Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

ANTONIO CARLOS RODRIGUES DE
AZEVEDO BARROS

FORMAS DE TRATAR O NÚMERO ÁUREO EM SALA DE AULA, COM APLICAÇÃO NOS 8º E 9º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Orientador: Míriam Abdón

NITERÓI
MARÇO/2013

ANTONIO CARLOS RODRIGUES DE AZEVEDO BARROS

FORMAS DE TRATAR O NÚMERO ÁUREO EM SALA DE AULA, COM APLICAÇÃO NOS 8º E 9º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada por **Antonio Carlos Rodrigues de Azevedo Barros** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Míriam Abdón

Niterói
2013

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

B277 Barros, Antonio Carlos Rodrigues de Azevedo

Formas de tratar número áureo na sala de aula, com aplicação nos 8º e 9º do ensino fundamental / Antonio Carlos Rodrigues de Azevedo Barros. – Niterói, RJ : [s.n.], 2013.

101 f.

Orientador: Profª. Miriam Abdón.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2013.

Bibliografia: f. 99

1. Ensino de Matemática. 2. Segmento áureo. 3. Número áureo. 4. Ensino fundamental. 5. História da Matemática. I. Título.

CDD 510.7

ANTONIO CARLOS RODRIGUES DE AZEVEDO BARROS

FORMAS DE TRATAR O NÚMERO ÁUREO EM SALA DE AULA, COM APLICAÇÃO NOS 8º E 9º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada por **ANTONIO CARLOS RODRIGUES DE AZEVEDO BARROS** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: 05/03/2013

Banca Examinadora

____

Profª. Míriam Abdón - Orientador

Doutora – Instituto de Matemática Pura e Aplicada

____

Prof. Lhaylla Crissaff - Membro

Doutora – Pontifícia Universidade Católica – Rio de Janeiro

____

Prof. Carlos Gustavo Moreira - Membro

Doutor – Instituto de Matemática Pura e Aplicada

NITERÓI

2013

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Jeová Deus e minha família por todo o apoio que tive em minha jornada pedagógica, em especial minha esposa Letícia por dividir sempre comigo meus momentos de alegria e preocupações. Como diz Eclesiastes 4:9,10: “Melhor dois do que um, porque eles têm boa recompensa por seu trabalho árduo. Pois, se um deles cair, o outro pode levantar seu associado. Mas, como será com apenas aquele um que cai, não havendo outro para levantá-lo?”. Sem ela realmente não seria possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço, também, a Miriam Abdón, pela sua dedicação e constante auxílio nos momentos de dificuldade, seja na elaboração deste trabalho de conclusão de curso, como em todos os momentos onde foi necessária ao longo do mestrado. Agradeço a todos os professores e coordenadores pela participação na minha formação educacional e aos meus colegas de classe que me ajudaram muito nestes dois anos, em especial ao Augusto Schwager e Marcelo Pereira.

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Sabendo da importância de tornar as aulas mais atrativas, reunimos neste trabalho o conteúdo necessário para que o professor possa resgatar da história da Matemática para a sala de aula o Número Áureo. Apresentamos as principais definições teóricas sobre o Número Áureo, onde podemos encontrá-lo em nosso cotidiano e como podemos trabalhar este número em sala de aula.

ABSTRACT

Knowing the importance of making more attractive lessons, we have placed together enough content to try to bring back the history of mathematics in classroom the 'Número Áureo'. In this assignment we present the main theoretical definitions about 'Número Áureo', where we can find it in our daily lives and how we can work this issue in classroom.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O Número Áureo é um dos mais antigos números irracionais estudados pelo homem e, assim como o número π (Pi), ele pode ser trabalhado tanto na Geometria como na Álgebra.

O Número Áureo, também apresentado como Proporção Áurea, Número de Ouro, Proporção de Ouro, Seção Áurea, Razão de Ouro, Razão Áurea ou Divina Proporção, entre outros nomes, é representado pela letra grega Φ (Phi) e é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que vale, com um valor arredondado de 10 casas decimais 1,6180339887.

Sabemos da importância de apresentar para os alunos a parte histórica de todo conteúdo ministrado em sala de aula, pois isso traz um maior significado ao conhecimento que será assimilado pelos alunos. Quando trabalhamos o Número Áureo, conseguimos resgatar da história da matemática para a sala de aula esse assunto que vem chamando a atenção e intrigando várias pessoas ao longo do tempo.

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso é registrar de maneira organizada o conhecimento que um professor deve possuir sobre o Número Áureo, para que ele possa trazê-lo da história da matemática para dentro da sala de aula. Para isso dividiremos o trabalho em três capítulos: *Definições teóricas do Número*

Áureo, Onde encontramos o Número Áureo em nosso cotidiano e Como trabalhar o Número Áureo em sala de aula.

Na primeira parte iremos apresentar para o leitor as definições teóricas necessárias para que o Número Áureo possa ser trabalhado em sala de aula. Iremos definir razão áurea, divisão de um segmento na razão áurea, triângulos áureos e retângulo áureo. Iremos ainda apresentar onde podemos encontrar o Número Áureo em um pentágono regular, como podemos dividir uma circunferência em dois arcos cuja razão entre eles é o Número Áureo, quando uma pirâmide pode ser classificada como sendo uma pirâmide áurea, onde encontramos o Número Áureo quando analisamos a sequência de Fibonacci e finalizaremos este capítulo apresentando o que é uma espiral áurea e como podemos construí-la.

Após apresentar as definições teóricas do Número Áureo, nós iremos apresentar onde muitos dizem poder ser encontrado o Número Áureo em nosso cotidiano e, analisaremos cada caso para constatarmos quando é mesmo possível encontrarmos o número de ouro ou apenas uma aproximação do mesmo. Inicialmente iremos apresentar onde alguns autores dizem ser possível encontrar o Número Áureo realizando razões no corpo humano, iremos analisar a pirâmide de Quéops, o Parthenon, três grandes obras de Leonardo da Vinci: Homem Vitruviano, Mona Lisa e San Girolamo. Em seguida, analisaremos alguns cartões utilizados em nosso dia a dia e finalizaremos este capítulo analisando onde é possível encontrar o Número Áureo nos Náutilos.

Para concluir nosso objetivo iremos apresentar uma sugestão de como podemos trabalhar o Número Áureo em sala de aula. Neste trabalho de conclusão de curso apresentaremos como o Número Áureo pode ser trabalhado no 8º ano e no 9º ano do ensino fundamental, relatando como foi a experiência realizada nas turmas de nono ano de dois colégios na cidade de Macaé – RJ. São elas a escola SESI e o Colégio Estadual Municipalizado Polivalente Anísio Teixeira.

2. DEFINIÇÕES TEÓRICAS DO NÚMERO ÁUREO

Apresentaremos inicialmente como é definida algebricamente a Razão Áurea e quando um ponto divide um segmento de tal maneira que a razão entre os novos segmentos criados é a Razão Áurea. Apresentaremos, usando apenas régua e compasso, como podemos encontrar este ponto dado um segmento de qualquer tamanho.

Após esta introdução, mostraremos que independente do tipo de triângulo, quando classificado pelos seus ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo), poderemos ter um triângulo áureo. Demonstraremos que um triângulo acutângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a razão do tamanho de um dos seus lados congruentes pelo lado não congruente for o número de ouro. Um triângulo retângulo é dito áureo se for semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a Φ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1. E finalmente, um triângulo obtusângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a divisão do tamanho do seu lado não congruente por um dos seus lados congruentes for o número de ouro.

Na seção seguinte, apresentaremos a definição do retângulo áureo e como podemos construir um retângulo áureo usando apenas régua e compasso.

Mostraremos na sequência como é possível encontrar a razão áurea em diversas razões entre segmentos em um pentágono regular, como por exemplo, a razão entre a diagonal deste pentágono regular e o seu lado.

A seguir, demonstraremos que dois pontos pertencentes a uma circunferência dividem esta mesma circunferência em uma razão áurea quando a razão entre o comprimento da circunferência está para o arco maior assim como a razão entre o arco maior está para o arco menor e, ambas as razões, serão iguais ao número de ouro.

Após esta seção, mostraremos que nem toda pirâmide pode ser classificada como sendo uma pirâmide áurea. Definiremos então, quais pirâmides poderão ser classificadas como pirâmide áurea.

Definido o que é uma pirâmide áurea apresentaremos que a sequência de Fibonacci é uma sequência de números naturais definida recursivamente de tal maneira que o 1º termo e o 2º termo são iguais a 1 e:

- o 1º termo somado com o 2º gera o 3º termo;
- o 2º termo somado com o 3º gera o 4º termo;
- o 3º termo somado com o 4º gera o 5º termo;
- o 4º termo somado com o 5º gera o 6º termo.

E assim sucessivamente.

Após a definição da sequência de Fibonacci, demonstraremos que a razão entre dois termos consecutivos (maior dividido pelo menor) tende para o número de ouro quando tomamos termos cada vez maiores.

E, finalmente, será apresentado o que é uma espiral áurea e como podemos construir esta espiral usando apenas régua e compasso.

2.1. RAZÃO ÁUREA

A razão áurea Φ é definida algebricamente como:

$\Phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, com a > b e a, b $\in \mathcal{R}_+$.

Temos então que $\Phi = \frac{a}{b}$, logo $a = \Phi b$. Substituindo o valor de a em $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ teremos $\frac{\Phi b + b}{\Phi b} = \frac{\Phi b}{b}$.

Simplificando a igualdade por b em ambos os membros teremos que $\frac{\Phi + 1}{\Phi} = \Phi$. Multiplicando ambos os membros por Φ teremos $\Phi + 1 = \Phi^2$ $\Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, ou seja, Φ é uma das soluções da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$. E assim teremos que $a' = 1$, $b' = -1$ e $c' = -1$.

Utilizando a fórmula de Bháskara teremos:

$$\Phi = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4a'c'}}{2a'}$$

$$\Phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\,.\,1\,.\,(-1)}}{2\,.\,1}$$

$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $\frac{1-\sqrt{5}}{2} =$ - 0,618033988... e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} =$ 1,618033988... , temos que a solução positiva da equação será o valor da razão áurea, já que como a, b $\in \mathcal{R}_+$, não poderemos ter que $\Phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ seja igual a - 0,618033988... , ou seja, teremos que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$ 1,618033988...

2.2 DIVISÃO DE UM SEGMENTO NA RAZÃO ÁUREA

Podemos encontrar o número áureo através de um segmento de reta da seguinte forma. Dado o segmento de reta AB.

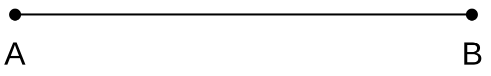
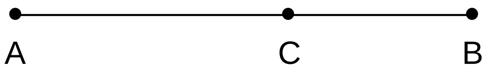


Fig.1 : Divisão do segmento AB na Razão Áurea - Passo 1

Marcaremos um ponto C de tal maneira que este ponto divida o segmento AB em uma razão áurea, se e somente se:

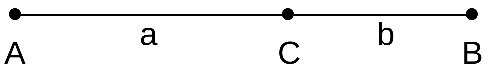
$$\frac{AC + CB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Ou seja,



Divisão do segmento AB na Razão Áurea - Passo 2

Sejam AC = a e CB = b teremos que:



Divisão do segmento AB na Razão Áurea - Passo 3

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}$$

é a razão áurea que como foi visto na seção 2.1. vale $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,618033988... .

Podemos verificar que o ponto C foi marcado de tal forma que o segmento AC é a média geométrica entre o segmento CB e o segmento AB.

Desta forma a razão do segmento AC com o segmento CB é a razão áurea**.**

Podemos ainda construir um segmento áureo utilizando apenas régua e compasso ou um software de geometria dinâmica. Para isso deveremos seguir os seguintes passos:

1) Tracemos um segmento $\overline{AB}$ com qualquer medida.

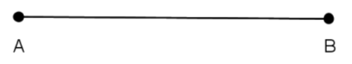
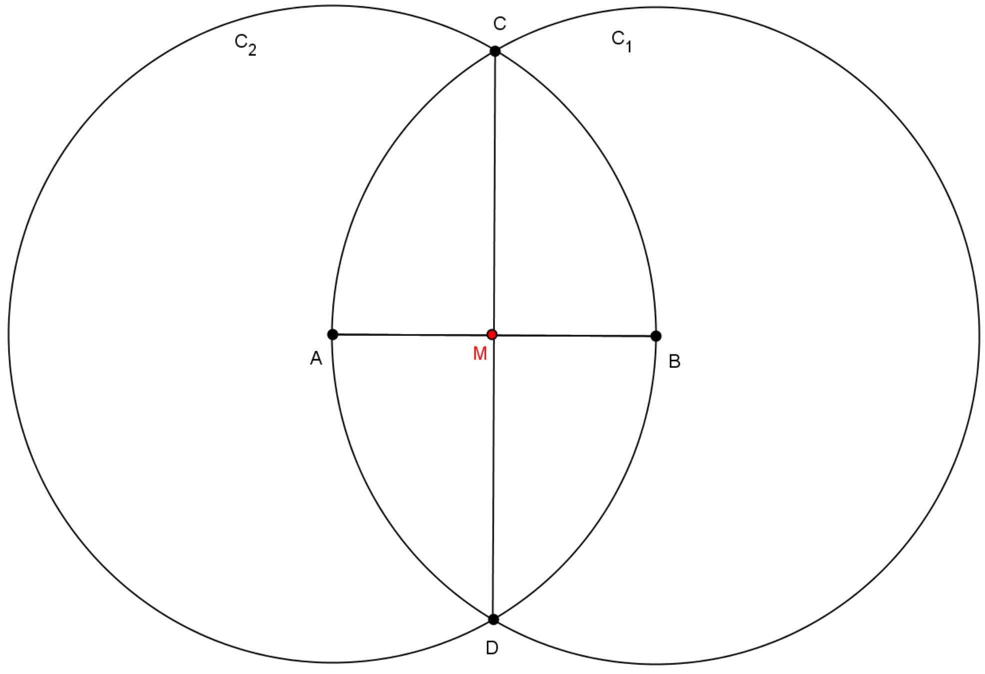


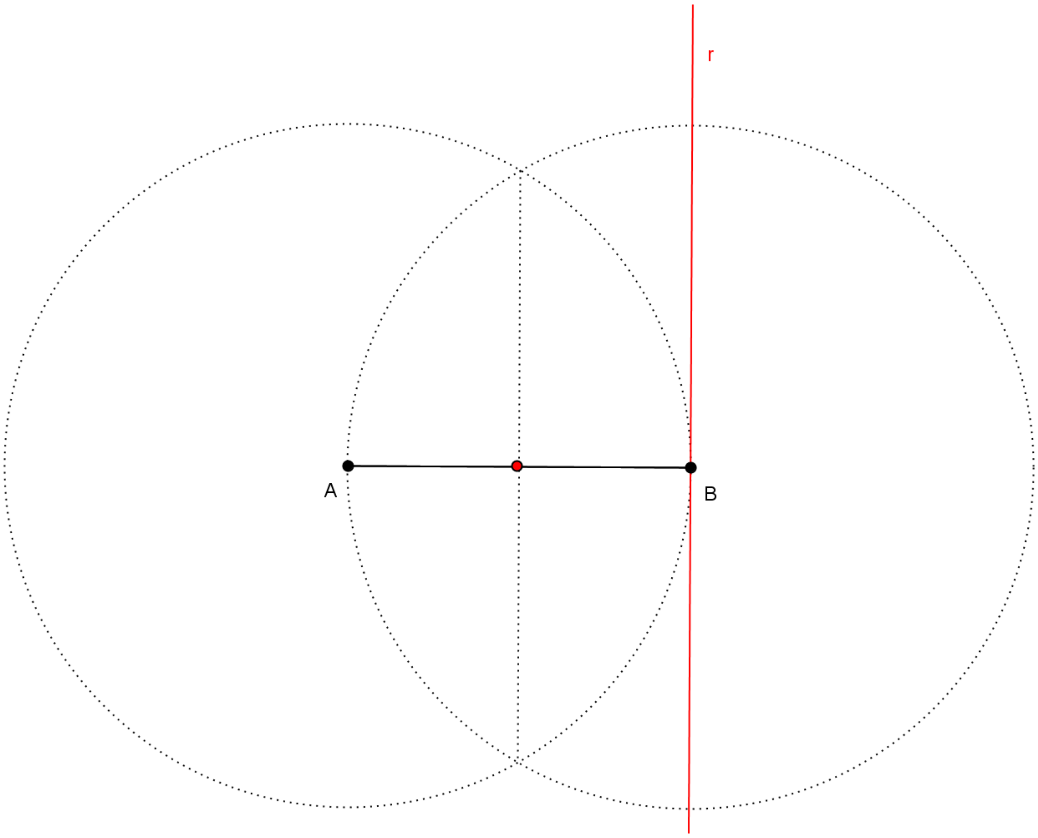
Fig.2: Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 1

2) Construamos a circunferência C_1 de centro B e raio de medida do segmento $\overline{BA}$ e a circunferência C_2 de centro A e raio de medida do segmento $\overline{AB}$. Marquemos os pontos C e D onde estes pontos são as interseções entre as circunferências C_1 e C_2. Tracemos o segmento $\overline{CD}$ e marquemos M, que será a interseção entre o segmento $\overline{CD}$ e o segmento $\overline{AB}$. M é o ponto médio de $\overline{AB}$.



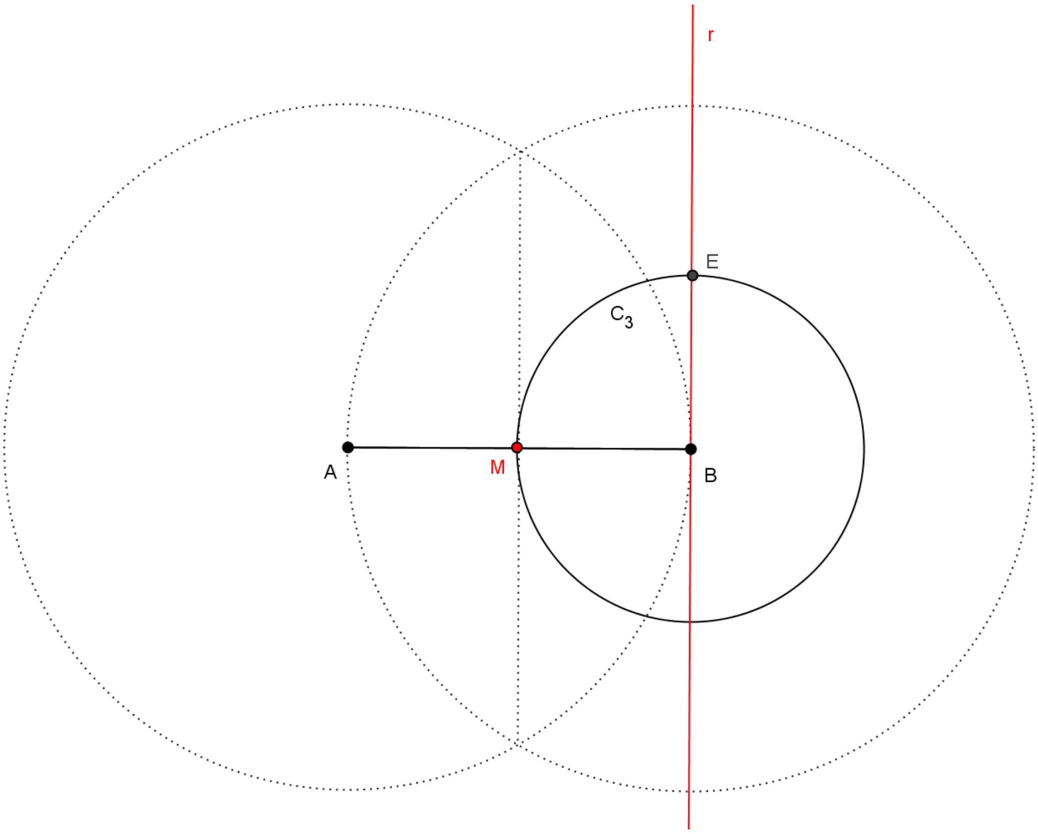
Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 2

3) Traçamos uma reta perpendicular a $\overline{AB}$ passando por B que chamaremos de r.



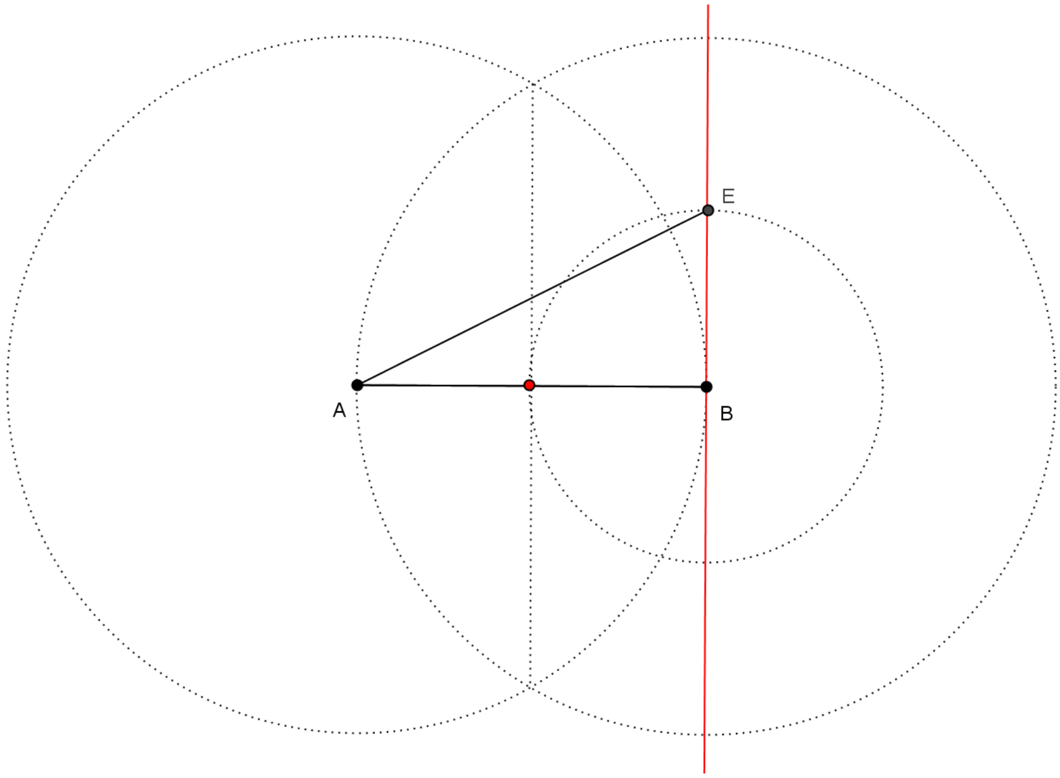
Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 3

4) Construamos a circunferência C_3 de centro B e raio igual a medida do segmento $\overline{BM}$ e marquemos o ponto E, que será a interseção entre esta circunferência C_3 e a reta r.



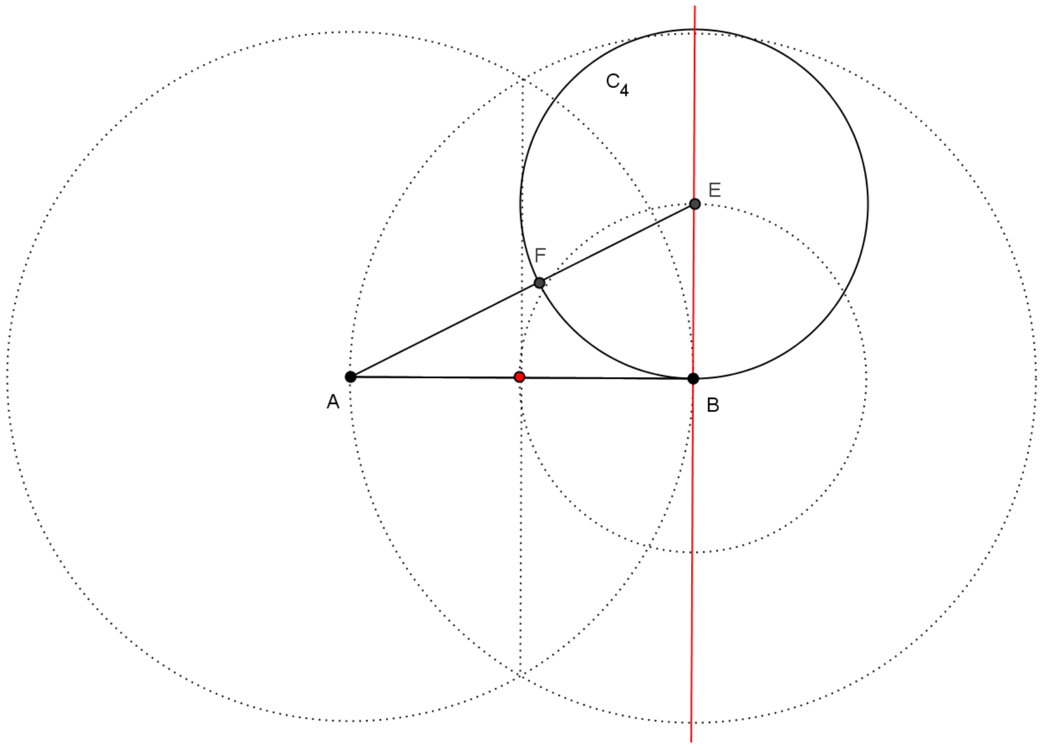
Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 4

5) Tracemos $\overline{AE}$.



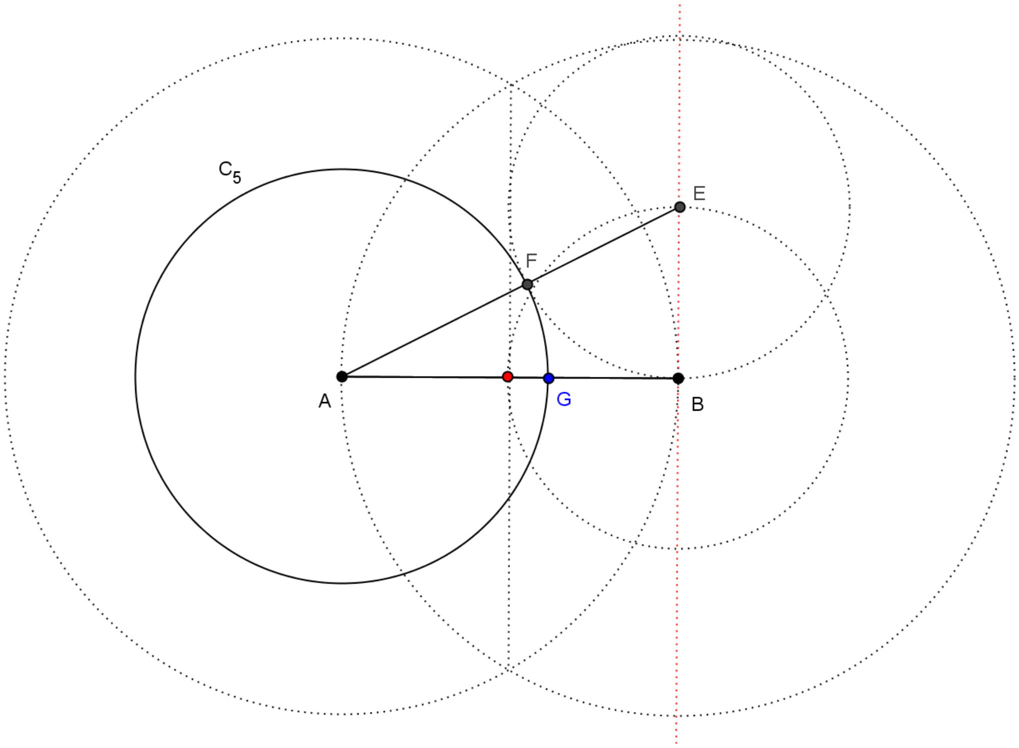
Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 5

6) Construamos C_4 de centro E e raio igual a medida do segmento $\overline{EB}$ e marquemos o ponto F que será a interseção de C_4 com o segmento $\overline{AE}$.



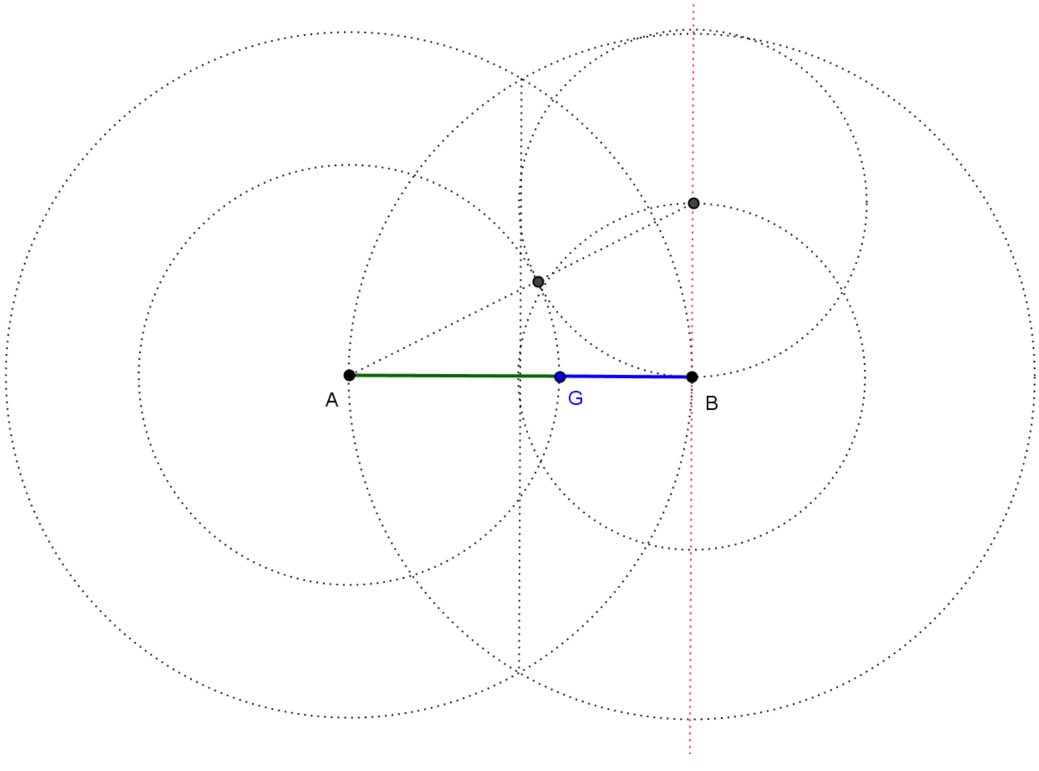
Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 6

7) Construamos C_5 de centro A e raio igual a medida do segmento $\overline{AF}$ e marquemos o ponto G que será a interseção de C_5 com o segmento $\overline{AB}$.



Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 7

8) O ponto G divide o segmento AB na razão áurea, onde $\frac{m(\overline{AG})}{m(\overline{GB})} = \Phi$.



Construção do segmento áureo usando régua e compasso - Passo 8

A seguir mostraremos algebricamente que o ponto G divide o segmento AB na razão áurea.

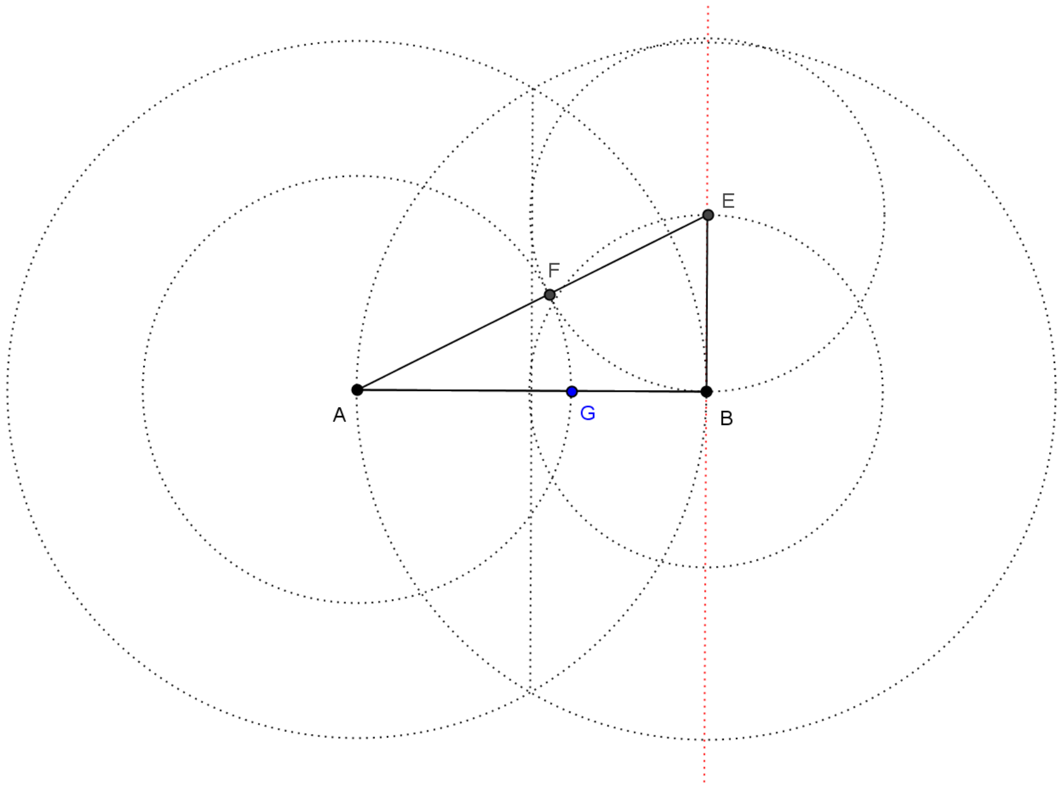


Fig.3: Prova que o ponto G divide o segmento AB na razão áurea

Seja x unidades o tamanho do segmento $\overline{AB}$. Por construção, temos que a medida do segmento $\overline{BE}$ será igual a $\frac{x}{2}$ unidades. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABE teremos que $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$. Logo, $\overline{AE}^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5x^2}{4}$ e assim $\overline{AE} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$.

Como $\overline{EF} = \overline{BE}$ por construção e sabemos que $\overline{BE} = \frac{x}{2}$, e ainda $\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE}$ teremos que $\frac{x\sqrt{5}}{2} = \overline{AF} + \frac{x}{2}$, logo $\overline{AF} = \frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2} = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Como $\overline{AF} = \overline{AG}$, por construção e sabendo que $\overline{AF} = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2}$, e ainda $\overline{AB} = \overline{AG} + \overline{GB}$ teremos que $x = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2} + \overline{GB}$, logo $\overline{GB} = x - \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{x(3-\sqrt{5})}{2}$.

Assim temos que $\overline{AG} = \frac{x(\sqrt{5}-1)}{2}$ e $\overline{GB} = \frac{x(3-\sqrt{5})}{2}$. Logo $\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} = \frac{\frac{x(\sqrt{5}-1)}{2}}{\frac{x(3-\sqrt{5})}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{9-5} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}6108033989... = \Phi$.

2.3. TRIÂNGULOS ÁUREOS

Os triângulos podem ser classificados de acordo com os seus ângulos da seguinte forma: acutângulo, obtusângulo e retângulo.

Iremos apresentar nas subseções a seguir quais triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo podem ser classificados como sendo triângulos áureos.

2.3.1. Triângulo Acutângulo

Um triângulo acutângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a razão do tamanho de um dos seus lados congruentes pelo lado não congruente for o número de ouro.

Vamos mostrar que este fato só ocorre se, e somente se, os ângulos deste triângulo acutângulo medirem 36º, 72º e 72º.

Para provar esta afirmação, dado o triângulo isósceles ABC, com a razão entre seu lado congruente pelo lado não congruente igual ao Número de Ouro iremos demonstrar que os seus ângulos medem 36º, 72º e 72º.

De fato, seja o triângulo ABC isósceles com a razão entre seu lado congruente pelo lado não congruente igual ao Número de Ouro. Seja $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$ = r, $\overline{AB}$ = l e o ângulo $A\hat{C}B$ = θ. Teremos que $\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que é o Número de Ouro.

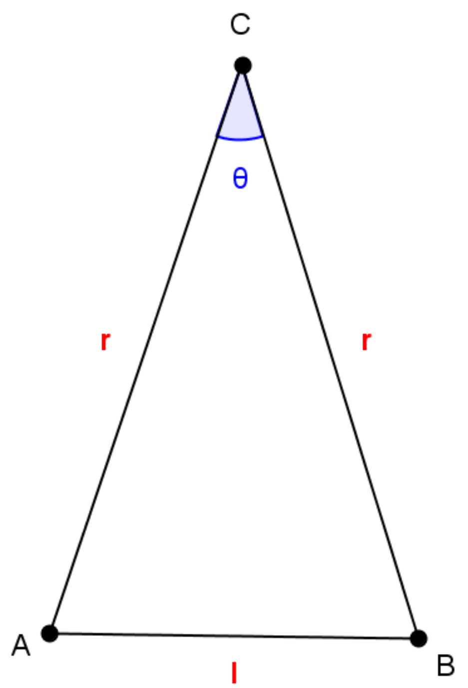


Fig.4: Demonstração 1 - Triângulo Acutângulo Áureo

Pela lei dos cossenos teremos que:

$$l^2 = r^2 + r^2 - 2.r.r.\cos\theta$$

$$l^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\theta$$

$$l^2 = r^2(2 - 2\cos\theta)$$

$$\frac{l^2}{r^2} = (2 - 2\cos\theta)$$

$$\left(\frac{l}{r}\right)^2 = (2 - 2\cos\theta)$$

$$\left(\frac{l}{r}\right)^2 = 2(1 - \cos\theta)$$

$$\left(\frac{r}{l}\right)^2 = \frac{1}{2(1-\cos\theta)}$$

Como $\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ teremos:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2(1-\cos\theta)}$$

$$\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{1}{2(1-\cos\theta)}$$

$$\frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2(1-\cos\theta)}$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2(1-\cos\theta)}$$

$$3 + \sqrt{5} = \frac{1}{(1-\cos\theta)}$$

$$1 - \cos\theta = \frac{1}{3+\sqrt{5}}$$

$$1 - \cos\theta = \frac{1}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$1 - \cos\theta = \frac{3-\sqrt{5}}{9-5}$$

$$1 - \cos\theta = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{4-3+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

θ =36º

E como o triângulo ABC é isósceles nós teremos que os ângulos $C\hat{A}B = A\hat{B}C = 72º$, como queríamos demonstrar.

Agora seja o triângulo ABC, isósceles com seus ângulos medindo 36º, 72º e 72º. Iremos demonstrar que a razão entre seu lado congruente pelo lado não congruente será igual ao Número de Ouro.

De fato, seja o triângulo ABC isósceles com seus ângulos medindo 36º, 72º e 72º, como podemos ver na figura abaixo.

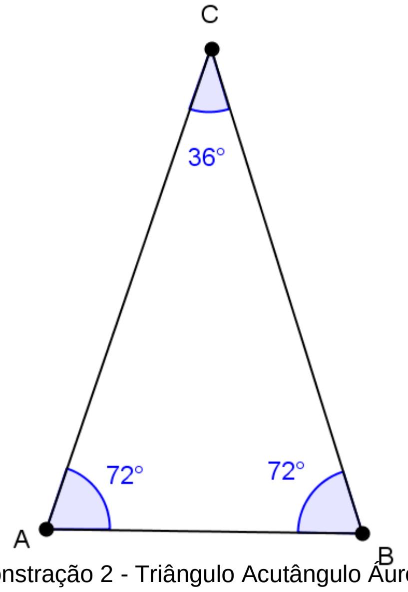
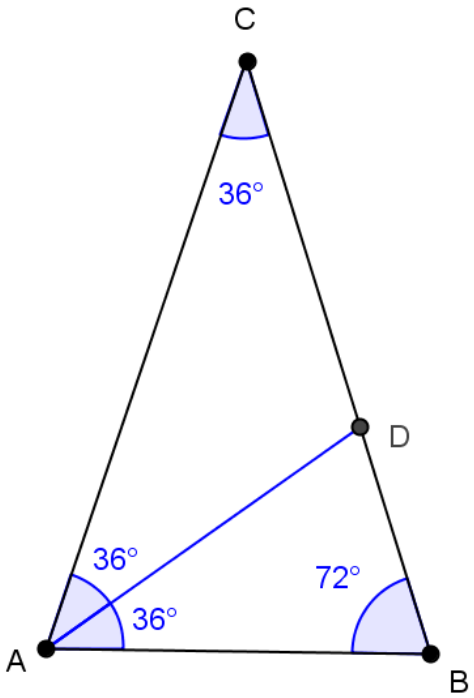


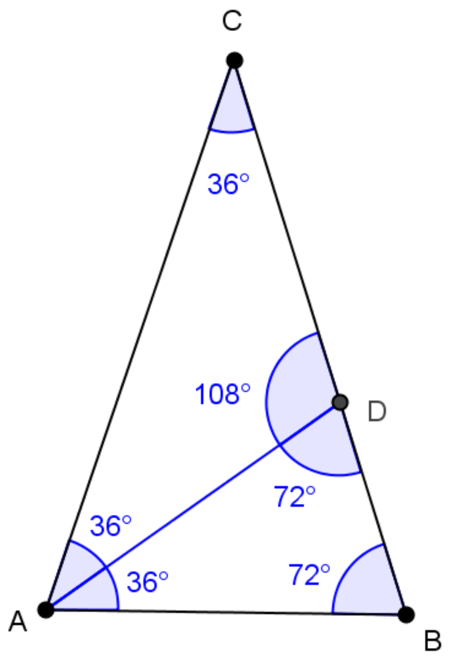
Fig.5: Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo - Passo 1

Tracemos a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, e chamemos de D o ponto de interseção da bissetriz com o lado $\overline{BC}$.



Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo - Passo 2

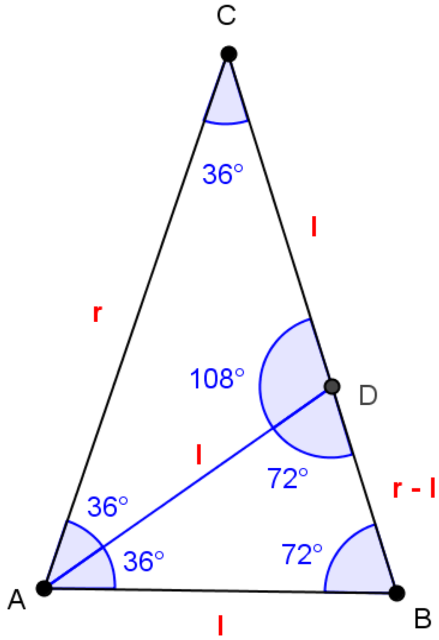
Analisando o triângulo ADC, temos que o ângulo $A\hat{D}C$ mede 108º, já que sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180º e temos que $D\hat{A}C$ = $A\hat{C}D$ = 36º. E como $A\hat{D}C$ e $A\hat{D}B$ são ângulos suplementares, teremos que $A\hat{D}B$ medirá 72º.



Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo - Passo 3

Observemos agora que os triângulos ACB e BAD são semelhantes pelo caso AAA (ângulo, ângulo, ângulo), já que $B\hat{A}D$ = $D\hat{B}A$ = 72º, $A\hat{C}B$ = $B\hat{A}D$ = 36º e $C\hat{B}A$ = $A\hat{D}B$ = 72º.

Chamemos a medida do lado $\overline{AC}$ de r e a medida de $\overline{AB}$ de l, por construção teremos que $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$ = r. Como o triângulo BAD é isósceles teremos que $\overline{AB}$ = $\overline{AD}$ = l, analogamente no triângulo ADC teremos que $\overline{AD}$ = $\overline{DC}$ = l. Sabemos que $\overline{BC}$ = $\overline{CD}$ + $\overline{DB}$ teremos que r = l + $\overline{DB}$, e assim $\overline{DB}$ = r - l.



Demonstração 2 - Triângulo Acutângulo Áureo - Passo 4

Utilizando a semelhança dos triângulos ACB e BAD teremos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

$$\frac{l}{r-l} = \frac{r}{l}$$

E como foi visto na seção 2.1, teremos que:

$$\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{r}{l} = 1{,}618033988...$$

Como queríamos demonstrar.

2.3.2. Triângulo Obtusângulo

Um triângulo obtusângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a divisão do tamanho do seu lado não congruente por um dos seus lados congruentes for o número de ouro.

Este fato só ocorre se, e somente se, os ângulos deste triângulo obtusângulo medirem 36º, 36º e 108º.

Para provar esta afirmação, dado o triângulo obtusângulo ABC, com a razão entre seu lado não congruente pelo lado congruente igual ao número de ouro iremos demonstrar que seus ângulos medem 36º, 36º e 108º.

De fato, seja o triângulo ABC isósceles com a razão entre seu lado não congruente pelo lado congruente igual ao número de ouro. Seja $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$ = l, $\overline{AB}$ = r e o ângulo $A\hat{C}B$ = θ. Teremos que $\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que é o número de ouro.

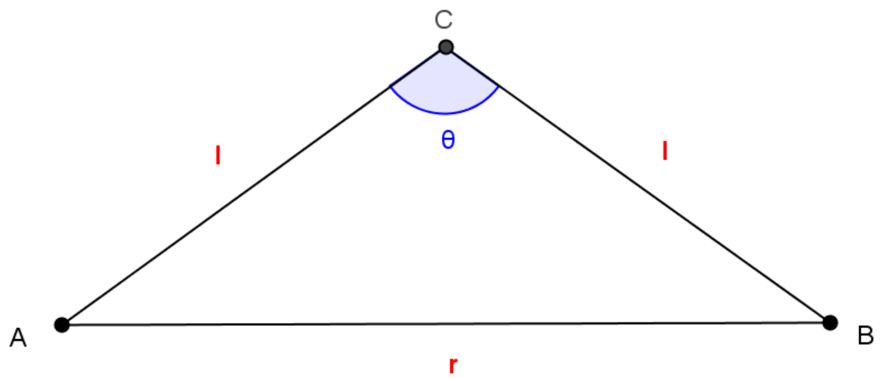


Fig.6: Demonstração 1 - Triângulo Obtusângulo Áureo

Pela lei dos cossenos teremos que:

$$r^2 = l^2 + l^2 - 2 . l . l. \cos\theta$$

$$r = 2\, l^2 - 2\, l^2 \cos\theta$$

$$r^2 = l^2(2 - 2\cos\theta)$$

$$\frac{r^2}{l^2} = (2 - 2\cos\theta)$$

$$\left(\frac{r}{l}\right)^2 = (2 - 2\cos\theta)$$

$$\left(\frac{r}{l}\right)^2 = 2(1 - \cos\theta)$$

Como $\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ teremos:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = 2(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{6+2\sqrt{5}}{8} = 1 - \cos\theta$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{4} = 1 - \cos\theta$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{4-3-\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$$

θ =108º

E como o triângulo ABC é isósceles nós teremos que os ângulos $C\hat{A}B = A\hat{B}C = 36º$, como queríamos demonstrar.

Agora, seja o triângulo ABC, isósceles com seus ângulos medindo 36º, 36º e 108º iremos demonstrar que a razão entre seu lado não congruente pelo lado congruente será igual ao número de ouro.

De fato, seja o triângulo ABC isósceles com seus ângulos medindo 36º, 36º e 108º.

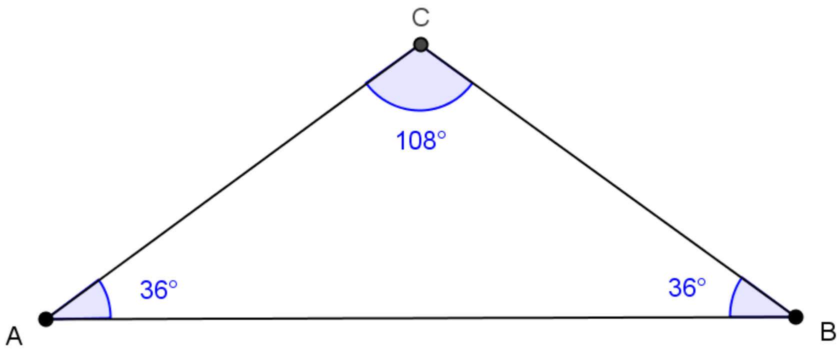
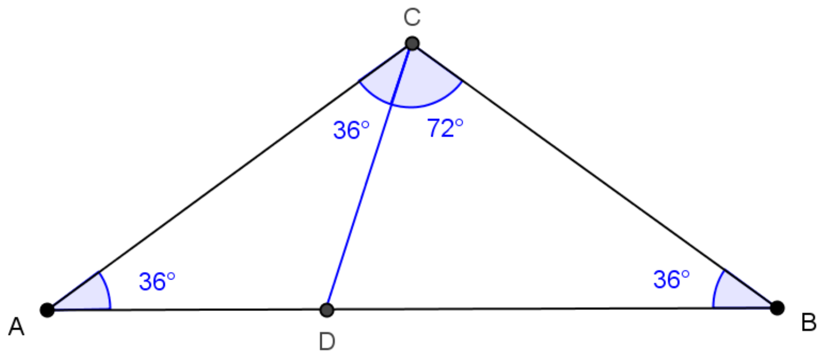


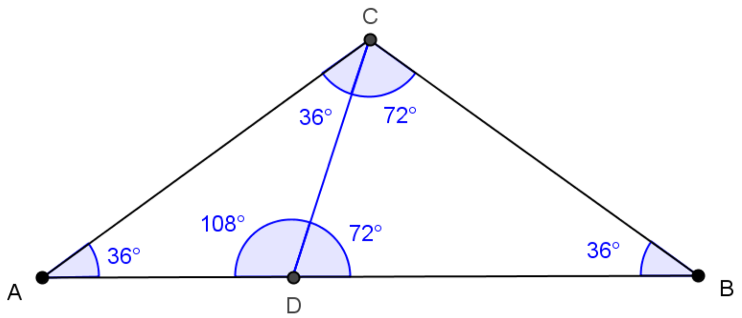
Fig.7: Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 1

Marquemos um ponto D pertencente ao segmento $\overline{AB}$ de tal forma que o ângulo $A\hat{C}D$ seja igual a 36º e o ângulo $B\hat{C}D$ seja igual a 72º.



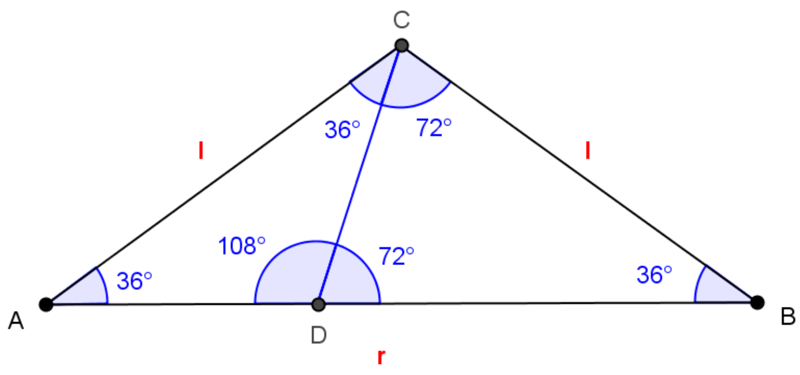
Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 2

Analisando o triângulo ADC temos que o ângulo $A\hat{D}C$ mede 108º, já que sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180º. E como $A\hat{D}C$ e $C\hat{D}B$ são ângulos suplementares, teremos que $C\hat{D}B$ medirá 72º.



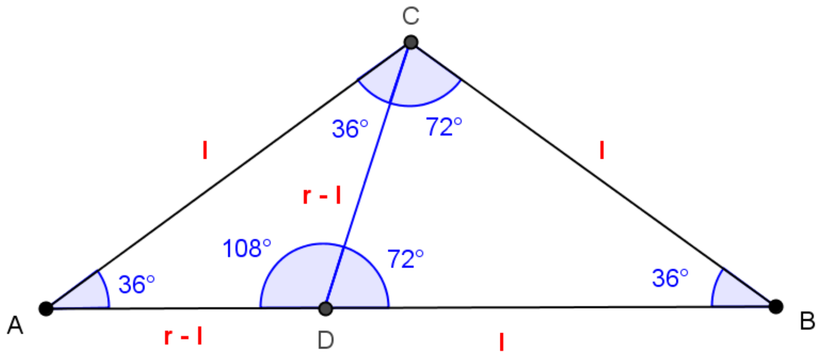
Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 3

Chamemos a medida do lado $\overline{AB}$ de r e a medida de $\overline{AC}$ de l, por construção teremos que $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$ = l.



Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 4

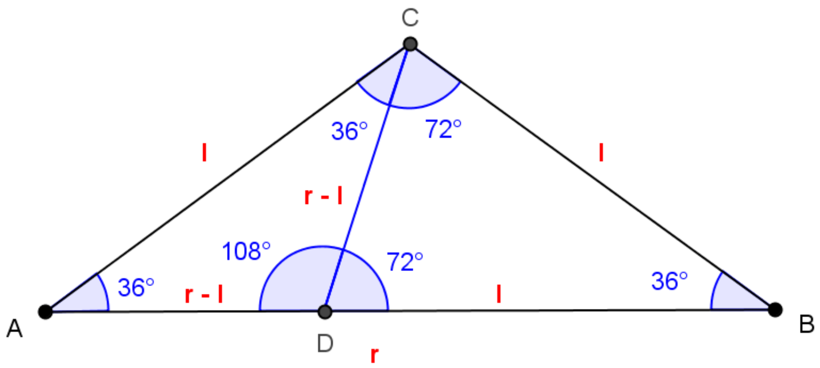
Ao construirmos o segmento $\overline{CD}$, criamos o triângulo CBD que é isósceles, logo, a medida de $\overline{BC}$ é igual a medida de $\overline{BD}$, que vale l. Como $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$, teremos que r $= \overline{AD} + l$, e assim $\overline{AD} = r - l$. E finalmente, como o triângulo ADC também é isósceles, teremos que a medida de $\overline{AD}$ é igual a medida de $\overline{DC}$, que vale $r - l$.



Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 5

Podemos observar que os triângulos ACB e ADC são semelhantes pelo caso AAA (ângulo, ângulo, ângulo), já que $A\hat{C}B$ = $A\hat{D}C$ = 108º, $B\hat{A}C$ = $D\hat{A}C$ = 36º e $C\hat{B}A$ = $A\hat{C}D$ = 36º.

Utilizando a semelhança dos triângulos ACB e ADC, teremos que:



Demonstração 2 - Triângulo Obtusângulo Áureo - Passo 6

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{l}{r-l} = \frac{r}{l}$$

E como visto no capítulo anterior:

$$\frac{r}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{r}{l} = 1{,}618033988...$$

Como queríamos demonstrar.

2.3.3. Triângulo Retângulo

Um triângulo retângulo é dito áureo se for semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a Φ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1.

Este fato só ocorre se, e somente se, os ângulos deste triângulo retângulo medirem 38º, 52º e 90º.

Seja o triângulo ABC, retângulo em A, semelhante ao triângulo retângulo A'B'C', com ângulo reto em A', hipotenusa igual a Φ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1.

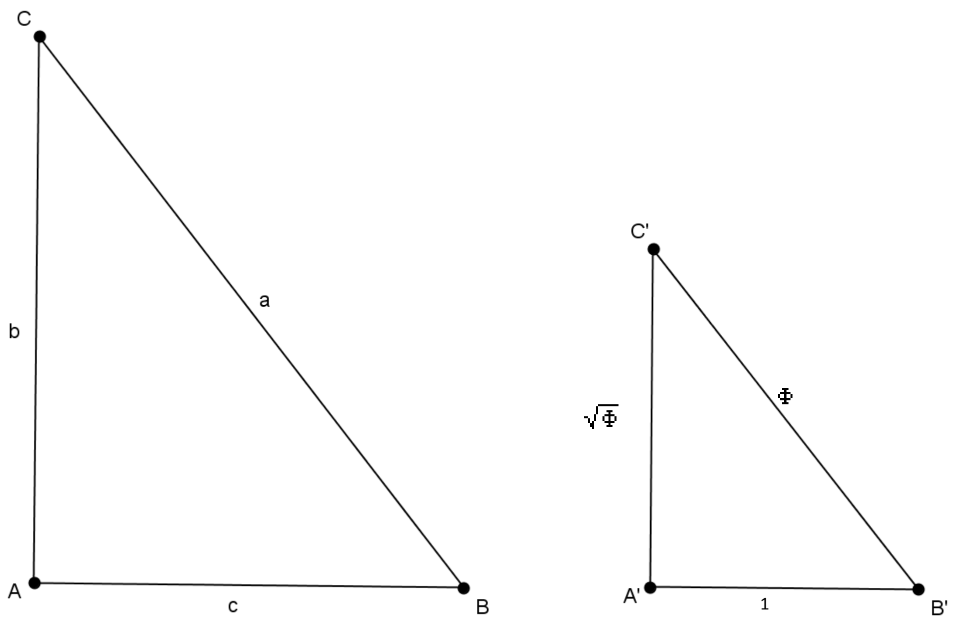


Fig.8: Semelhança 1 - Triângulo Retângulo Áureo

Sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Como ABC é semelhante a A'B'C', teremos que $a = k\,\Phi$, $b = k\sqrt{\Phi}$ e $c = k$, para algum k pertencente ao conjunto dos números reais positivos.

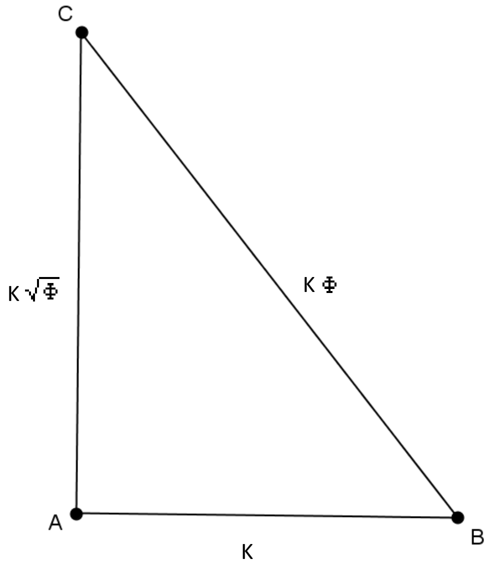


Fig.9: Semelhança 2 - Triângulo Retângulo Áureo

Iremos demonstrar que se um triângulo retângulo é semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a Φ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1, sendo assim classificado como áureo, os ângulos deste triângulo retângulo irão medir 38º, 52º e 90º.

De fato, sejam $B\hat{A}C$ = 90º , $A\hat{B}C = \alpha$ e $B\hat{C}A = \beta$.

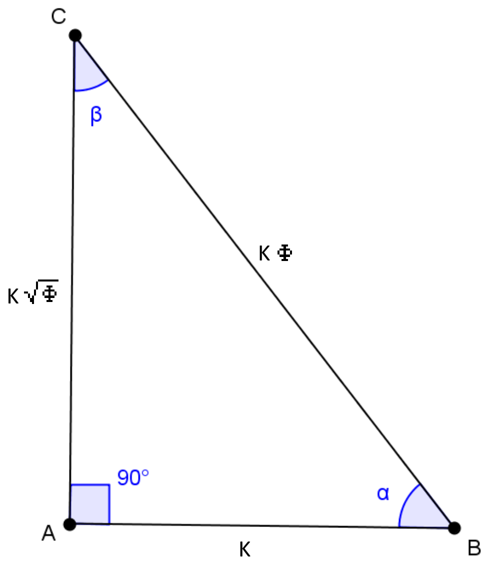


Fig.10: Demonstração 1 - Triângulo Retângulo Áureo

Temos que:

$$\cos\alpha = \frac{k}{k\Phi}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\Phi}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2\,(1-\sqrt{5}\,)}{1-5}$$

$$\cos\alpha = \frac{2\,(1-\sqrt{5}\,)}{-4}$$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, e sendo assim teremos que:

α = 52º.

E como $\alpha + \beta = 90$º, teremos que β = 38º, como queríamos demonstrar.

Demonstraremos agora que, se os ângulos de um triângulo retângulo medem 38º, 52º e 90º, este triângulo retângulo é semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a Φ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1 e, sendo assim, classificado como triângulo retângulo áureo.

De fato, seja o triângulo ABC com $B\hat{A}C$ = 90º, $A\hat{B}C$ = 52º, $B\hat{C}A$ = 38º e ainda que $\overline{AB}$ = c, $\overline{AC}$ = b e $\overline{BC}$ = a.

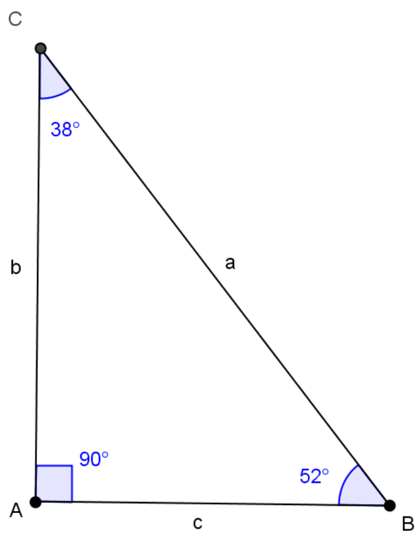


Fig.11: Demonstração 2 - Triângulo Retângulo Áureo

Teremos que:

cos 52º = $\frac{c}{a}$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{5-1}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{4}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{a}{c} = \Phi \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{\Phi}$$

Logo, $\cos^2 52^o = \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2$.

Como $\text{sen}^2\, 52^o + \cos^2 52^o = 1$, temos que:

$$\text{sen}^2\, 52^o + \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\, 52^o = 1 - \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2$$

Como $\text{sen}^2\, 52^o = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, teremos que:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\Phi^2}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{\Phi^2 - 1}{\Phi^2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{\Phi^2 - 1}}{\Phi}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 - 1}}$$

Observe que

$\Phi^2 - 1 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}-4}{4} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$. Logo,

$$\frac{a}{b} = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\Phi}.$$

Assim, teremos que $\frac{a}{c} = \Phi$ e $\frac{a}{b} = \sqrt{\Phi}$, logo este triângulo retângulo é semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a Φ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1 e, sendo assim, classificado como triângulo retângulo áureo, como queríamos demonstrar.

2.4 RETÂNGULOS ÁUREOS

Para que um retângulo seja classificado como sendo um retângulo áureo ele deve apresentar uma característica particular: todo retângulo será classificado como áureo se dele ao extrairmos um quadrado de lado igual ao menor lado do retângulo, o retângulo restante for semelhante ao retângulo inicial.

Observemos o retângulo ABCD abaixo para ilustrar como podemos identificar um retângulo áureo.

Seja um retângulo de lados a, b, com a < b.

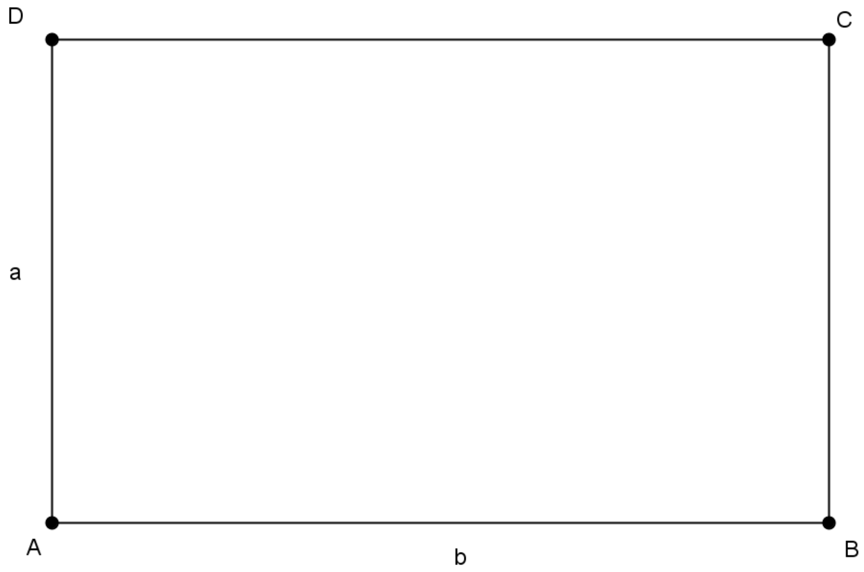
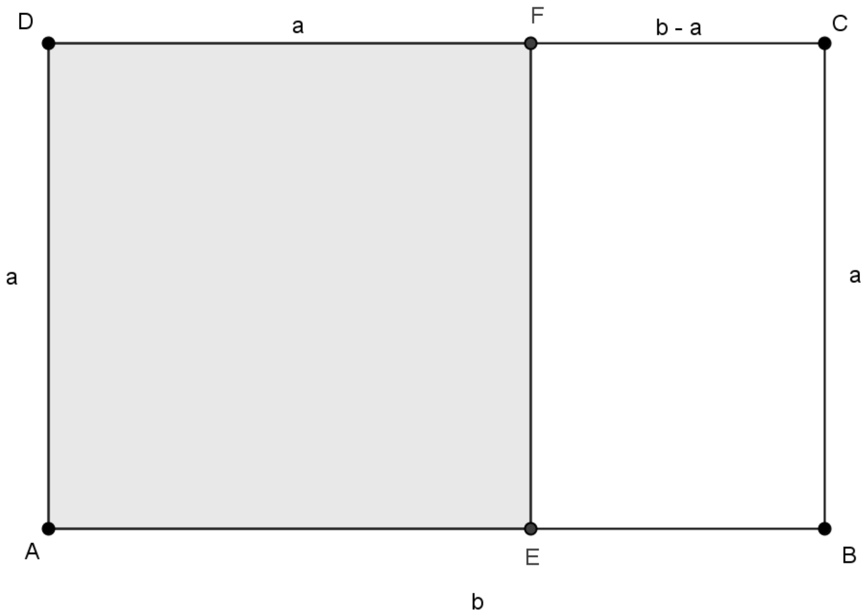


Fig.12: Como identificar um retângulo áureo - Passo 1

Retiremos um quadrado de lado a do retângulo acima.



Como identificar um retângulo áureo - Passo 2

Caso o retângulo de lados b e a e o retângulo de lados a e b – a sejam semelhantes, o retângulo inicial de lados b e a será classificado como sendo um retângulo áureo.

Observamos que caso os retângulos de lados b e a e o retângulo de lados a e b - a sejam semelhantes, teremos que:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$$

$$a^2 = b^2 - ab$$

$$b^2 - ab - a^2 = 0$$

$$b = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4.1.(-a^2)}}{2.1}$$

$$b = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

$$b = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

$$b = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Como a e b representam os comprimentos dos lados do retângulo ABCD a razão entre estes valores nunca será um número negativo, por este motivo descartaremos a solução negativa da equação.

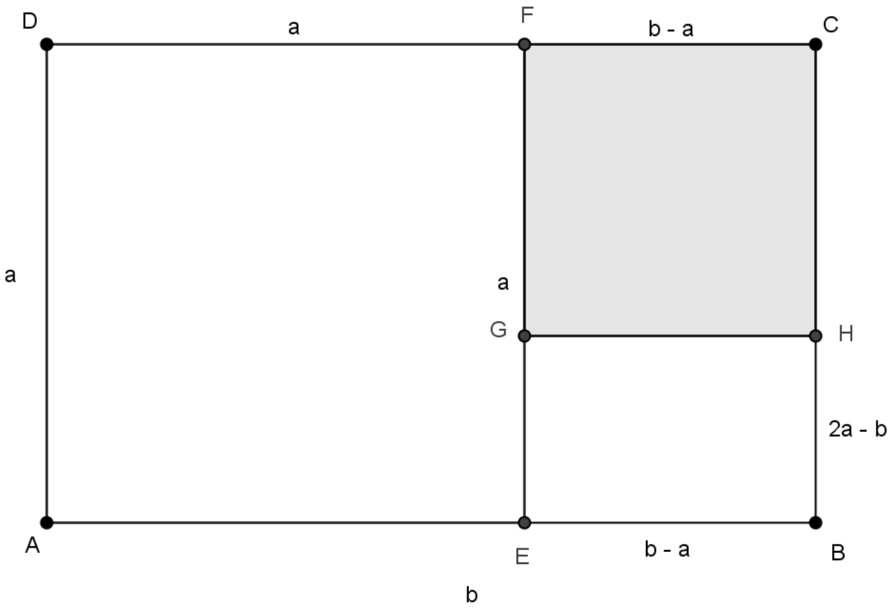
Assim,

$$\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

onde encontramos a razão áurea.

Assim concluímos que outra definição para retângulo áureo é: todo retângulo será classificado como retângulo áureo quando a razão entre o seu maior e menor lado for igual ao número de ouro.

Podemos observar que se do retângulo restante (EBCF), extrairmos um quadrado (GHCF) de lado igual ao menor lado do retângulo, o novo retângulo (EBHG) será semelhante ao retângulo EBCF e, sendo assim o retângulo EBHG também será classificado como um retângulo áureo.



Como identificar um retângulo áureo - Passo 3

Vejamos que:

$$\frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{2a-b}$$

$$2a^2 - ab = b^2 - 2ab + a^2$$

$$b^2 - ab - a^2 = 0$$

E como visto anteriormente teremos que $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Iremos provar agora que este processo pode ser repetido infinitamente sempre nos dando um novo retângulo áureo.

Sabemos do estudo de relações entre proporções que: $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{2a-b}$, ou seja, $\frac{b}{a} = \frac{b-a}{2a-b}$. Assim, podemos afirmar que se o retângulo de lados b e a for áureo, os retângulo de lados a e b - a e lados b - a e 2a - b também serão áureos.

Sendo assim, dada a sequência: b, a, b - a, 2a - b, 2b - 3a, 5a - 3b,... cujo termo geral será $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$ teremos pelo raciocínio de relações entre proporções que quaisquer dois valores consecutivos desta sequência serão os lados de um retângulo áureo se em nosso retângulo inicial $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Fecharemos este capítulo mostrando como é possível construir um retângulo áureo utilizando apenas régua e compasso.

Para isto, inicialmente, deveremos construir o quadrado AEFD de lado a.

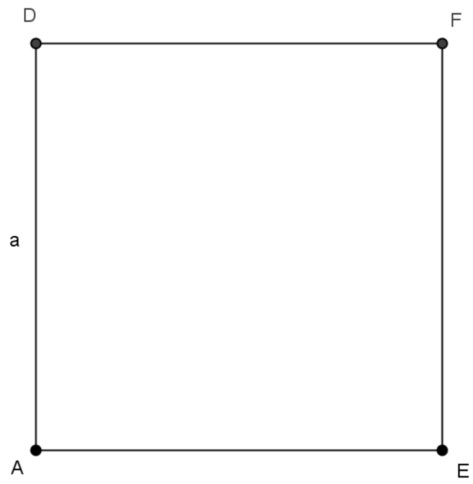
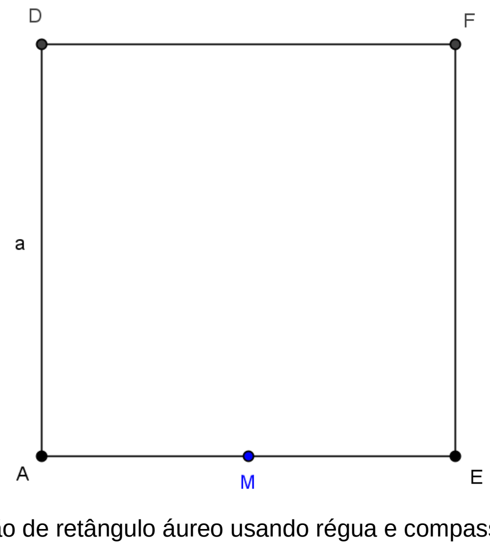


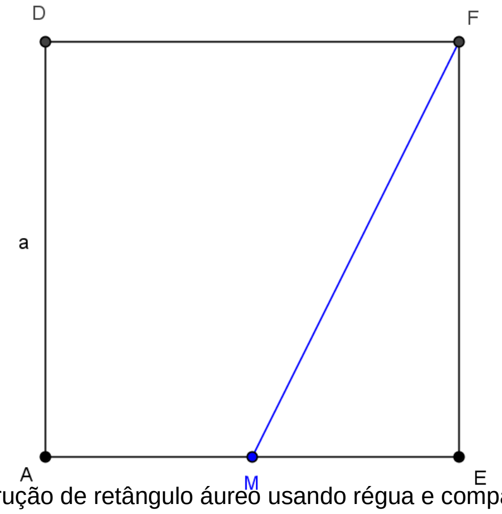
Fig.13: Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 1

Marquemos M, o ponto médio do segmento $\overline{AE}$.



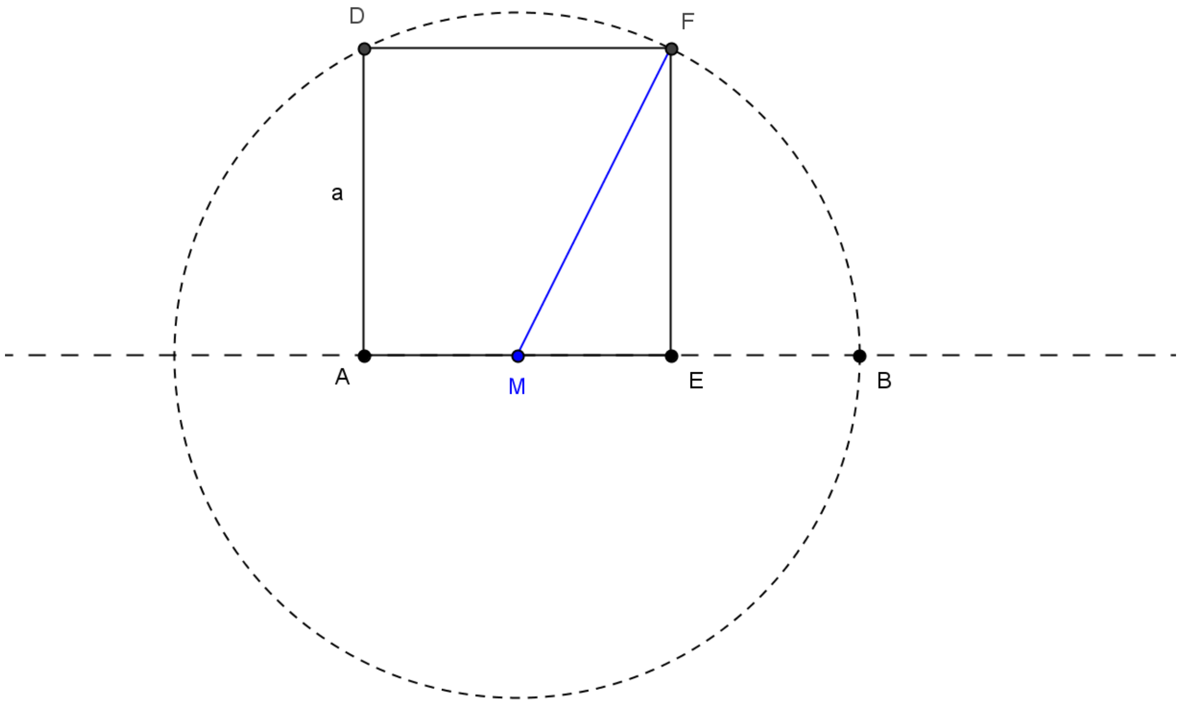
Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 2

Tracemos o segmento $\overline{MF}$.



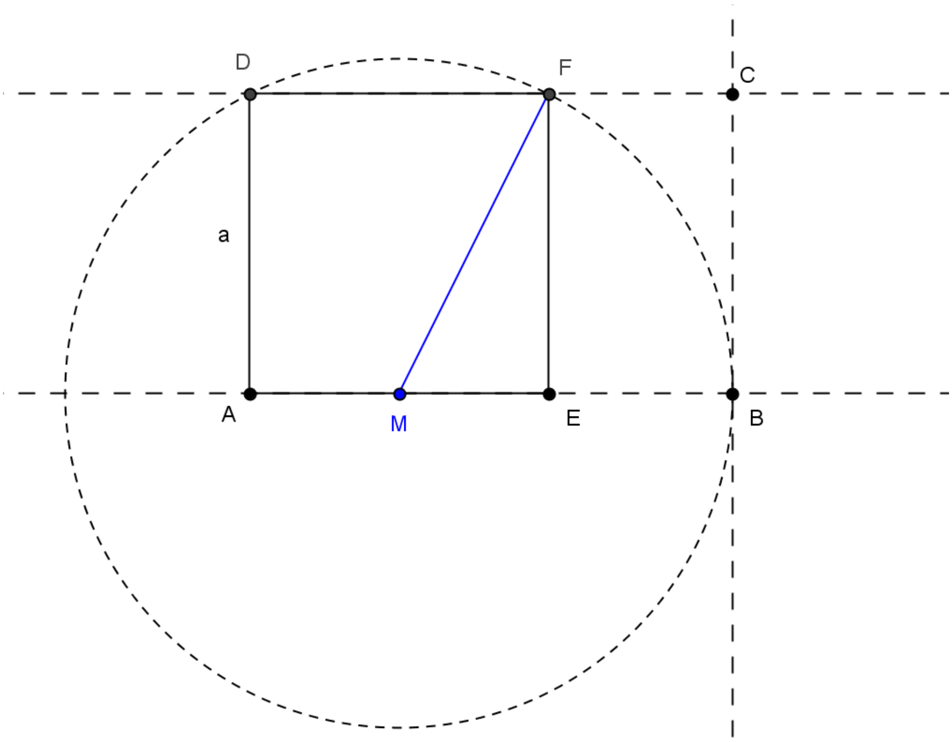
Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 3

Desenhemos a reta $\overleftrightarrow{AE}$ e o círculo de centro M e raio $\overline{MF}$. Chamemos de B a interseção da reta $\overleftrightarrow{AE}$ com o círculo de centro M e raio $\overline{MF}$.



Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 4

Tracemos uma reta perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AE}$ que passe por B. Tracemos a reta $\overleftrightarrow{DF}$. Chamemos de C a interseção entre essas duas retas.



Construção de retângulo áureo usando régua e compasso - Passo 5

O retângulo ABCD é um retângulo áureo.

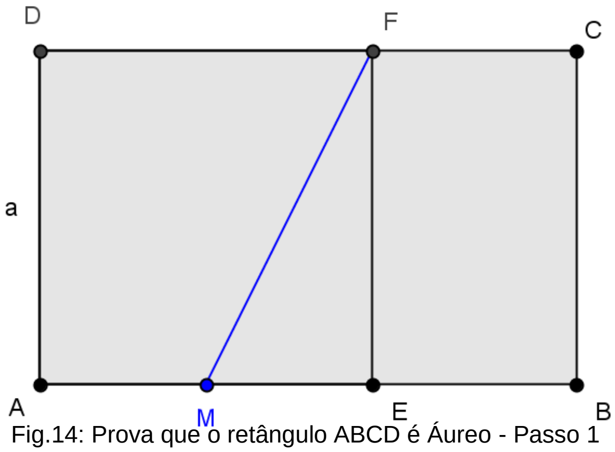
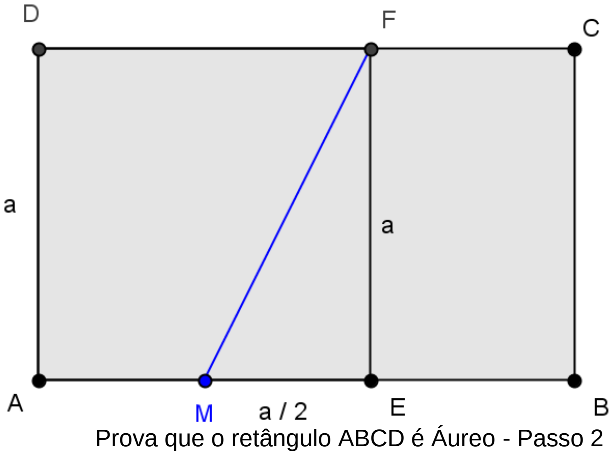


Fig.14: Prova que o retângulo ABCD é Áureo - Passo 1

De fato, como $\overline{ME} = \frac{a}{2}$ e $\overline{FE} = a$, por Pitágoras temos que:



Prova que o retângulo ABCD é Áureo - Passo 2

$\overline{MF}^2 = \overline{ME}^2 + \overline{EF}^2$

$\overline{MF}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$

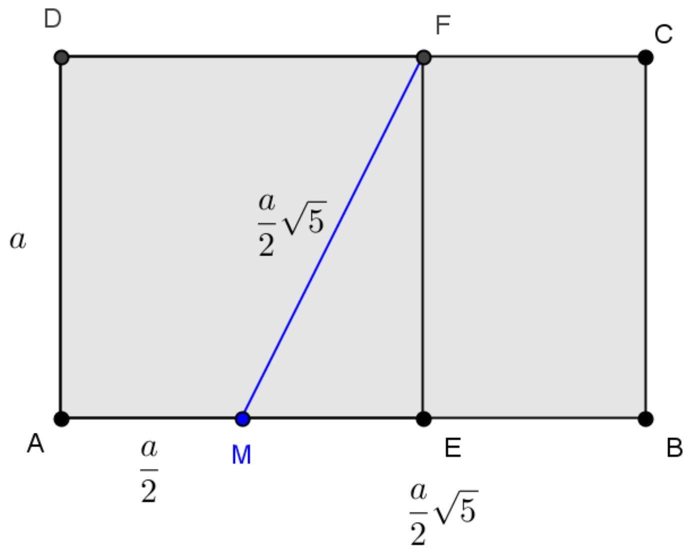
$\overline{MF}^2 = \frac{a^2}{4} + a^2$

$\overline{MF}^2 = \frac{5a^2}{4}$

$\overline{MF} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$

$\overline{MF} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$

Como $\overline{MF} = \overline{MB}$, $\overline{AM} = \frac{a}{2}$ e $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$ teremos que:



Prova que o retângulo ABCD é Áureo - Passo 3

$\overline{AB} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}$

$\overline{AB} = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Sendo assim,

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{a}$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, ABCD é um retângulo áureo.

2.5 PENTÁGONO REGULAR

Em um pentágono regular podemos encontrar diversas vezes a razão áurea. Iremos mostrar como encontrar algumas dessas razões utilizando o pentágono regular ABCDE de lado l.

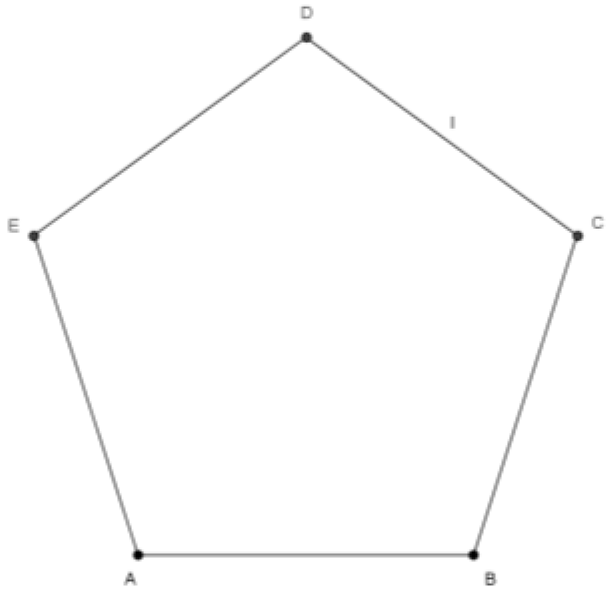


Fig.15: Pentágono

<u>Caso 1:</u>

Tracemos o segmento $\overline{EC}$ e definamos que $\overline{EC} = r$.

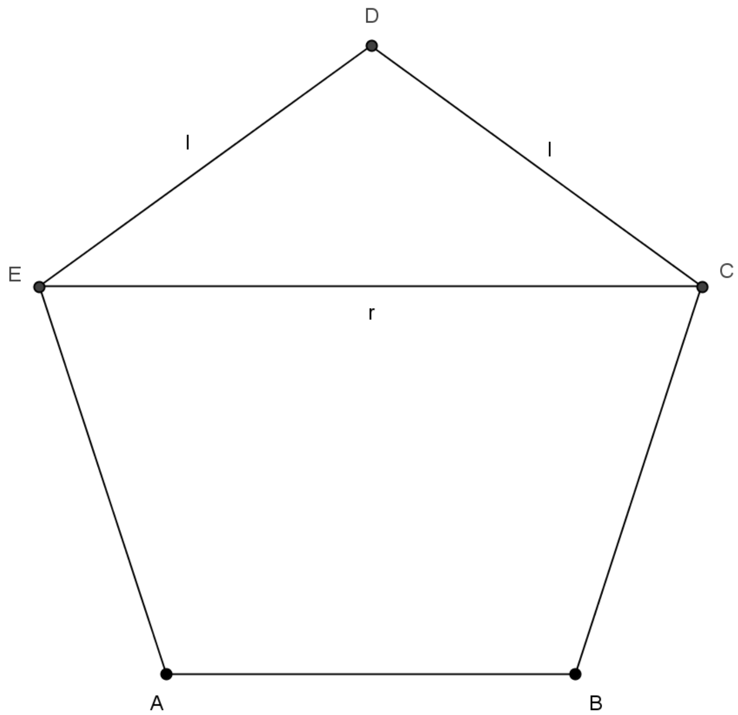
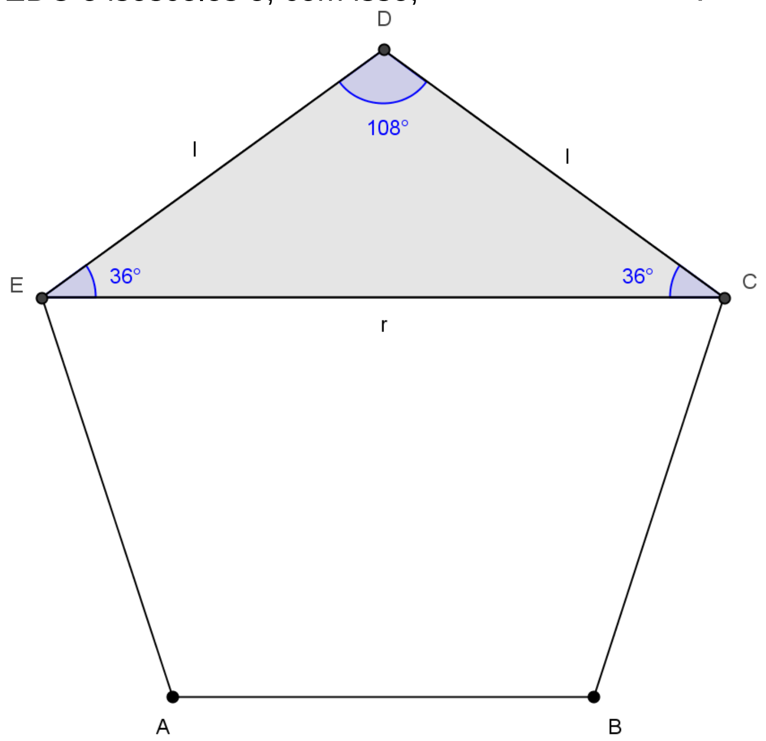


Fig.16: Pentágono - Caso 1 - Passo 1

Como ABCDE é um pentágono regular temos que $E\widehat{D}C = 108\,^{\circ}$. Temos ainda, que o triângulo EDC é isósceles e, com isso, $D\widehat{E}C = D\widehat{C}E = 36\,^{\circ}$.



Pentágono - Caso 1 - Passo 2

E como demonstrado na seção 2.3.2, teremos que a razão entre $\frac{r}{l}$ será igual ao número de ouro.

<u>Caso 2:</u>

Ainda utilizando o pentágono regular ABCDE tracemos a diagonal $\overline{AD}$.

Como ABCDE é um pentágono regular temos que $A\widehat{E}D = 108\,^{\circ}$. Temos ainda, que o triângulo EDA é isósceles e, com isso, $E\widehat{D}A = E\widehat{A}D = 36\,^{\circ}$.

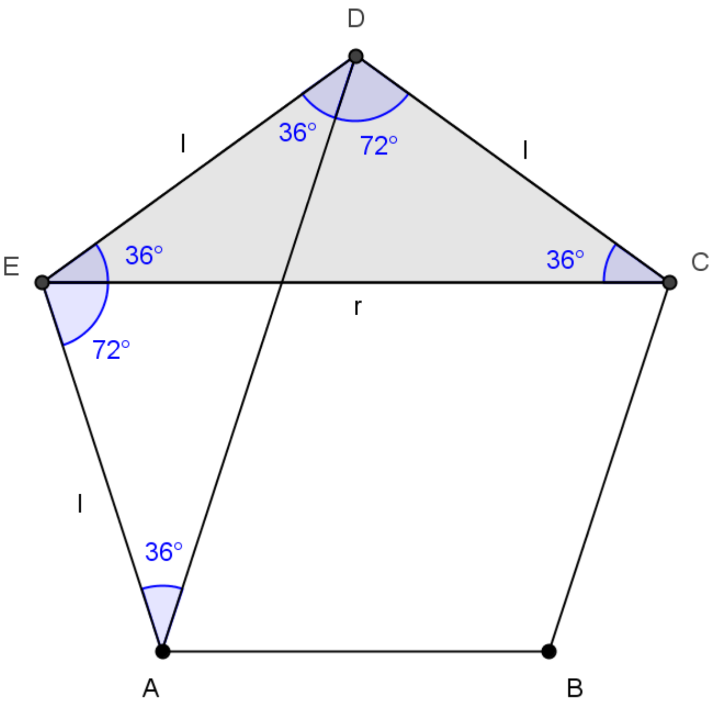
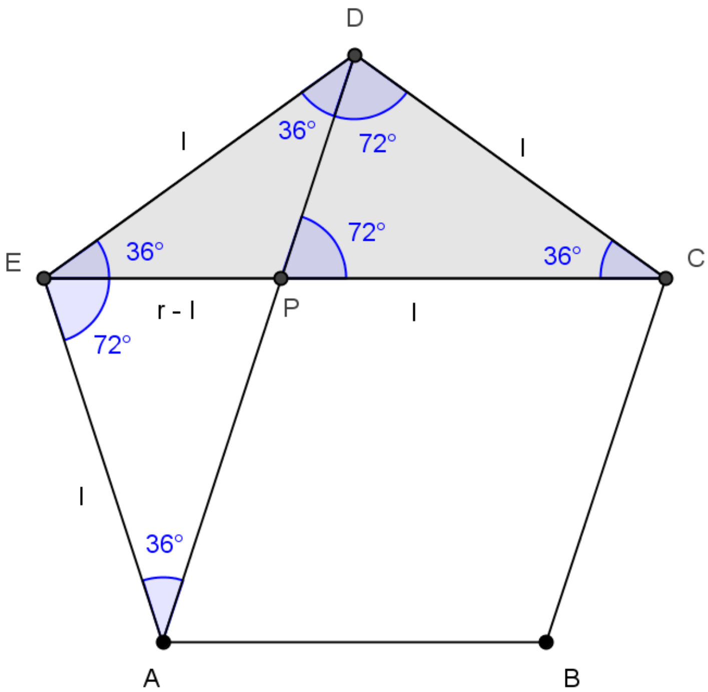


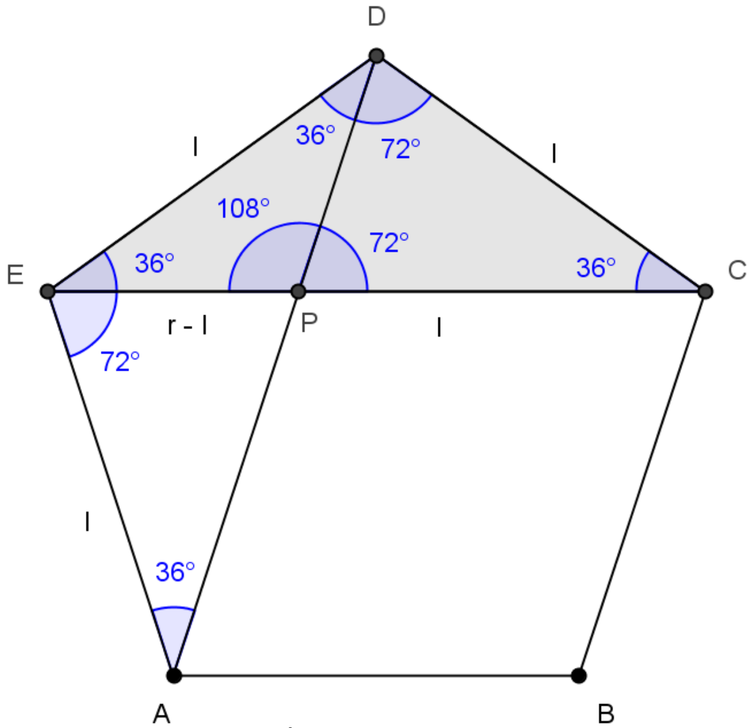
Fig.17: Pentágono - Caso 2 - Passo 1

Seja P o ponto de interseção entre os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$. No triângulo CDP teremos que o ângulo $C\hat{P}D = 72$ º, logo $\overline{CP} = \overline{CD} =$ l. E como $\overline{EC} = \overline{EP} + \overline{PC}$, teremos que $\overline{EP} =$ r - l.



Pentágono - Caso 2 - Passo 2

No triângulo EPD teremos que $E\hat{P}D = 108$ º, assim teremos um triângulo com os ângulos iguais a 36º, 36º e 108º, e como demonstrado na seção 2.3.2., teremos que a razão entre $\frac{l}{r-l}$ será igual ao número de ouro.



Pentágono - Caso 2 - Passo 3

<u>Caso 3:</u>

Vemos que o triângulo EPD é isósceles, logo $\overline{EP} = \overline{DP} =$ r - l.

E como demonstrado na seção 2.3.1., teremos que a razão entre $\frac{l}{r-l}$ será igual ao número de ouro.

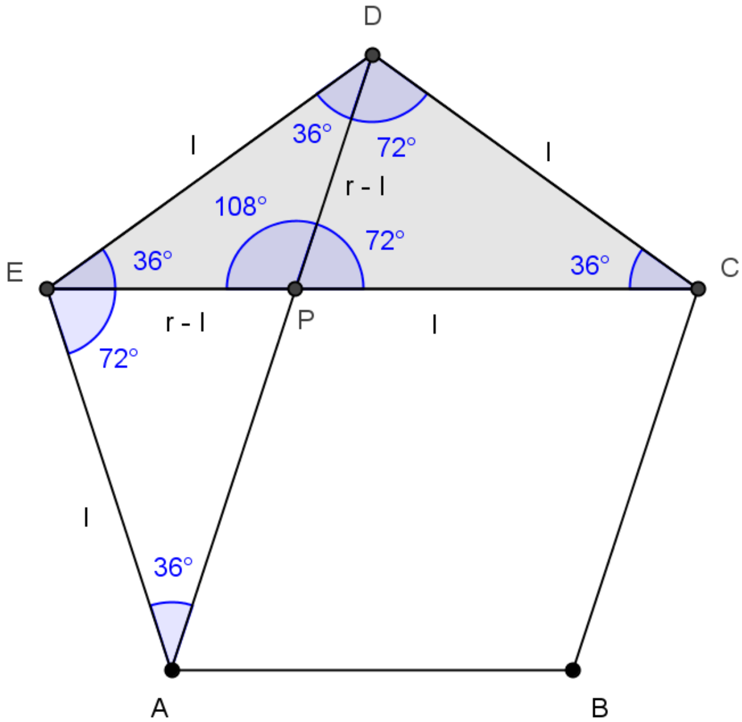


Fig.18: Pentágono - Caso 3

<u>Caso 4:</u>

Como demonstrado no Caso 2 sabemos que a razão entre $\frac{l}{r-l}$ será igual ao número de ouro logo, podemos observar que a interseção de duas diagonais no pentágono regular, as divide de tal forma que podemos encontrar o número áureo ao fazermos a razão entre o maior e o menor comprimento.

Como exemplo, ainda utilizando o pentágono regular ABCDE, podemos citar que $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PE}} = \frac{l}{r-l}$ que será igual ao número de ouro.

<u>Caso 5:</u>

Como demonstrado no Caso 1 sabemos que a razão entre $\frac{r}{l}$ será igual ao número de ouro logo, podemos observar que a interseção de duas diagonais no pentágono regular, as divide de tal forma que podemos encontrar o número áureo ao fazermos a razão entre a diagonal de um pentágono e o maior comprimento obtido após realizarmos a divisão da diagonal.

Como exemplo, ainda utilizando o pentágono regular ABCDE, podemos citar que $\frac{\overline{EC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AP}} = \frac{r}{l}$ que será igual ao número de ouro.

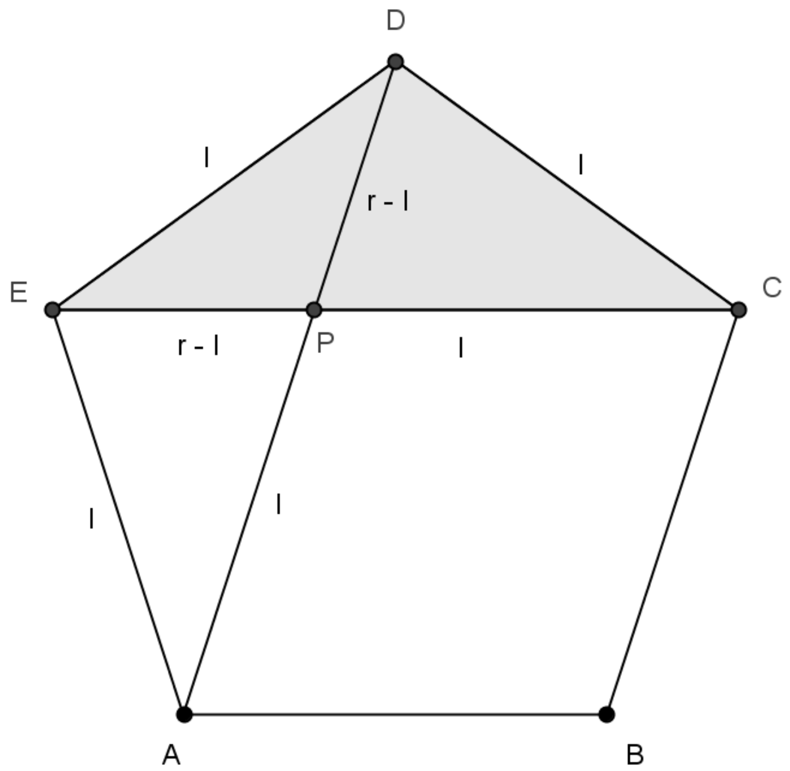


Fig.19: Pentágono - Caso 5

2.6 RAZÃO ÁUREA NA CIRCUNFERÊNCIA

Dizemos que dois pontos pertencentes a uma circunferência dividem a circunferência em uma razão áurea quando a razão entre o comprimento da circunferência está para o arco maior assim como a razão entre o arco maior está para o arco menor e, ambas as razões, serão iguais ao número de ouro.

Seja a circunferência de centro O e raio r.

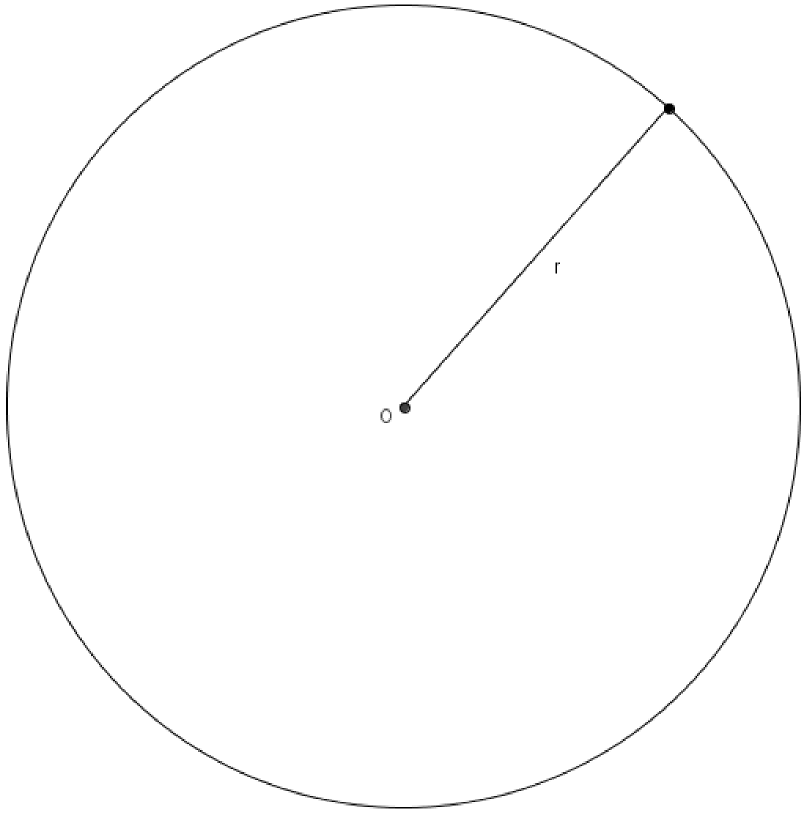


Fig.20: Circunferência

Marquemos os pontos A e B de maneira que estes pontos estejam em uma razão áurea.

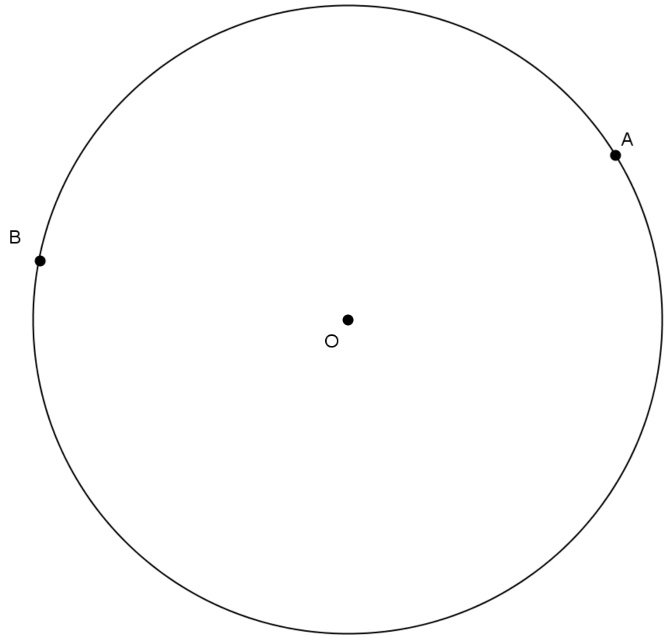


Fig.21: Circunferência - razão áurea

Vamos mostrar que estes pontos dividem a circunferência em razão áurea se, somente se, o menor ângulo AÔB medir 137,5º (aproximado).

Para provar está afirmação iremos inicialmente demonstrar que se os pontos A e B pertencentes a circunferência estão em razão áurea, o ângulo AÔB mede 137,5º.

De fato, sejam A e B dois pontos pertencentes a circunferência de tal maneira que eles dividam a circunferência em razão áurea.

Seja a medida do menor arco AB igual a t.

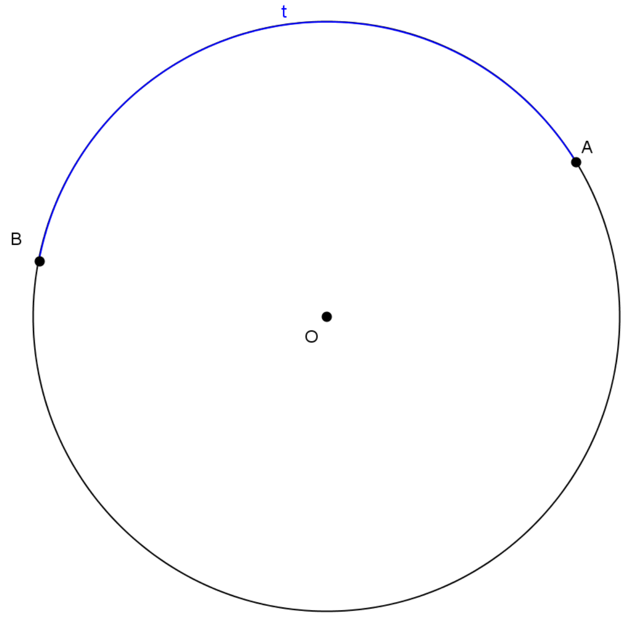
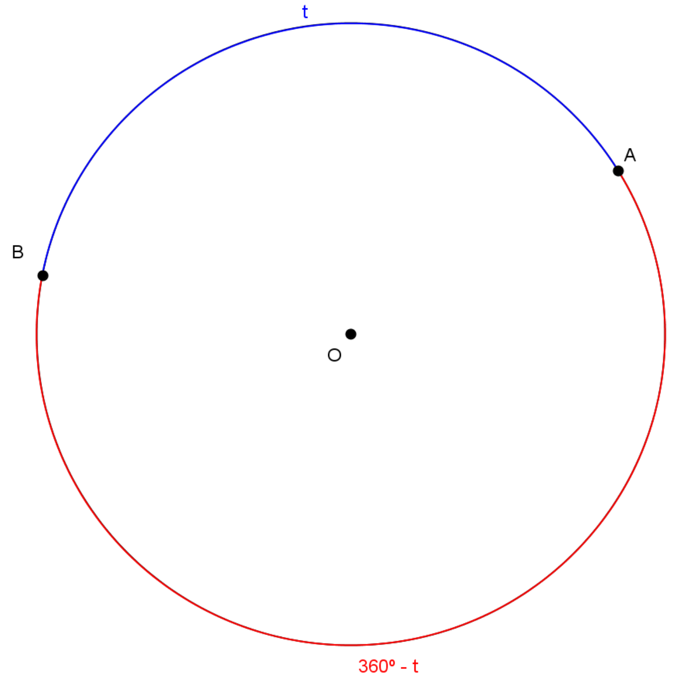


Fig.22: Demonstração 1 - Circunferência - Passo 1

Logo a medida do maior arco AB será igual a 360º - t.



Demonstração 1 - Circunferência - Passo 2

Como os pontos A e B dividem a circunferência na razão áurea teremos que:

$$\frac{360}{360-t}=\frac{360-t}{t}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Logo,

$$\frac{360-t}{t}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$720-2t=t+t\sqrt{5}$$

$$3t+t\sqrt{5}-720=0$$

$$t\left(3+\sqrt{5}\right)-720=0$$

$$t=\frac{720}{3+\sqrt{5}}$$

$$t=\frac{720}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$t=\frac{2160-720\sqrt{5}}{9-5}$$

$$t=\frac{2160-720\sqrt{5}}{4}$$

$$t=137{,}5077641\ldots$$

$$t\cong 137{,}5$$

Como queríamos demonstrar.

Iremos demonstrar, agora, que dado dois pontos A e B pertencentes a uma circunferência de centro O, onde o menor ângulo AÔB mede 137,5º, estes pontos dividem a circunferência em razão áurea.

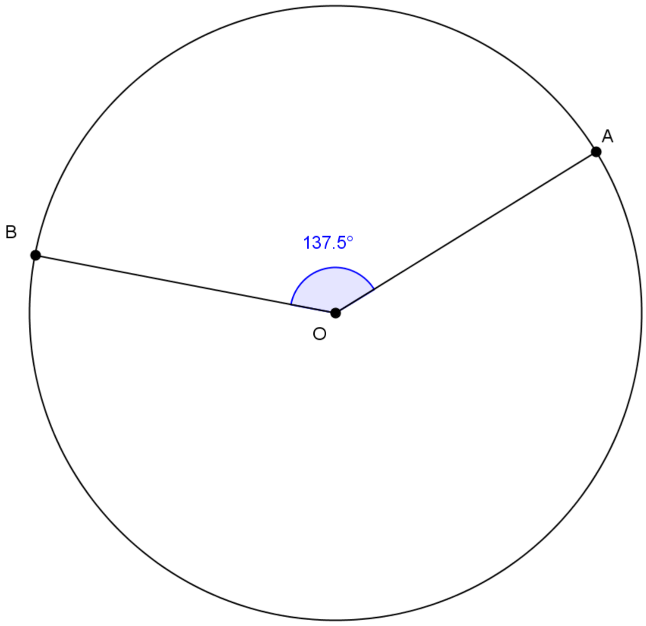
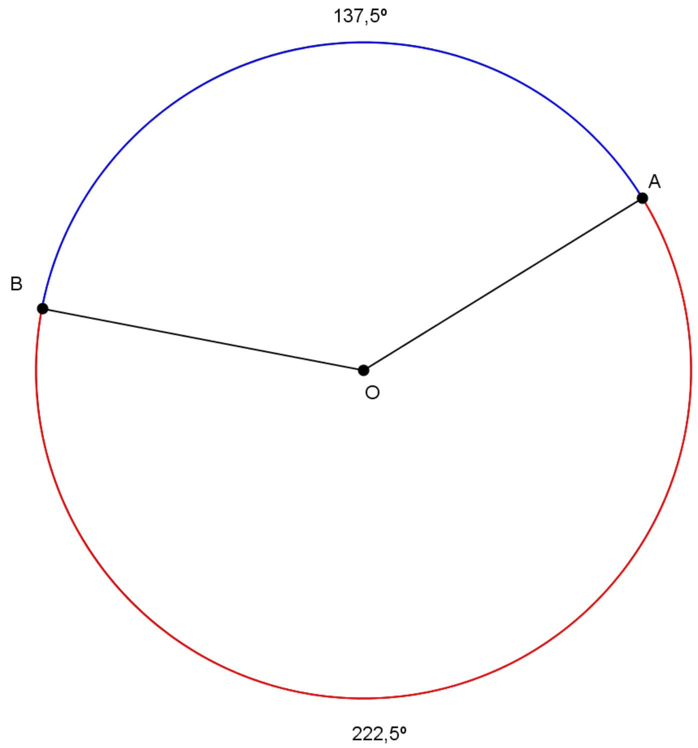


Fig.23: Demonstração 2 - Circunferência - Passo 1

Sabemos que o menor arco AB medirá 137,5º e o maior arco AB, por ser replementar ao menor, medirá 222,5º.



Demonstração 2 - Circunferência - Passo 1

Assim teremos que:

$\frac{360}{222,5} \cong \frac{222,5}{137,5} \cong \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, como queríamos demonstrar.

Cabe ressaltar que teremos resultados aproximados, pois o valor de 137,5º é um valor aproximado.

2.7. PIRÂMIDE ÁUREA

Seja uma pirâmide de base quadrada de lado igual a “b”, altura igual a “c” e altura de suas faces iguais a “a”. Está pirâmide será classificada como sendo uma pirâmide áurea quando o triângulo retângulo de lados c, $\frac{b}{2}$ e a for um triângulo áureo.

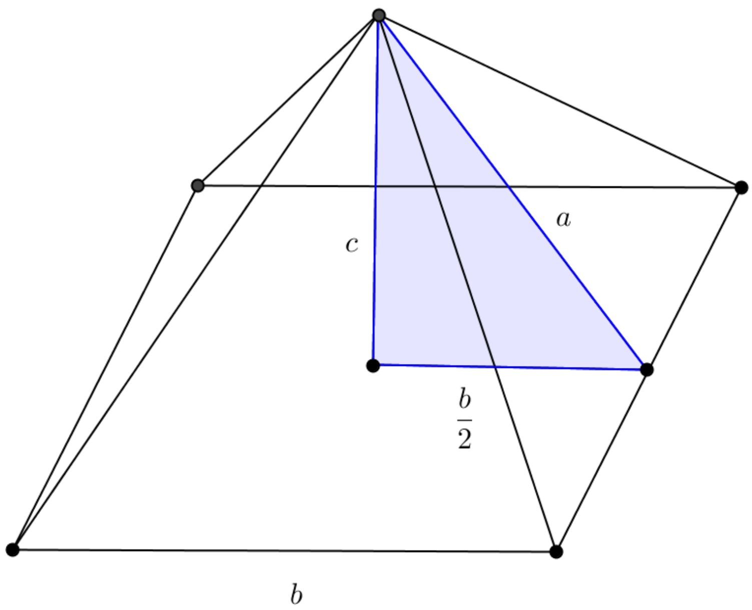


Fig.24: Definição Pirâmide Áurea

Como visto na seção 2.3.3, sabemos que um triângulo retângulo é dito áureo se for semelhante a um triângulo retângulo com hipotenusa igual a Φ e catetos iguais a $\sqrt{\Phi}$ e 1. Logo, para que uma pirâmide de base quadrada seja classificada como áurea ela terá lado da base igual a 2x, altura igual a x$\sqrt{\Phi}$ e altura de suas faces iguais a x Φ, com x ϵ $\mathcal{R}^*_+$.

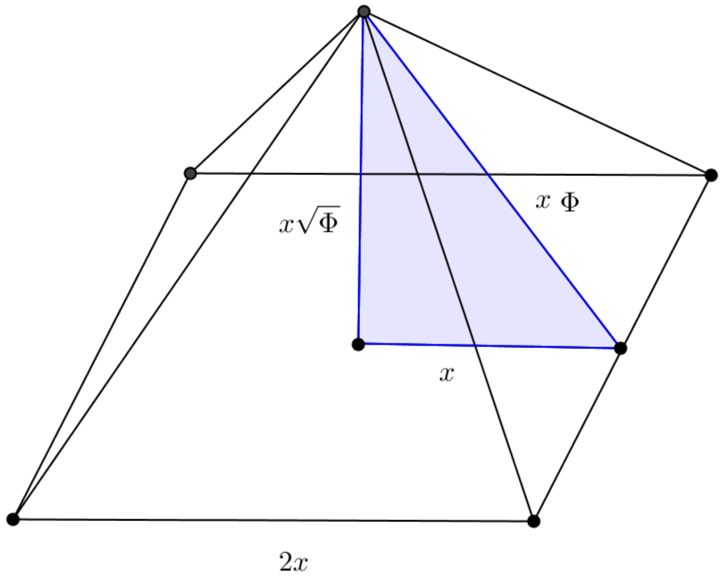


Fig.25: Pirâmide Áurea

Uma propriedade interessante encontrada nas pirâmides áureas é que a área de cada face triangular é igual a área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide.

Iremos demonstrar que está propriedade só ocorre se, e somente se, a pirâmide em questão for uma pirâmide áurea.

De fato, suponhamos que a pirâmide seja áurea, logo ela terá lado da base igual a 2.x, altura igual a $\sqrt{\Phi}$.x e altura de suas faces iguais a Φ.x.

Com isso a área da face triangular será:

$$A_{ft} = \frac{2x.\Phi x}{2} = \Phi x^2$$

Já a área do quadrado cujo lado é a altura da pirâmide será:

$$A_q = \left(\sqrt{\Phi}x\right)^2 = \Phi x^2$$

Logo, demonstramos que a área de cada face triangular é igual a área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide.

Iremos demonstrar agora que se a área de cada face triangular é igual a área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide, esta pirâmide será classificada como áurea e assim terá base igual a 2x, altura igual a $\sqrt{\Phi}$x e altura de suas faces iguais a Φx.

De fato, seja a pirâmide abaixo de base quadrada de lado igual a “b”, altura igual a “c” e altura de suas faces iguais a “a”.

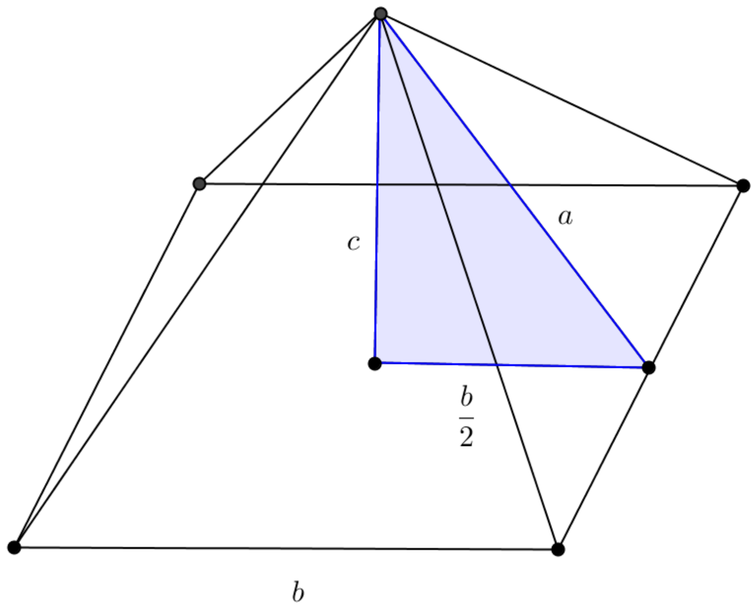


Fig.26: Demonstração 1 - Pirâmide Áurea

O triângulo formado pela altura da pirâmide, metade da base e altura do triângulo da face possui lados iguais c, $\frac{b}{2}$ e a (supondo c > $\frac{b}{2}$).

Por Pitágoras teremos que $a^2 = c^2 + \frac{b^2}{4}$ e pela suposição feita temos que área de cada face triangular é igual a área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide, ou seja, $\frac{ba}{2} = c^2$.

Como $\frac{ba}{2} = c^2$, temos que:

$$ba = 2c^2 \iff b = \frac{2c^2}{a}$$

Como por Pitágoras temos que $a^2 = c^2 + \frac{b^2}{4}$, podemos substituir o valor de b que nos dará:

$$a^2 = c^2 + \frac{\left(\frac{2c^2}{a}\right)^2}{4}$$

$$a^2 = c^2 + \frac{\frac{4c^4}{a^2}}{4}$$

$$a^2 = c^2 + \frac{c^4}{a^2}$$

$$\frac{a^4}{a^2} = \frac{a^2c^2}{a^2} + \frac{c^4}{a^2}$$

$$a^4 = a^2c^2 + c^4$$

$\frac{a^4}{c^4} = \frac{a^2c^2}{c^4} + \frac{c^4}{c^4}$

$\frac{a^4}{c^4} = \frac{a^2}{c^2} + 1$

$\left(\frac{a}{c}\right)^4 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 1$

Seja $\left(\frac{a}{c}\right)^2 = x$. Então:

$x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$, que, como visto em 2.1, terá como uma de suas raízes o número Φ. Assim:

$\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \Phi$

$\frac{a}{c} = \sqrt{\Phi}$.

Vimos que , $\frac{ba}{2} = c^2$, logo:

$ba = 2c^2$

$\frac{ba}{c} = 2c$

$\frac{a}{c} = \frac{2c}{b}$

$\frac{a}{c} = \frac{c}{\frac{b}{2}}$

E como $\frac{a}{c} = \sqrt{\Phi}\cdot$, teremos que:

$\frac{a}{c} = \frac{c}{\frac{b}{2}} = \sqrt{\Phi}$,

o que só ocorre se o triângulo retângulo for áureo e como a pirâmide possui a base quadrada se trata de uma pirâmide áurea.

2.8. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de Fibonacci é uma sequência de números naturais definida recursivamente de tal maneira que o 1º termo e o 2º termo são iguais a 1 e:

- o 1º termo somado com o 2º gera o 3º termo;
- o 2º termo somado com o 3º gera o 4º termo;
- o 3º termo somado com o 4º gera o 5º termo;
- o 4º termo somado com o 5º gera o 6º termo;

e assim sucessivamente.

Denotando a sequência por $F = F_n$ poderemos escrever a sequência da seguinte forma $F_0 = F_1 = 1$, e:

$F_2 = F_1 + F_0$;

$F_3 = F_2 + F_1$;

$F_4 = F_3 + F_2$;

$F_5 = F_4 + F_3$;

$F_6 = F_5 + F_4$; ...

Em termos gerais teremos que:

$$\boxed{F_0 = F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n}$$

Esta sequência não é limitada superiormente.

Se tomarmos as razões entre cada termo pelo seu antecessor teremos uma sequência numérica, cujo termo geral é dado por $A_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$.

Analisando os primeiros termos da sequência A_n observamos que:

$$A_0 = \frac{1}{1} = 1$$

$$A_1 = \frac{2}{1} = 2$$

$$A_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$A_3 = \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$$

$$A_4 = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$A_5 = \frac{13}{8} = 1{,}625$$

$$A_6 = \frac{21}{13} = 1{,}615384\ldots$$

$$A_7 = \frac{34}{21} = 1{,}619047\ldots$$

$$A_8 = \frac{55}{34} = 1{,}617547\ldots$$

$$A_9 = \frac{89}{55} = 1{,}618181\ldots$$

$$A_{10} = \frac{144}{89} = 1{,}617977\ldots$$

$$A_{11} = \frac{233}{144} = 1{,}6180555\ldots$$

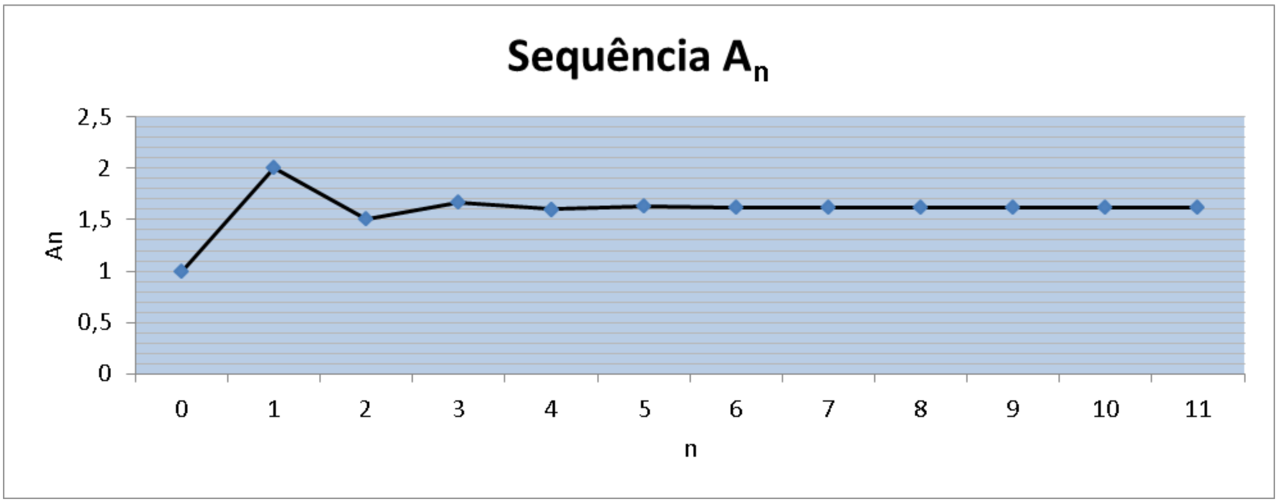


Fig.27: Sequência A_n

Podemos perceber que esta sequência é limitada e tende para o número de ouro, como iremos demonstrar a seguir:

De fato, pois como vimos a sequência de Fibonacci é definida por $F_0 = F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, sendo assim ela é uma sequência de segunda ordem e possui equação característica igual a $r^2 = r + 1$ e, como já visto nas seções anteriores possui raízes iguais a $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Logo, teremos que:

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Usando que $F_0 = F_1 = 1$ obteremos o sistema:

$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) C_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) C_2=1. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira linha por $\left(-1-\sqrt{5}\right)$:

$$\begin{cases} \left(-1-\sqrt{5}\right) C_1+\left(-1-\sqrt{5}\right) C_2=\left(-1-\sqrt{5}\right) \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) C_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) C_2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-1-\sqrt{5}\right) C_1+\left(-1-\sqrt{5}\right) C_2=\left(-1-\sqrt{5}\right) \\ \left(1+\sqrt{5}\right) C_1+\left(1-\sqrt{5}\right) C_2=2. \end{cases}$$

Somando as duas linhas teremos:

$$\left(-2\sqrt{5}\right)C_2 = \left(1-\sqrt{5}\right)$$

$$C_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

E como $C_1+C_2=1$, teremos que:

$$C_1+\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}=1$$

$$C_1 = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

$$C_1 = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}.$$

Assim $C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ e $C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

Substituindo em $F_n=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ teremos:

$$F_n=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_n=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_n=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_n=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Temos que $A_n=\frac{F_n}{F_{n-1}}$, logo

$$A_n=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$A_n=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)}$$

$$A_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$A_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

Como $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-0{,}618033...$, quando n tender ao infinito teremos que $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ e $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$ irão se aproximar cada vez mais de zero. Além disso, como temos $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$ no numerador e no denominador, quando n tender ao infinito A_n tenderá a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.9. ESPIRAL ÁUREA

Uma espiral é uma linha curva que gira em torno de um ponto central se afastando progressivamente de acordo com uma lei de formação. A espiral áurea tem como lei de formação a composição de quadrados com lados de medidas proporcionais a sequência de Fibonacci.

Iremos mostrar como construir uma espiral áurea utilizando apenas régua e compasso.

Inicialmente construiremos o quadrado ABCD de lado igual a uma unidade.

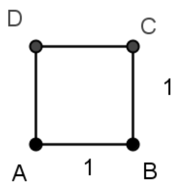
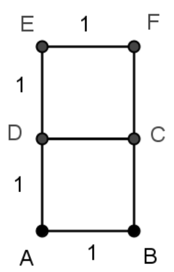


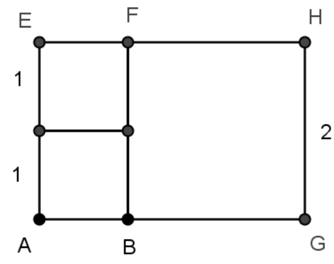
Fig.28: Construção Espiral Áurea - Passo 1

Construiremos um novo quadrado CDEF utilizando o lado CD, com tamanho igual a 1 unidade, pegando o primeiro quadrado como base para esta construção.



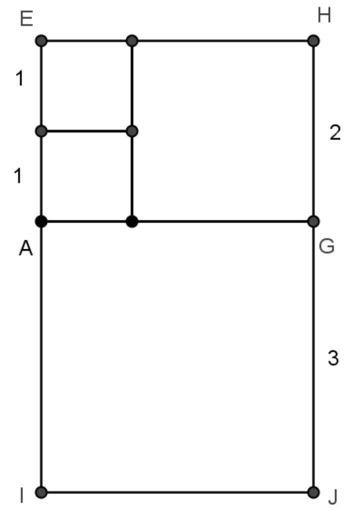
Construção Espiral Áurea - Passo 2

Usaremos agora o lado FB como base, com tamanho igual a 2 unidades, para construirmos um novo quadrado. Este novo quadrado será o BFHG.



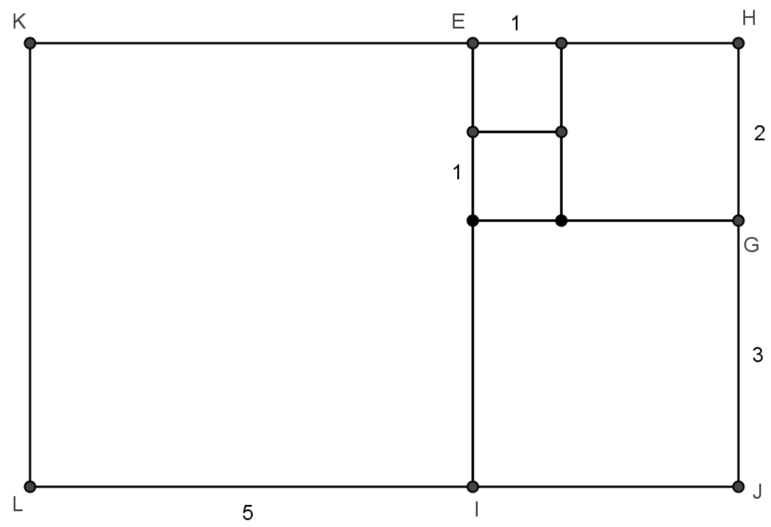
Construção Espiral Áurea - Passo 3

O novo quadrado que iremos construir será o AGJI e terá como base o lado AG, de tamanho igual a 3 unidade.



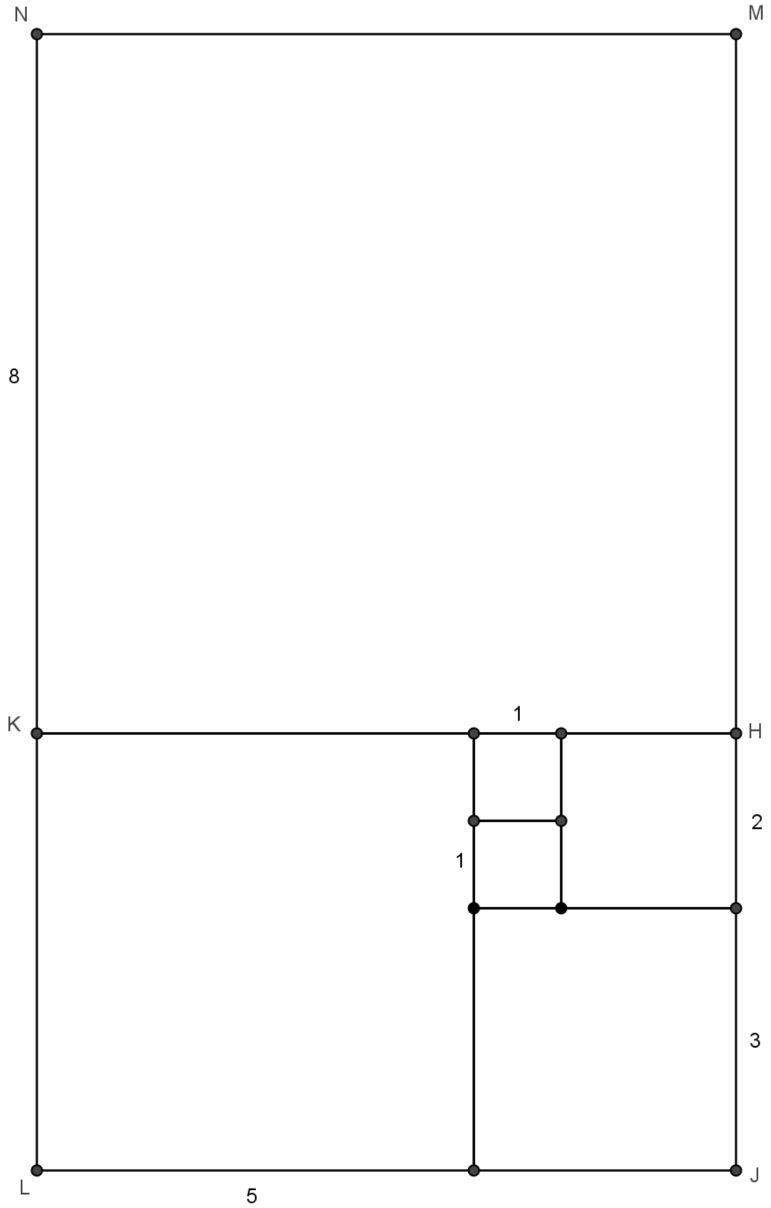
Construção Espiral Áurea - Passo 4

Continuando com o mesmo processo construiremos o quadrado EILK, com lado medindo 5 unidade.



Construção Espiral Áurea - Passo 5

O próximo passo será construir o quadrado de lado 8, HKMN utilizando o lado HK de base.

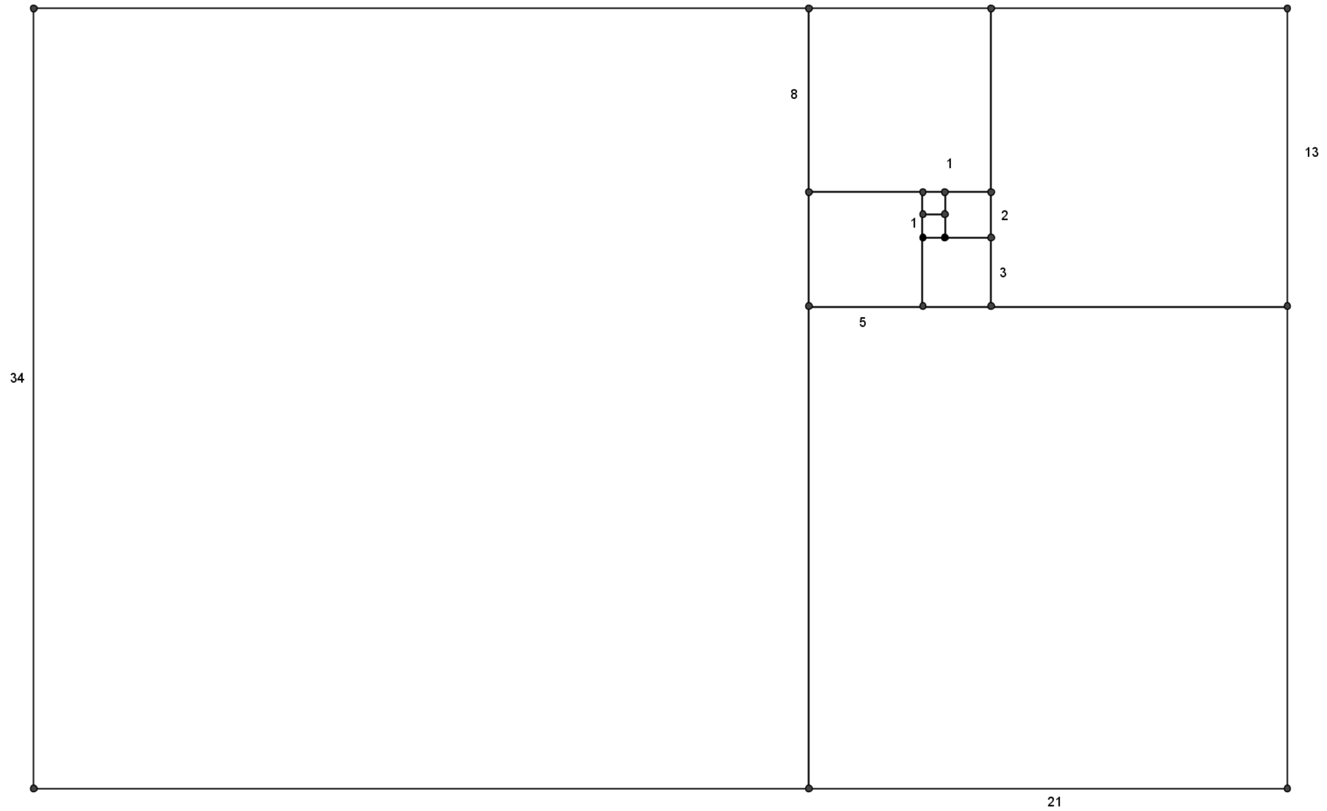


Construção Espiral Áurea - Passo 6

Observamos que o processo pode ser repetido infinitamente, sempre utilizando o maior lado do último retângulo como base para um novo quadrado.

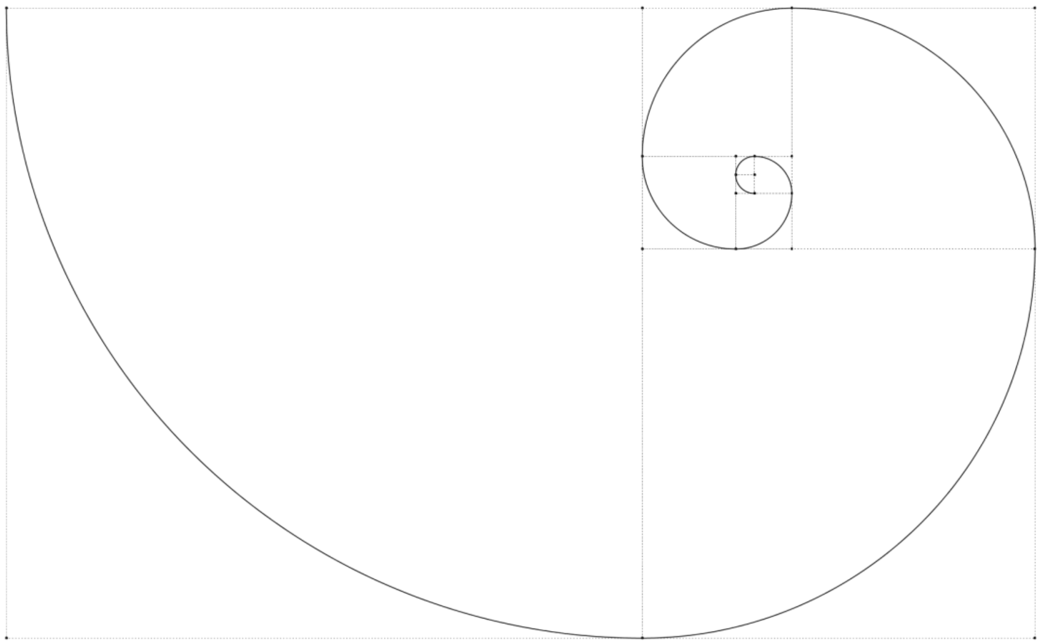
Podemos observar também que os quadrados formados possuem lados iguais a 1,1, 2, 3, 5, 8,... , ou seja, possuem medidas iguais a sequência de Fibonacci.

Observe na figura a seguir que repetimos este mesmo processo até avançarmos alguns passos e construirmos o quadrado de lado 34.



Construção Espiral Aurea - Passo 7

Para construirmos a espiral áurea iremos traçar um quarto de circunferência em cada quadrado feito anteriormente de maneira a termos uma linha curva que estará girando em torno de um ponto central, começando pelo ponto B.



Construção Espiral Áurea - Passo 8

O ponto central da espiral áurea será a interseção das diagonais dos dois maiores retângulos (que não são quadrados). Quanto maior o número de quadrados construídos, a interseção das diagonais citadas tenderá para o ponto central.

Abaixo temos um desenho de uma espiral áurea.

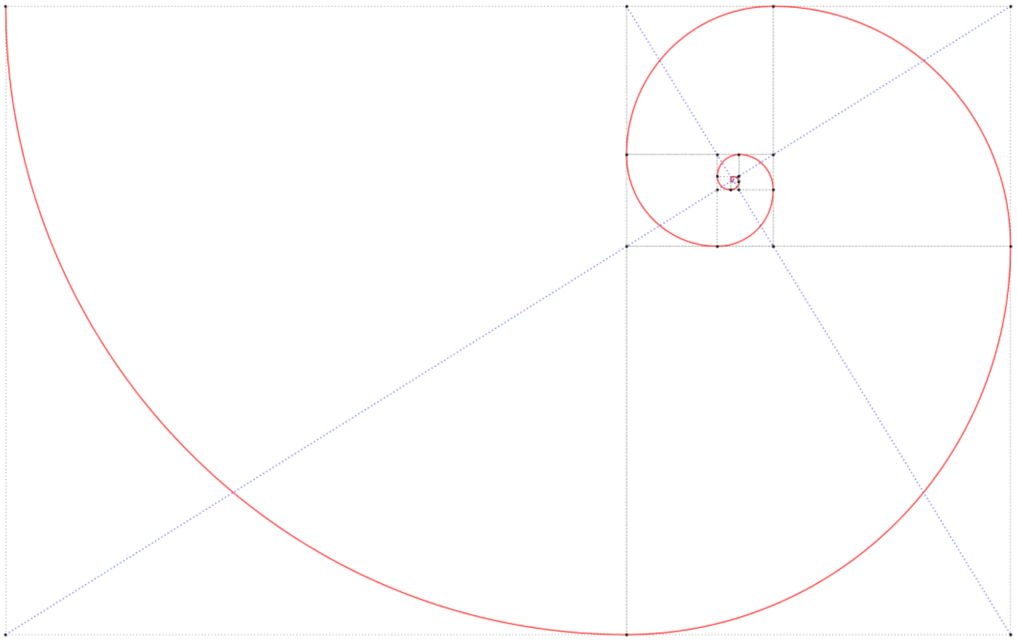


Fig.29: Espiral Áurea

3. ONDE ENCONTRAMOS O NÚMERO ÁUREO EM NOSSO COTIDIANO

Aproximações do número áureo podem ser encontradas tanto na natureza, em construções ou em obras de arte. Em todos os casos existem divergências sobre se é mesmo possível encontrar o número de ouro. Iremos apresentar nos subcapítulos seguintes algumas situações onde isto ocorre.

Inicialmente apresentaremos onde alguns autores afirmam podermos encontrar a razão áurea, ao realizarmos a razão entre diversos comprimentos de partes do corpo humano.

Após esta seção iremos apresentar a Pirâmide de Quéops e mostraremos porque alguns autores conseguem classifica-la como sendo uma pirâmide áurea enquanto outros autores mostram que isso não é possível.

Na seção posterior apresentaremos uma das construções mais citadas quando se fala do número de ouro: o Parthenon. Alguns autores afirmam que o Parthenon foi construído tendo como base um retângulo áureo e, justamente por isso, o número de ouro foi denotado pela letra grega Φ (PHI) em homenagem a Phideas, que foi o arquiteto que projetou o Parthenon.

A seguir, analisaremos três grandes obras de Leonardo da Vinci: o desenho do Homem Vitruviano, o quadro de Mona Lisa também conhecida como A Gioconda e, finalmente, analisaremos a pintura em óleo San Girolamo.

Após análise das obras de Leonardo da Vinci, veremos como podemos encontrar o número áureo em diversos cartões utilizados em nosso cotidiano, como por exemplo, o cartão de crédito.

Finalmente, analisaremos um molusco marinho muito citado quando falamos sobre o número áureo, em especial sobre a espiral áurea. Muitos autores afirmam que os náutilos apresentam a razão áurea em seu corpo e neste subcapítulo iremos analisar esta informação.

3.1. CORPO HUMANO

Muitos autores afirmam que conseguimos encontrar a razão áurea ao realizarmos a proporção entre diversos comprimentos de partes do corpo humano. Citaremos como exemplos, três possibilidades de aproximação do número áureo, ao realizar a divisão entre as seguintes medidas:

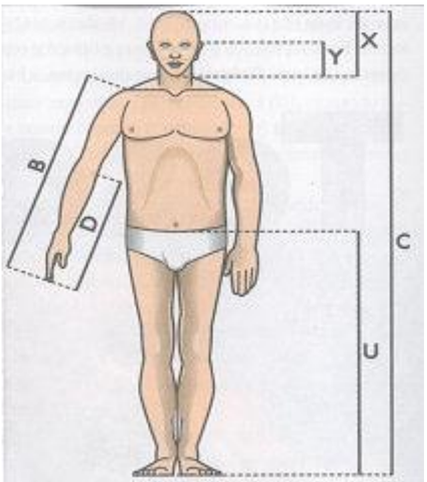


Fig.30: Corpo Humano

- altura do corpo humano (C) pela distância do umbigo até o chão (U);
- tamanho do braço (B) pelo tamanho do cotovelo até a ponta do dedo médio (D);
- tamanho da face (X) pela distância entre o queixo até os olhos (Y).

Estes mesmo autores costumam afirmar que quanto mais próximo do número áureo se encontram estas razões, a proporção se torna mais agradável ao olho humano.

Já outros autores afirmam que não conseguimos encontrar a razão áurea ao realizarmos a proporção entre as partes citadas. Dizem ainda que além de conseguirmos apenas aproximações do número áureo, não existe nenhum estudo científico que mostra que a razão áurea é mais agradável ao olho humano.

3.2. PIRÂMIDE DE QUÉOPS

A construção mais antiga, onde muitos autores dizem encontrar o número áureo, é na Pirâmide de Quéops.

Fig.31: Pirâmide de Quéops

A Pirâmide de Quéops é a maior das três grandes pirâmides de Gizé, no Antigo Egito (as outras duas são: Quéfrem e Miquerinos) e por isso também é conhecida como “A grande Pirâmide”. A pirâmide foi construída há aproximadamente 4500 anos atrás e muitos acreditam que ela foi construída para ser a tumba do Faraó de Quéops.

A Pirâmide de Quéops foi construída utilizando como unidade de medida a vara egípcia que possui 0,525 metros. A Pirâmide possui uma base quadrangular de lado medindo 440 varas e a sua altura media, na época da construção, 280 varas.

Logo, as suas medidas em metros seriam:

Quéops	
Altura	147 metros
Base	231 metros

E como visto na seção 2.7., temos que a pirâmide de Quéops pode ser classificada como sendo uma pirâmide áurea, pois o triângulo retângulo formado pela metade da aresta da base, altura da pirâmide e altura da face triangular da pirâmide é um triângulo retângulo áureo como veremos a seguir.

De fato, dado o triângulo retângulo ABC, retângulo em A, formado pela metade da aresta da base, altura da pirâmide e altura da face triangular da pirâmide. Teremos que o segmento AB medirá 115,5 metros e o segmento AC medirá 147 metros.

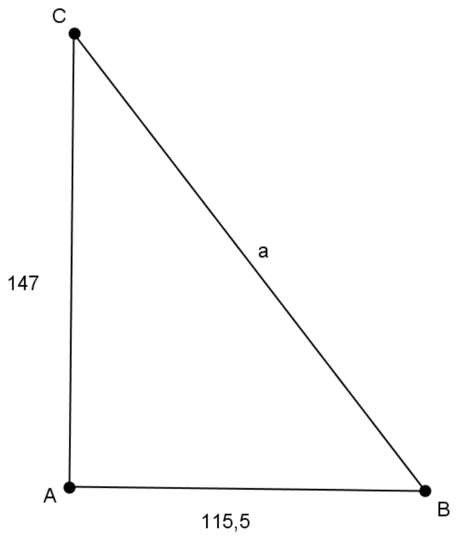


Fig.32: Triângulo Retângulo Áureo na Pirâmide de Quéops

Aplicando Pitágoras teremos que:

$$a^2 = 147^2 + 115,5^2$$

$$a^2 = 21609 + 13340,25$$

$$a^2 = 34949,25$$

$$a = \sqrt{34949,25}$$

$$a \cong 186,947185$$

E como:

$$\frac{186,947185}{\Phi} = \frac{147}{\sqrt{\Phi}} = \frac{115,5}{1},$$

temos então que a Pirâmide de Quéops pode ser classificada como sendo uma pirâmide áurea.

Já alguns autores afirmam que não se trata de uma pirâmide áurea, pois a pirâmide, pelas suas verdadeiras dimensões nem teria uma base quadrada. A sua base original seria um retângulo de 755,43 pés por 756,08 pés, isto é, um retângulo de 230,255064 metros por 230,453184 metros. Ou seja, afirmam mais uma vez que se trata apenas de uma aproximação do número áureo, sem nenhum registro histórico de que tenha sido usada esta razão na construção da pirâmide.

3.3. PARTHENON

Uma das construções mais citadas quando se fala do número áureo é o Parthenon, também conhecido como o templo das virgens. O Parthenon foi construído entre 477 e 433 a.C. em Atenas, por Phideas (Fídeas), que era um grande arquiteto e escultor que viveu na Grécia antiga entre os anos de 490 e 430 a.C..

Os autores que defendem que conseguimos encontrar o número áureo na construção deste templo afirmam que o Parthenon foi construído tendo como base um retângulo áureo e, justamente por isso, o número de ouro foi denotado pela letra grega Φ (PHI) em homenagem a Phideas.

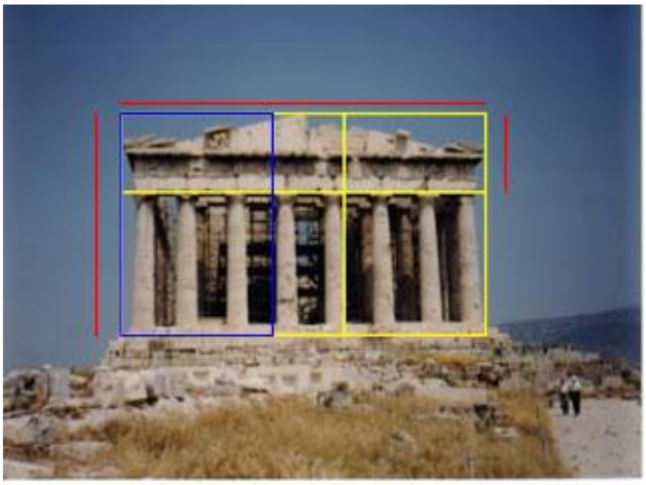


Fig.33: Parthenon

Estes autores afirmam ainda que, podemos encontrar diversos outros retângulos áureos em outras partes da construção como, por exemplo, o retângulo formado entre duas pilastras consecutivas.

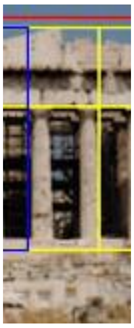


Fig.34: Detalhe Parthenon

Já outros autores dizem que tudo não passa de um grande equívoco, pois afirmam que não seria possível conseguirmos construir um retângulo áureo utilizando as dimensões do Parthenon. Estes autores dizem que as pessoas que querem encontrar retângulos áureos utilizam dimensões aproximadas das dimensões reais do Parthenon, a fim de conseguir assim encontrar os retângulos áureos.

3.4. OBRAS DE LEONARDO DA VINCI

Quando associamos o número áureo a obras de artes um dos artistas mais citados é o Leonardo di Ser Piero da Vinci, mais conhecido como Leonardo da Vinci. Ele nasceu em Anchiano, Itália, em 15 de abril de 1452 e morreu em Ambroise, França, em 2 de maio de 1519, com 67 anos. Leonardo da Vinci foi uma das figuras mais importantes do Renascimento e se destacou como matemático, engenheiro, cientista, escultor, arquiteto, botânico, poeta, músico, pintor, entre outras áreas.

Muitos autores afirmam que podemos encontrar o número áureo em diversas obras de Leonardo da Vinci. Mostraremos nas seções a seguir, três exemplos de trabalhos de Leonardo da Vinci, onde estes autores afirmam encontrar o número áureo.

Analisaremos o desenho do Homem Vitruviano, feito aproximadamente em 1490 para ilustrar a obra "De Architectura" do autor Marcus Vitruvius Pollio.

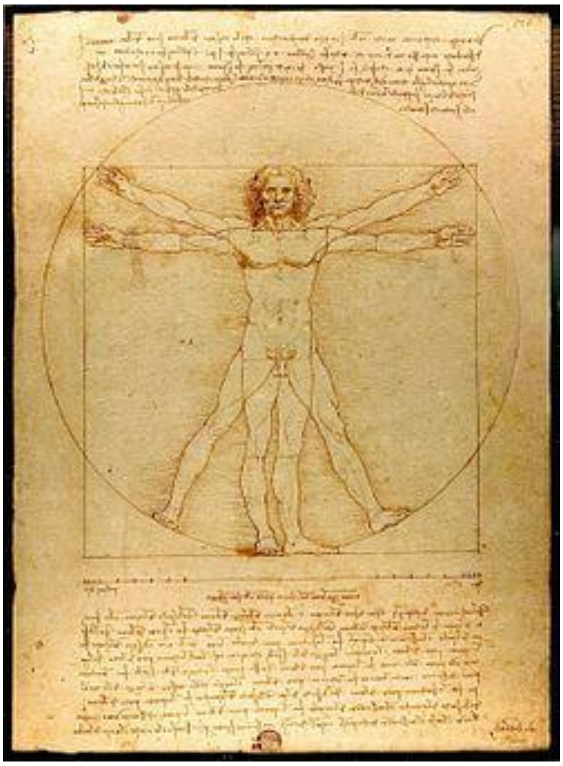


Fig.35: Homem Vitruviano

A segunda obra a ser analisada é o quadro de Mona Lisa, também conhecida como A Gioconda.

Fig.36: Mona Lisa

E, finalmente, analisaremos a pintura em óleo San Girolamo.

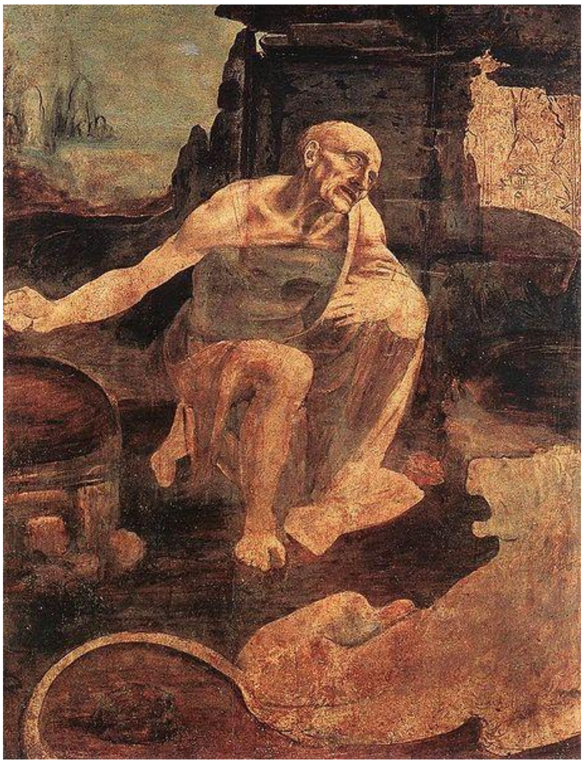


Fig.37: San Girolamo

3.4.1. Homem Vitruviano

O Homem Vitruviano é um desenho feito aproximadamente em 1490 a.C., a pedido do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio (Século I a.C.), para ilustrar suas notas da obra “De Architectura”, um tratado de arquitetura composto por 10 livros.

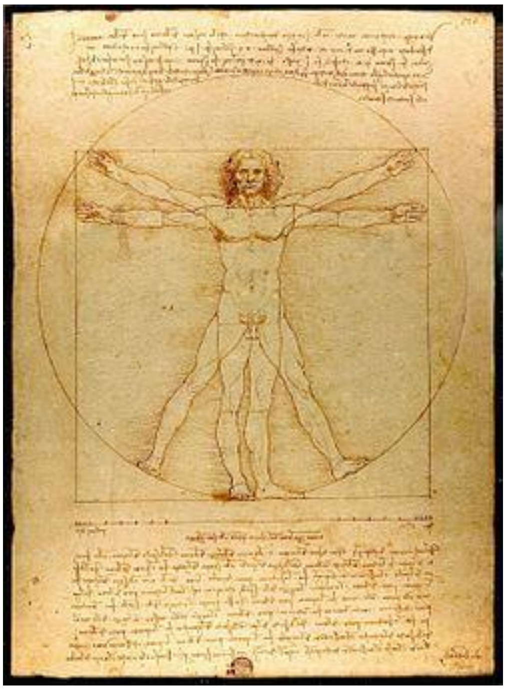


Fig.38: Homem Vitruviano

Muitos autores afirmam que podemos encontrar a razão áurea ao realizarmos a proporção entre os diferentes comprimentos de partes do corpo humano, as mesmas proporções já citadas na seção 3.1..

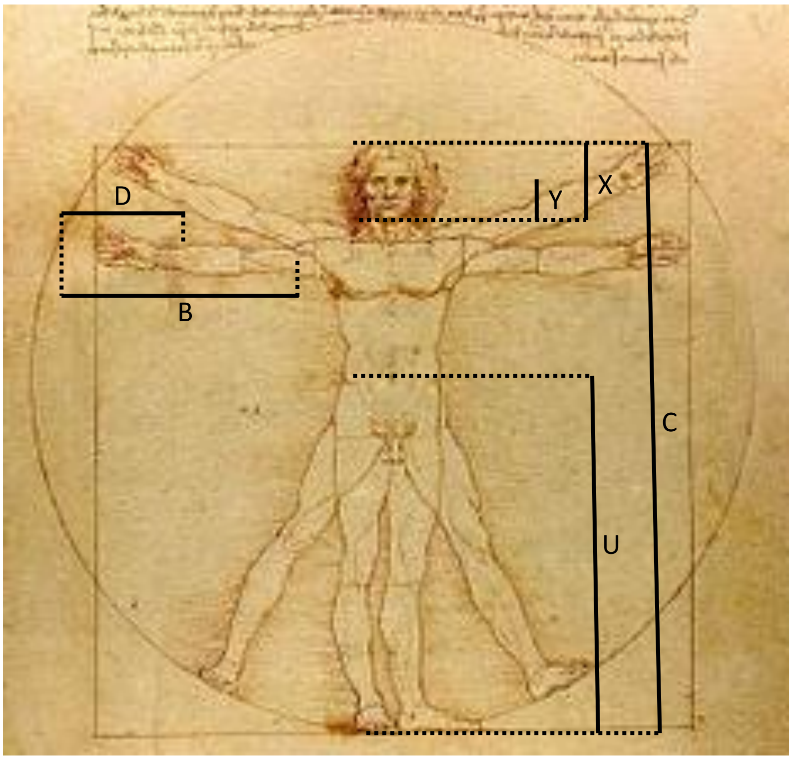


Fig.39: Homem Vitruviano e o Número Áureo

Já outros autores afirmam que não conseguimos encontrar a razão áurea ao realizarmos a proporção entre as partes citadas e, dizem ainda, que não existe nenhum registro histórico de que Leonardo da Vinci tenha se utilizado desta proporção para a confecção do desenho.

Estes autores justificam sua afirmação baseados no que o próprio Marcus Vitruvius Pollio escreveu no terceiro livro de sua obra, quando descreve as proporções do corpo humano masculino:

- um palmo é o comprimento de quatro dedos;
- um pé é o comprimento de quatro palmos;
- um côvado é comprimento de seis palmos;
- um passo são quatro côvados;
- a altura de um homem é quatro côvados;
- o comprimento dos braços abertos de um homem (envergadura dos braços) é igual a sua altura;
- a distância entre a linha de cabelo na testa e o fundo do queixo é um décimo da altura de um homem;
- a distância entre o topo da cabeça e o fundo do queixo é um oitavo da altura de um homem;

- a distância entre o fundo do pescoço e a linha de cabelo na testa é um sexto da altura de um homem;
- o comprimento máximo dos ombros é um quarto da altura de um homem;
- a distância entre o meio do peito e o topo da cabeça é um quarto da altura de um homem;
- a distância entre o cotovelo e a ponta da mão é um quarto da altura de um homem;
- a distância entre o cotovelo e a axila é um oitavo da altura de um homem;
- o comprimento da mão é um décimo da altura de um homem;
- a distância entre o fundo do queixo e o nariz é um terço do comprimento do rosto;
- a distância entre a linha de cabelo na testa e as sobrancelhas é um terço do comprimento do rosto;
- o comprimento da orelha é um terço da face;
- o comprimento do pé é um sexto da altura.

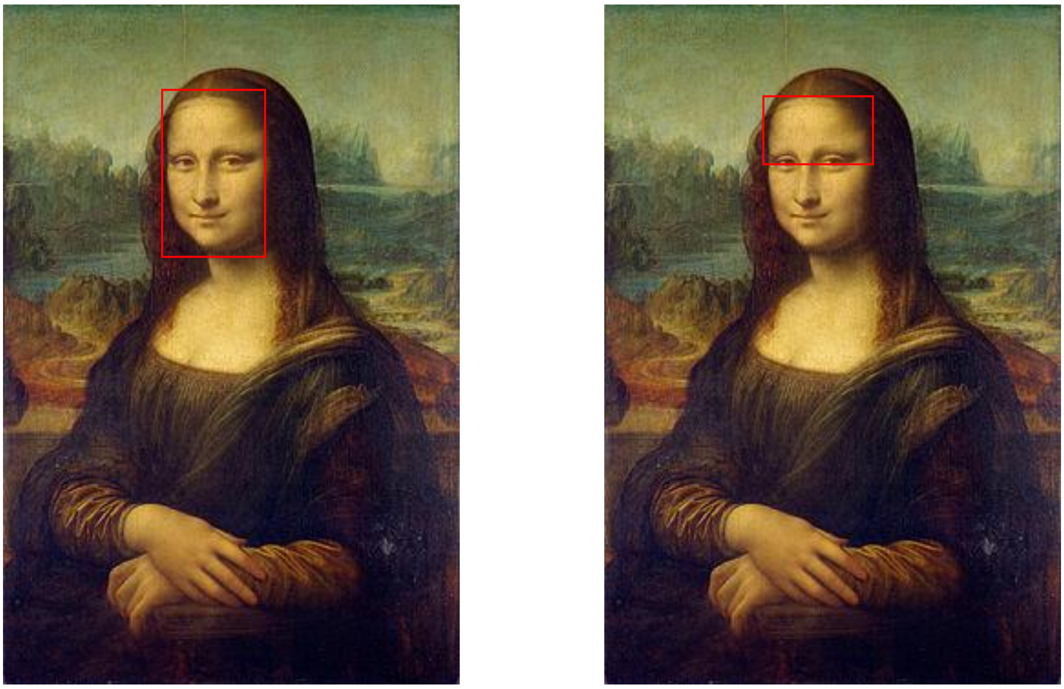
Podemos observar que em nenhum momento ele cita como proporção o número de ouro.

3.4.2. Mona Lisa

O quadro de Mona Lisa de Leonardo da Vinci, também conhecido como A Gioconda, teve o início de sua pintura no ano de 1503 e foi finalizada no ano de 1506.

Fig.40: Mona Lisa

Alguns autores defendem que Leonardo da Vinci utilizou-se de retângulos áureos como parâmetros de harmonia, como mostraremos nestes dois exemplos na reprodução a seguir.



Figuras 41 e 42: Mona Lisa e o Número Áureo

Estes autores afirmam que tanto ao construirmos um retângulo em torno do rosto ou um retângulo em torno da testa teremos exemplos de retângulos áureos.

Como na seção 3.3.1., existem alguns autores que afirmam que não existem registros de que estes retângulos áureos foram utilizadas para criar harmonia na pintura do quadro. Estes mesmos autores mostram que, diferente do que muitos dizem as dimensões do quadro não formam um retângulo áureo já que o mesmo mede setenta e sete centímetros por cinquenta e três centímetros, onde teríamos a razão entre os seus lados iguais a 1,4528...

3.4.3. San Girolamo

Não se tem um ano preciso de quando foi iniciada, ou finalizada, a pintura em óleo de Leonardo da Vinci chamada San Girolamo.

Muitos autores afirmam que ao se desenhar um retângulo ao redor do corpo de San Girolamo iremos obter um retângulo áureo e, que este fato foi feito propositalmente para termos uma maior harmonia na pintura.

Construímos um retângulo áureo sobre a pintura para ilustrar tal afirmação.

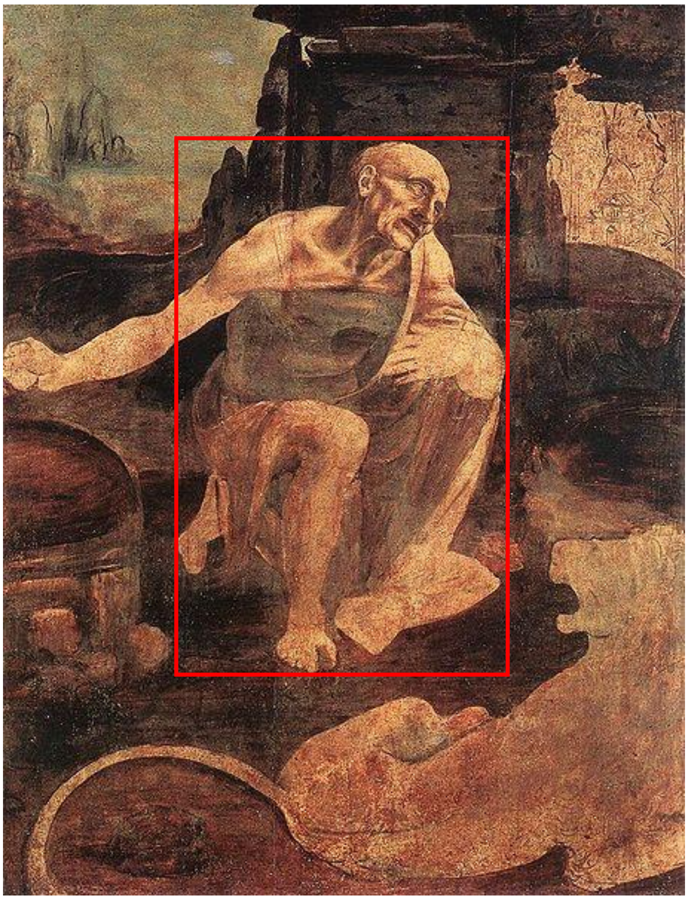


Fig.43: San Girolamo - Retângulo Áureo

Os autores que discordam de que Leonardo da Vinci utilizava retângulos áureos para obter harmonia em seus quadros, apontam que o braço de San Girolamo ficaria de fora desse retângulo áureo e, se fizéssemos um retângulo que englobasse também o braço de San Girolamo, este retângulo não seria áureo.

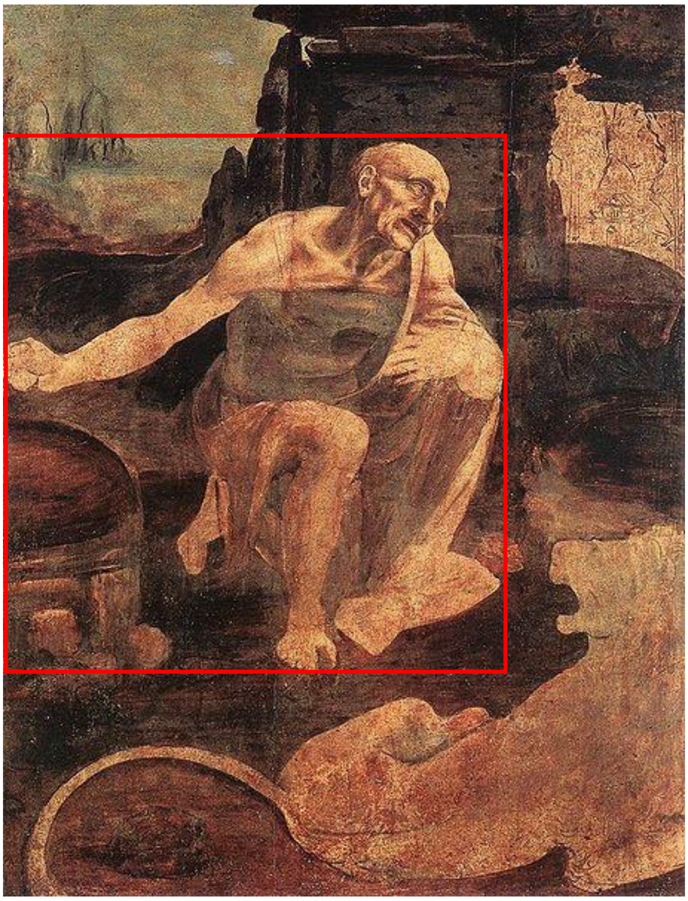


Fig.44: San Girolamo - Retângulo que não é Áureo

De fato, o retângulo englobando o braço teria a razão entre seus lados igual a 1,74242...diferente do retângulo áureo que como visto na seção 2.4 tem razão entre seus lados igual a 1,618...

3.5. CARTÕES

Outro exemplo, onde muitos autores afirmam que podemos encontrar a razão áurea em nosso cotidiano é quando analisamos a razão entre as dimensões dos cartões que utilizamos diariamente. A grande maioria dos cartões de crédito, cartões de alimentação, de transporte público, entre outros, tem sua forma e tamanho padronizados, especificado pelo padrão ISO 7810.

O ISO 7810 específica na ID-1 o tamanho dos cartões como sendo um retângulo de 85,60 mm X 53,98 mm. Ao fazermos a razão entre seu comprimento e sua altura obtemos como resposta 1,615704039..., que é um valor muito próximo da razão áurea.

Estes autores afirmam que estas dimensões foram escolhidas, pois assim o cartão torna-se mais harmonioso.

Porém, nem todos os autores concordam com esta afirmação e dizem que novamente não existe registro de que estas medidas foram escolhidas com esta intenção e que o que é encontrado é novamente uma aproximação do número áureo.

Fig.45: Cartão de banco

Fig.46: Ticket Restaurante

Fig.47: Bilhete Único

3.6. NÁUTILOS

Os Náutilos pertencem à mesma classe de moluscos marinhos que pertencem os polvos e as lulas. Os Náutilos possuem olhos bem desenvolvidos e uma concha formada por uma série de câmaras que se comunicam por orifícios. Eles vivem na última câmara, enquanto as outras ficam cheias de gás para facilitar o processo de flutuação.

Fig.48: Náutilo

Muitos autores afirmam que os náutilos apresentam a razão áurea em seu corpo, pois dizem que a sua concha cresce de tal maneira a reproduzir uma espiral áurea.

Fig.49: Concha do Náutilo

Porém, com o uso do GeoGebra, podemos constatar que sobrepondo uma espiral áurea na concha do Náutilo não teremos um encaixe perfeito, como podemos observar nos exemplos abaixo.

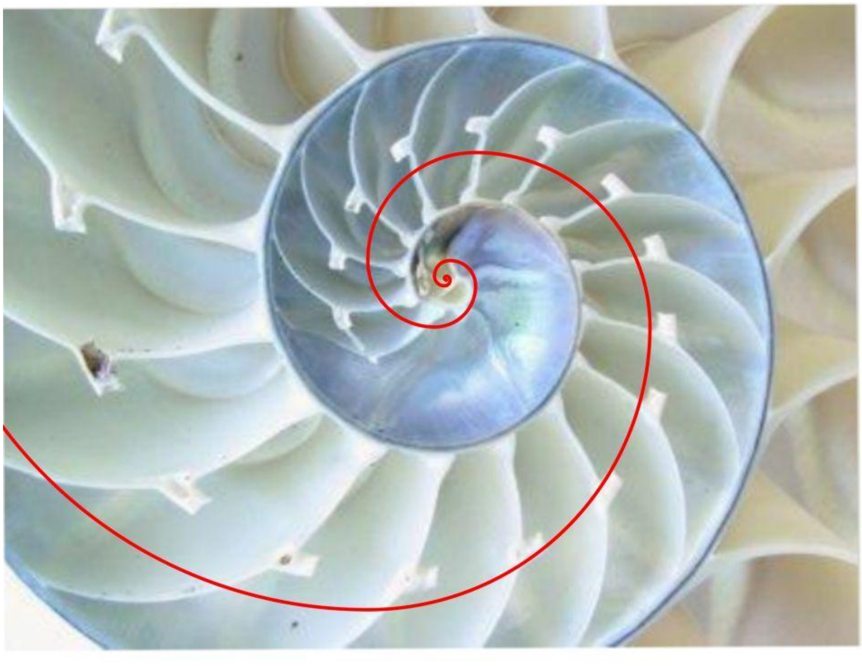


Fig.50: Análise da concha do Náutilo - 1

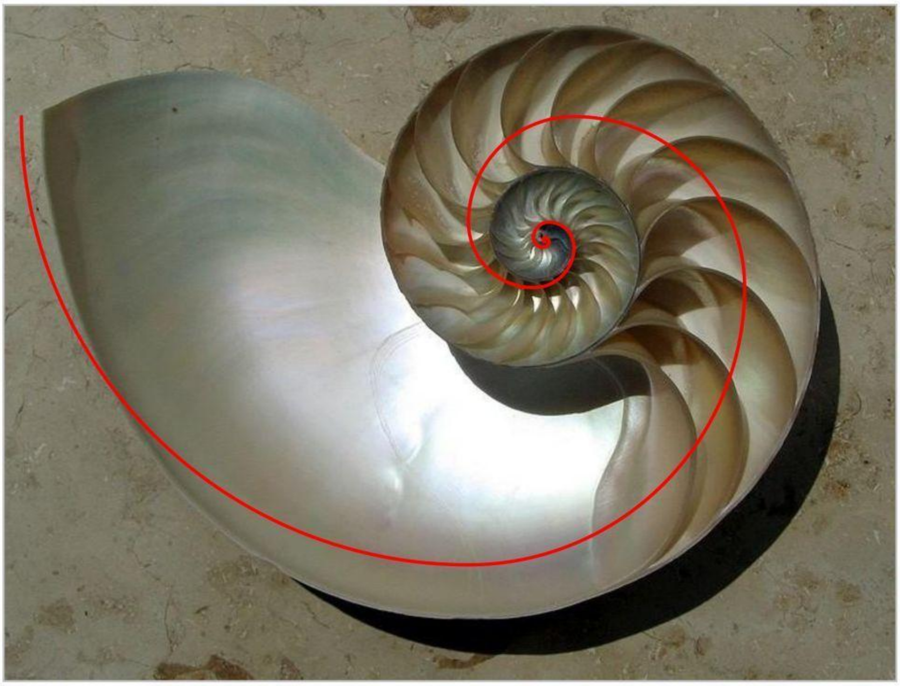


Fig.51: Análise da concha do Náutilo - 2

Pesquisamos em diversas imagens de náutilos utilizando a ferramenta de busca do Google e, em todas elas não conseguimos um encaixe perfeito, somente conchas que cresciam em um formato aproximado de uma espiral áurea.

E é justamente isso que alguns autores nos apresentam: não é possível encontrar uma concha de náutilo que cresceu reproduzindo fielmente uma espiral áurea.

4. COMO TRABALHAR O NÚMERO ÁUREO EM SALA DE AULA.

O tema desta monografia, apesar de ser muito interessante, não consta no currículo oficial utilizado pelos professores para lecionar Matemática. Por isso, para trabalhar o conceito de número áureo em sala de aula, devemos ter a preocupação de contextualiza-lo dentro do programa de curso. Podemos inserir este tema no contexto de outros que já possuem uma determinação de serem utilizados através dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática.

Outra preocupação que devemos ter é quanto à veracidade das informações apresentadas. Já é sabido que a *internet* possui diversas informações em *sites* não especializados de forma incorreta e isto poderia inviabilizar o sucesso de nosso trabalho. Mesmo algumas revistas e jornais podem apresentar informações incorretas, devido à falta de conhecimento específico por parte de seus colaboradores.

Sem dúvida, há muitos assuntos que podem ser abordados de maneira concomitante com o Número Áureo, assuntos estes dentro da Álgebra ou da Geometria. Geralmente os assuntos relativos à Geometria são mais requisitados, devido às construções geométricas, como as citadas no capítulo 2 deste trabalho de conclusão de curso. Agora, podemos citar que os aspectos geométricos que podem ser encontrados no capítulo 3 desta dissertação tornam o aprendizado mais significativo, visto que o aluno obtém informações mais concretas sobre os conceitos que aprende em sala.

Neste trabalho, apresento um modelo de atividade que pode ser aplicada a alunos do oitavo e nono anos do Ensino Fundamental. Esta atividade traz como assuntos centrais triângulo acutângulo áureo e retângulo áureo com suas aplicações na vida cotidiana. Este modelo de atividade foi aplicado em duas escolas do município de Macaé. Para buscar uma análise mais aprofundada foram escolhidas uma escola privada e uma escola pública. A escola privada escolhida foi a Escola SESI, do sistema FIRJAN, e a escola pública foi a Escola Estadual Municipalizada Polivalente Anísio Teixeira.

Para realizar esta atividade foram necessários 4 horas/aula e os pré-requisitos de Semelhança de polígonos, altura de triângulo isósceles, teorema de Pitágoras e resolução de equações de 2º grau.

Irei reproduzir a seguir o modelo das atividades aplicadas em ambas as escolas.

Escola SESI

Aluno (a): ____ Nº: ________

Professor: Antônio Carlos Barros Data: ____ / ____ / 2012 Turma - ________

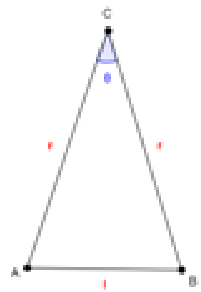
Número Áureo - Φ

O que é o Número Áureo?

O Número Aureo é um número irracional misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão, sendo considerada por muitos como uma oferta de Deus ao mundo.

"Um triângulo acutângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a razão do tamanho de um dos seus lados congruentes pelo lado não congruente for o número de ouro."

Com as informações do texto acima, responda as questões 1 e 2



1) Se os lados congruentes de um triângulo acutângulo áureo medem 7cm, quanto, aproximadamente medirá a base deste triângulo?

2) João quer construir a entrada de sua casa no formato de um triângulo acutângulo áureo. Se esta entrada deve ter sua base medindo 10m, quanto medirão os lados congruentes desta construção? Qual será a altura desta entrada?

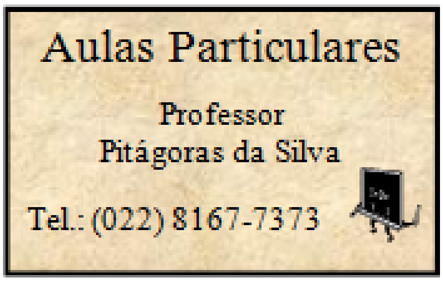
"Para que um retângulo seja classificado como sendo um retângulo áureo ele deve apresentar uma característica particular: todo retângulo será classificado como Áureo se dele ao extrairmos um quadrado de lado igual à largura do retângulo, o retângulo restante for semelhante ao retângulo inicial."

Com base no texto acima, responda as questões 3 e 4.

3) O cartão de visitas de um professor de Matemática é um retângulo áureo. Se o menor lado deste retângulo mede 8cm, quanto, aproximadamente, mede o maior lado?

4) A gráfica onde o professor Augusto Schwager mandou fazer os cartões lhe disse que seria mais fácil para ele fazer os cartões com o maior lado medindo 15cm.

Se ele seguir este conselho, quanto medirá o menor lado?



Boa Atividade!

Fig.52: Atividade aplicada na Escola SESI

E. E. Municipalizada Polivalente Anísio Teixeira

Aluno (a): ______________________________________ Nº: _____

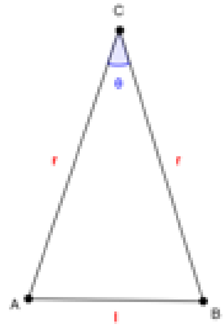
Professor: Antônio Carlos Barros Data: ___ / ___ / 2012 Turma - ______

Número Áureo - Φ

O que é o Número Áureo?

O Número Áureo é um número irracional misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão, sendo considerada por muitos como uma oferta de Deus ao mundo.

"Um triângulo acutângulo é dito áureo quando este triângulo é isósceles e a razão do tamanho de um dos seus lados congruentes pelo lado não congruente for o número de ouro."



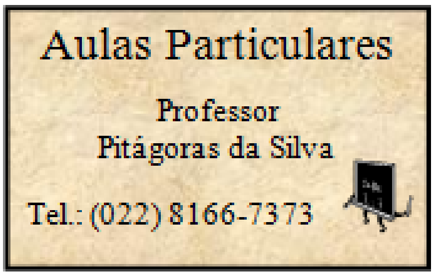
Com as informações do texto acima, responda as questões 1 e 2

1) Se os lados congruentes de um triângulo acutângulo áureo medem 7cm, quanto, aproximadamente medirá a base deste triângulo?

2) João quer construir a entrada de sua casa no formato de um triângulo acutângulo áureo. Se esta entrada deve ter sua base medindo 10m, quanto medirão os lados congruentes desta construção? Qual será a altura desta entrada?

"Para que um retângulo seja classificado como sendo um retângulo áureo ele deve apresentar uma característica particular: todo retângulo será classificado como Áureo se dele ao extrairmos um quadrado de lado igual à largura do retângulo, o retângulo restante for semelhante ao retângulo inicial."

Com base no texto acima, responda as questões 3 e 4.



3) O cartão de visitas de um professor de Matemática é um retângulo áureo. Se o menor lado deste retângulo mede 8cm, quanto, aproximadamente, mede o maior lado?

4) A gráfica onde o professor Augusto Schwager mandou fazer os cartões lhe disse que seria mais fácil para ele fazer os cartões com o maior lado medindo 15cm.

Se ele seguir este conselho, quanto medirá o menor lado?

Boa Atividade!

Fig.53: Atividade aplicada na E.E.M. Polivalente Anísio Teixeira

Primeiramente, descreverei como foi a aplicação da atividade na Escola SESI. Nesta escola a atividade foi aplicada na turma 9 B, uma turma de nono ano do Ensino Fundamental. Inicialmente, foram apresentados aos alunos os conceitos iniciais sobre o número de ouro tais como o seu valor, contexto histórico, razão áurea, triângulo acutângulo áureo e retângulo áureo. Durante esta introdução os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em acompanhar o conteúdo já que os mesmos possuem uma sólida base de Álgebra e Geometria.

Nas duas primeiras questões da atividade foi trabalhada a noção de triângulo acutângulo áureo. Nestas questões os alunos procederam de forma bem parecida e sem erros conceituais e procedimentais. Na terceira e quarta questões, que abordam o tema de retângulo áureo, pude notar uma característica interessante. Enquanto alguns alunos utilizaram a definição apresentada na própria atividade, outros utilizaram uma das definições explicadas durante a apresentação do assunto. Irei reproduzir a seguir duas respostas para ilustrar a situação em que ambos os alunos acertam a questão utilizando raciocínios diferentes.

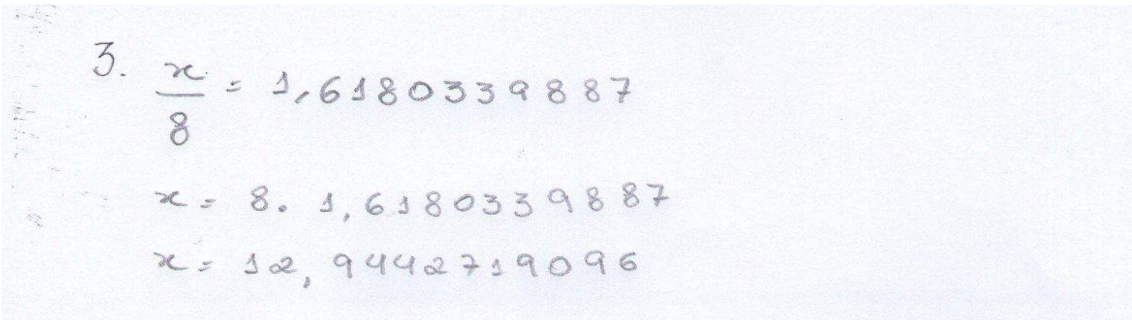


Fig.54: Questão número 3 resolvida pelo aluno 1

Podemos ver que o primeiro aluno utilizou a definição de que para que um retângulo seja classificado como sendo um retângulo áureo, a proporção entre sua base e sua altura deverá ser o número de ouro.

Já o segundo aluno resolveu a questão utilizando a definição de que, para que um retângulo seja classificado como sendo um retângulo áureo, ao extrairmos dele um quadrado de lado igual a largura do retângulo, o retângulo restante será semelhante ao retângulo inicial, como podemos ver a seguir.

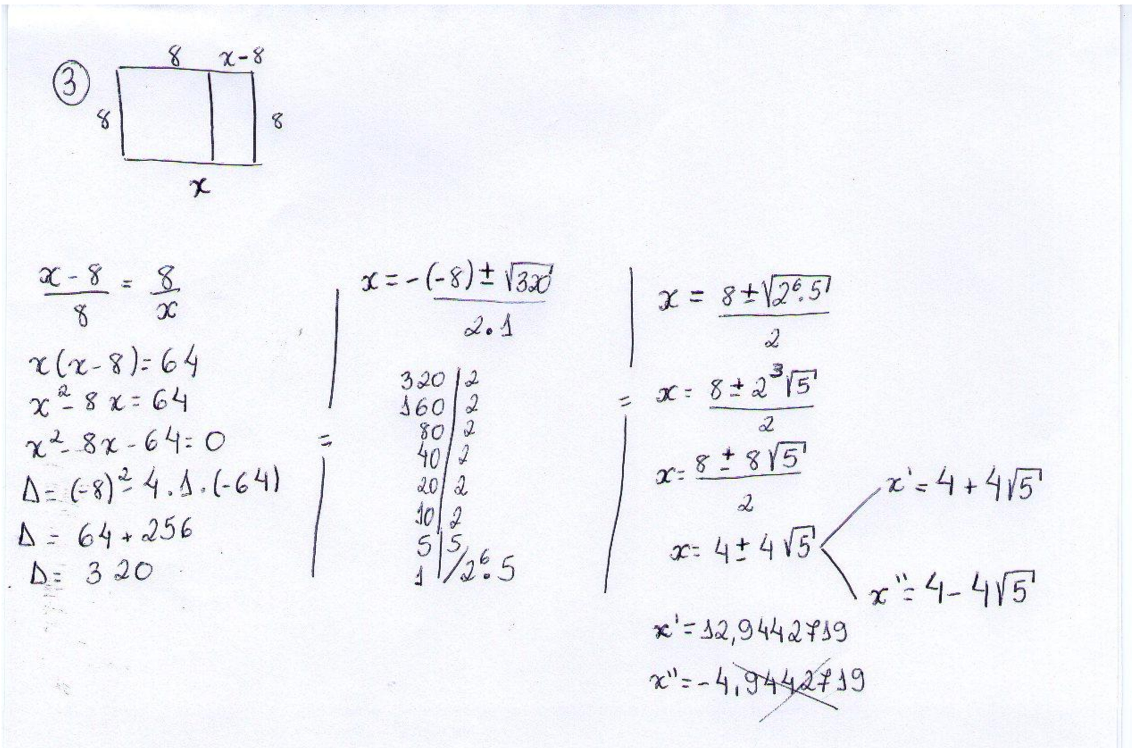


Fig.55: Questão número 3 resolvida pelo aluno 2

Podemos concluir que os alunos da Escola SESI obtiveram pleno entendimento do assunto abordado.

Uma semana após aplicar a atividade na Escola SESI, apliquei a mesma atividade na Escola Estadual Municipalizada Polivalente Anísio Teixeira, na turma 901, também de nono ano do ensino fundamental. A abordagem inicial foi a mesma da Escola SESI, sendo apresentados os mesmos conceitos introdutórios. Na escola municipal não obtive o mesmo sucesso que na escola particular, sendo necessário realizar uma revisão sobre determinados assuntos chaves, como semelhança de polígonos, potenciação e radiciação, para que os alunos com déficit de conteúdo pudessem entender o assunto abordado. Após esta revisão todos os alunos começaram a realizar a atividade proposta.

Ao recolher e corrigir as atividades foi constatado que apesar da maioria dos alunos ter conseguido um bom aproveitamento, alguns erros conceituais com relação à pré-requisitos para realizar a atividade foram encontrados. Os erros observados foram na resolução de equações do segundo grau, potenciação e teorema de Pitágoras. Reproduzirei a seguir, como exemplo, um dos erros mencionados.

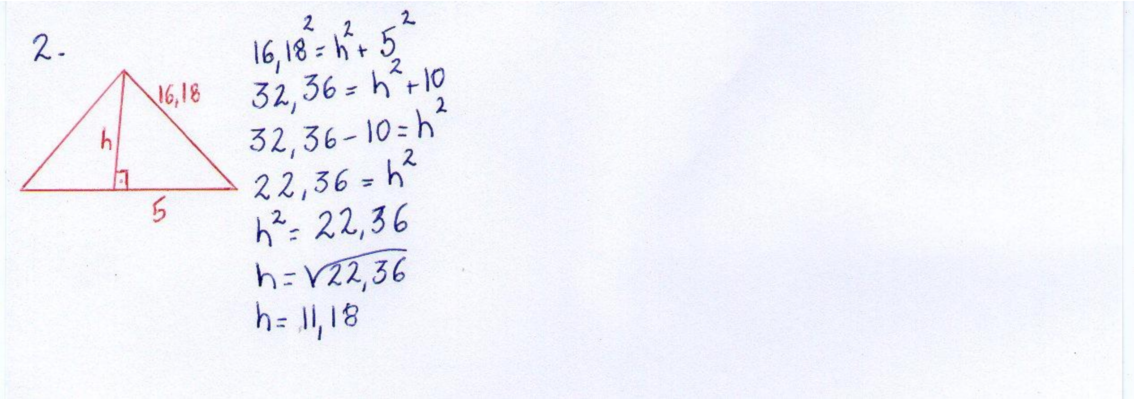


Fig.56: Questão número 2 resolvida pelo aluno 3

Observamos que o aluno se equivocou ao realizar as potenciações e radiciação. O aluno multiplicou a base pelo expoente ao realizar as potenciações e dividiu o radicando pelo índice ao realizar a radiciação. O correto seria:

$$16{,}18^2 = h^2 + 5^2$$

$$261{,}7924 = h^2 + 25$$

$$h^2 = 261{,}7924 - 25$$

$$h^2 = 236{,}7924$$

$$h = \sqrt{236{,}7924}$$

$$h \cong 15{,}388$$

Concluí que nas duas escolas foi obtido o resultado esperado. Apesar das dificuldades encontradas, principalmente na Escola Estadual Municipalizada Polivalente Anísio Teixeira, os alunos assimilaram de forma satisfatória os conteúdos apresentados.

5. CONCLUSÃO

Foram reunidos neste trabalho de conclusão de curso, os principais conhecimentos que um professor deve possuir para poder apresentar para o seu aluno o número áureo.

Acredito que foi alcançado o objetivo de reunir no capítulo 2 as principais definições teóricas sobre o que é o número áureo e onde ele é encontrado em figuras geométricas, polígonos, sólidos geométricos e sequências. Neste capítulo o leitor foi apresentado, ou pode aprimorar os seus conhecimentos sobre o número áureo e, assim torna-se possível, ou através de aulas expositivas, ou através da criação de exercícios abrangendo este tema, trazer o número áureo para dentro da sala de aula.

No capítulo 3 o objetivo foi apresentar onde seria possível encontrar o número áureo em nosso cotidiano. Percebi que, diferente do que imaginei inicialmente, nem todas as informações encontradas na internet e em livros são verdadeiras. Constatei, por exemplo, o caso dos Naútilos. Diversos sites e livros dizem que todos estes moluscos crescem no mesmo padrão, formando uma espiral áurea e, descobri após analises feitas sobre fotos destes moluscos, utilizando o GeoGebra, que isso não acontece em todos os casos, já que em todas as fotos analisadas por mim, não consegui encontrar nenhuma que obedecesse este padrão de crescimento. O caso do crescimento dos Naútilos foi um bom exemplo de fato que destaca a importância de se ter uma visão crítica ao pesquisarmos sobre qualquer assunto em diferentes meios de informação.

Para concluir o objetivo de reunir o conhecimento que o professor deve possuir para poder apresentar para o seu aluno o número áureo, foi escrito um capítulo expondo uma sugestão de como trabalhar este conteúdo em sala de aula. Para a exposição deste assunto foi necessário atenção, para que os alunos percebessem e entendessem plenamente que nem todos os autores concordam que é possível encontrar o número áureo nas obras do cotidiano e na natureza, mas sim aproximações grosseiras. Como visto, no capítulo 4, a atividade sugerida envolvia a razão áurea e suas vertentes no triângulo acutângulo e no retângulo. Muitos alunos assimilaram bem a informação e aplicaram os conceitos de forma satisfatória na atividade.

Trabalhar com esse tipo de atividade é muito importante, pois além de motivar os alunos, foge da rotina de sala de aula. Apesar de alguns alunos não se mostrarem motivados no princípio da atividade, principalmente na Escola Estadual Municipalizada Anísio Teixeira, pude notar que, aos poucos, eles foram se afeiçoando ao que estava sendo passado e terminaram a experiência admirados com tantas aplicações de um assunto amplamente debatido e com opiniões tão distintas. Foi constatado, através das atividades, que a grande maioria conseguiu assimilar bem os conteúdos discutidos, até mesmo raciocinando de forma particular.

Concluo este trabalho reafirmando a importância de uma verificação da validade de todas as informações obtidas em livros e na *internet* e de o professor se municiar de cada vez mais informações relevantes aos temas propostos para suas aulas. Estas características tornam a aula mais empolgante e interessante. Deixo, assim, duas sugestões para posterior pesquisa e atividade docente: realizar um aprofundamento na pesquisa sobre quais informações de onde podemos encontrar o número áureo em nosso cotidiano são realmente verdadeiras ou não passam de mito e, preparar e aplicar uma atividade interdisciplinar, envolvendo principalmente Matemática, História e Artes, para que os alunos sejam convidados a pesquisar em obras de arte e construções do vários períodos históricos onde podemos encontrar aproximações do número áureo.

REFERÊNCIAS

[1] ARTE E MATEMÁTICA: NÚMERO DE OURO. Disponível em <http://www2.tvcultura.com.br/artematematica/home.html> . Acesso em 15 de setembro de 2012.

[2] ÁVILA, G. Retângulo áureo, divisão áurea e a seqüência de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, número 6, 1992

[3] BOYER, C. B. História da Matemática. Editora: Edgard Blücher, 1996.

[4] BROWN, D. O Código Da Vinci. Rio de Janeiro, Editora Sextante, 2004.

[5] CASPAR, M. Kepler. Editora Dover, 1993.

[6] ENCICLOPÉDIA DE PINTORES DA HISTÓRIA. Disponível em <http://pt.wikipedia. org/wiki> . Acessado em 25 de outubro de 2012.

[7] FERREIRA, A. B. H. Minidicionário da Língua Portuguesa. Rio de Janeiro, Editora Nova Fronteira, 1993.

[8] GARBI, G. O Romance das Equações Algébricas. São Paulo , Editora Makron Books, 1998.

[9] GARDNER, M. Notes on a Fringe-Watcher: The Cult of the Golden Ratio. Skeptical Inquirer, n.18, pp. 243-247, 1994.

[10] HISTÓRIA . Disponível em <www.historianet.com.br>. Acessado em 19 de outubro de 2012.

[11] HUNTLEY, H. E. A divina proporção - um ensaio sobre a beleza da matemática. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1985.

[12] LIVIO, M. Razão Áurea. Editora Record, 2010.

[13] MARKOWSKY, G. Misconcertions About the Golden Ratio. College Mathematics Journal, vol.23, n. 1, pp. 2-19, 1992.

[14] MATHEMATIKOS. Disponível em <http://www.lec.ufrgs.br/index.php/ Mathematikos>. Acessado em 15 de setembro de 2012.

[15] O número de ouro. Disponível em < http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html> . Acessado em 02 de dezembro de 2012.

[16] OLARIU, A. Golden Section and The art of Paiting. Cornell University Library, arXiv.org e-Print archive, arXiv:physics/9908036v1 [physics.soc-ph], 1999.

[17] Olimpíadas Brasileira de Matemática. Disponível em <http://www.obm.org.br>. Acessado em 15 de setembro de 2012.

[18] PARÂMETROS Curriculares Nacionais. Disponível em < http://portal.mec.gov.br >. Acesso em 23 de setembro de 2012.

[19] Portal do Professor - Número PHI. Disponível em < http://portal doprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1115>. Acesso em 05 de dezembro de 2012.

[20] Portal do Professor - O número de ouro. Disponível em <http://portaldoprofessor. mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=31724>. Acesso em 05 de dezembro de 2012.

[21] SARAIVA, J. C. V. As pirâmides do Egito e a razão áurea. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, número 48, 2003.

[22] SBMAC - Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional. Disponível em <www.sbmac.org.br>. Acessado em 20 de outubro de 2012.

[23] SIQUEIRA, A. S. Roteiro para elaboração de trabalhos acadêmicos. Duque de Caxias, 2004.

[24] SÓ MATEMÁTICA - PORTAL MATEMÁTICO. Disponível em <www.somatematica. com.br>. Acessado em 02 de dezembro de 2012.

[25] SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Disponível em <http://www.sbem.com.br>. Acessado em 20 de outubro de 2012.

[26] WWW.MATEMATICA.COM.BR. Disponível em <www.matematica.com.br>. Acessado em 02 de dezembro de 2012.