UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA PROFMAT

ANTONIO GARCIA SOBRINHO JUNIOR

INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS PARA O ENSINO MÉDIO

VITÓRIA
2019

ANTONIO GARCIA SOBRINHO JUNIOR

INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

VITÓRIA

2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro a Deus por ter me dado saúde e perseverança, pois nos momentos mais difíceis, de desespero e fraqueza foi dele que veio a solução.

Agradeço imensamente aos meus pais que embora sem terem tido um diploma sempre me incentivaram ao estudo. Ao meu pai Antonio Garcia Sobrinho que sempre amou a leitura e o conhecimento, que serviu como exemplo para mim. À minha mãe Diana da Silva Amorim que sempre me deu valores e nunca mediu esforços e nem incentivo pra que eu prosseguisse meus estudos.

Agradeço aos meus irmãos Jhones Garcia Mattos e Daniel Garcia Amorim que sempre estiveram ao meu lado, sempre ouvintes aos meus desabafos, prontos a dar um conselho e uma palavra de conforto e esperança.

Agradeço ao meu orientador e Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva que tive o prazer de ser aluno na graduação e no mestrado, agradeço pelas ricas contribuições não só para dissertação, mas para minha formação profissional.

Agradeço aos professores doutores que constituíram a banca examinadora pelas ricas contribuições que deram ao fim desse trabalho. Em especial ao Prof. Dr. Moacir Rosado Filho pela sugestão do tema e pelas ricas contribuições no desenvolver do trabalho.

Agradeço a minha amiga e namorada Thais Scardua Rangel que pegou o fim dessa jornada, mas que contribuiu de forma imensurável, sendo minha companheira, me dando força, conselhos e suporte tecnológico na formatação desse trabalho.

Agradeço ao meu amigo Prof. M.e Domingos Rodrigues Souza Junior que embora tenha o conhecido na parte final desse trabalho contribuiu de modo inexplicável, mostrando grande empatia, me dando grande suporte com sua grande experiência.

Enfim, agradeço aqueles de forma direta ou indireta contribuíram para que este trabalho e esta etapa profissional da minha vida fossem finalizadas.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo propor ao professor de Matemática um material de apoio para o ensino da Teoria de Grafos no ensino médio. Tal assunto, embora apareça no currículo básico comum da Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo, quase não é ensinado e há pouco material disponível para ensino deste conteúdo. Objetiva também ser um material de apoio a estudantes do ensino básico que se interessem em estudar mais a fundo a Matemática, pois o trabalho traz muitos problemas interessantes e que abordam assuntos que não são tratados em ambiente escolar. Serão apresentados em quatro capítulos uma abordagem da parte inicial e importante da Teoria. Os capítulos têm a perspectiva metodológica de Resolução de Problemas. Os problemas são usados para introduzir conceitos, aguçar a curiosidade e conjecturar resultados que, depois de demonstrados, são usados para aplicá-los. Para cada problema é trazido a solução, discussão e, às vezes, um comentário metodológico dirigido ao professor.

Palavras-chave: Material de apoio – Teoria de Grafos – Resolução de problemas – Ensino médio.

ABSTRACT

This paper aims proposing the mathematics teachers some material to help the teaching the Theory of Graphs in high school. Although this topic is provided in the common basic curriculum from the educational department of the state of Espírito Santo, it is still barely taught and there is little available material to teach its content. It also intends being assistance to high schoolers who are interested in further studying the subject due to the fact that the present paper arises many interesting matters beyond the school environment. An initial and very important part of the Theory will be presented along four chapters wich the methodological perspective of Problem Solving. The Problems are used to introduce ideas, to whet curiosity and to infer results that, after achieved, will be applied. To each problem there is a solution, discussion and eventually a methodological comment to the targeted teacher.

Keywords: Support material - Graph Theory - Problem solving - High school.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Diferente do que muitos pensam, a Matemática é um campo da ciência que está em permanente evolução e que se constituiu ao longo da história pela necessidade do homem de intervir no meio em que vive, organizando-o e ampliando seus próprios conhecimentos. A Matemática é mais que conjecturas, teoremas e demonstrações que se encerram em si mesmas, não é algo que diz respeito somente aos números, mas sim à vida, lida com ideias e instiga a criatividade.

Nesse sentido, o documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2006 do MEC, em seu volume 2, diz que:

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica. (p.69 e 70)

Nesse mesmo documento encontramos uma referência mais explícita ao tratamento da Matemática Discreta onde é mencionado a Teoria de Grafos, objeto de estudo deste trabalho, porém sugerida como tema complementar:

> Desse processo decorre um desenvolvimento significativo da área de combinatória, que é a Matemática dos conjuntos finitos. No ensino médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas* interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: “Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?” Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema,via estrutura de grafo – no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um

> segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade. (p. 94)
> *No problema original, são sete pontes.

No ano de 2010 foi implantado pela Secretaria da Educação do Estado do Espírito Santo (SEDU) em todas as escolas da rede o novo Currículo Básico Comum (CBC), em cuja versão apareceu pela primeira vez a Teoria de Grafos como conteúdo do currículo. Foi inserido na 2ª série do ensino médio o conteúdo "Introdução à Teoria dos Grafos" (p.120) e na 3ª série do ensino médio "Resolução de problemas utilizando grafos" (p. 122). No site da SEDU foi disponibilizado o CBC e outros documentos que dividem o conteúdo anual proposto pelo CBC em frações trimestrais. Um desses arquivos trata do ensino médio regular e nele foi observado que o tema "Introdução a Teoria dos Grafos" não foi inserido, apresentando, assim, uma inconsistência com o CBC.

Esse avanço em relação à inserção do conteúdo de Teoria dos Grafos no ensino médio reforça que a teoria auxilia na resolução de vários problemas que às vezes parecem não estar relacionados, mas que a teoria traz uma boa estratégia de resolução. Podemos destacar também que os Grafos são interessantes por si só.

O currículo de Matemática vem sofrendo alterações no decorrer dos anos, mas são encontradas algumas dificuldades na sua implantação. Uma dificuldade se dá pelo fato de os livros didáticos não contemplarem todo conteúdo do currículo, a teoria de grafos é um exemplo de conteúdo que não é tratado em tais materiais. Embora o livro didático seja mais um material de apoio para o professor e para o aluno, há escolas com poucos recursos e o livro didático passa a ser quase o único material de apoio e única fonte de informação. Outra dificuldade encontrada pelos professores de Matemática do ensino médio se dá ao ensinar o conteúdo e fazer com que os estudantes desenvolvam todas as habilidades, chamadas de descritores, que são avaliados pelo Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo - Trimestral (Paebes-tri), pois as habilidades avaliadas em cada trimestre às vezes não coincidem com as habilidades do CBC planejados para aquele trimestre. O Paebes-tri são avaliações de Português e Matemática que são aplicadas em cada trimestre a todos os alunos do ensino médio, e tem por objetivo acompanhar, trimestralmente, o desempenho dos estudantes. Esses são alguns motivos que levam os professores a não trabalharem todo conteúdo do CBC, pois dão preferência àqueles que serão cobrados nas avaliações externas, criando, assim, uma ordem de prioridade entre os assuntos.

A Teoria de Grafos é rica e bela, pois surgiu de uma curiosidade, de um problema contextualizado em um momento da história. São os problemas que impulsionaram o surgimento da Teoria e da sua sistematização. Nesse sentido a Teoria de Grafos proporciona ao estudante a possibilidade da descoberta, da criatividade, da originalidade, da persistência e da busca por estratégia adequada para resolver os problemas. Em alguns casos, na resolução de problemas utilizando grafos, não há necessidade de recorrer a conhecimentos matemáticos formais ou a muitos pré-requisitos, o que torna a teoria algo leve, mas, ao mesmo tempo, desafiadora.

As ideias iniciais sobre Grafos são bem simples e podem ser abordadas já nas séries finais do ensino fundamental, ou seja, no 8º e 9º ano, mas existem várias situações reais em que sua compreensão e aplicabilidade são bem complexas. Podemos destacar que há aplicações dessa teoria em diversas áreas, como por exemplo, informática, engenharia, química, psicologia e indústria.

O CBC do estado do Espírito Santo não deixa claro o que deve ser estudado na introdução à teoria dos grafos, ou seja, não está explícito até que parte da teoria é considerada introdução. Esse trabalho traz um material de apoio para o professor introduzir esse tema.

A Teoria dos Grafos é assunto novo para muitos professores de Matemática do ensino básico e até mesmo para alguns que já lecionam para o ensino superior. Há cinco anos eu ensino Matemática em escolas públicas e particulares, e sempre quando dialogo com os amigos de profissão da mesma área, poucos sabem do que se trata a Teoria de Grafos. Alguns já ouviram falar, mas nunca encontrei nem um único profissional que dominasse o assunto. Isso se dá porque a Teoria de Grafos é algo recente, se considerarmos o contexto da história da Matemática. Isso mostra que o ensino em sala de aula, do básico ao superior, tem encontrado dificuldade em acompanhar os avanços da Matemática ao passar dos anos. Muitos cursos de graduação em Matemática não trabalham a Teoria de Grafos e a minha formação é um exemplo. No curso de graduação, alguns professores comentaram da existência da Teoria, mas nunca a estudamos de modo mais formal. Aqui me refiro ao conteúdo previsto em ementa de curso.

Há de se destacar a falta de material de apoio sobre o assunto para os professores do ensino básico. Existem apenas algumas publicações em revistas destinadas a professores e estudantes de Matemática, artigos e trabalhos acadêmicos em geral. Baseado nos argumentos citados acima, será apresentado neste trabalho um material de apoio para o professor que consistirá em uma introdução ao assunto e certo aprofundamento que servirá de base para a continuidade dos estudos acercado conteúdo. De posse do material, o professor poderá decidir a melhor maneira de abordar o assunto, usando a proposta deste trabalho ou modificando-a de acordo com a realidade dos estudantes. O material poderá ser usado por estudantes do ensino básico que se interessem em estudar Matemática mais a fundo, tendo contato com assuntos e abordagens que geralmente não são usadas no ensino básico.

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) visa atender prioritariamente aos professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência. Um dos grandes objetivos do programa é o desenvolvimento de temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica com impacto em sala de aula.

Neste sentido a presente dissertação, que faz parte deste programa, tem por objetivo geral:

Produzir um material de apoio para o professor de Matemática para introdução da Teoria de Grafos e resolução de problemas utilizando grafos no Ensino Médio.

Para aprofundar esse objetivo formulamos os seguintes objetivos específicos:

1. Construir um material com problemas diversificados e demonstrações para professores e estudantes do ensino básico que apresentam nível avançado em Matemática.

2. Desenvolver a Resolução de problemas para introduzir, conjecturar e aplicar resultados da Teoria de Grafos.

Considerando todos os comentários feitos até aqui essa dissertação será desenvolvida nas seguintes etapas:

1ª) Introdução à Teoria de Grafos: parte destinada ao 2º ano do ensino médio, com conceitos, definições e origem histórica. Neste último tópico é abordado o famoso teorema de Euler, que caracteriza os grafos eulerianos, considerado parte importante da introdução de tal teoria. Essa parte traz vários problemas interessantes, alguns introdutórios e outros de aplicação da teoria.

2ª) Definições novas, aprofundamento e resolução de problemas: Parte destinada ao 3º ano do ensino médio, com conceitos e definições novas que trazem um aprofundamento maior, mas nada que impeça que sejam trabalhados no segundo ano, desde que os conhecimentos prévios já tenham sido ensinados. Essa parte traz alguns problemas mais elaborados ou com uma solução distinta da que já tenha sido apresentada anteriormente no mesmo trabalho.

Este trabalho traz uma proposta de introdução à Teoria dos Grafos no capítulo 2, com nível razoável de aprofundamento, considerando que o material é para o ensino médio, e traz a expansão do assunto no capítulo 3, onde são abortados os tipos especiais de grafos, chamados Árvores. No capítulo 4, é tratada a fórmula de Euler pela perspectiva de grafos e finaliza com o capítulo 5, destinado a problemas variados da teoria.

2. INTRODUÇÃO À TEORIA DOSGRAFOS

2.1. O conceito de grafo

Vamos iniciar com alguns problemas que muitas vezes não parecem estar relacionados, mas ao usarmos estratégias semelhantes para resolvê-los percebemos suas relações e assim será introduzido o conceito de grafo.

Problema 2.1: Numa sala há sete pessoas, onde cada pessoa fala exatamente dois idiomas. Temos que a pessoa 1 fala português e espanhol, a pessoa 2 inglês e francês, a pessoa 3 português e francês, a pessoa 4 alemão e russo, a pessoa 5 alemão e italiano, a pessoa 6 italiano e russo e a pessoa 7 espanhol e inglês. A pessoa 1 consegue se comunicar com a pessoa 5 por meio das outras pessoas?

Solução: Podemos desenhar um diagrama no qual cada pessoa é representada por um ponto e as possibilidades de comunicação direta entre as elas por segmentos de retas (ou arcos). Observe a Figura 1 abaixo:

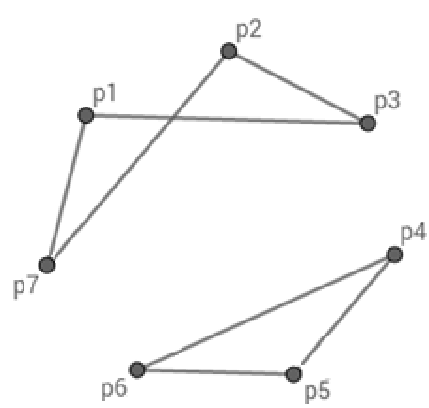
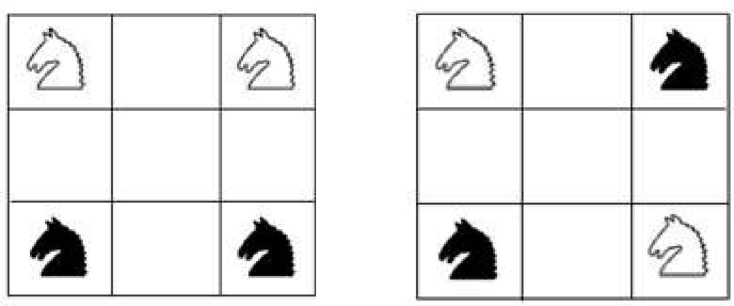


Figura 1 – Diagrama do problema 2.1

Ao observar a Figura 1fica claro que é impossível a pessoa 1 se comunicar com a pessoa 5.

Comentários para o professor: Esse problema, ao ser proposto aos alunos, é interessante que os deixem criar suas próprias estratégias para resolver o problema. É bom ficar atento às justificativas apontadas por eles, pois a não possibilidade da pessoa 1 se comunicar com a pessoa 5 não se dá pelo fato da impossibilidade de se comunicarem diretamente, o professor pode usar como contra exemplo a possibilidade de comunicação da pessoa 1 com a pessoa 2, embora não se comuniquem diretamente. Depois das tentativas e soluções apresentadas pelos alunos, o professor deve introduzir a estratégia de associar cada pessoa a um ponto e a relação de comunicação direta entre elas pelos segmentos de reta (ou arcos). Neste problema distribuímos os pontos de acordo com os vértices de um heptágono regular. Essa estratégia às vezes facilita a compreensão e a resolução dos problemas relacionados a grafos.

Problema 2.2: A Figura 2(a) mostra quatro cavalos, dois pretos e dois brancos, em um tabuleiro 3x3. Eles podem se movimentar, de acordo com os movimentos usuais de um cavalo no xadrez, até ficarem na posição ilustrada na Figura 2(b)?



(a) (b)

Figura 2 - (a) Posição inicial; (b) Posição final.

Solução: A resposta é não. Vamos mostrar isso enumerando os quadrados do tabuleiro com os números de 1,2,3, ..., 9, como mostra a Figura 3.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 3 - Tabuleiro enumerado

Podemos representar cada quadrado por um ponto. Se pudermos ir de um quadrado a outro por movimentos típicos de um cavalo, ligaremos os pontos correspondentes com um seguimento de reta. Podemos fazer essa análise, considerando todos os movimentos possíveis do cavalo branco, que se encontra no quadrado de número um, mas isso pode ser feito para qualquer outro cavalo. Desta maneira teremos o diagrama ilustrado na Figura 4.

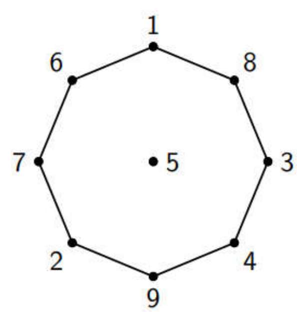


Figura 4 - Diagrama do movimento dos cavalos

A partir da Figura 4, podemos observar que a casa cinco nunca será ocupada, nem pelo cavalo que se encontra na casa um, nem por nenhum outro, já que começando com o cavalo da casa um, foi possível passar por todas as outras casas onde se encontram os outros cavalos, isso mostra também que não importa por qual cavalo possa começar os movimentos.

Agora observe as posições iniciais e finais dos cavalos no diagrama que estão ilustradas na Figura 5.

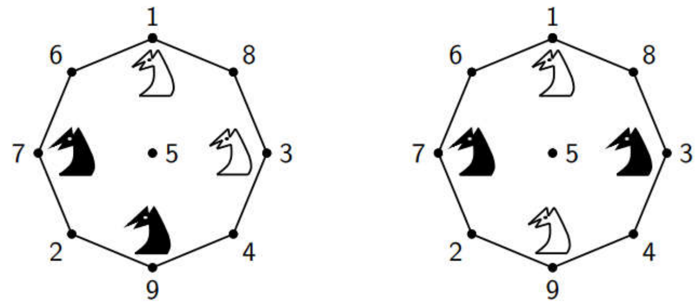


Figura 5 - Diagrama das posições dos cavalos

Desta forma fica fácil ver que a ordem em que os cavalos aparecem no círculo é impossível de ser mudada. Observe que é impossível trocar a posição de quaisquer dois cavalos entre si. Tente realizar essa tarefa, por exemplo, com o cavalo branco da posição três e o cavalo preto da posição nove.

Comentários para o professor: Esse problema é uma variação do problema que originalmente foi proposto pelo italiano Paolo Guarini de Forli (1464 - 1520) em 1512. Há, portanto, outras maneiras de propor e explorar esse problema, mas ao utilizar a estratégia apresentada, os argumentos da solução são idênticos. Verifica-se isso ao tentar partir da Figura 2(b) posição final para Figura 2(a) posição inicial.

É claro que esse problema, ao ser proposto aos alunos, muitos deles tentarão por um método exaustivo, uma solução por esgotamento das tentativas, e é partindo daí que o professor deve propor uma solução menos cansativa e que economize tempo.

Os dois problemas anteriores aparentemente são muito diferentes e apresentam soluções diferentes, mas as estratégias de solução se assemelham, pois em ambos representamos os problemas como um diagrama, em que cada um deles consiste em um conjunto de pontos, alguns dos quais ligados por segmentos de reta.

Esses diagramas são chamados de grafo. Os pontos são chamados de vértices ou nós do grafo e os segmentos de reta, que também podem ser linhas, são as arestas ou arcos. A seguir apresentaremos uma definição de grafo.

Grafo: consiste em um conjunto finito de pontos, chamados de vértices ou nós do grafo, e um conjunto finito de arcos, chamados de arestas do grafo. As extremidades de cada aresta devem ser vértices.

Comentários para o professor: A definição que foi dada para grafo é limitada, não é uma definição precisa, mas é suficiente para que os estudantes tenham uma ideia intuitiva do que é um grafo. A sugestão é que de acordo com o progresso nos estudos relacionado à teoria dos grafos, as definições sejam aperfeiçoadas. É bom que os alunos sintam essa necessidade. Um exemplo parecido é a definição de ângulo, pois tal definição muda de acordo com o que está sendo trabalhado.

Vamos resolver mais um problema usando, agora, a definição de grafos.

Problema 2.3: (OBM) Esmeralda adora os números triangulares (ou seja, os números 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28...) tanto que mudou de lugar os números 1, 2, 3,..., 11 do relógio de parede do seu quarto, de modo que a soma de cada par de números vizinhos é um número triangular. Ela deixou o número 12 no seu lugar original. Que número ocupa o lugar que era do número 6 no relógio original?

Solução: Como no relógio modificado a soma de cada par de números vizinhos é um número triangular, vamos desenhar um grafo que tenha 12 vértices, em que cada vértice represente um número do relógio, e vamos conectá-los por arestas toda vez que, somando-os, resulte em um número triangular. Observe, portanto, na Figura 6o grafo que será formado.

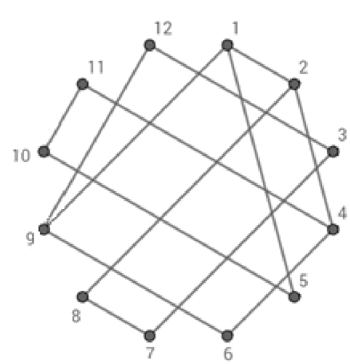


Figura 6 - Grafo do problema 2.3

Agora colocaremos os números no relógio satisfazendo as condições de Esmeralda. Vamos começar pelo número 12, já que ele não mudará de lugar. Podemos ver no grafo (Figura 6) que os vizinhos do número 12 serão o 9 e o 3. Colocaremos um ao lado direito e outro ao lado esquerdo do 12, quem ficará ao lado direito e quem ficará ao lado esquerdo é irrelevante, pois queremos determinar o número que ocupará o lugar do 6. Em seguida, vamos preencher o relógio com o vizinho do 3, porque o 9 tem três vizinhos e, portanto, teríamos que abrir pelo menos duas possíveis formações. Ao permanecer nesse critério, de optar sempre em preencher a vizinhança do número que tem apenas dois vizinhos, chegaremos ao número 2, que terá duas opções para preencher uma única vizinhança. São elas o 1 ou o 4. Deveremos optar pelo 1, embora tanto o 1 quanto o 4 tenham três opções de vizinhança. O número 1 terá o 9 como possível vizinho, mas o 9 já foi utilizado e, caso usemos como vizinho do 1, será impossível preencher o relógio com todos os números, restando assim o único possível vizinho que é o 5, pois o outro vizinho é o 2 que também já foi utilizado. Portanto solucionamos nosso problema, o número que estará no lugar do 6 é o número 5. Veja na Figura 7como ficará a nova disposição dos números 1,2,..., 12 no relógio de Esmeralda.

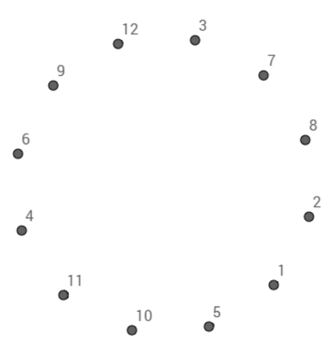


Figura 7 - Sequência dos números no relógio de Esmeralda

<u>Comentários para o professor:</u> Esse problema pode de inicio parecer complicado, mas é simples e rico, o professor pode explorar o que é um número triangular, por exemplo, embora não saber a definição de número triangular não impeça o aluno de resolver o problema, já que a lista de números triangulares apresentada no problema é suficiente para resolvê-lo. O professor pode explorar a parte final da solução e

mostrar de forma mais detalhada porque optamos pelo 1 e não pelo 4 na vizinhança do 2, deixando o estudante chegar nas consequências da escolha errada.

Os três problemas abordados até aqui nos dão uma ideia de como abordar a teoria dos grafos por meio da resolução de problemas. A seguir, apresentaremos algumas definições importantes.

2.2. O grau de um vértice

Na seção anterior, definimos um grafo como um conjunto de pontos chamados vértices, alguns dos quais estão conectados por arcos chamados de arestas. O número de arestas que começam em um vértice é chamado de grau do vértice. Observe o grafo da Figura 8.

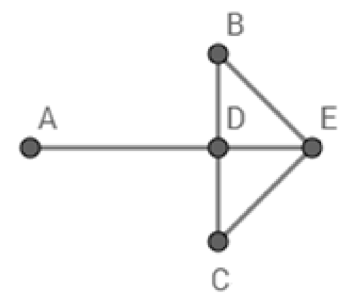


Figura 8 - Grafo do exemplo

Denotamos o conjunto de vértices como sendo V = {A,B,C,D,E} e o conjunto de arestas sendo E = {AD,BE,CE,DE,BC,CD}. Como do vértice A só começa uma aresta, temos que o grau do vértice A é 1 e denotaremos Gr(A) = 1. Desta maneira é fácil concluir que Gr(B) = 2, Gr(C) = 2, Gr(D) = 4 e Gr(E) = 3. Denotaremos por S a soma dos graus de todos os vértices e, portanto, neste exemplo, $S = 1 + 2 + 2 + 4 + 3 = 12$.

Resolveremos mais um problema.

Problema 2.4: Em uma reunião de negócios há 45 executivos. Há possibilidade de cada pessoa deste encontro ter cumprimentado com aperto de mão a exatamente 5 outras pessoas?

Solução: Suponhamos que isto seja possível. Vamos considerar um grafo no qual os vértices representam os executivos e as arestas os apertos de mão. Este grafo possui 45 vértices e cada um deles tem grau 5. Vamos contar o número de arestas nesse grafo. Para isto, podemos somar os graus de todos os vértices. No entanto, nesta soma, cada aresta é contada duas vezes, pois cada aresta liga dois vértices. Portanto, o número de arestas no grafo tem que ser igual a $45 \cdot 5/2$. Mas este número não é inteiro. Segue que tal grafo não pode existir, o que significa que não há possibilidade de cada integrante dessa reunião se cumprimentar com aperto de mão a exatamente outras 5 pessoas.

Ao resolver esse problema, concluímos que ao contar as arestas de um grafo sabendo o grau de cada vértice, somamos os graus de todos os vértices e dividimos essa soma por 2. A técnica usada é a *contagem dupla* que, de acordo com Shine [12], é uma das técnicas mais importantes da Combinatória, que consiste em contar ou estimar algo de duas ou mais maneiras para obter igualdades ou desigualdades. Usaremos essa mesma estratégia para demonstrar um resultado muito importante para a teoria dos grafos. Observe que nas informações retiradas do grafo da Figura 8,a quantidade de arestas é igual a 6 e a soma dos graus de todos os vértices (S), é igual a 12. Isto sugere que a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro da quantidade de arestas. Isto é um fato. Vejamos o teorema abaixo:

Teorema 1: Em um grafo, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas.

Demonstração: De cada vértice *v* do grafo saem Gr(*v*) arestas. Assim, se somarmos os graus de todos os vértices, contaremos todas as arestas, porém contaremos duas vezes cada uma, pois cada aresta está associada a dois vértices. Desta maneira, temos que corrigir nossa contagem, dividindo a soma dos graus de todos os vértices por dois e, por uma álgebra simples, concluímos nossa demonstração.

Uma consequência do teorema 1: a soma dos graus de todos os vértices em grafo tem que ser par (caso contrário, não poderíamos dividi-la por 2 para obter o número de arestas).

Problema 2.5: Em um distrito há 100 cidades e saem 4 estradas de cada uma delas e cada estrada liga duas cidades desse distrito. Quantas estradas existem ao todo neste distrito?

Solução: Consideremos um grafo com 100 vértices e de cada um deles saem 4 arestas, cada um desses vértices representa uma cidade e cada aresta uma estrada. Pelo teorema1, o número de arestas é $N = 100 \cdot 4/2 = 200$. Portanto, este distrito possui 200 estradas.

No grafo do problema anterior, cada vértice possui grau 4, ou seja, grau par e chamaremos vértices deste tipo de ***vértice par**.* Quando um vértice tiver grau ímpar, diremos que ele é um ***vértice ímpar**.*

Teorema 2: O número de vértices ímpares em um grafo arbitrário tem que ser par.

Demonstração: É claro que a soma de dois números pares resulta em um número par. Observe: $2m + 2n = 2(m + n)$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$. Ao somarmos dois números ímpares, teremos também um número par. Observe: $(2p + 1) + (2q + 1) = 2(p + q) + 2$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$. Mas ao somar um número par com um número ímpar, obteremos um número ímpar. Observe: $(2x + 1) + (2y) = 2(x + y) + 1$onde $m, n \in \mathbb{Z}$. Portanto, independente da quantidade de vértices pares, ao somarmos o grau dos vértices, o resultado sempre será par, mas se somarmos vértices ímpares essa quantidade deve ser par, pois caso contrário o resultado da soma dos graus dos vértices seria um número ímpar, o que contraria a consequência do teorema 1.

Este teorema é extremamente importante, ele será usado pra resolver diversos problemas. Para provar, por exemplo, a existência de uma determinada aresta em um grafo ou provar que é impossível obter um grafo satisfazendo determinadas condições. Vejamos alguns exemplos.

Problema 2.6: Em Litorânea há 5 ilhas, cada uma delas tendo 1 ou 3 pontes chegando a elas. É verdade que pelo menos uma dessas pontes tem que levar a terra firma?

Solução: Suponha que nenhuma dessas pontes leve a terra firme. Vamos considerar um grafo onde os vértices representam as ilhas e as arestas as pontes que as ligam. O problema diz que cada uma das ilhas é representada por um vértice ímpar, de modo que teríamos um número ímpar de vértices ímpares, que é impossível pelo teorema 2, portanto o grafo tem que ter pelo menos uma aresta levando a terra firme.

Problema 2.7: É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada um intersecta exatamente 3 outros?

Solução: Vamos associar esse problema a um grafo onde cada segmento será representado por um vértice desse grafo, e dois vértices estarão ligados por uma aresta se somente se os segmentos de retas correspondentes se intersectam. Portanto este grafo tem nove vértices de grau 3, o que pelo teorema 2 é impossível.

2.3. Definições importantes

No problema 2.1 vimos que a pessoa 1 não consegue se comunicar com a pessoa 5 por meio das outras pessoas. A situação foi representada por um grafo que estava dividido em duas partes e não havia nenhuma aresta e nenhuma sequência de arestas que ligavam os vértices representados pela pessoa 1 a pessoa 5. Quando isso ocorre dizemos que o grafo é ***não conexo****.* Vejamos algumas definições importantes:

Caminho: é uma sequência de arestas, cada uma das quais começando no vértice final da anterior.

Grafo conexo: um grafo é dito *conexo* se, dados dois vértices quaisquer, existe um caminho ligando os dois vértices.

Caminho fechado: é um caminho cujos vértices inicial e final coincidem. É chamado também de *ciclo.*

As “partes” que ficou dividido o grafo do problema 2.1 são chamadas de ***componentes conexas*** do grafo. É claro que cada componente é um grafo conexo.

Vamos resolver alguns problemas.

Problema 2.8: Prove que todo grafo conexo com grau dos vértices maior ou igual a dois possui um ciclo.

Solução: De fato, considere um caminho ligando todos os vértices, onde cada aresta desse caminho é usada uma única vez. Esse caminho existe, pois o grafo é conexo e sempre é possível entrar e sair em um vértice por duas arestas distintas, pois o grau dos vértices é maior ou igual a dois. Suponha por contradição que nenhum vértice seja visitado duas vezes, agora olhamos para o último vértice desse caminho, como cada vértice tem grau maior ou igual a dois, quando visitado pela primeira vez, sempre é possível entrar e sair por dois vértices distintos, ou seja, se esse vértice foi visitado pela primeira vez, é possível sair dele por uma aresta distinta da que entrou, e como todos os vértices já foram visitados ao sair desse vértice, entraremos em um vértice que já foi visitado e, portanto, temos um ciclo.

Problema 2.9: Prove que um grafo com n vértices, todos com grau pelo menos$(n-1)/2$ é conexo.

Solução: Suponha por contradição que existam dois vértices que não estão ligados por nenhum caminho, ou seja, suponha que o grafo não seja conexo. Sabe-se que cada um desses vértices está ligado a pelo menos $(n-1)/2$vértices. Estes $2\,.\frac{(n-1)}{2}$ vértices devem ser todos distintos: se um deles for o mesmo, existiria um caminho através deste vértice ligando os dois vértices dados inicialmente (veja a Figura 9). Isto significa que este grafo tem pelo menos $2.\frac{(n-1)}{2}+2=(n-1)+2=n+1$ vértices diferentes, o que contradiz o enunciado do problema.

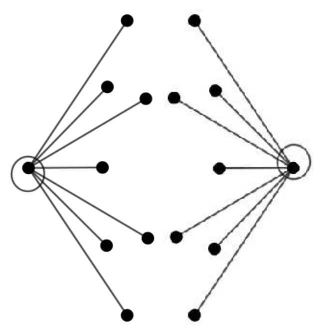


Figura 9 - Grafo do problema 2.8

Problema 2.10: Em determinado país, 100 estradas saem de cada cidade e é possível viajar por essas estradas de qualquer cidade para qualquer outra. Uma das estradas está fechada para reparos. Prove que ainda é possível ir de qualquer cidade para qualquer outra.

Solução: Vamos associar a situação do problema a um grafo conexo, no qual cada vértice possui grau igual a 100. Queremos mostrar que, se uma aresta desse grafo for apagada, ainda assim ele continua conexo. Seja AB a aresta eliminada, desta maneira temos dois casos:

1° caso: A e B estão na mesma componente conexa, portanto o novo grafo também é conexo.

2° caso: A e B estão em componentes distintas, assim temos duas componentes e, portanto, dois grafos, um contendo A e um contendo B, mas em cada uma dessas componentes teremos todos os vértices diferentes de A e B com grau par e os vértices A e B possuindo grau 99, mas esses grafos formados pelas componentes não existem, pois cada um possui um único vértice ímpar (ver teorema 2).

2.4. Grafos: origem histórica

A teoria dos grafos surgiu com um problema muito famoso, o problema das pontes de Königsberg e foi solucionado pelo grande matemático Leonhard Euler (1707-1783) em 1736. A cidade era cortada pelo rio Pregel, que possuía duas ilhas, com sete pontes ligando as duas ilhas e as margens opostas do rio. Veja a Figura 10onde mostra um mapa da cidade de Königsberg.

Figura 10 - Pontes de Köningsberg

Como passear pelas pontes da cidade era algo rotineiro, os habitantes de Königsberg se perguntavam se seria possível atravessar as sete pontes do Rio Pregel, sem passar duas vezes pela mesma ponte, retornando assim ao ponto de partida. Foi então que Euler publicou em 1736 uma solução para o problema das pontes. Vamos apresentar aqui uma solução baseada no argumento apresentado por Euler. Vamos associar a situação do problema com um grafo, onde as ilhas e as margens do rio são os vértices e as pontes são as arestas do grafo, as ilhas são representadas pelos vértices B e D e as margens pelos vértices A e C. Veja a Figura 11.

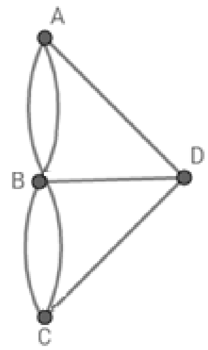


Figura 11 - Grafo de Königsberg

Queremos partir de qualquer lugar, seja por uma das ilhas ou por uma das margens, passar por todas as pontes uma única vez e retornar ao ponto de partida, então na linguagem dos grafos vamos tentar sair de um vértice, passar por cada aresta uma única vez e retornar ao vértice inicial.

Observe que Gr(A)=3, Gr(B)=5, Gr(C)=3 e Gr(D)=3. Suponha que iniciemos nosso caminho pelo vértice A, se iniciamos por A, isso quer dizer que ele tem pelo menos uma aresta e como o problema pede que o trajeto termine em A, então deve ter uma outra aresta chegando em A, e mais, não importa a quantidade de arestas que tenha em A, mas sempre que houver uma aresta saindo de A deve haver outra chegando em A, portanto o número de arestas incidindo em A deve ser par para que A seja o vértice de partida, mas veja que o grau de todos os vértices do nosso grafo é ímpar e, portanto, nenhum pode ser vértice de partida, sendo assim o problema é impossível, ou seja, não é possível que uma pessoa parta de uma das margens ou de uma das ilhas e caminhe por todas as pontes de Königsberg uma única vez e retorne ao local de partida.

Quando é possível partir de um vértice de um grafo e percorrer um caminho passando uma única vez por cada aresta, temos um <u>caminho euleriano</u>. Se o caminho euleriano começar e terminar no mesmo vértice temos um <u>caminho euleriano fechado</u> e o grafo é chamado de <u>grafo euleriano</u>. Caso contrário, teremos um <u>caminho euleriano aberto</u> e, neste caso, teremos um <u>grafo semieuleriano</u>. As nomenclaturas citadas acima se dão em homenagem ao trabalho desenvolvido por Leonhard Euler (1707-1783).

<u>Observação</u>: A palavra "caminho", tanto neste trabalho quanto em outras publicações sobre grafos, às vezes é substituída por circuito ou passeio. Pode ser encontrada a denominação <u>grafo de Euler</u> para denotar que o grafo possui um caminho (circuito ou passeio) euleriano.

Vale observar que para obter um caminho euleriano não há necessidade de retornar ao vértice inicial, vimos que o grafo que representa o problema das pontes de Königsberg não é euleriano, vale, portanto, questionar se o grafo do problema das pontes de Königsberg é semieuleriano.

Solução: Vimos acima que é impossível traçar um caminho euleriano fechado, já que todos os vértices possuem grau ímpar, vimos que se o caminho é euleriano e começa em um vértice ímpar, esse caminho não termina no mesmo vértice. Agora observe que se o vértice tem grau ímpar e o caminho não começa por ele, então o caminho termina nele, pois pra que o caminho não terminasse nele, deveríamos sair a mesma quantidade de vezes em que entramos e, portanto, o grau deveria ser par. Desta forma, é fácil observar que o grafo do problema das pontes de Königsberg não é semieuleriano, basta supor que o caminho comece por A, então o caminho deveria terminar em outro vértice ímpar, mas o grafo em questão possui mais três vértices com grau ímpar, portanto é impossível que o caminho termine em dois vértices distintos ao mesmo tempo.

No artigo *Alguns problemas clássicos sobre grafos* da Revista do professor de Matemática, Lima [7] faz a seguinte observação:

> **Observação:** A cidade de Königsberg ficava na Prússia, região do leste da Alemanha. Hoje, ela se chama Kaliningrado, pertence à Rússia e já é possível percorrer todas as suas pontes sem passar mais de uma vez por cada uma delas. É que foi construída uma nova ponte. A bem da verdade, devemos esclarecer também que, de fato, Euler não menciona a ilha D. No seu mapa há uma península D, a partir da qual o rio Pregel se bifurca, depois de passar pela ilha B (que se chama Kneiphof). Mas é claro que o

> problema fica bem mais fácil de enunciar se substituirmos a península por uma ilha, o que não faz diferença alguma do nosso ponto de vista. (p.89)

O problema das pontes de Königsberg, resolvido por Euler em 1736, é o primeiro exemplo histórico onde o objetivo é encontrar um caminho euleriano. Hoje, podemos incluir além dos problemas de rotas, passatempos como desenhar figuras sem retirar o lápis do papel, como mostra o problema abaixo.

Problema 2.10: É possível desenhar o grafo ilustrado na (a) Figura 12; (b) Figura 13, sem levantar o lápis do papel e desenhando cada aresta exatamente uma vez?

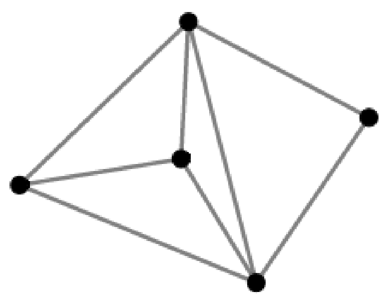


Figura 12 - Grafo do problema 2.10(a)

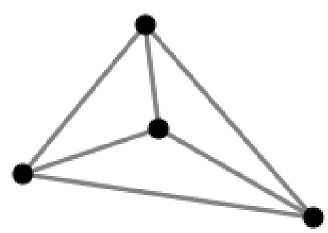


Figura 13 - Grafo do problema 2.10(b)

Solução: (a) Sim. Um modo é começar no vértice na extrema esquerda e terminar no vértice central. Outra maneira seria começar no vértice central e terminar no vértice na extrema esquerda. Observe também que se iniciarmos o circuito em um vértice diferente desses não conseguiremos encontrar o caminho euleriano, embora ele exista, esse fato ficará mais claro com o teorema a seguir.

(b) Não. De fato, se percorrermos o grafo como no enunciado do problema, chegaremos em cada vértice tantas vezes quanto sairmos (com exceção dos vértices inicial e final). Logo, o grau de cada vértice, exceto de dois deles, tem que ser par. Isto não acontece com o grafo da Figura 13.

Após analisar a solução do problema das pontes de Königsberg e do problema 2.10, apresentaremos o teorema abaixo. Tal teorema é muito importante, pois ele nos diz quando um grafo possui ou não um caminho euleriano.

Teorema 3 (Teorema de Euler): Em um grafo conexo (isto é, existe um caminho ligando qualquer par de vértices) existe um circuito euleriano se e somente se cada vértice tem grau par (ou seja, o número de arestas que nele incidem é par) ou apenas dois tiverem grau ímpar. No primeiro caso o circuito é fechado e no segundo o circuito deve começar em um dos vértices ímpares e terminar no outro.

Demonstração: Vamos demonstrar primeiro a ida. É fácil observar que se o grafo possui circuito euleriano e um vértice *V* tem grau ímpar, então todo circuito tem que começar ou terminar em *V,* só observar que se começar em *V* vai sair mais vezes que entrou então não terminará lá, se não começou vai entrar mais vezes que saiu e portanto terá que terminar lá*.* Igualmente, podemos ver que se um vértice *V* tem grau par, então todo circuito euleriano começa e termina em *V,* ou começa e termina em algum outro lugar.

Agora suponha por contradição que um grafo de Euler possua mais de dois vértices com grau ímpar, se o circuito começa em um deles deve, portanto, terminar em pelo menos outros dois vértices ímpares ao mesmo tempo, absurdo. Observe também que se o circuito euleriano começar em um vértice de grau par ele deveria terminar no mesmo vértice, em contrapartida como supomos que o grafo possui vértices com grau ímpar, portanto o circuito deveria terminar neles também, temos aí outro absurdo. Sendo assim concluímos que um grafo de Euler não possui vértices de grau ímpar ou possui apenas dois, no primeiro caso o caminho é euleriano e no segundo o caminho é semieuleriano.

Agora vamos demonstrar a recíproca, isto é, se um grafo conexo possui todos os vértices com grau par ou apenas dois com grau ímpar, então o grafo possui circuito euleriano. Primeiro vamos mostrar o caso em que o grafo não possui vértice de grau ímpar.

Seja *v* um vértice qualquer. É claro que se o grafo possui um único vértice, não há o que demonstrar. Pelo Problema 2.8, o grafo possui um circuito fechado, então seja *W* esse circuito fechado, tomaremos o mais longo possível, começando e terminando em *v* e que usa toda aresta no máximo uma vez.

Queremos mostrar que o circuito *W* é euleriano. Suponha que não, então existe pelo menos uma aresta que não é usada por *W.* Afirmamos que podemos escolher essa aresta e de modo que *W* passe por pelo menos uma de suas extremidades. De fato, se *p* e *q* são as extremidades de e e *W* não passa por elas, então tomamos um caminho de *p* a *v* (tal caminho existe, pois o grafo é conexo) e olhamos para o primeiro vértice r sobre esse caminho que está também sobre o passeio *W* (Figura 14(a)). Seja $e' = rs$ a aresta do caminho imediatamente anterior a $r.$ Então *W* não passa por e' (porque ele não passa por s), portanto podemos substituir e por e', que tem uma extremidade em *W.*

Portanto seja e uma aresta que não é usada por *W*, mas que tem uma extremidade em *p* que é usada por *W*. Então começamos um novo passeio *W'* em *p.* Começamos por $e,$ e continuamos a passear como desejamos, somente tendo o cuidado para que (i) não usemos as arestas de *W,* e (ii) não usemos qualquer aresta duas vezes.
Mais cedo ou mais tarde vamos acabar ficando sem saída, mas onde? Seja *u* o vértice onde ficamos sem saída, e suponha que *u≠p*, o vértice *u* tem grau par por hipótese; *W'* usa um número par de arestas incidentes a *u;* toda visita anterior do novo passeio a esse vértice usou duas arestas (entrando e saindo); Nossa última entrada usou uma aresta e, portanto, temos um número ímpar de arestas que não são arestas nem de *W* nem de *W';* Mas isso quer dizer que podemos continuar nosso passeio.

Portanto o único vértice onde podemos ficar sem saída é o vértice *p.* Isso quer dizer que *W'* é um circuito fechado. Agora tomamos um circuito da seguinte maneira. Começamos em *v*, seguimos por *W* até *p;* então seguimos *W'* direto, de modo que voltamos a *p;* então seguimos *W* até seu final em *v* (Figura 14(b)). Esse novo circuito começa e termina em *v,* usa toda aresta no máximo uma vez e é mais longo que *W,* o que é uma contradição.

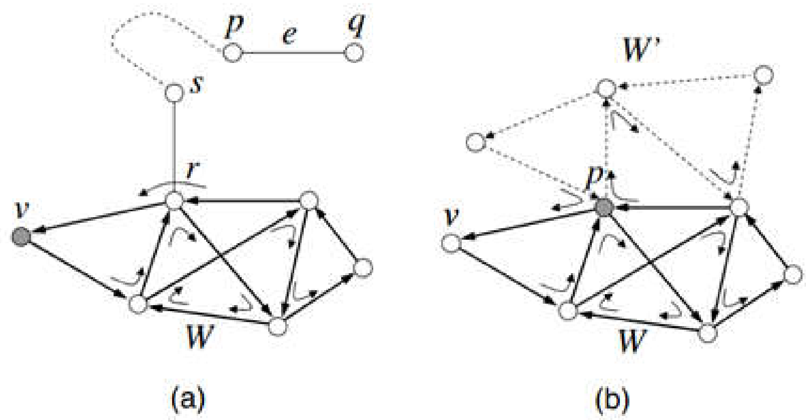


Figura 14 - Grafos da demonstração

Agora vamos demonstrar o caso em que o grafo conexo *G* possui apenas dois vértices com grau ímpar. Sejam *x* e *y* os dois únicos vértices com grau ímpar. Agora tomamos um caminho qualquer de *x* a *y* (tal caminho existe, pois o grafo é conexo), utilizando cada aresta uma única vez sem se preocupar em utilizar todas as arestas de *G*. Retirando esse caminho de *x* a *y,* restará então um grafo parcial *G',* o qual poderá não ser conexo. Se for conexo, basta tomar um circuito euleriano sobre *G'* começando e terminando em *x*. Tal circuito existe, pois todos os vértices de *G'* possuem grau par, em seguida seguir o caminho, retirado, inicialmente, de *x* a *y.* Pronto, temos aí um circuito euleriano de *G*. Caso *G'* não seja conexo, vamos também partir do vértice *v* e desviaremos o caminho toda vez que atingirmos uma componente conexa de *G',* percorrendo um caminho euleriano sobre essa componente antes de prosseguir, o que é possível pois todos os vértices de *G'* terão grau par. Ao chegarmos em *y* teremos percorrido um caminho euleriano de *G.*

De posse do teorema acima, fica fácil afirmar que a solução do problema das sete pontes de Königsberg é impossível, pois neste problema o grafo que o representa possui mais de dois vértices com grau ímpar.

Quando se fala em aplicações de caminhos eulerianos podemos citar os problemas de atendimento sequencial a um pequeno ou grande número de usuários, tais como entrega e recolhimento como, por exemplo, entrega de *fastfoods,* entrega de correspondências (água, energia, telefone, etc.) e o recolhimento de lixo. Em todos os casos o empresário ou o administrador pretende minimizar os custos e uma maneira é minimizar o deslocamento, e para isso se deseja passar em cada rua ou avenida, ou ainda em um conjunto delas uma única vez e, na maioria das vezes, retornar ao ponto de partida. Modelamos o problema associando um vértice a cada ponto de atendimento. As arestas correspondem às ligações entre os pontos. O problema é percorrer cada aresta uma única vez, se possível, ou de repetir a passagem pelo menor número possível de arestas. Geralmente o interesse está em obter um caminho fechado.

Problema 2.11: A figura abaixo é um grafo que representa o mapa rodoviário de um país fictício, onde cada vértice é uma cidade e cada aresta é uma estrada.

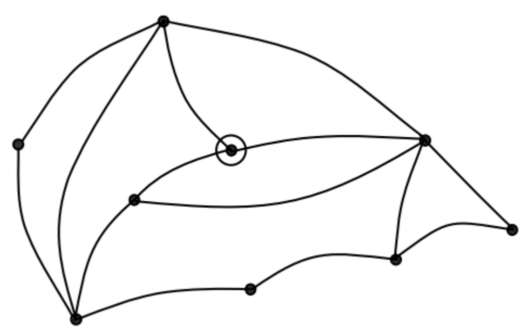


Figura 15 - Mapa rodoviário de um país fictício

Responda:

(a) Um funcionário, encarregado de verificar, periodicamente, o estado das estradas, deseja planejar a sua rota de inspeção. Idealmente, esta rota deveria se iniciar na capital (vértice destacado) e percorrer cada estrada exatamente uma vez, voltando, então, ao ponto de partida. Existe tal rota?

(b) Um representante de vendas de uma companhia deseja planejar uma rota na qual ele visite cada cidade exatamente uma vez, voltando ao ponto de partida. Existe tal rota?

Solução: (a) Podemos aplicar o teorema 3 ao nosso problema de inspeção de estradas. Da mesma forma como no Problema das Pontes de Könisberg, não existe qualquer circuito euleriano no grafo determinado pelo mapa rodoviário, já que o vértice correspondente à capital tem grau 3, pois começando nele não poderia terminar nele. Assim, se o nosso inspetor de estradas recebesse de seu chefe a incumbência de elaborar um trajeto nas condições do problema 2.11, ele poderia facilmente convencê-lo da impossibilidade de fazê-lo. É claro que poderíamos nos questionar se há a possibilidade de passar em cada estrada uma única vez e parar em uma cidade diferente da capital, ou seja, existe circuito semieuleriano no grafo determinado pelo mapa rodoviário? A resposta também é não, pois há mais de dois vértices com grau ímpar.

(b) Esse problema é possível, veja a Figura 16. O trajeto tracejado mostra a rota que deve ser feita pelo representante de vendas.

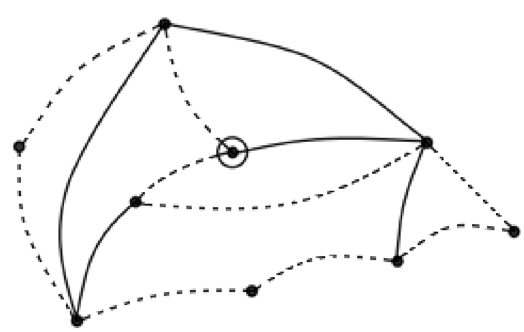


Figura 16 - Rota do representante de vendas

Observe que no problema 2.11 (b) o interesse é encontrar um caminho que passa uma única vez em cada vértice e retorne ao vértice inicial, quando um grafo possui tal caminho dizemos que o grafo possui circuito hamiltoniano, em homenagem ao matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805 - 1865). Um grafo que possui um circuito hamiltoniano é chamado de grafo hamiltoniano.

A história nos diz que cerca de um século depois de Euler ter resolvido o problema das pontes de Königsberg, Hamilton, em 1856, criou um jogo intitulado *Icosain Game*, onde o mundo estava representado em um dodecaedro regular e cada um dos 20 vértices representava uma determinada cidade. A proposta era sair de Londres, uma das cidades do jogo, e voltar a Londres sem passar por uma das cidades mais de uma vez. O grafo e a solução em negrito associada ao jogo proposto por Hamilton estão na Figura 17.

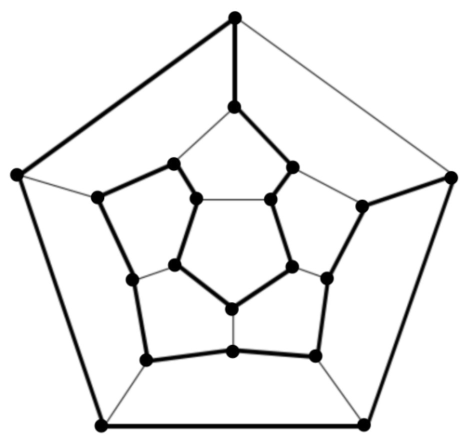


Figura 17 - Grafo do Icosain Game

Observação: o grafo da Figura 17 é uma representação plana do dodecaedro, esse assunto, bem como o modo de obter essa representação plana, serão abordados no capítulo 4.

Verificar se um grafo é hamiltoniano é bem diferente da de verificar se um grafo é euleriano. Apesar de terem sido estudados por vários séculos, não há uma caracterização geral dos grafos hamiltonianos como há dos eulerianos (teorema 3). Portanto é muito fácil convencer alguém da existência de um circuito hamiltoniano de um grafo: basta exibir tal caminho. No entanto, é difícil, em geral, convencer alguém da não existência de tal circuito.

3. ÁRVORES

Definição: Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos.

Folha: é todo vértice de grau 1 de uma árvore.

As figuras abaixo mostram alguns exemplos de árvores.

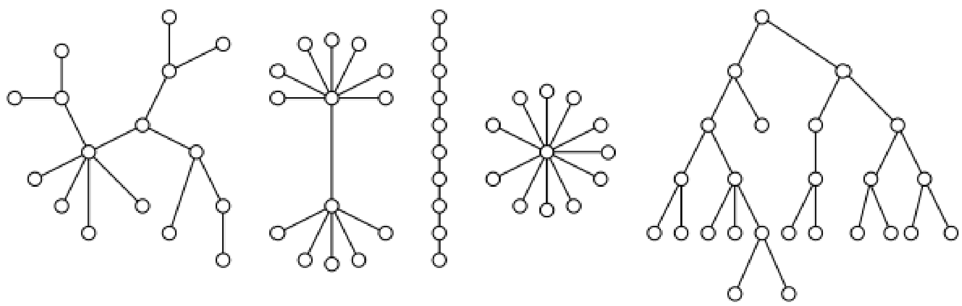


Figura 18 - Exemplos de árvores

Este tipo de grafo recebeu este nome porque alguns deles realmente parecem com árvores.

Teorema 4 (Lema da folha): Toda árvore, com pelo menos uma aresta, possui uma folha.

Demonstração: Considere um vértice qualquer da árvore. Se ele tiver grau 1, acabou! Caso contrário, vamos fazer um passeio: siga qualquer aresta, que incide nele, para outro vértice. Se este novo vértice tiver grau 1, acabou! Caso contrário, seguimos ao longo de qualquer aresta para outro vértice, e assim por diante. É claro que não podemos voltar para um vértice que visitamos antes, pois isto implicaria a existência de um ciclo (que não existe em árvores). Por outro lado, como o grafo tem um número finito de vértices, nosso passeio tem que terminar em um algum vértice, que tem grau 1.

Problema 3.1: Se todos os vértices de um grafo têm grau 3, então o grafo tem um ciclo.

Solução: Suponha, por contradição, que o grafo não tenha ciclos, então as componentes conexas seriam árvores. Absurdo, pois todos os vértices têm grau 3 e, portanto, não existe folha.

Problema 3.2: Prove que, se uma aresta (mas não suas extremidades) é retirada de uma árvore, então o grafo resultante não é conexo.

Demonstração: Suponha, por contradição, que o grafo seja conexo, desta forma existe um caminho ligando os dois vértices que era extremidades da aresta retirada, então este caminho, junto com a aresta retirada, nos dá um ciclo no grafo – uma contradição, pois o grafo é uma árvore.

Teorema 5: Em qualquer árvore, o número de vértices é igual ao número de arestas mais 1.

Demonstração: Seja V o número de vértices da árvore. Pelo teorema anterior, a árvore tem uma folha. Considere uma folha da árvore. Vamos retirá-la, junto com a única aresta a ela incidente. O grafo remanescente também é uma árvore, logo tem uma folha, que também retiramos com a única aresta a ela incidente. Executando essa operação V-1 vezes, obteremos uma árvore com um único vértice e, é claro, sem arestas. Como é retirada uma única aresta em cada operação, conclui-se que havia V-1 arestas.

Problema 3.3 (Cortando uma rede de vôlei): Uma rede de voleibol quadriculada tem dimensões 50x20. Qual é o número máximo de trechos unitários (pedaços de barbantes) que podem ser cortados da rede, sem retirar os nós, sem que ela se desconecte, ou seja, se divida em duas partes?

Solução: Vamos considerar que nossa rede de vôlei seja um grafo, em que cada pedaço unitário de barbante é uma aresta e os nós sejam os vértices desse grafo. Nosso objetivo é retirar o maior número de aresta possível, mantendo o grafo conexo. Note que, se o grafo tiver um ciclo, então podemos retirar qualquer das arestas neste ciclo. Podemos fazer esse processo repetidamente, sempre olhando para o menor ciclo possível, que serão os quadrados unitários. Sendo assim, queremos um grafo conexo e sem ciclos, mas um grafo conexo e sem ciclos é uma árvore – assim, quando tivermos obtido uma árvore, não poderemos retirar mais nenhuma aresta do grafo! (veja o problema 3.2).

Agora vamos calcular o número de arestas e o número de vértices do nosso grafo inicial. O número de arestas é $20 \times 51 + 21 \times 50$ e o número de vértices é 21×51. Agora, olhando para o grafo onde foi retirado o número máximo de arestas de modo que permanecesse conexo, temos que o número de vértices é o mesmo do grafo inicial, e como o grafo em questão é uma árvore, e pelo teorema 5 o número de arestas é dado por $21 \times 51 - 1$. Portanto, o número máximo de pedaços de barbantes que deve ser retirado da rede para que ela permaneça conectada é dada por $20 \times 51 + 21 \times 50 - (21 \times 51 - 1) = 20 \times 51 + 21 \times 50 - (20 \times 51 + 51 - 1) = 21 \times 50 - 50 = 20 \times 50 = 1000$.

Observações metodológicas. A ideia chave da solução do problema 3.3 é encontrar a árvore "maximal" dentro do nosso grafo. Veja na figura abaixo (Figura 19) que esta árvore "maximal" não é única. Esse método de selecionar a árvore "maximal" também ajudará a resolver os dois problemas seguintes.

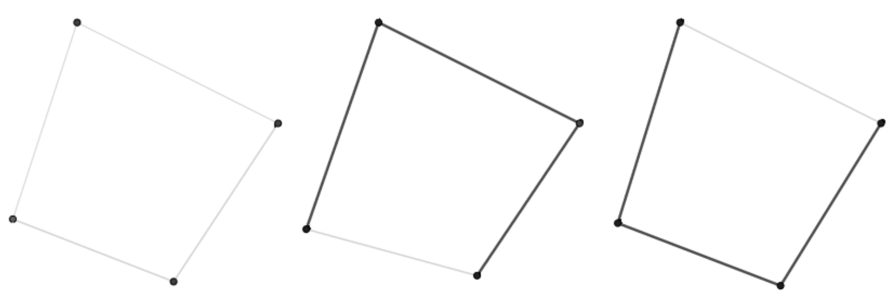


Figura 19 - Exemplo de árvore maximal

Problema 3.4: Um país tem 30 cidades. Cada uma delas está ligada a cada uma das outras por uma única estrada. Qual o número máximo de estradas que podem ser fechadas de modo que uma pessoa ainda possa chegar a qualquer cidade partindo de qualquer outra?

Solução: Vamos considerar um grafo no qual cada vértice representa uma cidade e as arestas são as estradas que as ligam. Neste grafo temos 30 vértices e $\binom{30}{2}$ arestas. Desta forma, queremos retirar o número máximo de arestas de modo que o grafo permaneça conexo, ou seja, queremos encontrar uma árvore "maximal" que possui $30 - 1 = 29$ arestas, portanto, o número máximo de estradas que podem ser retiradas é dado por $\binom{30}{2} - 29 = \frac{30\times29}{2} - 29 = \frac{30\times29-2\times29}{2} = \frac{28\times29}{2} = 14 \times 29 = 406.$

Problema 3.5: Um país tem 100 cidades e algumas delas estão ligadas por linhas aéreas. Sabe-se que pode ir de qualquer cidade para qualquer outra (talvez com diversas paradas intermediárias). Prove que você pode voar no país e visitar todas as cidades fazendo não mais do que:

a) 198 voos;

b) 196 voos.

Solução: Vamos considerar um grafo onde cada vértice representa uma cidade, e deste grafo vamos considerar o grafo "maximal" que possui 100 vértices e consequentemente 99 arestas, (a) se duplicarmos as arestas de cada vértice teremos um grafo euleriano e será possível passar por todas arestas e consequentemente por todos vértices e retornar ao ponto de partida, o que daria 198 arestas utilizadas, ou seja, 198 voos no máximo. (b) Por outro lado, o problema não fala em retornar à cidade de partida. Sendo assim, podemos ter um grafo semieuleriano, basta considerar duas folhas dessa árvore, uma representando a cidade inicial e a outra a cidade final, e para os 97 vértices restantes dobramos a quantidade de arestas que neles incidem, desta forma teremos um grafo com $2 \times 97 + 2 = 196$ arestas, onde começaríamos o trajeto em um vértice de grau 1 e terminaríamos no outro.

4. FÓRMULA DE EULER

A fórmula de Euler, conhecida também como relação de Euler ou teorema de Euler, é válida para poliedros convexos, mas veremos que há relação de Euler em regiões do plano. O caso plano da relação de Euler é um resultado importante na Teoria dos *Grafos* e neste capítulo demonstraremos este teorema clássico, nomeado em homenagem Leonhard Euler (1707-1783). Relacionado a isto, a seguir, definiremos um tipo especial de grafo e discutiremos suas propriedades.

Grafo planar: Um grafo é dito *planar* quando pode ser desenhado no plano de modo que suas arestas não se intersectem (exceto em suas extremidades). Tal grafo divide o plano em certas partes, chamadas de *faces*. Exatamente uma face é ilimitada, as outras são limitadas.

Por exemplo, o grafo mostrado na Figura 20é planar (um grafo isomorfo* a ele está ilustrado na Figura 21), enquanto que o grafo na Figura 22não é planar.

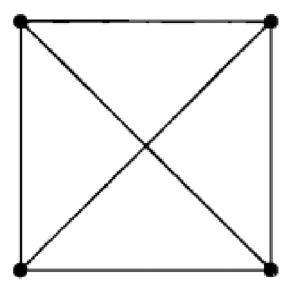


Figura 20 - Grafo planar

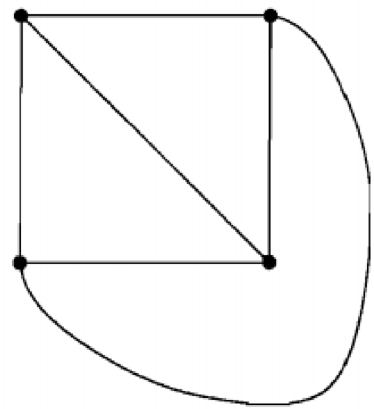


Figura 21 - Grafo isomorfo ao da Figura 20

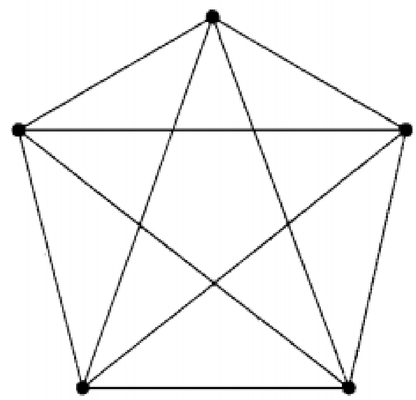


Figura 22 - Grafo não planar

Na Figura 21 dizemos que o grafo planar está ***representado propriamente***, isto é, suas arestas não se intersectam em pontos interiores.

<u>Comentário para o professor:</u> É importante que os estudantes compreendam que um grafo pode ser planar mesmo se algumas de suas arestas se intersectem em uma determinada representação, como na Figura 20.

Quando um grafo estiver representado propriamente, ele dividirá o plano em diversas regiões que denominaremos ***faces***. Denotaremos o número de faces por F, o número de vértices por V e o número de arestas por A. Para o grafo da Figura 21, temos V = 4, A = 6 e F = 4 (a região externa infinita do plano é contada como face.

Em algumas publicações aparece a palavra *mar* para denotar as faces limitadas e *oceano* para denotar a única face infinita).

Fórmula de Euler: Se G é um grafo planar conexo, representado propriamente, então a igualdade $V - A + F = 2$ é sempre válida.

Demonstração: Vamos analisar o comportamento das quantidades *V, A* e *F.* Tomemos a árvore maximal do grafo G e sejam *V', A'* e *F'* o número vértices, arestas e faces respectivamente da árvore maximal. Sabemos que $V' - A' = 1$ (pelo teorema 5) e $F' = 1$ (árvore não tem ciclo) e, portanto, vale a relação $V' - A' + F' = 2$. Por outro lado, temos que $V' = V, A' = V - 1 \ e \ F' = F - (A - A') = F - [A - (V - 1)]$. Vale ressaltar que o número de faces da árvore é dado pela diferença do número de faces de G e a quantidade de arestas retiradas, pois a cada aresta retirada de G o número de faces diminui 1. Da relação verdadeira $V' - A' + F' = 2$, fazendo as substituições temos que $V - (V - 1) + F - [A - (V - 1)] = V - A + F = 2$, portanto a mesma igualdade é verdadeira para o grafo original.

Vamos aplicar a fórmula a um problema bem simples.

Problema 4.1: Existem 7 lagos na Terra dos Lagos. Eles estão ligados por 10 canais de modo que seja possível usá-los para nadar de qualquer um dos lagos para qualquer outro. Quantas ilhas existem na Terra dos Lagos?

Solução: Considere o grafo planar cujos vértices são os lagos, cujas arestas são os canais e cujas faces são as ilhas. Como $V - A + F = 2, V = 7 \ e \ E = 10$, temos $F = 5$. No entanto, uma das faces é a face de fora que não é uma ilha, portanto a resposta é 4 ilhas.

O problema a seguir é mais difícil.

Problema 4.2: Vinte pontos estão marcados dentro de um quadrado. Eles estão conectados entre si por segmentos que não se intersectam e estão conectados com os vértices do quadrado de tal modo que o quadrado fica dividido em triângulos. Quantos triângulos temos?

Solução: Consideremos os pontos e os vértices do quadrado como os vértices de um grafo planar, e os segmentos e os lados do quadrado como suas arestas. Para cada região em que o grafo divide o plano, vamos calcular o número de arestas em sua fronteira, depois somamos todos esses números. Como qualquer aresta separa exatamente duas faces diferentes, desse modo estamos contando cada aresta duas vezes, e assim, esse total tem que ser o dobro do número de arestas. Como todas as faces são triângulos, exceto a face externa, cuja fronteira é formada por quatro arestas, obtemos $3(F-1)+4=2A$; ou seja, $A=3(F-1)/2+2$. Como o número de vértices é igual a 24, usando a fórmula de Euler, temos:

$$24-\left(\frac{3(F-1)}{2}+2\right)+F=2.$$

Assim, $F=43$. Nesta contagem está inclusa a face externa, portanto o quadrado está dividido em 42 triângulos.

<u>Comentário para o professor:</u> Esse problema, embora seja mais difícil que o primeiro, pode ser mais explorado. Ele pode ser colocado como problema introdutório, antes de ser falado da relação de Euler. Por certo, alguns estudantes tentarão resolver por meio de esquemas, ou até mesmo usando grafos, porém não aplicarão nenhum resultado. Possivelmente os que conseguirem resolver, resolverão por um método exaustivo, e aí entra o professor com o resultado da relação de Euler para simplificar a resolução do problema. Uma possível estratégia inicial usada pelo aluno está apresentada no esquema abaixo (Figura 23). Destacamos também que o problema pode ser simplificado, basta considerar um número menor de pontos dentro do quadrado, assim o problema dá para ser resolvido sem a relação de Euler, mas é interessante que o professor aumente o número de pontos interiores ao quadrado para que o aluno perceba que a relação auxilia, trazendo a solução de forma menos exaustiva.

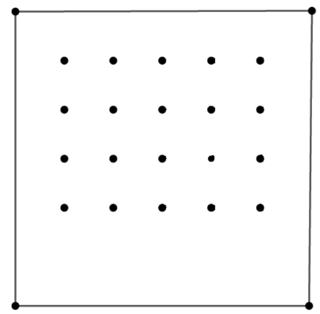


Figura 23 - Possível estratégia

Problema 4.3: Prove que, em um grafo planar conexo, $2A \geq 3F$.

Demonstração: Para cada região em que o grafo divide o plano, vamos calcular o número de arestas em sua fronteira, vamos considerar todos os casos, isto é, as regiões limitadas por três ou mais arestas, que representaremos por F_i, onde cada i é a quantidade de arestas que limita aquela face. Depois somaremos todos esses números. Como qualquer aresta separa exatamente duas faces diferentes, esse total tem que ser o dobro do número de arestas. Temos:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$$
$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \cdots) + F_4 + 2F_5 + \cdots$$
$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \cdots$$
$$2A \geq 3F$$

Observe que a igualdade só é válida quando o plano está dividido apenas por regiões limitadas por três arestas. Podemos exemplificar a igualdade pensando num grafo planar com três arestas apenas formando um ciclo, sendo assim teremos duas regiões, ou seja, duas faces, a interna e a externa. Neste caso, $A = 3, F = 2,$ e temos aigualdade, $2A = 3F$.

Problema 4.4: Prove que, em um grafo planar conexo, $A \leq 3V - 6$.

Demonstração: O problema anterior nos dá $2A \geq 3F$. Usando a fórmula de Euler, explicitando F e substituindo inequação do problema anterior, temos:

$$2A \geq 3(A - V + 2)$$
$$2A \geq 3A - 3V + 6$$
$$A \leq 3V - 6$$

Como queríamos demonstrar.

Problema 4.5: Mostre que um grafo com 5 vértices em que cada um deles esteja conectado por uma aresta a todos os outros não é planar.

Solução: De fato, pois neste grafo $V = 5$ e $A = \binom{5}{2} = \frac{5\times 4}{2} = 10$. Supondo que tal grafo é planar, deve ser válido a desigualdade $A \leq 3V - 6$, mas $10 \leq 3 \times 5 - 6 \leftrightarrow 10 \leq 9$, absurdo!

Observação: Um grafo tal que cada vértice está ligado a todos os outros vértices é dito *completo.* Denotamos sendo a aplicação K_n o grafo completo com n vértices. O resultado do Problema 4.5 significa que a aplicação K_n para $n > 4$, não é planar, ou seja, um grafo completo com mais de 4 vértices não é planar. A Figura 24mostra o grafo completo com 5 vértices.

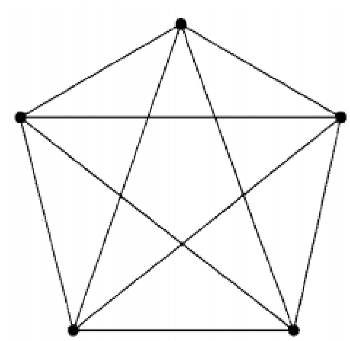


Figura 24 - Grafo completo com 5 vértices

Podemos sempre pensar e representar um grafo completo K_n como um polígono com n vértices com todas suas diagonais.

Problema 4.6: Existem três casas e três fontes. É possível construir um caminho de cada casa para cada fonte de modo que esses caminhos não se cruzem?

Solução: Não. De fato, se fosse possível, as casas, fontes e caminhos formariam um grafo planar conexo, com $\mathrm{V} = 6$ e $\mathrm{A} = 9$. Pela Fórmula de Euler, $F = 2 + A - V = 2 + 9 - 6 = 5$. Mas, como cada face tem pelo menos 4 arestas (qualquer ciclo tem que ter comprimento* par, já que casas e fontes se alternam), então o número de arestas deveria pelo menos ser igual a $2 \times 5 = 10(\text{pois}, 2A = 4F_4 + 5F_5 + \cdots 4(F_4 + F_5 + \cdots) + F_5 + \cdots = 4F + F_5 + \cdots$, ou seja, $A \geq 2F$), o que é uma contradição.
*comprimento do ciclo é dado pela quantidade de arestas que o compõe.

Curiosidade: O problema 4.6 é impossível no plano e também na esfera, mas é possível se as três casas e as três fontes estiverem sobre a superfície de um toro. Veja a Figura 25.

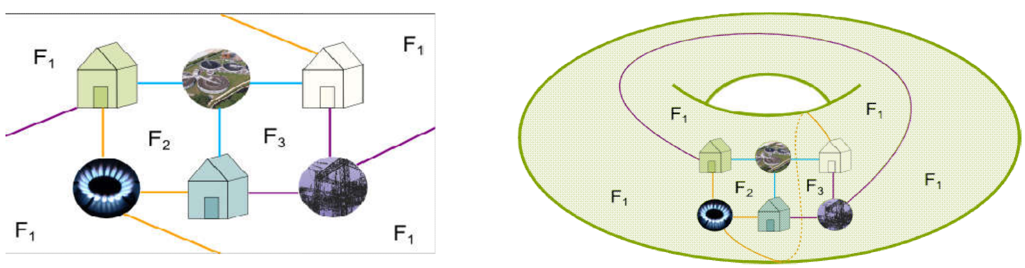


Figura 25 - Toro

<u>Comentário para o professor:</u> A relação de Euler é válida para *poliedros convexos,* e para o caso *plano*, imagine que o poliedro é feito de borracha e infle-o injetando ar até que se transforme em uma esfera. Em seguida, a partir de um furo feito em uma das faces, estique-o até que se transforme em um plano. Resulta, assim, um grafo planar conexo, em que a face ilimitada corresponde à face do poliedro em que foi feito o furo. O leitor poderá encontrar mais sobre esse assunto no livro "A Matemática do Ensino Médio Volume 2", SBM, da Coleção do Professor de Matemática.

5. PROBLEMAS VARIADOS

Este capítulo é destinado à resolução de vários problemas de várias partes da teoria dos grafos. Ao resolvê-los, é necessário combinar os métodos descritos até aqui com outras ideias e outros conteúdos matemáticos. Alguns são bem difíceis, por isso recomendamos que fossem trabalhados ao fim do conteúdo e cabe ao professor selecionar os problemas que mais se encaixam com a realidade e o nível de aprendizado dos seus alunos.

O problema 5.1 e a sua solução foram retirados da referência [5].

Problema 5.1: Prove que qualquer grafo conexo tendo não mais do que dois vértices “ímpares” pode ser desenhado sem levantar o lápis do papel de modo que cada aresta é desenhada exatamente uma vez.

O problema 5.1 é na verdade a recíproca do teorema 3, já demonstrado, mas aqui apresentaremos uma nova demonstração para o caso em que todos os vértices têm grau par. Nesta demonstração usaremos o *princípio de indução finita (ou indução matemática),* então daremos uma breve introdução sobre o que é o princípio de indução.

Princípio de indução finita: O princípio é um método de demonstração e de construção de definições, como por exemplo, as operações de adição e multiplicação em$\mathbb{N}$. O princípio de indução é o último *axioma* de Peano (1858-1932). Axioma é uma lista de propriedades essenciais que caracterizam e estruturam uma sequência, sem ambiguidades ou propriedades supérfluas. Giuseppe Peano propôs uma lista de axiomas, baseado na noção de *sucessor* de um número natural. A construção de Peano caracteriza o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ por meio dos 4 axiomas:

1. Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
3. Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro.
4. Seja X um subconjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

O axioma da Indução pode ser reescrito como abaixo, usando a linguagem de propriedades:

4. Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponha que

i) $P(1)$ é válida.
ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$.
Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação: A verificação de que $P(1)$ é válida costuma ser chamada de *caso base* de uma demonstração por indução, enquanto a demonstração de que a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$ é chamada de *passo de indução.*

Exemplo 5.1.1: mostre que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução: Seja $P(n)$: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
O primeiro passo é:
i) Verificar a validez de $P(n)$ para $n = 1$.

$P(1)$: $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ é válida.

A seguir, devemos:

ii) Verificar que a validez de $P(n)$, para um valor arbitrário de n, implica na validez de $P(n+1)$.

Ou seja, admitindo que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para um certo valor de n, devemos mostrar que $1 + 2 + 3 + \cdots + n\ + (n+1)\ = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Para tal, somamos o novo termo $n + 1$ a ambos os membros de $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Obtemos:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n\ + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Portanto, a validez de $P(n)$ para um valor arbitrário de n implica em sua validez para $n + 1$.

Logo, pelo Princípio de Indução, $P(n)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5.1.2: mostre que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução: Seja $P(n)$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

O primeiro passo é:

i) Verificar a validez de $P(n)$ para $n = 1$.

$P(1)$: $1 = 1^2 = 1$ é válida.

A seguir, devemos:

ii) Verificar a validez de $P(n)$, para um valor arbitrário de n, implica na validez de $P(n+1)$.

Ou seja, admitindo que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ para um certo valor de n, devemos mostrar que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2(n+1) - 1) = (n+1)^2$.

Para tal, somamos o novo termo $2(n+1)-1$ a ambos os membros de $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Obtemos:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=n^2+2(n+1)-1=n^2+2n+1$$
$$=(n+1)^2$$

Portanto, a validez de $P(n)$ para um valor arbitrário de n implica em sua validez para $n+1$.

Logo, pelo Princípio de Indução, $P(n)$, ou seja, $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para resolver o problema 5.1, usaremos uma variação obtida a partir do Princípio de Indução que é chamado de *Princípio da Indução Completa* ou da *Indução forte.* Nela, a hipótese de indução é a validez da propriedade para todos os naturais menores que ou iguais a um natural n. Enunciamos da seguinte forma:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

i) $P(1)$ é válida.

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(k)$, para todo $k \leq n$, implica na validez de $P(n+1)$.

Então $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

De posse do Principio de Indução acima podemos resolver nosso problema.

Solução: Considere a sentença $P(n)$: um grafo conexo com $n-1$ arestas e com todos os vértices pares pode ser desenhado sem levantar o lápis do papel de modo que cada aresta é desenhada exatamente uma vez.

Temos que a base é óbvia (pois, neste caso o grafo é composto de um único vértice). Suponha que para$n \in \mathbb{N}$, $P(k)$ é verdadeiro para todo $k \leq n$, agora observemos que o grafo não tem folhas. Sendo assim, ele não é uma árvore e, portanto, ele contém um ciclo. Podemos retirar, temporariamente, todas as arestas do ciclo. Depois disso, o grafo se separa em diversas componentes conexas que têm vértices em comum com o ciclo "retirado temporariamente" e satisfazem a condição da hipótese de indução (veja a Figura 26). Pela hipótese de indução, cada uma dessas componentes pode ser desenhada da maneira desejada, pois a quantidade de arestas de cada componente conexa é menor do que n. Agora, é claro como desenhar o grafo conexo com n arestas e todos os vértices pares: Seguimos o ciclo e, chegando a um vértice que pertence a uma componente conexa, desenhamos a componente a partir desse vértice e terminamos no mesmo vértice, e depois continuamos nosso movimento ao longo do ciclo. Desta forma, desenhamos o nosso grafo com n arestas passando uma única vez por cada aresta.

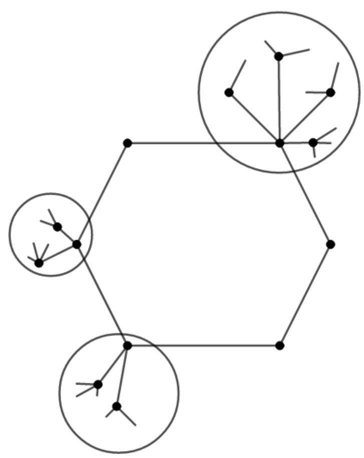


Figura 26 - Grafo do problema 5.1

A demonstração para o caso em que o grafo contém dois vértices de grau ímpar é bem semelhante à que foi feita no teorema 3. Temporariamente, retire um caminho ligando esses dois vértices e aplique a mesma técnica do caso anterior.

Problema 5.2: Qual é o número máximo de regiões em que n retas dividem o plano?

Solução: Evidentemente, o número máximo de regiões ocorre quando essas retas estão situadas de modo a terem o número máximo possível de pontos de intersecção. Esse número máximo acontece quando:

1º) Entre as retas dadas não há paralelas;

2º) Nenhum ponto é a intersecção de mais de duas retas dadas.

Neste caso, diz-se que as n retas dadas estão em posição geral.

Dadas n retas em posição geral, para determinar o número R de regiões em que elas dividem o plano, procederemos da seguinte maneira. Em primeiro lugar, traçamos um círculo tão grande que contenha em seu interior todos os pontos de intersecção das n retas. Os requisitos 1º e 2º acima asseguram que, para cada duas das n retas dadas, há um ponto de intersecção e vice-versa. Logo, o número dos pontos de intersecção, todos situados no interior do nosso círculo, é $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Na Figura 27, temos quatro retas em posição geral. Seus 6 pontos de intersecção estão no interior do círculo ali traçado.

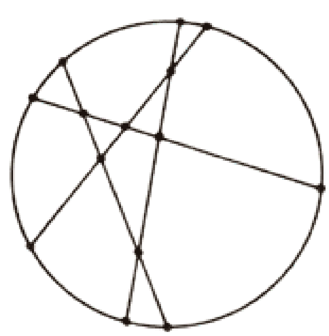


Figura 27 - Posição geral de 4 retas

Agora consideremos o grafo planar G, obtido quando desprezamos as partes das retas que ficam no exterior do círculo que traçamos.

Os vértices de G são as intersecções das n retas duas a duas e mais os$2n$ pontos em que essas n retas intersectam a circunferência: ao todo, temos $V = 2n + n(n-1)/2$ vértices no grafo G.

As arestas de G são os $2n$ arcos de círculo correspondentes e mais os segmentos de reta interiores ao círculo. Sobre cada uma das n retas há $n+1$ vértices, a saber: os $n-1$ pontos de intersecção dessa reta com as $n-1$ outras e os 2 pontos em que ela corta a circunferência. Logo, temos n segmentos, isto é, n arestas do grafo G, sobre cada uma das n retas dadas. Ao todo, são n^2 arestas de G interiores ao círculo, com o total de $A = n^2 + 2n$ arestas em G. O número R de regiões em que as n retas dadas dividem o plano é igual ao número de regiões determinadas pelo grafo G menos uma, que é a região exterior ao círculo. A fórmula de Euler diz que se um grafo com V vértices e A arestas decompõe o plano em F regiões, tem-se $V - A + F = 2$. Como $F = R + 1$, temos pela fórmula de Euler temos, portanto, $V - A + R = 1$, ou seja, $2n + n(n-1)/2 - n^2 - 2n + R = 1$,onde$R = 1 + n(n+1)/2$. Equivalentemente: $R = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$.

Problema 5.3: Mostre que em um jogo de dominó, completo com 28 peças, é possível formar uma sequência com todas as peças e, mais, a sequência pode ser iniciada por qualquer peça e que o número do início da sequência é igual ao número final da sequência.

Solução: Vamos considerar um grafo onde cada um dos números (0,1,2,3,4,5 e 6) que aparece nas peças do dominó é um vértice desse grafo, e as arestas ligam os vértices que formam uma peça. Veja a Figura 28.

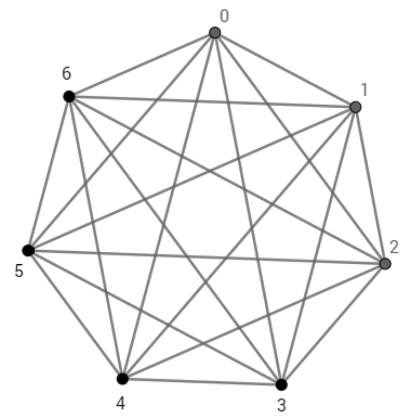


Figura 28 - Grafo das peças de dominó

Podemos observar que esse grafo é um grafo completo K_7 e como cada vértice possui grau igual a 6, ou seja, todos os vértices têm grau par e portanto pelo teorema 3 (Teorema de Euler), esse grafo é euleriano, sendo assim, existe um caminho euleriano onde o vértice inicial é igual o vértice final, como queríamos demonstrar.

Comentário ao professor: Um aluno mais atento aos detalhes pode observar que não há aresta representando os duplos (peças que possuem o mesmo número nas duas partes que fica dividida cada peça) perguntar algo a respeito. De fato, omitimos essas peças na construção do gráfico. Isso porque a presença delas na sequência é irrelevante, mas é uma boa oportunidade para incluir a definição de ***laço***. Laço é a aresta que liga um vértice a ele mesmo. Desta forma, o grafo ficaria como na Figura 29. A inclusão dos laços no grafo problema não interfere no resultado da possibilidade da construção da sequência. Esse fato pode ser observado na prática, como também na teoria aplicada, pois a inclusão de um laço em cada vértice terá uma contribuição de 2 unidades no grau de cada vértice, ou seja, passa a ser 8 o grau de cada vértice que é par.

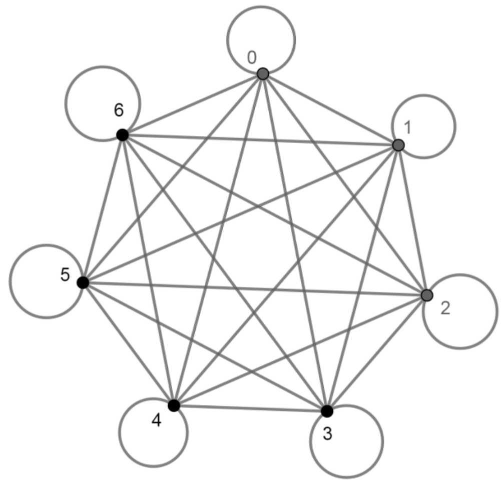


Figura 29 - Grafo do dominó com laços

Problema 5.4 (Problema do dominó incompleto): Aline e Alice em um fim de semana vão passear na casa dos avós e lá resolvem jogar dominó, mas Aline se lembra de que sua irmã Alice havia perdido algumas peças do jogo, restando apenas 16 peças como mostra a Figura 30, então Aline questiona seu avô se há a possibilidade de jogar com as peças restantes. Caso você fosse o avô de Aline e Alice o que responderia?

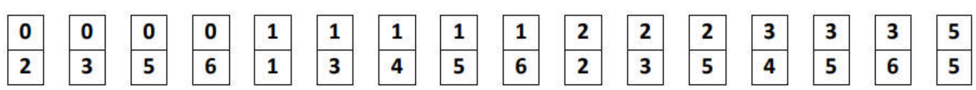


Figura 30 - Dominó incompleto

Solução: Primeiro vamos contar quantas vezes aparece cada número. O zero apareceu quatro vezes, o 1 aparece seis vezes, o 2 cinco vezes, o 3 seis vezes, o 4 duas vezes, o 5 seis vezes e, o 6 aparece três vezes. Observe que os números 2 e 6 aparecem uma quantidade ímpar de vezes. Agora vamos considerar um grafo com as mesmas características do problema 5.3, portanto, teremos um grafo que é obtido a partir do grafo do problema anterior retirando-se algumas arestas. Esse novo grafo possui apenas dois vértices com grau ímpar, portanto existe um circuito euleriano começando em um vértice de grau ímpar e terminando no outro. Sendo assim os números que apareceram nas pontas da sequência de peças é o 2 e o 6.

Problema 5.5 O bode, a onça e o capim: Um camponês criava uma onça e tinha também nas suas terras algumas criações de bode. Certo dia ele precisou atravessar o rio de canoa e levava com ele uma porção de capim, a onça e um bode, só que a capacidade da canoa só dava para atravessar o camponês e um dos animais ou o capim por vez, por conta do peso. É aí que estava o problema: não podia deixar o bode com o capim nem a onça com o bode para evitar que um comesse o outro, então a pergunta é a seguinte: você sabe dizer como o camponês atravessou tudo para o outro lado do rio?

Solução: Não é difícil resolver esse problema sem usar grafos, mas a resolução que descreveremos leva a uma formulação interessante em teoria de grafos. Primeiro precisamos adotar algumas notações para identificar a localização de cada animal e do capim em relação ao rio. Usaremos as letras O, B e C para representar a onça, o bode e o capim, respectivamente. Na tripla ordenada (O, B, C), cada elemento, será substituído por 0 ou 1, obedecendo à seguinte regra: 0 indica que o elemento correspondente se encontra na posição inicial e o valor 1 indica que o elemento está na posição final, ou seja, na outra margem do rio. Então temos:

• (0, 0, 0): situação inicial, ou seja, nenhum dos três atravessou o rio.

• (1, 0, 0): a onça atravessou o rio, mas o bode e o capim ainda estão na margem inicial.

• (0, 1, 0): o bode atravessou o rio, mas a onça e o capim ainda estão na margem inicial.

• (0, 0, 1): o capim atravessou o rio, mas a onça e o bode ainda estão na margem inicial.

• (1, 1, 0): a onça e o bode atravessaram o rio, mas o capim ainda está na margem inicial.

• (0, 1, 1): o bode e o capim atravessaram o rio, mas a onça ainda está na margem inicial.

• (1, 0, 1): a onça e o capim atravessaram o rio, mas o bode ainda está na margem inicial.

• (1, 1, 1): todos atravessaram o rio.

Este problema pode ser representado por um grafo onde os vértices são as triplas ordenadas acima, e existe uma aresta entre dois vértices se houver a possibilidade de exatamente um dos elementos mudar de posição. Observe que este grafo é um cubo, conforme mostra a Figura 31. Nesta figura podemos fazer uma correspondência com o plano cartesiano $\mathbb{R}^3$ com coordenadas $(x,\ y,\ z)$, onde os movimentos da onça correspondem ao eixo x, os movimentos do bode ao eixo y e os do capim, ao eixo z.

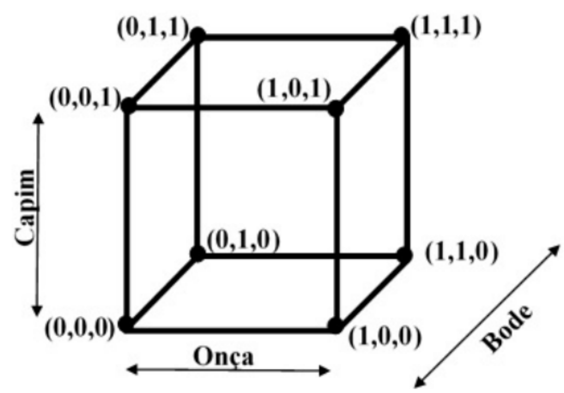


Figura 31 - Posições da onça, do bode e do capim

Para obter a solução deste problema, inicialmente desconsideramos as arestas que representam movimentos não válidos, ou seja, onde há a possibilidade de um elemento comer o outro. Obtemos desta forma, a configuração da Figura 32.

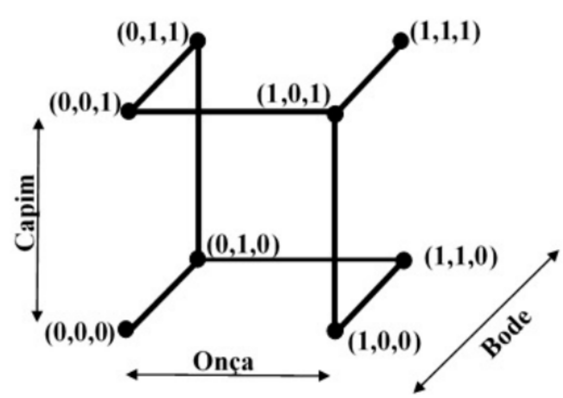


Figura 32 - Possibilidades de movimentos válidos

Agora, tudo o que precisamos é encontrar um caminho que comece em (0, 0, 0) e termine em (1, 1, 1). Temos então duas possíveis soluções, mostradas nas Figura 33 e Figura 34.

Primeira solução:

1. Transporte o bode para o outro lado;
2. Transporte o capim para o outro lado;
3. Transporte o bode de volta para a margem inicial;
4. Transporte a onça para o outro lado;
5. Transporte o bode para o outro lado.

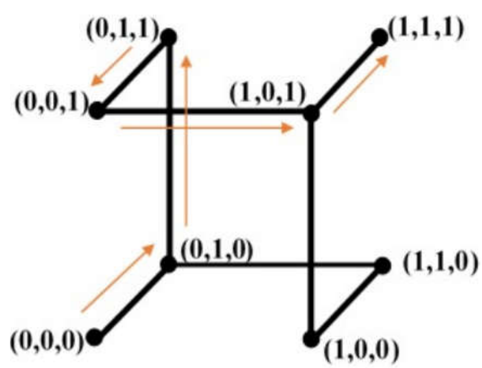


Figura 33 - Primeira solução

Segunda solução:

1. Transporte o bode para o outro lado;
2. Transporte a onça para o outro lado;
3. Transporte o bode de volta;
4. Transporte o capim para o outro lado;
5. Transporte o bode para o outro lado.

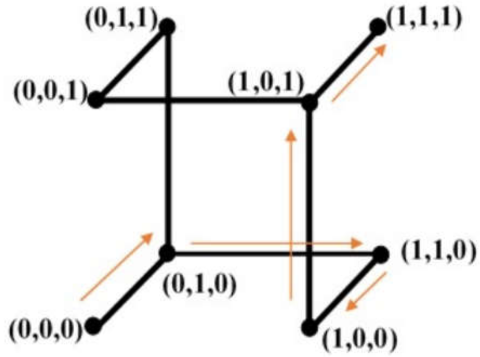


Figura 34 - Segunda solução

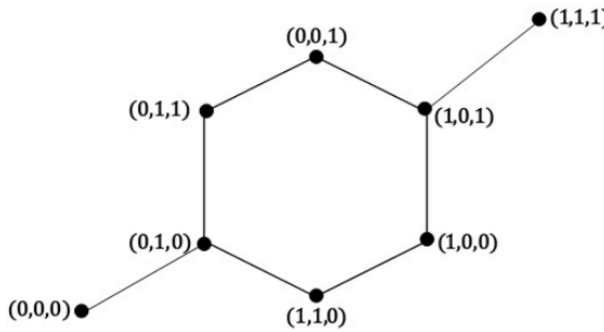


Figura 35 - Grafo com ciclo

Note que o grafo da Figura 35é isomorfo ao grafo da Figura 34. Observando este grafo, vemos que para atingirmos o objetivo, que é partir do vértice (0,0,0) e chegar ao vértice (1,1,1), temos apenas dois caminhos, que são $P_1 = \{(0,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ e $P_2 = \{(0,0,0),(0,1,0),(0,1,1),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$, os quais representam as duas soluções com o menor número de travessias, respectivamente.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma proposta de introdução à teoria de grafos, em que o leitor teve o contato com a parte teórica e com a parte aplicada, através da resolução de problemas. Aqui foram apresentados vários problemas com suas respectivas resoluções. Os problemas estimulam a criatividade e o senso crítico matemático, deixando de lado a resolução de problemas de maneira mecânica ou de memorização de procedimentos. Em alguns problemas foi feito uma vinculação prática do que ocorre em sala de aula e fora dela.

Quando se fala em ensino da matemática uma das palavras chave é "contextualização", nesse sentido a teoria de grafos é rica em contextualização, pois a teoria de grafos surgiu com um problema real e contextualizado. Esse trabalho valorizou essa riqueza, desenvolvendo o assunto de modo lógico, atrativo e respeitando os pré-requisitos da própria teoria de grafos.

Levando em consideração que a teoria de grafos é tema novo para muitos professores de Matemática e que não há materiais de apoio amplamente divulgados sobre o assunto, o presente trabalho é uma proposta para minimizar essa lacuna. O professor é o profissional que deve estar em constante formação, pois o conhecimento matemático não está acabado, muito menos todo descoberto, então cabe ao professor se atualizar, embora não seja tão simples assim, pois há vários entraves, como, por exemplo, a carga horária exaustiva de sala de aula, os poucos horários de planejamento e as poucas condições oferecidas pelo Estado para formação continuada. Esses são alguns aspectos que dificultam a prática docente, que desestimulam os profissionais e que não atraem os jovens a serem futuros professores. Essas dificuldades fazem com que o professor fique estagnado e não procure o novo, o diferente, aquilo que atrai o estudante, tornando, assim, as aulas mecanizadas e tradicionais.

Para finalizar, o Estado deve propiciar e facilitar o acesso a formações continuadas aos profissionais da educação, trabalhando temas pouco conhecidos ou pouco abordados e que estejam no CBC, como a teoria de grafos, e que essas formações sejam ministradas por profissionais capacitados, fazendo com que a formação seja significativa para o docente. E que as editoras de livros didáticos, bem como os autores de livros didáticos, voltem suas atenções para temas pertinentes, como, por exemplo, a Teoria de Grafos, inserindo-os nos livros didáticos, visando atingir professores e estudantes de todo o país, para que tenham acesso a assuntos novos, pertinentes e enriquecedores.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*, vol. 2. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio, Brasília, 2006

[2] BRASIL/MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Ciências *da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

[3] CARVALHO, P. C. P. *Dois problemas sobre grafos.* EUREKA, Edição especial, 8 – 14, Primeiro semestre de 2007.

[4] ESPÍRITO SANTO/SEDU*. Currículo Básico Escola Estadual: Área de Ciências da Natureza, Matemática*. Vitória: SEDU, 2009.

[5] FOMIN, Dimitri& GENKIN, Sergei & ITENBERG, Ilia.*Mathematical Circles (Russian Experience)*.American Mathematical Society. Mathematical World, Volume 7, 1996.

[6] JURKIEWICZ, S. *Grafos – uma introdução.* Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.

[7] LIMA, E. L. *Alguns problemas clássicos sobre grafos.* RPM, 2 ed. 87 – 94, maio/junho de 2008.

[8] LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio.* 6 ed. Volume 2. Rio de Janeiro: SBM 2006.

[9] LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. *Discrete Mathematics: Elementar and Beyond.* New York: Springer, 2000.

[10] MALTA, Gláucia Helena Sarmento. *Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível*. 2018. 154f. Dissertação - UFRGS, Porto Alegre, 2008.

[11] MAURI, RONE. *Uma abordagem da teoria de grafos no ensino médio.* 2013. 63f. Dissertação -UFES, Vitória, 2013.

[12] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos– Aula 1 – O que é um grafo?. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Frmwdter-vQ&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[13] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 2 – Alguns problemas simples. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=fLNQfhpv-js&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=2>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[14] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 3 – Conectando cidades. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ZINJFcm9_uo&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=3>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[15] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 4 – Um problema com pecas de xadrez. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=0Ii1xUYnJQo&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=4>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[16] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 5 – Grau de um vértice e o problema das Pontes de Königsberg. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=125pPCIRjZ8&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=5>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[17] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 8 – Soma dos graus dos vértices. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=DoQYgernzF8&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=8>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[18] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 9 – Soma dos graus e paridade. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=aC4XutTHxxo&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=9>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[19] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 10 – Conexidade. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=eNE1rlXJF_o&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=10>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[20] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 11 – Dividindo grafos em componentes conexas. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=SH22EbvIB6E&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=11>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[21] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 12 – Criando componentes ao deletar uma aresta. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=WbKFTef377M&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=12>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[22] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 14 – Tipos especiais de grafos 1. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=CRNfYfIT_P4&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=14>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[23] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 15 – Tipos especiais de grafos 2. Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=Wm1c5jcPP1A&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=15>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[24] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA OBMEP. Introdução à Teoria de Grafos – Aula 16 – Tipos especiais de grafos 3. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=uc7jq8RMB3U&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=16>. Acesso em: 15 jul. 2017.

[25] SHINE, Carlos. Programa Olímpico de Treinamento. CURSO COMBINATÓRIA – NÍVEL 3. 2012. 14p. Notas de Aula.