_2}$, dado por

$$|B_1 - B_2| = \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{7})^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(2\sqrt{7})^2} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

é chamado, de eixo menor da elipse.

Exemplo 9. Encontrar a Equação reduzida de $|z + 2\bar{z}| = 1$.

Temos que $z = x + yi$, definimos $\bar{z} = x - yi$.

Então:

$$\begin{aligned}
|z + 2\bar{z}| &= 1 \\
|(x + yi) + 2(x - yi)| &= 1 \\
|x + yi + 2x - 2yi| &= 1 \\
|3x - yi| &= 1 \\
(3x)^2 + (y)^2 &= 1^2 \\
9x^2 + y^2 &= 1 \\
\frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + y^2 &= 1
\end{aligned}$$

Portanto, a equação reduzida de $|z + 2\bar{z}| = 1$ é a equação da Elipse

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + y^2 = 1$$

Exemplo 10. Os vértices de uma elipse são os pontos $A_1 = (2, 0)$; $A_2 = (-2, 0)$, $B_1 = (0, 1)$; $B_2 = (0, -1)$. Determine os focos e a equação reduzida da elipse.

Temos que a Elipse tem focos sobre o eixo x .

Calculando a :

$$2a = 2 - (-2)$$

$$2a = 2 + 2$$

$$2a = 4$$

$$a = \frac{4}{2}$$

$$a = 2$$

Calculando b :

$$2b = 1 - (-1)$$

$$2b = 1 + 1$$

$$2b = 2$$

$$b = \frac{2}{2}$$

$$b = 1$$

E vale a relação: $a^2 = b^2 + c^2$

Substituindo os valores de a e b , temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$2^2 = 1^2 + c^2$$

$$4 = 1 + c^2$$

$$4 - 1 = c^2$$

$$c^2 = 4 - 1$$

$$c^2 = 3$$

$$c = \sqrt{3}$$

Portanto os focos são: $F_1 = \sqrt{3} + 0i$ e $F_2 = -\sqrt{3} + 0i$.

Como a equação reduzida da elipse é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

substituindo os valores de a e b , temos:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Portanto,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

é a equação reduzida da elipse dada.

Observação: Podemos ainda determinar a excentricidade da elipse sabendo que

$$e = \frac{c}{a}, \text{ logo neste caso } e = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo 11. Determine a Equação da Hipérbole com os focos, no eixo x , sendo $F_1 = -10 + 0i$ e $F_2 = 10 + 0i$ e eixo real medindo 16 unidades.

Como o eixo real mede 16 unidades, temos que:

$$2a = 16 \Rightarrow a = 8$$

Para determinar o valor de c temos que a distância entre os focos é igual a $2c$.

Logo:

$$|F_1 - F_2| = \sqrt{(10 + 10)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(20)^2} = \sqrt{400} = 20$$

Como a distância entre os focos mede 20 unidades, temos que:

$$2c = 20 \Rightarrow c = 10$$

E vale a relação: $c^2 = a^2 + b^2$. Substituindo os valores de a e c , temos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$10^2 = b^2 + 8^2$$

$$100 = b^2 + 64$$

$$100 - 64 = b^2$$

$$b^2 = 100 - 64$$

$$b^2 = 36$$

$$b = \sqrt{36}$$

$$b = 6$$

Conhecidos os valores a e b , temos que a equação da hipérbole reduzida é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Substituindo os valores a e b , segue que:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

Portanto, a equação da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

Exemplo 12. Determinar os números complexos que são os focos da hipérbole que tem como equação reduzida

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Ao observar a equação reduzida da hipérbole dada, podemos constatar que seus focos estão sobre o eixo y , logo a equação é da forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

e terá F_1 e F_2 escritos na forma $F_1 = 0 - ci$ e $F_2 = 0 + ci$.

Da equação da hipérbole obtemos também que:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

Fazendo uso da lei fundamental, teremos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 4^2 + 3^2$$

$$c^2 = 16 + 9$$

$$c^2 = 25$$

$$c = \sqrt{25}$$

$$c = 5$$

Como $c = 5$, temos $F_1 = 0 - 5i$ e $F_2 = 0 + 5i$ os focos da hipérbole.

Exemplo 13. Dada à hipérbole de equação $5x^2 - 4y^2 - 20x - 8y - 4 = 0$ determine os focos dessa hipérbole.

Reescrevendo a equação da hipérbole temos:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 20x - 4y^2 - 8y - 4 &= 0 \\ 5(x^2 - 4x) - 4(y^2 + 2y + 1) &= 0 \\ 5(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4(y^2 + 2y + 1) &= 0 \\ 5(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 2y + 1) &= 20 \\ 5(x - 2)^2 - 4(y + 1)^2 &= 20 \\ \frac{5(x - 2)^2}{20} - \frac{4(y + 1)^2}{20} &= \frac{20}{20} \\ \frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{5} &= 1 \end{aligned}$$

Temos então que o Centro da Hipérbole é $C = 2 - 1i$.

Sabemos, pela equação encontrada que a hipérbole está na horizontal.

Da equação da hipérbole obtemos também que:

$$\begin{aligned} a^2 = 4 &\Rightarrow a = 2 \\ b^2 = 5 &\Rightarrow b = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Fazendo uso do Teorema de Pitágoras, teremos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= 2^2 + (\sqrt{5})^2 \\ c^2 &= 4 + 5 \\ c^2 &= 9 \\ c &= \sqrt{9} \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Como $c = 3$, temos:

$$F_1 = (2 - 3, -1) \Rightarrow F_1 = (-1, -1), \text{ logo } F_1 = -1 - 1i; \text{ e}$$

$$F_2 = (2 + 3, -1) \Rightarrow F_2 = (5, -1), \text{ logo } F_2 = 5 - 1i$$

Portanto $F_1 = -1 - 1i$ e $F_2 = 5 - 1i$ são os focos da hipérbole.

CAPÍTULO 4

MATRIZES E NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo trataremos o conjunto de matrizes como apresentado no Ensino Médio, com suas operações usuais de adição e multiplicação.

Lima (1998), Giovanni (1994), entre outros autores de livros para o Ensino Médio mostram que o conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é fechado para as operações usuais de adição e multiplicação, e um dos resultados imediatos é que M tem a estrutura de um Corpo.

Um conjunto K arbitrário, munido de operações que denotaremos pelos símbolos “+” e “.”, é dito ser um corpo se $(K, +)$ e $(K - \{0\})$ são grupos comutativos e se for válida a propriedade distributiva de . em relação a +. Isto significa que para quaisquer elementos $a, b, c \in K$, temos:

- Associatividade: $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
- Comutatividade: $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$;
- Existência de elementos neutros: $\exists 0 \in K$ e $\exists 1 \in K$, tais que $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$;
- Existência de simétricos, $\forall a \in K$ existe $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$ e $\forall a \in K - \{0\}$, existe $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot (a^{-1}) = 1$;
- Distributividade: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Precisamos que o conjunto M satisfaça estas propriedades de corpo e seja um corpo isomorfo a \mathbb{C} . Para podermos, assim, identificar os números complexos como matrizes com entradas reais, de forma que a estrutura abstrata de \mathbb{C} , adquira a visualização concreta, por meio de matrizes.

Vamos às verificações.

Primeiramente provaremos o fechamento das operações.

Considerando as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, arbitrárias em M , temos

- $A+B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$ e
- $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c + b \cdot (-d) & a \cdot d + b \cdot c \\ -b \cdot c - a \cdot (-d) & -b \cdot d + a \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c - b \cdot d & a \cdot d + b \cdot c \\ -(a \cdot d + b \cdot c) & a \cdot c - b \cdot d \end{pmatrix}$

Logo, $A+B$ e $A.B$ são elementos de M .

Verificaremos agora que M é isomorfo a \mathbb{C}

Utilizaremos uma correspondência de um número complexo arbitrário $a + bi$ com a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, e faz-se necessário que tal correspondência cumpra a definição de isomorfismo de corpos.

Podemos observar que a unidade imaginária i corresponde à matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, e isso nos permite visualizar um número complexo genérico utilizando matrizes.

Verificamos, anteriormente, que o conjunto

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

é fechado para a operação de adição e multiplicação de matrizes.

Vamos mostrar, agora, que M tem estrutura de corpo relativo a estas operações.

Vejam os:

- *A operação de multiplicação é comutativa em M :*

Dados $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ elementos arbitrários de M , temos:

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.c - b.d & a.d + b.c \\ -(a.d + b.c) & a.c - b.d \end{pmatrix} = BA$$

- *Existência de elementos neutros*

O elemento neutro da operação de adição é a matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pois dado

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ elemento arbitrários de M

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

além disso, vemos claramente que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$, onde $a = b = 0$.

O elemento neutro da operação de multiplicação é a matriz identidade, pois dado

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ elemento arbitrário de M

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.1 + b.0 & a.0 + b.1 \\ -b.1 + a.0 & -b.0 + a.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 0 & b + 0 \\ -b + 0 & a + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

E considerando $a = 1$ e $b = 0$, na definição de M , vemos claramente que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$.

- *Existência de simétrico aditivo*

O simétrico de $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ arbitrário em M é $\begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$ que é um elemento de M , pois,

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -(b) \\ -(-b) & a \end{pmatrix}$$

- *Existência de simétrico multiplicativo*

Dado $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ elemento arbitrário de $M \setminus \{0\}$, onde 0 representa a matriz nula, temos que a e b não são simultaneamente nulos, logo $\det(A) = a^2 + b^2 \neq 0$ e existe A^{-1} . Para encontrarmos $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, devemos ter,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot z & a \cdot y + b \cdot w \\ -b \cdot x + a \cdot z & -b \cdot y + a \cdot w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E assim obtemos o sistema 4x4

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bw = 0 \\ -bx + az = 0 \\ -by + aw = 1 \end{cases}$$

cuja única solução é

$$x = \frac{a}{b^2 + a^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}, \quad z = \frac{b}{b^2 + a^2} \quad e \quad w = \frac{a}{b^2 + a^2}$$

Portanto a inversa de $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ é dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b^2 + a^2} & -\frac{b}{a^2 + b^2} \\ -\frac{-b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{b^2 + a^2} \end{pmatrix}$$

que é claramente um elemento de M .

Isomorfismo de corpos

Sejam S e T corpos, cujas operações, por simplificação, serão ambas identificadas por “+” e “.”.

Uma aplicação $f: S \rightarrow T$ é um isomorfismo entre corpos, se:

- i) f é uma bijeção;
- ii) $f: (S, +) \rightarrow (T, +)$ é um homomorfismo de grupos;
- iii) $f: (S - \{0\}, \cdot) \rightarrow (T - \{0\}, \cdot)$ é um homomorfismo de grupos;

Ou seja, f é uma bijeção entre os corpos S e T que satisfaz

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \text{ para quaisquer } a, b \in S;$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b), \text{ para quaisquer } a, b \in S.$$

Quando existe um isomorfismo entre o corpo $(S, +, \cdot)$ e o corpo $(T, +, \cdot)$, tais corpos são denominados isomorfos.

O isomorfismo entre M e \mathbb{C}

Recordemos que o conjunto dos números complexos pode ser definido por

$$\mathbb{C} = \{x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Consideremos a aplicação $f: \mathbb{C} \rightarrow M$ definida por $f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Observemos que para números complexos arbitrários $a + bi$ e $c + di$, temos:

$$\begin{aligned} f((a + bi) + (c + di)) &= f((a + c) + (b + d)i) = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = f(a + bi) + f(c + di) \end{aligned}$$

O que mostra ser f um homomorfismo de grupos relativo a operação $+$. Da mesma forma observemos que para quaisquer $a + bi$ e $c + di$ de \mathbb{C} , temos

$$f((a + bi) \cdot (c + di)) = f((ac + adi) + (bci + bdi^2)) = f((ac - bd) + i(ad + bc)) =$$

$$\begin{pmatrix} a - bd & ad + bc \\ -(bc + ad) & ac - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = f(a + bi) \cdot f(c + di)$$

O que mostra ser f um homomorfismo entre os grupos $\mathbb{C} - \{0\}$ e $M - \{0\}$.

Que f é uma aplicação sobrejetora, segue direto da definição.

Para verificarmos que f é injetora, observemos que

$$f(a + bi) = f(c + di) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow a + bi = c + di$$

Uma vez provado que $M \cong \mathbb{C}$, está provado que as matrizes em M comportam-se como números complexos.

Notemos que para uma matriz genérica $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ de M temos,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A expressão acima sugere que as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ fazem o papel de unidade real e imaginária em M , e de fato estas são as imagens das respectivas unidade real e imaginária de \mathbb{C} , além disso,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -id$$

assumindo um papel similar ao número i .

A utilização e manipulações de operações usuais em M , são suficientes para assegurar a M a estrutura de um corpo, onde são evidenciadas propriedades que sugerem comportamento similar às propriedades verificadas com o corpo dos números complexos. E de fato, esta questão fica evidenciada, a partir do estabelecimento de uma bijeção entre estes conjuntos que preserve as características das operações, ou seja, são estruturas isomorfas.

O estabelecimento de um isomorfismo entre M e \mathbb{C} , possibilita o interessante resultado de identificar em M as unidades real e imaginária, assegurando a M a realização concreta dos números complexos.

CAPÍTULO 5

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo traremos uma Sequência Didática que pode ser utilizada por professores do Ensino Médio para associar o Conjunto dos Números Complexos com as Equações da Circunferência, Elipse e Hipérbole.

Título:

Associando Números Complexos com as Equações da Circunferência, Elipse e Hipérbole.

Introdução:

Apresentaremos uma Sequência Didática para Professores do Ensino Médio trabalharem com o Conjunto dos Números Complexos e associar as Equações da Circunferência, Elipse e Hipérbole com esses Números.

Para realizar as atividades propostas aqui, se faz necessário que os discentes já conheçam o Conjunto dos Números Complexos e suas propriedades. Essas definições e propriedades do Conjunto dos Números Complexos, encontram-se no segundo capítulo do presente trabalho.

Duração: 8 aulas

Objetivos:

- Reconhecer os Números Complexos;
- Resolver problemas envolvendo Números Complexos;
- Identificar a Equação da Circunferência trabalhando com Números Complexos;
- Identificar a Equação da Elipse trabalhando com Números Complexos;
- Identificar a Equação da Hipérbole trabalhando com Números Complexos;
- Trabalhar no software Geogebra para traçar as Cônicas;
- Associar as Equações da Circunferência, Elipse e Hipérbole com o Conjunto dos Números Complexos.

Conteúdo:

- Conjunto dos Números Complexos;
- Cônicas: Circunferência, Elipse e Hipérbole.

Desenvolvimento:

- Trazer as definições e propriedades do Conjunto dos Números Complexos e apresentá-las aos discentes no data show.
- Mostrar a Equação da Circunferência com Números Reais e Demonstrar com Números Complexos;
- Exemplos Resolvidos na Lousa;
- Sempre que possível, mostrar a Circunferência no software Geogebra;
- Lista de exercícios para praticar;
- Mostrar a Equação da Elipse com Números Reais e depois com Números Complexos;
- Exemplos Resolvidos na Lousa;
- Lista de exercícios para praticar;
- Mostrar a Equação da Hipérbole com Números Reais e depois com Números Complexos;
- Exemplos Resolvidos na Lousa;
- Lista de exercícios para praticar;
- Trabalho extraclasse com pesquisa de diferentes Cônicas que podem ter a sua equação associada a Números Complexos.

Sequência:

1ª aula:

Formar um círculo e, através da conversa formal, buscar saber quais são os conhecimentos dos alunos sobre o Conjunto dos Números Complexos.

Com o uso do Data Show apresentar aos discentes, as definições, propriedades e notações de Números Complexos que estaremos utilizando no decorrer dessa sequência didática.

2ª aula:

Mostrar aos discentes a Equação da Circunferência com Números Reais e, fazendo uso do Conjunto dos Números Complexos, demonstrar essa equação.

Com o uso do Data Show apresentar aos discentes, as definições de circunferência, disco aberto, disco fechado, coroa, definições essas apresentadas no ítem 3.1 desse trabalho.

Com o uso do software Geogebra, mostrar as circunferências aos discentes e deixá-los fazerem uso do computador e testar as possíveis circunferências construídas.

3ª aula:

Exemplos resolvidos fazendo uso do quadro negro e giz.

Exemplo 1. Vamos apresentar a equação da Circunferência de centro em (2,1) e raio 3.

Exemplo 2. Vamos traçar a circunferência $|z - 2| = 5$.

Exemplo 3. Traçar o disco fechado tal que $|z - 2| \leq 5$.

Exercícios para que os discentes pratiquem o que foi apresentado.

1. Definir o conjunto dos pontos z tal que $|z + 2 - 2i| < 2$.

2. Definir o conjunto dos pontos z tal que $|z + i - 1| \leq 5$.

3. Definir o conjunto dos pontos z tal que $4 \leq |z + i - 1| \leq 5$.

4. Definir o conjunto dos pontos z tal que $2 \leq |z + 2i - 1| \leq 6$.

Possivelmente não dará tempo de resolver em sala todos os exercícios propostos, os alunos terminarão de resolver como tarefa.

4ª aula:

Mostrar aos discentes a Equação da Elipse com Números Reais e, fazendo uso do Conjunto dos Números Complexos, demonstrar essa equação.

Com o uso do Data Show apresentar aos discentes, as definições de Elipse No Eixo x e Elipse no Eixo y , definições essas apresentadas no item 3.2 desse trabalho.

5ª aula:

Exemplos resolvidos fazendo uso do quadro negro e giz.

Exemplo 1. Os vértices de uma elipse são os pontos (4, 0) e (-4, 0), e seus focos são os pontos (3, 0) e (-3, 0). Determine a equação da elipse.

Exercícios para que os discentes pratiquem o que foi apresentado.

1. Encontrar a Equação reduzida de $|z + 2\bar{z}| = 1$.

2. Os vértices de uma elipse são os pontos $A_1 = (2, 0)$; $A_2 = (-2, 0)$, $B_1 = (0, 1)$; $B_2 = (0, -1)$. Determine os focos e a equação reduzida da elipse.

6ª aula:

Mostrar aos discentes a Equação da Hipérbole com Números Reais e, fazendo uso do Conjunto dos Números Complexos, demonstrar essa equação.

Com o uso do Data Show apresentar aos discentes, as definições de Hipérbole No Eixo x e Elipse no Eixo y , definições essas apresentadas no item 3.3 desse trabalho.

7ª aula:

Exemplos resolvidos fazendo uso do quadro negro e giz.

Exemplo 1. Determine a Equação da Hipérbole com os focos, no eixo x , sendo $F_1 = -10 + 0i$ e $F_2 = 10 + 0i$ e eixo real medindo 16 unidades.

Exercícios para que os discentes pratiquem o que foi apresentado.

1. Determinar os números complexos que são os focos da hipérbole que tem como equação reduzida

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

2. Dada à hipérbole de equação $5x^2 - 4y^2 - 20x - 8y - 4 = 0$, determine os focos dessa hipérbole.

Proposta de trabalho extraclasse:

Os alunos trarão na próxima aula, uma pesquisa sobre os temas aqui abordados e, mínimo de 1 exercício resolvido de cada uma das equações das cônicas até aqui trabalhadas.

8ª aula:

Entrega do trabalho extraclasse e lista de Exercícios extras abordando as Equações da Circunferência, Elipse e Hipérbole com Números Complexos.

Essa lista fica a critério do Professor que estará aplicando essa Sequência Didática.

Recursos:

- Lousa e Giz;
- Data show;
- Software Geogebra;
- Régua e Compasso;

Avaliação:

- Os discentes serão avaliados através da observação constante do envolvimento com as atividades propostas e no trabalho extraclasse de pesquisas referentes às Cônicas que podem ter a sua equação associada a Números Complexos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O nosso objetivo ao realizar essa pesquisa foi explorar o conjunto dos números complexos apresentando aspectos e ressaltando outros em uma perspectiva alternativa do que é costumeiramente estudado.

A definição de módulo para um número complexo é uma extensão natural da definição de módulo de um número real. Logo equações e inequações modulares complexas devem carregar a forma geométrica das formas obtidas com módulos de números reais. Assim sendo, obtemos equações de figuras planas como circunferências, elipses e hipérbolas com a manipulação de equações e inequações modulares.

No decorrer deste trabalho desenvolvemos também propriedades do conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, onde são destacadas propriedades, algumas das quais não observadas em estruturas gerais envolvendo matrizes. Estas são consequências particulares do resultado mais profundo de que M , relativo a operações usuais de matrizes, tem estrutura de um Corpo. O estabelecimento de um isomorfismo entre M e \mathbb{C} , possibilita o interessante resultado de identificar em M as unidades real e imaginária, assegurando a M a realização concreta dos números complexos.

Neste sentido nosso trabalho pode colaborar em duas situações:

- 1) Aprimoramento da formação do professor de matemática com sugestões de temas interessantes da matemática básica e superior envolvendo os números complexos
- 2) Fornecer abordagens alternativas e aplicações dos números complexos em outros conceitos da própria Matemática, favorecendo a aprendizagem em processos acessíveis a uma turma de ensino médio.

A Sequência Didática aqui apresentada, segue o formato das propostas da rede pública de Ensino na cidade de Três Lagoas. Segundo os Coordenadores das redes Municipal e Estadual, essa sequência auxilia o professor na organização dos materiais utilizados e planejamento das atividades propostas.

REFERÊNCIAS

CAPELAS DE OLIVEIRA, E. e Rodrigues Jr., W. A., 2006. Funções analíticas com aplicações. Livraria da Física.

CHAGAS, J. S. B., 2013 A Relevância do Ensino de Números Complexos no Ensino Médio na Opinião dos Professores de Matemática. Dissertação de Mestrado. UENF.

CIÊNCIA E NATURA, Santa Maria, v.37 Ed. Especial Profmat, 2015, p. 79-88. Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas – UFSM.

COSTA, F. S., 2008. Áreas e contornos. Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP.

GIOVANNI, José R.; BONJORNO; José R. e GIOVANNI Jr., José R. — Matemática Fundamental — T grau: volume único, FTD, São Paulo, 1994.

HELLMEISTER, A. C. P. e Peixoto, C. M., 2004. Matemática: Ensino Médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo C.P.; WAGNER, Eduardo; e MORGADO Augusto C. — A Matemática do Ensino Médio — Coleção do Professor de Matemática: volume 3, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1998.

PINHEIRO, R. B., 2012. Números complexos: alguns aspectos algébricos e geométricos. Dissertação de Mestrado, UFMA.

PINTO, U. J., 2009. A história dos números complexos: das quantidades. Dissertação de Mestrado, UFRJ.

PORTAL BRASIL ESCOLA. Disponível em <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/elipse.htm>

PORTAL MATEMÁTICO. Disponível em <https://www.somatematica.com.br/emedio/circunferencia/circunf.php>. Acesso maio/2018

PORTAL MATEMÁTICO, Disponível em <https://www.somatematica.com.br/emedio/conicas/conicas3.php>. Acesso maio/2018

VIGGIANI, D., 1968. Alguns aspectos da aplicação dos números complexos a geometria. Tese de Doutorado, UNIMAR.

IEZZI, G. 1977. Fundamentos de Matemática Elementar. V. 6. Atual Editora LTDA. São Paulo. 2ª Edição.

APÊNDICE

FONTES DAS FIGURAS

Figura 1:

https://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar/Plano_de_Argand-Gauss

Figura 2: autor

Figura 3: o autor

Figura 4: o autor

Figura 5: o autor

Figura 6: o autor

Figura 7: o autor

Figura 8: o autor

Figura 9: o autor

Figura 10: o autor

Figura 11: o autor

Figura 12: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/area-coroa-circulo.htm>

Figura 13: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/elipse.htm>

Figura 14: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/elipse.htm>

Figura 15: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/elipse.htm>

Figura 16: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/elipse.htm>

Figura 17: <https://www.somatematica.com.br/emedio/conicas/conicas3.php>

Figura 18: <https://www.somatematica.com.br/emedio/conicas/conicas3.php>

Figura 19: <https://www.somatematica.com.br/emedio/conicas/conicas3.php>

Figura 20: <https://www.somatematica.com.br/emedio/conicas/conicas3.php>

Figura 21: o autor

Figura 22: o autor

Figura 23: o autor

Figura 24: o autor

Figura 25: o autor

Figura 26: o autor

Figura 27: o autor

Figura 28: o autor

TÍTULO DAS FIGURAS

Fig 1: Z_2 é simétrico de Z_1

Fig 2 : Z_4 é conjugado de Z_1

Fig 3: Distância entre A e Z_1

Fig 4: Função

Fig 5: Plano Cartesiano

Fig 6: Circunferência

Fig 7: Circunferências Concêntricas

Fig 8: Circunferências Concêntricas

Fig 9: Circunferência Aberta

Fig 10: Circunferência Fechada

Fig 11: Exterior da Circunferência

Fig 12: Coroa Circular

Fig 13: Elipse

Fig 14: Elipse com Focos no eixo das abscissas

Fig 15: Elipse com Focos no eixo das ordenadas

Fig 16: Hipérbole

Fig 17: Hipérbole cortada por um Plano

Fig 18: Hipérbole e seus Elementos

Fig 19: Hipérbole com focos no eixo x

Fig 20: Hipérbole com focos no eixo y

Fig 21: Exemplo 1

Fig 22: Exemplo 2

Fig 23: Exemplo 3

Fig 24: Exemplo 4

Fig 25: Exemplo 5

Fig 26: Exemplo 6

Fig 27: Exemplo 7

Fig 28: Exemplo 8