UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS TRÊS LAGOAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

POLINÔMIOS E MÉTODOS DE FATORAÇÃO

DIEGO MORAIS PEREIRA DE LIMA

Três Lagoas - MS
2019

POLINÔMIOS E MÉTODOS DE FATORAÇÃO

DIEGO MORAIS PEREIRA DE LIMA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Antônio Carlos Tamarozzi
Orientador

Três Lagoas - SP
2019

POLINÔMIOS E MÉTODOS DE FATORAÇÃO

DIEGO MORAIS PEREIRA DE LIMA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio Carlos Tamarozzi
Orientador
UFMS/CPTL-UFMS

Prof. Dr. Rangel Ferreira do Nascimento
UFMS/CPTL-UFMS

Renato Cesar da Silva

Prof. Dr. Renato César da Silva
UFMS/CPTL-UFMS

Três Lagoas - MS
2019

Em memória aos meus avós,
José e Júlia
a minha mãe Vilma
e ao meu irmão Samuel.
dedico.

AGRADECIMENTOS

- Diante desta oportunidade única quero agradecer primeiramente a Deus por me proporcionar esta vida e por sua fidelidade.

- Agradeço de todo coração a todos os familiares, em especial aos meus avós, José e Júlia, que desempenharam um papel fundamental em minha vida educacional, à minha mãe Vilma e ao meu irmão Samuel, por sempre estarem ao meu lado.

- Ao corpo docente do programa de mestrado Profmat UFMS, polo de Três Lagoas-MS, pelo aprendizado adquirido ao longo desse período.

- Aos funcionários da UFMS, campus de Três Lagoas-MS, que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho.

- Em especial ao Professor Dr. Antônio Carlos Tamarozzi, por todo ensinamento, incentivo, confiança, orientação e paciência ao longo desses dois anos e meio.

- Aos meus amigos, que de alguma forma contribuíram para este trabalho, em particular aos meus amigos, João Paulo (Mestre pelo programa Profmat) e Professor Doutorando Gilberto Rodrigues (UNESP), por me ajudarem a redigir esse trabalho.

- Gostaria de agradecer a todos os irmãos da igreja Batista em Castilho, pelas orações recebidas no decorrer da minha vida espiritual.

O temor do Senhor é o princípio do conhecimento;

os loucos desprezam a sabedoria e a instrução.

Provérbios 1: 7

RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos os conceitos básicos relativos a teoria dos polinômios de uma variável e como os mesmos podem ser utilizados para obter fatorações importantes. A necessidade de fatorações é constante em todos os níveis de escolaridade da Matemática e, em muitas situações, constituem a única saída para resolução de problemas. Nosso trabalho apresenta uma técnica para identificar fatorações de expressões algébricas e, em consequência, descrevemos aplicações interessantes para a Teoria dos Números.

Palavras-chave: Divisibilidade de polinômios; expressões algébricas; Teoria dos Números.

ABSTRACT

In this work we develop the basic concepts related to the theory of the polynomials of a variable and how they can be used to obtain important factories. The need for factoring is constant at all levels of mathematics education and, in many situations, is the only way out of problem solving. Our work presents a technique to identify algebraic expressions and, consequently, we describe interesting applications for Number Theory.

Keywords: Divisibility of polynomials; algebraic expressions; Theory of Numbers.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Fatorar é transformar uma soma ou diferença de duas ou mais parcelas em um produto de dois ou mais fatores. A fatoração em expressões algébricas surge como uma técnica da Matemática para facilitar os cálculos algébricos; por intermédio da qual somos capazes de solucionar situações mais complexas. A necessidade da fatoração está presente em todos os níveis da escolaridade matemática e, embora seja um processo algébrico, é muitas vezes o ponto chave para a conclusão de várias situações e problemas, mesmo da geometria.

Desde os primeiros anos do ensino fundamental, os exercícios de fixação para conteúdos que exploram manipulações algébricas abordam a fatoração clássica de $a^2 - b^2$ como produto da soma pela diferença. E com o avançar das seriação letivas são exploradas fatorações para $a^3 - b^3$ e em geral $a^n - b^n$ para inteiro $n \geq 2$. Estas expressões são imprescindíveis para a aprendizagem de muitos conteúdos matemáticos e em todos os níveis. Dentre os quais mencionamos, o desenvolvimentos de fórmulas para a soma de uma progressão geométrica até do próprio Cálculo Diferencial e Integral, para cálculos das derivadas de polinômios, bem como das funções que envolvem radicais de n-ésima ordem $\sqrt[n]{x}$, além de funções racionais que envolvem expressões da forma $\dfrac{1}{x^n}$.

Deve ser destacado que, não apenas fatorações envolvendo igualdades são importantes para deduções na matemática, mas até fatorações dadas por desigualdades. Novamente citando o Cálculo Diferencial e Integral o desenvolvimento de limites de sequencias numéricas ou de funções reais que envolvem exponenciais a^x é possível com o auxílio da conhecida identidade de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$, válida para n natural e x número real ≥ -1 (LIMA, Elon Lages, 2004). Esta desigualdade é de grande relevância porque, basicamente permite estabelecer deduções sobre exponenciais a partir de uma expressão linear. Existem outras expressões que denotam fatorações, de grande importância para o desenvolvimento da análise funcional, mas que possibilitam aplicações até mesmo para o ensino médio, conforme descrito em (BONELLI, R.). Destacamos, em particular, a desigualdade de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

válida para números reais $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2, \cdots, b_n$, $n \in \mathbb{N}$ e $p,\ q \geq 1$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Uma versão mais simplificada deste resultado em que $p = q = 2$ é chamada de desigualdade de Cauchy-Schwarz. Este resultado possui uma demonstração elegante com técnicas matemáticas acessíveis, através do estudo do sinal de um polinômio quadrático. A demonstração apresentamos no capítulo 2.

O ponto principal deste trabalho consiste em explorar fatorações de expressões da forma $a^n - b^n$ ou $a^n + b^n$, vinculando este estudo com a teoria de polinômios, mais especificamente o Teorema do resto e a existências de raízes. Por este motivo está justificado o desenvolvimento da teoria básica de polinômios de uma variável apresentada no capítulo 1.

Como foi dito, as expressões $a^n - b^n$ e $a^n + b^n$ surgem naturalmente em vários desenvolvimentos matemáticos, desta forma dedicamos o capítulo 2 para explorar algumas aplicações das mesmas. Em particular destacamos sua importância para a divisibilidade na Teoria dos Números. Apresentamos ainda neste capitulo deduções alternativas, sem intervenção de polinômios, para tais fatorações. Iniciamos com a fatoração para $a^n - 1$ e, através de uma manipulação algébrica interessante, deduzimos da mesma o formato para as fatorações de $a^n - b^n$ e $a^n + b^n$.

As fatorações de polinômios que descrevemos ao longo do trabalho podem ser também demonstradas por indução e foram anexadas a este trabalho no apêndice.

1 TEORIA BÁSICA DE POLINÔMIOS

Neste capítulo estudaremos os conceitos básicos de polinômios para as séries iniciais. Hoje em dia, quando o aluno se depara com expressões algébricas, ele tende a ter muita dificuldades em manuseia-las, pois nota-se que, o aluno não possuí a base necessária para lidar com tais expressões. Por isso, trataremos esse assunto com muita cautela.

Iniciaremos esse conceito com uma breve introdução de monômios.

1.1 Monômios

Um monômio é uma expressão algébrica dada pelo produto de um número real não nulo por um número finito de potências de expoentes inteiros e não negativos, na qual as bases são variáveis. Por exemplo, $-11t^5$, $\frac{2}{3}r^7s$, $\frac{-\sqrt[3]{13}}{5}x^{11}y^3$, $\sqrt{5}m^2n^2t^5$ e $\sqrt[5]{23}pqst^7$ são monômios.

Um monômio possuí duas partes, uma literal e outra numérica. A parte literal de um monômio é composta pelo produto das potências das variáveis, já a parte numérica denominada também como coeficiente do monômio que é formada pelo número real que antecede a parte literal, ou seja, a parte composta das potências das variáveis. Nos exemplos acima, as partes formadas pelo produto das potências das variáveis são respectivamente t^5, r^7s, $x^{11}y^3$, $m^2n^2t^5$, $pqst^7$, enquanto que a parte numérica ou coeficiente são, -11, $\frac{2}{3}$, $\frac{-\sqrt[3]{13}}{5}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt[5]{23}$.

Para determinarmos o grau de um monômio, basta somarmos os expoentes das potências que compõem sua parte literal. Os graus dos exemplos citados anteriormente são respectivamente, 5, 8, 14, 9 e 10. Dois monômios são semelhantes se suas partes literais são iguais, se acaso a parte numérica também for igual são monômios idênticos. (PARENTE, Ulisses L.; NETO, Antônio C. M) Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1.1. *Os monômios $\sqrt[4]{2}r^3s^4t$ e $-3r^3s^4t$ são semelhantes, assim como $a^5b^4c^3$, $-\frac{2}{7}a^5b^4c^3$ e $\pi a^5b^4c^3$, pois possuem mesma parte literal. Já os monômios $-17x^7y^6$ e $-15x^6y^7$ não são se-*

melhantes já que suas partes literais são distintas.

1.1.1 Adição de monômios

Na Adição(Subtração) de dois ou mais monômios semelhantes, temos que somar (ou tirar) a parte numérica, ou seja, seus coeficientes e, preserva a parte literal comum. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1.2. *Consideremos o monômio $-7p^2q+13p^2q-3p^2q$. Conservando a parte literal, isto é, p^2q, e fazendo as devidas operações com os coeficientes (parte numérica), obtemos*

$$-7p^2q+13p^2q-3p^2q=(-7+13-3)p^2q=3p^2q.$$

Exemplo 1.1.3. *Dado o polinômio $12a^2b^3-\frac{2}{3}mn^5+4a^2b^3-\frac{4}{3}mn^5$, podemos adicionar ou subtrair quaisquer grupos de monômios semelhantes, restringindo cada um desses grupos a um só monômio. Nesse caso, agrupamos os monômios $12a^2b^3$ e $4a^2b^3$ que são semelhantes e, da mesma forma, agrupamos os monômios $-\frac{2}{3}mn^5$ e $-\frac{4}{3}mn^5$.*

$$12a^2b^3-\frac{2}{3}mn^5+4a^2b^3-\frac{4}{3}mn^5=(12+4)a^2b^3+\left(-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right)mn^5=16a^2b^3-2mn^5.$$

1.1.2 Multiplicação e divisão de monômios

Para multiplicar e dividir monômios não necessitamos que eles sejam semelhantes. Na multiplicação (ou divisão) de monômios, devemos multiplicar (ou dividir) os coeficientes (parte numérica) e as variáveis comuns nos monômios. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1.4. *Em $(19p^2q^3)(-2p^3q^2t)=-38p^5q^5t$, multiplicamos a parte numérica da primeira expressão, que no caso é o número 19 com a parte numérica da segunda expressão, -2, assim, obtendo -38, logo em seguida multiplicamos as variáveis semelhantes, obtendo p^5q^5t, pois na multiplicação de variáveis semelhantes conservamos as bases semelhantes e somamos os expoentes.*

Exemplo 1.1.5. *Consideremos os monômios $63p^4q11t$ e $7p^2q^7$. Na divisão $\frac{63p^4q^{11}t}{7p^2q^7}=9p^2q^4t$, dividimos a parte numérica, obtendo 9, em seguida dividimos a parte das variáveis semelhantes, adquirindo p^2q^4t, ao contrário da multiplicação mantemos as bases semelhantes e subtraímos os expoentes.*

Observação 1.1. *Note que nem sempre podemos efetuar uma divisão de monômios. Para que possamos executá-la, os expoentes das variáveis do numerador tem que ser maiores ou iguais que os expoentes das variáveis equivalentes no denominador.*

Um exemplo de que não podemos executar a divisão de monômios é:

$$\frac{63p^6q^{13}t}{p^4q^7t^3} = \frac{7p^2q^6}{t^2} = 7p^2q^6t^{-2}.$$

Uma vez que, mesmo o Monômio tendo as mesmas variáveis tanto no numerador quanto no denominador, o expoente da variável t no numerador é menor que o seu expoente no denominador.

Para fazer o Cálculo da potência de um monômio, elevamos tanto a parte dos coeficientes quanto a parte literal do monômio à potência indicada.

Exemplo 1.1.6. *Seja o monômio* $\left(\frac{1}{3}a^3b^4\right)$ *elevando a quinta potência, temos que*

$$\left(\frac{1}{3}a^3b^4\right)^5 = \frac{1}{243}a^{15}b^{20}.$$

Já para remover a raiz enésima de um monômio, extraímos as raízes enésimas de seu coeficiente e de sua parte literal.

Exemplo 1.1.7. *Dado o monômio* $32p^{10}q^5t^{15}$ *então extraindo sua raiz quinta, obtém-se*

$$\sqrt[5]{32p^{10}q^5t^{15}} = \sqrt[5]{(2p^2qt^3)^5} = 2p^2qt^3$$

Observação 1.2. *Nem sempre a raiz enésima de um monômio será um monômio.*

Exemplo 1.1.8. *Se* $27p^9q^6t^2$ *extraindo sua raiz cúbica, obtemos*

$$\sqrt[3]{27p^9q^6t^2} = \sqrt[3]{(3p^3q^2)^3t^2} = \left(\sqrt[3]{(3p^3q^2)^3}\right)\sqrt[3]{t^2} = 3p^3q^2t^{\frac{2}{3}}.$$

Observe que nem todos os expoente são inteiros, logo a expressão obtida não é um monômio.

1.2 Polinômios

Definição 1.1. *Um polinômio é uma expressão formal algébrica que é dado por uma soma finita de monômios do tipo:*

$$P(T) = b_nT^n + b_{n-1}T^{n-1} + \cdots + b_1T + b_0, \text{ onde } (b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}, b_n)$$

é uma lista ordenada dos coeficientes reais dos monômios que compõem o polinômio e T *é a variável de indeterminação. O grau de um polinômio é o expoente de maior valor numérico* *entre os graus dos monômios que o compõem. Dados dois polinômios $P(T)$ e $F(T)$ com coeficientes nos reais, eles serão idênticos se têm o mesmo grau e se os termos dos coeficientes de mesmo grau coincidem.*

Exemplo 1.2.1. *Seja o polinômio,* $P(t) = 2t^3 - 4t^2 + \sqrt[3]{3}t + 5$.

Sua estrutura é composta por coeficientes reais, sendo que os graus dos monômios que os constituem são 3, 2, 1 *e* 0. *Portanto seu grau é* 3.

Exemplo 1.2.2. *Considere o polinômio* $Q(t,s)$, *com a lei de formação*

$$Q(t,s) = 4t^4s^3 - 3t^3s^2 + \sqrt{5}ts - 7.$$

Temos um polinômio nas variáveis t e s, cujo os coeficientes reais são 4, -3, $\sqrt{5}$ *e* 7 *e, visto que os graus dos monômios que o compõem são* 7, 5, 2, *e* 0, *logo seu grau é* 7.

Observação 1.3. *Usamos a notação $P(t)$ para caracterizar um polinômio na variável t, $Q(t,s)$ para representar um polinômio nas variáveis t e s, e, de modo geral, $P(t_1,\ t_2, \cdots,\ t_n)$ para caracterizar um polinômio nas variáveis $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$. Neste trabalho abordaremos somente polinômios com uma variável, ou seja, polinômios do tipo*

$$P(t) = b_nt^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1t + b_0,\ \textit{onde}\ b_n,\ b_{n-1},\ \cdots,\ b_1,\ b_0 \in \mathbb{R}.$$

Sejam

$$P(t) = -2t^3 + \sqrt{7}t - \frac{5}{7}$$

e

$$Q(s) = -5s^5 + 3s^4 - 2s^3,$$

assim definidos são exemplos de polinômios em uma variável.

Dizemos que o polinômio é Mônico, quando o coeficiente de maior grau de polinômio é igual 1. Por exemplo,

$$P(t) = t^4 - 5t^3 + 7t^2 - 3t + 2 \text{ e } Q(t) = t^3 - 2t^2 + 5t + 1$$

são polinômios mônicos.

$P(t)$ será um polinômio nulo (ou identicamente nulo), se $P(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em seguida destacaremos uma proposição.

Proposição 1.1. *Seja $P(t) = b_nt^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1t + b_0$ um polinômio, ele será nulo se, e somente se, todos os seus coeficientes forem nulos, ou seja, se, e somente se, $b_n = b_{n-1} = \cdots = b_1 = b_0$.*

Assim pode-se concluir que o único polinômio identicamente nulo é do tipo

$$P(t) = 0t^n + 0t^{n-1} + \cdots + 0t + 0.$$

Por definição os polinômios

$$P(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0 \text{ e } Q(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0$$

são iguais (ou idênticos) quando temos para todo t,

$$P(t) = Q(t) \implies b_n t^n + b_{n-1} t_{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0 = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0$$

$$\implies \begin{cases} b_n = c_n \\ b_{n-1} = c_{n-1} \\ \cdots \\ b_1 = c_1 \\ b_0 = c_0 \end{cases}$$

Observação 1.4. *Denotamos o grau de um polinômio $P(t)$ por λP.*

1.2.1 Adição e subtração de polinômios

Sejam $P(t)$ e $Q(t)$ dois polinômios de grau n efetuaremos entre eles a sua soma e sua diferença.

Vejamos:

Estes polinômios são escritos da seguinte forma generalizada, onde

$$P(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + b_{n-2} t^{n-2} + \cdots + b_2 t^2 + b_1 t + b_0$$

e

$$Q(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + c_{n-2} t^{n-2} + \cdots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0.$$

A soma,

$$\begin{aligned} (P+Q)(t) &= (b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + b_{n-2} t^{n-2} + \cdots \\ &\quad + b_2 t^2 + b_1 t + b_0) + (c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + c_{n-2} t^{n-2} + \cdots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0) \\ &= (b_n + c_n) t^n + (b_{n-1} + c_{n-1}) t^{n-1} + (b_{n-2} + c_{n-2}) t^{n-2} + \cdots \\ &\quad + (b_2 + c_2) t^2 + (b_1 + c_1) t + (b_0 + c_0). \end{aligned}$$

A diferença,

$$\begin{aligned}(P-Q)(t) &= (b_nt^n+b_{n-1}t^{n-1}+b_{n-2}t^{n-2}+\cdots+b_2t^2+b_1t+b_0)+\\ &\quad -(c_nt^n+c_{n-1}t^{n-1}+c_{n-2}t^{n-2}+\cdots+c_2t^2+c_1t+c_0)\\ &= (b_n-c_n)t^n+(b_{n-1}-c_{n-1})t^{n-1}+(b_{n-2}-c_{n-2})t^{n-2}+\cdots\\ &\quad +(b_2-c_2)t^2+(b_1-c_1)t+(b_0-c_0).\end{aligned}$$

Observação 1.5. *Sempre que adicionarmos (ou subtrairmos) dois ou mais polinômios e o polinômio resultante for não nulo, então seu grau vai ser menor do que ou igual ao maior dos graus dos polinômios parcelas.*

$$\lambda(P\pm Q)\leq \max\{\lambda P,\ \lambda Q\}$$

De modo geral, sejam $P(t)$ e $F(t)$ do tipo

$$P(t)=p_nt^n+p_{n-1}t^{n-1}+p_{n-2}t^{n-2}+\cdots+p_{n-r}t^{n-r}+\cdots+p_2t^2+p_1t+p_0$$

de $\lambda P=n$, $n>r$ e

$$F(t)=f_mt^m+f_{m-1}t^{m-1}+f_{m-2}t^{m-2}+\cdots+f_2t^2+f_1t+f_0$$

de $\lambda F=m$, com

$$\lambda P>\lambda F\Longrightarrow n>m,$$

ou seja,

$$n=m+r\Longrightarrow m=n-r$$

$$\begin{aligned}(P\pm F)(t) &= (p_nt^n+p_{n-1}t^{n-1}+p_{n-2}t^{n-2}+\cdots+p_{n-r}t^{n-r}\cdots+p_2t^2+p_1t+p_0)\\ &\quad \pm(f_mt^m+f_{m-1}t^{m-1}+f_{m-2}t^{m-2}+\cdots+f_2t^2+f_1t+f_0).\end{aligned}$$

Como,

$$m=n-r$$

$$\begin{aligned}(P\pm F)(t) &= (p_n\pm 0)t^n+(p_{n-1}\pm 0)t^{n-1}+(p_{n-2}\pm 0)t^{n-2}+\cdots+(p_m\pm f_m)t^m\\ &\quad +(p_{m-1}\pm f_{m-1})t^{m-1}+(p_{m-2}\pm f_{m-2})t^{m-2}+\cdots+(p_2\pm f_2)t^2\\ &\quad +(p_1\pm f_1)t+(p_0\pm f_0)\end{aligned}$$

isto implica em

$$\begin{aligned}(P\pm F)(t) &= p_nt^n+p_{n-1}t^{n-1}+p_{n-2}t^{n-2}+\cdots+(p_m\pm f_m)t^m+(p_{m-1}t^{m-1})t^{m-1}\\ &\quad +(p_{m-2}\pm f_{m-2})t^{m-2}+\cdots+(p_2\pm f_2)t^2+(p_1\pm f_1)t+(p_0\pm f_0).\end{aligned}$$

Portanto, o grau do polinômio resultante é

$$\lambda(P\pm F)\leq n,\ \text{se}\ p_n\neq 0 \Longrightarrow \lambda(P\pm F)=n.$$

1.2.2 Multiplicação de polinômios

Para multiplicar dois polinômios, aplicamos a propriedade distributiva de um polinômio em relação ao outro, ou seja, multiplicamos cada monômio de um deles por todos os monômios do outro. Posteriormente, agrupamos os resultados, diminuindo os monômios semelhantes.

Dados dois polinômios de graus n e m, onde

$$P(t)=p_nt^n+p_{n-1}t^{n-1}+p_{n-2}t^{n-2}+\cdots+p_3t^3+p_2t^2+p_1t+p_0$$

e

$$F(t)=f_mt^m+f_{m-1}t^{m-1}+f_{m-2}t^{m-2}+\cdots+f_3t^3+f_2t^2+f_1t+f_0$$

obtemos $R(t)=P(t)F(t)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}R(t) &= (p_nt^n+p_{n-1}t^{n-1}+p_{n-2}t^{n-2}+\cdots+p_2t^2+p_1t+p_0)(f_mt^m+f_{m-1}t^{m-1}+\\ &\quad +f_{m-2}t^{m-2}+\cdots+f_2t^2+f_1t+f_0)=\\ &= p_nt^n(f_mt^m+f_{m-1}t^{m-1}+f_{m-2}t^{m-2}+\cdots+f_2t^2+f_1t+f_0)+p_{n-1}t^{n-1}(f_mt^m+\\ &\quad +f_{m-1}t^{m-1}+f_{m-2}t^{m-2}+\cdots+f_2t^2+f_1t+f_0)\\ &\quad +p_{n-2}t^{n-2}(f_mt^m+f_{m-1}t^{m-1}+f_{m-2}t^{m-2}+\cdots+f_2t^2+f_1t+f_0)+\cdots+p_2t^2(f_mt^m+\\ &\quad +f_{m-1}t^{m-1}+f_{m-2}t^{m-2}+\cdots+f_2t^2+f_1t+f_0)+p_1t(f_mt^m+f_{m-1}t^{m-1}+\\ &\quad +f_{m-2}t^{m-2}+\cdots+f_2t^2+f_1t+f_0)+p_0(f_mt^m+f_{m-1}t^{m-1}+f_{m-2}t^{m-2}+\cdots+f_2t^2\\ &\quad +f_1t+f_0)=\\ &= (p_nf_mt^{n+m}+p_nf_{m-1}t^{n+m-1}+p_nf_{m-2}t^{n+m-2}+\cdots+p_nf_2t^{n+2}+p_nf_1t^{n+1}+p_nf_0t^n)\\ &\quad +(p_{n-1}f_mt^{n+m-1}+p_{n-1}f_{m-1}t^{n+m-2}+p_{n-1}f_{m-2}t^{n+m-3}+\cdots+p_{n-1}f_2t^{n+1}+\\ &\quad +p_{n-1}f_1t^n+p_{n-1}f_0t^{n-1})+(p_{n-2}f_mt^{n+m-2}+p_{n-2}f_{m-1}t^{n+m-3}+p_{n-2}f_{m-2}t^{n+m-4}\\ &\quad +\cdots+p_{n-2}f_2t^n+p_{n-2}f_1t^{n-1}+p_{n-2}f_0t^{n-2})+\cdots+(p_2f_mt^{m+2}+p_2f_{m-1}t^{m+1}+\\ &\quad +p_2f_{m-2}t^m+\cdots+p_2f_2t^4+p_2f_1t^3+p_2f_0t^2)+(p_1f_mt^{m+1}+p_1f_{m-1}t^m+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +p_1 f_{m-2}t^{m-1} + \cdots + p_1 f_2 t^3 + p_1 f_1 t^2 + p_1 f_0 t) + (p_0 f_m t^m + p_0 f_{m-1} t^{m-1} + \\
& +p_0 f_{m-2} t^{m-2} + \cdots + p_0 f_2 t^2 + p_0 f_1 t + p_0 f_0) = \\
= \; & p_n f_m t^{n+m} + (p_n f_{m-1} + p_{n-1} f_m) t^{n+m-1} + (p_n f_{m-2} + p_{n-1} f_{m-1} + p_{n-2} f_m) t^{n+m-2} \\
& +(\cdots + p_{n-1} f_{m-2} + p_{n-2} f_{m-1} + \cdots) t^{n+m-3} + \cdots + (\cdots + p_2 f_1 + p_1 f_2 + \cdots) t^3 + \\
& +(p_2 f_0 + p_1 f_1 + p_0 f_2) t^2 + (p_1 f_0 + p_0 f_1) t + p_0 f_0.
\end{aligned}
$$

O grau do polinômio resultante é

$$\lambda R = n + m = \lambda P + \lambda F$$

Outro método muito útil para obter o produto de dois polinômios é aquele que utilizamos frequentemente para multiplicar dois números naturais.

Exemplo 1.2.3. *Sejam os polinômios $F(t) = -2t^3 + 7t - 13$ e $P(t) = 2t^2 - 7t + 5$, calculemos:*

	$-2t^3$	$+7t$	-13		
$\times$	$2t^2$	$-7t$	$+5$		
$0t^5$	$0t^4$	$-10t^3$	$0t^2$	$35t$	-65
$0t^5$	$14t^4$	$0t^3$	$-49t^2$	$91t$	$+$
$-4t^5$	$0t^4$	$14t^3$	$-26t^2$	$+$	$+$
$-4t^5$	$+14t^4$	$+4t^3$	$-75t^2$	$+126t$	-65

Observação 1.6. *Na multiplicação entre dois polinômios, o grau resultante do produto entre eles é igual à soma dos graus dos fatores, isto é, $\lambda(FP) = \lambda F + \lambda P$.*

1.2.3 Raiz ou zero de um polinômio

A *raiz* de um polinômio $P(t)$ é qualquer valor que, uma vez atribuído a t, torna o valor numérico de P igual à zero, ou seja, quando $P(a) = 0$, neste caso dizemos que a é uma raiz ou zero do polinômio $P(t)$, sendo $a \in \mathbb{R}$.

1.2.4 Divisão de Polinômios

Nesta seção trataremos a divisão de polinômios, cuja abordagem será feita em analogia ao que ocorre com a divisão de números naturais, em particular o algoritmo da divisão.

Com efeito, sabemos que dados $a,\ b \in \mathbb{N}$ com $b \neq 0$, existem q e r unicamente determinados tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$.

Na divisão de polinômios (observe a semelhança com divisão de números naturais). Substituindo a relação do resto ser menor que o divisor pela relação do resto possuir grau menor do que divisor.

Teorema 1.1. *Seja K um corpo e $P(t)$, $D(t) \in \mathbb{K}[t]$ com $D(t) \neq 0$ então existem únicos $Q(t)$, $R(t) \in \mathbb{K}[t]$ com $0 \leq \lambda R < \lambda D$.*

A seguir apresentamos a versão do algoritmo da divisão para polinômios em analogia ao mesmo teorema para números inteiros.

Teorema 1.2. *Sejam os polinômios $P(t)$, $D(t) \neq 0$, há únicos polinômios $Q(t)$ e $R(t)$ tais que $P(t) = D(t)Q(t) + R(t)$, onde $R(t) = 0$ ou $\lambda R < \lambda D$.*

Demonstração: Se $P(t) = 0$, neste caso temos $Q(t) = R(t) = 0$, pois $0 = D(t)0 + 0$.

Caso $P(t) \neq 0$ e $\lambda P < \lambda D$, basta tomar $Q(t) = 0$ e $R(t) = P(t)$, pois $P(t) = D(t)0 + P(t)$ e, por hipótese, $\lambda P < \lambda D$.

Caso $\lambda P \geq \lambda D(t)$.

Se $\lambda P = 0$, então $\lambda D = 0$.

Suponhamos agora que $\lambda P = k$ e que o teorema se verifica para todo polinômio de grau menor que k.

Consideremos o polinômio

$$P_1(t) = P(t) - p_k d_l^{-1} t^{k-l} D(t),$$

onde

$$P(t) = p_k t^k + \cdots + p_1 t + p_o$$

e

$$D(t) = d_l t^l + \cdots + d_1 t + d_0.$$

Se $P_1(t) = 0$ ou $\lambda P_1 < \lambda D$, então $R(t) = P_1(t)$ e $Q(t) = p_k d_l^1 t^{k-l}$. Caso contrário obtemos $\lambda P_1 \leq k - 1$ e $\lambda P_1 \geq D$. Pela hipótese de indução existem $Q_1(t)$ e $R_1(t)$ tais que

$$P_1(t) = D(t)Q_1(t) + R_1(t), \text{ onde } R_1(t) = 0 \text{ ou } \lambda R_1 < \lambda D.$$

Logo,

$$P(t) - p_k d_l^{-1} t^{k-l} D(t) = D(t)Q_1(t) + R_1(t) \implies P(t) = D(t)Q_1(t) + p_k d_l^{-1} t^{k-l} D(t),$$

ou seja,

$$P(t) = D(t)(Q_1(t) + p_k d_l^{-1} t^{k-l} D(t)) + R_1(t), \text{ onde } R_1(t) = 0 \text{ ou } \lambda R_1 < \lambda D.$$

Portanto, isto prova o teorema.

Baseado em (DOMINGUES e YEZZI, 2003).

Em seguida, apresentaremos algumas consequências do teorema do resto que chamaremos de Corolários.

Corolário 1.1. *Se μ for raiz de $P(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$, isto é, $P(\mu) = 0$, então $P(t) = (t-\mu)Q(t), \forall t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: μ é uma raiz de $P(t)$ se, e somente se, $(t-\mu)$ divide $P(t)$, ou seja, como $P(\mu) = 0$, temos

$$\begin{aligned} P(t) &= P(t) - P(\mu) \\ &= (a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0) - (a_n \mu^n + \cdots + a_1 \mu + a_0) \\ &= a_n(t^n - \mu^n) + a_{n-1}(t^{n-1} - \mu^{n-1}) + \cdots + (t - \mu), \end{aligned}$$

cada uma das expressões acima é divisível por $t-\mu$, logo do teorema do resto tem-se

$$P(t) = (t-\mu)Q(t),$$

onde $R(t) = 0$ (polinômio identicamente nulo).

Suponhamos que μ_1, seja outra raiz para $P(t)$, então

$$Q(t) = (t-\mu_1)Q_1(t),$$

ou seja,

$$P(t) = (t-\mu)(t-\mu_1)Q_1(t).$$

Portanto, de modo mais geral $\mu,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4,\cdots,\ \mu_m,\ m \in \mathbb{N}$ são raízes de $P(t)$ se, e somente se,

$$P(t) = a_n((t-\mu)(t-\mu_1)(t-\mu_2)(t-\mu_3)\cdots(t-\mu_m))Q(t),$$

onde $Q(t)$ é um polinômio de grau $n-m$, sendo $P(t)$ de grau n e a_n é o coeficiente de maior grau.

Corolário 1.2. *Do teorema do resto, temos que $\lambda P = \lambda Q + \lambda D$.*

Demonstração: Segue do teorema do resto que $P(t) = D(t)Q(t) + R(t)$, logo

$$\lambda(P) = \lambda(DQ + D)$$

como $\lambda(R) < \lambda(D) \leq \lambda(DQ)$ então $\lambda(QD+R) = \lambda(QD)$, mas pelo que já sabemos

$$\lambda(QD) = \lambda Q + \lambda D.$$

Corolário 1.3. *Demonstre que o resto da divisão de um polinômio $P(t)$ por $(t-a)(t-b)$, onde $a \neq b$, é $R(t) = P(b)(b-a)(t-a) + P(a)(a-b)(t-b)$.*

Demonstração: Do teorema do resto, temos que

$$P(t) = D(t)Q(t) + R(t) \Longrightarrow P(t) = (t-a)(t-b)Q(t) + R(t), (*)$$

onde $D(t) = (t-a)(t-b)$ como $\lambda D = 2$, logo, o resto terá no máximo grau 1, isto é, $\lambda R = 1$.

Então, existem $m,\ n \in \mathbb{R}$, tais que o resto pode ser escrito da seguinte forma,

$$R(t) = mt + n.$$

Uma vez que a e b são raízes do polinômio D, pois

$$D(a) = (a-a)(a-b) = 0$$

e

$$D(b) = (b-a)(b-b) = 0$$

Para $t = a$, segue de $(*)$ que

$$\begin{aligned} P(a) = D(a)Q(a) + R(a) \quad &\Longrightarrow \quad P(a) = R(a) \\ &\Longrightarrow \quad P(a) = ma + n. \end{aligned}$$

Em seguida para $t = b$, temos

$$P(b) = D(b)Q(b) + R(b) \quad \Longrightarrow \quad P(b) = mb + n.$$

Desta forma adquirimos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} P(a) = ma + n \\ P(b) = mb + n \end{cases}$$

.

Resolvendo o sistema, tem-se

$$\begin{cases} \quad P(a) = ma + n \\ -P(b) = -mb - n \end{cases}$$

$$P(a) - P(b) = (a - b)m \Longrightarrow m = \frac{P(a) - P(b)}{a - b}$$

Substituindo m na equação

$$P(a) = ma + n,$$

temos

$$\begin{aligned} P(a) = \left(\frac{P(a) - P(b)}{a - b}\right) a - ba + n \quad &\Longrightarrow \quad (a - b)P(a) = aP(a) - aP(b) + n(a - b) \\ &\Longrightarrow \quad P(a) - bP(a) = aP(a) - aP(b) + n(a - b) \\ &\Longrightarrow \quad -bP(a) = -aP(b) + n(a - b) \\ &\Longrightarrow \quad aP(b) - bP(a) = n(a - b) \\ &\Longrightarrow \quad n = \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$m = \frac{P(a) - P(b)}{a - b}$$

e

$$n = \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}.$$

Sendo o resto da divisão de $P(t)$ por $D(t)$ da forma,

$$R(t) = mt + n,$$

assim

$$\begin{aligned} R(t) &= \left(\frac{P(a) - P(b)}{a - b}\right) t + \frac{aP(b) - bP(a)}{(a - b)} = \frac{tP(a) - tP(b) + aP(b) - bP(a)}{(a - b)} \\ &= \frac{P(a)(t - b) + P(b)(a - t)}{(a - b)} = \frac{P(a)(t - b)}{(a - b)} + \frac{P(b)(a - t)}{(a - b)} \\ &= \frac{P(a)(t - b)}{(a - b)} + \frac{P(b)(t - a)}{(b - a)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$R(t) = \frac{P(b)(t - a)}{(b - a)} + \frac{P(a)(t - b)}{(a - b)},$$

como queríamos mostrar.

Observação 1.7. *Na divisão de um polinômio $P(t)$ por $(t - a)$, o resto é igual a $P(a)$, ou seja, $R(a) = P(a)$, isto é, $R(a)$ é um polinômio constante.*

Corolário 1.4. *O teorema do resto também permite que possamos separar o polinômio em fatores, isto é, em um produto de duas parcelas mais o resto.*

Exemplo 1.2.4. *Sejam $P(t) = t^3 - 2t^2 + 1$ e $D(t) = t^2 - t - 1$, então para dividirmos $P(t)$ por $D(t)$ utilizamos o processo análogo ao descrito na divisão por números, ou seja,*

$t^3 - 2t^2 + 1$	$t^2 - t - 1$
$-t^3 + t^2 + t$	$t - 1$
$-t^2 + t + 1$ $t^2 - t - 1$	
0	

logo, $Q(t) = t - 1$ e $R(t) = 0$.

De uma maneira mais simplificada, temos

1	-2	0	1	1	-1	-1
-1	1	1	0		1	-1
0	-1	1	1			
0	1	-1	-1			
0	0	0	0			

Note que nesse exemplo a divisão de $P(t)$ por $D(t)$ é exata, onde $P(t)$ é o dividendo, $D(t)$ é o divisor, $t-1$ é o quociente e 0 o resto, sendo 0 o polinômio identicamente nulo. Assim como no exemplo em que $A(t) = -3t^4 + 2t^2 + 7$ é o dividendo, $B(t) = t - 3$ é o divisor, encontraremos $Q(t)$ (polinômio quociente) e $R(t)$ (polinômio resto).

Logo,

-3	0	2	0	7			1	-3
3	-9				-3	-9	-25	-75
	-9	2	0	7				
	9	-27						
		-25		7				
		25	-75					
			-75	7				
			75	-225				
				-218				

portanto, $Q(t) = (-3t^3 - 9t^2 - 25t - 75)$ e $R(t) = -218$

1.2.5 Dispositivo de Briot-Ruffini

Paolo Ruffini, nasceu em Valentano, Estado Papais na Itália, em 22 de Setembro de 1765, faleceu em Modena no dia 10 de Maio de 1822. Graduou-se em Matemática e Medicina, pela Universidade de Modena, onde recebeu o grau de doutor.

Como matemático, seu nome está associado com a prova da impossibilidade de resolver algebricamente a equação de grau 5 ou superior sobre a qual escreveu vários tratados, ou seja, não existem formulas para o calculo de raízes que envolvam seus coeficientes e radicais. Também contribuiu com soluções práticas para o estudo dos polinômios. (COSTA, Keilla R.)

Na divisão de polinômios, quando o divisor for um polinômio mônico de grau 1, ou seja, da forma $t-a$, há um algoritmo criado por Paolo Ruffini, que permite calcular o quociente e o resto de modo bem mais prático e rápido.

Vejamos como funciona, à divisão $P(t)$ por $D(t)=t-a$ através desse método de Ruffini, com alguns exemplos.

Exemplo 1.2.5. *Efetue a divisão de $P(t)=7t^3-5t^2+3t+11$ por $D(t)=t-5$ utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini.*
Solução: *Objetivo principal desse exercício e encontrar $Q(t)=at^2+bt+c$ e $R(t)=k$, $k\in\mathbb{R}$.*

Do teorema do resto, temos que

$$\begin{aligned}
P(t)=D(t)Q(t)+R(t) \quad &\Longrightarrow \quad 7t^3-5t^2+3t+11=(t-5)(at^2+bt+c)+k\\
&\Longrightarrow \quad 7t^3-5t^2+3t+11=t(at^2+bt+c)-5(at^2+bt+c)+k\\
&\Longrightarrow \quad 7t^3-5t^2+3t+11=at^3+bt^2+ct-5at^2-5bt-5c+k\\
&\Longrightarrow \quad 7t^3-5t^2+3t+11=at^3+(b-5a)t^2+(c-5b)t-5c+k.
\end{aligned}$$

Logo, igualando os coeficientes de mesmo grau, obtém-se um sistema, isto é,

$$\begin{cases} a=7\\ b-5a=-5\\ c-5b=3\\ -5c+k=11,\end{cases}$$

resolvendo o sistema, obtemos que

$$\begin{aligned}
b-35=-5 \quad &\Longrightarrow \quad b=30\\
c-150=3 \quad &\Longrightarrow \quad c=150\\
-765+k=11 \quad &\Longrightarrow \quad k=776.
\end{aligned}$$

A Resolução acima pode ser esquematizada da seguinte forma,

5	7	-5	3	11
	7	$5\times7-5=30$	$5\times30+3=153$	$5\times153+11=776$

ou seja, primeiro colocamos a raiz do divisor separadamente dos coeficientes do dividendo (os termos) que estão ocultos completamos com zero e arrumamos os coeficientes de maior grau para os de menor grau, nessa ordem.

Segundo passo, descemos o coeficiente de maior grau, no caso acima o número 7.

Já na terceira etapa, pegamos a raiz do divisor e multiplicamos pelo resultado, que está abaixo do coeficiente de maior grau e subtraímos pelo coeficiente de grau dois, obtendo 30.

No quarto passo, multiplicamos a raiz do divisor pelo resultado abaixo do termo de segundo grau e somamos com o coeficiente de grau um, e assim sucessivamente.

Portanto,

$$Q(t) = 7t^2 + 30t + 153$$

e

$$R(t) = 776.$$

Assim como no exemplo, onde $A(t) = 3t^5 - 5t^3 + 17$ e $B(t) = t + 2$, utilizaremos o algoritmo de Briot-Ruffini, para dividir $A(t)$ por $B(t)$, temos que

-2	3	0	-5	0	0	17
	3	$(-2)(-6) - 5 = 7$	$(-2)(7) + 0 = 14$	$(-2)(-14) + 0 = 28$	-39	

Logo, obtemos

$$Q(t) = 3t^4 - 6t^3 + 7t^2 - 14t + 28$$

e

$$R(t) = -39.$$

Exemplo 1.2.6. *Encontre o quociente e o resto da divisão de* $P(t) = -2t^3 + 3t^2 - 3t + 1$ *por* $D(t) = 3t - 1$.

Para que possamos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini, o coeficiente de t deve ser mônico, ou seja, tem que ser 1, assim devemos fazer algumas mudanças algebricamente de tal maneira que tenhamos o seguinte,

$$P(t) = D(t)Q(t) + R(t) \text{ (Teorema do Resto)}$$

então,

$$\begin{aligned} P(t) = (3t-1)Q(t) + R(t) \quad &\Longrightarrow \quad P(t) = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)Q(t) + R(t) \\ &\Longrightarrow \quad P(t) = \left(t - \frac{1}{3}\right)3Q(t) + R(t). \end{aligned}$$

Fazendo, $q(t) = 3Q(t)$, temos que

$$P(t) = \left(t - \frac{1}{3}\right) q(t) + R(t) \Longrightarrow -2t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = \left(t - \frac{1}{3}\right) q(t) + R(t).$$

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, obtém-se

$\frac{1}{3}$	-2	3	-3	1
	-2	$-\frac{2}{3}+3=\frac{7}{3}$	$\frac{7}{9}-3=-\frac{20}{9}$	$-\frac{20}{27}+1=\frac{7}{27}$

Logo, $q(t) = -2t^2 + \dfrac{7}{3}t - \dfrac{20}{9}$ e $R(t) = \dfrac{7}{27}$, sendo $q(t) = 3Q(t)$, obtemos

$$-2t^2 + \frac{7}{3}t - \frac{20}{9} = 3Q(t) \Longrightarrow Q(t) = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{7}{9}t - \frac{20}{27}.$$

Portanto,

$$Q(t) = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{7}{9}t - \frac{20}{27}$$

e

$$R(t) = 7.$$

Exemplo 1.2.7. *Para finalizar, efetuaremos a divisão de* $P(t) = 3t^4 - 2t^3 - t^2 + 1$ *por* $D(t) = (t+1)(t-3)$.

Solução: *Empregando o algoritmo de Briot-Ruffini, dividindo sucessivamente por* $(t+1)$ *e* $(t-3)$*, obtém-se*

	3	-2	-1	0	1
-1	3	$3(-1)-2=-5$	$(-1)(-5)-1=4$	$(-1)4+0=-4$	$(-1)(-4)+1=5$
3	3	$3\times 3-5=4$	$3\times 4+4=16$	$3\times 16-4=44$	

Concluímos que,

$$P(t) = (3t^3 - 5t^2 + 4t - 4)(t+1) + 5 \tag{1}$$

e

$$(3t^3 - 5t^2 + 4t - 4) = (3t^2 + 4t + 16)(t-3) + 44. \tag{2}$$

Realizando o processo de substituição de (2) *em* (1), *obtemos*

$$\begin{aligned} P(t) &= (3t^3-5t^2+4t-4)(t+1)+5 \\ &= ((3t^2+4t+16)(t-3)+44)(t+1)+5 \\ &= (3t^2+4t+16)(t-3)(t+1)+44(t+1)+5 \\ &= (3t^2+4t+16)(t-3)(t+1)+44t+44+5 \end{aligned}$$

e finalmente,

$$P(t) = (3t^2+4t+16)(t-3)(t+1)+44t+49.$$

Logo, o quociente é

$$Q(t) = 3t^2+4t+16,$$

obtido logo após a segunda etapa da divisão e o resto é,

$$R(t) = 44t+49.$$

Generalizando toda essa discussão anterior para um polinômio de grau $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$P(t) = a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + a_{m-2}t^{m-2} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Sejam,

$$Q(t) = b_{m-1}t^{m-1} + b_{m-2}t^{m-2} + \cdots + b_1 t + b_0$$

e

$$R(t) = r_0,$$

onde $Q(t)$ é o quociente e $R(t)$ é o resto da divisão de $P(t)$ por $(t-a)$.

Segue do Teorema do Resto que,

$$\begin{aligned} P(t) &= (t-a)Q(t)+R(t) \Longrightarrow \\ & a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + a_{m-2}t^{m-2} + \cdots + a_1 t + a_0 = (t-a)(b_{m-1}t^{m-1} + b_{m-2}t^{m-2} + \cdots \\ & +b_1 t + b_0) + r_0 \Longrightarrow \\ & a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + a_{m-2}t^{m-2} + \cdots + a_1 t + a_0 = b_{m-1}t^m + b_{m-2}t^{m-1} + \cdots + b_1 t^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+b_0t-(ab_{m-1}t_{m-1}+ab_{m-2}t^{m-2}+\cdots+ab_1t+ab_0)+r_0 \Longrightarrow\\
&a_mt^m+a_{m-1}t^{m-1}+a_{m-2}t^{m-2}+\cdots+a_1t+a_0=b_{m-1}t^m+b_{m-2}t^{m-1}+\cdots+b_1t^2\\
&+b_0t-ab_{m-1}t^{m-1}-ab_{m-2}t^{m-2}-\cdots-ab_1t-ab_0+r_0 \Longrightarrow\\
&a_mt^m+a_{m-1}t^{m-1}+a_{m-2}t^{m-2}+\cdots+a_1t+a_0=b_{m-1}t^m+(b_{m-2}-ab_{m-1})t^{m-1}+\cdots\\
&+(b_1-ab_2)t^2+(b_0-ab_1)t+(r_0-ab_0).
\end{aligned}
$$

Logo, igualando os coeficientes aos respectivos termos de $P(t)$, obtemos

$$
\begin{cases}
a_m & = & b_{m-1} & & & & \\
a_{m-1} & = & b_{m-2}-ab_{m-1} & \Longrightarrow & b_{m-2} & = & a_{m-1}+ab_{m-1}\\
a_{m-2} & = & b_{m-3}-ab_{m-2} & \Longrightarrow & b_{m-3} & = & a_{m-2}+ab_{m-2}\\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_2 & = & b_1-ab_2 & \Longrightarrow & b_1 & = & a_2+ab_2\\
a_1 & = & b_0-ab_1 & \Longrightarrow & b_0 & = & a_1+ab_1\\
a_0 & = & r_0-ab_0 & \Longrightarrow & r_0 & = & a_0+ab_0,
\end{cases}
$$

onde b_0 é o último coeficiente de $Q(t)$ e r_0 é o resto da divisão.

Portanto,

$$Q(t)=a_mt^{m-1}+(a_{m-1}+ab_{m-1})t^{m-2}+(a_{m-2}+ab_{m-2})t^{m-3}+\cdots+(a_2+ab_2)t+(a_1+ab_1)$$

e

$$R(t)=a_0+ab_0.$$

Os cálculos anteriores também podem ser descritos na forma genérica, pelo algoritmo de Briot-Ruffini, que tornam os cálculos bem mais práticos e fáceis, isto é,

a	a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
	b_{m-1}	b_{m-2}	b_{m-3}	$\cdots$	b_1	b_0	r_0,

onde

$$\begin{cases} b_{m-1} &= a_m \\ b_{m-2} &= a_{m-1}+ab_{m-1} \\ b_{m-3} &= a_{m-2}+ab_{m-2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_1 &= a_2+ab_2 \\ b_0 &= a_1+ab_1 \\ r_0 &= a_0+ab_0. \end{cases}$$

Na Divisão de $P(t)$ por $(t-a)$, sendo $P(t)$ de ordem m teremos $\lambda Q = m-1$ e $R(t) = r_0$, onde r_0 é um polinômio constante.

1.2.6 Relações entre raízes e os coeficientes de um polinômio

Iniciaremos essa seção relembrando como deduzir as expressões para as raízes de um polinômio $P(t)$ de grau 2, digamos

$$P(t) = at^2+bt+c, \text{ onde } a \neq 0.$$

Desejamos obter, portanto, as raízes da equação polinomial

$$at^2+bt+c=0$$

Resolvendo, temos que

1º passo: Dividimos a equação inteira por a, uma vez que $a \neq 0$, temos

$$0 = t^2+\frac{b}{a}t+\frac{c}{a} \Longrightarrow t^2+\frac{b}{a}t = -\frac{c}{a}$$

2º passo: Aqui completamos quadrados, ou seja, somamos $\frac{b^2}{4a^2}$ de ambos os membros da equação, assim, temos que

$$t^2+\frac{b}{a}t+\frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \Longrightarrow \left(t+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

3º passo: Apliquemos a operação de radiciação, de ambos os membros da equação, logo

$$
\begin{aligned}
\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
&\Longleftrightarrow \quad \left|t+\frac{b}{2a}\right|=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
&\Longleftrightarrow \quad t+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}\\
&\Longleftrightarrow \quad t=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&\Longleftrightarrow \quad t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.
\end{aligned}
$$

Portanto, obtemos

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ou

$$t_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Deduzidos tais expressões para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau, podemos obter as seguintes relações com os coeficientes de $P(t)$.

Corolário 1.5. *Se t_1 e t_2 são raízes do polinômio $P(t)=at^2+bt+c$, então são válidas as seguintes relações entre coeficientes e raízes*

$$t_1+t_2=-\frac{b}{a} \text{ e } t_1t_2=\frac{c}{a}$$

Demonstração: Sabemos das deduções feitas que

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

e

$$t_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Logo realizando as operações necessárias, obtemos que

$$t_1+t_2 \quad = \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
t_1t_2 &= \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\
&= \frac{b^2-b\sqrt{b^2-4ac}+b\sqrt{b^2-4ac}-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a}\\
&= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a},
\end{aligned}
$$

como desejado.

Nosso objetivo a partir de agora é avaliar a possibilidade de estender as relações acima para polinômios de grau três e quatro. Assim como o polinômio do segundo grau, os polinômios de terceiro e quarto graus também possuem fórmulas envolvendo apenas cálculos algébricos com os coeficientes e que indicam com precisão suas raízes. Apesar de existirem, tais expressões são bem complicadas e, na maioria das vezes, fornecem como resultado fórmulas muito complexas para as raízes, que impossibilita seu uso.

Évaristo Galois como matemático, em seus cinco anos de estudos e pesquisas, descobriu que é impossível formular uma expressão algébrica, para polinômios de grau maior ou igual a cinco que seja útil para determinar as raízes, utilizando somente os coeficientes.

Um matemático belga conhecido como Albert Girard, nascido no ano de 1595, em suas pesquisas descobriu que as relações entre coeficientes e raízes de um polinômio apresentadas acima podem ser generalizadas para polinômios de grau superior.

Analisaremos inicialmente os casos dos polinômio de terceiro e quarto graus, vamos aceitar o fato de conhecidas suas raízes e determinaremos as relações entre coeficientes e raízes.

Considere a expressão algébrica,

$$P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } t \in \mathbb{C},$$

assim definida caracteriza um polinômio do terceiro grau e $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}$ são suas raízes.

Sendo t_1, t_2 e t_3 raízes do polinômio $P(t)$ podemos reescrever o polinômio $P(t)$ na forma fatorada, de maneira que,

$$P(t) = a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) \Longleftrightarrow at_3 + bt_2 + ct + d = a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3).$$

Desenvolvendo o segundo membro da equação polinomial, obtemos

$$\begin{aligned} a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) &= a(t^2 - t_2t - t_1t + t_1t_2)(t-t_3) \\ &= a(t^2 - (t_1+t_2)t + t_1t_2)(t-t_3) \\ &= a[t^3 - t_3t^2 - (t_1+t_2)t^2 + t_3(t_1+t_2)t + t_1t_2t - t_1t_2t_3] \\ &= a[t^3 - (t_1+t_2+t_3)t^2 + (t_1t_3+t_2t_3+t_1t_2)t - t_1t_2t_3]. \end{aligned}$$

Logo, equiparando os coeficientes com seus respectivos termos, temos que

$$\begin{aligned} at_3 + bt_2 + ct + d &= a[t_3 - (t_1+t_2+t_3)t_2 + (t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)t - (t_1t_2t_3)] \Longleftrightarrow \\ t^3 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}t + \frac{d}{a} &= [t^3 - (t_1+t_2+t_3)t^2 + (t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)t - (t_1t_2t_3)]. \end{aligned}$$

Nessa última passagem dividimos a equação polinomial de ambos lados pelo coeficiente de maior grau, ou seja, pelo número real a, podemos fazer tal manipulação algébrica devido coeficiente a ser diferente de zero.

Utilizando a identidade polinomial entre os polinômios acima, tem-se

$$\begin{cases} -(t_1+t_2+t_3) = \dfrac{b}{a} & \Longrightarrow \quad t_1+t_2+t_3 = -\dfrac{b}{a} \\ t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3 & = \qquad \dfrac{c}{a} \\ -(t_1t_2t_3) = \dfrac{d}{a} & \Longrightarrow \quad t_1t_2t_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Portanto, as relações entre coeficientes e raízes para polinômios de grau três são,

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3 &= -\dfrac{b}{a} \\ t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3 &= \frac{c}{a} \\ t_1t_2t_3 &= -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Considere a expressão algébrica,

$$P(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } t \in \mathbb{C},$$

assim definida caracteriza um polinômio do quarto grau e t_1, t_2, t_3 e $t_4 \in \mathbb{C}$ são suas raízes.

Assim como descrito no caso anterior, pode se mostrar que as relações de Girard são as seguintes para polinômio de quarto grau

$$\begin{cases} -(t_1+t_2+t_3+t_4) = \dfrac{b}{a} & \Longrightarrow & t_1+t_2+t_3+t_4 = -\dfrac{b}{a} \\ (t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4) & = & \dfrac{c}{a} \\ -(t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4) = \dfrac{d}{a} & \Longrightarrow & t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4 = -\dfrac{d}{a} \\ t_1t_2t_3t_4 & = & \dfrac{e}{a}. \end{cases}$$

Como queríamos demonstrar.

Depois de ter feito todas essas considerações para polinômios de graus 2, 3 e 4, podemos generalizar as relações de Girard para um polinômio de grau $n \in \mathbb{N}$, arbitrário.

Considere um polinômio

$$P(t) = s_n t^n + s_{n-1}t^{n-1} + \cdots + s_1 t + s_0, \text{ com } s_n \neq 0$$

e suas raízes $t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{C}$ e nem todas distintas, escrevendo $P(t)$ na forma fatorada, obtém-se

$$\begin{aligned} P(t) = s_n(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{n-1})(t-t_n) \iff & s_n t^n + \cdots + s_1 t + s_0 = s_n(t-t_n)\cdots(t-t_1) \\ \iff & s_n t^n + \cdots + s_1 t + s_0 = \\ & = s_n(t^n + \cdots + (t_1t_2\cdots t_n)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} t^n + \frac{s_{n-1}}{s_n}t^{n-1} + \cdots + \frac{s_1}{s_n}t + \frac{s_0}{s_n} &= t^n - (t_1 + \cdots + t_n)t^{n-1} + \\ &+ (t_1t_2 + \cdots + t_{n-1}t_n)t^{n-2} + \cdots + (t_1t_2\cdots t_n) \end{aligned}$$

Portanto,

$$-(t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} + t_n) = \frac{s_{n-1}}{s_n} \iff t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} + t_n = -\frac{s_{n-1}}{s_n}$$

$$\iff \quad S_1 = -\frac{s_{n-1}}{s_n},$$

onde S_1 é a soma das n raízes de P.

$$t_1t_2 + t_2t_3 + \cdots + t_{n-1}t_n = \frac{s_{n-2}}{s_n} \iff S_2 = \frac{s_{n-2}}{s_n},$$

com S_2 sendo a soma dos produtos das n raízes de $P(t)$, tomadas duas a duas.

Em geral, para o termo t^{n-l}, onde $l < n$, tem-se o desenvolvimento de l fatores da forma $(-t_1)(-t_2)\cdots(-t_l)$ que é igual a $s_n((-1)^l)$. Se t_{n-l}, onde S_l é a soma dos produtos das n raízes de P, tomadas l a l, logo

$$S_k = (-1)^k \left(\frac{s_{n-k}}{s_n}\right).$$

E por fim, o termo s_0 é dado por:

$$t_1t_2\cdots t_n = \frac{s_0}{s_n} \iff S_n = (-1)^n \frac{s_0}{s_n},$$

onde S_n é o produto de todas raízes de P.

As relações de Girard proporcionam muitas aplicações aos polinômios, em particular se utilizadas com informações adicionais, possibilitam o cálculo das raízes.

Exemplo 1.2.8. *Determinemos as raízes do polinômio $P(t) = t^3 - \frac{7}{2}t^2 + \frac{7}{2}t - 1$, sabendo que uma das raízes é o produto das outras duas.*
Solução: *Se r_1, r_2 e r_3 são raízes do polinômio $P(t)$, tem-se das relações entre raízes e coeficientes que*

$$S_3 = (-1)^3 \frac{(-1)}{1} \iff r_1r_2r_3 = 1,$$

o exercício nos da que $r_1 = r_2r_3$.

Logo, obtemos

$$r_1r_2r_3 = 1 \Longrightarrow r_1r_1 = 1 \Longrightarrow r_1^2 = 1 \Longrightarrow r_1 = \pm 1 \Longrightarrow r_1 = 1 \textit{ ou } r_1 = -1.$$

Para $r_1 = -1$, tem-se

$$P(-1) = (-1)^3 - \frac{7}{2}(-1)^2 - \frac{7}{2} - 1 = -1 - \frac{7}{2} - \frac{7}{2} - 1 = -9 \neq 0,$$

logo, -1 não é raiz.

Conhecida uma raiz, vamos dividir os polinômios $P(t)$ por $t-1$, através do método de Briot-Ruffini, isto é

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
1 & 1 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\
\hline
 & 1 & 1-\frac{7}{2}=-\frac{5}{2} & -\frac{5}{2}+\frac{7}{2}=1 & 1-1=0
\end{array}$$

Assim, adquirimos o seguinte polinômio quociente

$$Q(t)=t^2-\frac{5}{2}t+1,$$

resolvendo a equação polinomial , $Q(t)=0$, obtém-se

$$\begin{aligned}
Q(t)=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad t^2-\frac{5}{2}t+1=0 \Longleftrightarrow t^2-\frac{5}{2}t+\frac{25}{16}+1=\frac{25}{16} \Longleftrightarrow t^2-\frac{5}{2}t+\frac{25}{16}=\frac{25}{16}-1\\
&\Longleftrightarrow \quad t^2-\frac{5}{2}t+\frac{25}{16}=\frac{9}{16} \Longleftrightarrow \left(t-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16} \Longleftrightarrow \left(t-\frac{5}{4}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{9}{16}}\right)\\
&\Longleftrightarrow \quad t-\frac{5}{4}=\pm\frac{3}{4} \Longleftrightarrow s_2=-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \ ou \ s_3=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2.
\end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução é

$$S=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ 2\right\}.$$

1.3 Teorema das raízes racionais

O teorema das raízes racionais fornece uma condição para um polinômio de coeficientes inteiros $P(t)=r_nt^n+r_{n-1}t^{n-1}+\cdots+r_1t+r_0$, possuir uma raiz racional $a|b$ (irredutível). Este importante resultado aliado aos outros métodos aqui apresentados auxilia na busca de todas as raízes racionais de um polinômio.

Teorema 1.3. *Se $\dfrac{a}{b}$ com $a,\ b\neq 0$ e $(a,b)=1$ for uma raiz do polinômio*

$$P(t)=r_nt^n+r_{n-1}t^{n-1}+\cdots+r_1t+r_0,$$

onde $r_n, r_{n-1},\cdots,r_1,r_0\in\mathbb{Z}$, então $b|r_n$ e $a|r_0$.

Notação: $(a,b)=1$ significa que a, b são primos entre si ou seja, $\dfrac{a}{b}$ é uma fração irredutível, já as notações $b|r_n$ e $a|r_0$ significam, respectivamente que b divide r_n e que a divide r_0.

Demonstração: Suponhamos que um número racional $\dfrac{a}{b}$, onde a, $b \in \mathbb{Z}^*$ e $(a,b)=1$, é uma raiz irredutível do polinômio

$$P(t) = r_n t^n + r_{n-1} t^{n-1} + \cdots + r_1 t + r_0,$$

então,

$$P\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \iff r_n \left(\frac{a}{b}\right)^n + r_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + r_1\left(\frac{a}{b}\right) + r_0 = 0.$$

Multiplicando os membros da igualdade por b^n, obtém-se

$$r_n\left(\frac{a}{b}\right)^n b^n + \cdots + r_1\left(\frac{a}{b}\right) b^n + r_0 b^n = 0 \iff r_n a^n + r_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + r_1 a b^{n-1} + r_0 b^n = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} r_n a^n &= -r_{n-1}a^{n-1}b - \cdots - r_1 a b^{n-1} - r_0 b^n \\ &\iff r_n a^n = -(r_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + r_1 a b^{n-1} + r_0 b^n) \\ &\iff r_n a^n = -b(r_{n-1}a^{n-1} + \cdots + r_1 a b^{n-2} + r_0 b^{n-1}) \\ &\iff r_n a^n = -bs, \end{aligned}$$

onde

$$s = (r_{n-1}a^{n-1} + \cdots + r_2 a^2 b^{n-3} + r_1 a b^{n-2} + r_0 b^{n-1}) \in \mathbb{Z},$$

como $(a,b)=1$ segue que $b|r_n$.

A igualdade acima também da

$$\begin{aligned} r_0 b^n &= -r_n a^n - \cdots - r_2 a^2 b^{n-2} - r_1 a b^{n-1} \\ &\iff r_0 b^n = -(r_n a^n + r_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + r_2 a^2 b^{n-1} + r_1 a b_{n-1}) \\ &\iff r_0 b^n = -a(r_n a^{n-1} + r_{n-1}a^{n-2}b + \cdots + r_2 a b^{n-2} + r_1 b^{n-1}) \\ &\iff r_0 b^n = -as', \end{aligned}$$

onde

$$s' = (r_n a^{n-1} + r_{n-1} a^{n-2} b + \cdots + r_2 a b^{n-2} + r_1 b^{n-1}) \in \mathbb{Z},$$

uma vez que $(a,b) = 1$ a igualdade acima da a/r_0.

Portanto, $b|r_n$ e $a|r_0$ como queríamos mostrar.

Observação 1.8. *O teorema das raízes racionais serve também quando os coeficientes são racionais.*

Demonstração: Seja,

$$Q(t) = \frac{a_n}{b_n} t^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} t^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{b_0},$$

onde

$$\frac{a_n}{b_n},\ \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}},\ \cdots,\ \frac{a_0}{b_0} \in \mathbb{Q}$$

e

$$a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_0,\ b_n,\ b_{n-1},\ \cdots,\ b_0 \in \mathbb{Z}$$

com

$$b_n,\ b_{n-1},\ \cdots,\ b_0 \neq 0.$$

Basta multiplicar $Q(t)$ pelo produto de todos os coeficientes do denominador, para gerar um polinômio $P(t)$ com coeficientes inteiros, logo

$$P(t) = \prod_{k=0}^{n} b_k \left(\frac{a_n}{b_n} t^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} t^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{b_0} \right) = bQ(t) \Longrightarrow P(t) = bQ(t),$$

onde

$$b = \prod_{k=0}^{n} b_k$$

e $b \neq 0$.

Portanto, teremos $P(t) = 0$ se, e somente se $Q(t) = 0$, pois $Q(t) = \frac{1}{b}P(t)$.

2 APLICAÇÕES

Neste cápitulo veremos como a teoria de divisibilidade de polinômios pode ser útil na obtenção de fatorações. As fatorações constituem uma ferramenta imprescindível para a Matemática em se tratando de cálculos algébricos. As aplicações envolvem desde o ensino básico até o superior com fatorações importantes para o Cálculo Diferencial e Integral e para a Teoria dos Números.

As aplicações que trataremos neste capítulo seguem basicamente do Teorema do Resto. Se a é raiz de um polinômio $P(x)$, então $P(x)$ é fatorado como produto de dois polinômios $P(x) = (x-a)D(x)$.

O fato da incógnita (ou indeterminada) x assumir um valor arbitrário, possibilita aplicações interessantes, desde problemas elementares do ensino médio até cálculos limites de funções e situações da teoria dos números.

No cálculo diferencial e integral, alguns dos limites interessantes são os da forma $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios, onde $g(a) = 0$. No caso em que temos também $f(a) = 0$, ou seja a é raiz simultânea de $f(x)$ e $g(x)$ então, aplicações do Teorema do Resto podem encaminhar a uma solução, como nos exemplos seguintes

Exemplo 2.0.1. *Calcule o limite da função racional* $P(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}$ *para x tendendo a* 1.

Demonstração: A função $P(x)$ pode ser fatorada da seguinte forma,

$$P(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x}{x+2}. \text{ com } x \neq 1$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}.$$

Assim como no exemplo anterior podemos utilizar o método de fatoração para calcular,

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}.$$

De fato, temos que

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+4)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-1)}{(x+4)}=-4.$$

A Teoria dos Números é construída sob o conceito de divisibilidade no conjunto dos números inteiros:

Dados a, b inteiros com $b\neq 0$, dizemos que $b|a$ se existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $a=kb$.

Não é propósito deste trabalho apresentar resultados de divisibilidade, mas desenvolver alguns casos que o Teorema do resto pode ser aplicado para a obtenção de resultados importantes para este tema.

As fatorações $x^2-1=(x-1)(x+1)$, $x^3-1=(x-1)(1+x+x^2)$ e, em geral, dos polinômios x^n-1 $(n\geq 2)$ são utilizadas frequentemente no ensino básico. No Cálculo, permitem a determinação de limites da forma $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$ e de modo geral para $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$ e em consequência conseguimos calcular as derivadas das funções $f(x)=x^n$. Apresentaremos a seguir uma sequência de aplicações para a divisibilidade em $\mathbb{Z}$.

Proposição 2.1. *Dados a e n números inteiros com $a\neq 1$ e $n\geq 1$, então $a-1$ divide a^n-1.*

Demonstração: De fato, considerando o polinômio $P(x)=x^n-1$, temos que $P(1)=0$, o que mostra termos 1 como raiz de $P(x)$. Portanto $P(x)$ é fatorável por $x-1$, obtemos

$$P(x)=(x-1)Q(x)=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1).$$

Observemos que se grau de $\lambda P\geq 2$ então $\lambda Q\geq 1$, ou seja a fatoração acima é não trivial. O fator $Q(x)$ segue um padrão conforme ainda veremos neste trabalho. O resultado segue trocando o elemento numérico $a\in\mathbb{Z}$ pela variável x, ou seja, atribuindo $x=a$, na igualdade acima.

Observemos que $a=-1$ no resultado anterior nos dá que -2 divide $(-1)^n-1$ o que é verdadeiro, pois a expressão $(-1)^n-1$ assume os valores -2 ou 0, conforme a paridade de n.

Proposição 2.2. *Sejam a e n números inteiros com n número natural ímpar. Tem-se que $a+1$ é* *um divisor de* $a^n + 1$.

Demonstração: O resultado segue, considerando o polinômio $P(x) = x^n + 1$. Temos que $P(-1) = 0$, o que mostra termos -1 como sendo raiz de $P(x)$. Portanto $P(x)$ é fatorável por $x - (-1) = x + 1$, o que resulta na existência de um polinômio $Q(x)$ de grau $n - 1$ tal que

$$P(x) = (x+1)Q(x) = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \cdots + x^2 - x + 1).$$

Tomando $x = a$, na igualdade acima, segue o resultado.

Corolário 2.1. *Observe que o resultado anterior também pode ser provado como consequência da primeira proposição.*

Demonstração: De fato, foi verificado que $b - 1$ divide $b^n - 1$, com b e n números inteiros, $b \neq 1$. Tomando $b = -a$ segue que $-a - 1$ divide $(-a)^n - 1$. Mas como n é impar segue que $-a^n - 1 = d(-a-1)$ para algum $d \in \mathbb{Z}$. Multiplicando esta igualdade por -1 segue o resultado desejado.

A extensão natural das análises que fizemos é obter as fatorações das expressões $a^n - b^n$ e $a^n + b^n$, com $a, b \in \mathbb{N}$, que trataremos a seguir.

Proposição 2.3. *Sejam* $a \neq b \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *então* $a^n - b^n$ *é fatorável por* $a - b$.

Demonstração: Seja o polinômio P na variável x tal que $P(x) = x^n - b^n$, com $b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Para $x = b$, tem-se que $P(x) = b^n - b^n = 0$, ou seja, b é raiz do polinômio $P(x)$, logo $P(x)$ é fatorável por $(x - b)$, do **teorema do resto** temos que, $P(x) = (x - b)Q(x)$, para algum polinômio $Q(x)$ não nulo, isto implica que $x^n - b^n = (x - b)Q(x)$, em particular para $x = a$, obtemos que $(a - b)|a^n - b^n$.

Corolário 2.2. *Mostre que* $9^n - 2^n$ *é divisível por* 7 *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Pela proposição 2.3 temos que, para o caso particular em que $a = 9$ e $b = 2$, obtemos $a^n - b^n = 9^n - 2^n$ é divisível por $a - b = 9 - 2 = 7$.

Proposição 2.4. *Sejam* $a \neq b \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *então* $a^n + b^n$ *é fatorável por* $a + b$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* n *ímpar.*

Demonstração: Seja o polinômio P na variável x tal que $P(x) = x^n + b^n$, onde $b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Para $x = -b$, obtém-se $P(-b) = (-b)^n + b^n = -b^n + b^n = 0$, pois n é ímpar, isto é, $-b$ é raiz do polinômio $P(x)$.

Logo $P(x)$ é fatorável por $(x - (-b)) = (x + b)$, do **teorema do resto** temos que, $P(x) = (x+b)Q(x)$, para algum polinômio $Q(x)$ não nulo, isto implica que $x^n + b^n = (x+b)Q(x)$, em particular para $x = a$, obtemos que $(a+b)|a^n + b^n$.

Corolário 2.3. *A proposição anterior pode ser demonstrada a partir da **proposição 2.3**.*

Demonstração: De fato sabemos que $a - c|a^n - c^n$ para todo a e c com $a \neq c$. Em particular com $c = -b$ temos que, $a - (-b) = a + b$ e que $a^n - (-b)^n = a^n + b^n$, essa segunda igualdade se da pelo fato de n ser impar, portanto assim como demonstrado na proposição anterior temos $a + b|a^n + b^n$.

Corolário 2.4. *Verifique que $7^n + 4^n$ é divisível por 11 para todo $n \in \mathbb{N}$, n ímpar.*

Demonstração: Trata-se de uma aplicação direta da proposição anterior, com $a = 7$ e $b = 4$, obtemos que $a^n + b^n = 7^n + 4^n$ é divisível por $a + b = 7 + 4 = 11$.

Proposição 2.5. *Sejam $a \neq b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $a^{2n} - b^{2n}$ é fatorável por $a + b$.*

Demonstração: Seja o polinômio P na variável x tal que $P(x) = x^{2n} - b^{2n}$, com $b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Para $x = -b$, tem-se que $P(-b) = (-b)^{2n} - b^{2n} = b^{2n} - b^{2n} = 0$, ou seja, $-b$ é raiz do polinômio $P(x)$, logo $P(x)$ é fatorável por $(x - (-b)) = (x + b)$, do **teorema do resto** temos que, $P(x) = (x+b)Q(x)$, para algum polinômio $Q(x)$ não nulo, isto implica que $x^{2n} - b^{2n} = (x+b)Q(x)$, em particular para $x = a$, obtemos que $(a+b)|a^{2n} - b^{2n}$.

Observação 2.1. *Observemos que $a = -1$ e $b = -1$ no resultado das proposições anteriores nos dá que $(-1)^n + (-1)^n$ é divisível por $(-1) + (-1) = -2$ o que é verdadeiro, pois a expressão $(-1)^{2n} + (-1)^{2n}$ assume os valores de -2 ou 0, conforme a paridade de n.*

Corolário 2.5 (Identidade de Sophie-Germain)**.**

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab). \end{aligned}$$

Nas proposições anteriores exibimos aplicações sem considerar o fator quociente das fatorações. Vamos obter as fatorações completas utilizando indução finita e método alternativos algébricos acessível aos alunos do ensino médio.

Proposição 2.6. *Para todos $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, vale*

$$a^n - 1 = (a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}).$$

Demonstração: Existem diversas formas de verificarmos a identidade acima.

1. Primeiro método:

   $1+a+\cdots+a^{n-1}$ pode ser visto como a soma S_a dos a primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão $a \neq 1$.

   Temos $S = 1+a+\cdots+a^{n-1}$ e então $aS = a+a^2+\cdots+a^n$.

   Efetuando a subtração das duas expressões acima, temos

   $$S - aS = (1+a+\cdots+a^{n-1}) - (x+x^2+\cdots+a^n) = 1-a^n.$$

   Logo, $S(1-a) = 1-a^n$ e então $S = \dfrac{1-a^n}{1-a} = \dfrac{a^n-1}{a-1}$, ou seja, $(1+a+\cdots+a^{n-1})(a-1) = a^n-1$.

2. Segundo método:

   Desenvolvendo diretamente o lado esquerdo temos

   $$\begin{aligned} (a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}) &= a(1+a+a^2+\cdots+a^{n-3}+a^{n-2}+a^{n-1})+ \\ -(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-2}+a^{n-1}) &= a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-2}+a^{n-1}+a^n+ \\ -1-a-a^2-a^3-\cdots-a^{n-2}-a^{n-1} &= a^n-1. \end{aligned}$$

   Logo,

   $$a^n - 1 = (a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})$$

3. Terceiro método usando indução sobre n:

   Para o caso inicial $n=1$, temos que

   $$n=1 \Longrightarrow (a-1)(a^{1-1}) = (a-1)a^0 = a-1 \Longrightarrow (a^1-1) = (a-1).$$

Suponhamos que a igualdade seja verdadeira para $n = k$, isto é,

$$(a^k - 1) = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1})$$

e vamos mostrar a validade para $n = k+1$, ou seja,

$$(a^{k+1} - 1) = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1} + a^k).$$

De fato, partindo do lado esquerdo da igualdade, obtemos que

$$\begin{aligned}
(a^{k+1} - 1) &=^1 a^k a - a + a - 1 \\
&=^2 a(a^k - 1) + a - 1 \\
&=^3 a[(a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1})] + (a-1) \\
&= (a-1)(a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{k-1} + a^k) + (a-1) \\
&= (a-1)(1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^{k-1} + a^k).
\end{aligned}$$

Portanto, $(a^{k+1} - 1) = (a-1)(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{k-1} + a^k)$.

Observação 2.2. *Na igualdade* 1 *somamos e subtraímos o valor de a, já na igualdade* 3 *usamos a hipótese de indução.*

Corolário 2.6. *Fazendo $a = 2$ na proposição anterior, segue de imediato o seguinte*

$$2^n - 1 = 2^n - 1^n = (2-1) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \times 1^{(n-1)-k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k.$$

.

Vimos no capitulo anterior que para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq b$, $(a-b) | (a^n - b^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vamos obter agora o fator quociente $Q(a) = \dfrac{a^n - b^n}{a - b}$ da fatoração. Utilizaremos a proposição 2.6 provado acima.

Proposição 2.7. *Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,*

$$a^n - b^n = (a-b)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

Demonstração: Para $b = 0$, tem-se

$$a^n - 0^n = (a-0)(0^{n-1} + 0^{n-2}a + \cdots + 0a^{n-2} + a^{n-1}) \Longrightarrow a^n = a(a^{n-1}) = a^n.$$

Agora suponhamos $b \neq 0$, temos que

$$a^n - b^n = b^n \left[\frac{a^n}{b^n} - 1\right] = b^n \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right],$$

segue da proposição **2.6**, que $\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right)\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}\right)$.

Logo, obtemos

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= b^n \left[\frac{a^n}{b^n} - 1\right] = b^n \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right] = b^n \left(\frac{a}{b} - 1\right)\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}\right) \\
&= \left(\frac{a}{b} - 1\right)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots + ba^{n-1}) \\
&= \left(\frac{a-b}{b}\right)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}x^2 + \cdots + b^2a^{n-2} + ba^{n-1}) \\
&= \frac{1}{b}(a-b)(b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots + b^2a^{n-2} + ba^{n-1} \\
&= (a-b)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}),
\end{aligned}$$

como o polinômio $P(x) = a^n - b^n$ pode ser fatorado em um produto do tipo $(a-b)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1})$, então $(a-b)$ é um divisor de $P(a)$.

Para obtermos a fatoração completa de expressões $a^n + b^n$, enunciamos a seguinte

Proposição 2.8. *Para todos a, $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ ímpar,*

$$a^n + b^n = (a+b)(b^{n-1} - b^{n-2}a + \cdots - ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

Demonstração: Para a, $c \in \mathbb{R}$, temos pela proposição 2.7 que $a^n - c^n = (a-c)(c^{n-1} + c^{n-2}a + \cdots + ca^{n-2} + a^{n-1})$. Em particular com $c = -b$ temos que,

$$a^n - (-b)^n = a^n + b^n$$

e como segue que

$$((-b)^{n-1}+(-b)^{n-2}a+\cdots+(-b)a^{n-2}+a^{n-1})=(b^{n-1}-b^{n-2}a+\cdots-ba^{n-2}+a^{n-1}),$$

pois n é ímpar. Portanto, $(a^n+b^n)=(a+b)(b^{n-1}-b^{n-2}a+\cdots-ba^{n-2}+a^{n-1})$.

Exemplo 2.0.2. *Para todos a, $b\in\mathbb{Z}$ e $n\in\mathbb{N}$, com n ímpar, $(a+b)$ divide a^n+b^n.*

Demonstração: Em particular se $a=10$ e $b=1$, segue que todos os números $10^{2n+1}+1$ são divisíveis por 11, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Na sequência apresentamos uma desigualdade que estabelece uma comparação entre uma soma e uma expressão fatorada por um produto. Possui utilização diversas na análise funcional e também utilizada na resolução de problemas de olimpíadas de Matemática

Exemplo 2.0.3. *Para quaisquer $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n\in\mathbb{R}$, tem-se*

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

ou seja,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

É válida a igualdade se, e somente se, as sequências $(a_1,\ a_2,\cdots,a_n)$ e $(b_1,\ b_2,\cdots,\ b_n)$ forem proporcionais, isto é, $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$.

Demonstração: Consideremos o trinômio quadrado

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-xb_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2-2x\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+x^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

Como,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-xb_k)^2\geq 0,$$

então o discriminante da equação acima deve ser não-positivo, isto é

$$\Delta=\left(-2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-4\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\leq 0\Longrightarrow\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)$$

ou

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a_k - xb_k = 0$, para todo $k = 1,\ 2, \cdots,\ n$, ou seja, se, e somente se, $x = \dfrac{a_k}{b_k}$, quaisquer que seja $k = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n$, isto é equivalente a
$x = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

3 CONCLUSÃO

Ao longo do trabalho desenvolvemos os conceitos básicos relativos a teoria dos polinômios de uma variável e como os mesmos podem ser utilizados para obter fatorações importantes. A utilização de fatorações é muito frequente em todos os níveis de escolaridade da Matemática e, em muitas situações, constituem a saída mais curta e viável para resolução de problemas. Muitos problemas de geometria, por exemplo, são equacionados e as conclusões podem ser estabelecidas a partir de uma expressão fatorada. A partir da teoria básica de polinômios, apresentamos uma técnica para identificar fatorações de expressões algébricas e, em consequência, descrevemos aplicações interessantes para a Teoria dos Números. Destacamos que, não apenas fatorações envolvendo igualdades são importantes para deduções na matemática, mas, inclusive, fatorações dadas por desigualdades, como ilustrado ao longo do trabalho.

APÊNDICE A - ALGUMAS FATORAÇÕES ESPECIAIS DE POLINÔMIOS

No capitulo anterior vimos algumas aplicações envolvendo divisibilidade de números inteiros na qual podemos utilizar o conceito de fatoração de polinômios para demonstrar algumas proposições. Nessa seção mostraremos essas mesma proposições citadas anteriormente utilizando o método de indução finita, ou seja, o quarto axioma de **Peano**.

Vejamos alguns teoremas e suas demonstrações baseado em (HEFEZ.):

Teorema 3.1. *Sejam $\beta \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. O polinômio*

$$P(t) = t^n - \beta^n$$

é divisível pelo polinômio mônico

$$D(t) = t - \beta.$$

Demonstração: Mostraremos tal fato por indução sobre n, a afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois

$$t^1 - \beta^1 = t - \beta$$

que é divisível por $(t - \beta)$.

Suponhamos, que a afirmação seja verdadeira para um certo $n = k$, ou seja,

$$t - \beta | t^n - \beta^n \Longrightarrow t - \beta | t^k - \beta^k \Longrightarrow t^k - \beta^k = (t - \beta)L(t),$$

para algum polinômio $L(t)$ não nulo.

Provaremos que o argumento é válido para $n = k + 1$.

Temos

$$\begin{aligned} t^{k+1}-\beta^{k+1} &= t^k t-\beta^k\beta = ((t-\beta)L(t)+\beta^k)t+\beta^k\beta = (t-\beta)L(t)t+\beta^k t-\beta^k\beta \\ &= (t-\beta)L(t)t+(t-\beta)\beta^k = (t-\beta)(L(t)t+\beta^k) = (t-\beta)P'(t), \end{aligned}$$

onde $P'(t) = (L(t)t+\beta^k)$.

Portanto, obtemos que o polinômio mônico $t-\beta$ divide o polinômio $P(t) = t^n-\beta^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2. *Sejam $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Polinômio Mônico*

$$D(t) = t+\alpha$$

divide o polinômio

$$P(t) = t^{2n+1}+\alpha^{2n+1}.$$

Demonstração: Mostraremos tal fato por indução sobre n, a afirmação é verdadeira para $n = 0$, pois o polinômio mônico $t+\alpha$ divide o polinômio

$$t^{2.0+1}+\alpha^{2.0+1} = t^1+\alpha^1 = t+\alpha.$$

Suponhamos, que a afirmação seja verdadeira para um certo $n = k$, ou seja,

$$t+\alpha|t^{2n+1}+\alpha^{2n+1} \quad\Longrightarrow\quad t+\alpha|t^{2k+1}+\alpha^{2k+1} \Longrightarrow t^{2k+1}+\alpha^{2k+1} = (t+\alpha)M(t),$$

para algum polinômio $M(t) \neq 0$.

Provaremos que o argumento é válido para $n = k+1$.

Temos

$$\begin{aligned} t^{2k+3}+\alpha^{2k+3} &= t^{2k+1}t^2+\alpha^{2k+1}\alpha^2 = ((t+\alpha)M(t)-\alpha^{2k+1})t^2+\alpha^{2k+1}\alpha^2 \\ &= (t+\alpha)M(t)t^2-\alpha^{2k+1}t^2+\alpha^{2k+1}\alpha^2 = (t+\alpha)M(t)t^2+\alpha^{2k+1}(\alpha^2-t^2) \\ &= (t+\alpha)M(t)t^2-\alpha^{2k+1}(t^2-\alpha^2) = (t+\alpha)M(t)t^2-\alpha^{2k+1}(t-\alpha)(t+\alpha) \\ &= (t+\alpha)(M(t)t^2-\alpha^{2k+1}(t-\alpha)) = (t+\alpha)L(t), \end{aligned}$$

onde $L(t) = (M(t)t^2-\alpha^{2k+1}(t-\alpha))$.

Portanto, obtemos que o polinômio $P(t) = t^{2n+1}+\alpha^{2n+1}$ é divisível por $D(t) = t+\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Observação 3.1. *Uma raiz para o polinômio*

$$P(t) = t^{2n+1} + \alpha^{2n+1},$$

será $t = -\alpha$, pois substituindo no polinômio $P(t)$, obtemos

$$P(-\alpha) = (-\alpha)^{2n+1} + \alpha^{2n+1} = -\alpha^{2n+1} + \alpha^{2n+1} = 0,$$

já que, o expoente $2n+1$ é um número sempre ímpar, não importando qual valor se atribua para n, qualquer que seja $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Isto é, do Teorema do Resto, existem únicos polinômios $Q(t)$ e $R(t)$ tais que

$$P(t) = D(t)Q(t) + R(t) \Longrightarrow P(t) = D(t)Q(t),$$

com

$$Q(t) = t^{2n} - \alpha t^{2n-1} - \alpha^2 t^{2n-2} - \cdots - \alpha^{2n-2} t^2 - \alpha^{2n-1} t + \alpha^{2n} \text{ e } R(t) = 0,$$

onde 0 é o polinômio identificamento nulo.

Logo,

$$\begin{array}{rcl} P(t) & = & D(t)Q(t) + R(t) \Longrightarrow \\ t^{2n+1} + \alpha^{2n+1} & = & (t+\alpha)(t^{2n} - \alpha t^{2n-1} - \alpha^2 t^{2n-2} - \cdots - \alpha^{2n-2} t^2 - \alpha^{2n-1} t + \alpha^{2n}) \Longrightarrow \\ t^{2n+1} + \alpha^{2n+1} & = & (t+\alpha)(t^{2n} - \alpha t^{2n-1} - \alpha^2 t^{2n-2} - \cdots - \alpha^{2n-2} t^2 - \alpha^{2n-1} t + \alpha^{2n}) \Longrightarrow \\ D(t)|P(t). & & \end{array}$$

Teorema 3.3. *Sejam $\rho \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que o polinômio*

$$D(t) = t + \rho$$

divide

$$P(t) = t^{2n} - \rho^{2n}.$$

Demonstração: Usaremos indução sobre n, a afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois o polinômio

$$P(t) = t^2.1 - \rho^2.1 = t^2 - \rho^2$$

é divisível por

$$D(t) = t + \rho.$$

De fato,

$$\begin{array}{c|c|c|c}
-\rho & 1 & 0 & -\rho^2 \\
\hline
 & 1 & -\rho+0=-\rho & \rho^2-\rho^2=0
\end{array}$$

Do Teorema do resto existem $Q(t)$ e $R(t)$ únicos tais que

$$P(t) = D(t)Q(t) + R(t) \Longrightarrow t^2 - \rho^2 = (t+\rho)(t-\rho) + 0,$$

onde

$$Q(t) = t - \rho$$

e

$$R(t) = 0 \text{ (polinômio identicamente nulo).}$$

Suponhamos, que a afirmação seja verdadeira para um certo $n = k$, ou seja,

$$t+\rho | t^{2n} - \rho^{2n} \Longrightarrow t+\rho | t^{2k} - \rho^{2k} \Longrightarrow t^{2k} - \rho^{2k} = (t+\rho)N(t),$$

para algum polinômio $N(t) \neq 0$.

Provaremos que o argumento é válido para $n = k+1$.

Temos

$$\begin{aligned}
t^{2k}t^2 - \rho^{2k}\rho^2 &= ((t+\rho)N(t) + \rho^{2k})t^2 - \rho^{2k}\rho^2 = (t+\rho)N(t)t^2 + \rho^{2k}t^2 - \rho^{2k}\rho^2 \\
&= (t+\rho)N(t)t^2 + \rho^{2k}(t^2 - \rho^2) = (t+\rho)N(t)t^2 + \rho^{2k}(t-\rho)(t+\rho) \\
&= (t+\rho)(N(t)t^2 + \rho^{2k}(t-\rho)) = (t+\rho)S(t),
\end{aligned}$$

onde $S(t) = N(t)t^2 + \rho^{2k}(t-\rho)$.

Portanto, obtemos que o polinômio $t+\rho$ divide o polinômio $P(t) = t^{2n} - \rho^{2n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.0.1. *Vamos determinar para quais valores de $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ o número $a+2$ divide o número a^4+2, vamos resolver este problema usando a teoria dos polinômios.*

Demonstração: Consideramos os polinômios $P(x) = x^4 + 2$ e $D(x) = x + 2$, usando o **Teorema A.3**, obtém-se que

$$x + 2 | x^4 - 2^4 = x^4 - 16.$$

Dividindo o polinômio $P(x)$ por $D(x)$, obtemos que

-2	1	0	0	0	2
	1	-2.1+0=-2	(-2).(-2)+0=4	(-2)4+0=-8	(-2)(-8)+2=18

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \text{ e } R(x) = 18.$$

Do **Teorema do Resto**, temos que

$$\begin{aligned} P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \quad &\Longrightarrow \quad x^4 + 2 = (x+2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) + 18 \\ &\Longrightarrow \quad x^4 + 2 = (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 2x^3 - 4x^2 + 8x - 16) + 18 \\ &\Longrightarrow \quad x^4 + 2 = (x^4 - 16) + 18. \end{aligned}$$

Logo, $x + 2 | x^4 + 2$, se e somente se, $x + 2 | 18$, pois $R(x) = 18$, em particular para $x = a$, temos que $a + 2 | a^4 + 2$, se e somente se, $a + 2 | 18$.

Assim, ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9, $\pm 18 = a + 2$, com $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Portanto, obtemos o conjunto solução $S = \{0,\ 1,\ 4,\ 16\}$.

REFERÊNCIAS

MORGADO, Augusto C., CARVALHO, Paulo C. P. *Matemática Discreta, Coleção Profmat, SBM, 2015.*

CAMINHA, A. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2012.*

ACTON, F.S. Numerical methods that work. Washington: *The Mathematical Association of America, 1990.*

BARBEAU, E.J. Polynomials. *New York: Springer-Verlag, 1989.*

MILLER, Charles D., LIAL Margaret L. E SCHNEIDER David L.: Fundamentos da Faculdade de Álgebra. *Scott & Foresman/Little & Brown Ensino Superior, 3º edição, 1990, ISBN 0-673-38638-4, PP. 216-221.*

DOMINGUES, Hygino H. e YEZZI, Gelson. *Álgebra Moderna. 4ª Ed. São Paulo: Atual 2003.*

HEFEZ, Abramo. Aritmética. *Rio de Janeiro: SBM, 2014.*

IEZZI, Gelson e MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 1. São Paulo: Atual Editora, 2006.*

IEZZI, Gelson. Os Fundamentos da Matemática Elementar, *Volume 6: Complexos, Polinômios, Equações. São Paulo, Atual Editora, 2012.*

LIMA, Elon Lajes. A Matemática do Ensino Médio, vol. 1 Rio de Janeiro: *Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.*

LIMA, Elon Lages, Análise Real, Vol. 1, 8ª. edição, *Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.*

LIMA, Elon L; Carvalho, Paulo C. P; Morgado, Augusto C.; Wagner, Eduardo. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2. Editora SBM, Rio de Janeiro (2006).*

LIMA, Elon L; Carvalho, Paulo C. P; Morgado, Augusto C.; Wagner, Eduardo. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1. Editora SBM, Rio de Janeiro (2012).*

COSTA, Keilla Renata. "Paolo Ruffini". *Disponível em https://brasilescola.uol.com.br/biografia/paolo-ruffini.htm*

"Paolo Ruffini", P. Só Matemática. Disponível em *https://www.somatematica.com.br/biograf/ruffini.php*

ANDRADE, L. N. "Uma Generalização de Briot-Ruffiini RPM 34"; *RPM 34. Disponível em*

<www.rpm.org.br/cdrpm/34/3.htm>

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. "Teorema da decomposição de um polinômio"; Brasil Escola. Disponível em *<https://brasilescola.uol.com.br/matematica/teorema-decomposicao-um-polinomio>*

PARENTE, Ulisses L. e NETO, Antônio C. M. "Expressões Algébricas e Polinômios"; Portal da OBMEP do Saber. Disponível em *<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=13>*

BONELLI, Rebeca Cristina, *Desigualdades matemática e aplicações. Dissertação (mestrado) - Instituto de Geociência e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2017 114 f.*

"Divisão de um polinômio por $(x-a)$ e $(x-b)$". Só Matemática. Disponível em *https://www.somatematica.com.br/emedio/polinomios/polinomios7.php*

"Dispositivo Pratico de Briot-Ruffini". Só Matemática. Disponível em *https://www.somatematica.com.br/emedio/polinomios/polinomios8.php*

TAVARES, Américo. "Desigualdade de Cauchy-Schwarz". Disponível em *https://problemasteoremas.wordpress.com/2008/08/18/desigualdade-de-cauchy-schwarz/*