UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

HUGO ALVES MACHADO

UM ESTUDO DA SEMELHANÇA DE FIGURAS ENVOLVENDO AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS PRESENTES NOS LIVROS DIDÁTICOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

FORTALEZA - CEARÁ
2019

HUGO ALVES MACHADO

UM ESTUDO DA SEMELHANÇA DE FIGURAS ENVOLVENDO AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS PRESENTES NOS LIVROS DIDÁTICOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Costa Pereira

FORTALEZA - CEARÁ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Machado, Hugo Alves Machado.
Um estudo da semelhança de figuras envolvendo as representações semióticas presentes nos livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental [recurso eletrônico] / Hugo Alves Machado Machado. - 2019.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 204 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.
Área de concentração: Ensino de matemática.
Orientação: Prof.ª Dra. Ana Carolina Costa Pereira.

1. Semelhança. 2. Livro. 3. Registros. I. Título.

HUGO ALVES MACHADO

UM ESTUDO DA SEMELHANÇA DE FIGURAS ENVOLVENDO AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS PRESENTES NOS LIVROS DIDÁTICOS DO 9°ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 29 de julho de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Costa Pereira (Orientadora)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Wanderley de Oliveira Pereira

Prof. Dr. Wanderley de Oliveira Pereira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Ana Cláudia Mendonça Pinheiro

Prof.ª Dr.ª Ana Cláudia Mendonça Pinheiro
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me fortalecer nos momentos mais difíceis da vida.

Aos meus pais, pois nunca mediram esforços para me proporcionar uma educação de qualidade. Sempre me ensinaram os valores da vida e me incentivam a ser uma pessoa melhor.

Aos meus irmãos, Camila Alves Machado e Filipe Alves Machado, pois são exemplos de profissionais excelentes e de pessoas formidáveis.

Aos meus alunos que, durante esta jornada, foram fonte de incentivo e de inspiração.

Aos meus amigos e colegas do programa PROFMAT – UECE, que sempre se mostraram disponíveis a compartilhar não só os conhecimentos adquiridos durante os semestres, mas também uma amizade sincera.

Aos professores do programa PROFMAT – UECE, especialmente a professora e orientadora desta dissertação: professora doutora Ana Carolina Costa Pereira. Obrigado pela sua dedicação, disponibilidade e ensinamentos, que jamais serão esquecidos.

E um agradecimento especial à minha esposa Sávia Pratrícia Malveira e à minha filha Laura Malveira Machado. Eu não sou o melhor filho, irmão, amigo, profissional, esposo, e muito menos o melhor pai, mas por vocês duas eu prometo que continuarei tentando ser o melhor, amo vocês.

RESUMO

O processo de ensino e aprendizagem ocorre efetivamente quando proporcionamos aos alunos uma multiplicidade de experiências através de uma diversificação nas abordagens apresentadas para um determinado conteúdo matemático. Por entender que o livro didático pode ser um instrumento de extrema relevante no processo de ensino e aprendizagem será fonte de estudo desta pesquisa. Descrevemos e analisamos como os livros selecionados, que estão inseridos no guia dos livros didáticos (2016) e de acordo com o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), proporcionam as abordagens conceituais referente ao ensino das semelhanças de figuras. O objetivo desta pesquisa é conhecer e identificar como e quais são os recursos que os livros didáticos apresentam, a fim de proporcionar aos alunos, uma apropriação no processo da transição do conceito geométrico para as operações algébrico-numéricas no estudo de semelhança de figuras sobre uma ótica da Teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval. Iniciamos realizando uma pesquisa qualitativa, uma investigação documental, descritiva e argumentativa. Para fundamentar os procedimentos adotados, baseamo-nos na Análise de Conteúdo de Laurence Bardin. Analisamos e descrevemos como e quais são as representações semióticas presentes nos textos introdutórios, nas enunciações conceituais, nas questões, envolvendo medidas, lineares, superficiais, e volumétricas para o ensino de semelhança de figuras. Para comprovar as interpretações obtidas no decorrer da análise e da descrição das obras elaboramos quatro fichas. Cada ficha possibilita a identificação, a quantificação, e o agrupamento de dados referente as abordagens para o ensino de semelhança de figuras na perspectiva das representações semióticas. Após a análise das obras selecionadas e diante dos resultados obtidos entendemos que o ensino de semelhança de figuras, presente nas obras, é enunciado e exibido por registros multifuncionais e monofuncionais, discursivos e não discursivos, contudo apenas duas obras apresentam uma multiplicidade de representações semióticas, proporcionando ao aluno uma compreensão efetiva no processo da transição do meio geométrico conceitual para a escrita algébrica numérica, seguindo as ideias da teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval.

Palavras-chave: Semelhança, Livro, Registros.

ABSTRACT

The teaching and learning process occurs effectively when we provide students with a multiplicity of experiences through a diversification in the approaches presented for a given mathematical content. Understanding that the textbook can be an extremely relevant instrument in the teaching and learning process will be a source of study of this research. We describe and analyze how the selected books, which are included in the textbook guide (2016) and according to the National Book and Textbook Program (PNLD), provide conceptual approaches to teaching similarities of pictures. The objective of this research is to know and identify how and what are the resources that textbooks present, in order to provide students with an appropriation in the process of transition from geometric concept to numerical algebraic operations in the study of similarity of figures on an optics. Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Records. We started by conducting a qualitative research, a documentary, descriptive and argumentative investigation. To support the procedures adopted we based on Laurence Bardin's Content Analysis. We analyze and describe how and what are the semiotic representations present in the introductory texts, in the conceptual statements, in the questions, involving linear, superficial, and volumetric measures for the teaching of similarity of figures. To prove the interpretations obtained during the analysis and description of the works we have prepared four fact sheets. Each form enables the identification, quantification, and grouping of data regarding the approaches to teaching similarity of figures from the perspective of semiotic representations. After analyzing the selected works and considering the results obtained, we understand that the teaching of similarity of figures, present in the works, is enunciated and displayed by multifunctional and monofunctional, discursive and non-discursive records, but only two works present a multiplicity of representations. semiotics, providing the student with an effective understanding of the process of transition from the conceptual geometric environment to numerical algebraic writing, following the ideals of Raymund Duval's theory of semiotic representation records.

Keywords: Similarity, Book, Records.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) promove anualmente uma avaliação diagnóstica, a fim de verificar as competências e habilidades desenvolvidas no âmbito escolar para o ensino fundamental e médio. De acordo com o desempenho dos docentes, estabelecem-se parâmetros que geram uma média na proficiência referente ao ensino da matemática e ao ensino da língua portuguesa.

O quadro 1 apresenta dados disponíveis sobre a média da proficiência para o ensino de matemática no 9º ano do Ensino Fundamental II de acordo com (SPAECE, 2019)

Quadro 1 – Média na proficiência em matemática no Estado do Ceará

Edição	Proficiência	% por Padrão de Desempenho			
		Muito Crítico	Crítico	Intermediário	Adequado
2015	240,4	37,4	41,8	18,0	2,9
2016	246,1	32,2	42,6	21,9	3,3
2017	237,0	43,6	35,6	17,6	3,1

Fonte: Adaptação do site http://resultados.caedufjf.net/resultados/publicacao/publico/escola

De acordo com os dados apresentados nos últimos três anos, a maior parcela está inserida nas categorias “muito crítico” e “crítico”. Diante desta realidade é preciso repensar e reformular ações estratégias e metodologias.

Para iniciar essa reformulação é importante saber os aspectos relevantes que são avaliados no SPAECE. Os aspectos, ou assuntos, que são avaliados estão listados em uma na matriz de referência. Nessa matriz constam os assuntos considerados relevantes para o prosseguimento no ensino da matemática. Os assuntos que compõem a matriz estão divididos em quatro temáticas. Tema I: interagindo com os números e funções; Tema II: convivendo com a geometria; Tema III: Vivenciando as medidas e Tema IV: tratamento da informação.

Cada tema é composto por descritores, pontos que indicam quais assuntos são avaliados e quais competências e habilidades o docente precisa ter para solucionar determinadas tarefas. A matriz de referência onde constam os temas e os descritores está exposta no anexo A desta dissertação.

Consideramos que propor um ensino diferenciado, significativo e construtivo, são meios que permitiram uma alteração nas categorias. Para alterar as categorias de forma gradual e continua, é necessário desenvolver atividades que enriqueçam as ações, estratégias e metodologias no ensino da matemática. Assim, para promover a graduação da classificação dos docentes de “muito crítico” para “crítico”, de crítico para intermediário, e de intermediário para adequado, de acordo com padrão de classificação do SPAECE, entendemos que é importante apresentar uma pluralidade de abordagens no ensino da geometria, visto que as competências e habilidades necessárias para o ensino da geometria estão relacionadas às duas temáticas na matriz de referência do SPAECE.

No decorrer da minha graduação, em uma disciplina optativa, de desenho geométrico, na Universidade Federal do Ceará (UFC), foi possível perceber a importância do manuseio do material concreto, régua e compasso. Afinal, são ferramentas que proporcionam um outro olhar na construção dos conceitos geométricos. Paralelamente a este período, em um Colégio da rede particular, do município de Fortaleza, em que lecionava eu e outros professores, orientados na época pelo coordenador pedagógico de matemática, iniciávamos os assuntos referentes à geometria, promovendo aulas de desenho geométrico, com o manuseio de régua e compasso.

Produzíamos construções geométricas e posteriormente introduzíamos os alunos em um ambiente informatizado, por meio da utilização do software geométrico Cabri-Géomètre. Antes mesmo de apresentarmos os conceitos matemáticos e iniciarmos a transição do conceito geométrico para as operações algébricas, induzíamos os alunos a uma investigação e dedução das propriedades geométricas através da experimentação.

Tais procedimentos, descritos acima, estão de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações.
> Este bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas.
> Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições

> para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1999, p. 51)

O ensino da geometria apresenta vários aspectos importantes que precisam ser considerados, e um desses aspectos se trata das abordagens que os livros didáticos promovem, segundo seus autores. Compreendemos que há uma necessidade de proporcionar aos alunos uma multiplicidade de experiências através de uma variedade de situações que envolvem um mesmo assunto matemático, visto que essa diversidade de experiências torna o ensino significativo, favorecendo a compreensão da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica. Essa transição se trata da codificação e assimilação dos conceitos e das propriedades geométricas para a escrita dos algoritmos algébricos numéricos.

Acreditamos que o livro didático tem um papel de extrema relevância no processo de ensino aprendizagem, pois, tal instrumento auxilia tanto o professor quanto aluno, seja como material de apoio para planejamento e para elaboração de avaliações ou como fonte de pesquisa para a aquisição e enriquecimento dos conteúdos lecionados.

Segundo o guia de livros didáticos (BRASIL, 2016) que está de acordo com o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD):

> No processo de ensino e aprendizagem, o livro didático e um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno. Nesse dialogo, o livro e portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo mais eficaz de aprende-lo. (BRASIL, 2016, p. 12)

Tanto a temática das abordagens propostas nos livros didáticos, quanto a temática da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica, são temas de diversas dissertações acadêmicas. Na dissertação do Ferreira (2017), o autor, pesquisou, como três livros didáticos apresentam a demonstração do Teorema de Tales, tanto para segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

No decorrer do seu estudo, o pesquisador, analisou as abordagens pressentes nos textos e nas questões propostos pelos autores das obras selecionadas, referente ao Teorema de Tales. Ferreira (2017) considera que duas obras selecionadas para sua pesquisa não apresenta a demonstração do Teorema de Tales de forma completa, visto que essas obras não apresentam aos alunos o caso de proporcionalidade para segmentos incomensuráveis. Para o autor, o terceiro livro, apresenta a demonstração do Teorema de Tales de forma incorreta, pois usa uma consequência do Teorema de Tales para realizar a demonstração. Por fim, Ferreira (2017) apresentou uma demonstração sobre o assunto estudado, Teorema de Tales, que o considera, acessível aos alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental II.

Quando, Ferreira (2017), desenvolve um estudo analítico apresentado como alguns livros didáticos apresentam a demonstração do Teorema Tales, evidência que realmente o tratamento que se promove do meio geométrico para algébrico é um aspecto importante a ser investigado. Afinal, para o aluno assimilar o conceito, enunciado por textos e diálogos, e traduzir a conceitualização expondo por meio de uma escrita algébrica numérica é necessário apresentar aos alunos inúmeras representações.

Outro estudo, que fortalece a importância dessa transição, foi desenvolvido por Alves (2017). A pesquisa realizada pela autora afirma que o ensino da geometria pode ser otimizado, usando o desenho geométrico como ferramenta de auxílio no processo de ensino e aprendizagem. Tendo como referência a Teoria de Van Hiele, a pesquisadora, desenvolve e aplica atividades orientadas de ensino e classifica o conhecimento prévio do aluno de acordo com o nível de compreensão. No decorrer da pesquisa, a autora, constatou uma graduação nos níveis de compreensão, segundo a Teoria Van Hiele, quando se promove o ensino da geometria auxiliado pelo o uso de materiais concretos; régua e compasso. Tais objetos, são considerados pela autora ferramentas que podem otimizar no processo de ensino e aprendizagem no ensino da geometria.

Esse estudo nos faz considerar que, independente do assunto estudado na geometria, a diversidade de tratamento na transição conceitual geométrica para escrita algébrica, torna a assimilação mais acessível para os alunos. O manuseio de régua e compasso são abordagens que proporcionam um enriquecimento no ensino.

Para confirmar tal afirmação, podemos citar o estudo desenvolvido por Bezerra (2018). O autor pesquisou sobre o ensino da geometria plana, Tendo como objetivo de desenvolver uma sequência didática, baseada na teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Durval. Bezerra (2018) proporcionou aos alunos um conjunto de atividades, estruturadas na metodologia da Engenharia Didática. As atividades focam na articulação das ferramentas concretas, régua, compasso, esquadro e transferidor, com a linguagem natural.

Essas articulações possibilitam aos alunos uma diversidade nos registros de representação no ensino da geometria plana. Diante dos resultados obtidos por meio das análises das atividades orientadas, o autor, considera importante a diversidade das abordagens no ensino da geometria plana, visto que a articulação da língua natural para a produção de desenho geométrico, manuseando materiais concretos, possibilitam uma otimização na compressão do ensino da geometria.

É evidente que, de acordo com os estudos citados, a manipulação de materiais concretos é uma ferramenta que auxilia o ensino e a aprendizagem da geometria. Porém, é importante ressaltar que o uso de régua e compasso não é a única mudança no tratamento das abordagens no ensino da geometria.

O estudo desenvolvido por Monforte (2017), destacou um conjunto de atividades que poderiam ser desenvolvidas e aplicadas no software **“***Geogebra*”. O pesquisador desenvolveu e analisou, atividades, destacando não somente o conceito geométrico de semelhança proposto, mas também descreveu, segundo Teoria de Van Hiele, em qual nível de desenvolvimento do pensamento geométrico a atividade se enquadrava. Para finalizar sua dissertação Monforte (2017), desenvolveu uma sequência didática que julga favorecer o professor, que busca auxílio para efetivar, de forma significativa, o processo de ensino e aprendizagem no ensino da geometria.

As diferentes abordagens de tratamento para um determinado conteúdo matemático são importantes para promover um ensino construtivo. Uma pesquisa que investiga a presença de uma diversidade de representações semióticas nos livros didáticos foi desenvolvida por Sena Filho (2019). O autor, analisou três livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental, sobre uma perspectiva da Teoria de registro de representação semióticas de Raymond Duval, referente ao ensino dos sistemas de equações do primeiro grau. A pesquisa constatou que os registros da língua natural, simbólica e algébrica são presentes nas representações dos sistemas lineares, porém os registros geométricos são ausentes. Diante desses resultados, segundo Sena Filho (2019), as obras priorizam as transformações do tipo tratamento e conversão congruente. O pesquisador conclui que a diversidade de registros favorece a assimilação do conteúdo proporcionando ao aluno um ensino significativo.

O estudo desenvolvido por Dufrayer (2015) também foca nas abordagens presentes nos livros didáticos. O autor realizar uma pesquisa sobre o ensino de semelhança de figuras, analisando como as obras selecionadas propõe o ensino e investiga como os professores ministram esse conteúdo. Tendo como objetivo averiguar se as abordagens presentes nos livros e se as metodologias usadas pelos educadores estão de acordo com as orientações e sugestões propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Dufrayer (2015) observou algumas ausências nas abordagens. A relação entre a razão de semelhança para o quociente entre os volumes de figuras semelhantes, as atividades envolvendo ampliação e redução de forma geométrica semelhantes, por homotetia ou pelo manuseio de softwares geométricos dinâmicos, não são abordagens frequentes nos livros didáticos e não representam abordagens frequentes na metodologia dos professores que fizeram parte dessa pesquisa.

Outra pesquisa envolvendo análise de livros didáticos numa perspectiva da Teoria de registro de representação semiótica foi desenvolvida por Miranda (2018). O autor realizou um estudo analisando a ocorrência das mudanças de registros do tipo tratamento e conversões, para o ensino da função quadráticas. No decorrer de sua pesquisa constatou que no livro didático escolhido a transformação de registro com foi frequência se trata da mudança de registros do tipo tratamento. Evidência que enunciações das questões são expostas pela linguagem algébrica e as soluções permanecem no mesmo registro algébrico.

Miranda (2018) considera importante que o livro apresente um equilíbrio a respeito das transformações de mudança de registros, visto que para Duval (2009) o saber matemático é posto em prática, quando para uma determinando objeto matemático o aluno consegui transitar de um registro outro, expondo o saber por diferentes representações semióticas.

Diante dos estudos apresentados é possível afirmar que no ensino de uma determinando assunto matemático é favorecido quando o conteúdo é ministrado promovendo uma variedade nas abordagens. No ensino da geometria essa diversidade de produções e tratamentos podem ser expostas nas enunciações textuais, conceituais e nas questões por meio do manuseio de materiais concretos. Afinal, o manejo de régua, compasso, malha quadriculada e a manipulação de softwares geométricos dinâmicos auxiliam a transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica.

Entendemos que essas diversidades precisam constar nos livros didáticos, visto que se trata de um instrumento de ensino que expõe o saber matemático tanto para o professor quanto para o aluno. Essa multiplicidade de abordagens são aspectos que podem promover um ensino qualitativo e consequentemente a graduação da classificação dos docentes de Muito Crítico para Crítico, Crítico para Intermediário, e Intermediário para Adequado, de acordo com padrão de classificação do SPAECE.

Diante dos trabalhos correlacionados com o tema da nossa pesquisa e com a importância dada ao ensino da geometria, de acordo com a matriz de referência do SPAECE, desenvolveremos uma pesquisa documental onde descreveremos e argumentaremos as abordagens presentes em alguns livros didáticos, que estão inseridos no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD).

Para fundamentar este estudo usamos a Teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Durval. Afinal, entendemos que o material de apoio, o livro didático, precisa proporcionar ao estudante uma multiplicidade de recursos, uma diversidade de representações semióticas, pois, desta forma o processo de ensino se torna mais significativo e efetivo.

Realizar uma pesquisa documental de investigação e descritiva sobre todos os assuntos geométricos presentes nos livros seria algo inviável, devido ao tempo. Assim, optamos por realizar uma pesquisa no ensino da semelhança de figuras em alguns livros didáticos do 9º Ano do Ensino Fundamental II.

Certamente se trata de um conteúdo relevante no o ensino da geometria, visto que podemos correlacionar o ensino de semelhança com outros conteúdos. O teorema de Thales; o teorema da bissetriz interna de um triângulo qualquer; o teorema da bissetriz externa de um triângulo qualquer; as relações métricas do triângulo retângulo, as relações métricas da circunferência, são assuntos que usam a proporcionalidade entre os lados correspondentes entre dois triângulos semelhantes, logo, viabiliza a possibilidade de relacionar tais assuntos com o ensino de semelhança de figuras.

Perante o que foi apresentado pretendemos investigar: Como o livro didático do ensino fundamental dos anos finais apresentam o ensino de figuras semelhantes na perspectiva da teoria dos registros de representações semióticas? Tendo como objetivos específicos; conhecer a presença do conteúdo de semelhança de figuras nos livros didáticos na perspectiva das representações semióticas; identificar os registros de representações semióticas envolvidos no ensino de semelhanças de figuras; descrever quais recursos, registros, os livros didáticos apresentam para enunciar as relações de proporcionalidade para perímetro, área e volume de forma geométricas semelhantes.

Por fim elaboramos um material, uma sequência didática inserida no Apêndice B, que possibilitara para outros estudiosos, professores, alunos e pesquisadores, uma apropriação efetiva, no processo da transição do conceito geométrico para as operações algébricas no ensino da semelhança de figuras, segundo a teoria de Raymond Duval, referente as relações de proporcionalidade para perímetro, área e volume de forma geométricas semelhantes.

Como nossa pesquisa é qualitativa como caráter investigativo documental, descritiva e argumentativa, apoia-se no estudo da “Análise de Conteúdo” de Laurence Bardin. Selecionamos cinco livros didáticos de matemática do 9º Ano do Ensino Fundamental II, livros que estão inseridos Guia de Livros Didáticos Ensino Fundamental Anos Finais (BRASIL 2016).

Segue a lista dos livros didáticos selecionados:

- MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA. Autor: Ênio Silveira. Editora MODERNA, 3ª Edição – 2015.

- MATEMÁTICA - IDEIAS E DESAFIOS. Autores: Dulce Satiko Onaga; Iracema Mori. Editora Saraiva, 18ª Edição – 2015.

- MATEMÁTICA NOS DIAS DE HOJE - NA MEDIDA CERT. Autores: José Jakubovic; Marília Centurión. Editora LEYA, 1ª Edição – 2015.

- MATEMÁTICA – VONTADE DE SABER. Autores: Joamir Souza; Patrícia Moreno Pataro. Editora FTD, 3ª Edição – 2015.

- MATEMÁTICA – CONVERGÊNCIA. Autor: Eduardo Chavante. Editora SM, de 1ª Edição, no ano de 2015.

Pretendemos, por meio da análise de conteúdo, evidenciar como os livros didáticos apresentam o ensino de semelhança de figuras, de acordo com a teoria dos registros de representações semióticas, conhecendo as abordagens propostas nos textos e nas questões promovidas pelos autores das obras. A fim de descobrir se os livros possibilitam aos alunos recursos para a compreensão do processo da transição do conceito geométrico para o algoritmo algébrico no ensino de semelhanças de figuras geométricas.

No primeiro capítulo são apresentados os aspectos que decidimos investigar nesta pesquisa, tendo como objetivo conhecer como os livros didáticos do ensino fundamental dos anos finais propõem o ensino de semelhança de figuras. Para o desenvolvimento deste estudo analisaremos cinco obras didáticas sobre a ótica da teoria de Raymund Durval. Como se trata de uma análise e descrição documental usaremos os procedimentos metodológicos da análise de conteúdo de Laurence Bardin.

No segundo capítulo apresentaremos os objetivos e as expectativas para o ensino da geometria no 9º ano do Ensino Fundamental II de acordo com os documentos oficiais, referente aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Em seguida exibiremos as possíveis correlações entre o ensino da geometria no 9º ano do Ensino Fundamental II com o ensino de figuras semelhantes. Essas correlações serão expressas expondo as demonstrações, das relações métricas do triângulo retângulo, das relações métricas de uma circunferência, do teorema de Thales, da bissetriz interna de um triângulo qualquer, da bissetriz externa de um triângulo qualquer.

No terceiro capítulo enunciaremos a teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Durval associando ao ensino da matemática. Duval destaca que a relação ensino – aprendizagem dos conceitos matemáticos está intimamente interligada ao uso de diversos registros de representações. O autor, defende que a assimilação dos conteúdos depende da produção e da coordenação de diferentes representações semióticas pelos alunos. Quando os mesmos possuem a capacidade de transformar um registro em outro, transitando entre diferentes registros, pode-se afirmar que houve uma assimilação dos conceitos matemáticos.

No quarto capítulo, como nossa pesquisa trata-se de uma investigação documental, descrevemos os procedimentos metodológicos estabelecidos na análise de conteúdo de Laurence Bardin. De acordo com Bardin (1988) para tratar os dados e analisar o conteúdo dos mesmos é necessário passar por três etapas. Nessas etapas o tratamento das informações inicia-se com a “pré-análise”, passando pela “exploração do material”, e finaliza-se no “tratamento dos resultados e nas interpretações”.

No quinto capítulo é destinado a fase da exploração do material. Dividimos nossa análise em duas etapas, descrição da obra, e conclusão. Na descrição do conteúdo descrevemos quais são os registros de representações semióticas presentes nos livros didáticos e argumentamos as propostas apresentadas para o ensino de semelhanças de figuras.

Para construir as conclusões de forma definitiva e conclusiva elaboramos no conjunto de fichas, instrumentos que agruparão as páginas e questões de acordo com uma temática definida para cada uma das fichas. Assim, na fase da conclusão usamos as impressões da descrição do conteúdo e as interpretações dos dados coletados nas fichas temáticas, para construir uma conclusão sobre a existência, ou não, de uma multiplicidade de registros no ensino de semelhanças presentes nas cinco obras selecionadas.

No sexto capítulo, com acumulo das informações agrupadas pela descrição do conteúdo e com as percepções descritas nas conclusões em cada obra, possibilitarão a este autor, produzir de forma conclusiva as considerações finais, a respeito da diversidade na abordagem no ensino da semelhança de figuras presentes nos livros didáticos, seguindo a ótica da teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval.

2 O ENSINO DE GEOMETRIA E O ESTUDO DE SEMELHANÇA

Neste capítulo apresentamos os objetivos e as expectativas para o ensino da geometria no 9º ano do Ensino Fundamental II, relativo ao estudo de semelhança de figuras. Tomaremos com referência os documentos oficiais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como guia de livros didáticos do ensino fundamental dos anos finais, matemática, que está de acordo com o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2017.

Em um segundo, momento exibimos algumas possibilidades de correlacionar o ensino de semelhança de figuras com outros assuntos lecionados no 9º ano do Ensino Fundamental II, envolvendo a proporcionalidade entre lados correspondentes de dois triângulos semelhantes. Para tal, apresentaremos algumas demonstrações presentes nos livros textos renomados de nível médio e superior. Dentre eles escolhemos Muniz Neto (2013), Barbosa (2012), Dolce e Pompeo (1993).

2.1 O ENSINO DA GEOMETRIA REFERENTE AO ESTUDO DE SEMELHANÇA.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), elaborado com a finalidade de propor referências nacionais comuns para as diferentes realidades encontradas no Brasil, agrupam os conteúdos matemáticos em blocos, descritos em: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação. E sobre o ensino da geometria, que está inserido no bloco Espaço e Forma, destaca:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998, p. 51)

O ensino da geometria proporciona ao estudante aspectos relevantes no desenvolvimento cognitivo, pois, estimula o processo investigativo, por meio da visualização e da análise, bem como a dedução, estabelecendo conexões entre as conjecturas mentais, dos estudantes, com o mundo real, através da construção argumentativa. Tais aspectos auxiliam o indivíduo a se tornar um ser atuante na sociedade.

É evidente que os blocos, Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação, não são agrupamentos isolados, não restringe a expansão da área de conhecimento matemático. Mesmo com os conteúdos divididos em blocos distintos, há uma ligação, uma comunicação entre eles.

No ensino da geometria existem diversos problemas que relacionam medidas métricas lineares, superficiais e volumétricas. É possível associar com as grandezas, afinal é viável mensurar o volume de um sólido geométrico, em função, das unidades de capacidade. A álgebra e a aritmética, segmentos inseridos no bloco Números e Operações, também podem ser associados ao ensino da geometria, visto que para representar a proporcionalidade entre os lados de duas ou mais figuras semelhantes recorremos à escrita algébrica e numérica. Essas comunicações, entre os blocos, estão descritas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, que na seleção de conteúdos afirma:

> Atualmente, há consenso a fim de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento) (BRASIL, 1998, p. 49)

O 4º ciclo, estrutura criada para referir-se aos conteúdos e objetivos pretendidos para a 7ª e 8ª série do Ensino Fundamental II, que para os modelos atuais, seriam referências para o 8º e 9º Ano do Ensino Fundamental II, apresentam, no bloco Espaço e Forma, como o ensino da geometria deve-se iniciar:

> O estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma tem como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades. É importante também na exploração desse bloco desenvolver atividades que permitam ao aluno perceber que pela composição de movimentos é possível transformar uma figura em uma outra. (BRASIL, 1998, p. 86)

De forma específica, os PCN, destacam os procedimentos, os conceitos e os critérios de avaliação para enunciar o ensino de semelhança de figuras:

> Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). De forma análoga, o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (homotetias). (BRASIL, 1998, p. 86)
> Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições

> destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície). [...]
> Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro). (BRASIL, 1998, p. 89)
> Estabelecer relações de congruência e de semelhança entre figuras planas e identificar propriedades dessas relações.
> Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de perceber que, por meio de diferentes transformações de uma figura no plano (translações, reflexões em retas, rotações), obtêm-se figuras congruentes e, por meio de ampliações e reduções, obtêm-se figuras semelhantes e de aplicar as propriedades da congruência e as da semelhança em situações-problema. (BRASIL, 1998, p. 93)

Assim para iniciar a enunciação do ensino de semelhança de figuras é importante primeiramente realizar observações das formas geométricas, bem como, promover uma investigação das propriedades por meio das construções geométricas manuseando materiais concretos. Realizar reproduções, ampliações e reduções, de formas geométricas, são orientações metodologias que podem auxiliar a construção conceitual de semelhança. Além disso, podem estabelecer relações entre as medidas métricas dos lados e dos ângulos correspondentes das formas semelhantes é um critério de verificar e avaliar o ensino de figuras semelhantes.

É importante ressaltar que a congruência entre formas geométricas se trata de um caso particular da semelhança, tal que, a constante de proporcionalidade entre as medidas métricas dos lados correspondentes é igual a 1.

Outro documento que tomamos com referência para apresentar o ensino da geometria, focando no estudo de semelhança de figuras, foi a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Diferentemente dos PCN que são orientações e recomendações com finalidade de propor referências nacionais, a BNCC é um documento normativo que estabelece regras e diretrizes obrigatórias a serem seguidos pelas escolas e professores. Segundo a BNCC:

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996)[1], e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN)[2]. (BRASIL, 2017, p. 7)

Na BNCC o conhecimento matemático é articulado considerando as diferentes áreas da matemática. Os diferentes campos de estudos da matemática, Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, foram divididas em cinco unidades temáticas, descritas por: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade e estatística. Destacaremos de acordo com a BNCC os objetivos esperados no ensino da geometria para o Ensino Fundamental II:

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. (BRASIL, 2017, p. 270)

É importante proporcionar meios para que o processo de ensino e aprendizagem ocorra com eficiência. Uma das formas de favorecer a compreensão dos conteúdos, de um determinado objeto matemático, é diversificar as abordagens pela utilização de ferramentas concretas. Essa evidência pode ser constatada na BNCC:

> Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2017, p. 274)

No ensino de semelhança de figuras, uma forma de proporcionar um ensino construtivo e significativo, é diversificar a apresentação dos conceitos, assim como, as propriedades geométricas entre as formas semelhantes. Portanto, a manipulação de materiais concretos, como régua e compasso, e o manuseio de *softwares* computacionais, são ferramentas importantes que auxiliam e diversificam o processo de ensino e aprendizagem das relações envolvendo as medidas métricas dos lados e ângulos correspondentes de figuras semelhantes.

O Guia do Livros Didáticos de Matemática do Ensino Fundamental Anos Finais, que apresenta as resenhas dos livros didáticos que foram aprovados e que estão de acordo com o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), destaca a importância dessas ferramentas, afirmando que:

> Na busca de tornar mais efetiva a aprendizagem da geometria as obras têm recorrido a atividades de visualização e de construções geométricas com instrumentos de desenho ou com materiais para manuseio. Com isso, espera-se que o estudante não seja desestimulado por um ensino muito teórico e que aprenda com mais autonomia. No entanto, é necessário cuidado para garantir equilíbrio entre essas atividades experimentais, tão importantes, e a formação do raciocínio dedutivo no campo de geometria. (BRASÍLIA, 2016, p. 36)

Referente ao estudo de figuras semelhante o guia descreve o conceito de semelhança, como:

> Semelhança, em geometria euclidiana, é uma noção precisa. Trata-se de uma correspondência bijetiva entre duas figuras geométricas *F* e *F'*, de tal modo que o comprimento de um segmento de reta qualquer *AB*, contido em *F*, e o comprimento *A'B'* do segmento correspondente em *F'* são relacionados pela equação: *A'B' = k AB*, sendo *k* um número real positivo. Essa igualdade implica que pode haver uma ampliação uniforme *(k>1)*, uma redução uniforme *(k<1)* ou uma igualdade *(k = 1)* quando se comparam os comprimentos de segmentos de reta contidos em *F* e os comprimentos dos segmentos correspondentes em *F'*. (BRASÍLIA, 2016, p. 36)

A definição conceitual formal é importante, mas, é preciso respeitar o nível de cognição dos alunos, assim, é preciso apresentar diferentes formas para que o conceito de semelhança possa ser construído de forma significativa e construtiva.

Diante do que foi apresentado, se espera, que o ensino da geometria seja desenvolvido para promover o interesse na investigação e dedução de conceitos e propriedades geométricas, ajudando o indivíduo a criar um caráter analítico, para que o mesmo possa realizar analogias com os conceitos estudados e o mundo real, tornando-o um ser crítico e ativo na sociedade.

De forma específica, no estudo de semelhança de figuras, deve ser promovido por uma pluralidade de metodologias, por diversas formas distintas e por uma variedade de abordagens. É importante que, essas metodologias, sejam auxiliadas por diversas representações, dentre elas, ferramentas concretas, como por exemplo: softwares geométricos, régua, compasso, dentre outras.

Outra ferramenta importante é o livro didático, que deve promover a apresentação dos conteúdos nas mais diversas possibilidades, e com diferentes representações para um mesmo objeto matemático, para assim, tornar a aprendizagem construtiva e significativa. Outro aspecto que o livro didático pode promover, sempre que possível, é a correlação entre os diferentes assuntos com a mesma temática. Aspecto, este, que descrevemos no próximo tópico deste capítulo.

2.2 PROPORCIONALIDADE NA GEOMETRIA CORRELACIONADA COM O ENSINO DE SEMELHANÇA.

O ensino de geometria, referente ao 9º Ano do Ensino Fundamental II, aborda diversos assuntos que usam a proporcionalidade das medidas métricas dos lados correspondentes entre dois triângulos semelhantes para enunciar suas propriedades e relações. As relações métricas do triângulo retângulo, as relações métricas da circunferência, o Teorema de Thales, o Teorema da bissetriz interna de um triângulo qualquer, o Teorema da bissetriz externa de um triângulo qualquer, são alguns assuntos que podemos correlacionar ao estudo de semelhança.

Para descrevermos a correlação das relações métricas do triângulo retângulo com o ensino de semelhança, definimos as identidades métricas usando a demonstração da semelhança de triângulos apresentado na obra de Barbosa (2012). Para estabelecer a relação entre o ensino de semelhança com as relações métricas da circunferência usaremos, de forma análoga, a demonstração proposta por Muniz Neto (2013) para o Teorema das cordas. Para o Teorema de Thales apresentamos a demonstração desenvolvida por Dolce e Pompeo (1993), mas, exibimos uma outra demonstração relacionando ao ensino de semelhança. E por fim, para correlacionar o Teorema da bissetriz interna e externa ao ensino de semelhança, após exibir a demonstração desenvolvida por Barbosa (2012), apresentaremos uma outra demonstração utilizando a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes para dois triângulos semelhantes.

É importante evidenciar que as correlações usam a condição de semelhança dos triângulos, mas, ressaltamos que a semelhança de triângulos é um caso particular da semelhança de figuras geométricas.

2.2.1 Relações métricas do triângulo retângulo e a semelhança

Iniciaremos expondo os critérios para dois triângulos serem ditos semelhantes apresentado no livro Geometria Euclidiana Plana. Para o autor Barbosa (2012):

> Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.
> Com isto, queremos dize, se ABC e EFG são dois triângulos semelhantes e se $A \to E$, $B \to F$ e $C \to G$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então, valem simultaneamente as seguintes relações:
>
> $$\hat{A} = \hat{E},\ \hat{B} = \hat{F},\ \hat{C} = \hat{G} \text{ e}$$
>
> $$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}.$$
>
> O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamando de razão de *proporcionalidade* entre os dois triângulos. (Barbosa, 2012, p.127)

Para relacionarmos o ensino de semelhança de triângulos com outros assuntos que envolvem a proporcionalidade entre os lados correspondentes exibimos uma condição suficiente para consideremos que dois triângulos são semelhantes. Essa condição particular possibilita identificar a semelhanças entre triângulos. Segundo Barbosa (2012):

> **Teorema: 7.1.** *Dados dois triângulos ABC e EFG, se* $\hat{A} = \hat{E}$ *e* $\hat{B} = \hat{F}$*, então, os triângulo são semelhantes.*
> **Prova:** Como a soma dos ângulos de um triângulo é 180º, então, a congruência dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ e dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{F}$ acarreta na congruência $\hat{C}$ e $\hat{G}$. Resta provar que os lados são proporcionais. Para isso, tome na semi-reta S_{EF} o ponto *H*, de modo que $EH = AB$. Pelo ponto *H* trace, uma reta paralela a FG.
> Esta corta a semi-reta S_{EG} num ponto *J*, formando um triângulo *EHJ* que é congruente ao triângulo *ABC* , já que $\hat{A} = \hat{E}$, $AB = EH$ $\hat{B} = \hat{F} = E\hat{H}J$.
> Esta última congruência deve-se ao paralelismo de *JH* e *GF.* Segue-se agora do teorema (6.16) que $(\overline{EH} / \overline{EF}) = (\overline{EJ} / \overline{EG})$. Como $EH = AB$ e $EJ = AC$, então, da igualdade acima obtém-se:
>
> $$(\overline{AB} / \overline{EF}) = (\overline{AC} / \overline{EG})$$

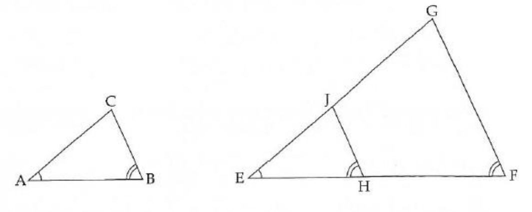
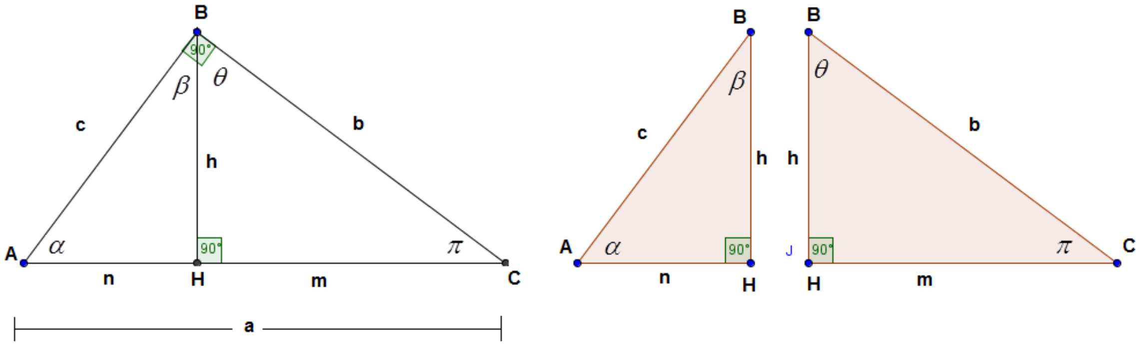


Figura 7.2

> De maneira análoga, demonstra-se que $(\overline{AC}/\overline{EG}) = (\overline{CB}/\overline{GF})$. Fica assim demonstrado o teorema. (Barbosa, 2012, p.128)

Usando as condições enunciadas pelo autor Barbosa (2012) a primeira correlação que exibiremos entre a semelhança de triângulos com o ensino da geometria no 9º ano do Ensino Fundamental II será com as relações métricas do triângulo retângulo. Observe as medidas indicadas na figura 1.

Figura 1 - Relações métricas do triângulo retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

No triângulo *ABC*, retângulo em B, isto é, $A\hat{B}C = 90^\circ$ ou de acordo com a figura 1, temos $A\hat{B}H + C\hat{B}H = A\hat{B}C = 90^\circ$ ou ainda $\beta + \theta = 90^\circ$. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, então, no triângulo AHB, retângulo em H, temos que $H\hat{A}B + A\hat{B}H + B\hat{H}A = 180^\circ$, podendo ser representado de forma equivalente pela igualdade $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$. No triângulo BHC, retângulo em H, temos que $H\hat{B}C + B\hat{C}H + C\hat{H}B = 180^\circ$, podendo ser representado de forma equivalente pela igualdade $\theta + \pi + 90^\circ = 180^\circ$.

Manipulado as igualdades podemos afirmar que $\theta + \pi = 90^\circ = \beta + \theta$, logo $\pi = \beta$, assim, $A\hat{B}H = B\hat{C}H$. De forma análoga podemos afirmar que $\alpha + \beta = 90^\circ = \beta + \theta$ para concluirmos que $\alpha = \theta$, assim, $H\hat{A}B = H\hat{B}C$. Diante das equivalências o triângulo ABC é semelhante ao triângulo AHB como correspondência $A \rightarrow A$, $B \rightarrow H$ e $C \rightarrow B$, assim, consequentemente $\hat{A} = \hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \hat{H} = 90^\circ$, $\hat{C} = \hat{B} = \beta = \pi$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Os triângulos ABC e BHC também são semelhantes, pelo mesmo critério estabelecido anteriormente, como correspondência $A \to B$, $B \to H$ e $C \to C$, assim, consequentemente $\hat{A} = \hat{B} = \alpha = \theta$, $\hat{B} = \hat{H} = 90^{\circ}$, $\hat{C} = \hat{C} = \pi$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

E por sua vez, os triângulos AHB e BHC são semelhantes pela mesma condição. Assim, podemos estabelecer a correspondência $A \to B$, $H \to H$ e $B \to C$, assim, consequentemente $\hat{A} = \hat{B} = \alpha = \theta$, $\hat{H} = \hat{H} = 90^{\circ}$, $\hat{B} = \hat{C} = \beta = \pi$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$.

De acordo com as condições de semelhança de triângulos e com as medidas indicadas na figura 1 podemos escrever as seguintes proporcionalidades:

$$\frac{c}{n} = \frac{b}{h} = \frac{a}{c};\ \frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b}\ ;\ \frac{c}{b} = \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

Dessa forma podemos definir as relações métricas do triângulo retângulo ABC por meio das proporcionalidades entre os lados correspondentes dos triângulos semelhantes da seguinte forma:

I. $\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = n \cdot a$;

II. $\frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = m \cdot a$;

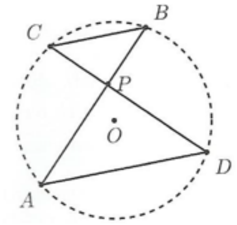
III. $\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$;

IV. $\frac{c}{h} = \frac{a}{b} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$.

E somando a relação I. $c^2 = n \cdot a$ com a relação II. $b^2 = m \cdot a$ obtemos $b^2 + c^2 = n \cdot a + m \cdot a \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (m+n)$, que substituindo $m+n=a$, teremos a relação do teorema de Pitágoras $b^2 + c^2 = a^2$.

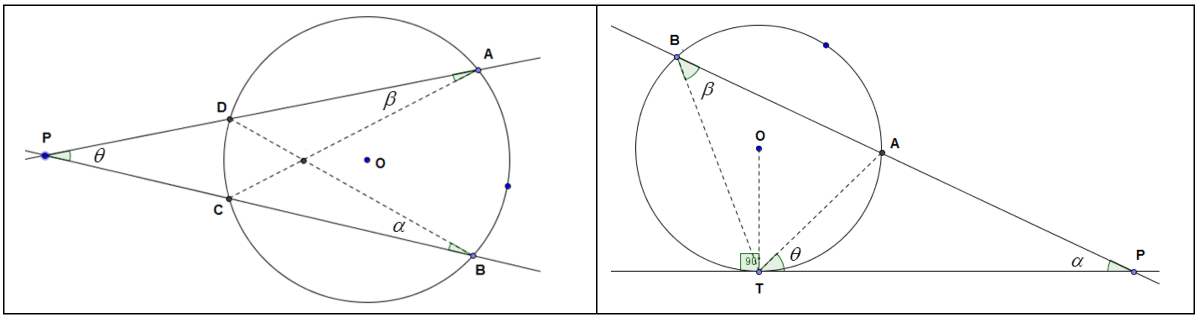
2.2.2 Relações métricas da circunferência e a semelhança

Outra correlação entre o ensino de semelhanças de triângulos e o ensino de geometria no 9º ano do Ensino Fundamental II, possível de ser realizada é com as relações métricas da circunferência, ou, de acordo como o livro Geometria, com o teorema das cordas e potência de ponto. Segundo o autor Muniz Neto (2013):

> As duas proposições a seguir encerram outra importante consequência elementar dos casos de semelhança de triângulos estudado na seção 4.2, sendo conhecidos conjuntamente, na literatura como **teorema das cordas**.
>
> 
>
>
> Figura 4.33: o teorema das cordas.
>
> PROPOSIÇÃO 4.29.
> Se A, B, C, D e P são pontos distintos do plano, tais que $\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{CD}=\{P\}$, então $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}\Leftrightarrow$ o quadrilátero de vértices A,B,C e D é inscritível.
> DEMONSTRAÇÃO.
> Suponha, inicialmente, que o quadrilátero de vértices A, B, C e D é inscritível, com círculo circunscrito Γ. Em princípio, temos de considerar separadamente os casos em que P está no interior ou exterior do círculo delimitando por Γ; entretanto, uma vez que análise do segundo caso é totalmente análoga à do primeiro, consideraremos somente este (cf. figura 4.33).
> Trace os segmentos AD e BC. Pelo teorema do ângulo inscrito, temos $A\hat{B}C=A\hat{D}C$ ou ainda, $P\hat{B}C=A\hat{D}P$. Como $B\hat{P}C=A\hat{P}D$ (pois são ângulos OPV), segue do caso de semelhança AA que $PBC\sim PDA$. Daí, temos $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\dfrac{\overline{PD}}{\overline{PA}}$ ë, portanto, $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$.
> Reciprocamente, se $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$, então $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\dfrac{\overline{PD}}{\overline{PA}}$. Mas, como $B\hat{P}C=A\hat{P}D$, segue do caso de semelhança LAL que $PBC\sim PDA$ e daí $P\hat{B}C=A\hat{D}P$. Mas isso é o mesmo que $A\hat{B}C=A\hat{D}C$, e a proposição 39 garante que ABCD é inscritível. (Muniz Neto, 2013, p. 164)

De forma análoga daremos continuidade nas definições das relações métricas da circunferência por meio da proporcionalidade entre os lados correspondentes dos triângulos semelhantes temos dois casos para pontos exteriores a circunferência, vejamos a figura – 2.

Figura 2 - Relações métricas da circunferência por um ponto exterior



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

No primeiro caso, por um ponto P, exterior a circunferência, traçando duas retas secante a circunferência, temos dois triângulos PAC e PBD semelhantes com correspondências de $P \to P$, $A \to B$, e $C \to D$, assim, consequentemente $A\hat{P}C = B\hat{P}D = \theta$, $P\hat{A}C = P\hat{B}D = \frac{CD}{2} = \alpha = \beta$, $P\hat{C}A = P\hat{D}B = \pi$ e $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$.

No segundo caso, por um ponto P, exterior a circunferência, traçando duas retas, uma secante e a outra tangente a circunferência, obtemos dois triângulos PTA e PBT semelhantes com correspondência de $P \to P$, $T \to B$, e $A \to T$, afinal de acordo com as medidas indicadas na figura temos, $A\hat{P}T = T\hat{P}B = \alpha$, $P\hat{T}A = P\hat{B}T = \frac{AT}{2} = \theta = \beta$, $P\hat{A}T = P\hat{T}B = \pi$, assim, consequentemente podemos estabelecer a relação $\frac{\overline{PT}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}}$.

De acordo com as condições de semelhança de triângulos e com as medidas indicadas na figura 2 podemos escrever as seguintes proporcionalidades:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}};\ \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}}.$$

Dessa forma podemos definir as relações métricas da circunferência, ou, o teorema das cordas e potência de ponto, por meio das proporcionalidades entre os lados correspondentes dos triângulos semelhantes da seguinte forma:

I. Teorema das cordas $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$;

II. Potência de ponto (por duas secantes) $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PD} = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$;

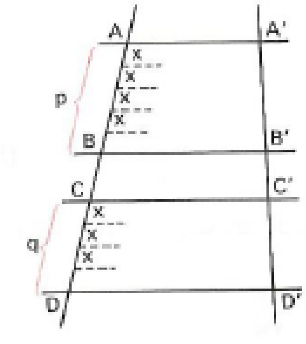
III. Potência de ponto (por uma secante e por uma tangente) $\frac{\overline{PT}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} \Rightarrow \left(\overline{PT}\right)^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PA}$.

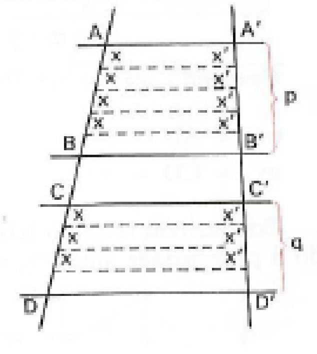
É importante ressaltar que as equivalências $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, $\overline{PA} \cdot \overline{PD} = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$, $\left(\overline{PT}\right)^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PA}$, proporcionam uma praticidade nas resoluções de problemas envolvendo as relações métricas da circunferência, ou, o teorema das cordas e potência de ponto. Porém, os alunos precisam ser induzidos a concluir tais relações, e para tal, o professor pode associar o conteúdo ao ensino de semelhança de triângulos. Ressaltando que as demonstrações devem ser apresentadas não com intuito de formar alunos na matemática formal, mas como uma metodologia para tornar o ensino um processo significativo.

2.2.3 Teorema de Thales e a semelhança

Prosseguindo com as correlações exibimos a demonstração do Teorema Thales proposta no livro didático Fundamentos da Matemática Elementar – geometria plana. De acordo com os autores Dolce e Pompeo (1993):

> Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos *quaisquer* de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.
>
> *Hipótese*
>
> $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segementos de uma transve-
> sal, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os repectivos corres-
> pondentes da outras.
>
> *Tese*
>
> $\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$
>
> *Demonstração*
>
> 1º Caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.





> Existe um segmento x que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
>
> $$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = px \\ \overline{CD} = qx\end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

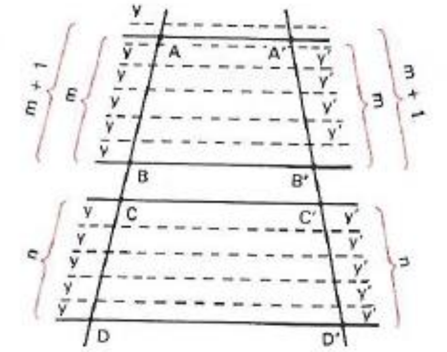
Conduzido retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ (vide figura) e aplicando a propriedade anterior, vem:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A'B'} = px' \\ \overline{C'D'} = qx'\end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), temos $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$.

2º Caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis.
Não existe segmento submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
Tomamos um segmento y submúltiplo de $\overline{CD}$ (y cabe um certo número inteiro n de vezes em $\overline{CD}$), isto é:

$$\overline{CD} = n \cdot y$$



Por serem $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ incomensuráveis, marcando sucessivamente y em $\overline{AB}$, para um certo número inteiro *m* de vezes acontece que:

$$m \cdot y < \overline{AB} < (m+1)y$$

Operando com as relações acima, vem:

$$\left.\begin{array}{l}m \cdot y < \overline{AB} < (m+1)y \\ ny = \overline{CD} = ny\end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n} \qquad (3)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e aplicando a propriedade anterior, vem:

$$\overline{C'D'} = ny'$$

$$my' < \overline{A'B'} < (m+1)y'$$

Operando com as relações acima, temos:

$$\left.\begin{array}{l}m \cdot y' < \overline{A'B'} < (m+1)y' \\ ny' = \overline{C'D'} = ny'\end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m+1}{n} \qquad (4)$$

Ora, y é um submúltiplo de $\overline{CD}$ que se pode variar; dividindo y, aumentamos *n* e nestas condições $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ foram um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ pela expressão (3), e é $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ pela expressão (4). Como esse número é único, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Nota

Vale também a igualdade:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$, que permite concluir:

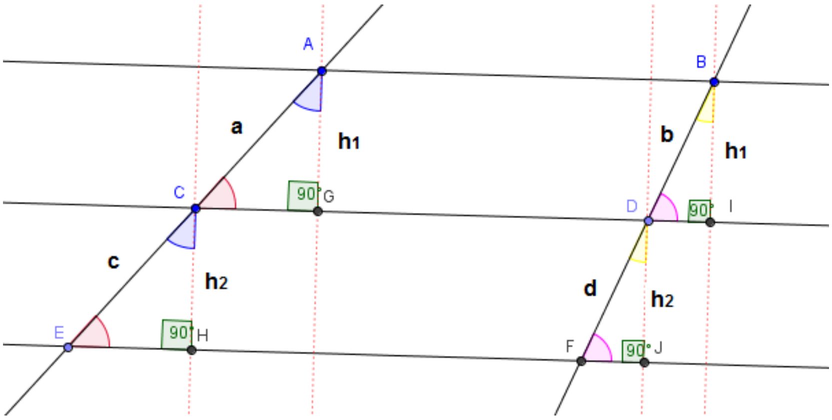
A razão entre segmentos correspondentes é constante.
(Dolce e Pompeo, 1993, p. 185)

As representações, os algoritmos, as expressões, e as equivalências usadas na demonstração do Teorema de Thales, exibida no livro Fundamentos de Matemática Elementar, não é uma linguagem que propicia, ao aluno do 9º ano do Ensino fundamental II, uma compressão das proporcionalidades entre os segmentos correspondentes.

Relacionando o Teorema de Thales ao ensino de semelhança de triângulos torna a compressão propicia aos docentes do 9º ano do Ensino Fundamental II, visto que essa correlação usa uma linguagem condizente a cognição do aluno. É evidente que no ensino da matemática é importante desenvolver a língua formal da matemática, porém, é preciso aproximar o conteúdo ao nível de compressão cognitiva do aluno. Assim, apresentaremos uma demonstração para o teorema de Thales relacionado ao ensino semelhança de triângulos, a fim de auxiliar a compreensão entre as proporcionalidades entre os lados correspondentes.

De acordo com a figura 3, verificaremos a proporcionalidade entre os segmentos correspondentes, determinados pela interseção entre um feixe de retas paralelas por duas transversais.

Figura 3 - Teorema de Thales



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Dadas as transversais $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{BF}$, que interceptam o feixe de retas paralelas $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$, demonstramos que os segmentos $\overline{AC} = a$, $\overline{CE} = c$, $\overline{BD} = b$, $\overline{DF} = d$, são proporcionais, isto é, $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Por *A*, *B*, *C* e *D* traçamos retas perpendiculares ao feixe de retas paralelas, interceptando as retas paralelas nos pontos de interseção, indicados por

G, *H*, *I* e *J*. Dessa forma podemos afirmar que os quadriláteros do tipo paralelogramos *ABIG* e *CDJH* , são retângulos, pelo paralelismo entre os segmentos. Assim, podemos concluir que no retângulo *ABIG,* $\overline{AG} = \overline{BI} = h_1$ e consequentemente podemos afirmar que no retângulo *CDJH,* $\overline{CH} = \overline{DJ} = h_2$.

Nos triângulos *AGC* e *CHE*, os ângulos $A\hat{C}G = C\hat{E}H$, pois, são correspondentes congruentes, assim, os triângulos são semelhantes com correspondência de $A \to C$, $G \to H$, e $C \to E$, dessa forma, $C\hat{A}H = E\hat{C}H$, $A\hat{G}C = C\hat{H}E = 90^\circ$, $A\hat{C}G = C\hat{E}H$ consequentemente $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{CH}} = \frac{a}{c} = \frac{h_1}{h_2}$.

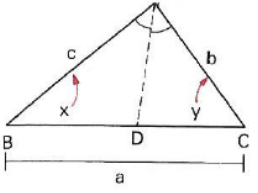
Nos triângulos *BID* e *DJF*, os ângulos $B\hat{D}I = D\hat{F}J$, pois, são ângulos correspondentes congruentes, assim, os triângulos são semelhantes com correspondência de $B \to D$, $I \to J$, e $D \to F$, dessa forma, $B\hat{D}I = D\hat{F}J$, $B\hat{I}D = D\hat{J}F = 90^\circ$, $D\hat{B}I = F\hat{D}J$ consequentemente $\frac{\overline{BD}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{DJ}} = \frac{b}{d} = \frac{h_1}{h_2}$.

Perceba que $\frac{a}{c} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{b}{d}$, então $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, logo concluímos que $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

2.2.4 Bissetriz interna e externa de uma triângulo qualquer e a semelhança

Dando sequência as correlações o livro Geometria Plana da coleção Fundamentos da Matemática Elementar usa o Teorema de Thales para demonstrar o teorema da bissetriz interna. Conforme os autores Dolce e Pompeo (1993):

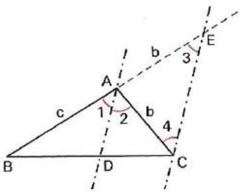
> Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.
>
> O enunciado acima deve ser entendido como segue. Sendo *ABC* o triângulo de lados *a*,*b* e *c* , $\overline{AD}$ uma bissetriz interna (conforma a figura), $DB = x$ e $DC = y$, teremos:
>
> $$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$
>
> O lado $BC = a$ é dividido em dois segmentos aditivos, pois $\overline{DB} + \overline{DC} = \overline{BC}$, ou seja, $x + y = a$.
>
> E com esta nomenclatura temos, então:

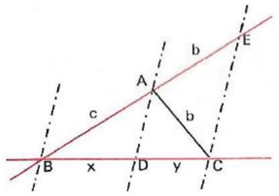


Hipótese *Tese*

$$\overline{AD} \text{ bissetriz interna do } \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

Demonstração





Conduzido por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determine um ponto *E* na reta $\overleftrightarrow{AB}$ $(\overleftrightarrow{CE} // \overleftrightarrow{AD})$.

Fazendo $B\hat{A}D = \hat{1}$, $D\hat{A}C = \hat{2}$, $A\hat{E}C = \hat{3}$ e $A\hat{C}E = \hat{4}$, temos:

$\overleftrightarrow{CE} // \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \hat{1} \equiv \hat{3}$ (correspondentes)

$\overleftrightarrow{CE} // \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \hat{2} \equiv \hat{4}$ (correspondentes)

Como por hipótese $\hat{1} \equiv \hat{2}$, decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

$\hat{3} \equiv \hat{4} \Rightarrow \Delta ACE$ é isósceles de base $\overline{CE} \Rightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC} \Rightarrow AE = b$.

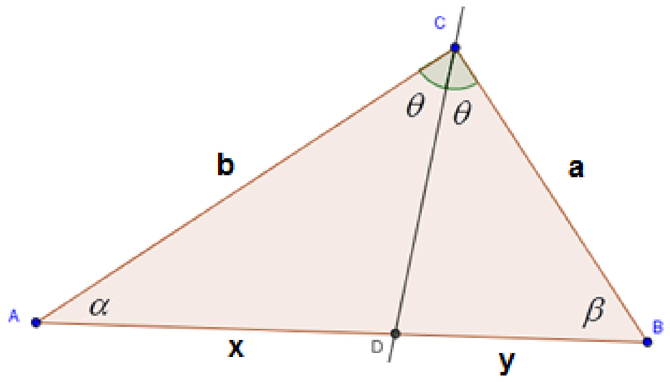
Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificando por $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{CE}$) e aplicando o teorema de Tales, vem:

$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$, ou seja, $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$.

(Dolce e Pompeo, 1993, p. 191)

Tanto o teorema da bissetriz interna de um triângulo qualquer, quanto o teorema da bissetriz externa de um triângulo qualquer, podem ser abordadas com consequência do teorema de Thales. Porém o teorema da bissetriz interna e externa também podem ser apresentadas com consequência do ensino de semelhança. Para exemplificar demonstramos o teorema da bissetriz interna e externa utilizando a semelhança de triângulos, correlacionando o ensino da geometria no 9º Ano do Ensino Fundamental com a semelhança de triângulos.

Figura 4 - teorema da bissetriz interna (enunciação)

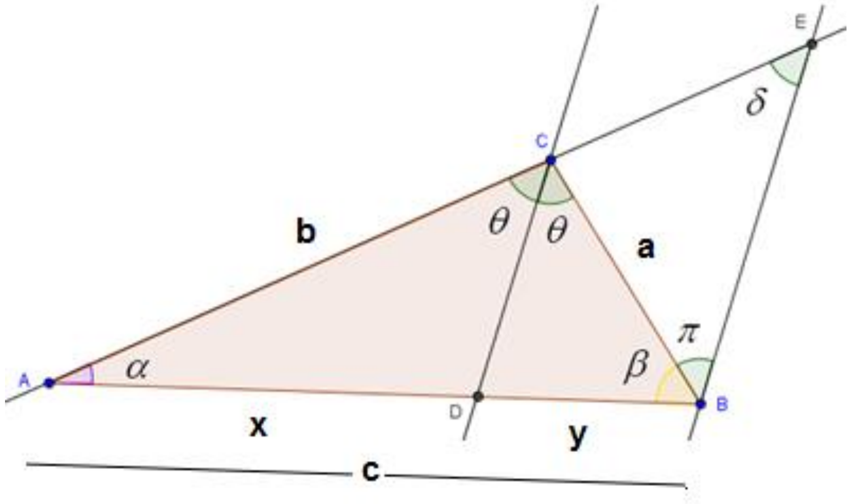


Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

De acordo com a figura 4, apresentamos outra demonstração para o teorema da bissetriz interna de um triângulo qualquer associando ao ensino de semelhança de triângulos. Verificamos a proporcionalidade entre os lados correspondentes, visto que a bissetriz interna divide o lado oposto ao vértice de origem em segmentos proporcionais aos lados adjacente ao vértice de origem da bissetriz interna. Ou seja, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{b}{x} = \frac{a}{y}$. $\frac{b}{x} = \frac{a}{y}$

Iniciarmos prolongando a reta $\overleftrightarrow{AC}$, em seguida traçamos uma reta $\overleftrightarrow{BE}$, paralela à bissetriz $\overleftrightarrow{CD}$, que intercepta a reta $\overleftrightarrow{AC}$ no ponto *E*. A Figura 5 exibe a construção inicial.

Figura 5 - Teorema da bissetriz interna (demonstração)



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Assim, podemos afirmar que nos triângulos AEB e ACD os ângulos $E\hat{A}B = C\hat{A}D$, $A\hat{E}B = A\hat{C}D$, $A\hat{B}E = A\hat{D}C$, pois, são correspondentes congruentes. Então os triângulos são semelhantes com correspondência de $A \rightarrow A$, $E \rightarrow C$, e $B \rightarrow D$, dessa forma, $E\hat{A}B = C\hat{A}D = \alpha$, $A\hat{E}B = A\hat{C}D = \delta = \theta$, $A\hat{B}E = A\hat{D}C = \beta + \pi$, consequentemente $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{CD}}$.

De acordo com os ângulos nas transversais por retas paralelas podemos afirmar que os ângulos $D\hat{C}B = E\hat{B}C = \theta = \pi$, pois, são alternos internos, e como os ângulos $A\hat{E}B = A\hat{C}D = \delta = \theta$, pois são correspondentes então, $\delta = \pi$, assim, por consequência concluímos que o triângulo CEB é isósceles, tal que, $\pi = \delta = \theta$, portanto $\overline{CE} = \overline{CB} = a$.

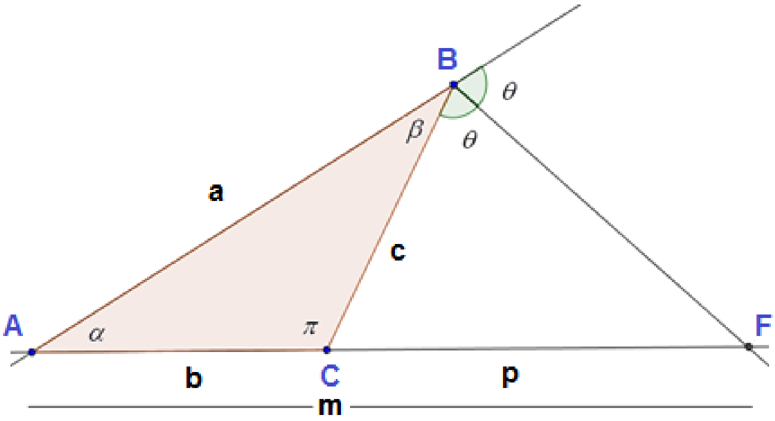
Aplicando proporcionalidade entre os lados correspondentes dos triângulos AEB e ACD temos que, $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{\overline{AC}+\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}+\overline{DB}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{b+a}{b} = \frac{x+y}{x}$, manipulando a equivalência podemos escrever:

$$\frac{b+a}{b} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow \frac{b}{b} + \frac{a}{b} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{b}{x} = \frac{y}{a}.$$

Dessa forma de acordo com a figura 4, demonstramos o teorema da bissetriz interna de um triângulo qualquer associando ao ensino de semelhança de triângulos, confirmando a proporcionalidade entre os lados correspondentes.

Mantendo a mesma temática apresentamos uma demonstração para o teorema da bissetriz externa de um triângulo qualquer associando ao ensino de semelhança de triângulos, confirmando a proporcionalidade entre os lados correspondentes.

Figura 6 - Teorema da bissetriz externa (enunciação)

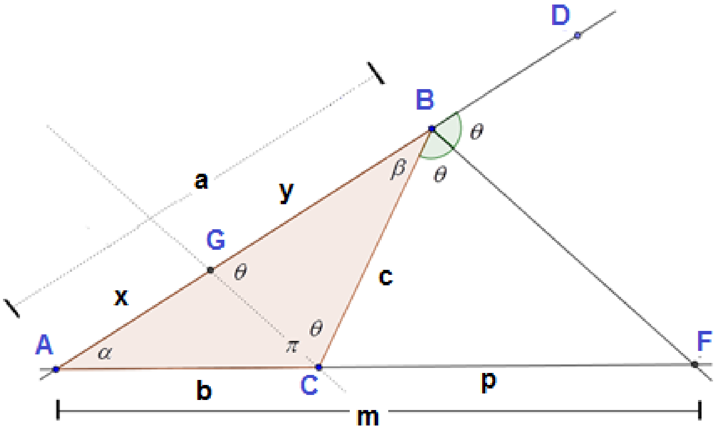


Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

De acordo com a figura 6, apresentamos uma demonstração para o teorema da bissetriz interna de um triângulo qualquer. Verificamos a proporcionalidade entre os lados correspondentes, visto que a bissetriz externa divide o prolongamento do lado oposto ao vértice de origem em segmentos proporcionais aos lados adjacentes ao vértice de origem da bissetriz externa, isto é, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CF}} = \frac{a}{m} = \frac{c}{p}$.

Iniciamos prolongando a reta $\overleftrightarrow{AC}$, tal que, intercepte a bissetriz externa $\overleftrightarrow{BF}$ no ponto *F*. Em seguida traçaremos uma reta $\overleftrightarrow{CH}$, paralela a bissetriz $\overleftrightarrow{BF}$, interceptando a reta $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto *G*. De acordo com a figura 7.

Figura 7 - Teorema da bissetriz externa (demonstração)



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Assim, podemos afirmar que nos triângulos ABF e AGC os ângulos $B\hat{A}F = G\hat{A}C$, $A\hat{B}F = A\hat{G}C$, $B\hat{F}A = G\hat{C}A$, pois, são correspondentes congruentes, respectivamente. Assim, concluímos que os triângulos são semelhantes com correspondência de $A \to A$, $B \to G$, e $F \to C$, dessa forma indicamos, $B\hat{A}F = G\hat{A}C = \alpha$, $A\hat{B}F = A\hat{G}C = \beta + \theta$, $B\hat{F}A = G\hat{C}A = \pi$, e consequentemente $\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{GC}}$.

De acordo com os ângulos nas transversais por retas paralelas podemos afirmar que os ângulos $C\hat{B}F = B\hat{C}G = \theta$, pois, são alternos internos, e como os ângulos $B\hat{G}C = D\hat{B}F = \theta$, pois, são ângulos correspondentes, assim, por consequência concluímos que o triângulo GBC é isósceles, tal que, $B\hat{C}G = B\hat{G}C = \theta$, portanto $\overline{BG} = \overline{BC} = y = c$.

Aplicando proporcionalidade entre os lados correspondentes dos triângulos ABF e AGC temos que, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{AG}+\overline{GB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AC}+\overline{CF}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{b+p}{b}$, manipulando a equivalência podemos escrever $\frac{x+y}{x} = \frac{b+p}{b} \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \frac{b}{b} + \frac{p}{b} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{p}{b} \Rightarrow \frac{y}{p} = \frac{x}{b}$, lembrando que $y = c$, então $\frac{c}{p} = \frac{x}{b}$.

Para finalizarmos a demonstração escreveremos a proporcionalidade entre os lados correspondentes como $\frac{a}{x}=\frac{m}{b}\Rightarrow\frac{a}{m}=\frac{x}{b}$, assim concluímos que $\frac{a}{m}=\frac{x}{b}=\frac{c}{p}\Rightarrow\frac{a}{m}=\frac{c}{p}$.

Dessa forma de acordo com a figura 7, demonstramos o teorema da bissetriz externa de um triângulo qualquer associando ao ensino de semelhança de triângulos, confirmando a proporcionalidade entre os lados correspondentes, visto que a bissetriz externa divide o prolongamento do lado oposto ao vértice de origem em segmentos proporcionais aos lados adjacentes ao vértice de origem da bissetriz externa, tal que, $\frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{AF}}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{CF}}}=\frac{a}{m}=\frac{c}{p}$.

Essas correlações entre o ensino da geometria no 9º Ano do Ensino Fundamental II com o estudo de semelhança se justifica, pois, é importante, para o aluno, ter acesso a uma multiplicidade de tratamentos. Visto que abordagens distintas podem ocasionar compreensões diferenciadas. A diversidade de representações para um mesmo objeto matemático enriquece o processo de ensino e aprendizagem, afinal, a pluralidade de informações possibilita meios para o aluno construir suas próprias conjecturas sobre o assunto lecionado.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Durante um curso, lecionado pelo professor Vicenzo Bongiovanni, foi realizado uma atividade que propunha desenvolver uma “mudança de quadro” para solucionar alguns problemas matemáticos. Para realizar tal atividade, devíamos mudar o foco da abordagem inicialmente proposto pelo problema: se em certo problema era preciso determinar a lei de formação de uma função do 1º grau, representada em um plano cartesiano, ao invés de se trabalhar com os pares ordenados e as operações algébricas, era sugerido uma alteração no foco da abordagem, deveríamos apresentar outras soluções para o problema. Podemos afirmar que a atividade promovida pelo professor, está de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular (BRASIL, 1998, p. 41).

Assim, entendemos, que para favorecer a compreensão de um determinado objeto matemático, o professor deve apresentar aos alunos diferentes representações que tratam da mesma situação, porém, é importantíssimo que cada representação traga, ao aprendiz, informações não apresentadas nas representações anteriores. Afinal, sobre as atitudes esperadas, no 4º ciclo, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) os alunos devem apresentar:

> Interesse em comparar diferentes métodos e processos na resolução de um problema, analisando semelhanças e diferenças entre eles e justificando-os. Interesse por utilizar as diferentes representações matemáticas que se adaptam com mais precisão e funcionalidade a cada situação-problema de maneira que facilite sua compreensão e análise. (BRASIL, 1998, p. 89)

O livro didático é um instrumento que norteia as ações que devem ser executadas pelo professor, assim, compreendemos que o livro didático deve apresentar diversas representações, variedade tanto no que se refere aos textos introdutórios e conceituais, quanto nas questões e situações problema neles abordados. Diante do que foi apresentado, a teoria de aprendizagem que dará suporte à nossa pesquisa, a fim de averiguar a existência, ou não, de uma diversidade na abordagem dos conteúdos propostos nos livros didáticos, será dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

3.1 CONCEITOS DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

No ensino da matemática é usual a manipulação e a utilização de sinais, símbolos para auxiliar na definição, das normas, das propriedades e conceitos matemáticos, pois, essa ação torna o processo mais concreto. Assim as diferentes formas de representar um determinado objeto matemático se faz necessário, pois, torna a assimilação dos conceitos mais acessíveis. As relações, as propriedades e os conceitos, existentes no ensino da matemática são, normalmente, descritos pela língua natural, de forma coloquial, ou formal, mas também, pelo manuseio de símbolos, sinais, assim como, pela utilização de desenhos, figuras, gráficos e tabelas, a fim de demonstrar que um mesmo objeto matemático tem diferentes representações.

A semiótica se caracteriza, por estudar signos e símbolos, que por sua vez, tem a função de comunicação. É possível relacionar, associando, signos e símbolos com certos objetos matemáticos. Quando agrupamos um conjunto de signos ou símbolos, cujo tais elementos seguem um padrão, regras pré-estabelecidas, conseguimos produzir uma comunicação, uma associação, por meio da manipulação desses símbolos.

Esse processo é o que caracteriza uma representação semiótica. Dessa forma, as representações semióticas, são os meios que um indivíduo utiliza para exteriorizar suas conclusões, diante de um estudo de um determinando objeto matemático, fazendo com que seus conceitos se tornem visível e acessível a outras pessoas.

Segundo Duval (2009) para haver uma compreensão em matemática é preciso saber distinguir um objeto matemático de suas representações. Os objetos matemáticos tratam-se dos números, funções, retas e etc., e tais objetos podem ter diferentes representações. Assim, as representações semióticas representam as produções constituídas por regras de sinais como, por exemplo; um o enunciado em língua natural; fórmulas algébricas; gráficos; figuras geométricas.

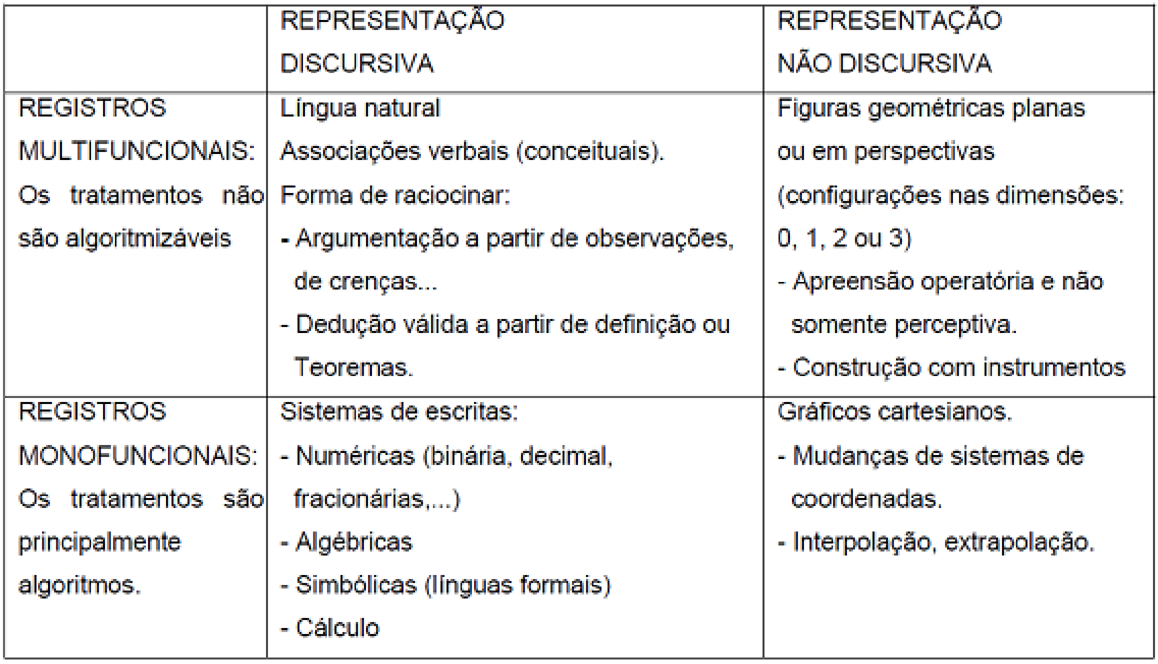
O registro de representação semiótica trata-se de associações de um conjunto de representações semiótico, que por sua vez, possibilita, um determinado objeto matemático, sofrer três transformações cognitivas: a produção, o tratamento e a conversão. A produção, de um registro de representação semiótica, é a exibição de um conjunto de signos, e sinais, que expressam, de forma equivalente, um determinado objeto matemático ou a conceitualização mental das propriedades, das relações e definições matemáticas.

O tratamento é uma transformação de representação interna a um registro, de tal forma, que a alteração dos sinais ou signos, que são usados para identificar um determinado objeto matemático, não caracteriza uma mudança no registro, ou seja, a transformação permanece dentro do mesmo sistema de registro semiótico sem alterar a natureza da representação semiótica. A conversão é outra transformação, porém externa, de modo que, a alteração nas representações semióticas, já caracteriza uma mudança no sistema registro, havendo uma alteração na natureza da representação semiótica.

Os registros de representação semióticas podem ser descritos em multifuncionais e monofuncionais. Os registros multifuncionais são representações semióticas, não algoritmizáveis, enquanto, os registros monofuncionais são representações semióticas, algoritmizáveis. Tais registros podem ser subdivididos em discursivos e não discursivos. Assim, os registros de representação semióticas são classificados em quatro tipos: dois registros são relacionados a representação discursiva: língua natural e sistema de escritas, os outros dois registros, estão relacionados a representação não discursiva, são: registro figural e registro gráfico.

Apresentamos um quadro que descreve a classificação citada.

Quadro 2 – Registro de representações semióticas



	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: - Argumentação a partir de observações, de crenças... - Dedução válida a partir de definição ou Teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações nas dimensões: 0, 1, 2 ou 3) - Apreensão operatória e não somente perceptiva. - Construção com instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: - Numéricas (binária, decimal, fracionárias,...) - Algébricas - Simbólicas (línguas formais) - Cálculo	Gráficos cartesianos. - Mudanças de sistemas de coordenadas. - Interpolação, extrapolação.

Fonte: Machado (2008, p.14)

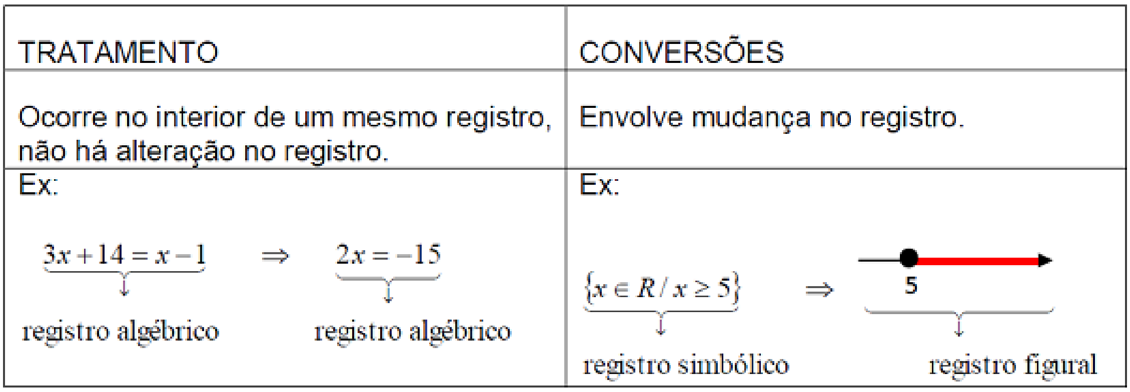
Para DUVAL, os registros de representações semióticas, consistem:

> [...] em um sistema particular de signos, a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo tomar **significações** diferente para os sujeitos que as utiliza. (DUVAL, 2009, p. 32).

Duval justifica a diversidade de registros através de três argumentos, o primeiro pela rapidez do tratamento ou assim dizendo pela praticidade de um registro em relação ao outro. O segundo pela complementaridade, diferentes registros possibilitam compreensões distintas, pois a análise de uma figura ou diagrama não é a mesma das representações discursivas. A terceira argumentação é que se faz necessária a coordenação de pelo menos dois registros para a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.

A diversidade dos registros tem um papel fundamental para a aprendizagem, pois a variedade das representações permite que o indivíduo assimile diferentes informações de um mesmo objeto de estudo, qualificando a aquisição do conhecimento. As transformações envolvendo as representações semióticas, ***tratamento*** e ***conversões***, possibilitam representar um mesmo objeto de estudo em um número diversos formas. Elaboramos uma tabela que e exemplifica a diferença entre as duas transformações.

Quadro 3 – Tipos de mudanças de registros



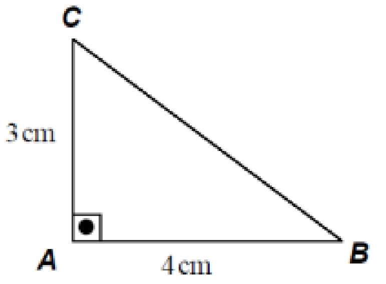
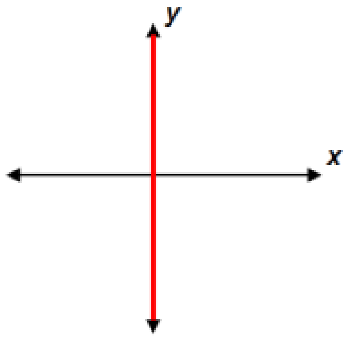
TRATAMENTO	CONVERSÕES
Ocorre no interior de um mesmo registro, não há alteração no registro.	Envolve mudança no registro.
Ex: $\underbrace{3x+14=x-1}_{\text{registro algébrico}} \Rightarrow \underbrace{2x=-15}_{\text{registro algébrico}}$	Ex: $\underbrace{\{x \in R / x \geq 5\}}_{\text{registro simbólico}} \Rightarrow$ 5 registro figural

Fonte: Elaborado pelo autor (2019**)**

A primeira, consiste, em uma transformação que não altera o registro, ficando dentro do mesmo sistema semiótico. Já as conversões, são transformações, que envolve uma mudança de sistema semiótico, para um mesmo objeto matemático.

É importante ressaltar que existem dois tipos de conversões: ***as congruentes*** e ***não congruentes***. As conversões congruentes se caracterizam, quando ocorre mudança de registro, mas não há necessidade de complementação, ou seja, quando existe uma correspondência termo a termo. Já por sua vez as conversões não congruentes são quando não existe uma correspondência clara entre os termos, precisando de complementação.

Quadro 4 – Tipos de conversões

CONVERSÕES	
CONGRUENTES	NÃO CONGRUENTES
Ex: $\underbrace{\text{Dado um } \Delta ABC / \overline{AB} \perp \overline{AC}, \text{ onde } \overline{AB} = 4\text{cm e } \overline{AC} = 3\text{cm}}_{\downarrow}$ registro misto (língua natural + sistemas de escritas + simbólica)  $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\downarrow}$ registro misto (sitesma escrtio + figural)	Ex: $\underbrace{\text{O conjunto A é união de todo e qualquer ponto no plano cartesiano tal que pertença ao eixo das ordenadas.}}_{\downarrow}$ registro língua natural $\underbrace{A = \{\forall(x, y) / x = 0 \text{ e } y \in R\}}_{\downarrow}$ registro simbólico  $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\downarrow}$ registro gráfico

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Duval (2009) defende que a assimilação dos conteúdos depende da produção e da coordenação de diferentes representações semióticas pelos alunos. Quando os mesmos possuem a capacidade de transformar um registro em outro, transitando entre diferentes registros, pode-se afirmar que houve uma assimilação dos conceitos matemáticos.

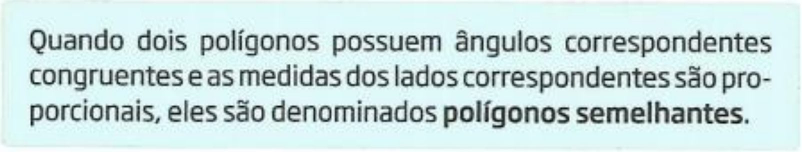
3.2 EXEMPLIFICANDO OS REGISTOS NA MATEMÁTICA

A fim de estabelecer como ocorrer à comunicação de um determinado objeto matemático e as suas representações, exemplificaremos os registros de representações semióticas, de acordo com que foi apresentado no quadro 3, em: registro semiótico multifuncional discursivo; registro semiótico monofuncional discursivo; registro semiótico multifuncional não discursivos; registro semiótico monofuncional não discursivo.

3.2.1 Registro multifuncional discursivo

A definição da condição de semelhança entre dois polígonos, de acordo com o livro didático, Matemática, Compreensão e Prática, do 9º ANO, do autor Ênio Silveira, exposto na Figura 8, representa um registro de representação semiótica multifuncional discursivo, afinal o autor, usa a língua natural alfabética para conceituar a condição de semelhança entre dois polígonos.

Figura 8 - Registro multifuncional discursivo



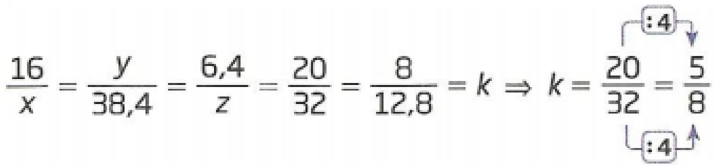
Quando dois polígonos possuem ângulos correspondentes congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais, eles são denominados **polígonos semelhantes.**

Fonte: Silveira (2015, p.150)

3.2.2 Registro monofuncional discursivo

Algoritmo algébrico ou numérico, exibido na Figura 9, para definir e determinar a constante de proporcionalidade, entre as medidas métricas dos lados de dois polígonos semelhantes, representa um registro de representação semiótica monofuncional discursivo, visto que o conceito é exposto por um sistema algébrico numérico de escrita.

Figura 9 - Registro monofuncional discursivo



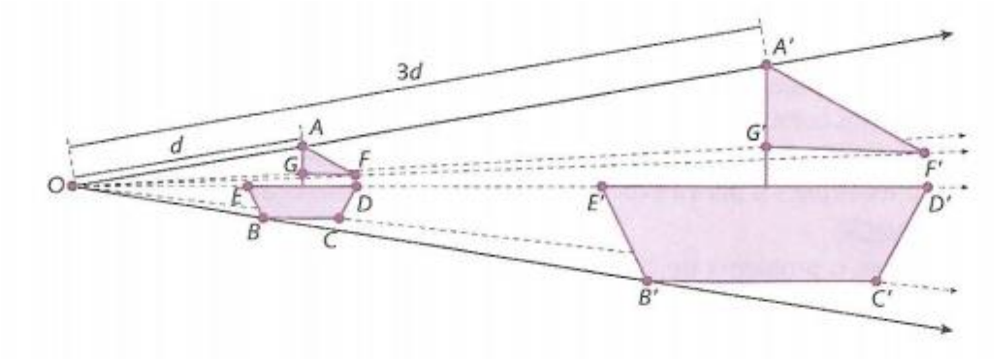
$$\frac{16}{x}=\frac{y}{38{,}4}=\frac{6{,}4}{z}=\frac{20}{32}=\frac{8}{12{,}8}=k \Rightarrow k=\underset{:4}{\overset{:4}{\frac{20}{32}=\frac{5}{8}}}$$

Fonte: Silveira (2015, p.151)

3.2.3 Registro multifuncional não discursivo

Formas geométricas planas, representando polígonos semelhantes, construídos pelos procedimentos da homotetia, exposto na Figura 10, representa um registro de representação semiótica multifuncional não discursivo figural.

Figura 10 – Registro multifuncional não discursivo

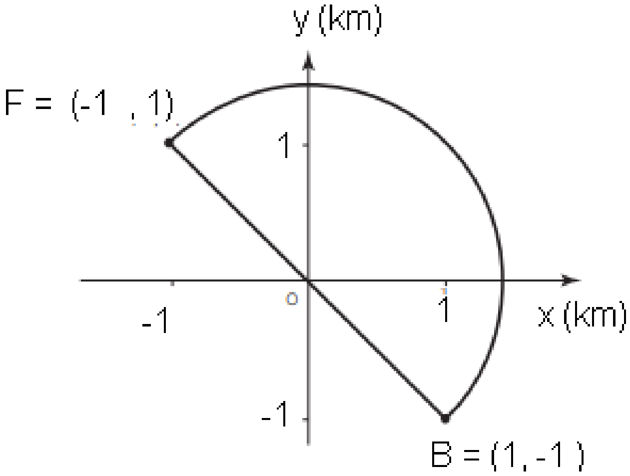


Fonte: Silveira (2015, p.163)

3.2.4 Registro monofuncional não discursivo

O gráfico cartesiano de uma reta e de uma semicircunferência, exibido na Figura 11, representa um registro de representação semiótica monofuncional não discursivo, pois, está apresentando por um sistema de coordenadas no plano cartesiano.

Figura 11 - Registro monofuncional não discursivo



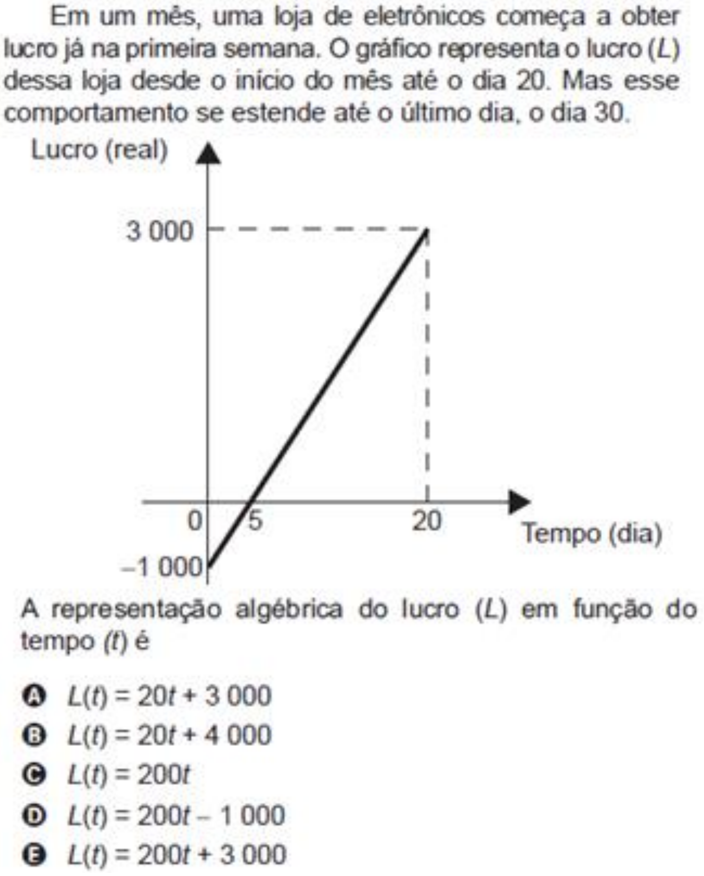
Fonte: Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) em 2016 1ª aplicação, questão 171.

3.3 COORDENAÇÃO ENTRE REGISTROS

A relação ensino aprendizagem dos conceitos matemáticos está intimamente interligada ao uso de diversos registros de representações semiótica. Duval (2009) sustenta que o saber matemático será posto em prática quando é apresentado ao aprendiz não somente um único registro, mas no mínimo dois, e, além de conhecer diferentes representações, faz-se necessário que o aluno consiga coordenar esses registros transitando de um meio para outro.

A coordenação desses registros trata-se das transformações envolvendo os registros. Para exemplificar tal afirmativa observaremos algumas possíveis soluções, aplicando as mudanças de registros de representações semióticas, tratamento e conversões, exibido nos Quadros 4 e 5, para o problema proposto no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) em 2017 2ª aplicação, exibido na Figura 12.

Figura 12 - Mudanças de registros (tratamento e conversões)



Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.

A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é

Ⓐ $L(t) = 20t + 3\,000$
Ⓑ $L(t) = 20t + 4\,000$
Ⓒ $L(t) = 200t$
Ⓓ $L(t) = 200t - 1\,000$
Ⓔ $L(t) = 200t + 3\,000$

Fonte: Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) 2017 2ª aplicação

O comando do enunciado solicita que o candidato determine a relação existente entre o lucro *(L)* e o tempo *(t)*, ou seja, para resolver tal problema é preciso definir a lei de formação de uma função do 1º grau. Apresentaremos três soluções para tal problema.

À primeira solução abordaremos a forma geral de uma função polinomial do 1º grau, definido pela igualdade $y = a \cdot x + b$, tal que, y equivale ao lucro $L(t)$, dado em reais, que está em função de t, dado em dias, que nesse caso, o x equivale ao tempo t. Assim, a lei de formação é $L(t) = a \cdot t + b$. Como os pares ordenados $(5,0)$ e $(0,-1000)$ pertencem à função, podemos substituir na lei de formação geral $L(t) = a \cdot t + b$. Substituindo os pares ordenados temos:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 5 + b \\ -1000 = a \cdot 0 + b \end{cases}$$

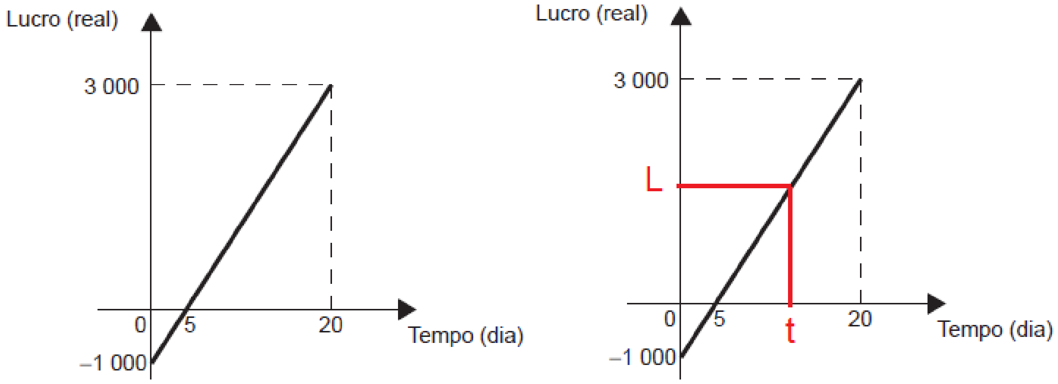
$$\begin{aligned} &b = -1000 \\ &0 = 5a - 100 \\ &5a = 1000 \\ &a = \frac{1000}{5} \\ &a = 200 \end{aligned}$$

Por fim, podemos afirmar que a lei de formação, que relaciona o lucro, em função do tempo, é dada pela relação $L(t) = 200 \cdot t - 1000$.

Na primeira solução codificamos as informações apresentadas no sistema de coordenadas do plano cartesiano e transcrevemos usando uma escrita algébrica numérica, para definir a relação entre o lucro $L(t)$ e o tempo t. Essa codificação e transcrição representa uma mudança de registro do tipo tratamento, visto que a alterações ocorre dentro do mesmo registro, ou seja, interpretamos um registro monofuncional não discursivo, mudamos para um registro monofuncional discursivo.

Na segunda solução desenvolvida abordaremos a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes de dois triângulos semelhantes. Analisando o gráfico no plano cartesiano, e usando da definição de função, tal que, para todo e qualquer domínio t, haverá uma única imagem L, podemos construir dois triângulos semelhantes, como está indicado na Figura 13.

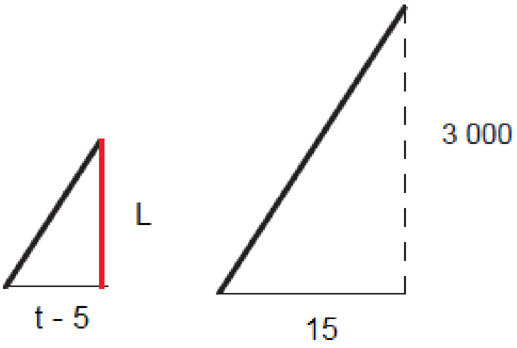
Figura 13 - Representação semiótica (plano cartesiano)



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Dessa forma podemos identificar dois triângulos semelhantes, pelo casso, ângulo, ângulo $(\hat{a}, \hat{a})$. Vejamos, tal representação, na Figura 14.

Figura 14 - Representação semiótica (semelhança)



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Aplicando a proporcionalidade entre os lados correspondentes, temos:

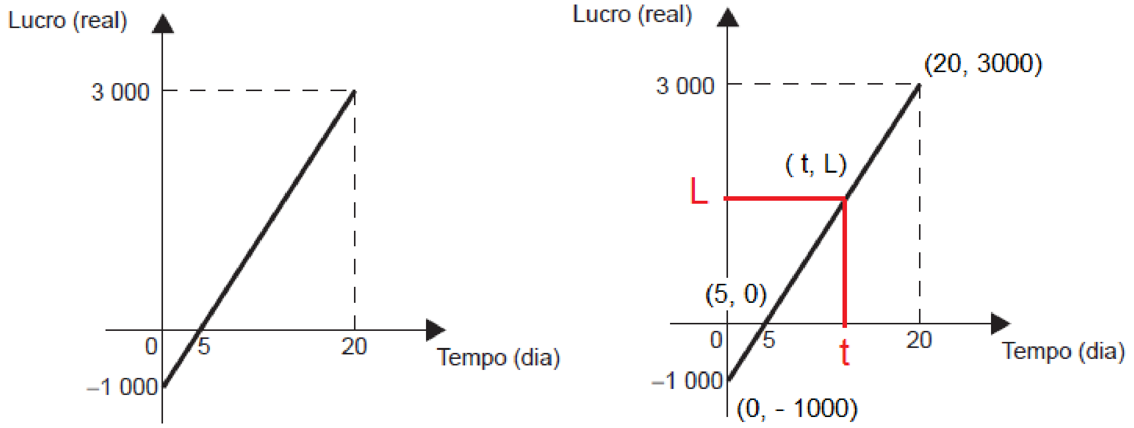
$$\frac{t-5}{15} = \frac{L}{3000}$$
$$3000t - 15000 = 15L \qquad (\div 15)$$
$$200t - 1000 = L$$
$$L(t) = 200t - 1000$$

Esta solução realiza uma mudança de registro. Interpretamos as informações do sistema de coordenadas do plano, que está inserido nos registros monofuncionais não discursivos e alteramos para uma representação figural, definindo formas geométricas semelhantes planas, que estão inseridas nos registros multifuncionais não discursivos. Tal mudança representa uma conversão de registros.

E por fim realizamos outra conversão para determinar a relação entre o lucro $L(t)$ e o tempo t, usando o registro monofuncional discursivo, por meio da representação da escrita algébrica numérico da proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes dos triângulos semelhantes.

Na terceira solução abordaremos procedimentos algébricos para calcular o determinante de uma matriz. Como o gráfico de uma função polinomial do 1º grau no plano cartesiano representa uma reta, podemos usar a condição de alinhamentos entre três pontos.

Figura 15 - Representação semiótica (pares ordenados/matriz)



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ t & L & 1 \\ 20 & 3000 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(M) = 0\,.$$

Usando a Regra de Sarrus para calcular o determinante da matriz M

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ t & L & 1 \\ 20 & 3000 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 & 0 \\ t & L \\ 20 & 3000 \end{matrix}$$

$$\det(M) = 3000t + 5L - 150000 - 20L = 0$$
$$-15L + 3000t - 150000 = 0$$
$$15L = 3000t - 150000 \quad (\div 15)$$
$$L = 200t - 1000$$
$$L(t) = 200t - 1000.$$

A terceira solução propõem uma outra alteração que ocorre dentro do mesmo registro, uma transformação envolvendo as representações semióticas do tipo tratamento. As exibições das informações do sistema de coordenadas do plano cartesiano são alteradas para escrita algébrica numérica, mudando um registro monofuncional não discursivo para um registro monofuncional discursivo.

Tais soluções, apresentadas, determinam a lei de formação que relaciona o Lucro *L(t)*, em reais, com o tempo *t*, dado em dias. Essas variações de abordagens são importantíssimas para o processo de ensino e aprendizagem, visto que promovem e despertam, no aluno, um interesse investigativo em comparar soluções distintas para um mesmo problema matemático. Assim, quando o professor possui um material didático, um livro, que promove essa variedade, o ensino se tornar mais atrativo e eficiente.

Assim, entendemos que o material de apoio, tanto do professor, quanto do aluno, o livro didático, precisa proporcionar ao estudante uma multiplicidade de recursos, uma diversidade na abordagem dos conteúdos ministrados, pois, processo de ensino se torna mais significativo e efetivo.

4 METODOLOGIA

A nossa pesquisa é qualitativa com um caráter investigativo documental, descritiva e argumentativa, apoia-se no estudo da “Análise de Conteúdo” de Laurence Bardin (1977, 1988, 2010). De acordo com (Bardin, 1988, p.38) a Análise de Conteúdo representa “um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens”.

No primeiro momento descreveremos, de forma geral, as ações e procedimentos metodológicos da “Análise de Conteúdo”. O segundo momento, descrevermos procedimentos da fase de organização da Análise de Conteúdo, que é subdividida em três etapas: “pré-análise”; “exploração do material”; “o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação”.

4.1 ANÁLISE DE CONTEÚDO

A Análise de Conteúdo de Bardin (2010), apresenta quatro fases para sua execução: organização da análise; codificação; categorização; tratamento dos resultados, inferência e a interpretação dos resultados. É importante ressaltar que essas fases não necessariamente seguem uma sequência ordenada cronologia.

A organização da análise conste em organizar procedimentos que permitem estabelecer um plano de análise, ou seja, procura-se desenvolver ações que auxiliem a reflexão e as interpretações do conteúdo em análise. A codificação é a fase em que, após a coleta dos dados, se agrupa tais informações de acordo com certo critério, a fim de descrever as características do conteúdo em análise. A fase da categorização permite criar categorias, classificar os elementos obtidos, partir da coleta de dados, seguindo critérios estabelecidos, agrupando tais elementos, em função, de características comuns.

A quarta e última fase é o tratamento dos resultados, inferência e a interpretação dos resultados. Essa fase representa as significações encontradas e interpretadas, por meio da investigação e da análise. A apuração das informações, dos dados obtidos, torna essas significações válidas, quando são apresentadas embasadas por modelos estatísticas; gráficos, tabelas, percentuais.

Para nosso estudo desenvolvemos procedimentos similares a fase de organização da Análise de Conteúdo, que é subdividida em três etapas. Nessa fase o tratamento das informações inicia-se com a “pré-análise”, passando pela “exploração do material”, e finaliza-se no “tratamento dos resultados e nas interpretações”. É importante ressaltar que tais etapas podem ser utilizadas tanto em pesquisas qualitativas quanto em pesquisas quantitativas, pois, pretendemos coletar dados, criando tabelas, para que assim, a investigação documental e a descrição argumentativa que realizaremos seja uma análise coerente ao que está presente nos livros didáticos selecionados para a pesquisa.

De acordo com tal fase, trataremos os dados e analisaremos os conteúdos, descrevendo e conhecendo nas abordagens no ensino das figuras semelhantes, presentes nos livros didáticos do 9º Ano do Ensino Fundamental II. Usaremos a Teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval, realizando as três etapas, segundo Bardin, os três polos cronológicos: pré-análise; exploração do material; tratamento dos resultados, inferência e a interpretação dos resultados.

4.2 DESCREVENDO AS ETAPAS DA ORGANIZAÇÃO DA ANÁLISE

Para Laurence Bardin a etapa da organização da Análise de Conteúdo ou a etapa de desenvolvimento consiste na existência de:

> [...] três pólos cronológicos:
> 1) a pré-análise;
> 2) a exploração do material;
> 3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. (BARDIN, 1988, p. 95).

Descreveremos os três pólos cronológicos: pré-análise; exploração do material; o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação. Sequencialmente estabeleceremos os critérios e procedimentos metodológicos, similares à fase da organização da Análise de Conteúdo, que está pesquisa pretende seguir a fim de verificar se o livro didático apresenta, ou não, uma multiplicidade de representações semióticas envolvendo o ensino de semelhança de figuras.

4.2.1 Pré-analise

A pré-análise é a etapa em que o pesquisador, o analista, organiza as ideias sistematiza a condução da análise, organizando o conteúdo a ser analisado.

Etapa na qual, se escolhe os documentos, se formula hipóteses e objetivos para a pesquisa. Por fim, estabelece uma padronização, criando relações com o conteúdo analisado com o as hipóteses ou objetivos pretendidos na análise, a fim de embasar e fundamentar as interpretações do conteúdo em análise. Para Bardin (1988) "esta primeira fase possui três missões: a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final".

Na etapa da pré-analise, é necessário realizar, segundo Bardin (1988), uma leitura flutuante, uma leitura previa dos documentos, a fim de conhecer o material e elaborar conjeturas, hipóteses e objetivos, mas também para concretizar a escolha dos documentos que farão parte da análise. Definido o conteúdo e os documentos a serem analisados, se define o corpus, um conjunto de documentos selecionados de acordo com um critério estabelecidos. Segundo Bardin (BARDIN, 1977, p. 96):

> Estando o universo demarcado (o género de documentos sobre os quais se pode efectuar a análise), é muitas vezes necessário proceder-se à *constituição de um corpus*. O corpus é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos. A sua constituição implica, muitas vezes, escolhas, selecções e regras.

As regras que auxiliam a escolha do material, do conjunto de documentos que fará parte da analise o "corpus", de acordo com Bardin (1977), são: regra da exaustividade; regra representatividade; regra da homogeneidade; e a regra pertinência.

A regra da exaustividade descreve que, pós definido as normas de seleção, nenhum documento que se enquadre nas normas estabelecidas pode ficar de fora, a menos que haja uma justificativa. A regra da representatividade afirma que é possível realizar a análise por meio de uma amostra, desde que, com tal amostra seja possível realizar generalizações do universo de documentos selecionados de acordo com o critério estabelecido.

A homogeneidade é outra regra de conduta no auxílio da escolha do material. Tal regra comenta que é necessário selecionar documentos que sigam a normas estabelecidas para a escolha do material, sem haver casos particulares que estejam fora dos critérios definidos para a escolha dos documentos. E por fim a regra da pertinência define que, os documentos em análise, possam estabelecer uma relação com as hipóteses e objetivos da análise.

Para nosso estudo foram escolhidos cinco livros didáticos de matemática do 9º Ano do Ensino Fundamental II, livros que estão inseridos no Guia de Livros Didáticos do Fundamental Anos Finais (2016) e de acordo com PNLD, a fim de averiguar se o ensino de figuras semelhantes presentes nos livros apresenta, ou não, uma variedade de recursos, uma multiplicidade de registros de representações, que possibilitem aos alunos a transitar do conceito geométrico para o algoritmo algébrico.

O guia contém uma lista com 11 (onze) coleções, consequentemente 11 (onze) exemplares referentes ao 9º Ano do ensino Fundamental II, porém, procuramos selecionar os livros que já foram adotados em escolas públicas em que este pesquisador já lecionou, ou exemplares que foram usados como material de apoio ao planejamento das aulas e nas elaborações de avaliações. Segue a lista dos livros selecionados no quadro abaixo:

Quadro 5 – Lista de livros didáticos selecionados para análise

LIVRO	CÓDIGO
MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA. Autor: Ênio Silveira. Editora Moderna, 3ª Edição – 2015.	L1
MATEMÁTICA - IDEIAS E DESAFIOS. Autores: Dulce Satiko Onaga; Iracema Mori. Editora Saraiva, 18ª Edição – 2015.	L2
MATEMÁTICA – NOS DIAS DE HOJE, NA MEDIDA CERTA. Autores: José Jakubovic; da Marília Centurión. Editora Leya, de 1ª Edição, no ano de 2015.	L3
MATEMÁTICA – VONTADE DE SABER. Autores: Joamir Souza; Patrícia Moreno Pataro. Editora FTD, 3ª Edição – 2015.	L4
MATEMÁTICA – CONVERGÊNCIA. Autor: Eduardo Chavante. Editora SM, de 1ª Edição, no ano de 2015.	L5

Fonte: Elaborado pelo autor (2019) uma adaptação do Guia de Livros Didáticos Ensino Fundamental Anos Finais (Brasil 2016)

4.2.2 Exploração do material

A exploração do material é o momento que a análise se desenvolve, de acordo com os critérios de escolha do material, conforme as hipóteses e os objetivos traçados e pretendidos para a pesquisa. É o período em que se classifica, quantifica os dados, os elementos e as propriedades que caracterizam o conteúdo em análise, a fim de estabelecer, se possível, relações com o conteúdo em análise com o referencial teórico aplicado. Para Bardin (1988) a exploração do material consiste “nas operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras previamente formuladas”.

No estudo que promoveremos, selecionamos especificamente, o assunto “semelhança de figuras” presentes nos livros didáticos, tendo como temática averiguar a existência, ou não, de uma diversificação nas representações semióticas presente nos textos e nas questões propostas pelos autores dos livros didáticos do 9º Ano do Ensino Fundamental II, como o propósito de verificar se os livros didáticos auxiliam os alunos a transitar do conceito geométrico para o algoritmo algébrico.

Para realizar tal estudo, dividiremos a análise das obras em duas fases, descrição do conteúdo e conclusões. Para cada livro didático na fase da descrição do conteúdo, iniciaremos constatando a existência, ou não, de uma multiplicidade de registros, tanto na literatura dos livros, quanto nas questões. Classificaremos as abordagens em registros monofuncionais ou multifuncionais, verificando quais representações estão presentes nos textos introdutórios e nas questões, referente ao ensino das figuras semelhantes.

Prosseguiremos com a descrição do conteúdo, verificando, se os livros selecionados, apresentam, ou não, as consequências e as propriedades do conceito geométrico de semelhança envolvendo medidas, para perímetros, áreas e volumes, bem como, investigaremos se obras apresentam atividades envolvendo materiais concretos, régua e compasso, ou a manipulação de softwares geométricos. E para finalizar destacaremos os tipos de alterações de registros presentes nas obras em tratamento e conversões.

Para as análises tornarem-se uma investigação descritiva e argumentativa fiel ao que é apresentado nos livros didáticos selecionados, elaboramos quatro fichas. Cada ficha tem a função coletar e classificar os dados, de acordo com os objetivos propostos na investigação da pesquisa, relacionado ao referencial teórico adotado.

Em cada ficha há uma temática, que associa os textos didáticos e as questões envolvendo o ensino de semelhanças de figuras com referencial teórico e aos objetivos propostos para este estudo.

A primeira ficha tem como temática quantificar e classificar os tipos de registros presentes nos textos didáticos e nas questões. Agruparemos as páginas dos textos e das questões, que apresentam registros: monofuncionais discursivos; monofuncionais não discursivos; multifuncionais discursivos; multifuncionais não discursivos.

A segunda ficha aborda a temática de registrar e quantificar os tipos de materiais concretos presentes nos textos e nas questões. Agruparemos as páginas dos textos e das questões, que apresentam o uso de régua e compasso ou uso de software geométrico.

A terceira ficha apresenta a temática de registrar e a quantificar as consequências das propriedades da proporcionalidade envolvendo perímetro, área e volume de figuras semelhantes, nos textos e nas questões. Agruparemos as páginas tanto dos textos introdutórios quanto das questões que abordam a relação da razão de semelhanças com o quociente entre os perímetros, com o quociente entre as áreas e com o quociente entre os volumes das formas geométricas semelhantes.

A quarta ficha tem como temática as mudanças de registros presentes nos textos e questões. Agruparemos as páginas dos textos e das questões que apresentam alterações nos registros, mudanças do tipo tratamento ou mudanças do tipo conversões.

As fichas elaboradas têm como função agrupar e classificar os dados, a fim de proporcionar interpretações concretas a respeito do que propomos investigar nesta pesquisa. As fichas se encontram inseridas no Apêndice A.

Com as informações obtidas na descrição do conteúdo, com a coleta, agrupamento e classificação dos dados, pretendemos construir conclusões sobre a pluralidade, ou não, presente nos livros didáticos, a respeito da diversidade dos registros de representações semióticas, para o ensino de semelhança de figuras.

4.2.3 O tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação

Na etapa dos tratamentos dos resultados, a inferência e a interpretação ligam os resultados obtidos ao aspecto teórico da pesquisa, dessa forma permite que a investigação prossiga, avançando para conclusões e considerações finais. Para Bardin:

> “os resultados brutos são tratados de maneira a serem significativos (falantes) e válidos. Operações estatísticas simples (percentagens), ou mais

> complexas (análise factorial), permitem estabelecer quadros de resultados, diagramas, figuras e modelos, os quais condensam e põem em relevo as informações fornecidas pela análise” (BARDIN 1988 p. 101).

Através dos procedimentos metodológicos, pretendemos acumular informações suficientes, para obter relações que associem as hipóteses e objetivos da pesquisa com o conteúdo em análise. As ações desenvolvidas devem evidenciar se as relações encontradas tornar a análise significativa, se as interpretações iniciais e se os dados acumulados permitem realizar conjecturas e conclusões válidas, sobre o conteúdo em análise.

A nossa investigação documental consistirá em realizar uma leitura dos livros selecionados, descrevendo e argumentando as abordagens propostos pelos autores a respeito do ensino de semelhança. Com a leitura descritiva, com o agrupamento e classificá-los dos dados, por meio das fichas, instrumentos que possibilitaram a coleta das informações, e que auxiliaram na construção das conclusões e conjecturas, evidenciaremos a existência, ou não, de uma diversidade na abordagem no ensino da semelhança de figuras, seguindo a ótica da teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval.

Assim pretendemos acumulador informações suficientes, significações válidas e fieis, para descrever as considerações finais e realizar a conclusão da pesquisa. Tendo como objetivo confirma se os livros didáticos apresentam, ou não, para o ensino de figuras semelhantes, uma multiplicidade de registros, tanto para os conteúdos apresentados nos textos conceituais, quanto para as questões e situações problemas abordados no livro. Constataremos, ou não, se os livros selecionados proporcionam aos alunos condições que favoreçam o processo de transição do conceito geométrico para o algoritmo algébrico no ensino das figuras semelhantes.

5 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesse capítulo descrevemos e argumentamos como os autores de alguns livros didáticos apresentam o ensino de semelhança de figuras seguindo a ótica da Teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval. Expomos e identificamos quais registros de representações semióticas estão presentes nos contextos, nas enunciações, e nas atividades propostas pelos autores. Detalhamos quais recursos, registros, os livros apresentam para enunciar as relações de proporcionalidade para perímetro, área e volumes de formas geométricas semelhantes.

Segue a lista dos livros que estão inseridos no Guia de Livros Didáticos Ensino Fundamental Anos Finais (Brasil 2016), que foram selecionados para este estudo:

Quadro 6 – Lista de livros didáticos selecionados para análise

LIVRO	CÓDIGO
MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA. Autor: Ênio Silveira. Editora Moderna, 3ª Edição – 2015.	L1
MATEMÁTICA - IDEIAS E DESAFIOS. Autores: Dulce Satiko Onaga; Iracema Mori. Editora Saraiva, 18ª Edição – 2015.	L2
MATEMÁTICA – NOS DIAS DE HOJE, NA MEDIDA CERTA. Autores: José Jakubovic; da Marília Centurión. Editora Leya, de 1ª Edição, no ano de 2015.	L3
MATEMÁTICA – VONTADE DE SABER. Autores: Joamir Souza; Patrícia Moreno Pataro. Editora FTD, 3ª Edição – 2015.	L4
MATEMÁTICA – CONVERGÊNCIA. Autor: Eduardo Chavante. Editora SM, de 1ª Edição, no ano de 2015.	L5

Fonte: Elaborado pelo autor (2019) uma adaptação do Guia de Livros Didáticos Ensino Fundamental Anos Finais (Brasil 2016)

Dividimos a exploração do material em duas etapas, descrição do conteúdo e conclusões. Na descrição do conteúdo pretendemos conhecer e apresentar como os autores dos livros didáticos, que selecionamos, abordam o ensino de figuras semelhança, classificando as representações em registros multifuncionais ou monofuncionais. Simultaneamente, verificaremos, se os livros selecionados apresentam, ou não, as consequências e as propriedades do conceito geométrico de semelhança envolvendo medidas, perímetros, áreas e volumes. E por fim apuraremos quais alterações de registros são propostas pelos autores.

Nas conclusões, exibimos as impressões que construímos a partir da leitura descritiva e argumentativa das abordagens propostas pelos autores de cada livro didático, bem como, apresentamos das nossas percepções obtidas pela análise das fichas. Com as interpretações da leitura descritiva e com as informações coletadas pelas fichas possibilitarão ao pesquisador deste estudo, um olhar sobre como as representações semióticas presentes nos livros podem favorecer a compreensão dos alunos no aspecto da transição do conceito geométrico para o a escrita dos algoritmos algébricos, no ensino de figuras semelhantes, sobre uma ótica da teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval.

Para finalizar nossa análise detalhamos aspectos comuns e não comuns entre as obras selecionadas. Discutimos sobre as abordagens no ensino de figuras semelhantes, a respeito das enunciações contextuais, sobre a reprodução, redução e ampliação de formas geométricas semelhantes e examinamos a conceitualização da razão de semelhança e suas consequências para perímetro, área e volume de formas geométricas semelhantes.

5.1 OBRA L1: MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA

No livro didático, Matemática - Compreensão e Prática, do autor Ênio Silveira, produzido pela Editora MODERNA, de 3ª Edição, no ano de 2015, que está presente no Guia de Livros Didáticos Ensino Fundamental Anos Finais (Brasil 2016), e de acordo com o Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD), organiza-se os conteúdos em capítulo e em subunidades que compõem os capítulos. O poderemos visualizar tal organização no quadro a seguir:

Quadro 7 – Sumário do livro didático (obra L1)

Capítulos.	Subunidades.
Capítulo – 1 Potenciação e Radicais.	1 – Potencia de um número real com expoente inteiro; 2 – raiz enésima de um número real; 3 – Simplificação de radicais; 4 – Radicais semelhantes; 5 – Adição e subtração de radicais; 6 – Multiplicação de radicais; 7 – Divisão de radicais; 8 – Potenciação e radiciação de radicais.

Capítulo – 2 Equações do 2º grau.	1 – Equação do 2º grau com uma incógnita; 2 – Raiz de uma equação do 2º grau; 3 – Resolução de equações do 2º grau; 4 – Relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau; 5 – Resoluções de problemas; 6 – Sistemas de equações.
Capítulo – 3 Função afim.	1 – Ideia de função; 2 – representação gráfica de uma função; 3 – Função afim.
Capítulo – 4 Funções quadráticas.	1 – Função quadrática; 2 – Gráfico de uma função quadrática; 3 – Ponto de mínimo e ponto de máximo de uma função quadrática.
Capítulo – 5 Estatística e probabilidade.	1 – Processo estatístico; 2 – Construção de gráficos; 3 – Determinação de parâmetros; 4 – Probabilidade.
Capítulo – 6 Segmentos proporcionais e semelhança.	1 – Razão entre segmentos e segmentos proporcionais; 2 – Teorema de Tales; 3 – Teorema da bissetriz interna; 4 – Semelhança; 5 – Triângulos semelhantes; 6 – Homotetia.
Capítulo – 7 Relações métricas em um triângulo retângulo e razões trigonométricas.	1 – Projeções ortogonais; 2 – Triângulo retângulo; 3 – Teorema de Pitágoras e aplicações; 4 – Razões trigonométricas no triângulo retângulo; 5 – As razões trigonométricas dos ângulos 30º, 45º e 60º; 6 – tabela das razões trigonométricas; 7 – Resoluções de problemas.
Capítulo – 8 Circunferência, arcos e relações métricas.	1 – O comprimento da circunferência; 2 – Medida de um arco de circunferência; 3 – Relações métricas em uma circunferência.
Capítulo – 9 Polígonos regulares.	1 – Polígonos; 2 – Polígonos regulares; 3 – Relações métricas dos polígonos regulares.
Capítulo – 10 Áreas de figuras planas.	1 – Área; 2 – Área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo; 3 – área do triângulo; 4 – Área do trapézio e do Losango; 5 – Área de um polígono regular; 6 – Área do círculo.
Capítulo – 11 Matemática Comercial e Financeira.	1 – Operações sobre mercadorias; 2 – Juro simples; 3 – Juro composto.

Fonte: Elaborado pelo autor uma adaptação do sumário da obra Matemática Compreensão e Prática (2015, p.6 e 7).

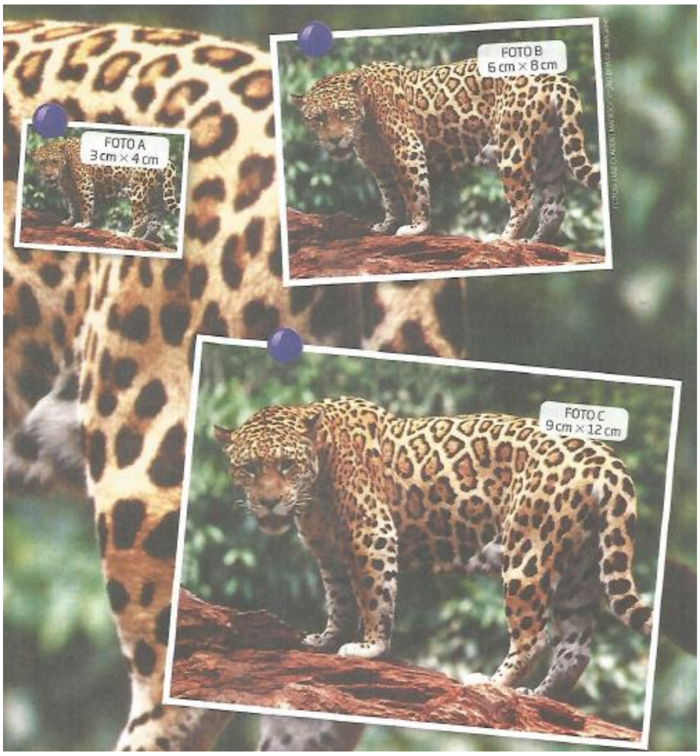
Os capítulos são estruturados em uma sequência didática, organizada e dividida em tópicos que são descritos como: Páginas de abertura; É hora de observar e discutir; Trocando ideias; Apresentação dos conteúdos; Lendo e aprendendo; Um pouco de história; Atividades; Resolvendo em equipe; Trabalhando os conhecimentos adquiridos.

Descrição do conteúdo L1

O ensino de figuras semelhantes está presente no capítulo 6. Tal capítulo é intitulado como “Segmentos proporcionais e semelhança”. O capítulo é subdividido em subunidades: 1- Razão entre segmentos e segmentos proporcionais; 2- Teorema de Tales; 3- Teorema da bissetriz interna; 4- Semelhança; 5- Triângulos semelhantes; 6- Homotetia. De acordo com os critérios estabelecidos na metodologia e com que a pesquisa propõe investigar, descreveremos e analisaremos a subunidade 4, intitulada de “Semelhança”, do capítulo 6 do livro didático Matemática - Compreensão e Prática.

No capítulo 6 a “Página de abertura” o livro didático inicia apresentando três imagens, três fotos retangulares com dimensões distintas. A foto A, B e C, tem dimensões 3 cm x 4 cm, 6 cm x 6 cm, e 9 cm x 12 cm respectivamente. Na figura 16, podemos visualizar a abordagem inicial proposta pelo autor:

Figura 16 - Enunciação contextual (fotografia) L1



Fonte: Silveira (2015, p.133)

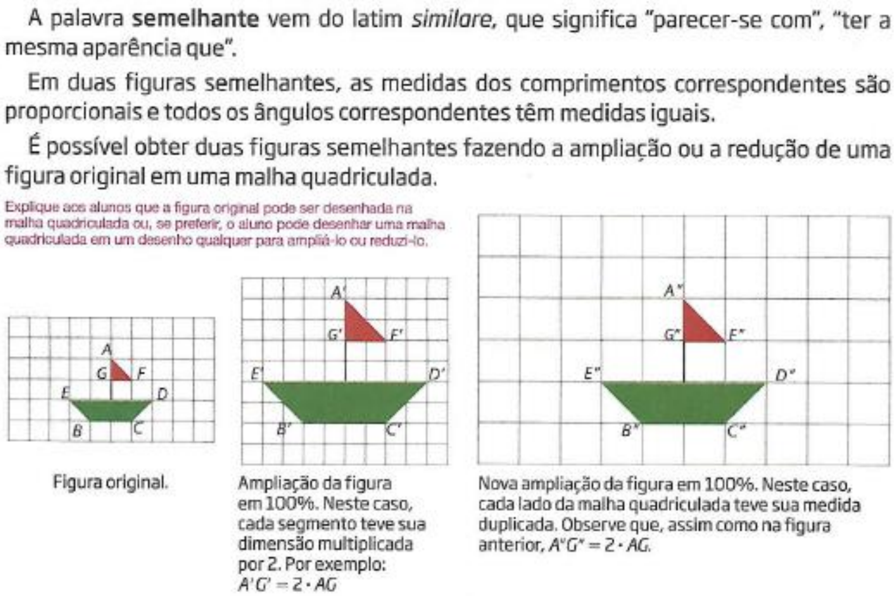
No tópico “É hora de observar” e discutir o autor promove uma orientação, por meio de duas perguntas, tentando direcionar o processo de investigação que o professor pode realizar com seus alunos, a fim de inicializar a construção do conceito geométrico de figuras semelhantes e consequentemente abordar a proporcionalidade no ensino da geometria.

> É HORA DE OBSEVAR E DISCUTIR
> Observe as fotos e responda às questões:
> Que características comuns têm as fotos A, B e C?
> Qual é razão entre as dimensões das fotos A e B, nessa ordem? E a razão entre as dimensões das fotos C e A, nessa ordem? (Silveira, 2015, p.132)

Segundo a teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval, o autor do Livro L1, inicia a construção do conceito geométrico de semelhança, utilizando os registros multifuncionais, discursivos e não discursivos. As fotos A, B e C se enquadram nos registros multifuncionais não discursivos e as perguntas que orientam a investigação se enquadram nos registros multifuncionais discursivos.

Dando sequência, no tópico "Trocando ideias" o autor continua utilizando registros multifuncionais discursivos e não discursivos como podemos verificar nas próximas duas Figuras, 17 e 18.

Figura 17 – Enunciação contextual (malha quadriculada) L1



A palavra **semelhante** vem do latim *similare*, que significa "parecer-se com", "ter a mesma aparência que".

Em duas figuras semelhantes, as medidas dos comprimentos correspondentes são proporcionais e todos os ângulos correspondentes têm medidas iguais.

É possível obter duas figuras semelhantes fazendo a ampliação ou a redução de uma figura original em uma malha quadriculada.

Explique aos alunos que a figura original pode ser desenhada na malha quadriculada ou, se preferir, o aluno pode desenhar uma malha quadriculada em um desenho qualquer para ampliá-lo ou reduzi-lo.

Figura original.

Ampliação da figura em 100%. Neste caso, cada segmento teve sua dimensão multiplicada por 2. Por exemplo: $A'G' = 2 \cdot AG$

Nova ampliação da figura em 100%. Neste caso, cada lado da malha quadriculada teve sua medida duplicada. Observe que, assim como na figura anterior, $A''G'' = 2 \cdot AG$.

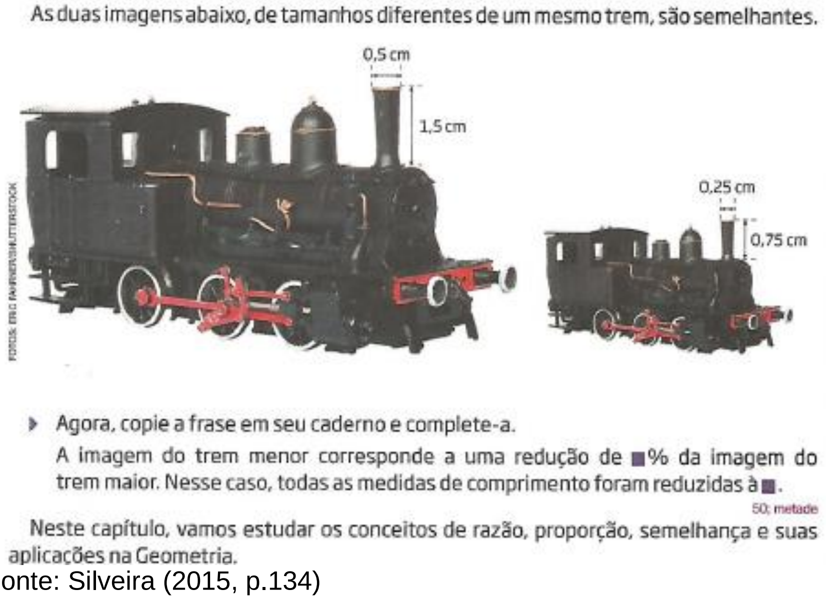
Fonte: Silveira (2015, p.134)

Nesse tópico é apresentado a consequência quando se tem duas ou mais figuras denominadas como semelhantes. A ampliação ou redução, por meio de uma malha quadriculada, auxilia a construção do conceito de semelhança, no aspecto da proporcionalidade entre os lados correspondentes, porém, o enunciado não deixa claro ao aluno o que seria o termo “medidas correspondentes” e “ângulos correspondentes”. Entendo que é algo importante definir e deixar claro aos alunos os meios para identificar as medidas correspondentes assim como os ângulos correspondentes. Uma forma, ou abordagem, seria a utilização de um registro semiótico que facilite a compreensão. Tal registro se trata do multifuncional não discursivo, por meio do manuseio de materiais concretos, régua e compasso, realizando a homotetia de figuras planas.

O livro didático só apresenta a homotetia de figuras na subunidade 6, do capítulo 6, porém, só após de apresentar o conceito teórico de figuras semelhantes. Ao fazer isso, o autor deixar de usar um outro registro, uma ferramenta importantíssima que se trata do material concreto. Tal material permite aos alunos aspectos importantes no processo da construção do saber, que se trata da experimental e investigação para que o mesmo possa construir, por meio da argumentação e de suas conjecturas, o conceito geométrico de figuras semelhantes.

Na Figura 18, ainda no tópico “Trocando ideias” como foi destacado anteriormente se apresenta a redução proporcional de uma imagem de um trem.

Figura 18 – Enunciação contextual (miniatura) L1



As duas imagens abaixo, de tamanhos diferentes de um mesmo trem, são semelhantes.

- Agora, copie a frase em seu caderno e complete-a.

A imagem do trem menor corresponde a uma redução de ■% da imagem do trem maior. Nesse caso, todas as medidas de comprimento foram reduzidas à ■.

50; metade

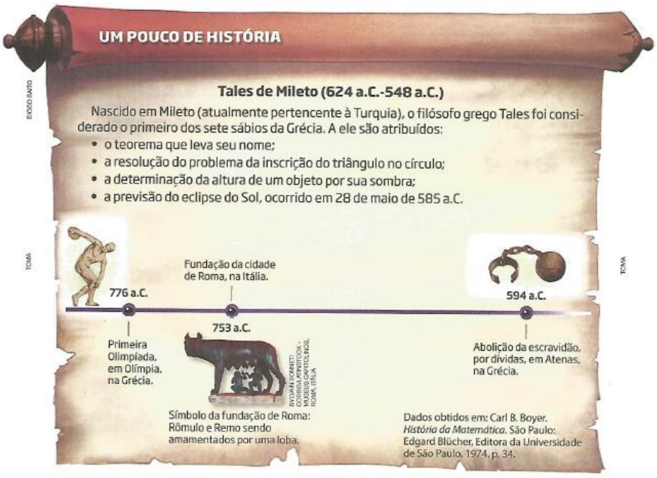
Neste capítulo, vamos estudar os conceitos de razão, proporção, semelhança e suas aplicações na Geometria.

Fonte: Silveira (2015, p.134)

O autor continua usando registros multifuncionais discursivos, e não discursivos, porém, inicia a usar registros monofuncionais discursivos, para formar o conceito de proporcionalidade nas figuras semelhantes, o livro promove questionamentos sobre as medidas das duas imagens que representam o trem, assim como foi feito na página de abertura.

No tópico "Um pouco da história" o livro apresenta alguns feitos que são atribuídos ao matemático e filosofo Tales de Mileto, exibido na Figura 19.

Figura 19 – Contexto histórico (Thales de Mileto) L1



UM POUCO DE HISTÓRIA

Tales de Mileto (624 a.C.-548 a.C.)

Nascido em Mileto (atualmente pertencente à Turquia), o filósofo grego Tales foi considerado o primeiro dos sete sábios da Grécia. A ele são atribuídos:

- o teorema que leva seu nome;
- a resolução do problema da inscrição do triângulo no círculo;
- a determinação da altura de um objeto por sua sombra;
- a previsão do eclipse do Sol, ocorrido em 28 de maio de 585 a.C.

776 a.C.
Primeira Olimpíada, em Olímpia, na Grécia.

753 a.C.
Fundação da cidade de Roma, na Itália.

594 a.C.
Abolição da escravidão, por dívidas, em Atenas, na Grécia.

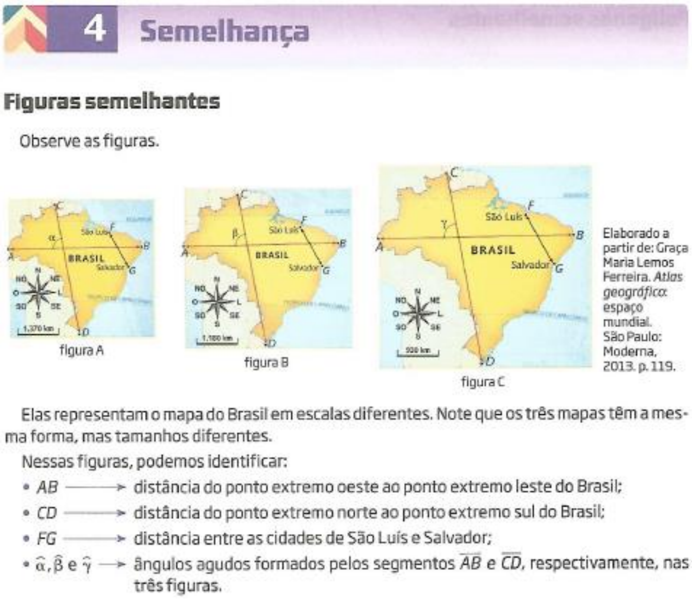
Símbolo da fundação de Roma: Rômulo e Remo sendo amamentados por uma loba.

Dados obtidos em: Carl B. Boyer. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974. p. 34.

Fonte: Silveira (2015, p.146)

Na "Apresentação do conteúdo", da subunidade 4, do capitulo 6, intitulada de Semelhança, conteúdo do foco desta pesquisa, o autor apresenta aos leitores três imagens, três figuras conteúdo mapa do Brasil, com escalas distintas. Podemos constatar na Figura 20.

Figura 20 – Enunciação contextual (mapa) L1



4 Semelhança

Figuras semelhantes

Observe as figuras.

figura A

figura B

figura C

Elaborado a partir de: Graça Maria Lemos Ferreira. *Atlas geográfico: espaço mundial*. São Paulo: Moderna, 2013. p. 119.

Elas representam o mapa do Brasil em escalas diferentes. Note que os três mapas têm a mesma forma, mas tamanhos diferentes.

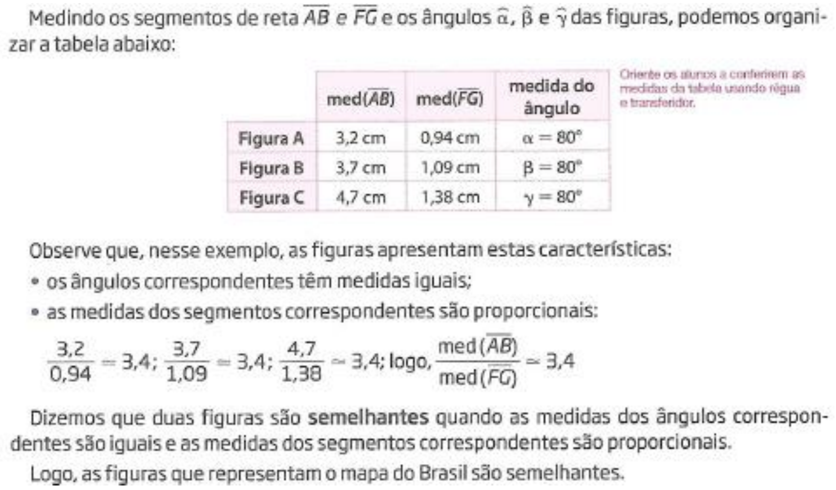
Nessas figuras, podemos identificar:

- AB ⟶ distância do ponto extremo oeste ao ponto extremo leste do Brasil;
- CD ⟶ distância do ponto extremo norte ao ponto extremo sul do Brasil;
- FG ⟶ distância entre as cidades de São Luís e Salvador;
- $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$ ⟶ ângulos agudos formados pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, nas três figuras.

Fonte: Silveira (2015, p.149)

Na apresentação dos conteúdos dessa subunidade, o autor, usa uma ideia similar ao que foi proposto na “página de abertura” do capítulo 6, comenta que as três figuras têm a mesma forma, mas tamanhos diferentes. Ainda na mesma página mostra que tais figuras possuem ângulos correspondentes iguais e que as medidas dos segmentos correspondentes são proporcionais, tal afirmação é possível, pois, a abordagem proposta no livro didático promove uma coleta de dados, com o uso de régua e transferidor, a fim de acumular informações que possibilitem confirma que se trata de figuras semelhantes, possível constatar na Figura 21.

Figura 21 – Registro multifuncional e monofuncional discursivos L1



Medindo os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$ e os ângulos $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$ das figuras, podemos organizar a tabela abaixo:

	med($\overline{AB}$)	med($\overline{FG}$)	medida do ângulo
Figura A	3,2 cm	0,94 cm	$\alpha = 80°$
Figura B	3,7 cm	1,09 cm	$\beta = 80°$
Figura C	4,7 cm	1,38 cm	$\gamma = 80°$

Oriente os alunos a conferirem as medidas da tabela usando régua e transferidor.

Observe que, nesse exemplo, as figuras apresentam estas características:

- os ângulos correspondentes têm medidas iguais;
- as medidas dos segmentos correspondentes são proporcionais:

$$\frac{3,2}{0,94} \simeq 3,4; \frac{3,7}{1,09} \simeq 3,4; \frac{4,7}{1,38} \simeq 3,4; \text{logo, } \frac{\text{med}(\overline{AB})}{\text{med}(\overline{FG})} \simeq 3,4$$

Dizemos que duas figuras são **semelhantes** quando as medidas dos ângulos correspondentes são iguais e as medidas dos segmentos correspondentes são proporcionais.

Logo, as figuras que representam o mapa do Brasil são semelhantes.

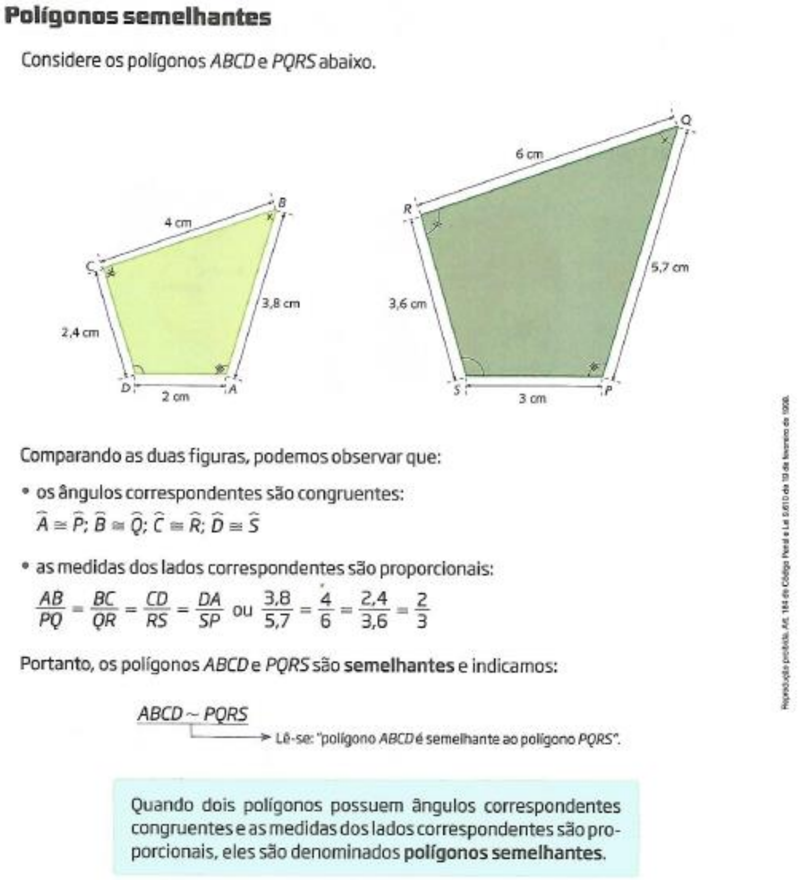
Fonte: Silveira (2015, p.149)

Nesta subunidade pode perceber diversos registros semióticos utilizado pelo autor. Temos o registro multifuncional discursivo, pois, se utiliza da língua natural alfabética, e a argumentação a partir de observações, para enunciar e concretizar a conceitualização de semelhança. Também temos o registro multifuncional não discursivo, visto que as observações propostas são uma análise comparativa entre três figuras, três mapas desenhados em escalas distintas, além, da utilização de material concreto régua, régua e transferidor para mensurar os ângulos e segmentos correspondentes.

Ainda temos o registro monofuncionais discursivo, que se apresenta, por meio do sistema de escrita numérica quando se compara a razões entre os lados correspondentes o autor cria uma tabela para coletar os dados e em seguida realizar comparações com os quocientes entre as medidas encontradas nos lados correspondentes.

Dando sequência a abordagem pode-se verificar uma generalização da condição para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes. O autor descreve o conceito para duas ou mais figuras serem denominadas semelhantes, primeiro realiza comparações entre os lados e ângulos correspondentes de dois polígonos distintos. A próxima Figura 22 apresenta a definição, o conceito de semelhança, segundo o autor.

Figura 22 – Condições de semelhantes L1



Polígonos semelhantes

Considere os polígonos *ABCD* e *PQRS* abaixo.

Comparando as duas figuras, podemos observar que:

- os ângulos correspondentes são congruentes:
  $\widehat{A} \cong \widehat{P}; \widehat{B} \cong \widehat{Q}; \widehat{C} \cong \widehat{R}; \widehat{D} \cong \widehat{S}$
- as medidas dos lados correspondentes são proporcionais:
  $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP}$ ou $\frac{3,8}{5,7} = \frac{4}{6} = \frac{2,4}{3,6} = \frac{2}{3}$

Portanto, os polígonos *ABCD* e *PQRS* são **semelhantes** e indicamos:

$ABCD \sim PQRS$ → Lê-se: "polígono *ABCD* é semelhante ao polígono *PQRS*".

Quando dois polígonos possuem ângulos correspondentes congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais, eles são denominados **polígonos semelhantes**.

Fonte: Silveira (2015, p.150)

Neste ponto, o autor, volta a usar tanto registros multifuncionais como registros monofuncionais. As formas geométricas planas, são registro multifuncionais não discursivos, a enunciação do conceito, se trata de um registro multifuncional discursivo, já a escrita da proporcionalidade, é um registro monofuncional discursivo.

Ainda na mesma página, o autor, define a razão de proporcionalidade, entre as medidas métricas lineares das figuras semelhantes, denominando-a como razão de semelhança.

> A razão entre as medidas dos lados correspondentes em polígonos semelhantes é denominada **razão de semelhança** ou **coeficiente** de proporcionalidade, ou seja:

> $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CD}{RS}=\frac{DA}{SP}=k$ ↘ razão de semelhança A razão de semelhança do menor para o maior dos polígonos considerados é $\frac{2}{3}$. (Silveira 2015, p.150)

A definição dessa constante de proporcionalidade é importante, pois, possibilita aos professores e aos alunos a realizarem investigações e deduções de outras relações, afinal, é possível relacionar a razão de semelhança com os perímetros, com as áreas, e como os volumes das formas geométricas semelhantes.

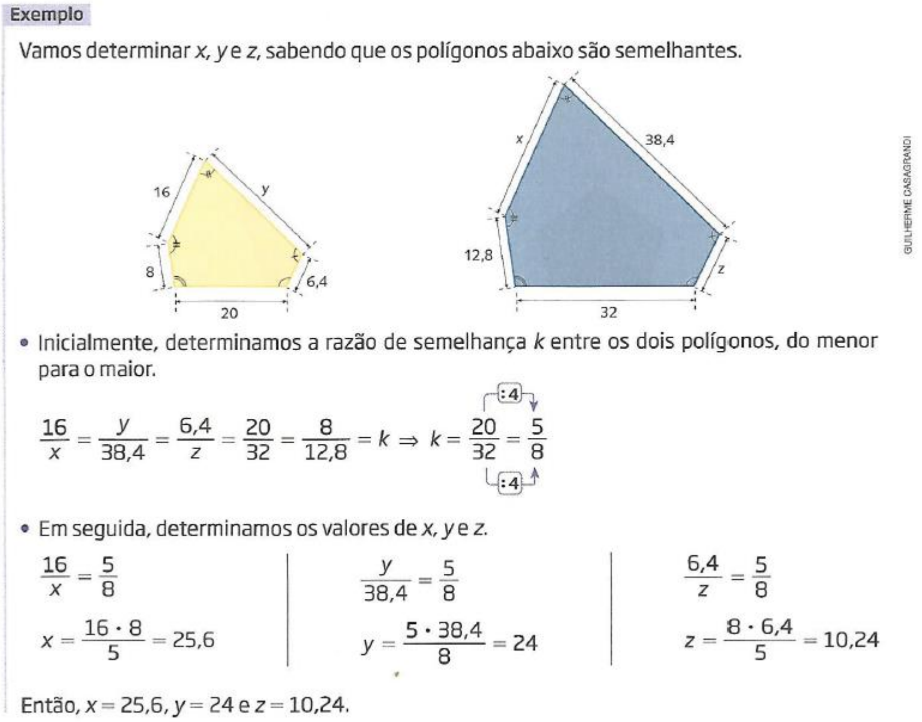
O uso do registro multifuncional e o monofuncional continuam presentes nas abordagens propostas pelo livro didático L1. Mas, outro aspecto que deve ser analisado e levando em consideração é ausência de uma definição mais detalhada sobre a razão de semelhança. Tenho a convicção que nesta enunciação faltou uma conversar mais detalhada, sobre essa constante de proporcionalidade.

Afinal, para tornar a transição do conceito geométrico de semelhança para a escrita algébrica numérica da proporcionalidade num processo construtivo, é importante detalhar o significado da razão semelhança, visto que torna o processo de ensino e aprendizagem mais acessível.

Assim, o aluno deve ser direcionado a perceber que a constante de proporcionalidade, $\frac{2}{3}$, apresentada na imagem anterior, representa uma ampliação. O polígono PQRS é uma ampliação do polígono ABCD, e tal ampliação segue a razão, $\frac{2}{3}$, que significa que a cada duas unidades de comprimento linear no polígono ABCD, teremos 3 unidades de comprimento linear no polígono PQRS. Esse detalhamento auxilia aos alunos a compreender a relação entre a razão de semelhança com o perímetro, área e volume de figuras planas ou de sólidos geométricos semelhantes.

Na página posterior, o livro apresenta como a razão de semelhança permite determinar medidas métricas lineares de segmentos desconhecidos de figura semelhantes, exibido na Figura 23. É possível perceber que os registros multifuncionais discursivos e não discursivos assim como os registros monofuncionais discursivos são predominantes nas apresentações e nas abordagens dos conceitos e enunciados. Afinal, os conteúdos são apresentados por representações da língua natural alfabética e da escrita algébrica numérica, acompanhada de figuras planas.

Figura 23 – Proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes L1



Exemplo

Vamos determinar *x*, *y* e *z*, sabendo que os polígonos abaixo são semelhantes.

- Inicialmente, determinamos a razão de semelhança *k* entre os dois polígonos, do menor para o maior.

$$\frac{16}{x} = \frac{y}{38{,}4} = \frac{6{,}4}{z} = \frac{20}{32} = \frac{8}{12{,}8} = k \Rightarrow k = \frac{20}{32} \overset{:4}{\underset{:4}{=}} \frac{5}{8}$$

- Em seguida, determinamos os valores de *x*, *y* e *z*.

$$\frac{16}{x} = \frac{5}{8} \qquad x = \frac{16 \cdot 8}{5} = 25{,}6$$

$$\frac{y}{38{,}4} = \frac{5}{8} \qquad y = \frac{5 \cdot 38{,}4}{8} = 24$$

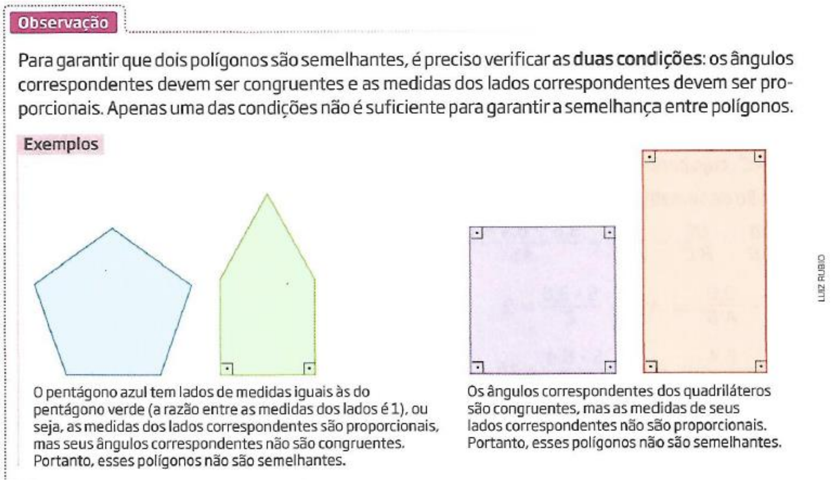
$$\frac{6{,}4}{z} = \frac{5}{8} \qquad z = \frac{8 \cdot 6{,}4}{5} = 10{,}24$$

Então, $x = 25{,}6$, $y = 24$ e $z = 10{,}24$.

Fonte: Silveira (2015, p.151)

Para finaliza essa página, o autor do livro didático L1, retoma as condições para denominar duas ou mais figuras de semelhantes. Exemplifica que para ser semelhante não bastar que as medidas dos lados correspondentes sejam proporcionais ou que as medidas dos ângulos correspondentes sejam congruentes, é necessário que as duas condições sejam verificadas e confirmadas simultaneamente, para assim, seja possível denominar duas ou mais figuras de semelhantes. Verifiquemos a abordagem na Figura 24.

Figura 24 – Condição suficiente e necessária para ser semelhantes L1



Observação

Para garantir que dois polígonos são semelhantes, é preciso verificar as **duas condições**: os ângulos correspondentes devem ser congruentes e as medidas dos lados correspondentes devem ser proporcionais. Apenas uma das condições não é suficiente para garantir a semelhança entre polígonos.

Exemplos

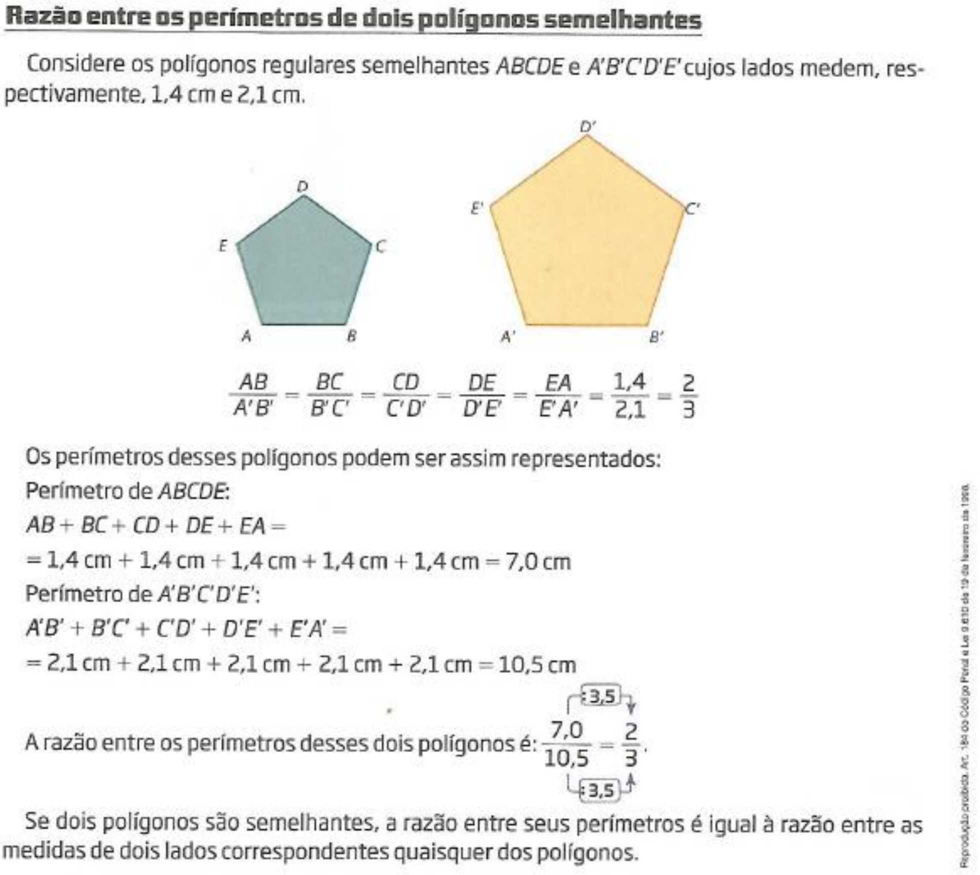
O pentágono azul tem lados de medidas iguais às do pentágono verde (a razão entre as medidas dos lados é 1), ou seja, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais, mas seus ângulos correspondentes não são congruentes. Portanto, esses polígonos não são semelhantes.

Os ângulos correspondentes dos quadriláteros são congruentes, mas as medidas de seus lados correspondentes não são proporcionais. Portanto, esses polígonos não são semelhantes.

Fonte: Silveira (2015, p.151)

Para concluir a parte conceitual do ensino de semelhança as próximas duas páginas, da obra, apresentam a relação entre a razão de semelhança com o perímetro e com a área de figuras semelhantes, apresentados, respectivamente, nas Figuras 25 e 26.

Figura 25 – Razão de semelhança e perímetro L1



Razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes

Considere os polígonos regulares semelhantes *ABCDE* e *A'B'C'D'E'* cujos lados medem, respectivamente, 1,4 cm e 2,1 cm.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = \frac{1,4}{2,1} = \frac{2}{3}$$

Os perímetros desses polígonos podem ser assim representados:

Perímetro de *ABCDE*:

$AB + BC + CD + DE + EA =$

$= 1,4\text{ cm} + 1,4\text{ cm} + 1,4\text{ cm} + 1,4\text{ cm} + 1,4\text{ cm} = 7,0\text{ cm}$

Perímetro de *A'B'C'D'E'*:

$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A' =$

$= 2,1\text{ cm} + 2,1\text{ cm} + 2,1\text{ cm} + 2,1\text{ cm} + 2,1\text{ cm} = 10,5\text{ cm}$

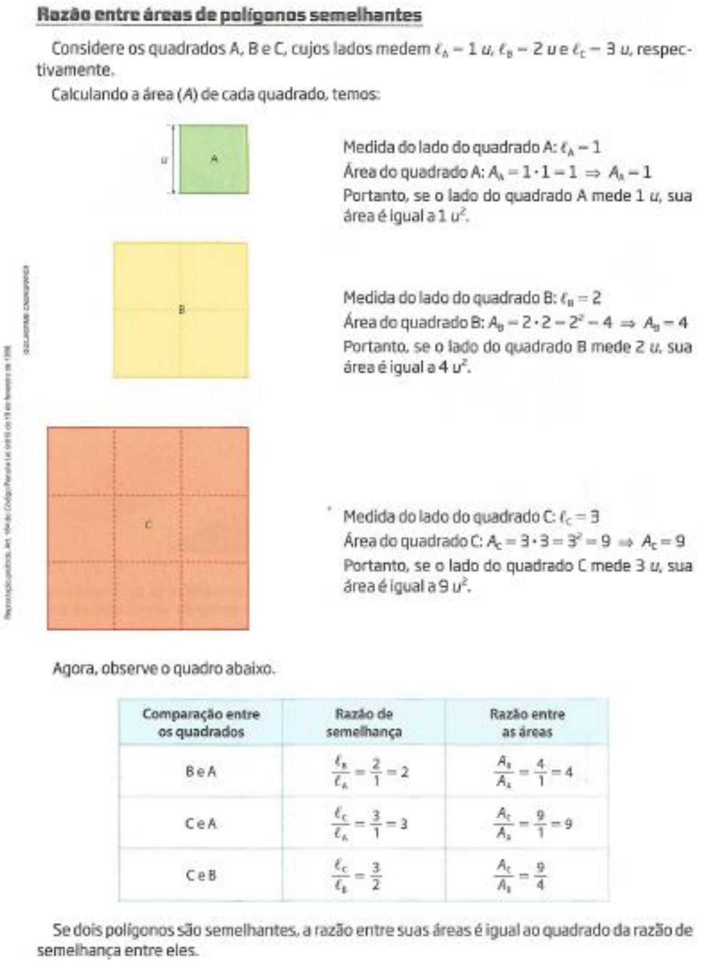
A razão entre os perímetros desses dois polígonos é: $\overset{:3,5}{\underset{:3,5}{\frac{7,0}{10,5} = \frac{2}{3}}}$.

Se dois polígonos são semelhantes, a razão entre seus perímetros é igual à razão entre as medidas de dois lados correspondentes quaisquer dos polígonos.

Fonte: Silveira (2015, p.152)

Tenho convicção que a abordagem da relação exposta na Figura 25, tornar-se uma situação de ensino mais construtiva, caso o autor promovesse uma condição que levasse aos alunos a deduzir a relação entre a razão de semelhança e o quociente entre os perímetros de figuras semelhantes. Esse ensino construtivo poderia ser desenvolvido com a aplicação de atividades elaboradas em software de geometria dinâmica como o, *Geogebra*, um programa gratuito e de fácil acesso, ou desenvolver atividades com o material concreto, régua e compasso, ou ainda desenvolvendo ampliações e reduções de figuras geométricas planas com o auxílio de uma malha quadriculada. Afinal, uma das formas de promover um ensino significativo é apresentar diversas abordagens, aos alunos.

Figura 26 – Razão de semelhança e área L1



Razão entre áreas de polígonos semelhantes

Considere os quadrados A, B e C, cujos lados medem $\ell_A = 1\ u$, $\ell_B = 2\ u$ e $\ell_C = 3\ u$, respectivamente.

Calculando a área (A) de cada quadrado, temos:

Medida do lado do quadrado A: $\ell_A = 1$
Área do quadrado A: $A_A = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow A_A = 1$
Portanto, se o lado do quadrado A mede 1 u, sua área é igual a 1 u^2.

Medida do lado do quadrado B: $\ell_B = 2$
Área do quadrado B: $A_B = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4 \Rightarrow A_B = 4$
Portanto, se o lado do quadrado B mede 2 u, sua área é igual a 4 u^2.

Medida do lado do quadrado C: $\ell_C = 3$
Área do quadrado C: $A_C = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9 \Rightarrow A_C = 9$
Portanto, se o lado do quadrado C mede 3 u, sua área é igual a 9 u^2.

Agora, observe o quadro abaixo.

Comparação entre os quadrados	Razão de semelhança	Razão entre as áreas
B e A	$\frac{\ell_B}{\ell_A} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{A_B}{A_A} = \frac{4}{1} = 4$
C e A	$\frac{\ell_C}{\ell_A} = \frac{3}{1} = 3$	$\frac{A_C}{A_A} = \frac{9}{1} = 9$
C e B	$\frac{\ell_C}{\ell_B} = \frac{3}{2}$	$\frac{A_C}{A_B} = \frac{9}{4}$

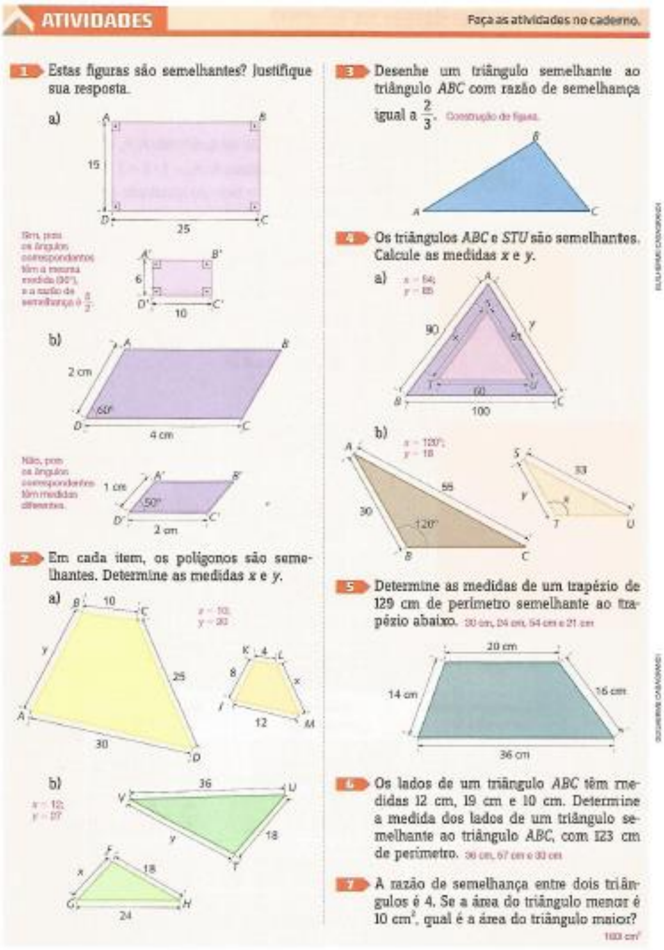
Se dois polígonos são semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Fonte: Silveira (2015, p.153)

Na abordagem da relação entre a razão de semelhança e o quociente entre as áreas das figuras semelhantes, exposto na Figura 26, o autor, não promove discursões, não desenvolve questionamentos, que possam orientar os docentes a especular e a construir um conceito para tal relação. Nas duas apresentações, exibidas na Figura 25 e 26, utilizam-se registros multifuncionais e monofuncionais, o livro aborda a relação utilizando representações semióticas na língua natural alfabética, usam escritas algébricas numéricas, acompanhadas de figuras geométricas planas. Tais representações e registros são predominantes nas abordagens ao longo das enunciações dos conteúdos e dos conceitos referentes ao ensino de semelhança.

O próximo tópico a ser descrito e analisado, exposto na Figura 27, é das “Atividades”, tópico referente às situações propostas aos alunos, pelo autor do livro didático A, a fim de evidenciar e confirmar e concretização da conceitualização das formas semelhantes.

Figura 27 – Atividades L1



ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

1 Estas figuras são semelhantes? Justifique sua resposta.

a) Sim, pois os ângulos correspondentes têm a mesma medida (90°), e a razão de semelhança é $\frac{5}{2}$.

b) Não, pois os ângulos correspondentes têm medidas diferentes.

2 Em cada item, os polígonos são semelhantes. Determine as medidas *x* e *y*.

a) x = 10; y = 20

b) x = 12; y = 27

3 Desenhe um triângulo semelhante ao triângulo *ABC* com razão de semelhança igual a $\frac{2}{3}$. Construção de figura.

4 Os triângulos *ABC* e *STU* são semelhantes. Calcule as medidas *x* e *y*.

a) x = 54; y = 85

b) x = 120°; y = 18

5 Determine as medidas de um trapézio de 129 cm de perímetro semelhante ao trapézio abaixo. 30 cm, 24 cm, 54 cm e 21 cm

6 Os lados de um triângulo *ABC* têm medidas 12 cm, 19 cm e 10 cm. Determine a medida dos lados de um triângulo semelhante ao triângulo *ABC*, com 123 cm de perímetro. 36 cm, 57 cm e 30 cm

7 A razão de semelhança entre dois triângulos é 4. Se a área do triângulo menor é 10 cm², qual é a área do triângulo maior? 160 cm²

Fonte: Silveira (2015, p.154)

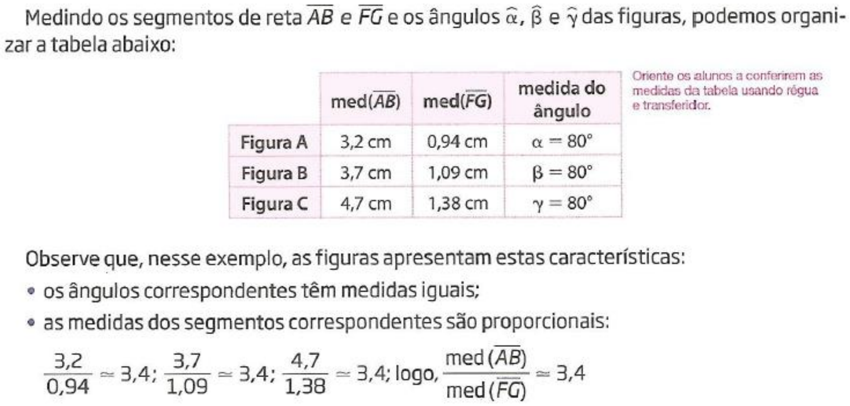
É possível perceber que a questão 1, exige do aluno a ideia conceitual de semelhança, verifica se o aluno compreendeu as condições para duas ou mais figura serem ditas semelhantes. A questão 2 e 4 aborda a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes e a congruência dos ângulos correspondentes das formas geométricas semelhantes.

A questão 3 propõem ao aluno a construção de uma figura semelhante, na razão $\frac{2}{3}$, a partir de um triângulo qualquer. Nessa situação o autor promove uma mudança de registro, uma conversão congruente, de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval. Na situação o aluno deixar de usar um registro multifuncional discursivo e passa usar um registro multifuncional não discursivo, com o manuseio de material concreto.

As questões 5 e 6 aborda a relação entre a razão de semelhança, das figuras semelhantes, com a razão entre os perímetros dessas formas semelhantes. A questão 7 explorar a relação entre a razão de semelhança, das figuras semelhantes, com a razão entre as áreas das formas semelhantes.

As abordagens do livro didático L1, referente ao ensino de figuras semelhantes, poderia ser enriquecido com a presença de uma metodologia que apresente ao aluno outros tratamentos, outros meios, que possibilite ao mesmo uma compreensão mais significativa sobre a transição do conceito geométrico para a escrita algébrica. O manuseio com material concreto, a manipulação de softwares geométricos, são ferramentas extremamente úteis para concretizar o processo de ensino, e tais ferramentas, não estão presentes nos textos introdutórios e nem nas questões propostas, com a exceção do texto da página 149, exposto na Figura 28, e da questão 3 da página 154, exibido na Figura 29.

Figura 28 – Registros multifuncionais e monofuncionais (discursivos) L1



Medindo os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$ e os ângulos $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\gamma}$ das figuras, podemos organizar a tabela abaixo:

	med($\overline{AB}$)	med($\overline{FG}$)	medida do ângulo
Figura A	3,2 cm	0,94 cm	$\alpha = 80°$
Figura B	3,7 cm	1,09 cm	$\beta = 80°$
Figura C	4,7 cm	1,38 cm	$\gamma = 80°$

Oriente os alunos a conferirem as medidas da tabela usando régua e transferidor.

Observe que, nesse exemplo, as figuras apresentam estas características:

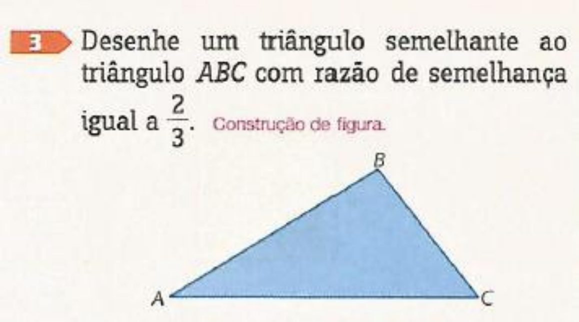
- os ângulos correspondentes têm medidas iguais;
- as medidas dos segmentos correspondentes são proporcionais:

$$\frac{3,2}{0,94} \simeq 3,4; \ \frac{3,7}{1,09} \simeq 3,4; \ \frac{4,7}{1,38} \simeq 3,4; \text{ logo, } \frac{\text{med}(\overline{AB})}{\text{med}(\overline{FG})} \simeq 3,4$$

Fonte: Silveira (2015, p.149)

O autor orienta, aos alunos, o uso de régua e transferidor para conferir se os lados correspondentes são proporcionais e se os ângulos correspondentes são congruentes, mas, não há nenhuma orientação para usar tais ferramentas como auxílio na construção de figuras semelhantes.

Figura 29 – Registro multifuncional não discursivo L1



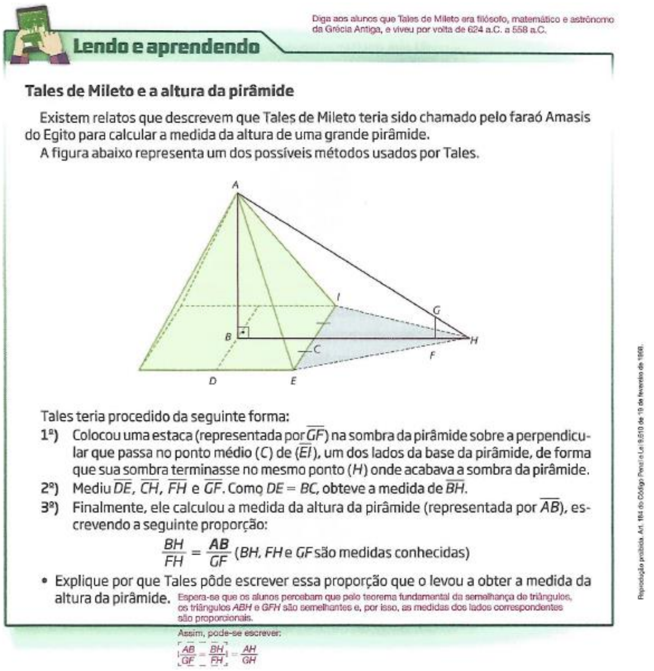
3 Desenhe um triângulo semelhante ao triângulo *ABC* com razão de semelhança igual a $\frac{2}{3}$. Construção de figura.

Fonte: Silveira (2015, p.154)

Na questão 3 da página 154 do livro didático L1, exige do aluno que realize uma construção de uma figura semelhantes na razão $\frac{2}{3}$, porém se o mesmo pesquisar no livro, essas orientações, estarão presentes apenas na subunidade 6 do capítulo 6, não fazendo sentido a sequência didático do livro.

Dando continuidade a descrição analítica no tópico “Lendo e aprendendo”, exibido na Figura 30, ilustra e descreve o problema clássico do cálculo da altura de uma pirâmide por Tales de Mileto, usando a ideia conceitual de figuras semelhantes.

Figura 30 – Contexto histórico (Thales de Mileto) L1



Diga aos alunos que Tales de Mileto era filósofo, matemático e astrônomo da Grécia Antiga, e viveu por volta de 624 a.C. a 558 a.C.

Lendo e aprendendo

Tales de Mileto e a altura da pirâmide

Existem relatos que descrevem que Tales de Mileto teria sido chamado pelo faraó Amasis do Egito para calcular a medida da altura de uma grande pirâmide.

A figura abaixo representa um dos possíveis métodos usados por Tales.

Tales teria procedido da seguinte forma:

1º) Colocou uma estaca (representada por $\overline{GF}$) na sombra da pirâmide sobre a perpendicular que passa no ponto médio (C) de ($\overline{EI}$), um dos lados da base da pirâmide, de forma que sua sombra terminasse no mesmo ponto (H) onde acabava a sombra da pirâmide.

2º) Mediu $\overline{DE}$, $\overline{CH}$, $\overline{FH}$ e $\overline{GF}$. Como $DE = BC$, obteve a medida de $\overline{BH}$.

3º) Finalmente, ele calculou a medida da altura da pirâmide (representada por $\overline{AB}$), escrevendo a seguinte proporção:

$$\frac{BH}{FH} = \frac{AB}{GF} \text{ (}BH, FH \text{ e } GF \text{ são medidas conhecidas)}$$

- Explique por que Tales pôde escrever essa proporção que o levou a obter a medida da altura da pirâmide. Espera-se que os alunos percebam que pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, os triângulos *ABH* e *GFH* são semelhantes e, por isso, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

Assim, pode-se escrever:

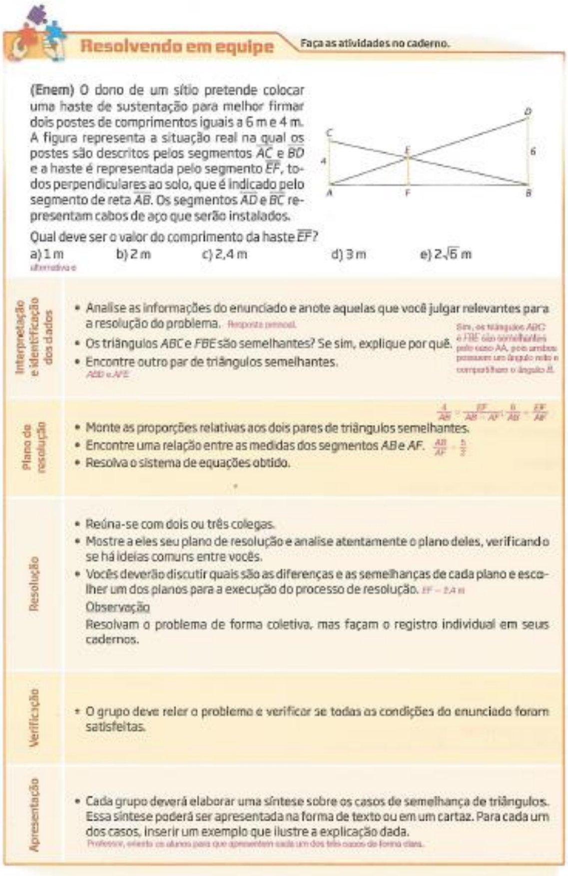
$$\boxed{\frac{AB}{GF} = \frac{BH}{FH}} = \frac{AH}{GH}$$

Fonte: Silveira (2015, p.158)

Os registros de representação semióticos presentes na descrição do problema, presente na Figura 30, são os multifuncionais discursivos e não discursivos, evidenciados pela utilização da língua natural alfabética, acompanhada de forma geométrica plana e o registro monofuncional discursivo, pelo uso do sistema de escrita algébrica simbólica.

No tópico “Resolvendo em equipe”, apresentado na Figura 31, o autor utiliza uma questão que já foi aplicado na prova do EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO (ENEM). A questão aborda a ideia de semelhança, porém a proposta do autor não é em apenas resolver o problema, mas sim, construir uma linha de raciocínio até chegar à solução da questão. Para tal, o livro apresenta uma sequência didática descrita em etapas; Interpretação e identificação dos dados; Plano de resolução; Resolução; Verificação; Apresentação. Tal sequência deve ser seguida pela equipe, e caso, a solução seja encontrada, a equipe deve apresentar aos demais colegas a solução do problema. Os registros presentes neste tópico, são os multifuncionais e monofuncionais, por meio da língua natural alfabética e pelo sistema de escrita algébrico numérico.

Figura 31 – Semelhança no Enem L1



Resolvendo em equipe Faça as atividades no caderno.

(Enem) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e a haste é representada pelo segmento $\overline{EF}$, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados.

Qual deve ser o valor do comprimento da haste $\overline{EF}$?

a) 1 m b) 2 m c) 2,4 m d) 3 m e) $2\sqrt{6}$ m

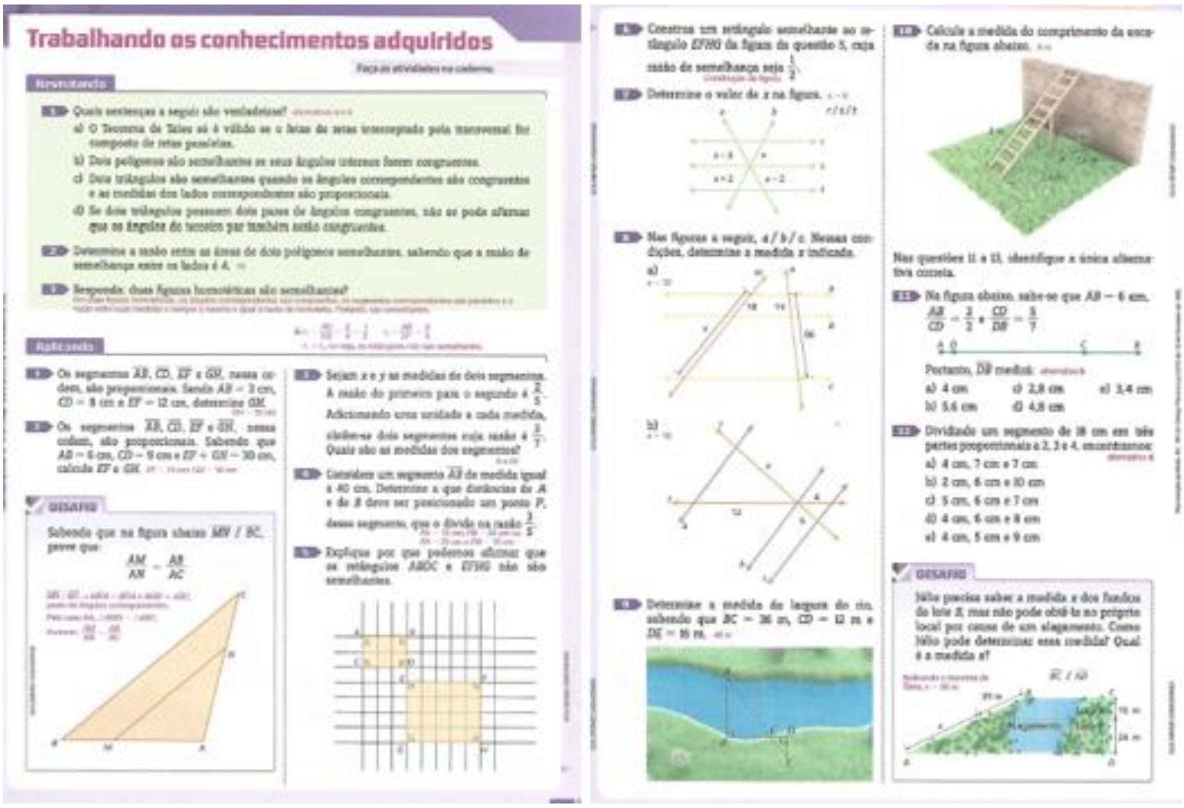
alternativa c

Interpretação e identificação dos dados	• Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal. • Os triângulos *ABC* e *FBE* são semelhantes? Se sim, explique por quê. Sim, os triângulos ABC e FBE são semelhantes pelo caso AA, pois ambos possuem um ângulo reto e compartilham o ângulo B. • Encontre outro par de triângulos semelhantes. ABD e AFE
Plano de resolução	• Monte as proporções relativas aos dois pares de triângulos semelhantes. • Encontre uma relação entre as medidas dos segmentos *AB* e *AF*. $\frac{AB}{AF} = \frac{5}{2}$ • Resolva o sistema de equações obtido.
Resolução	• Reúna-se com dois ou três colegas. • Mostre a eles seu plano de resolução e analise atentamente o plano deles, verificando se há ideias comuns entre vocês. • Vocês deverão discutir quais são as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolher um dos planos para a execução do processo de resolução. EF = 2,4 m Observação Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual em seus cadernos.
Verificação	• O grupo deve reler o problema e verificar se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.
Apresentação	• Cada grupo deverá elaborar uma síntese sobre os casos de semelhança de triângulos. Essa síntese poderá ser apresentada na forma de texto ou em um cartaz. Para cada um dos casos, inserir um exemplo que ilustre a explicação dada. Professor, oriente os alunos para que apresentem cada um dos três casos de forma clara.

Fonte: Silveira (2015, p.164)

O último tópico, do livro didático Matemática - Compreensão e Prática, é “Trabalhando os conhecimentos adquiridos”, exibido na Figura 32. Trata-se de um grupo de atividades e exercícios, que abordam os conteúdos e conceitos apresentados em todo o capítulo.

Figura 32 – Atividades L1



Trabalhando os conhecimentos adquiridos

Fonte: Silveira (2015, p.165 e 166)

As questões totalizam 41 situações e exercícios, envolvendo todos os conteúdos abordados no capítulo 6, além de 5 problemas intitulados de “desafios” e 3 questões no quadro “revisitando”. Nessa lista de exercício, os problemas que envolvem o ensino de figuras semelhantes, podem ser divididas em situações envolvendo o conceito de semelhança, situações envolvendo a determinação de medidas métricas lineares, por meio da proporcionalidade, problemas envolvendo a relação entre a razão de semelhança e a razões entre os perímetros e a razões entre as áreas de forma semelhantes. E uma única questão que promove a ideia de construção de forma semelhantes.

Os registros multifuncionais e monofuncionais também são predominantes no tópico “Trabalhando os conhecimentos adquiridos”. É perceptível a escassez, ou a total inexistência, de um tratamento geométrico como o manuseio de materiais concretos, régua e compasso, assim como, a inexistência de atividade geométricas propostas por um software dinâmico. É importantíssimo tais tratamentos, afinal, auxilia o aluno a construir e concretizar a conceitualização das condições para figuras serem ditas semelhantes.

Conclusões L1

Apresentaremos os aspectos que este estudo investiga, de acordo com os objetivos pretendidos, conforme o referencial teórico adotado e seguindo os critérios elaborados na metodologia. Exibimos as páginas dos textos introdutórios e das questões que foram analisadas, referente ao ensino de figuras semelhantes, da subunidade 4, intitulada de Semelhança, do capítulo 6 do livro didático Matemática - Compreensão e Prática (L1). Em sequência sintetizamos os dados coletados, a fim de inferir sobre as interpretações de forma conclusiva e definitiva, embasada, não apenas, na leitura descritiva e argumentativa, mas também, pela análise do agrupamento dos dados apurados pelas fichas.

Durante a leitura e descrição analítica é possível constatar que os registros predominantes nas enunciações dos conteúdos e dos conceitos que abordam o ensino de semelhança, assim como, nos comandos das questões e problemas, do livro didático L1, foram os multifuncionais discursivos e não discursivos, bem como, os monofuncionais discursivos. Tal afirmação pode ser confirmada pelo agrupamento das páginas de acordo com a temática da 1º ficha, exibido no Quadro 8.

Quadro 8 – Classificação dos tipos de registros presentes na obra L1

TEXTOS	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros multifuncionais	Páginas: 132; 133; 134; 149; 150; 151; 152; 153; 158.	Páginas: 134; 149; 150; 151; 152; 153; 158.
Registros monofuncionais	Páginas: 149; 150; 151; 152; 153; 158.	Páginas: AUSENTE
QUESTÕES	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros multifuncionais	Página: 154, questões: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Página: 166, questões: 9; 10. Página: 167, questões: 15,16. Página: 168, questões: 21; 22; 23; 24. Página: 169, questões: 25; 26;	Página 154, questões: 1; 2; 3; 4; 5. Página: 166, questões: 9; 10. Página: 167, questões: 15,16. Página: 168, questões: 21; 22; 23; 24. Página: 169, questões: 25; 26;

	27; 28; 29; 30. Página: 170, questões: 31; 32; 33; 34.	27; 29. Página: 170, questões: 31; 32; 33; 34.
Registros monofuncionais	Página: 154, questões: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Página: 166, questões: 9; 10. Página: 167, questões: 15,16. Página: 168, questões: 21; 22; 23; 24. Página: 169, questões: 25; 26; 27; 28; 29; 30. Página: 170, questões: 31; 32; 33.	Páginas: AUSENTE

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

No decorrer da descrição da obra L1 foi possível averiguar uma única questão envolvendo o manuseio de material concreto régua e compasso. Tal questão se trata do exemplo 3 da página 154, exposto na figura 29. Segundo a teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval, é preciso apresentar aos docentes diversas representações para um mesmo objeto matemático, para que a aprendizagem possa ser concretizada. A manipulação de régua e compasso, assim como, o manuseio de softwares geométricos dinâmicos, para reproduzir, ampliar e reduzir formas geométricas semelhantes, são ferramentas que auxiliam o processo de ensino, pois possibilita ao aluno outra visão a respeito da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica.

O autor aborda a homotetia e consequentemente o manuseio de régua e compasso, mas isso só ocorre efetivamente, na subunidade 6 do capítulo 6, do livro didático. Tenho convicção que se a subunidade 4 “Semelhança” e a subunidade 6 “Homotetia” fosse condensada em uma só, e correlacionadas, o ensino de figuras semelhantes, proposto no livro L2, seria construído de forma mais significativamente, visto que segundo os PCN (BRASIL, 1998, p. 86) “[...] o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (homotetias)”.

O Quadro 9 apresenta a temática abordada na 2º ficha. Diante da análise e da apresentação dos dados, compreendo que a obra L1 não exploram de forma efetiva o manuseio de materiais concretos e não há registro do manuseio de software geométrico.

Quadro 9 – Registro de materiais concretos presentes na obra L1

TEXTOS	Régua e compasso.	Software geométrico.
	Páginas: 149	Páginas: AUSENTE
QUESTÕES	Régua e compasso.	Software geométrico.
	Páginas 154, questão 3.	Páginas: AUSENTE

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Sobre as propriedades da proporção envolvendo a relação da razão de semelhanças com o quociente entre os perímetros, com o quociente entre as áreas e com o quociente entre volumes, das formas geométricas semelhantes, percebemos, tanto nos textos quanto nas questões que apenas a relação para perímetro e áreas são abordadas. Acredito que essas propriedades da proporção, devem ser exploradas de forma construtiva. Os textos devem conter e desenvolver atividades que levem ao docente a deduzir tal relação. A reprodução, aplicação e redução de formas geométricas semelhantes por meio de software de geometria dinâmica, ou pelo uso de materiais concretos, ou pelo o manuseio de uma malha quadriculada, são recursos que os autores podem recorrer para promover uma investigação dedutiva a respeito da relação entre a razão de semelhança com o quociente entre os perímetros e com o quociente entre as áreas das figuras semelhantes. O Quadro 9 exibe as páginas e as questões envolvendo a temática tratada na 3º ficha.

Quadro 10 – Registro da proporcionalidade envolvendo perímetro, área e volume presente na obra L1

TEXTOS	Páginas: 152; 153.
QUESTÕES	Páginas: 154 questões: 5, 6, 7.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Com a coleta de dados, agrupados pela 4º ficha, a percepção inicial sobre o equilíbrio referente a alteração de registros para os textos introdutórios se confirma. As mudanças do tipo tratamento e do tipo conversões para os textos são equiparáveis. Porém, para as questões, quase que em sua totalidade, a conversão é a mudança de registro predominante. Visto que a alteração dos registros multifuncionais discursivos e não discursivos para os registros monofuncionais discursivos é mais frequente. Afinal, para enunciar os conceitos e os comandos respectivamente, dos textos e das questões, referente ao ensino de semelhança, são usadas as representações da língua natural alfabética, acompanhada de formas geométricas planas e em seguida essas representações são convertidas para a escrita algébrica e numérica. O Quadro 11, que expõem a temática explorada na 4º ficha, confirma nossa interpretação.

Quadro 11 – Classificação das alterações dos registros presentes na obra L1

TEXTOS	Tratamento.	Conversões.
	Páginas: 132; 133; 134; 149; 150; 151; 152; 153; 158.	Páginas:132; 134; 149; 150; 151; 152,153.
QUESTÕES	Tratamento.	Conversões.
	Páginas: Página 154, questões: 3. Página: 170, questão: 34.	Páginas: Página 154, questões: 1; 2; 4; 5; 6; 7. Página: 154, questões: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Página: 166, questões: 9; 10. Página: 167, questões: 15,16. Página: 168, questões: 21; 22; 23; 24. Página: 169, questões: 25; 26; 27; 28; 29; 30. Página: 170, questões: 31; 32; 33

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Diante do que foi exposto acreditamos que o livro didático Matemática - Compreensão e Prática (L1) apresenta diversos registros e representações para enunciar o ensino de figuras semelhantes. Um ponto importante desenvolvido na obra é a apresentação da relação entre a razão de semelhança com o quociente entre os perímetros e com o quociente entre as áreas. Entendemos que o uso de materiais concretos deve ser mais bem explorado, visto que são ferramentas que podem auxiliar, os docentes, no processo da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica.

5.2 OBRA L2: MATEMÁTICA – IDEIAS E DESAFIOS

No livro didático, Matemática – Ideias e Desafios, das autoras Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga, produzido pela editora Saraiva, de 18ª Edição, no ano de 2016, que está presente no Guia de Livros Didáticos Ensino Fundamental Anos Finais (Brasil 2016), e de acordo com o Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD), organiza-se os conteúdos em unidades e em capítulos que compõem as unidades.

Quadro 12 – Sumário do livro didático da obra L2

Unidades.	Capítulos.
Unidade – 1 Números reais e potência.	1 – Potência de um número real; 2 – Potência de base 10; Leitura – Grande ou pequeno? Depende; Revisão cumulativa e testes.
Unidade – 2 Radiciação: propriedades.	1 – Raiz n-ésima (enésima); 2 – Outras propriedades dos radicais; 3 – Operações com radicais; Leitura – O símbolo $\sqrt{\ }$; Revisão cumulativa e testes.
Unidade – 3 Equações de 2º grau.	1 – Equações de 2º grau com uma incógnita; 2 – Resoluções de equações de 2ª grau incompletas; 3 – Resolução de equações de 2º grau completas; Leitura – Um pouco da história; Revisão cumulativa e testes.
Unidade – 4 Equações de 2º grau e formas redutíveis.	1 – Equações de 2º grau: relações particulares; 2 – Aplicações da equação de 2º grau; 3 – Explorando outras equações; Leitura – A equação de 2º grau e o dia a dia; Revisão cumulativa e testes.
Unidade – 5 Tales e a Proporcionalidade.	1 – Proporcionalidade; 2 – Proporcionalidade entre segmentos de reta; 3 – Tales e retas paralelas; 4 – O teorema de Tales; Leitura – Harmonia e proporcionalidade caminham juntas; Revisão cumulativa e testes.
Unidade – 6 Semelhança e proporcionalidade.	1 – Figuras semelhantes; 2 – Polígonos semelhantes; 3 – Os triângulos e a semelhança; Leitura – Cálculo de alturas e distâncias inacessíveis; Revisão cumulativa e testes.
Unidade – 7 Semelhança e medidas.	1 – Relações métricas nos triângulos retângulos; 2 – Quadrados, triângulos e o teorema de Pitágoras; Leitura – “A proporção é linda!”; Revisão cumulativa e testes.
Unidade – 8 Estatística e probabilidade.	1 – Informações estatísticas; 2 – Medidas de tendência central; 3 – Probabilidade; Leitura – Possibilidade, chances e Hereditariedade; Revisão cumulativa e testes.
Unidade – 9 Funções.	1 – Funções: significados e registros; 2 – Função do 1º grau; 3 – Função de 1º grau: estudo de sinais; Leitura – O casamento da Álgebra com a Geometria; Revisão cumulativa e testes.
Unidade – 10 Função de 2º grau.	1 – Função de 2º grau; 2 – Representação gráfica de uma função de 2º grau; 3 – Estudando parábolas; 4 – Função de 2º grau e o estudo dos sinais; 5 – Inequações de 2º grau; Leitura – Bola na cesta; Revisão cumulativa e testes.
Unidade – 11 Circunferências	1 – Circunferência e propriedades; 2 – Circunferências e retas em um plano; 3 – Ângulos com vértice em uma circunferência; 4 – Comprimento e área; Leitura – A circunferência da Terra; Revisão cumulativa e testes.
Unidade – 12 Relações trigonométricas.	1 – Relações trigonométricas nos triângulos retângulos; 2 – Relações métricas em polígonos regulares; Leitura – “Pirâmides: o mapa do céu”. Verdade ou ficção? Revisão cumulativa e testes

Fonte: Elaborado pelo autor (2019) uma adaptação do sumário da obra Matemática Ideias e Desafios (2016, p.7 e 8).

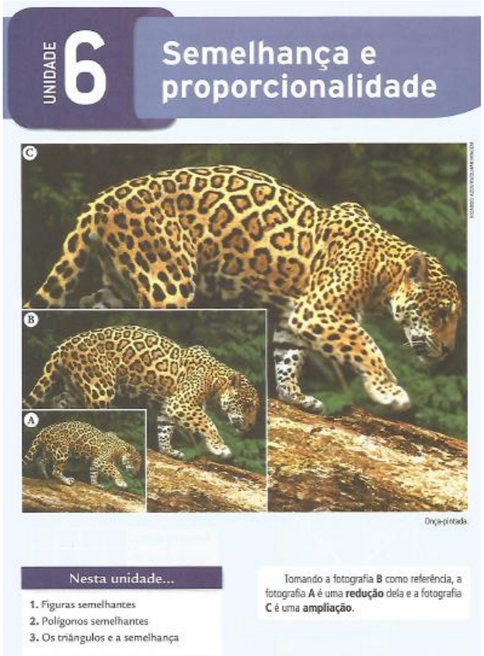
Cada unidade é estruturada em uma sequência didática, não ordenada, dividida em seções temáticas. Tais seções são intituladas de; “Abertura da unidade”; “O que você já sabe”; “Para refletir e responder”; “Exercícios complementares”; “Usando a calculadora”; “Fazer e aprender”; “Troquem ideias e resolvam”; “Investigue e explique”; “Desafio”; “Leitura”; “Revisão cumulativa e testes”.

De acordo com que a pesquisa propõe investigar, analisaremos o capítulo 1 “Figuras semelhantes” e o capítulo 2 “Polígonos semelhantes”, da unidade 6, intitulada de “Semelhança e proporcionalidade”. O capítulo 2 tem alguns subtemas que não se enquadram nos aspectos que decidimos investigar nesta pesquisa, que se tratam dos subtemas; “triângulos equiláteros, quadrados e a semelhança”; “O que é homotetia?”. Nosso estudo é focado no aspecto geral do ensino da semelhança, não em algo específico, como o estudo da semelhança nos triângulos e quadrados. Assim, seguindo os critérios estabelecidos na metodologia e de acordo com a teoria adotada no referencial teórico, seguiremos com a descrição analítica do livro didático L2.

Descrição do conteúdo

Na “Abertura da unidade” o livro didático apresenta três imagens, indicadas pelas letras **A**, **B**, e **C**. De acordo com a apresentação do livro, a imagem **A** representa uma redução da imagem **B** e a imagem **C**, por sua vez, representa uma ampliação da imagem **B**. Ainda na abertura se indica os assuntos que serão abordados nessa unidade, apresentados em um quadro como é possível de constatar na Figura 33.

Figura 33 – Enunciação contextual (fotografia) L2



UNIDADE 6 Semelhança e proporcionalidade

Onça-pintada.

Nesta unidade...

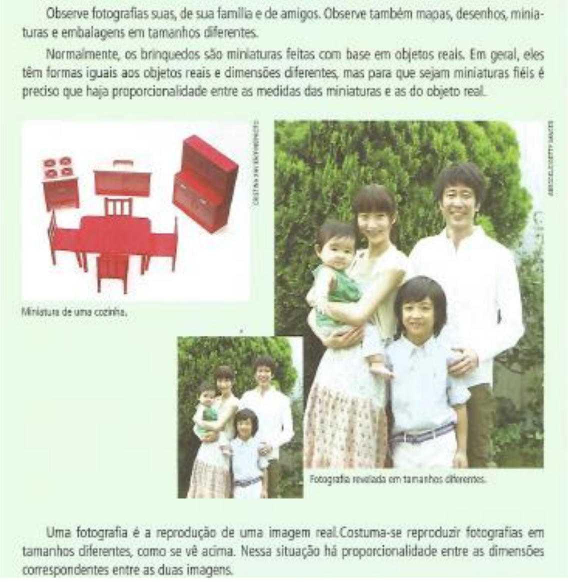
1. Figuras semelhantes
2. Polígonos semelhantes
3. Os triângulos e a semelhança

Tomando a fotografia **B** como referência, a fotografia **A** é uma **redução** dela e a fotografia **C** é uma **ampliação**.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.100)

A ideia inicial que o livro apresenta, ao docente, é que figuras semelhantes são ampliações ou reduções proporcionais de um determinado objeto. Está ideia se confirma na próxima página, exibida na Figura 34. As autoras, enunciam que para mapas, brinquedos, ou fotos sejam miniaturas fiéis aos objetos reais, é necessário ter a mesma forma, porém, tamanhos diferentes, mas com tudo, é preciso haver uma proporcionalidade entre as medidas das miniaturas com as medidas dos objetos reais.

Figura 34 – Enunciação contextual (miniatura) L2



Observe fotografias suas, de sua família e de amigos. Observe também mapas, desenhos, miniaturas e embalagens em tamanhos diferentes.

Normalmente, os brinquedos são miniaturas feitas com base em objetos reais. Em geral, eles têm formas iguais aos objetos reais e dimensões diferentes, mas para que sejam miniaturas fiéis é preciso que haja proporcionalidade entre as medidas das miniaturas e as do objeto real.

Miniatura de uma cozinha.

Fotografia revelada em tamanhos diferentes.

Uma fotografia é a reprodução de uma imagem real.Costuma-se reproduzir fotografias em tamanhos diferentes, como se vê acima. Nessa situação há proporcionalidade entre as dimensões correspondentes entre as duas imagens.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.101)

Na temática “O que você já sabe?”, ainda na página 101 da unidade 6, as autoras, apresentam alguns questionamentos com o intuito que o professor junto com os alunos, realizarem pesquisas e investigações que possam responder as indagações levantadas na temática.

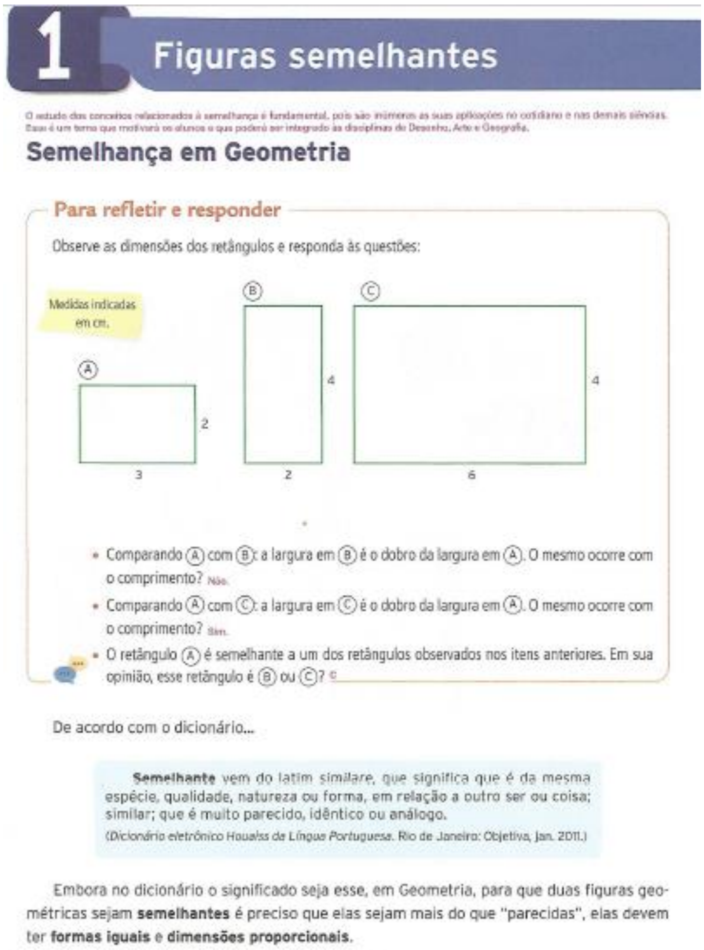
> O que você Já sabe?
> Compare uma fotográfica com outra que seja dela. Em sua opinião, elas são semelhantes? Por quê?
> Consulte um dicionário: o que significa semelhança? (Mori e Onaga, 2016, p.101)

A finalidade desta atividade é desenvolver o aspecto argumentativo da geometria, por meio das observações das propriedades. Assim, os alunos podem elaborar suas conjecturas e construir um conceito através das análises e observações.

Os registros utilizados para enunciar o conteúdo, tanto na página 100, com a temática “Abertura da unidade”, quanto na página 101, com a temática “O que você já sabe?”, segundo a teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval, são os registros multifuncionais discursivo e não discursivo, pois, percebemos a utilização da língua natural alfabética, para enunciar o conteúdo, acompanhado de imagens planas que ilustram os exemplos dados.

Prosseguindo com a análise, na temática “Para refletir e responder”, presente na abertura do capitulo 1, intitulado de “Figuras semelhante”, podemos constatar o emprego das mesmas representações semióticas aplicadas nos exemplos anteriores, exibidos nas Figuras 33 e 34, visto que na continuação da enunciação do ensino de semelhança, o livro didático, apresenta na abordagem três retângulos indicados pelas letras **A**, **B** e **C**, com medidas distintas e em sequência se promove questionamentos, sobre as medidas desses retângulos. O objetivo dessas representações é evidenciar que uma ampliação, de uma determinada figura, só será uma representação semelhante a original, caso, todas as medidas lineares sejam ampliadas na mesma proporção como é possível de verificar na Figura 35.

Figura 35 – Condição de semelhantes L2



1 Figuras semelhantes

O estudo dos conceitos relacionados à semelhança é fundamental, pois são inúmeras as suas aplicações no cotidiano e nas demais ciências. Esse é um tema que motivará os alunos e que poderá ser integrado às disciplinas de Desenho, Arte e Geografia.

Semelhança em Geometria

Para refletir e responder

Observe as dimensões dos retângulos e responda às questões:

- Comparando Ⓐ com Ⓑ: a largura em Ⓑ é o dobro da largura em Ⓐ. O mesmo ocorre com o comprimento? Não.
- Comparando Ⓐ com Ⓒ: a largura em Ⓒ é o dobro da largura em Ⓐ. O mesmo ocorre com o comprimento? Sim.
- O retângulo Ⓐ é semelhante a um dos retângulos observados nos itens anteriores. Em sua opinião, esse retângulo é Ⓑ ou Ⓒ? C

De acordo com o dicionário...

> **Semelhante** vem do latim similare, que significa que é da mesma espécie, qualidade, natureza ou forma, em relação a outro ser ou coisa; similar; que é muito parecido, idêntico ou análogo.
> (*Dicionário eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, jan. 2011.)

Embora no dicionário o significado seja esse, em Geometria, para que duas figuras geométricas sejam **semelhantes** é preciso que elas sejam mais do que "parecidas", elas devem ter **formas iguais** e **dimensões proporcionais**.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.102)

Na Figura 35, as formas geométricas planas, referente aos três retângulos se enquadram no registro multifuncional não discursivo, a enunciação do conceito, como a escrita da língua natural alfabética, se enquadra no registro multifuncional discursivo. É importante ressaltar que nessa abordagem, as autoras, ainda não determinaram a definição de semelhança, porém, durante as temáticas já apresentadas, as autoras deixam indícios, ou afirmações, suficientes para os docentes iniciarem o processo de construção da conceitualização geométrica para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes. Pois, de acordo com as autoras:

> Embora no dicionário o significado seja esse, em Geometria, para duas figuras geométricas sejam **semelhantes** é preciso que elas sejam mais do que "parecidas", elas devem ter **formas iguais** e **dimensões proporcionais.** (Mori e Onaga, 2016, p.102)

Continuando com a enunciação do conteúdo, verificamos, uma exemplificação, no cotidiano, da ideia de semelhança. O livro didático apresenta duas imagens, uma se trata, de uma foto do Maracanã e a outra imagem é uma foto, referente a uma maquete do maracanã. A maquete é outra representação semiótica no estudo da semelhança, afinal, se trata de um objeto real, como tamanho reduzido em relação ao original, respeitando as proporcionalidades entre as medidas correspondes desses dois objetos. Essa representação está exibida na Figura 36, o livro, utiliza de registros multifuncionais discursivos e não discursivos para apresentar está associação.

Figura 36 – Enunciação contextual (maquete) L2

- As maquetes são utilizadas para visualizar, com o maior realismo possível, o resultado final de uma obra que será construída.

As dimensões que aparecem em uma maquete são proporcionais às dimensões da obra quando realizada.

Em geral, uma maquete é semelhante à obra que ela representa.

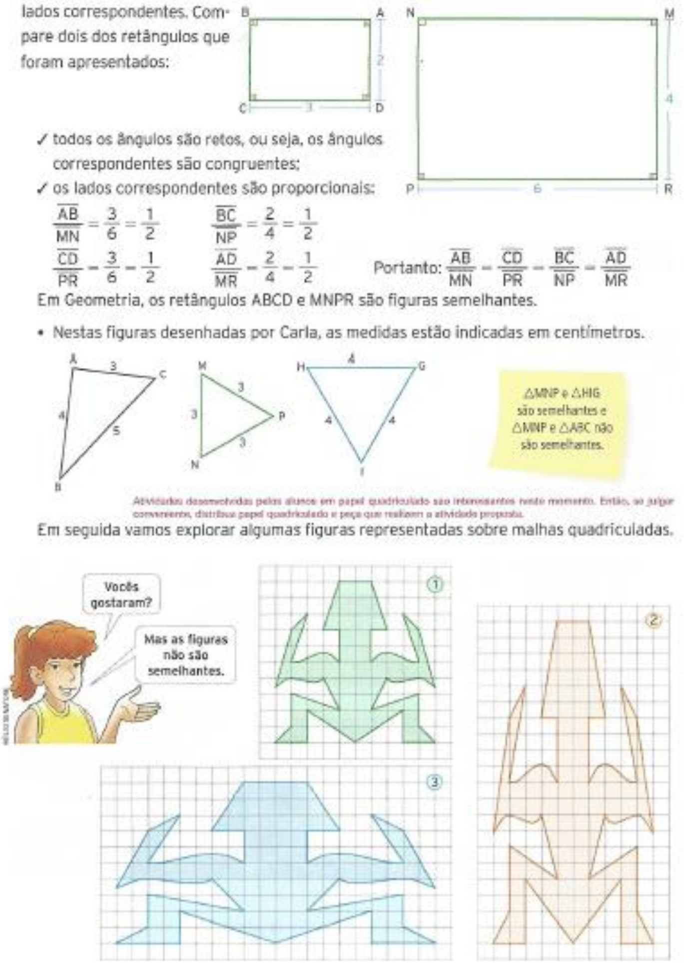
Maquete do Complexo Esportivo do Maracanã, no Rio de Janeiro.

Complexo Esportivo do Maracanã, no Rio de Janeiro.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.103)

Prosseguindo com a enunciação do conteúdo, o livro, na página 104, exibido na Figura 37, inicia a representar a proporcionalidade, entre as medidas lineares nas formas semelhantes, por meio da representação algébrica numérico, que se trata, segundo Duval, do registro monofuncional discursivo. Para concretizar a ideia de semelhança é abordado a ampliação ou redução de figuras, por meio de uma malha quadriculada, empregando, novamente, os registros multifuncionais discursivos e não discursivo.

Figura 37 – Registro multifuncionais e monofuncionais (discursivos) L2



lados correspondentes. Compare dois dos retângulos que foram apresentados:

✓ todos os ângulos são retos, ou seja, os ângulos correspondentes são congruentes;

✓ os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{PR}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\overline{AD}}{\overline{MR}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Portanto: $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{MR}}$

Em Geometria, os retângulos ABCD e MNPR são figuras semelhantes.

- Nestas figuras desenhadas por Carla, as medidas estão indicadas em centímetros.

△MNP e △HIG são semelhantes e △MNP e △ABC não são semelhantes.

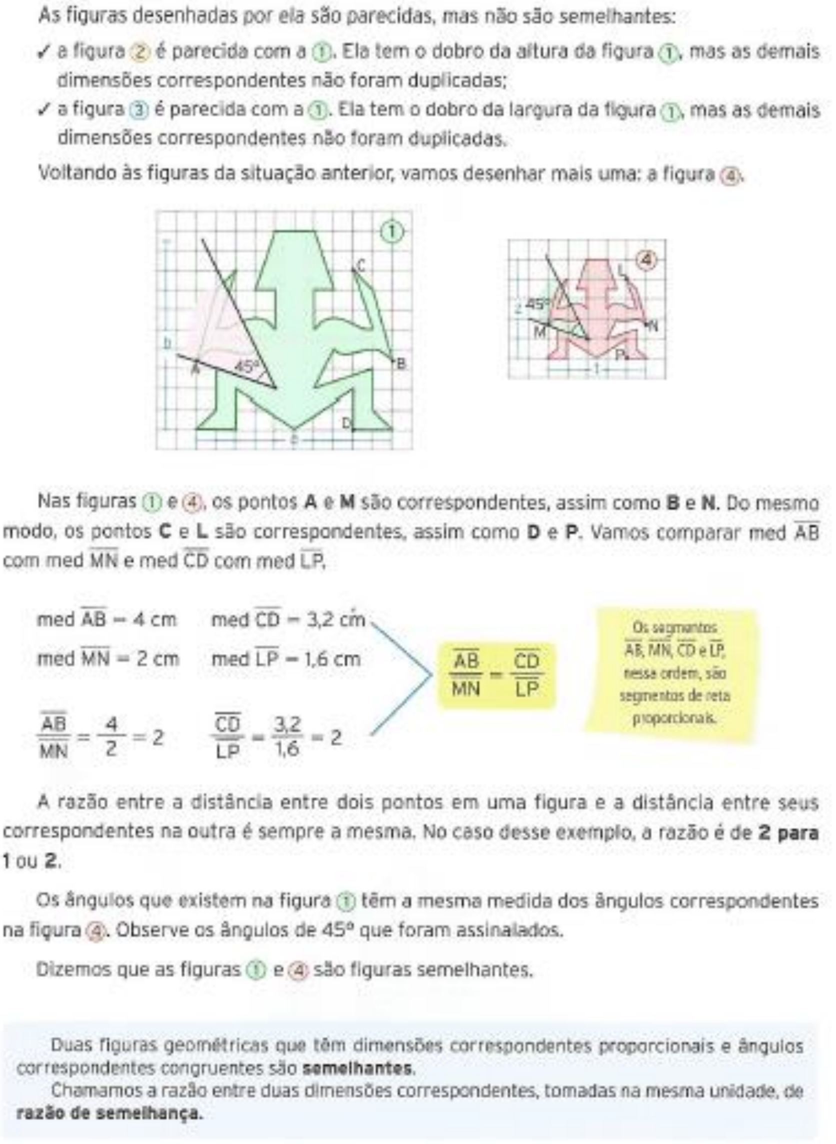
Atividades desenvolvidas pelos alunos em papel quadriculado são interessantes neste momento. Então, se julgar conveniente, distribua papel quadriculado e peça que realizem a atividade proposta.

Em seguida vamos explorar algumas figuras representadas sobre malhas quadriculadas.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.104)

Após mencionar e apresentar propriedades suficientes que permitem aos alunos a construir a definição de semelhança, o livro didático, apresenta a definição enunciando as condições necessárias para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes. Para embasar a condição definida pelas autoras, o enunciado propõe, comparações com as medidas dos ângulos correspondentes, assim como, analogias entre os quocientes entre as medidas dos lados correspondentes, possível de verificar na Figura 38.

Figura 38 – Registros multifuncionais e monofuncionais (discursivos) L2



As figuras desenhadas por ela são parecidas, mas não são semelhantes:

- ✓ a figura ② é parecida com a ①. Ela tem o dobro da altura da figura ①, mas as demais dimensões correspondentes não foram duplicadas;
- ✓ a figura ③ é parecida com a ①. Ela tem o dobro da largura da figura ①, mas as demais dimensões correspondentes não foram duplicadas.

Voltando às figuras da situação anterior, vamos desenhar mais uma: a figura ④.

Nas figuras ① e ④, os pontos **A** e **M** são correspondentes, assim como **B** e **N**. Do mesmo modo, os pontos **C** e **L** são correspondentes, assim como **D** e **P**. Vamos comparar med $\overline{AB}$ com med $\overline{MN}$ e med $\overline{CD}$ com med $\overline{LP}$.

med $\overline{AB} = 4$ cm
med $\overline{MN} = 2$ cm
med $\overline{CD} = 3{,}2$ cm
med $\overline{LP} = 1{,}6$ cm

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \frac{\overline{CD}}{\overline{LP}} = \frac{3{,}2}{1{,}6} = 2$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{LP}}$$

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{CD}$ e $\overline{LP}$, nessa ordem, são segmentos de reta proporcionais.

A razão entre a distância entre dois pontos em uma figura e a distância entre seus correspondentes na outra é sempre a mesma. No caso desse exemplo, a razão é de **2 para 1** ou **2**.

Os ângulos que existem na figura ① têm a mesma medida dos ângulos correspondentes na figura ④. Observe os ângulos de 45° que foram assinalados.

Dizemos que as figuras ① e ④ são figuras semelhantes.

Duas figuras geométricas que têm dimensões correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes são **semelhantes**.

Chamamos a razão entre duas dimensões correspondentes, tomadas na mesma unidade, de **razão de semelhança.**

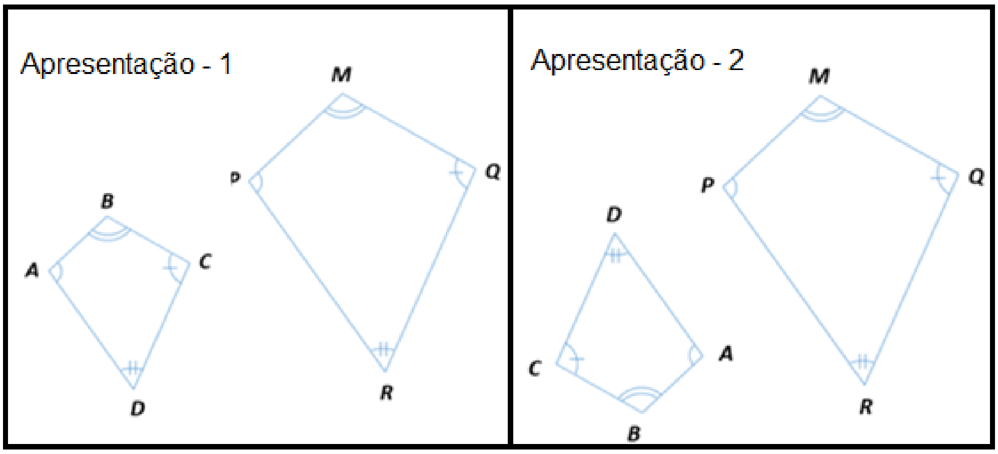
Fonte: Mori e Onaga (2016, p.105)

A abordagem proposta pelo livro didático, sobre a condição suficiente e necessária para definir o conceito de semelhança, traz novamente, os registros multifuncionais e monofuncionais como meios para representar e definir os lados e ângulos correspondentes entre as figuras geométricas semelhantes. É perceptível a predominância desses registros, assim como, na análise anterior, no primeiro livro didático (L1). Percebemos a existência de representações semióticas frequentes, como o uso na língua natural alfabética, assim como, o manuseio da escrita algébrica numérica, acompanhada de formas planas.

Porém, assim como, na análise anterior do livro didático (L1), não há um detalhamento sobre como definir ou identificar os ângulos e os lados correspondentes das figuras semelhantes. É necessário apresentar outras representações semióticas, pois, a variedade de registros proporciona aos alunos a assimilação de diferentes informações para um mesmo objeto de estudo.

Esse ponto dever ser levando em consideração, visto que localizar ou definir, ângulos e lados correspondentes, não é tão intuitivo como pode aparentar. Afinal, nem sempre as imagens são apresentadas de forma que favoreça essa intuição. Vejamos a Figura 39.

Figura 39 – Segmentos correspondentes L2



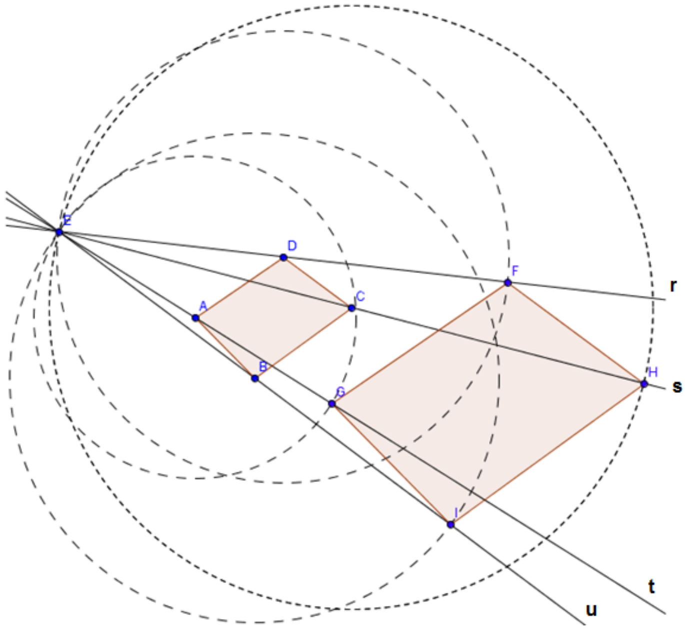
Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Na exibição das figuras semelhantes nos textos introdutórios e conceituais, do livro L2, não identifiquei nenhuma passagem ou comentário sobre como identificar os lados correspondentes proporcionais. Na situação exibida na Figura 39, na apresentação – 2, os quadriláteros *ABCD* e *PMQR*, são semelhantes mas identificar os lados correspondentes proporcionais não é tão intuitivo.

Uma representação semiótica que pode auxiliar aos alunos a compreender claramente a definir e localizar as medidas lineares correspondentes, assim como, as medidas dos ângulos correspondentes é o manuseio do material concreto, régua e compasso. Tal registro se enquadraria no registro multifuncional não discursivo, um registro bem explorado nas enunciações dos textos, sobre o ensino de semelhança, entretanto, a representação semiótica com material concreto não é frequente.

Outra ferramenta que proporciona outro olhar no ensino de figuras semelhantes é o manuseio de um software de geometria dinâmica. Esse registro pode auxiliar a identificar e definir as medidas métricas dos lados e ângulos correspondentes de duas figuras semelhantes. Na Figura 40 foi produzida realizando homotetia com as ferramentas do software geométrico Geogebra.

Figura 40 – Homotetia correspondência entre as medidas



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Usando esse contexto, essa representação, posso definir, para duas figuras semelhantes, que os lados correspondentes proporcionais se tratam dos pares de segmentos paralelos, cortados pelas mesmas transversais.

Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{GF}$ são paralelos, $\overline{AD}//\overline{GF}$, e interceptados pelas mesmas transversais r e t, assim como, os segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{FH}$ são paralelos, $\overline{DC}//\overline{FH}$, e interceptados pelas mesmas transversais r e s, da mesma forma que, $\overline{CB}$ e $\overline{HI}$ são paralelos, $\overline{CB}//\overline{HI}$, e interceptados pelas mesmas transversais s e u, e por fim, os segmentos $\overline{BA}$ e $\overline{IG}$ são paralelos, $\overline{BA}//\overline{IG}$, e interceptados pelas mesmas transversais u e t. Tais segmentos correspondentes são proporcionais $\frac{\overline{AD}}{\overline{GF}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{FH}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{HI}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{IG}}$.

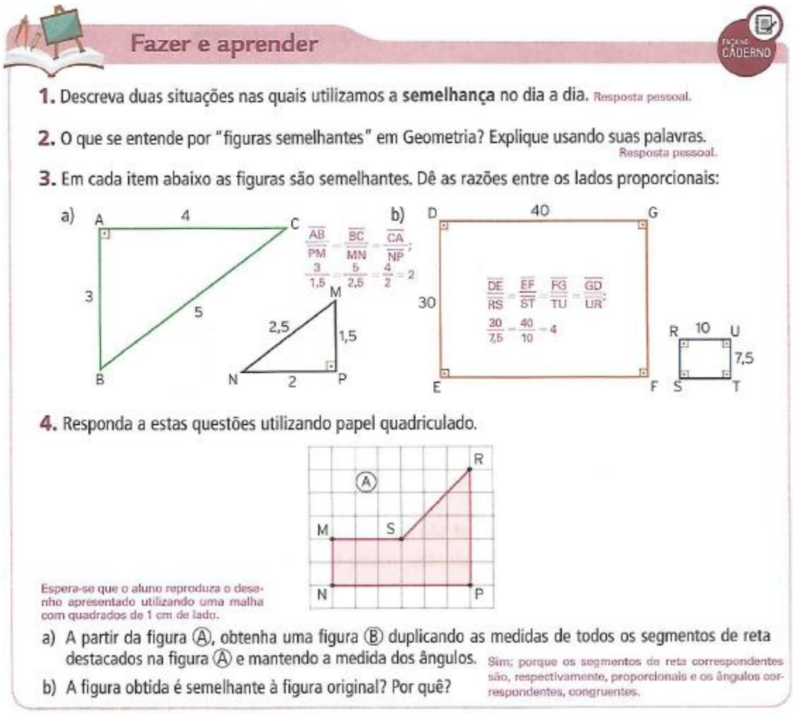
Ainda, para duas figuras semelhantes, posso usar essa representação semiótica, para definir ângulos correspondentes congruentes, como regiões internas aos polígonos, formadas pelas intercessões de dois pares de lados correspondentes e que são interceptadas pela mesma transversal.

Os ângulos $B\hat{A}D$ e $I\hat{G}F$ são regiões internas congruentes, $B\hat{A}D = I\hat{G}F$, formadas pelas intercessões entre os lados $\overline{BA}$ com $\overline{AD}$ e $\overline{IG}$ com $\overline{GF}$, respectivamente. Tais pares de lados que são correspondentes, de dois a dois entre si, respectivamente, assim, essas regiões internas são interceptadas pela mesma transversal t. De forma análoga, podemos afirmar que os pares de ângulos $A\hat{D}C$ e $G\hat{F}H$, $D\hat{C}B$ e $F\hat{H}I$, $C\hat{B}A$ e $H\hat{I}G$, são correspondentes congruentes, respectivamente, tal que $A\hat{D}C = G\hat{F}H$, $D\hat{C}B = F\hat{H}I$, $C\hat{B}A = H\hat{I}G$.

Tanto o manuseio de um software geométrico, quanto a manipulação de material concreto, com régua e compasso, são registros importantes para concretizar o ensino de semelhança, pois, possibilita o docente outros meios para compreender o processo da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica no estudo de figuras semelhantes.

Com tudo, podemos evidenciar que as representações da língua natural assim como, as representações figurais, são predominantes, não só, nas enunciações do conteúdo e na conceitualização da condição para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, mas bem como, nos comandos das questões ou das situações problemas propostos pelo livro, possível de constatar na Figura 41.

Figura 41 – Atividades L2



Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

1. Descreva duas situações nas quais utilizamos a **semelhança** no dia a dia. Resposta pessoal.

2. O que se entende por "figuras semelhantes" em Geometria? Explique usando suas palavras. Resposta pessoal.

3. Em cada item abaixo as figuras são semelhantes. Dê as razões entre os lados proporcionais:

a) $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{NP}}$; $\frac{3}{1,5} = \frac{5}{2,5} = \frac{4}{2} = 2$

b) $\frac{\overline{DE}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{TU}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{UR}}$; $\frac{30}{7,5} = \frac{40}{10} = 4$

4. Responda a estas questões utilizando papel quadriculado.

Espera-se que o aluno reproduza o desenho apresentado utilizando uma malha com quadrados de 1 cm de lado.

a) A partir da figura Ⓐ, obtenha uma figura Ⓑ duplicando as medidas de todos os segmentos de reta destacados na figura Ⓐ e mantendo a medida dos ângulos.

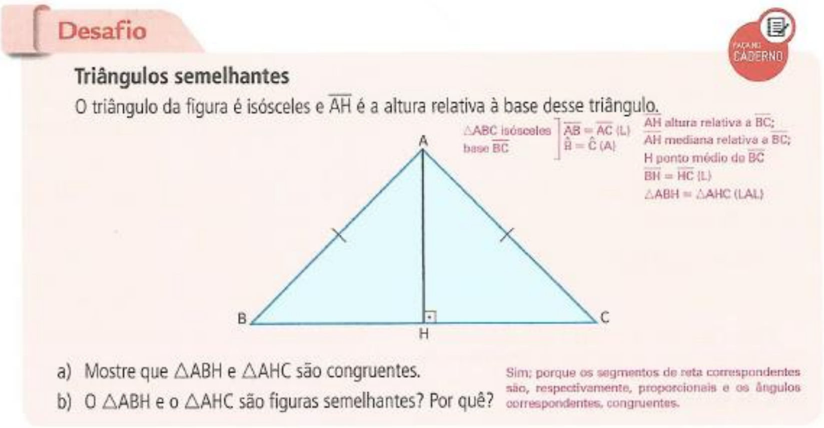
b) A figura obtida é semelhante à figura original? Por quê? Sim; porque os segmentos de reta correspondentes são, respectivamente, proporcionais e os ângulos correspondentes, congruentes.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.106)

Na temática “Fazer e aprender”, apresentado na Figura 41, acima, é perceptível que na questão 1 e 2, tenta promover o resgate das abordagens iniciais propostas pelo livro didático. A questão 3 utiliza uma das condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, no caso, a proporcionalidade entre lados correspondentes, um registro monofuncional discursivo para solucionar tal problema. Na questão 4, usa uma representação semiótica, que se enquadra nos registros multifuncionais discursivos e não discursivos, a malha quadriculada, abordagem apresentada na enunciação dos textos afiam de definir as condições necessários e suficientes para as figuras serem distas semelhantes.

Para finalizar o capítulo 1 “Figura semelhantes” as autoras promovem um problema na temática “Desafio”, exposto na Figura 42. Tal problema, resgata a conceitualização de triângulos congruentes, ministrado 8º Ano do Ensino Fundamental II, promovendo uma relação entre figuras semelhantes. A finalidade dessa situação tem como objetivo que o aluno conclua que toda congruência também é uma semelhança, que a congruência seria um caso particular a semelhança. Para realizar tal conclusão os docentes precisar expor seus pensamentos por meio da escrita algébrica numérica usando um registro monofuncional discursivo.

Figura 42 – Registro monofuncional discursivo L2



Desafio

Triângulos semelhantes

O triângulo da figura é isósceles e $\overline{AH}$ é a altura relativa à base desse triângulo.

$\triangle ABC$ isósceles base $\overline{BC}$ $\left]\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{AC}\ (L)\\ \hat{B} \cong \hat{C}\ (A)\end{array}\right.$

$\overline{AH}$ altura relativa a $\overline{BC}$;
$\overline{AH}$ mediana relativa a $\overline{BC}$;
H ponto médio de $\overline{BC}$
$\overline{BH} \cong \overline{HC}$ (L)
$\triangle ABH \cong \triangle AHC$ (LAL)

a) Mostre que $\triangle ABH$ e $\triangle AHC$ são congruentes.
b) O $\triangle ABH$ e o $\triangle AHC$ são figuras semelhantes? Por quê?

Sim; porque os segmentos de reta correspondentes são, respectivamente, proporcionais e os ângulos correspondentes, congruentes.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.106)

Continuamos a analise, por meio da descrição argumentativa do capítulo 2 intitulado “Polígonos semelhantes”. O livro didático Matemática – Ideias e Desafios, das autoras Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga, traz o ensino de semelhantes, dividido em três capítulos, mas, como já foi mencionado anteriormente, os aspectos que decidimos investigar este estudo, está inserido no capítulo 1 e 2, dessa forma, iniciaremos a análise do capítulo 2.

Figura 43 – Condição de semelhança L2

2 Polígonos semelhantes

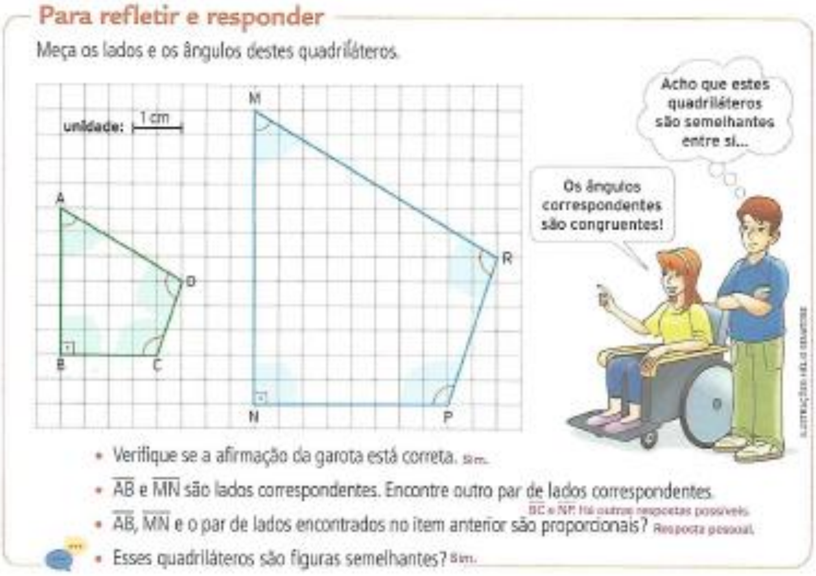
O importante papel da semelhança e de suas aplicações no cotidiano e no estudo das demais ciências aponta para a necessidade de aprofundamento desse tema em relação aos polígonos. Procure saber qual é o nível de interesse dos alunos para adequá-lo ao seu trabalho. É possível fazer uma integração com outras disciplinas.

Identificando semelhança entre polígonos

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.107)

Na apresentação do capítulo 2, exibido na Figura 43, o livro promove questionamentos sobre as condições necessárias e suficientes para os polígonos serem semelhantes. Em seguida na seção temática “Para refletir e responder”, apresentado na Figura 44, orienta realizar algumas verificações, a respeito das medidas métricas de duas figuras planas, por meio de uma malha quadriculada.

Figura 44 – Enunciação contextual (malha quadriculada) L2



Para refletir e responder

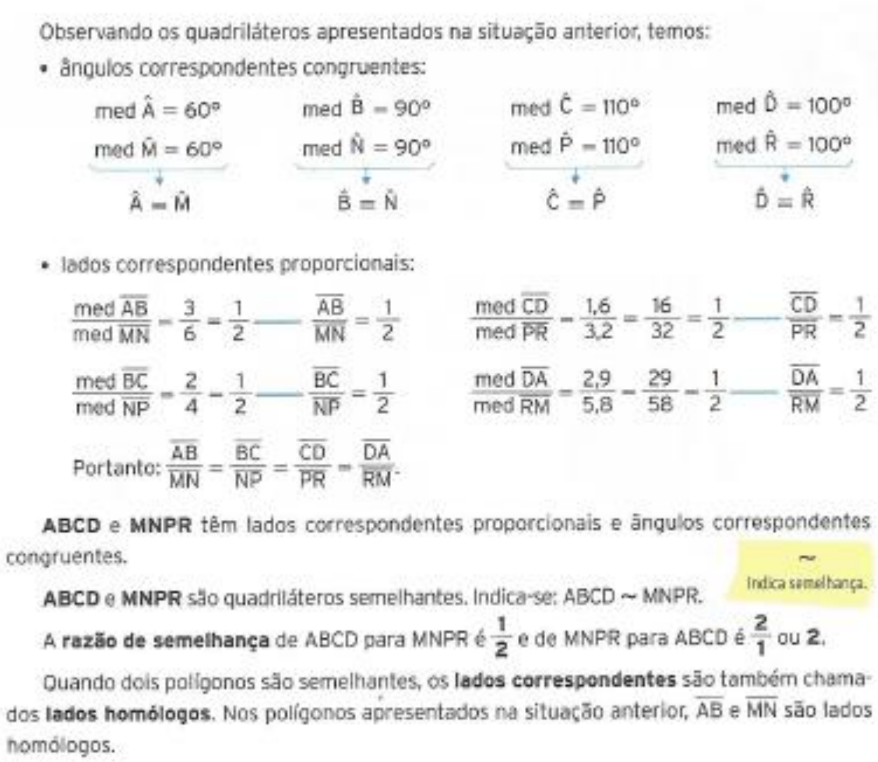
Meça os lados e os ângulos destes quadriláteros.

- Verifique se a afirmação da garota está correta. Sim.
- $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são lados correspondentes. Encontre outro par de lados correspondentes. $\overline{BC}$ e $\overline{NP}$. Há outras respostas possíveis.
- $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ e o par de lados encontrados no item anterior são proporcionais? Resposta pessoal.
- Esses quadriláteros são figuras semelhantes? Sim.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.107)

Na página seguinte, exibido na Figura 45, consta as verificações sobre as medidas métricas dos lados e ângulos correspondentes das duas figuras planas, apresentadas na página anterior.

Figura 45 – Proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes L2



Observando os quadriláteros apresentados na situação anterior, temos:

- ângulos correspondentes congruentes:

$$\underbrace{\begin{matrix}\text{med } \hat{A} = 60^\circ \\ \text{med } \hat{M} = 60^\circ\end{matrix}}_{\downarrow} \qquad \underbrace{\begin{matrix}\text{med } \hat{B} = 90^\circ \\ \text{med } \hat{N} = 90^\circ\end{matrix}}_{\downarrow} \qquad \underbrace{\begin{matrix}\text{med } \hat{C} = 110^\circ \\ \text{med } \hat{P} = 110^\circ\end{matrix}}_{\downarrow} \qquad \underbrace{\begin{matrix}\text{med } \hat{D} = 100^\circ \\ \text{med } \hat{R} = 100^\circ\end{matrix}}_{\downarrow}$$

$$\hat{A} = \hat{M} \qquad\qquad \hat{B} = \hat{N} \qquad\qquad \hat{C} = \hat{P} \qquad\qquad \hat{D} = \hat{R}$$

- lados correspondentes proporcionais:

$$\frac{\text{med } \overline{AB}}{\text{med } \overline{MN}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ —— } \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\text{med } \overline{CD}}{\text{med } \overline{PR}} = \frac{1,6}{3,2} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \text{ —— } \frac{\overline{CD}}{\overline{PR}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{med } \overline{BC}}{\text{med } \overline{NP}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ —— } \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\text{med } \overline{DA}}{\text{med } \overline{RM}} = \frac{2,9}{5,8} = \frac{29}{58} = \frac{1}{2} \text{ —— } \frac{\overline{DA}}{\overline{RM}} = \frac{1}{2}$$

Portanto: $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{RM}}$.

ABCD e **MNPR** têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

ABCD e **MNPR** são quadriláteros semelhantes. Indica-se: ABCD ~ MNPR.

~
Indica semelhança.

A **razão de semelhança** de ABCD para MNPR é $\mathbf{\frac{1}{2}}$ e de MNPR para ABCD é $\mathbf{\frac{2}{1}}$ ou **2**.

Quando dois polígonos são semelhantes, os **lados correspondentes** são também chamados **lados homólogos**. Nos polígonos apresentados na situação anterior, $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são lados homólogos.

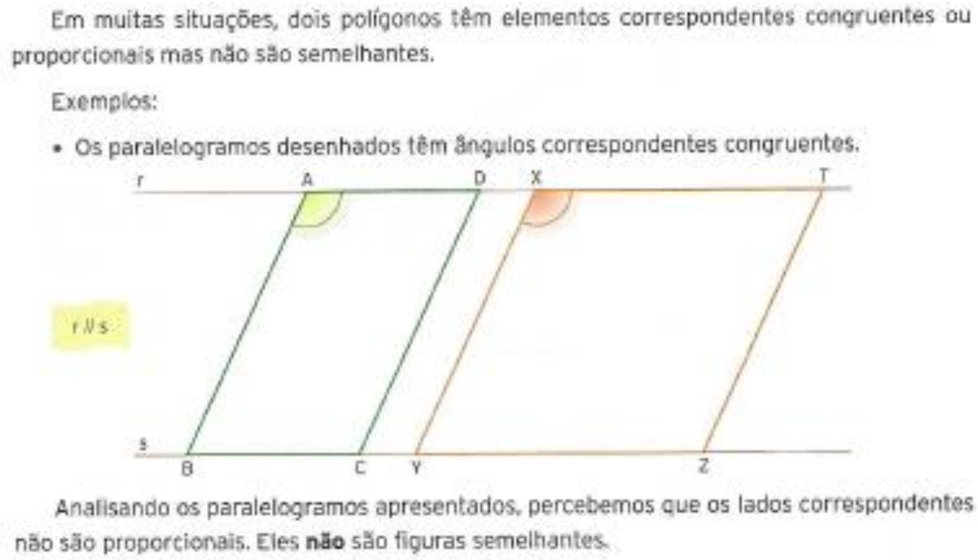
Fonte: Mori e Onaga (2016, p.108)

Nas enunciações abordadas nas páginas 107 e 108, apresentado nas Figuras 44 e 45 do livro didático (L2), os registros multifuncionais discursivos e não discursivos, assim como, os monofuncionais discursivos são usados, para construir as condições suficientes para identificar se as figuras são semelhantes. A utilização da língua natural alfabética, para construir a conceitualização geométrica de semelhança, o manuseio da escrita algébrica numéricas, para determinar a proporcionalidades entre as medidas dos lados correspondentes, a observação das figuras planas e da malha quadriculada, que auxiliam na construção da conceitualização geométrica das condições necessárias para as figuras serem semelhantes, são exemplos de representações semióticos inseridas nos registros citados.

Um ponto, não muito discutido, foi a respeito da razão de semelhança, determinada pela proporcionalidade entre os lados correspondentes, ou como o livro, usa proporcionalidade entre os lados homólogos. A razão de semelhança é um ponto importantíssimo no ensino de figuras semelhantes, visto que permitem aos professores ou aos alunos, não só, determinar medidas métricas lineares desconhecidas de figuras semelhantes, mas, também possibilitam, aos mesmos, a possibilidade de realizarem conjecturas sobre a relação entre a razão de semelhança com os perímetros, áreas e volumes de figuras semelhantes.

Posteriormente podemos verificar na Figura 46, que as autoras, evidenciam as condições suficientes para verificar se duas ou mais figuras são semelhantes. Ressaltando que as duas condições devem ocorrer, os lados correspondentes devem ser proporcionais e os ângulos correspondentes devem ser congruentes. Para tal, a abordagem apresentada no livro didático exibe dois paralelogramos com ângulos correspondestes congruentes, porém, para os lados correspondentes não há proporcionalidade.

Figura 46 – Condição de semelhança L2



Em muitas situações, dois polígonos têm elementos correspondentes congruentes ou proporcionais mas não são semelhantes.

Exemplos:

- Os paralelogramos desenhados têm ângulos correspondentes congruentes.

Analisando os paralelogramos apresentados, percebemos que os lados correspondentes não são proporcionais. Eles **não** são figuras semelhantes.

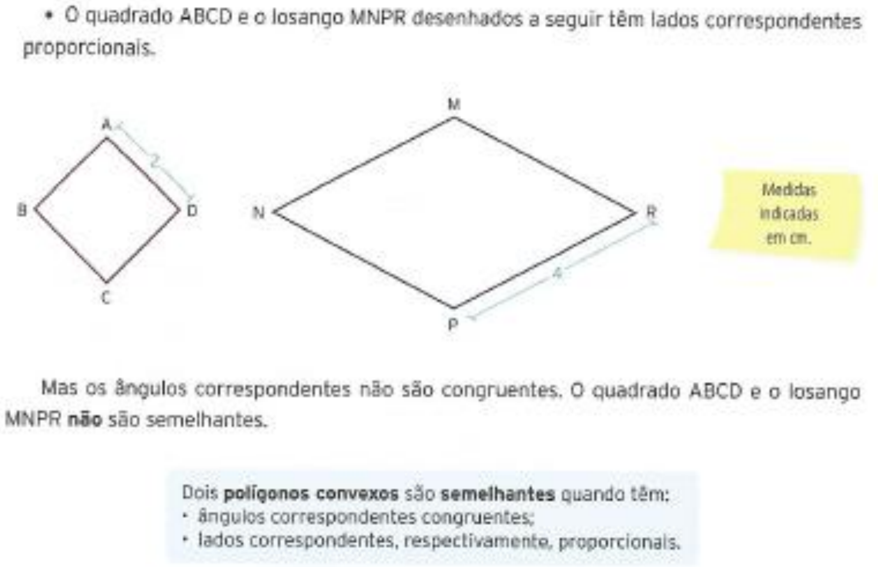
Fonte: Mori e Onaga (2016, p.108)

A abordagem exposta na figura anterior se trata de um registro multifuncional discursivo e não discursivo, com o uso da língua natural alfabética e com o auxilia das formas geométrica planas.

Para ficar claro a necessidade da simultaneidade das duas condições, o livro, apresenta duas figuras, um quadrado e um losango, de tal forma, que é possível verificar a proporcionalidade entre os lados correspondentes das duas figuras, porém, quando se analisa as medidas dos ângulos correspondentes, se percebe que não são medidas congruentes, tal situação descrita, está exibida na

Figura 47. Assim, torna-se claro que a simultaneidade das duas condições é um quesito necessário e suficiente para verificar se duas ou mais figuras são semelhantes.

Figura 47 – Condição de semelhança L2



- O quadrado ABCD e o losango MNPR desenhados a seguir têm lados correspondentes proporcionais.

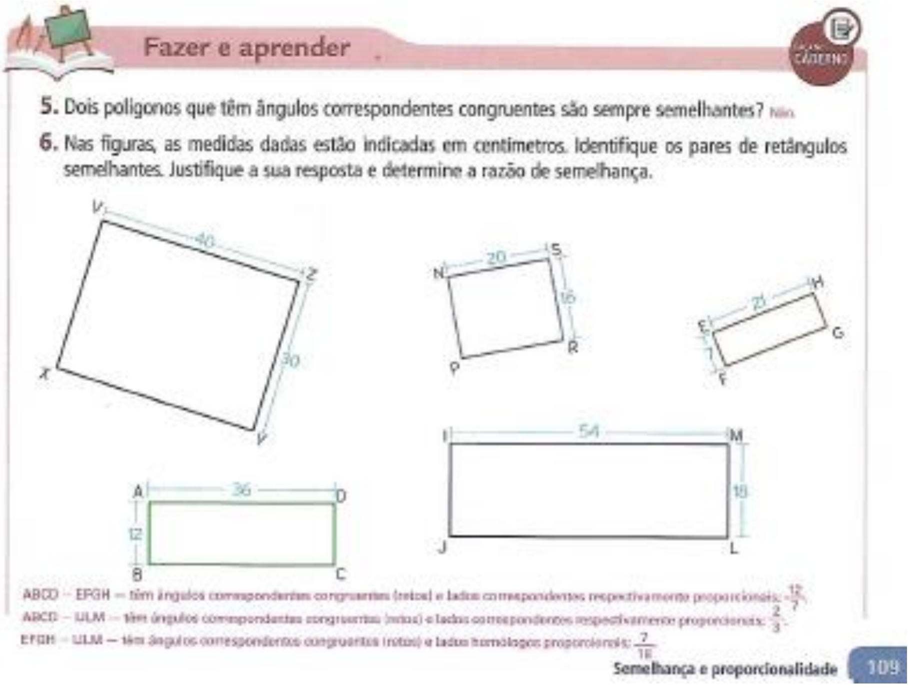
Mas os ângulos correspondentes não são congruentes. O quadrado ABCD e o losango MNPR **não** são semelhantes.

Dois **polígonos convexos** são **semelhantes** quando têm:
- ângulos correspondentes congruentes;
- lados correspondentes, respectivamente, proporcionais.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.109)

Na seção temática “Fazer e aprender”, exibida nas Figuras 48 e 49, se enuncia questões com o propósito de verificar se os alunos assimilaram a conceitualização de semelhança. Na questão 5, da página 109, o aluno precisa argumentar, por meios das observações das propriedades, utilizando uma representação semiótica, a língua natural alfabética, que se enquadra nos registros multifuncionais discursivos. Na questão 6 o enunciado exige que o aluno verifique se as figuras são semelhantes, para tal, é necessário a utilização do registro monofuncional discursivo, visto que o mesmo utilizará a escrita algébrica numérica para verificar a proporcionalidade entre os lados correspondentes.

Figura 48 – Atividades L2



Fazer e aprender

5. Dois polígonos que têm ângulos correspondentes congruentes são sempre semelhantes? Não.

6. Nas figuras, as medidas dadas estão indicadas em centímetros. Identifique os pares de retângulos semelhantes. Justifique a sua resposta e determine a razão de semelhança.

ABCD ~ EFGH — têm ângulos correspondentes congruentes (retos) e lados correspondentes respectivamente proporcionais: $\frac{12}{7}$.

ABCD ~ IJLM — têm ângulos correspondentes congruentes (retos) e lados correspondentes respectivamente proporcionais: $\frac{2}{3}$.

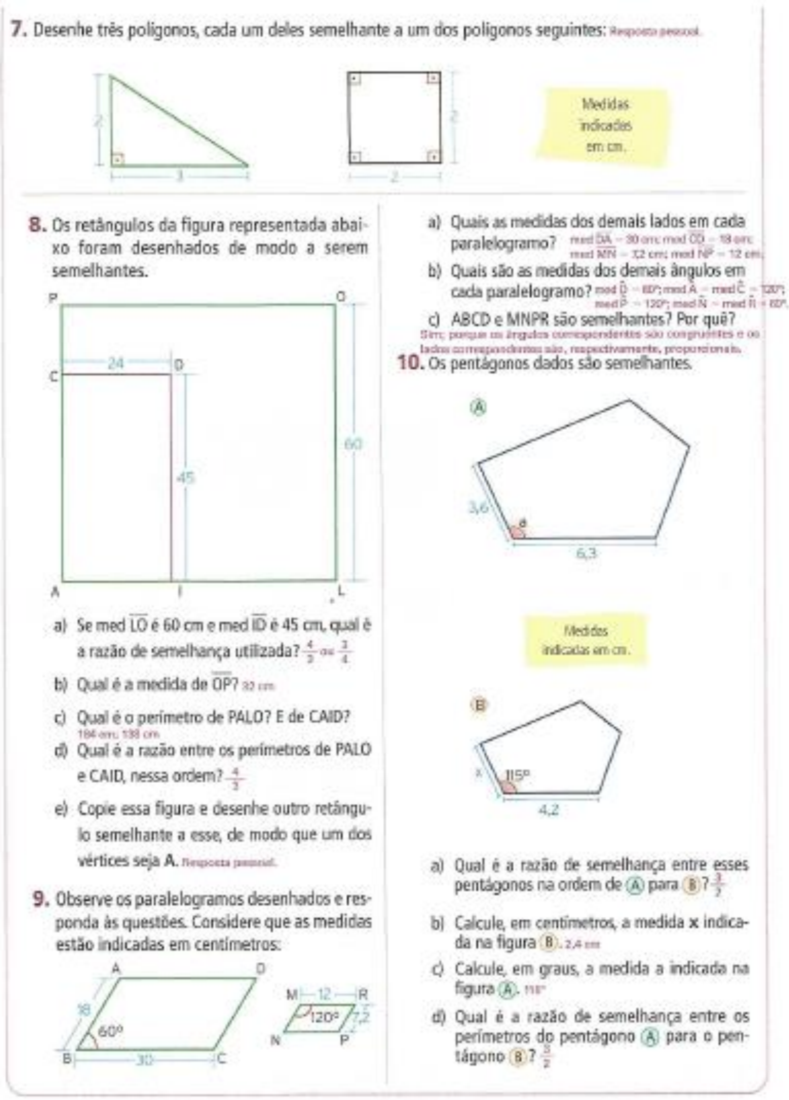
EFGH ~ IJLM — têm ângulos correspondentes congruentes (retos) e lados homólogos proporcionais: $\frac{7}{18}$.

Semelhança e proporcionalidade 109

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.109)

Exibido na Figura 49, a questão 7 solicita a construção de duas figuras semelhantes, o registro multifuncional que está sendo aplicado é o não discursivo, pois, o aluno poderá utilizar a malhas quadriculadas para realizar tais construções, ou o mesmo, poderia utilizar o processo de homotetia, como régua e compasso, mas, as propriedades de homotetia não foram abordadas nas enunciações na construção do conceito de semelhança. As questões 8, 9 e 10 tratam da condição para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes. A fim de determinar medidas métricas lineares dos lados correspondentes e as medidas dos ângulos correspondentes, utilizam-se as propriedades da proporcionalidade entre os segmentos homólogos e a congruência dos segmentos homólogos.

Figura 49 – Atividades L2



7. Desenhe três polígonos, cada um deles semelhante a um dos polígonos seguintes: Resposta pessoal.

8. Os retângulos da figura representada abaixo foram desenhados de modo a serem semelhantes.

a) Se med $\overline{LO}$ é 60 cm e med $\overline{ID}$ é 45 cm, qual é a razão de semelhança utilizada? $\frac{4}{3}$ ou $\frac{3}{4}$

b) Qual é a medida de $\overline{OP}$? 32 cm

c) Qual é o perímetro de PALO? E de CAID? 184 cm; 138 cm

d) Qual é a razão entre os perímetros de PALO e CAID, nessa ordem? $\frac{4}{3}$

e) Copie essa figura e desenhe outro retângulo semelhante a esse, de modo que um dos vértices seja **A**. Resposta pessoal.

9. Observe os paralelogramos desenhados e responda às questões. Considere que as medidas estão indicadas em centímetros:

a) Quais as medidas dos demais lados em cada paralelogramo? med $\overline{DA}$ = 30 cm; med $\overline{CD}$ = 18 cm; med $\overline{MN}$ = 7,2 cm; med $\overline{NP}$ = 12 cm.

b) Quais são as medidas dos demais ângulos em cada paralelogramo? med $\hat{D}$ = 60°; med $\hat{A}$ = med $\hat{C}$ = 120°; med $\hat{P}$ = 120°; med $\hat{N}$ = med $\hat{R}$ = 60°.

c) ABCD e MNPR são semelhantes? Por quê? Sim; porque os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são, respectivamente, proporcionais.

10. Os pentágonos dados são semelhantes.

a) Qual é a razão de semelhança entre esses pentágonos na ordem de Ⓐ para Ⓑ? $\frac{3}{2}$

b) Calcule, em centímetros, a medida **x** indicada na figura Ⓑ. 2,4 cm

c) Calcule, em graus, a medida a indicada na figura Ⓐ. 115°

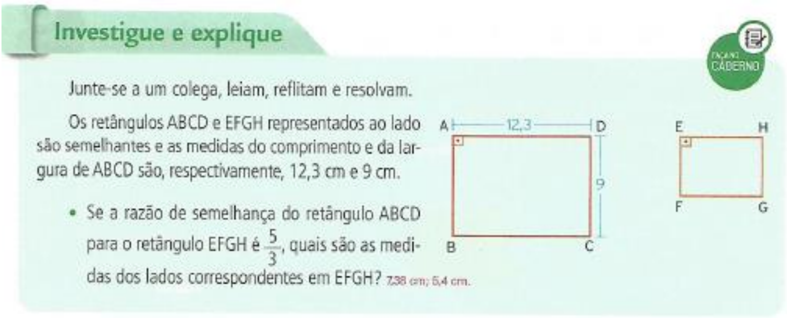
d) Qual é a razão de semelhança entre os perímetros do pentágono Ⓐ para o pentágono Ⓑ? $\frac{3}{2}$

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.110)

Na temática “Investigue e explique” apresentada na Figura 50, logo após as atividades, o livro, aborda um problema que propõem determinar medidas métricas lineares de um retângulo qualquer, semelhantes a um outro, conhecendo a razão de semelhança entre as duas figuras e as dimensões de um desses retângulos. Essa atividade é interessante, afinal, auxilia a concretizar o conceito de semelhança, porém, faria mais sentido se fosse proposta logo após a definição de razão de semelhança, que ocorre na página 108, exibido neste estudo pela Figura 47.

Ainda sobre a atividade, inserida na temática “Investigue e explique”, é possível verificar que são aplicados os mesmos registros aplicados na temática “Fazer e aprender”, registros multifuncionais e monofuncionais, com representações semióticas na língua natural alfabética, com auxílio de figuras planas, e com a escrita algébrica numérica. Como são temáticas, distintas, seria interessante haver abordagens diferenciadas, diversificar as ações e situações de ensino. Para qualquer conteúdo matemático, a diversificação e abordagens é uma metodologia eficaz, evidente, que tais diversificações se tornam mais efetivas, quando apresentam informações complementares ao ensino, ideias que completam outras já abordas.

Figura 50 – Atividades L2



Investigue e explique

FAÇA NO CADERNO

Junte-se a um colega, leiam, reflitam e resolvam.

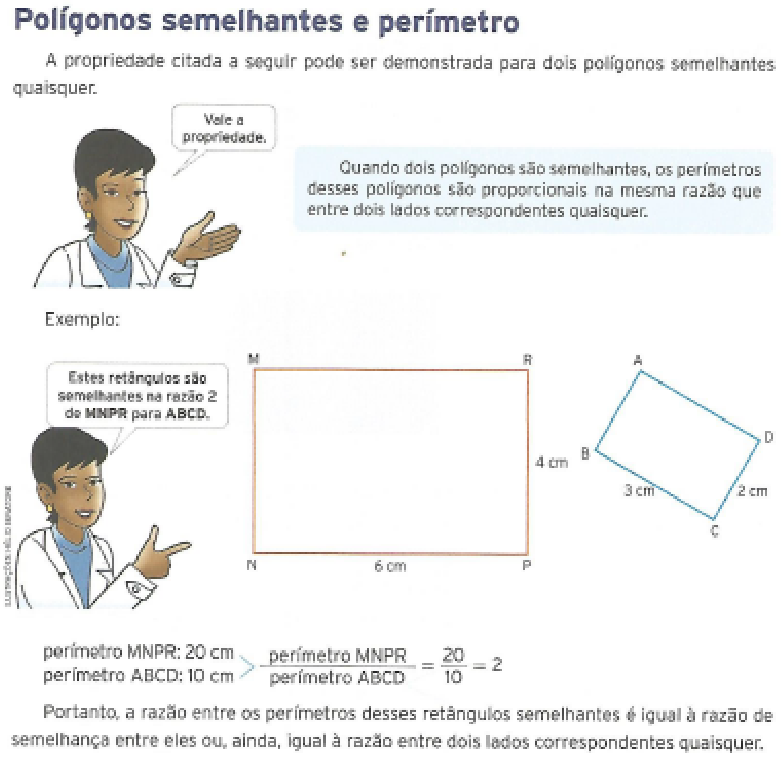
Os retângulos ABCD e EFGH representados ao lado são semelhantes e as medidas do comprimento e da largura de ABCD são, respectivamente, 12,3 cm e 9 cm.

- Se a razão de semelhança do retângulo ABCD para o retângulo EFGH é $\frac{5}{3}$, quais são as medidas dos lados correspondentes em EFGH? 7,38 cm; 5,4 cm.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.111)

Dando continuidade a análise descritiva e argumentativa, o livro inicia a enunciar as relações entre a razão de semelhança com os perímetros e áreas das figuras semelhantes. Na figura 51, apresenta como é a abordagem propostas pelas autoras para relacionar a razão de semelhança com o quociente entre os perímetros das figuras semelhantes.

Figura 51 – Razão de semelhança e perímetro L2



Polígonos semelhantes e perímetro

A propriedade citada a seguir pode ser demonstrada para dois polígonos semelhantes quaisquer.

Vale a propriedade.

Quando dois polígonos são semelhantes, os perímetros desses polígonos são proporcionais na mesma razão que entre dois lados correspondentes quaisquer.

Exemplo:

Estes retângulos são semelhantes na razão 2 de **MNPR** para **ABCD**.

perímetro MNPR: 20 cm
perímetro ABCD: 10 cm

$$\frac{\text{perímetro MNPR}}{\text{perímetro ABCD}} = \frac{20}{10} = 2$$

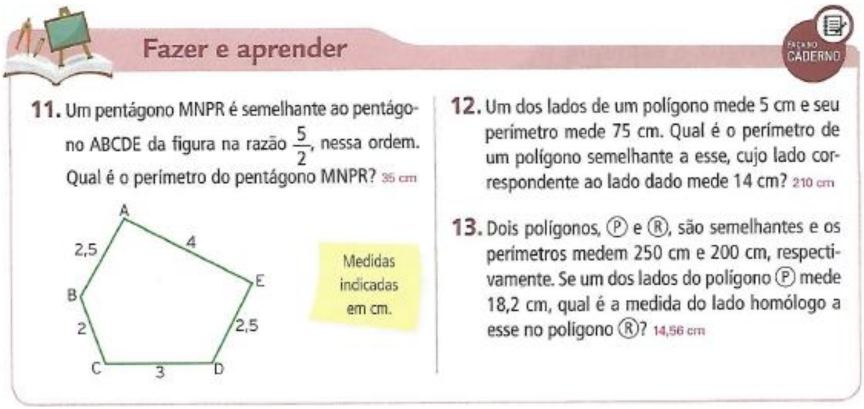
Portanto, a razão entre os perímetros desses retângulos semelhantes é igual à razão de semelhança entre eles ou, ainda, igual à razão entre dois lados correspondentes quaisquer.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.111)

Na Figura 51, podemos constatar que, as autoras, expõem a relação de forma direta, com o uso na língua natural alfabética, uma representação semiótica, que se enquadra nos registros multifuncionais discursivos. Em sequência para confirmar a relação executa comparações com dois retângulos semelhantes, por meio da escrita algébrica numérico, um registro monofuncional discursivo. A abordagem não promover o caráter investigativo e experimental, tão importante na construção de um ensino significativo e construtivo.

Após apresentar a relação ente a razão de semelhança com os quocientes entre os perímetros das figuras semelhantes, desenvolve-se uma atividade, inserida na temática “Fazer e aprender”, que aborda a conceitualização dessa relação. As questões 11, 12, 13, da página 113, apresentadas na figura 52, são representações de registros multifuncional discursivos e não discursivos. Questões que promovem uma alteração, uma conversão, para os registros monofuncionais, pois para solucionar tais problemas propostos, é utilizado a representação da escrita algébrica numérica, por meio da proporcionalidade e da relação entre a razão de semelhança com os quocientes das figuras semelhantes.

Figura 52 – Atividades L2



Fazer e aprender

11. Um pentágono MNPR é semelhante ao pentágono ABCDE da figura na razão $\frac{5}{2}$, nessa ordem. Qual é o perímetro do pentágono MNPR? 35 cm

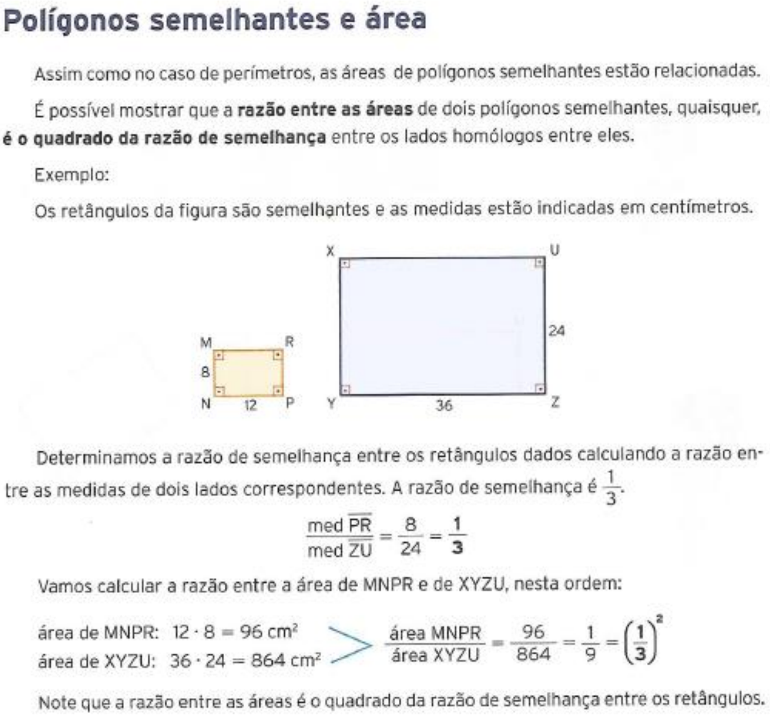
12. Um dos lados de um polígono mede 5 cm e seu perímetro mede 75 cm. Qual é o perímetro de um polígono semelhante a esse, cujo lado correspondente ao lado dado mede 14 cm? 210 cm

13. Dois polígonos, Ⓟ e Ⓡ, são semelhantes e os perímetros medem 250 cm e 200 cm, respectivamente. Se um dos lados do polígono Ⓟ mede 18,2 cm, qual é a medida do lado homólogo a esse no polígono Ⓡ? 14,56 cm

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.112)

A mesma abordagem é explorada para apresentar a relação entre a razão de semelhança como o quociente entre as áreas das figuras semelhantes, como é possível constatar na Figura 53. O processo experimental investigativo por meio das análise e observações das propriedades já assimiladas, para assim, deduzir a relação é deixado de lado e simplesmente é apresentado de forma direta.

Figura 53 – Razão de semelhança e área



Polígonos semelhantes e área

Assim como no caso de perímetros, as áreas de polígonos semelhantes estão relacionadas.

É possível mostrar que a **razão entre as áreas** de dois polígonos semelhantes, quaisquer, **é o quadrado da razão de semelhança** entre os lados homólogos entre eles.

Exemplo:

Os retângulos da figura são semelhantes e as medidas estão indicadas em centímetros.

Determinamos a razão de semelhança entre os retângulos dados calculando a razão entre as medidas de dois lados correspondentes. A razão de semelhança é $\frac{1}{3}$.

$$\frac{\text{med } \overline{PR}}{\text{med } \overline{ZU}} = \frac{8}{24} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Vamos calcular a razão entre a área de MNPR e de XYZU, nesta ordem:

área de MNPR: $12 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^2$

área de XYZU: $36 \cdot 24 = 864 \text{ cm}^2$

$$\frac{\text{área MNPR}}{\text{área XYZU}} = \frac{96}{864} = \frac{1}{9} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^2$$

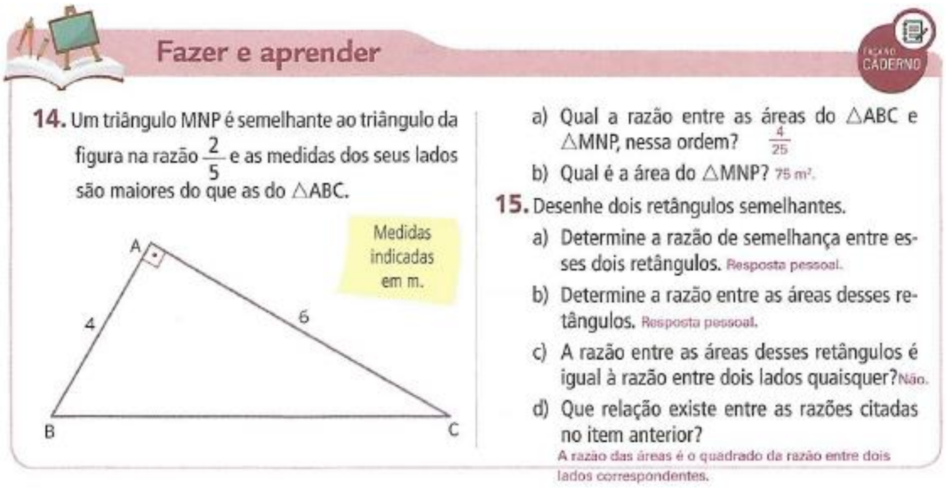
Note que a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança entre os retângulos.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.112)

As autoras desenvolvem outras atividades, inseridas na temática “Fazer e aprender”, problemas que abordam a relação da razão de semelhança com os quocientes entre as áreas das figuras semelhantes. As questões 14 e 15, da página

113, expostas na Figura 54, são representações da língua natural, inseridas nos registros multifuncional discursivo e não discursivo, que promovem aos alunos, uma conversão para a representação da escrita algébrica numérica, representação inserida nos registros monofuncionais discursivos.

Figura 54 – Atividades L2



Fazer e aprender

FAÇA NO CADERNO

14. Um triângulo MNP é semelhante ao triângulo da figura na razão $\frac{2}{5}$ e as medidas dos seus lados são maiores do que as do △ABC.

Medidas indicadas em m.

a) Qual a razão entre as áreas do △ABC e △MNP, nessa ordem? $\frac{4}{25}$

b) Qual é a área do △MNP? 75 m^2.

15. Desenhe dois retângulos semelhantes.

a) Determine a razão de semelhança entre esses dois retângulos. Resposta pessoal.

b) Determine a razão entre as áreas desses retângulos. Resposta pessoal.

c) A razão entre as áreas desses retângulos é igual à razão entre dois lados quaisquer? Não.

d) Que relação existe entre as razões citadas no item anterior?
A razão das áreas é o quadrado da razão entre dois lados correspondentes.

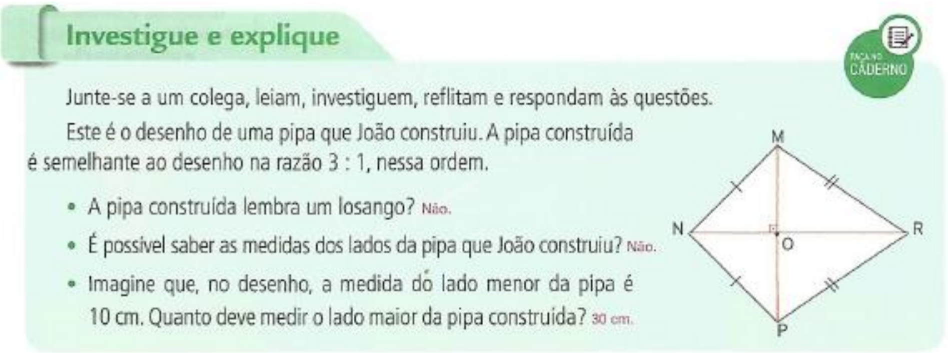
Fonte: Mori e Onaga (2016, p.112)

Para expor as relações entre a razão de semelhança com os perímetros e com as áreas das figuras geométricas semelhantes, apresentadas nesse estudo nas Figuras 51 e 53, as autoras, de acordo com o referencial teórico desta pesquisa, usam representações semióticas da língua natural alfabética, figuras geométricas planas, e a escrita algébrica numérica. Tais representações estão inseridos os registros multifuncional discursivo e não discursivo, assim como, no registro monofuncional discursivo.

Seguindo com a descrição e análise da obra L2, em outra seção temática “Investigue e explique”, exibido na Figura 55, as autoras desenvolvem um problema que aborda a razão de semelhança com as medidas métricas dos lados correspondentes de duas figuras semelhantes. Esse aspecto conceitual já foi abordado pelo livro didático. Essa temática promove uma retomada para verificar se a conceitualização no ensino de figuras geométricas semelhantes foi assimilado.

O problema proposto usa registros multifuncionais discursivos e não discursivos, promovendo uma mudança de registro, pois há alterações do tipo de conversões, afinal, os alunos passam a usar o registro monofuncional discursivo, com a escrita algébrica numérica para solucionar o problema proposto na temática.

Figura 55 – Atividades L2



Investigue e explique

Junte-se a um colega, leiam, investiguem, reflitam e respondam às questões.

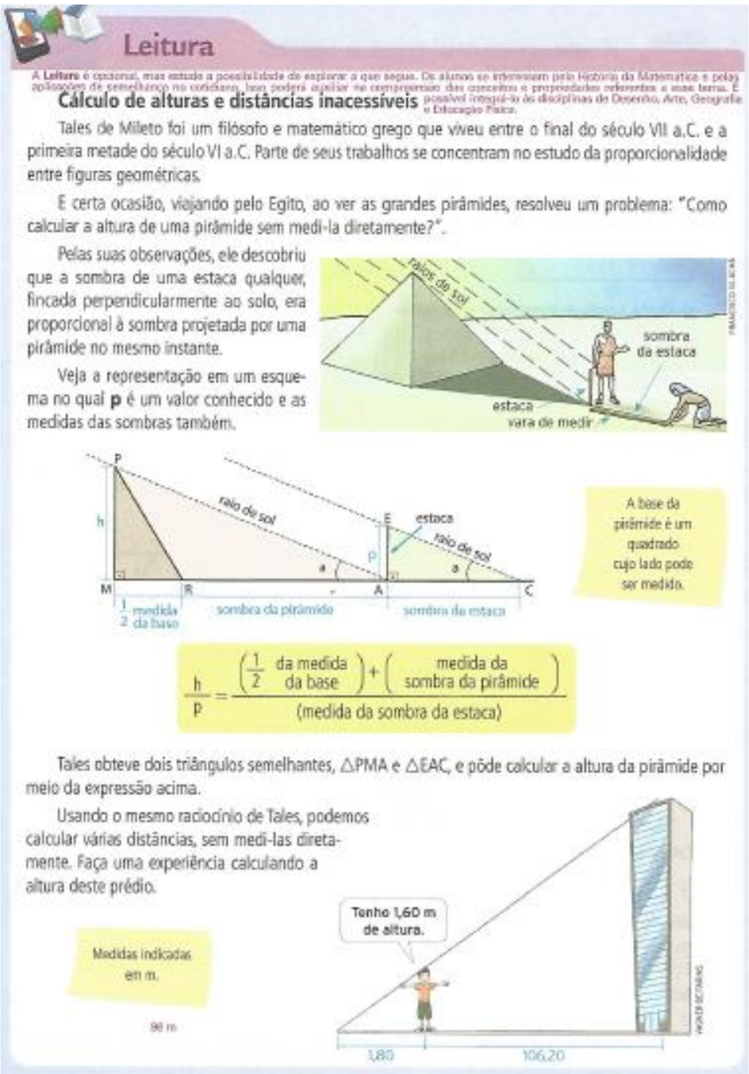
Este é o desenho de uma pipa que João construiu. A pipa construída é semelhante ao desenho na razão 3 : 1, nessa ordem.

- A pipa construída lembra um losango? Não.
- É possível saber as medidas dos lados da pipa que João construiu? Não.
- Imagine que, no desenho, a medida do lado menor da pipa é 10 cm. Quanto deve medir o lado maior da pipa construída? 30 cm.

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.113)

Para finalizar a descrição e análise da obra L2, verificaremos mais duas seções temática “Leitura” e a “Revisão cumulativa e testes” que exibiremos nas Figuras 56 e 57 respectivamente.

Figura 56 – Contexto histórico (Thales de Mileto) L2



Leitura

A **Leitura** é opcional, mas estude a possibilidade de explorar o que segue. Os alunos se interessam pela História da Matemática e pelas aplicações de semelhança no cotidiano, isso poderá auxiliar na compreensão dos conceitos e propriedades referentes a esse tema. É possível integrá-lo às disciplinas de Desenho, Arte, Geografia e Educação Física.

Cálculo de alturas e distâncias inacessíveis

Tales de Mileto foi um filósofo e matemático grego que viveu entre o final do século VII a.C. e a primeira metade do século VI a.C. Parte de seus trabalhos se concentram no estudo da proporcionalidade entre figuras geométricas.

E certa ocasião, viajando pelo Egito, ao ver as grandes pirâmides, resolveu um problema: "Como calcular a altura de uma pirâmide sem medi-la diretamente?".

Pelas suas observações, ele descobriu que a sombra de uma estaca qualquer, fincada perpendicularmente ao solo, era proporcional à sombra projetada por uma pirâmide no mesmo instante.

Veja a representação em um esquema no qual **p** é um valor conhecido e as medidas das sombras também.

A base da pirâmide é um quadrado cujo lado pode ser medido.

$$\frac{h}{p} = \frac{\left(\frac{1}{2}\ \text{da medida da base}\right) + \left(\text{medida da sombra da pirâmide}\right)}{(\text{medida da sombra da estaca})}$$

Tales obteve dois triângulos semelhantes, $\triangle PMA$ e $\triangle EAC$, e pôde calcular a altura da pirâmide por meio da expressão acima.

Usando o mesmo raciocínio de Tales, podemos calcular várias distâncias, sem medi-las diretamente. Faça uma experiência calculando a altura deste prédio.

Medidas indicadas em m.

98 m

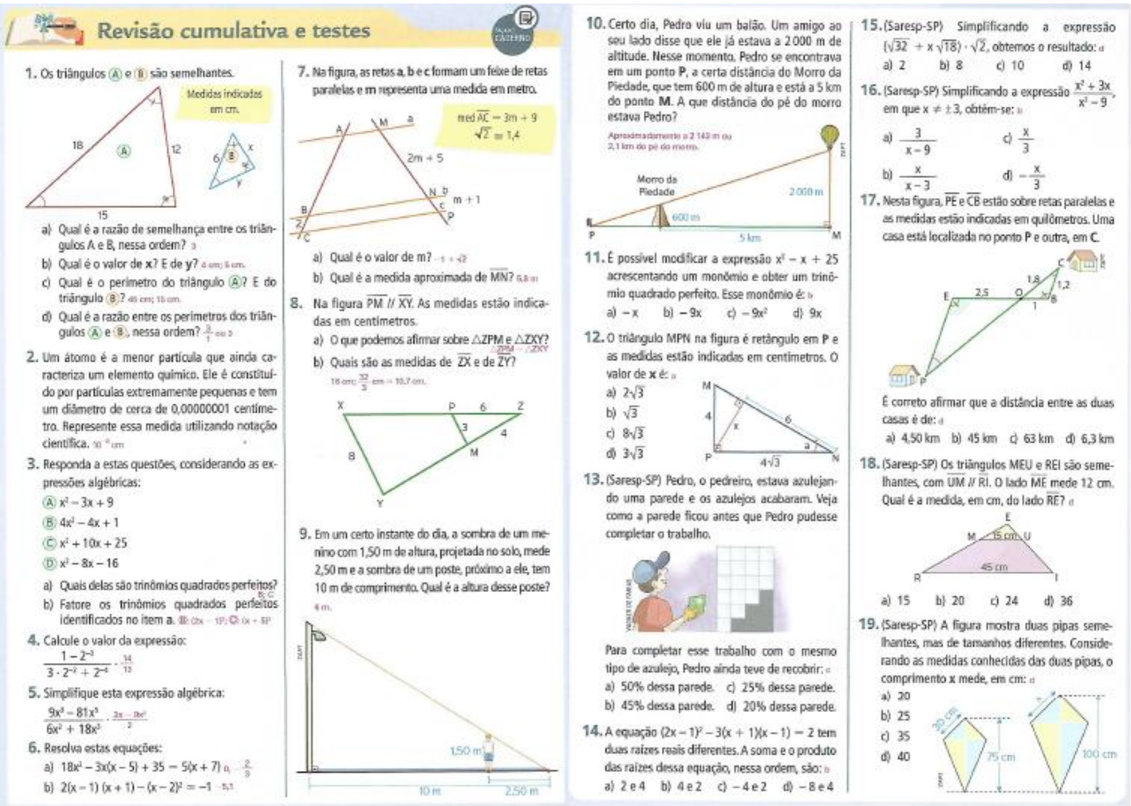
Fonte: Mori e Onaga (2016, p.123)

Na Figura 56, consta a temática “Leitura”, as autoras exploram o contexto histórico que se atribui ao filósofo e matemático Tales de Mileto, em que o mesmo conseguiu determinar a altura de uma pirâmide. Relacionou as medidas lineares encontradas nas projeções da sombra da pirâmide e de uma estaca, para determinar a altura da pirâmide, pois verificou se que a razão entre as medidas das projeções era proporcional a razão entre as medidas lineares da altura da pirâmide como a altura da estaca.

Na abordagem exposta no livro didático, apresentado na Figura 56, segundo a teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval, se trata dos registros multifuncionais discursivos e não discursivos e dos registros monofuncionais discursivos, pois as representações para tratar o assunto são por meio da língua natural alfabética, com auxílio de uma forma plana, e pela escrita algébrica numérica.

A seção “Revisão cumulativa e testes” é um conjunto de atividades que abordam os conteúdos lecionados durante todos os capítulos já apresentados. Dessa forma, as questões que estão exibidas na Figura 57, são problemas referentes a conteúdo ministrados nos capítulos 1 ao 6.

Figura 57 – Atividades L2



Revisão cumulativa e testes

1. Os triângulos Ⓐ e Ⓑ são semelhantes.

Medidas indicadas em cm.

a) Qual é a razão de semelhança entre os triângulos A e B, nessa ordem? 3

b) Qual é o valor de **x**? E de **y**? 4 cm; 6 cm.

c) Qual é o perímetro do triângulo Ⓐ? E do triângulo Ⓑ? 45 cm; 15 cm.

d) Qual é a razão entre os perímetros dos triângulos Ⓐ e Ⓑ, nessa ordem? $\frac{3}{1}$ ou 3

2. Um átomo é a menor partícula que ainda caracteriza um elemento químico. Ele é constituído por partículas extremamente pequenas e tem um diâmetro de cerca de 0,00000001 centímetro. Represente essa medida utilizando notação científica. 10^{-8} cm

3. Responda a estas questões, considerando as expressões algébricas:

Ⓐ $x^2 - 3x + 9$

Ⓑ $4x^2 - 4x + 1$

Ⓒ $x^2 + 10x + 25$

Ⓓ $x^2 - 8x - 16$

a) Quais delas são trinômios quadrados perfeitos? B; C

b) Fatore os trinômios quadrados perfeitos identificados no item **a**. B: $(2x - 1)^2$; C: $(x + 5)^2$

4. Calcule o valor da expressão:

$$\frac{1 - 2^{-3}}{3 \cdot 2^{-2} + 2^{-4}} \quad \frac{14}{13}$$

5. Simplifique esta expressão algébrica:

$$\frac{9x^3 - 81x^5}{6x^2 + 18x^3} \quad \frac{3x - 9x^2}{2}$$

6. Resolva estas equações:

a) $18x^2 - 3x(x - 5) + 35 = 5(x + 7)$ 0, $-\frac{2}{3}$

b) $2(x - 1)(x + 1) - (x - 2)^2 = -1$ −5, 1

7. Na figura, as retas **a**, **b** e **c** formam um feixe de retas paralelas e **m** representa uma medida em metro.

med $\overline{AC} = 3m + 9$
$\sqrt{2} \cong 1,4$

a) Qual é o valor de m? $-1 + \sqrt{2}$

b) Qual é a medida aproximada de $\overline{MN}$? 6,8 m

8. Na figura $\overline{PM}$ // $\overline{XY}$. As medidas estão indicadas em centímetros.

a) O que podemos afirmar sobre △ZPM e △ZXY? △ZPM ~ △ZXY

b) Quais são as medidas de $\overline{ZX}$ e de $\overline{ZY}$? 18 cm; $\frac{32}{3}$ cm ≅ 10,7 cm.

9. Em um certo instante do dia, a sombra de um menino com 1,50 m de altura, projetada no solo, mede 2,50 m e a sombra de um poste, próximo a ele, tem 10 m de comprimento. Qual é a altura desse poste? 6 m.

10. Certo dia, Pedro viu um balão. Um amigo ao seu lado disse que ele já estava a 2 000 m de altitude. Nesse momento, Pedro se encontrava em um ponto **P**, a certa distância do Morro da Piedade, que tem 600 m de altura e está a 5 km do ponto **M**. A que distância do pé do morro estava Pedro?

Aproximadamente a 2 143 m ou 2,1 km do pé do morro.

11. É possível modificar a expressão $x^2 - x + 25$ acrescentando um monômio e obter um trinômio quadrado perfeito. Esse monômio é: b

a) $-x$ b) $-9x$ c) $-9x^2$ d) $9x$

12. O triângulo MPN na figura é retângulo em **P** e as medidas estão indicadas em centímetros. O valor de **x** é: a

a) $2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{3}$

c) $8\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{3}$

13. (Saresp-SP) Pedro, o pedreiro, estava azulejando uma parede e os azulejos acabaram. Veja como a parede ficou antes que Pedro pudesse completar o trabalho.

Para completar esse trabalho com o mesmo tipo de azulejo, Pedro ainda teve de recobrir: c

a) 50% dessa parede. c) 25% dessa parede.

b) 45% dessa parede. d) 20% dessa parede.

14. A equação $(2x - 1)^2 - 3(x + 1)(x - 1) = 2$ tem duas raízes reais diferentes. A soma e o produto das raízes dessa equação, nessa ordem, são: b

a) 2 e 4 b) 4 e 2 c) −4 e 2 d) −8 e 4

15. (Saresp-SP) Simplificando a expressão $(\sqrt{32} + x\sqrt{18}) \cdot \sqrt{2}$, obtemos o resultado: d

a) 2 b) 8 c) 10 d) 14

16. (Saresp-SP) Simplificando a expressão $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$, em que $x \neq \pm 3$, obtém-se: b

a) $\frac{3}{x - 9}$ c) $\frac{x}{3}$

b) $\frac{x}{x - 3}$ d) $-\frac{x}{3}$

17. Nesta figura, $\overline{PE}$ e $\overline{CB}$ estão sobre retas paralelas e as medidas estão indicadas em quilômetros. Uma casa está localizada no ponto **P** e outra, em **C**.

É correto afirmar que a distância entre as duas casas é de: d

a) 4,50 km b) 45 km c) 63 km d) 6,3 km

18. (Saresp-SP) Os triângulos MEU e REI são semelhantes, com $\overline{UM}$ // $\overline{RI}$. O lado $\overline{ME}$ mede 12 cm. Qual é a medida, em cm, do lado $\overline{RE}$? d

a) 15 b) 20 c) 24 d) 36

19. (Saresp-SP) A figura mostra duas pipas semelhantes, mas de tamanhos diferentes. Considerando as medidas conhecidas das duas pipas, o comprimento **x** mede, em cm: d

a) 30

b) 25

c) 35

d) 40

Fonte: Mori e Onaga (2016, p.124 e 125)

A questão 1, retoma a parte conceitual do ensino de figuras semelhantes, explora a razão de semelhança, a proporcionalidade entre os lados correspondentes e a razão entre os perímetros. As questões 8, 9, 10, 12,17,18 e 19, que também estão inseridas na área de ensino de figuras semelhantes, abordam a condição de proporcionalidade entre os lados correspondentes das figuras semelhantes.

Como se trata de uma seção temática que recapitulação dos assuntos lecionados, as questões que abordam o ensino de figuras semelhantes, já citadas, não apresentam certos conceitos. As relações entre a razão de semelhança como os quocientes entre os perímetros e entre as áreas das figuras semelhantes, é ausente nessa temática. Os exercícios propostos, pelas autoras, promovem mudança de registros, segundo a teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval, para a resolução dos exercícios os alunos iniciam a abordagem com os registros multifuncional discursivos e não discursivos e alteram para os registros monofuncionais discursivos.

Os registros multifuncionais e monofuncionais são frequentes na obra L2, tanto nos textos conceituais, quanto nos exercícios e atividades propostas no livro didático que abordam o ensino de figuras semelhantes. Para confirmar essa percepção apresentaremos uma coleta de dados, por meios das fichas elaboradas. Verificaremos quais registros semióticos foram utilizados no desenvolvimento do ensino de semelhança no livro didático Matemática – Ideias e Desafios, das autoras Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga.

Conclusões L2

Sintetizaremos as informações coletadas pelas fichas, para comprovar as interpretações iniciais, formuladas no decorrer da descrição analítica, realizada na fase da descrição da obra. Assim, de acordo com os objetivos propostos na pesquisa, conforme o referencial teórico e seguindo os critérios definidos na metodologia, indicaremos as páginas, dos textos introdutórios e das questões, referente ao ensino de figuras semelhantes, do capítulo 1 “Figuras semelhantes” e do capítulo 2 “Polígonos semelhantes”, da unidade 6, intitulada de “Semelhança e proporcionalidade” do livro didático Matemática - Compreensão e Prática (L2). Usaremos os dados para construir e concretizar, de formar conclusiva, as inferências sobre o ensino de figuras semelhantes.

A abordagem proposta pelo livro didático L2, assim como, no livro L1, continua focando nos registros multifuncionais discursivos e não discursivos, bem como, nos registros monofuncionais discursivos. Afinal, para enunciar da condição necessária e suficiente para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes e para enunciar os comandos das questões, são usadas as representações na língua natural alfabética, acompanhada das representações geométricas figurais planas. Para finalizar, a representação da proporcionalidade entre os lados correspondentes e a congruência entre os ângulos correspondentes são usadas as representações da escrita algébrica numérica. O Quadro 13 exibe as páginas e as questões relacionadas a temática da 1º ficha, comprovando a alegação descrita acima.

Quadro 13 – Classificação os tipos de registros presentes na obra L2

TEXTOS	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros multifuncionais	Páginas: 100; 101; 102; 103; 104; 105; 106; 107; 108; 109; 111; 112; 123.	Páginas: 100; 101;102, 104, 105, 107, 108, 109, 111, 112, 123.
Registros monofuncionais	Páginas: 102; 104; 105; 107; 108; 109; 111; 112; 113; 123; 124, 125.	Páginas: AUSENTE
QUESTÕES	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros multifuncionais	Página 106, questões: 1; 2; 3; 4. Página 109, questões: 5; 6. Página 110, questões: 7; 8; 9; 10. Página 112, questões: 11; 12; 13. Página 113, questões: 14; 15. Página 124, questões: 1; 8; 9. Página 125, questões: 10; 12; 17; 18; 19.	Página 106, questões: 3; 4. Página 109, questões: 6. Página 110, questões: 7; 8; 9; 10. Página 112, questões: 11. Página 113, questões: 14. Página 124, questões: 1; 8; 9. Página 125, questões: 10; 12; 17; 18; 19.
Registros monofuncionais	Página 106, questões: 3. Página 109, questões: 6. Página 110, questões: 8; 9; 10. Página 112, questões: 11; 12; 13. Página 113, questões: 14; 15. Página 124, questões: 1; 8; 9. Página 125, questões: 10;	Páginas: AUSENTE

	12; 17; 18; 19.	

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

A obra L2, de forma análoga ao livro L1, traz a homotetia como um subtema do capítulo 2 “Polígonos Semelhantes”, porém, só enuncia, tal subtema, após definir e conceituar polígonos semelhantes. As autoras deixam de usar uma representação semiótico que contribuiria significativamente no processo de transição do conceito geométrico para a escrita algébrica da proporcionalidade no ensino de figuras semelhantes.

Outra representação ausente, nas abordagens da construção da conceitualização de semelhança, que pode auxiliar os alunos na transição do conceito geométrico para escrita algébrica, no ensino de figuras semelhantes, é a manipulação de softwares de geometria dinâmica. Essa ferramenta torna o processo de ensino significativo, visto que abordado aspectos importante no ensino da matemática, referente ao processo de experimentação e investigação. O Quadro 14 que expõem a temática da 2º ficha, mostra a ausência, quase que total, dos recursos citados.

Quadro 14 – Registro dos tipos de materiais concretos presentes na obra L2

TEXTOS	Régua e compasso.	Software geométrico.
	Páginas: 107	Páginas: AUSENTE
QUESTÕES	Régua e compasso.	Software geométrico.
	Páginas: AUSENTE.	Páginas: AUSENTE

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Percebemos, tanto na obra L1 quanto na obra L2, a existência da abordagem das propriedades da proporcionalidade relacionada aos perímetros e áreas de formas geométricas semelhantes. Porém, em ambas, não há registros relacionando a razão de proporcionalidade com o quociente entre volumes. Contudo, a abordagem proposta é uma apresentação direta dessas das relações. Entendo que o ensino seria mais significante se os autores conduzissem uma investigação, a fim de que os alunos conseguissem construir as relações entre a razão de semelhança com o quociente entre os perímetros e com o quociente entre as áreas das formas geométricas semelhantes.

O material concreto, régua e compasso, ou softwares geométricos, são registros multifuncionais não discursivos que enricem o processo de ensino. Tais instrumentos pode ser usando no processo de investigação para construir as propriedades da proporção relacionadas aos perímetros e áreas de figuras semelhantes.

Esses registros devem estar inseridos nos livros didáticos, afinal, o livro é o material de apoio tanto do professor, quanto do estudante. Por este motivo é importante apresentar diversas representações possíveis, pois pode favorecer uma compreensão mais significativa no processo da transição de conceito geométrico para a escrita algébrica, no ensino de figura semelhantes. O Quadro 15 exibe as páginas e as questões relacionadas a temática da 3º ficha, possibilitando a sustentação da análise.

Quadro 15 – Registro da propriedade envolvendo perímetro, área e volume presentes na obra L2

TEXTOS	Páginas: 111; 112.
QUESTÕES	Página 112, questões: 11;12;13. Página 113, questões: 14;15. Página 124, questão: 1

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Na obra L2, as alterações dos registros, para os textos introdutórios, do tipo tratamento prevalecem em relação as alterações do tipo conversões. Quando se trata das questões, a situação se inverter, a mudança dos registros do tipo conversões passa a ser predominante em relação a mudança do tipo tratamento. Nas conversões, as representações multifuncionais discursivas e não discursivas são transcritas para as representações monofuncionais discursivas. Essa alteração trata-se da codificação do comando de um enunciado, exibido pela representação da língua natural alfabética e/ou acompanhada de formas geométricas planas, para a exposição da escrita algébrica e numérica. Esse processo é justamente a transição do conceito geométrico para escrita algébrica. O Quadro 16 ratifica a constatação construída a respeito da temática da 4º ficha.

Quadro 16 – Classificação das alterações dos registros presentes na obra L2

TEXTOS	Tratamento.	Conversões.
	Páginas:100; 101; 102; 103; 104; 105; 107; 108; 109;	Páginas: 104;105; 107; 108; 111; 112; 123.

	111; 112;123.	
QUESTÕES	Tratamento.	Conversões.
	Página 106, questões: 1; 2; 4. Página 109, questões: 5; 6. Página 110, questões: 7	Página 106, questão: 3 Página 109, questões: 6 Página 110, questões: 8; 9; 10. Página 112, questões:11; 12; 13. Página 113, questões: 14, 15. Página 124, questões:1; 8; 9. Página 125, questões: 10; 12; 17; 18; 19.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Perante o que foi apresentado constatamos uma variedade de registro e representações semióticas nas enunciações propostas, do livro didático Matemática - Compreensão e Prática (L2), para o ensino de figuras semelhantes. A obra enuncia a relação entre a razão de semelhança o com quociente entre os perímetros e com o quociente entre as áreas. Mas, assim como, a obra L1, percebemos a falta de recursos que otimizam o processo da compreensão da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica. Os materiais concretos, régua e compasso, ou manuseio de softwares geométricos devem ser inseridos no ensino de semelhança, afinal, são registros e representações, que proporcionam ao docente um enriquecimento no ensino.

5.3 OBRA L3: MATEMÁTICA – NOS DIAS DE HOJE, NA MEDIDA CERTA

O livro didático, Matemática – Nos dias de hoje, na medida certa, dos autores José Jakubovic e da Marília Centurión, produzido pela editora Leya, de 1ª Edição, no ano de 2015, está presente no Guia de Livros Didáticos Ensino Fundamental Anos Finais (Brasil 2016), e de acordo com o Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD). Organiza-se os conteúdos em capítulos e cada capítulo há subtemas, que compõem os capítulos.

Quadro 17 – Sumário do livro didático (obra L3)

Capítulos.	Subtemas.
Capítulo – 1 Geometria: ampliações e reduções.	1 – Semelhança; 2 – Semelhança de triângulos; 3 – Utilizando a semelhança de triângulos; 4 – Teorema de Tales.
Capítulo – 2	1 – Potência com expoentes inteiros; 2 – Propriedades

Potência e raízes.	das potências com expoentes inteiros; 3 – Raiz quadrada, raiz cúbica e raiz enésima; 4 – Propriedades dos radicais; 5 – Expressões com radicais; 6 – Racionalização de denominadores.
Capítulo – 3 Álgebra: equações e sistemas de equações.	1 – Curiosidades matemáticas e equações; 2 – Um tipo especial de equações do 2º grau incompletas; 3 – Equações do 2º grau incompletas; 4 – Fórmula de Bhaskara; 5 – Cálculo mental na resolução de equações do 2º grau; 6 – Sistema de equações; 7 – Equações fracionárias.
Capítulo – 4 O teorema de Pitágoras e outras relações métricas no triângulo retângulo.	1 – Primeiras relações métricas no triângulo retângulo; 2 – Outras relações métricas no triângulo retângulo; 3 – O teorema de Pitágoras; 4 – Aplicações do teorema de Pitágoras;
Capítulo – 5 Noções de trigonometria.	1 – Introdução à trigonometria; 2 – Seno, cosseno e tangente; 3 – Valores exatos do seno, do cosseno e da tangente de 30º, 45º e 60º; 4 – Relações métricas em polígonos regulares inscritos; 5 – Comprimento da circunferência;
Capítulo – 6 Geometria e medidas: áreas e volumes.	1 – Área do retângulo Figuras semelhantes; 2 – Área do paralelogramo e área do triângulo; 3 – Área de outros polígonos; 4 – Área do círculo; 5 – Volume: uma revisão; 6 – Volume de prismas e cilindros retos.
Capítulo – 7 Funções.	1 – A ideia de função; 2 – Função constante e funções de 1º e 2º graus; 3 – Gráfico de uma função; 4 – Gráfico da função constante e da função de 1º grau; 5 – Gráfico da função de 2º grau; 6 – Máximos e mínimos.
Capítulo – 8 Tratamento da informação	1 – Estatísticas: tabelas e gráficos; 2 – Variáveis e frequência; 3 – Média aritmética, mediana e moda.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019) uma adaptação do sumário da obra Matemática - Nos dias de hoje, na medida certa (2015, p.6 e 7).

De forma geral os capítulos são estruturados em tópicos, uma sequência didática, não ordenada. Tais tópicos são intitulados de; “Abertura de capítulo”; “Ação”; “Quadros”; “Teoria”; “Pense e responda”; “Desafios e surpresas”; “Pensando em casa”; “Revendo conceitos”. O tópico “Quadros” pode ser subdividido em três seções intituladas de “Você sabia que...”; Conexões”; “A matemática tem história”

Para prosseguirmos com nosso estudo continuaremos focado no aspecto geral do ensino de figuras semelhança, seguindo os critérios estabelecidos na metodologia, analisaremos o subtema 1 “Semelhança” do capítulo 1 “Geometria: ampliações e reduções”, de acordo com a teoria adotada no referencial teórico desta pesquisa.

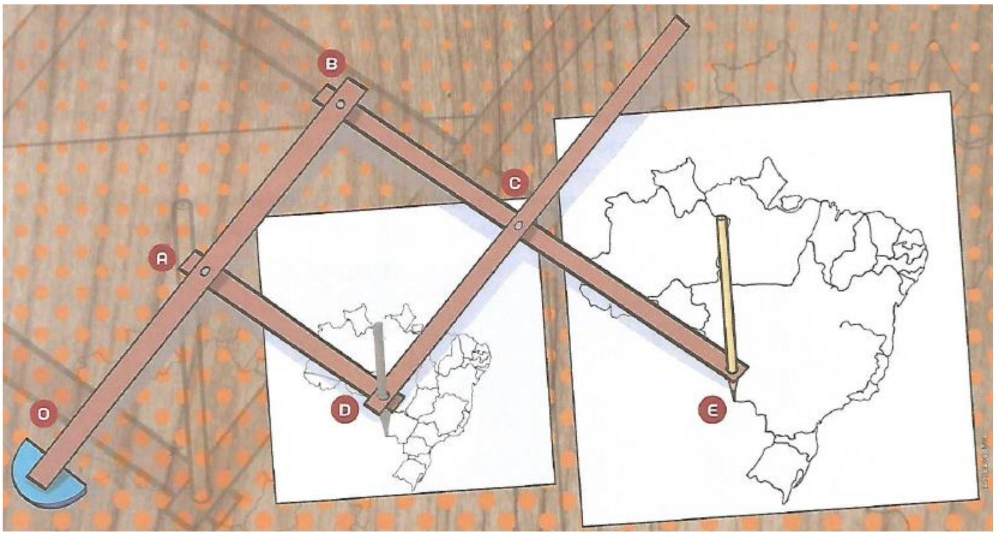
Descrição do conteúdo L3

Na "Abertura de capítulo" do livro didático L3, os autores, relacionam figuras semelhantes com mapas, de um mesmo local, porém, com escalas distintas.

> Dois mapas do mesmo local, em escalas diferentes, são figuras semelhantes: um é ampliação do outro.
> Para traçar figuras semelhantes, tão necessárias em mapas, o astrônomo alemão Cristoph Sheiner inventou, em 1630, um aparelho chamado pantógrafo.
> Atualmente, as ampliações e reduções de figuras são realizadas por máquinas copiadoras. Mas o pantógrafo continua sendo um instrumento fascinante, que pode nos ensinar muito sobre Geometria. (JAKUNOVIC e CENTURIÓN, 2015, p. 8)

Para ilustrar a situação descrita, o livro, apresenta uma imagem que simula a ampliação de um mapa, por meio do manuseio do pantógrafo, possível de se verificar na Figura 58. As representações semiótica presentes na abordagem inicial são a língua natural alfabética, que está inserida no registro multifuncional discursivo.

Figura 58 – Enunciação contextual (mapa/pantógrafo) L3



Fonte: Jakubovic e Centurión (2015, p. 9)

Junto com a ilustração há orientações de como manusear o pantógrafo e em sequência levanta-se um questionamento sobre a ampliação do mapa em relação a imagem inicial.

> 1. Fixa-se o ponto O e com uma ponta seca (que não escreve) em D, acompanha-se a figura do mapa que será ampliado.
> 2. Em E insere-se um lápis que irá registrar os contornos realizados em D.
>
> O que se pode concluir desse mapa ampliado? (JAKUNOVIC e CENTURIÓN, 2015, p. 8)

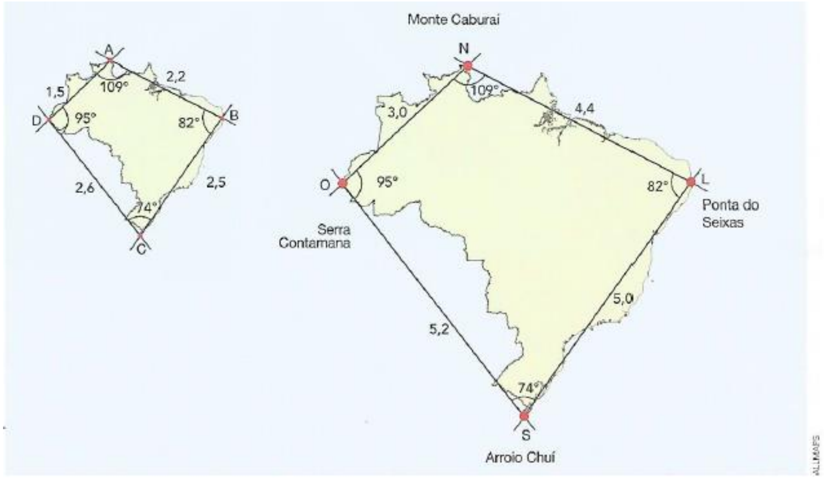
Após desenvolver a temática inicial seria interessante que os autores promovessem uma atividade coletiva, com os alunos e professores, orientando uma sequência didática que permitisse a construção de um pantógrafo. Assim, poderiam realizar ampliações de determinadas imagens, e em sequência, após a experimentação, poderiam realizar observações ente as duas formas geométricas, a fim de construir conceitos sobre o estudo em questão. Porém, tal atividade é propostas, mas, apenas no tópico “Desafios e surpresas”, na página 15, só após apresentar e enunciar os conceitos sobre o ensino de figuras semelhantes.

No subtema 1 “Semelhança”, no tópico “Teoria” novamente se aborda a ideia de ampliações entre mapas. Segundo os autores na geometria a palavra semelhança que dizer:

> A palavra semelhante que dizer parecido. Mas, na geometria, essa palavra tem um significado mais preciso. [...]
> Na geometria, a palavra semelhante está ligada à ideia de mesma forma. Assim, uma ampliação, uma redução e até mesmo uma congruência são exemplos de semelhança. (JAKUNOVIC e CENTURIÓN, 2015, p. 10)

O livro didático apresenta duas imagens, dois mapas em tamanhos distintos. Para construir a ideia de mesma forma, os autores, fixação pontos, localizados nas extremidades das duas figuras, no caso, nos extremos do país, do norte ao sul e do leste ao oeste. Fixados os pontos se obtém dois quadriláteros ABCD e NLSO, possível de visualizar na Figura 59. Em seguida orienta a realizar comparações com as medidas indicadas, a fim de construir conjecturas sobre o assunto abordado, por meios das observações.

Figura 59 – Enunciação contextual (mapa) L3



Fonte: Jakubovic e Centurión (2015, p. 10)

A definição de figuras semelhantes é enunciada, pelos autores, construída por meio das observações realizadas entre as medidas dos ângulos e lados.

> Note que, nos dois quadriláteros, os ângulos têm medidas respectivamente iguais, e os lados respectivamente proporcionais:
>
> $$\frac{4,4}{2,2}=\frac{5,0}{2,5}=\frac{5,2}{2,6}=\frac{3,0}{1,5}$$
>
> Dizemos que NLSO e ABCD são **quadriláteros semelhantes**.
>
> Dois polígonos são semelhantes quando têm ângulos respectivamente congruentes e lados respectivamente proporcionais. (JAKUNOVIC e CENTURIÓN, 2015, p. 11)

Na observação exposta no livro didático os autores não exibem a congruência utilizando da escrita algébrica numérica, apenas enuncia com a língua natural alfabética. Os registros presentes nessa abordagem são os multifuncionais discursivos e não discursivos, assim como, os monofuncionais discursivos.

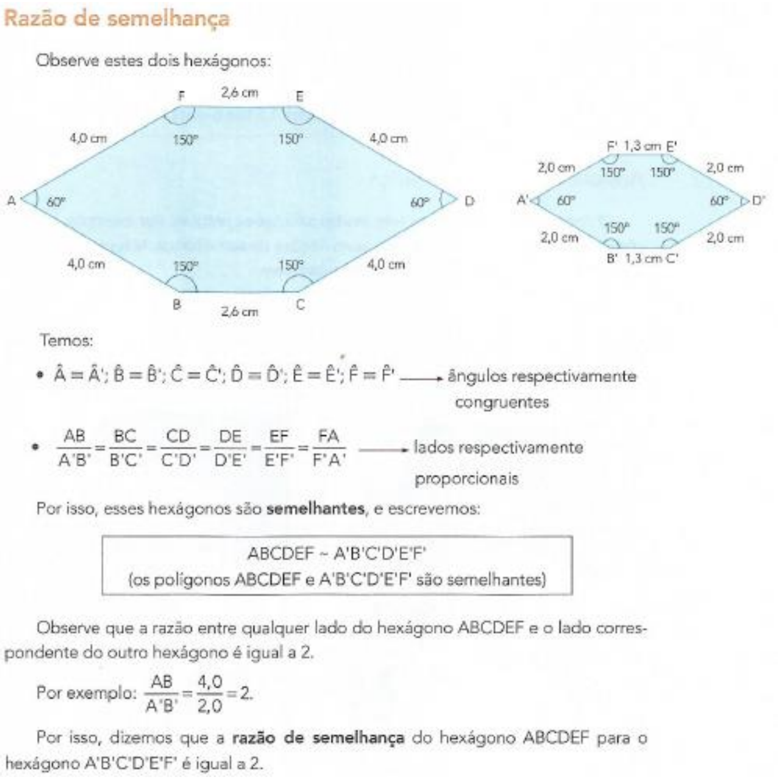
Note que o livro didático, Matemática – Nos dias de hoje, na medida certa, não apresenta uma didática que leve aos alunos a perceber como identificar os ângulos respectivamente e lados respectivamente. De forma similar nas obras observadas e analisadas, L1 e L2, também não apresentaram nenhuma metodologia que levasse os docentes a como identificar os ângulos correspondentes e lados correspondentes.

Os autores poderiam ter usando o instrumento pantógrafo como ferramentas para identificar os lados correspondentes e consequentemente os ângulos correspondentes das ampliações e reduções das figuras semelhantes. Usar diversos registros, meios, representações semióticas só favorecem a aprendizagem dos alunos. Descrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais, no bloco Espaço e Forma, o manuseio de materiais concretos, que é um exemplo de representações semióticas inseridas no registro multifuncional não discursivo, auxilia o ensino da geometria.

> O estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma tem como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades. (BRASIL, 1998, p. 86)

Após definir semelhança entre polígonos o livro enuncia o conceito de razão de semelhança, exposto na Figura 60.

Figura 60 – Polígonos semelhantes L3



Razão de semelhança

Observe estes dois hexágonos:

Temos:

- $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$; $\hat{D} = \hat{D}'$; $\hat{E} = \hat{E}'$; $\hat{F} = \hat{F}'$ → ângulos respectivamente congruentes
- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FA}{F'A'}$ → lados respectivamente proporcionais

Por isso, esses hexágonos são **semelhantes**, e escrevemos:

ABCDEF ~ A'B'C'D'E'F'
(os polígonos ABCDEF e A'B'C'D'E'F' são semelhantes)

Observe que a razão entre qualquer lado do hexágono ABCDEF e o lado correspondente do outro hexágono é igual a 2.

Por exemplo: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{4,0}{2,0} = 2.$

Por isso, dizemos que a **razão de semelhança** do hexágono ABCDEF para o hexágono A'B'C'D'E'F' é igual a 2.

Fonte: Jakubovic e Centurión (2015, p. 11)

Na Figura 60, presenciamos as representações semióticas da língua natural alfabética, da escrita algébrica numérica, acompanhadas por figuras planas, assim, de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, o assunto é apresentado por meio dos registros multifuncional discursivo e não discursivo e pelo registro monofuncional discursivo.

A definição do conceito da razão de semelhança entre dois polígonos foi enunciada pelos autores como:

> A razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes é a razão que existe entre qualquer lado do primeiro e o lado correspondente do segundo polígono. (A razão entre esses lados é a razão entre suas medidas.) (JAKUNOVIC e CENTURIÓN, 2015, p. 11)

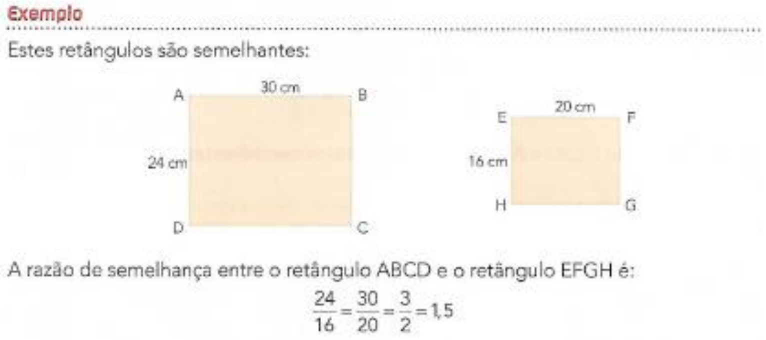
Segundo Duval (2009), a diversidade entre as representações de um mesmo objeto de estudo pode favorecer o processo de ensino e aprendizagem, desde que, em cada representação apresente, ao docente, conceitos, propriedades e informações distintas para o mesmo objeto de estudo. Na condição para dois polígonos serem semelhantes, os autores, Jakunovic e Centurión (2015) enunciam que é necessário que os ângulos respectivamente sejam congruentes e lados respectivamente proporcionais. Porém para conceituar a razão de semelhança, Jakunovic e Centurión (2015), enuncia definindo que "é a razão que existe entre qualquer lado do primeiro e o lado correspondente do segundo polígono. (A razão entre esses lados é a razão entre suas medidas.)".

É evidente que em livros didáticos, distintos, teremos nomenclaturas diferentes para um mesmo objeto de estudo. Como também é possível que no mesmo material didático haja nomenclaturas distintas para o mesmo objeto de estudo. Afinal, as representações da língua natural alfabética são diversas, porém, o autor que enuncia conceitos, propriedades e definições de diferentes formas distintas, precisar deixar claro ao leitor que se trata do mesmo objeto de estudo.

Dessa forma, fica claro que substituir o registro multifuncional discursivo, lados respectivamente, por outro registro multifuncional discursivo, para lado correspondentes, é necessário realizar um comentário afirmando que se trata do mesmo objeto de estudo.

Prosseguindo com a descrição da obra L3, é possível perceber na, Figura 61, que os autores, ainda fazendo uso dos registros multifuncionais e monofuncionais, apresentam um exemplo da significação da razão de semelhança. A construção dessa significação não foi constatada nas outras obras, já analisadas e descritas, L1 e L2. A significação da razão de semelhança é importante, pois, através dessa definição é possível construir a relação entre a razão de semelhança com os quocientes entre os perímetros, entre as áreas e entre os volumes de formas semelhantes.

Figura 61 – Razão de semelhança L3



Exemplo

Estes retângulos são semelhantes:

A razão de semelhança entre o retângulo ABCD e o retângulo EFGH é:

$$\frac{24}{16} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Fonte: Jakubovic e Centurión (2015, p. 12)

De acordo com a enunciação dos autores:

> Essa razão indica que qualquer comprimento no retângulo ABCD é 1,5 (uma vez e meia) o comprimento correspondente no outro retângulo.

> Medindo a diagonal $\overline{AC}$, você verá que ela tem 1,5 vez o comprimento de $\overline{EG}$. (JAKUNOVIC e CENTURIÓN, 2015, p. 12)

Neste ponto da obra o conceito de semelhantes, assim como, as condições para verificar se duas ou mais figuras são semelhantes já foi apresentado e introduzido aos docentes. Assim, seria um momento oportuno para investigar, por meio da experimentação com o manuseio de materiais concretos, régua, compasso, pantógrafo, ou softwares geométricos, como é possível relacionar a razão de semelhança com o quociente entre os perímetros, e com o quociente entre as áreas, das figuras semelhantes.

Os pontos distintos que podemos evidenciar entre as obras analisadas se trata da relação entre a razão de semelhança como o quociente entre os perímetros, e como o quociente entre as áreas, das figuras semelhantes. Tanto na obra L1, quanto na obra L2, os autores reservaram um espaço, um momento, para abordar com os docentes essa relação. No livro didático L3, tal relação, é ausente, tanto nos textos introdutórios, quanto no decorrer das enunciações conceituais, sobre o ensino de figuras semelhantes. A ausência dessa relação, nos textos introdutórios ou nas enunciações conceituais, tonar o ensino de figuras semelhantes incompleto, afinal, tal relação é consequência da proporcionalidade entre os lados correspondentes.

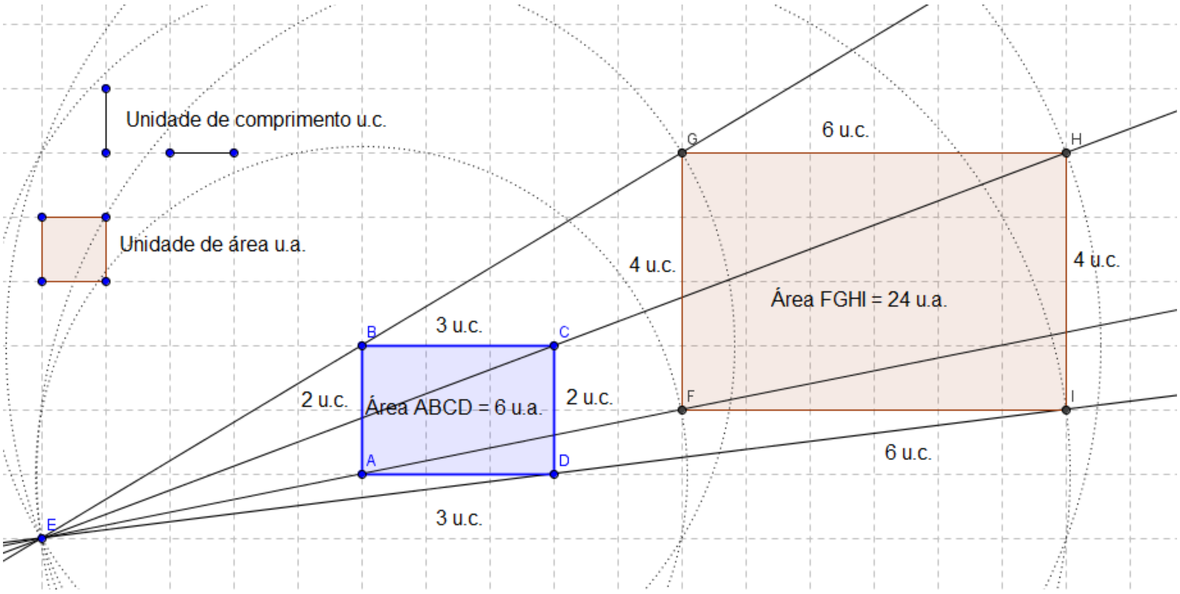
Propor uma atividade de homotetia, de ampliação entre formas geométricas planas, pode auxiliar na construção dessa relação. Afinal, dado um retângulo ABCD qualquer, de dimensões 2 u.c. por 3 u.c, é possível gerar um retângulo FGHI, semelhantes ao anterior, tal que, a razão de semelhança entre as medidas dos lados correspondentes do retângulo ABCD para o retângulo FGHI seja igual à $\frac{1}{2}$. Essa experimentação deve ser orientada para induzir os alunos a criar suas próprias conjecturas e conceitos, sobre a relação entre a razão de semelhança com o quociente dos perímetros, e com o quociente das áreas, das figuras semelhantes. Assim, para realizar essa construção é necessário régua e compasso, ou um software geométrico, e os docentes devem seguir a descrição dos passos a seguir:

1. Marque um ponto fixo E, qualquer.
2. Trace retas, a partir de E, passando pelos pontos A, B, C e D.
3. A partir do ponto A, desenhe uma circunferência, de raio $\overline{AE}$.

4. No prolongamento da reta $\overline{AE}$, marque o ponto F, na interseção da reta com a circunferência de raio $\overline{AE}$.
5. A partir do ponto B, desenhe uma circunferência, de raio $\overline{BE}$.
6. No prolongamento da reta $\overline{BE}$, marque o ponto G, na interseção da reta com a circunferência de raio $\overline{BE}$.
7. A partir do ponto C, desenhe uma circunferência, de raio $\overline{CE}$.
8. No prolongamento da reta $\overline{CE}$, marque o ponto H, na interseção da reta com a circunferência de raio $\overline{CE}$.
9. A partir do ponto D, desenhe uma circunferência, de raio $\overline{DE}$.
10. No prolongamento da reta $\overline{DE}$, marque o ponto G, na interseção da reta com a circunferência de raio $\overline{DE}$.
11. Por fim, trace os segmentos $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IF}$, definindo o retângulo FGHI, semelhante ao retângulo ABCD.

Na figura 62 está exibido o resultado obtido, seguindo a sequência e procedimentos descritos, obtendo um retângulo FGHI semelhante ao ABCD, tal que a razão entre os lados correspondentes do retângulo ABCD para o retângulo FGHI é igual à $\frac{1}{2}$. Consequentemente, analisando e experimentando, poderemos verificar a existência de uma relação de proporcionalidade entre a razão de semelhança com o quociente entre os perímetros e com o quociente entre as áreas das figuras semelhantes.

Figura 62 – Razão de semelhança e perímetro (homotetia e malha quadriculada)



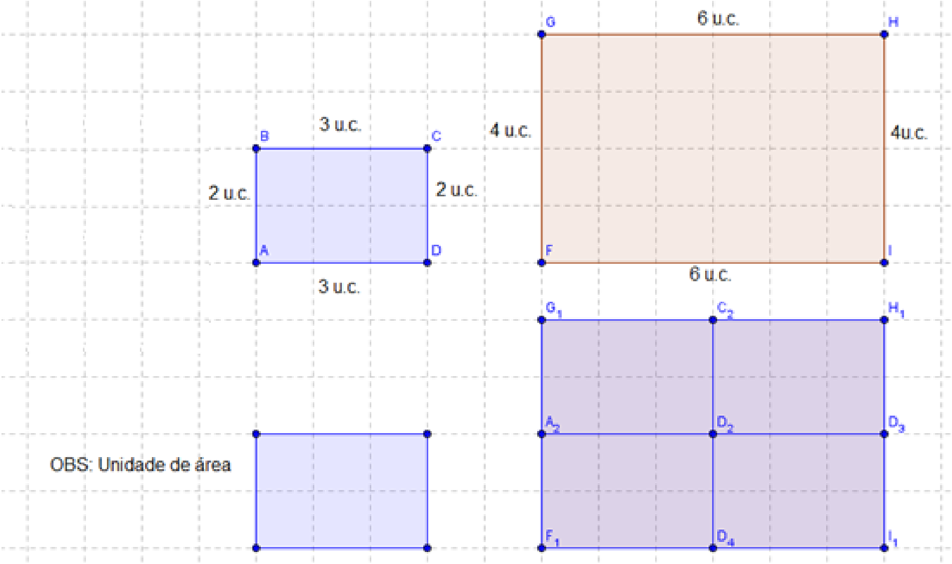
Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

De acordo com as medidas obtidas e apresentadas, na figura 62, podemos escrever a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes do retângulo ABCD para o retângulo FGHI, assim temos; $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Agora escrevendo a razão entre os perímetros, do retângulo ABCD para o perímetro do FGHI, temos; $\frac{\text{Perímetro ABCD}}{\text{Perímetro FGHI}}=\frac{2+3+2+3}{4+6+4+6}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$. Percebe-se que a razão de semelhança, ou constante de proporcionalidade, entre as medidas dos lados correspondentes do retângulo ABCD para o retângulo FGHI é igual, ou equivalente, ao quociente entre o perímetro do retângulo ABCD para o perímetro do retângulo FGHI. Essa equivalência pode ser representada como: $\frac{\text{Perímetro ABCD}}{\text{Perímetro FGHI}}=\text{razão de semelhança}$.

Determinando o quociente entre a área do retângulo ABCD para a área do retângulo FGHI, temos; $\frac{\text{Área ABCD}}{\text{Área FGHI}}=\frac{2\cdot 3}{4\cdot 6}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$. A razão de semelhança entre os retângulos ABCD para o retângulo FGHI é diferente do quociente encontrado entre a área do retângulo ABCD para a área do retângulo FGHI. Neste momento o livro, como fonte de pesquisa e estudo, deve apresentar orientações para que os docentes, para que não pensem que não há uma relação entre a razão de semelhança com quociente entre a área do retângulo ABCD para a área do retângulo FGHI.

A atividade deve induzir certas conclusões, assim, para justificar o motivo do quociente entre as áreas ser igual à $\frac{1}{4}$, adotamos o retângulo ABCD como uma unidade de área, dessa forma, podemos afirmar que em relação ao retângulo FGHI, equivale a quarta parte do retângulo FGHI, possível de constatar pelas construções realizadas e exibida na figura 63.

Figura 63 – Razão de semelhança e área (malha quadriculada)



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

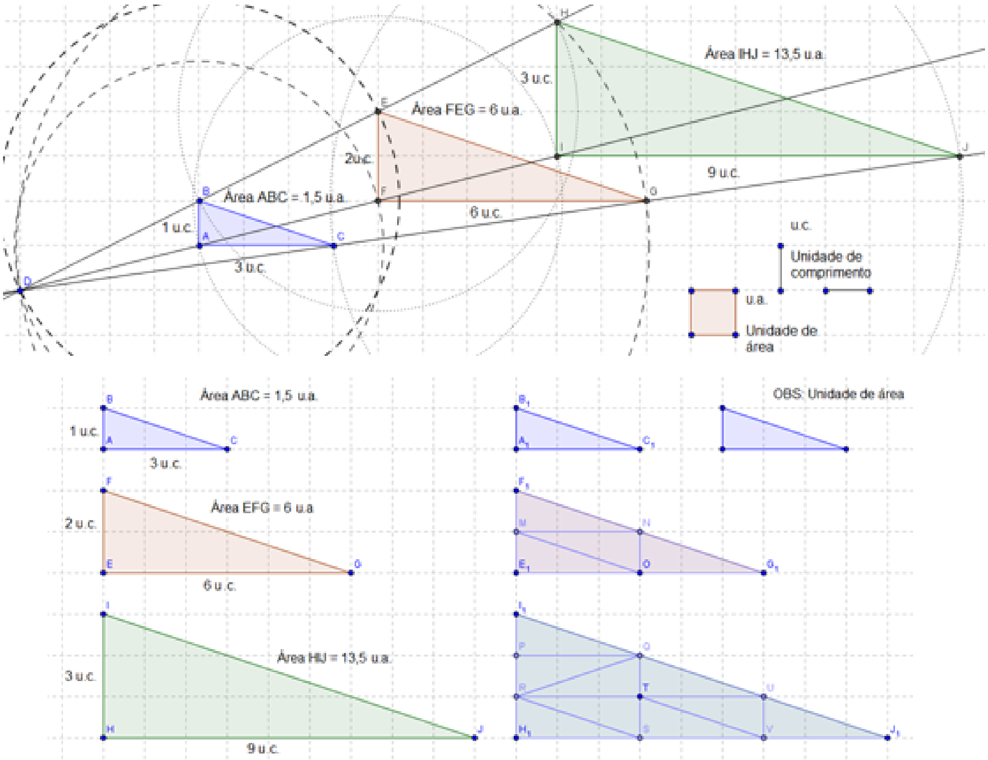
Usando os registros monofuncionais, as representações semióticas da escrita algébrica numérica, para representar a razão entre a área do retângulo ABCD para o retângulo FGHI, também chegasse a conclusão que o retângulo ABCD é a quarta parte do retângulo FGHI, vejamos:

$$\frac{\text{Área ABCD}}{\text{Área FGHI}} = \frac{2\cdot 3}{4\cdot 6} = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Manipulando as equivalências podemos escrever que $\frac{\text{Área ABCD}}{\text{Área FGHI}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, lembrando que a razão de semelhança entre o retângulo ABCD para os retângulos FGHI é igual a $\frac{1}{2}$, assim conseguimos concluir que o quociente entre a área do retângulo ABCD para o a área do retângulo FGHI é igual ao quadrando da razão de semelhança do retângulo ABCD para o retângulo FGHI, e essa relação pode ser representada da seguinte forma , $\frac{\text{Área ABCD}}{\text{Área FGHI}} = \left(\text{razão de semelhança}\right)^2$.

Para consolidar a relação da razão de semelhança com o quociente entre os perímetros e com o quociente entres as áreas das figuras semelhantes pode-se explorar outras ampliações, com outras formas geométricas, como está exibido na figura 64.

Figura 64 – Razão de semelhança e área (homotetia e malha quadriculada)



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

De acordo com as ampliações expostas na figura 64, a razão de semelhança do triângulo ABC para o triângulo IHJ é igual à $\frac{1}{3}$, consequentemente por sua vez, o quociente entre o perímetro do triângulo ABC para o perímetro do triângulo FEG também é igual $\frac{1}{3}$, visto que o quociente entre o perímetro do triângulo ABC para o perímetro do triângulo IHJ é equivalente à razão de semelhança entre os triângulos ABC para o IHJ.

Para concretizar a relação entre a razão de semelhança do triângulo ABC para o triângulo IHJ com o quociente entre as áreas das figuras semelhantes, podemos verificar o quociente entre a área do triângulo ABC, para a área do triângulo IHJ, tal que, $\frac{Área\,ABC}{Área\,IHJ}=\frac{1\cdot 3/2}{3\cdot 9/2}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 3}=\frac{1}{3\cdot 3}=\frac{1}{3^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$. Lembrando que é possível justificar o valor encontrado no quociente entre a área do triângulo ABC para a área do triângulo IHJ, por meio da construção geométrica, visto que se tornarmos o triângulo ABC como unidade de área, é possível perceber que o triângulo ABC é a nona parte do triângulo IHJ.

De acordo com o quociente encontrado podemos afirmar que $\frac{Área\,ABC}{Área\,IHJ}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Dessa forma concluímos que o quociente entre a área do triângulo ABC para a área do triângulo IHJ é igual ao quadrado da razão de semelhança entre o triângulo ABC para o triângulo IHJ, representando tal relação como: $\frac{Área\,ABC}{Área\,IHJ}=\left(\text{razão de semelhança}\right)^2$.

Enunciar a relação entre a razão de semelhança com o quociente dos perímetros, e com o quociente das áreas se justificar, pois, na página 14, no tópico “Pense e responda”, as questões 6, 7, e 8 abordam a relação entre a razão de semelhança com o quociente dos perímetros, e com o quociente das áreas. Para os docentes solucionar tais problemas se tornará uma atividade mais complexas do que o necessário, visto que o livro didático é fonte de pesquisa e de estudo dos alunos, porém, nessa fonte, o livro L3, não há indícios de tal relação, assim, reduzindo a possibilidade da resolução dos exercícios 6, 7 e 8, da página 14.

Em sequência o livro traz outra situação real que é possível perceber o uso de semelhança. Na Figura – 65, apresenta imagens expostas em diferentes Tvs de tamanhos distintos, porém, nota-se que as imagens expostas nas telas de cada uma das Tvs são semelhantes.

Figura 65 – Enunciação contextual imagens de Tvs

Foto de televisores expostos para venda.

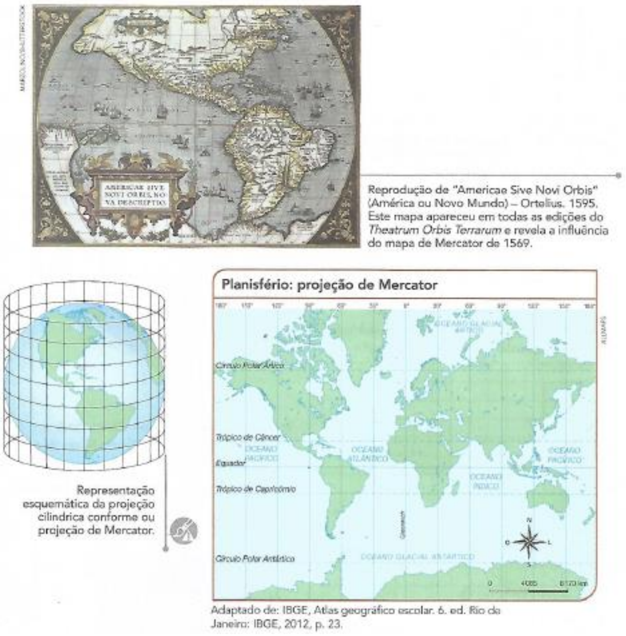
Fonte: Jakubovic e Centurión (2015, p. 12)

De acordo com os autores as imagens expostas nas Tvs são semelhantes pela justificativa:

> Outro exemplo de aplicações de semelhança é visto nas telas de TV. As telas chamadas *widescreen*, independente de seu tamanho, têm a forma de retângulos semelhantes. Se não fossem semelhantes, algumas imagens que apareceriam no canto da tela de uma TV não apareceriam no canto de outra. (JAKUNOVIC e CENTURIÓN, 2015, p. 12)

No tópico “Conexões” do livro didático L3, aborda um contexto histórico mencionando que Mercator foi o primeiro a produzir, em 1569, o mapa-múndi com projeção cilíndrica. Tal projeção está exibida na Figura 66, representa um sistema de projeções cilíndricas que é amplamente utilizado, até mesmo nos dias de hoje.

Figura 66 – Enunciação contextual mapa L3



Reprodução de "Americae Sive Novi Orbis" (América ou Novo Mundo) – Ortelius. 1595. Este mapa apareceu em todas as edições do *Theatrum Orbis Terrarum* e revela a influência do mapa de Mercator de 1569.

Representação esquemática da projeção cilíndrica conforme ou projeção de Mercator.

Adaptado de: IBGE, Atlas geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012, p. 23.

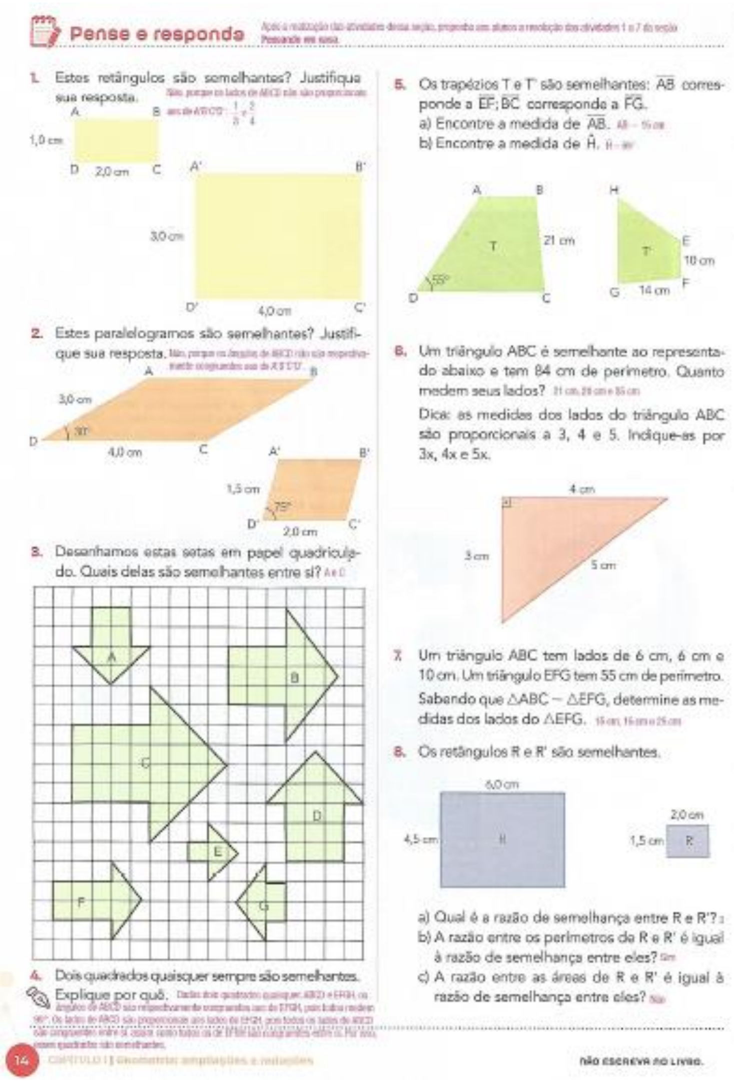
Fonte: Jakubovic e Centurión (2015, p. 13)

Na “Abertura de capítulo” o livro menciona, segundo os autores JAKUNOVIC e CENTURIÓN (2015) que “Dois mapas do mesmo local, em escalas diferentes, são figuras semelhantes: um é ampliação do outro.”

De acordo com que foi apresentado nos tópicos “Abertura de capítulo” e “Conexões”, compreendo que existe uma viabilidade de correlacionar os tópicos. Tal que, os autores poderiam relacionar as razões de semelhança com as escalas cartográfica presentes nos mapas. Essa correlação ocorre no tópico “Ação” na página 15 da obra L3. É outra atividade que pode fazer parte da construção do conceito geométrico no ensino de figuras semelhantes, porém, da forma que se apresenta no livro didático não podemos considerar que faz parte da construção significativa dos conceitos, pois, só é abordado depois que se enuncia a definição e as condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes.

Após descrever e analisar as enunciações dos conceitos e definições abordados e apresentados pela obra L3, referente ao ensino de figuras semelhantes, nos tópicos anteriores, iniciaremos a descrever e analisar o tópico “Pense e responda”. Esse tópico, exposto na Figura 67, é um conjunto de atividades relacionadas as enunciações sobre o ensino de figuras semelhantes.

Figura 67 – Atividades L3



Pense e responda

1. Estes retângulos são semelhantes? Justifique sua resposta.

2. Estes paralelogramos são semelhantes? Justifique sua resposta.

3. Desenhamos estas setas em papel quadriculado. Quais delas são semelhantes entre si?

4. Dois quadrados quaisquer sempre são semelhantes. Explique por quê.

5. Os trapézios T e T' são semelhantes: $\overline{AB}$ corresponde a $\overline{EF}$; $\overline{BC}$ corresponde a $\overline{FG}$.
a) Encontre a medida de $\overline{AB}$.
b) Encontre a medida de $\hat{H}$.

6. Um triângulo ABC é semelhante ao representado abaixo e tem 84 cm de perímetro. Quanto medem seus lados?

Dica: as medidas dos lados do triângulo ABC são proporcionais a 3, 4 e 5. Indique-as por 3x, 4x e 5x.

7. Um triângulo ABC tem lados de 6 cm, 6 cm e 10 cm. Um triângulo EFG tem 55 cm de perímetro. Sabendo que △ABC ~ △EFG, determine as medidas dos lados do △EFG.

8. Os retângulos R e R' são semelhantes.

a) Qual é a razão de semelhança entre R e R'?
b) A razão entre os perímetros de R e R' é igual à razão de semelhança entre eles?
c) A razão entre as áreas de R e R' é igual à razão de semelhança entre eles?

14 CAPÍTULO 1 | Geometria: ampliações e reduções

NÃO ESCREVA NO LIVRO.

Fonte: Jakubovic e Centurión (2015, p. 14)

É possível perceber que nas questões 1, 2, 3 e 4, abordam as ideias conceituais do ensino de figuras semelhantes, com a pretensão de verificar se os alunos assimilaram as enunciações apresentadas. Os autores elaboraram essas questões, a fim de que os alunos possam verificar, de acordo com enunciações presentes na obra, se as figuras geométricas apresentadas nos enunciados das questões são semelhantes.

De acordo com a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, as três primeiras questões, são apresentadas por registros multifuncionais discursivos e não discursivos, são expostas pela representação da língua natural alfabética e por forma geométrica planas. Os problemas promovem uma mudança de registro, para solucionar tais questões, uma alteração dentro do interior do mesmo registro, essa alteração de se classifica com tratamento.

As questões 5, 6 e 7, também se enquadram os registros multifuncionais discursivos e não discursivos, porém, promovem uma alteração no registro para solucionar os problemas. Uma mudança que se classifica como conversões, pois, as resoluções dessas situações são representações monofuncionais discursivas por meio da escrita algébrica numérica. Afinal, as questões elaboradas abordam a determinação de medidas correspondentes entre formas semelhantes.

Na questão 8 o comando do enunciado orienta aos leitores a determinar a razão de semelhança, a razão entre os perímetros e a razão entre as áreas, de figuras geométricas semelhantes. Ainda na questão 8, se questiona se a razão entre os perímetros e se a razão entre as áreas é igual a razão de semelhança.

Com tais questionamentos, os autores, deixam uma possibilidade para o professor enunciar a relação existente entre a razão de semelhança com os quocientes entre os perímetros e entre as áreas das figuras semelhantes.

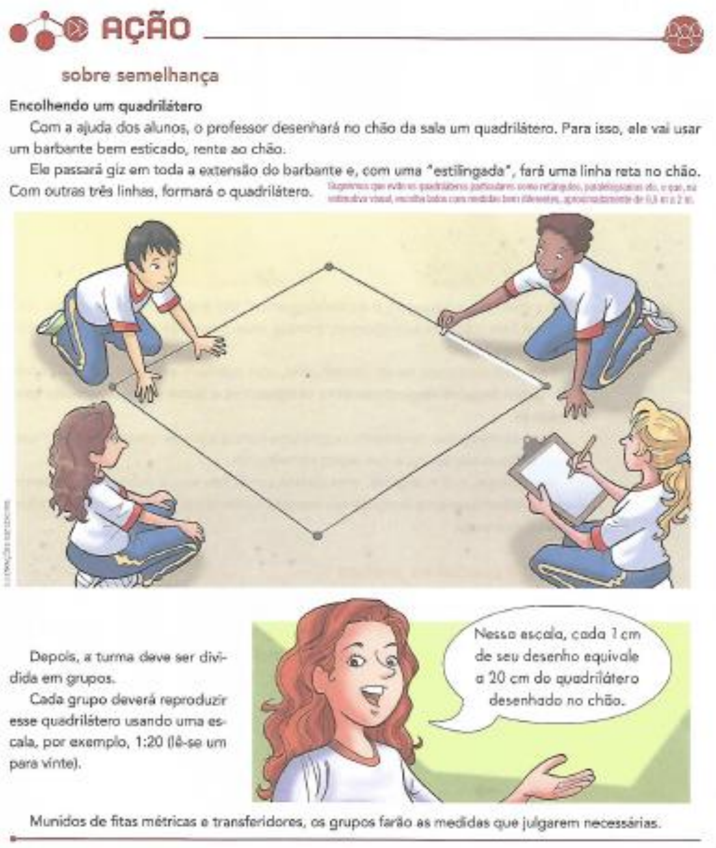
No tópico “Desafio e surpresas”, é proposto uma atividade coletiva, orientando a construção de um pantógrafo para realizar ampliações. A atividade propõe:

> Desafios e surpresas
> Na introdução deste capítulo, apresentamos o pantógrafo.
> a) Para que serve o pantógrafo?
> b) Com a ajuda, construa um pantógrafo. Com o pantógrafo, faça ampliações ou reduções de diversas figuras. Pode ser, por exemplo, o mapa de sua cidade. (JAKUNOVIC e CENTURIÓN, 2015, p. 12)

Como já foi comentado, tal atividade deveria ter sido desenvolvida logo após o tópico “Abertura de capítulo”, afinal, essa dinâmica enriqueceria o processo de ensino sobre as figuras semelhantes, visto que a experimentação favoreceria um ensino mais construtivo e significativo, pois assim, os alunos poderiam criar suas próprias conjecturas sobre o ensino das figuras semelhantes a partir das observações encontradas nas ampliações por meio do manuseio do pantógrafo.

A correlação que mencionamos em nossa analise entre os tópicos, “Abertura de capítulo” e “Conexões”, ocorre no tópico “Ação”, exibido na Figura 68. A atividade orienta os alunos a construir um quadrilátero no chão, com barbantes, e em seguida a desenhar um outro quadrilátero, semelhante ao que foi construído, seguindo a escala de proporcionalidade de 1:20. Essa correlação é possível, visto que a escala é uma razão, um quociente, entre as dimensões lineares, representadas em uma imagem, para as dimensões lineares reais de uma determinada localidade, região ou objeto. Essa razão, ou quociente, indica a proporcionalidade entre as dimensões lineares de uma imagem, que representa um determinado local ou objeto real, para as dimensões lineares reais desse local ou objeto.

Figura 68 – Atividades L3



AÇÃO

sobre semelhança

Encolhendo um quadrilátero

Com a ajuda dos alunos, o professor desenhará no chão da sala um quadrilátero. Para isso, ele vai usar um barbante bem esticado, rente ao chão.

Ele passará giz em toda a extensão do barbante e, com uma "estilingada", fará uma linha reta no chão. Com outras três linhas, formará o quadrilátero.

Depois, a turma deve ser dividida em grupos.

Cada grupo deverá reproduzir esse quadrilátero usando uma escala, por exemplo, 1:20 (lê-se um para vinte).

Nessa escala, cada 1 cm de seu desenho equivale a 20 cm do quadrilátero desenhado no chão.

Munidos de fitas métricas e transferidores, os grupos farão as medidas que julgarem necessárias.

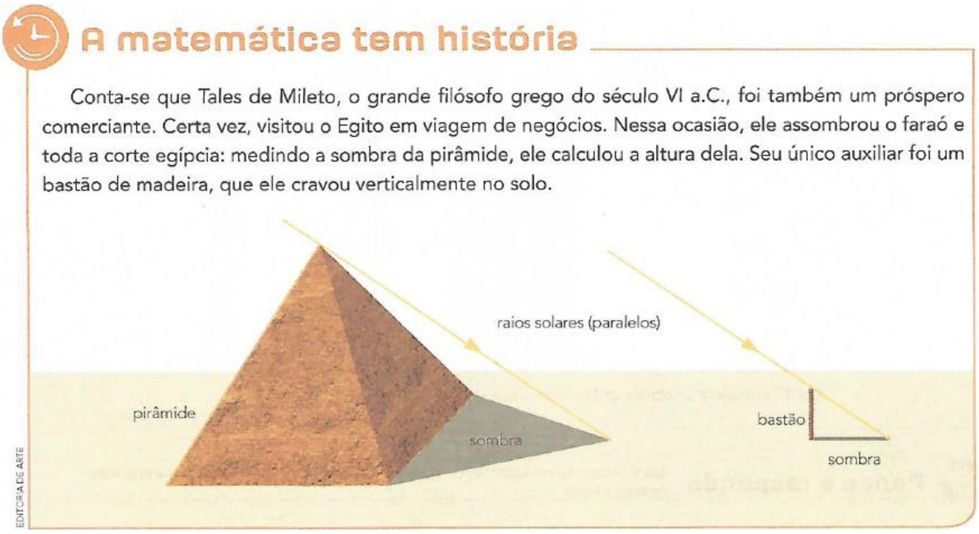
Fonte: Jakubovic e Centurión (2015, p. 15)

Tanto na atividade desenvolvida no tópico “Desafios e surpresas” como na atividade proposta no tópico “Ação”, percebemos registros multifuncionais discursivos e não discursivos, apresentados por meio das representações da língua natural alfabética com pelo manuseio de materiais concretos régua, barbante, pantógrafo.

Outro tratamento que o livro L3 apresenta para o ensino de figura semelhantes é abordado no tópico “A matemática tem história”. Exibido na figura 69, retrata como Tales de Mileto, matemático e filósofo grego, conseguiu determinar a altura de uma pirâmide. Para tal feito, determinar a medida dessa distância, não acessível, usou a ideia da proporcionalidade entre as figuras semelhantes. Afinal, percebeu que a razão entre a medida da projeção da sombra da pirâmide para a medida da projeção da sombra de um bastão é proporcional a razão entre a medida da altura da pirâmide para a medida da altura desse bastão.

Os registros presentes nesse tratamento são os multifuncionais discursivos e não discursivos, exposto pela representação semiótica da língua natural e de figuras planas. O registro monofuncional discursivo, também está presente, pois, a escrita algébrica numérica é usada para representar a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes das figuras semelhantes.

Figura 69 – Contexto histórico (Thales de mileto) L3



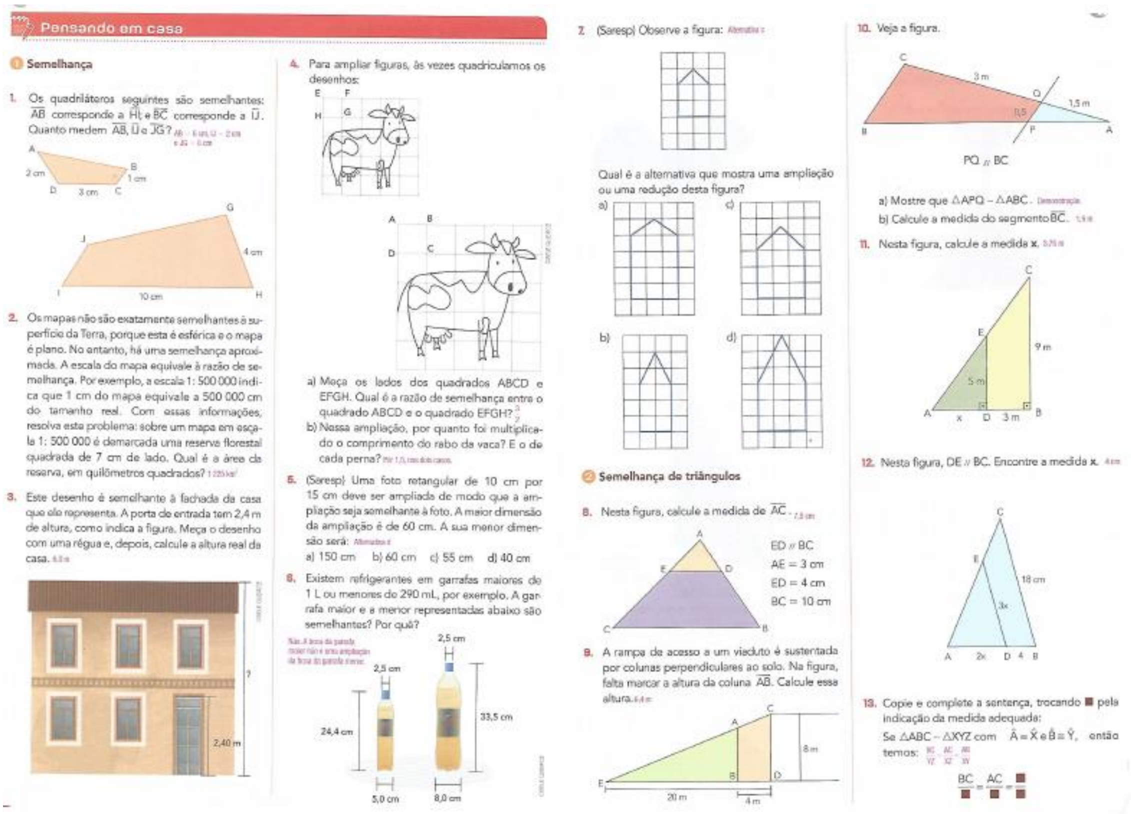
A matemática tem história

Conta-se que Tales de Mileto, o grande filósofo grego do século VI a.C., foi também um próspero comerciante. Certa vez, visitou o Egito em viagem de negócios. Nessa ocasião, ele assombrou o faraó e toda a corte egípcia: medindo a sombra da pirâmide, ele calculou a altura dela. Seu único auxiliar foi um bastão de madeira, que ele cravou verticalmente no solo.

Fonte: Jakubovic e Centurión (2015, p. 15)

Para finalizar a descrição do conteúdo que propomos analisar no livro didático Matemática – Nos dias de hoje, na medida certa, dos autores José Jakubovic e da Marília Centurión, verificaremos o tópico “Pensando em casa” e o tópico “Revendo conceitos”. Tópicos que apresentam um conjunto de atividades, exibidos nas Figuras 70 e 71. Tais atividades tem como finalidade recapitular os conceitos e definições apresentados no capítulo 1 intitulado “Geometria: ampliações e reduções”.

Figura 70 – Atividades L3



Pensando em casa

1 Semelhança

1. Os quadriláteros seguintes são semelhantes: $\overline{AB}$ corresponde a $\overline{HI}$ e $\overline{BC}$ corresponde a $\overline{IJ}$. Quanto medem $\overline{AB}$, $\overline{IJ}$ e $\overline{JG}$?

2. Os mapas não são exatamente semelhantes à superfície da Terra, porque esta é esférica e o mapa é plano. No entanto, há uma semelhança aproximada. A escala do mapa equivale à razão de semelhança. Por exemplo, a escala 1: 500 000 indica que 1 cm do mapa equivale a 500 000 cm do tamanho real. Com essas informações, resolva este problema: sobre um mapa em escala 1: 500 000 é demarcada uma reserva florestal quadrada de 7 cm de lado. Qual é a área da reserva, em quilômetros quadrados?

3. Este desenho é semelhante à fachada da casa que ele representa. A porta de entrada tem 2,4 m de altura, como indica a figura. Meça o desenho com uma régua e, depois, calcule a altura real da casa.

4. Para ampliar figuras, às vezes quadriculamos os desenhos:

a) Meça os lados dos quadrados ABCD e EFGH. Qual é a razão de semelhança entre o quadrado ABCD e o quadrado EFGH?

b) Nessa ampliação, por quanto foi multiplicado o comprimento do rabo da vaca? E o de cada perna?

5. (Saresp) Uma foto retangular de 10 cm por 15 cm deve ser ampliada de modo que a ampliação seja semelhante à foto. A maior dimensão da ampliação é de 60 cm. A sua menor dimensão será:

a) 150 cm b) 60 cm c) 55 cm d) 40 cm

6. Existem refrigerantes em garrafas maiores de 1 L ou menores de 290 mL, por exemplo. A garrafa maior e a menor representadas abaixo são semelhantes? Por quê?

7. (Saresp) Observe a figura:

Qual é a alternativa que mostra uma ampliação ou uma redução desta figura?

a) b) c) d)

2 Semelhança de triângulos

8. Nesta figura, calcule a medida de $\overline{AC}$.

9. A rampa de acesso a um viaduto é sustentada por colunas perpendiculares ao solo. Na figura, falta marcar a altura da coluna $\overline{AB}$. Calcule essa altura.

10. Veja a figura.

a) Mostre que $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.

b) Calcule a medida do segmento $\overline{BC}$.

11. Nesta figura, calcule a medida **x**.

12. Nesta figura, DE // BC. Encontre a medida **x**.

13. Copie e complete a sentença, trocando ■ pela indicação da medida adequada:

Se $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ com $\hat{A} \equiv \hat{X}$ e $\hat{B} \equiv \hat{Y}$, então temos:

$$\frac{BC}{■} = \frac{AC}{■} = \frac{■}{■}$$

Fonte: Jakubovic e Centurión (2015, p. 28 e 29)

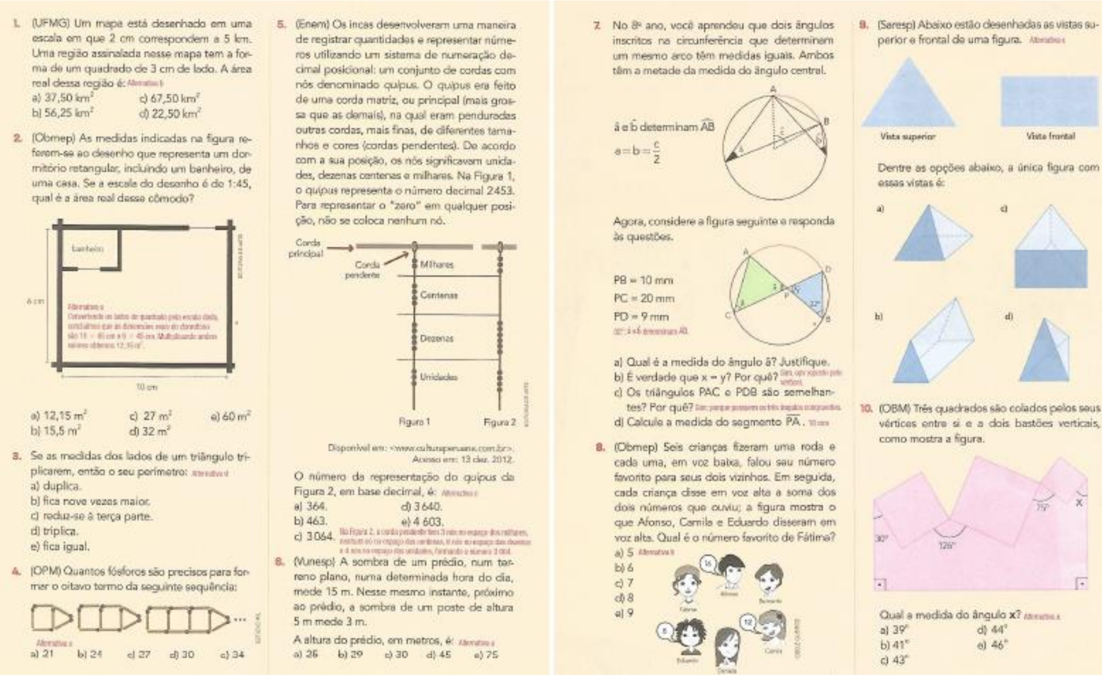
O tópico “Pensando em casa” é dividido em grupos de acordo com os temas abordados no capítulo 1. As questões de 1 a 7 são referentes ao ensino geral de figuras semelhantes, tema que é foco desta pesquisa. Assim, analisaremos a diversidade dos registros utilizados para abordar esse grupo especifico de atividades.

As questões 4, 6 e 7, abordam a parte conceitual do ensino de figuras semelhantes, pois o comando dos enunciados solicita que os leitores verifiquem se as figuras são semelhantes, ou não, para tal é necessário verificar se ângulos correspondentes são congruentes e se os lados correspondentes são proporcionais. A língua natural alfabética, as formas e figuras planas, são representações semióticas expressas nos enunciados das questões. Tais representações estão presentes nos registros multifuncionais discursivos e não discursivos.

Já as questões 1, 3 e 5 tratam sobre a proporcionalidade entre as medidas dos lados das figuras semelhantes. E por fim, a questão 2, relaciona o estudo de figuras semelhantes com escalas cartográficas. Essas questões os alunos precisa transitar do meio conceitual geométrico para a escrita algébrica numérica da proporcionalidade entre os lados correspondentes, assim, os registros presentes essas questões são os multifuncionais discursivos e não discursivos, nos enunciados das questões, e os monofuncionais discursivos na solução dos problemas propostas no tópico.

Continuando a análise final, no tópico “Revendo conceitos”, exposto na Figura 71, temos um outro grupo de atividades envolvendo o ensino de semelhança.

Figura 71 – Atividades L3



1. (UFMG) Um mapa está desenhado em uma escala em que 2 cm correspondem a 5 km. Uma região assinalada nesse mapa tem a forma de um quadrado de 3 cm de lado. A área real dessa região é:
a) 37,50 km² c) 67,50 km²
b) 56,25 km² d) 22,50 km²

2. (Obmep) As medidas indicadas na figura referem-se ao desenho que representa um dormitório retangular, incluindo um banheiro, de uma casa. Se a escala do desenho é de 1:45, qual é a área real desse cômodo?
a) 12,15 m² c) 27 m² e) 60 m²
b) 15,5 m² d) 32 m²

3. Se as medidas dos lados de um triângulo triplicarem, então o seu perímetro:
a) duplica.
b) fica nove vezes maior.
c) reduz-se à terça parte.
d) triplica.
e) fica igual.

4. (OPM) Quantos fósforos são precisos para formar o oitavo termo da seguinte sequência:
a) 21 b) 24 c) 27 d) 30 e) 34

5. (Enem) Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado *quipus*. O *quipus* era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades, dezenas centenas e milhares. Na Figura 1, o *quipus* representa o número decimal 2453. Para representar o "zero" em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.

Disponível em: <www.culturaperuana.com.br>. Acesso em: 13 dez. 2012.

O número da representação do quipus da Figura 2, em base decimal, é:
a) 364. d) 3 640.
b) 463. e) 4 603.
c) 3 064.

6. (Vunesp) A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m.
A altura do prédio, em metros, é:
a) 26 b) 29 c) 30 d) 45 e) 75

7. No 8º ano, você aprendeu que dois ângulos inscritos na circunferência que determinam um mesmo arco têm medidas iguais. Ambos têm a metade da medida do ângulo central.

$\hat{a}$ e $\hat{b}$ determinam $\overset{\frown}{AB}$
$a = b = \frac{c}{2}$

Agora, considere a figura seguinte e responda às questões.

PB = 10 mm
PC = 20 mm
PD = 9 mm

a) Qual é a medida do ângulo $\hat{a}$? Justifique.
b) É verdade que x = y? Por quê?
c) Os triângulos PAC e PDB são semelhantes? Por quê?
d) Calcule a medida do segmento $\overline{PA}$.

8. (Obmep) Seis crianças fizeram uma roda e cada uma, em voz baixa, falou seu número favorito para seus dois vizinhos. Em seguida, cada criança disse em voz alta a soma dos dois números que ouviu; a figura mostra o que Afonso, Camila e Eduardo disseram em voz alta. Qual é o número favorito de Fátima?
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

9. (Saresp) Abaixo estão desenhadas as vistas superior e frontal de uma figura.

Dentre as opções abaixo, a única figura com essas vistas é:

10. (OBM) Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura.

Qual a medida do ângulo **x**?
a) 39° d) 44°
b) 41° e) 46°
c) 43°

Fonte: Jakubovic e Centurión (2015, p. 31 e 32)

De acordo com a estrutura da obra L3 esse tópico tem como finalidade rever todos os conceitos de todos conteúdos abordados de cada um dos capítulos, uma espécie de revisão geral acumulativa. Como o ensino de figuras semelhantes é abordado no capítulo 1, então as questões que estão presentes nesse tópico “Revendo conceitos” são essencialmente problemas que envolve o ensino de figuras semelhantes, porém, há exercício com outra temática. As questões 1, 2, 3, 6 e 7, são problemas envolvendo a temática que decidimos descrever e analisar.

A questão 3 trata o conceito de proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes, possibilitando relacionar a razão de semelhança com o quociente entre os perímetros das figuras semelhantes.

Os problemas 1, 2, 6 e 7, presentes na página 32, no tópico “Revendo conceitos”, são apresentados pela língua natural alfabética, um registro multifuncional. Porém, para solucionar as situações, são necessárias a escrita algébrica numérica, um registro monofuncional. Assim, podemos afirmar que promovem uma mudança de registro, segundo a teoria dos registros de representação semiótica, uma conversão de registros. Dessa forma, para solucionar as questões, o docente, transita do meio geométrico conceitual para o meio algébrico proporcional.

Finalizado a descrição dos contextos conceituais e dos problemas envolvendo o ensino de figuras semelhantes no livro didático, Matemática – Nos dias de hoje, na medida certa (L3), dos autores José Jakubovic e da Marília Centurión, apresentaremos a coleta de dados, a fim de reafirmar os indícios em que os registros multifuncionais discursivos e não discursivos, assim, como os registros monofuncionais discursivos são dominantes nas apresentações e abordagens no ensino de figuras semelhantes.

Conclusões L3

As interpretações obtidas na fase da descrição junto com a coleta e apresentação dos dados colhidos pelas fichas, viabilizarão a confirmação, ou não, da existência, de uma diversidade nas abordagens no ensino de figuras semelhantes, presente no livro didático, Matemática – Nos dias de hoje, na medida certa (L3), dos autores José Jakubovic e da Marília Centurión.

De acordo com os objetivos propostos na pesquisa, conforme o referencial teórico adotado e seguindo os critérios definidos na metodologia, indicaremos as páginas, dos textos introdutórios e das questões, referente ao subtema 1 “Semelhança” do capítulo 1 “Geometria: ampliações e reduções”, a fim de construir conclusões a respeito do ensino de figuras semelhantes da obra (L3).

Inicialmente o livro didático enuncia o ensino de semelhança associando mapas cartográficos desenhados em escalas distintas a figuras semelhantes. Outra associação presente na obra L3, é a comparação realizada é a associação das imagens transmitidas nas Tvs, de diferentes resoluções, a ampliações, reduções de formas geométricas semelhantes.

A obra L3, apresenta elementos similares e distintos, em comparação com as outras obras, já descritas e analisadas, L1 e L2. As similaridades ficam no âmbito dos registros multifuncionais discursivos e não discursivos, bem como, a presença dos monofuncionais discursivos. Afinal, para introduzir os textos introdutórios, os conceitos, as propriedades e as questões envolvendo a semelhança usa-se as representações semióticas da língua natural alfabética e as representações geométricas figurais planas. E para demostrar a proporcionalidade entre os lados correspondentes e a congruência entre os ângulos correspondentes são usadas as representações semióticas da escrita algébricas numérica. O Quadro 18 apresenta as informações coletadas de acordo com a temática definida na 1º ficha, a fim de confirmar as interpretações.

Quadro 18 – Classificação os tipos de registros presentes na obra L3

TEXTOS	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros multifuncionais	Páginas: 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14.	Páginas: 9; 10; 11; 12.
Registros monofuncionais	Páginas: 10; 11;12.	Páginas: AUSENTE.
QUESTÕES	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros multifuncionais	Página: 14, questões: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Página: 28, questão: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Página: 29, questão: 7. Página:32, questões: 1; 2; 3; 6. Página: 33, questão 7	Página: 14, questões: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Página: 15, nos tópicos: Desafios e surpresas; Ação. Página: 28, questão: 1;3; 4; 6. Página: 29, questão: 7. Página:32, questões: 2; 6. Página: 33, questão 7
Registros monofuncionais	Página:14, questões: 1; 2; 5; 6; 7; 8. Página: 28, questões: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Página:32, questões: 1; 2; 3; 6. Página: 33, questão 7	Páginas: AUSENTE.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Na obra L3, não há sinais de textos envolvendo o ensino de figuras semelhantes ao uso de régua e compasso, assim como, não há vestígios de contextos envolvendo o manuseio de softwares geométricos. Os autores iniciam o ensino de semelhança promovem ampliações e reduções cartográficas, como foi exposto na Figura 58, porém, o material concreto utilizado não se enquadra na temática abordada na ficha 2. Os autores realizam as ampliações e reduções das formas geométricas semelhantes manuseando um pantógrafo, instrumento que redimensiona as medidas proporcionalmente. Há uma atividade coletiva, exposta na figura 68, que relaciona escalas com a razão de semelhança. Para desenvolver tal atividade os docentes precisam de linha, papel, giz, régua, transferidor, assim entendemos que faz parte da temática proposta na 2ª ficha.

É evidente que há inúmeras formas de enunciar e abordar o ensino de figuras semelhantes. Entretanto, atividades que promovem reproduções, ampliações ou reduções, por meio da homotetia, ou com o manuseio materiais concretos, ou por softwares geométricos, é uma abordagem que favorecem o ensino de figuras semelhantes. Afinal, esses recursos são registros e representações semióticas que promovem a experimentação e a investigação de aspectos conceituais geométricos e suas consequências algébricas, oportunizando, aos docentes, uma diversidade nas representações, enriquecimento o ensino de figuras semelhantes, tornando, a transição conceitual geométrica para a escrita algébrica, um processo mais construtivo e significativo. O Quadro 19 expõem e confirma nossas interpretações a respeito da temática abordada na 2º ficha.

Quadro 19 – Registro de materiais concretos presentes na obra L3

TEXTOS	Régua e compasso.	Software geométrico.
	Páginas: AUSENTE	Páginas: AUSENTE.
QUESTÕES	Régua e compasso.	Software geométrico.
	Páginas: 15	Páginas: AUSENTE.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Os pontos distintos, em relação as obras L1 e L2, tratam-se que os autores apesar de promovem atividades coletivas que explorar a investigação e a experimentação, por meio da manipulação de materiais concretos, não apresentam, nos textos conceituais, a relação que existe entre a razão de semelhança com o quociente entre os perímetros, com o quociente entre as áreas e com o quociente entre os volumes, das formas geométricas semelhantes.

Tal abordagem, entre a razão de semelhança para perímetro e área de formas semelhantes, não é totalmente ausente no livro didático, pois, evidenciamos três questões envolvendo tal temática. O Quadro 20 que exibe tal temática definida na 3º ficha, comprova nossa constatação.

Quadro 20 – Registro da proporcionalidade envolvendo perímetro, área e volume presente na obra L3

TEXTOS	Páginas: AUSENTE.
QUESTÕES	Páginas: 14, questão: 6, 7, 8.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Um outro ponto similar perceptível na análise e descrição das obras é a hegemonia no tipo de tratamento dado nas questões, exercícios, e problemas entre as três obras. Em sua grande maioria, os enunciados são descritos com a escrita da língua natural alfabética, acompanhados de formas planas semelhantes. Mas, para solucionar as questões, exercícios, e problemas, os docentes, precisam processar o conceito geométrico, das condições para duas ou mais figura serem ditas semelhantes e assim desenvolver uma escrita algébrica numérica para a proporcionalidade entre os lados correspondentes e para a congruência entre os ângulos correspondestes.

Esse processo de codificação e exposição representa uma alteração de registro, a conversões. As conversões são alterações das representações semióticas da língua natural ou figural plana para as representações semióticas da escrita algébrica numérica. Essa mudança de registro caracteriza o processo transição do meio geométrico para o algébrico no ensino de figuras semelhantes. O quadro 21 expõem e confirma a análise descrita.

Quadro 21 – Classificação das alterações dos registros presentes na obra L3

TEXTOS	Tratamento.	Conversões.
	Páginas: 8; 9; 10;11; 12; 13.	Páginas: 11; 12.
QUESTÕES	Tratamento.	Conversões.
	Página 14, questões: 2; 3; 4. Página: 28, questão: 4, 6. Página: 29, questão: 7. Página: 32, questões: 3.	Página:14, questões: 1; 2; 5; 6; 7; 8. Página: 15, nos tópicos: Desafios e surpresas; Ação. Página: 28, questões: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Página: 32, questões: 1; 2; 6. Página:33, questões: 7.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Compreendemos que o livro didático Matemática – Nos dias de hoje, na medida certa (L3), apresenta de forma não convencional, um registro, uma representação para enunciar o ensino de semelhança. O manuseio do pantógrafo, para reprodução, ampliação, e redução de formas semelhantes traz outra perspectiva para o ensino. Mas, a ausência da relação da razão de semelhança com o quociente entre os perímetros, com o quociente entre as áreas e com o quociente entre os volumes, das formas geométricas semelhantes, torna o ensino incompleto. Afinal, os autores deixam de apresentar variações nos contextos e nas situações problemas que envolvem tais relações, não profundando no processo da transição do conceito geométrico para escrita algébricas numérica.

5.4 OBRA L4: MATEMÁTICA – VONTADE DE SABER

O livro didático, Matemática – Vontade de saber, dos autores Joamir Souza e da Patrícia Moreno Pataro, produzido pela editora FTD, de 3ª Edição, no ano de 2015, está presente no Guia de Livros Didáticos Ensino Fundamental Anos Finais (Brasil 2016), e de acordo com o Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD). Organiza-se os conteúdos em capítulos e cada capítulo há subtemas, que compõem os capítulos.

Quadro 22 – Sumário do Livro didático da obra L4

Capítulos.	Subtemas.
Capítulo – 1 Raízes.	1 – Radiciação; – Potencias com expoente fracionário; 3 – Propriedades dos radicais; 4 – Simplificação de radicais.
Capítulo – 2 Equações do 2º grau e sistemas de equações.	1 – Equações do 2º grau com uma incógnita; 2 – Resolução de equações do 2º grau; 3 – Estudando as raízes de equações do 2º grau; 4 – Sistema de duas equações com duas incógnitas.
Capítulo – 3 Matemática financeira.	1 – A matemática financeira; 2 – Porcentagem; 3 – Acréscimo; 4 – Desconto; 5 – Juro.
Capítulo – 4 Simetria.	1 – Simetria de rotação; 2 – Simetria de translação.
Capítulo – 5 Função afim.	1 – A noção de função; 2 – Representação gráfica de uma função; 3 – Função afim.
Capítulo – 6 Função quadrática.	1 – Função quadrática.
Capítulo – 7 Medidas em informática.	1 – Unidade de medida de capacidade armazenamento; 2 – Outras unidades de medida em informática.
Capítulo – 8 Semelhança.	1 – Segmentos proporcionais; 2 – Teorema de Tales; 3 – Semelhança de figuras.

Capítulo – 9 Relações no triângulo retângulo.	1 – Relações métricas no triângulo retângulo; 2 – Teorema de Pitágoras; 3 – Relações trigonométricas no triângulo retângulo; 4 – Ângulos notáveis; 5 – Tabela trigonométrica;
Capítulo – 10 Tratamento da informação.	1 – Variáveis estatísticas; 2 – Distribuição de frequências; 3 – Intervalos de classes; 4 – Média aritmética, mediana e moda.
Capítulo – 11 Círculo e circunferência.	1 – A circunferência; 2 – Ângulo na circunferência; 3 – Ângulo inscrito; 4 – Comprimento da circunferência; 5 – Área do círculo.
Capítulo – 12 Medidas de volume.	1 – Volume; 2 – Volume do paralelepípedo; 3 – Volume do cilindro; 4 – Unidades de capacidade.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019) uma adaptação do sumário da obra Matemática – Vontade de saber (2015, p.8, 9, 10 e 11).

A obra é dividida em 12 capítulos, por sua vez, os capítulos, são subdivididos em subtemas, assuntos explorados que compõem a temática de cada um dos capítulos. O livro L4 também é estruturado em seções, não ordenadas intituladas de; "Abertura de capítulo"; "Atividades"; Refletindo sobre o capítulo"; "Revisão"; "Ser consciente" ENEM e OBMEP"; "Contexto"; Resolvendo problemas"; Acessando Tecnologia"; "Ampliando seus conhecimentos".

Seguindo a metodologia definida, para este estudo, descrevermos e analisaremos se o livro didático, Matemática Vontade de saber, apresenta uma diversidade de abordagens para o ensino de figuras semelhantes, de acordo com o referencial teórico adotado na pesquisa. Assim, com os critérios definidos verificaremos se o subtema "Semelhança de figuras" do capítulo 8 intitulado de "Semelhança" apresenta uma multiplicidade de elementos que favoreçam aos docentes uma compreensão construtiva na transição do conceito geométrico para a escrita algébrico para o ensino de figuras semelhantes.

Descrição do conteúdo L4

Na "Abertura de capítulo", os autores, introduzem a ideia de proporcionalidade entre objetos reais e miniaturas.

> Para os colecionadores que desejam construir suas próprias peças, existem lojas especializadas em peças pequenas e proporcionais. Entre os critérios a serem considerados na compra e ou construção de uma miniatura, estão a qualidade, a categoria, o custo e o tamanho, ou escala. Este último determina quantas vezes a miniatura é menor que o objeto real.

> Assim, se um automóvel mede 5 m de comprimento e sua réplica, 5 cm, por exemplo, dizemos que a escala é de 1 cm para cada 1 m, ou seja, 1:100. (SOUZA e PATARO, 2015, p. 145)

Para aprofundar a ideia inicial o livro levanta alguns questionamentos, com a finalidade explorar a proporcionalidade entre os tamanhos dos objetos reais com os tamanhos das miniaturas, associando essa relação proporcional a escala entre as dimensões reais e as dimensões das miniaturas.

> Que tipo de miniatura mais interessa? Por quê?
> Quantos centímetros tem a miniatura de um trem com 150 metros de comprimento, sabendo que a escala é de 1:100?
> Que tamanho mede, em centímetros, o objeto-modelo da miniatura que aparece na fotografia, sabendo que o comprimento da miniatura é de 150 cm? (SOUZA e PATARO, 2015, p. 145)

A Figura 72 exibe as enunciações propostas no capítulo 8 e apresenta a temática abordado na seção "Abertura de capítulo" para iniciar o ensino de Semelhança.

Figura 72 – Enunciação contextual (miniatura) L4

Miniaturas

Para muitas pessoas, o *hobby* favorito é colecionar miniaturas, atividade que demanda tempo e investimento financeiro do interessado. Os objetos construídos em miniatura variam desde automóveis, utensílios domésticos e brinquedos até temas mais elaborados, como uma cidade, por exemplo.

Para os colecionadores que desejam construir suas próprias peças, existem lojas especializadas em peças pequenas e proporcionais. Entre os critérios a serem considerados na compra ou construção de uma miniatura, estão a qualidade, a categoria, o custo e o tamanho, ou escala. Este último determina quantas vezes a miniatura é menor que o objeto real.

Assim, se um automóvel mede 5 m de comprimento e sua réplica, 5 cm, por exemplo, dizemos que a escala é de 1 cm para cada 1 m, ou seja, 1:100.

Miniaturas
Veja mais informações sobre miniaturas no site: <http://eba.im/ywsf2d> (acesso em: 18 fev. 2015)

A Que tipo de miniatura mais te interessa? Por quê? Resposta pessoal.

B Quantos centímetros tem a miniatura de um trem com 150 metros de comprimento, sabendo que a escala é de 1:100? 150 cm

C Que tamanho mede, em centímetros, o objeto-modelo da miniatura que aparece na fotografia, sabendo que o comprimento da miniatura é 150 cm? 450 cm

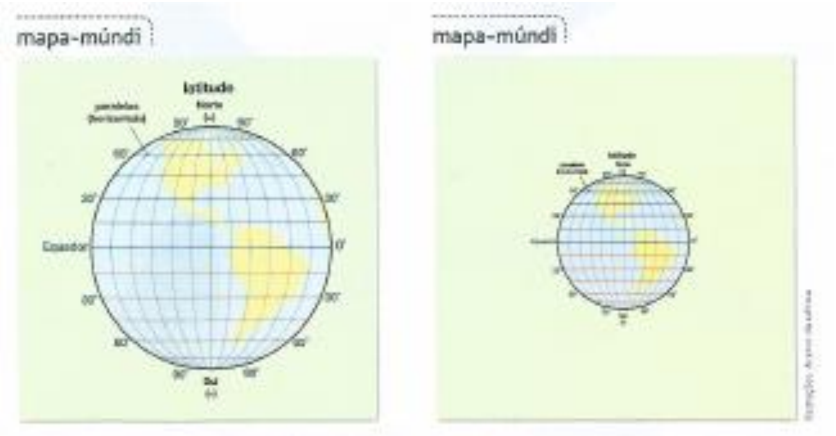
Réplica em miniatura de automóvel, exposta em Londres, Inglaterra, em 28 de setembro de 2012. Escala da réplica: 1:3.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 144 e 145)

De acordo com o referencial teórico adotado está pesquisa, podemos afirmar que os registros usados na abordagem inicial são os multifuncionais discursivos e os monofuncionais discursivos, visto que para enunciar a ideia de proporcionalidade entre as dimensões dos objetos reais para as dimensões das miniaturas usa-se as representações semióticas da língua natural alfabética e para explorar a ideia de escala usa-se as representações semióticas da escrita algébrica numérica.

Dando continuidade no ensino de figuras semelhantes, proposto na obra L4, os autores apresentam dois mapas de tamanhos diferentes, representando o globo terrestre, exposto na Figura 73.

Figura 73 – Enunciação contextual (mapa) L4



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 156)

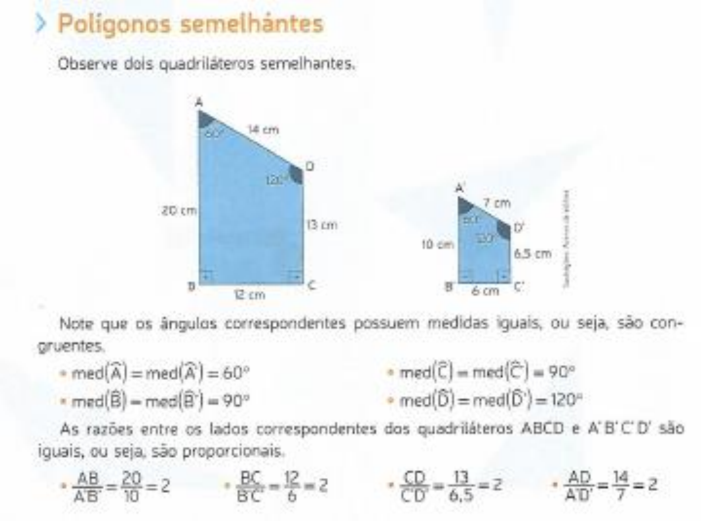
Com a representação do mapa-múndi em dois tamanhos diferentes os autores inicial enunciar o conceito de semelhanças:

> Note que as imagens têm a mesma forma, diferenciando –se apenas pelo tamanho.
> Na matemática, quando isso acontece, dizemos que essas são **figuras semelhantes**. Ao ampliar, reduzir ou reproduzir uma figura, obtêm-se figuras semelhantes. (SOUZA e PATARO, 2015, p. 145)

Após conceituar figuras semelhantes, por meio das representações semióticas da língua natural alfabética, acompanho de formas geométricas planas, o livro didático definir as condições para duas ou mais figuras, polígonos, serem ditos semelhantes. Na Figura 74 exibe as condições necessárias, para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, tais condições são apresentadas por registros multifuncionais não discursivos, evidenciado pela presença de formas geométricas planas e apresentado por registros monofuncionais discursivos, expondo a proporcionalidade entre os lados correspondentes e a congruência entre os ângulos correspondentes.

Ainda sobre a apresentação das condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, assim como, as demais obras já descritas e analisadas, o livro L4 não demostra aos leitores como identificar os lados e os ângulos correspondentes. Como já foi mencionado este estudo e exibido na Figura 39 essas associações não são tão intuitivas, dessa forma, é necessária uma abordagem que deixei claro ao aluno como identificar tais elementos, seja pela escrita da língua natural alfabética, seja pela construção geométrica de formas planas, é importante apresentar um registro que auxilie aos docentes como identificar os lados e os ângulos correspondentes, a fim de tornar o ensino de figuras semelhantes mais acessíveis e compreensíveis.

Figura 74 – Polígonos semelhantes L4



› Polígonos semelhantes

Observe dois quadriláteros semelhantes.

Note que os ângulos correspondentes possuem medidas iguais, ou seja, são congruentes.

- $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{A}') = 60°$
- $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{B}') = 90°$
- $\text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{C}') = 90°$
- $\text{med}(\hat{D}) = \text{med}(\hat{D}') = 120°$

As razões entre os lados correspondentes dos quadriláteros ABCD e A'B'C'D' são iguais, ou seja, são proporcionais.

- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{20}{10} = 2$
- $\frac{BC}{B'C'} = \frac{12}{6} = 2$
- $\frac{CD}{C'D'} = \frac{13}{6,5} = 2$
- $\frac{AD}{A'D'} = \frac{14}{7} = 2$

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 156)

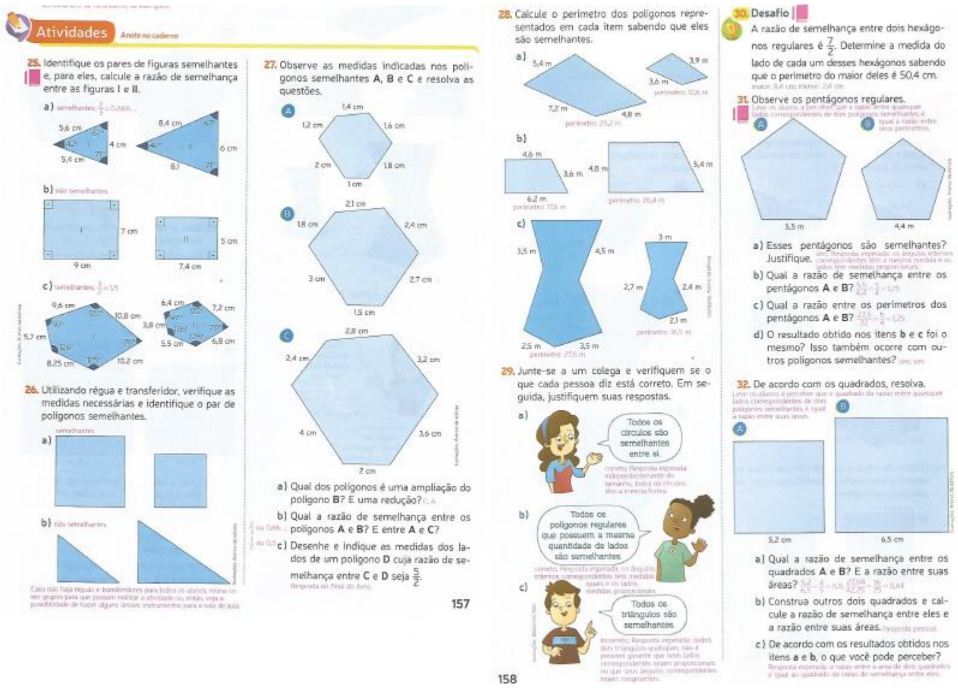
Em sequência, os autores, enunciam as condições para dois ou mais polígonos serem ditos semelhantes e conceitua a razão de semelhança, de acordo com o caso apresentado anterior, exposto na Figura 74.

> Dizemos que dois polígonos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. O valor da razão entre os lados correspondentes é a **razão de semelhança**. No caso apresentado, a razão se semelhança entre os polígonos ABCD e A'B'C'D' é 2 (SOUZA e PATARO, 2015, p. 145)

Um ponto importante e necessário ressaltar é a ausência de enunciações nos textos introdutórios situações abordando a relação entre a razão de semelhança, com o quociente entre os perímetros e com o quociente entre as áreas, das figuras planas semelhantes. Como tais relações são consequências da proporcionalidade entre os lados correspondentes podemos afirmar que o ensino de figuras semelhantes no livro didático L4 fica incompleto ou no mínimo mal explorado. No entanto a relação entre a razão de semelhanças com os perímetros e com as áreas de figuras semelhantes é abordo as atividades propostas pelos autores.

Após apresentar a definição e as condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes o livro didático propõe a seção “Atividades”. Essa seção é um conjunto de questões, problemas e situações que envolvem o ensino de figuras semelhantes, que está exibido na Figura 75.

Figura 75 – Atividades L4



Atividades Anote no caderno

25. Identifique os pares de figuras semelhantes e, para eles, calcule a razão de semelhança entre as figuras I e II.

a) semelhantes

b) não semelhantes

c) semelhantes

26. Utilizando régua e transferidor, verifique as medidas necessárias e identifique o par de polígonos semelhantes.

a) semelhantes

b) não semelhantes

27. Observe as medidas indicadas nos polígonos semelhantes **A**, **B** e **C** e resolva as questões.

a) Qual dos polígonos é uma ampliação do polígono **B**? E uma redução?

b) Qual a razão de semelhança entre os polígonos **A** e **B**? E entre **A** e **C**?

c) Desenhe e indique as medidas dos lados de um polígono **D** cuja razão de semelhança entre **C** e **D** seja $\frac{5}{2}$.

157

28. Calcule o perímetro dos polígonos representados em cada item sabendo que eles são semelhantes.

a)

b)

c)

29. Junte-se a um colega e verifiquem se o que cada pessoa diz está correto. Em seguida, justifiquem suas respostas.

a) Todos os círculos são semelhantes entre si.

b) Todos os polígonos regulares que possuem a mesma quantidade de lados são semelhantes.

c) Todos os triângulos são semelhantes.

158

30. **Desafio**

A razão de semelhança entre dois hexágonos regulares é $\frac{7}{2}$. Determine a medida do lado de cada um desses hexágonos sabendo que o perímetro do maior deles é 50,4 cm.

31. Observe os pentágonos regulares.

a) Esses pentágonos são semelhantes? Justifique.

b) Qual a razão de semelhança entre os pentágonos **A** e **B**?

c) Qual a razão entre os perímetros dos pentágonos **A** e **B**?

d) O resultado obtido nos itens **b** e **c** foi o mesmo? Isso também ocorre com outros polígonos semelhantes?

32. De acordo com os quadrados, resolva.

a) Qual a razão de semelhança entre os quadrados **A** e **B**? E a razão entre suas áreas?

b) Construa outros dois quadrados e calcule a razão de semelhança entre eles e a razão entre suas áreas.

c) De acordo com os resultados obtidos nos itens **a** e **b**, o que você pode perceber?

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 157 e 158)

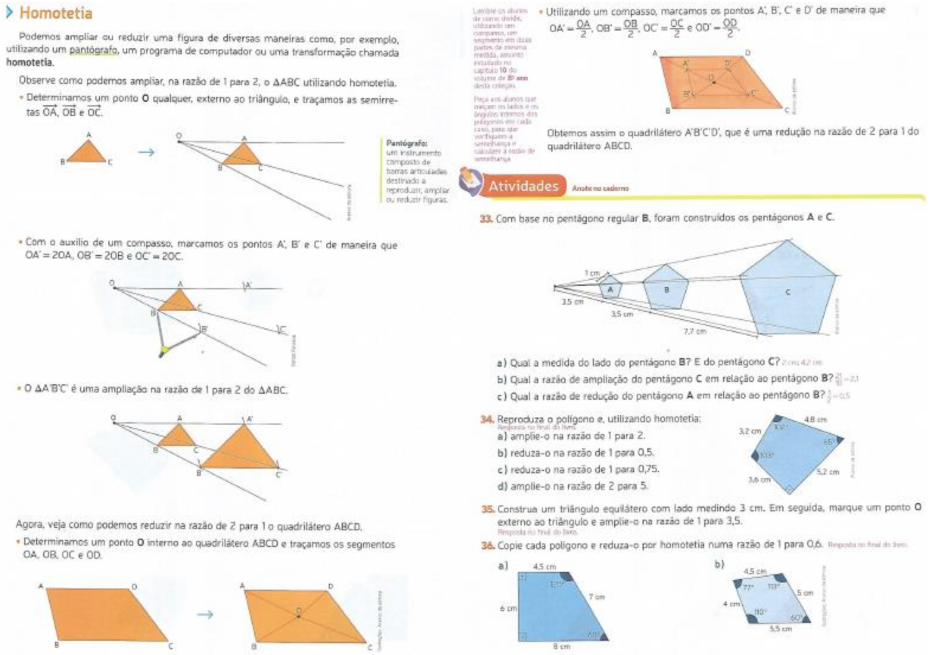
É possível perceber que certas questões, nessa seção, aborda a relação entre a razão de semelhança com os perímetros e com as áreas das figuras semelhantes. Porém, o livro didático Matemática – Vontade de saber, não aborda tal relação nos textos conceituais sobre o ensino de semelhança, os docentes ficaram na dependência do professor, que ministrar esse assunto, desenvolver e apresentar a relação, ou ainda caberá ao docente pesquisar em outro material didático de estudo, para solucionar as questões que envolve a relação entre a razão de semelhança com os perímetros e com as áreas das figuras semelhantes.

As questões 25, 26, 27 e 29, expostas na Figura 75, são situações envolvendo as condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes. Os enunciados são apresentados por registros multifuncionais discursivos e não discursivos. Já as soluções que os docentes devem apresentar estão inseridas nos registros multifuncionais discursivos e nos registros monofuncionais discursivos.

As questões 28, 30, 31 e 32, também são apresentadas por registros multifuncionais discursivos e não discursivos e suas soluções se enquadram nos registros monofuncionais, tais questões, envolvem a relação entre a razão de semelhança com os perímetros e com as áreas das figuras semelhantes. Ainda sobre as questões da seção "Atividade" exibido na Figura 75, podemos destacar o item c, da questão 27 e o item b da questão 32, em ambos, o enunciado exige que se construa figuras semelhantes. Entretanto, até o presente momento, nos textos introdutórios sobre a conceitualização das condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, no ensino de semelhança de figuras, não apresentam aos docentes o processo de como construir figuras semelhantes pelo manuseio de régua e compasso ou por manuseio de software geométrico.

A obra L4, assim como as demais, usam os procedimentos metodológicos da homotetia para realizar reproduções, ampliações e reduções de forma geométricas. Porém, a homotetia apresentada pelos autores não está inserida diretamente na temática das reproduções, ampliações e reduções de forma geométrica semelhantes, no ensino de figuras semelhantes, visto que os autores abordam a homotetia sem relacionar com a construção da conceitualização das condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes. Essa afirmação pode ser constatada na Figura 76.

Figura 76 – Homotetia L4



Homotetia

Podemos ampliar ou reduzir uma figura de diversas maneiras como, por exemplo, utilizando um pantógrafo, um programa de computador ou uma transformação chamada **homotetia**.

Observe como podemos ampliar, na razão de 1 para 2, o ΔABC utilizando homotetia.

- Determinamos um ponto **O** qualquer, externo ao triângulo, e traçamos as semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

Pantógrafo: um instrumento composto de barras articuladas destinado a reproduzir, ampliar ou reduzir figuras.

- Com o auxílio de um compasso, marcamos os pontos A', B' e C' de maneira que OA' = 2OA, OB' = 2OB e OC' = 2OC.
- O ΔA'B'C' é uma ampliação na razão de 1 para 2 do ΔABC.

Agora, veja como podemos reduzir na razão de 2 para 1 o quadrilátero ABCD.

- Determinamos um ponto **O** interno ao quadrilátero ABCD e traçamos os segmentos OA, OB, OC e OD.
- Utilizando um compasso, marcamos os pontos A', B', C' e D' de maneira que $OA' = \frac{OA}{2}$, $OB' = \frac{OB}{2}$, $OC' = \frac{OC}{2}$ e $OD' = \frac{OD}{2}$.

Obtemos assim o quadrilátero A'B'C'D', que é uma redução na razão de 2 para 1 do quadrilátero ABCD.

Atividades Anote no caderno

33. Com base no pentágono regular **B**, foram construídos os pentágonos **A** e **C**.

a) Qual a medida do lado do pentágono **B**? E do pentágono **C**?

b) Qual a razão de ampliação do pentágono **C** em relação ao pentágono **B**?

c) Qual a razão de redução do pentágono **A** em relação ao pentágono **B**?

34. Reproduza o polígono e, utilizando homotetia:
Resposta no final do livro.

a) amplie-o na razão de 1 para 2.

b) reduza-o na razão de 1 para 0,5.

c) reduza-o na razão de 1 para 0,75.

d) amplie-o na razão de 2 para 5.

35. Construa um triângulo equilátero com lado medindo 3 cm. Em seguida, marque um ponto **O** externo ao triângulo e amplie-o na razão de 1 para 3,5.
Resposta no final do livro.

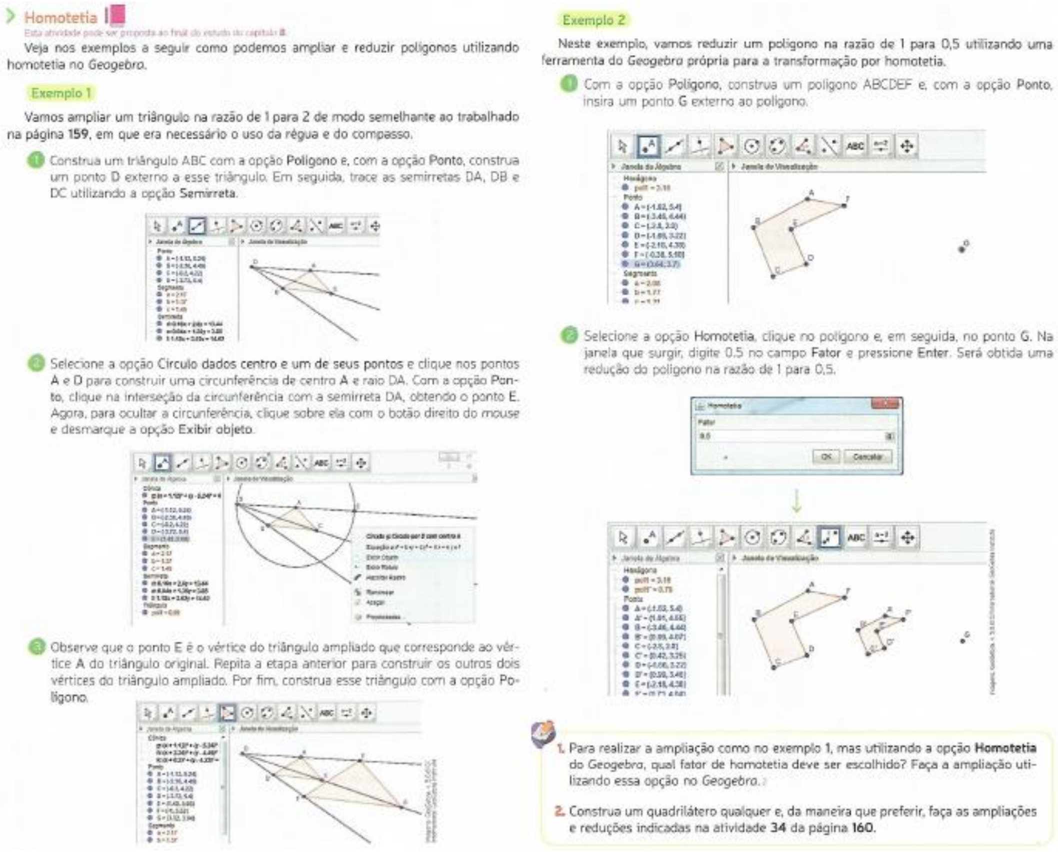
36. Copie cada polígono e reduza-o por homotetia numa razão de 1 para 0,6. Resposta no final do livro.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 159 e 160)

Os procedimentos realizados na homotetia, são representações semiótica prestes nas cinco obras selecionadas para este estudo. Entretanto não é um tratamento que auxilia a compreensão da definição de figuras semelhantes, assim como, o entendimento das condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes. Esse tratamento possibilitaria aos alunos a visualizar e a identificar as medidas dos lados correspondentes proporcionais, assim como, visualizar e a identificar as medidas dos ângulos correspondentes congruentes.

A homotetia é uma representação semiótica que auxilia o processo de ensino de semelhança de figuras. Mas, é importante seja enunciada de forma complementar e não como uma seção separada sem conexões ao ensino de figuras semelhantes. O livro L4, aborda a homotetia por meio do manuseio de materiais concretos como régua e compasso, mas, também apresenta ao docente outra abordagem. Na seção “Acessando tecnologias”, exposto na Figura 77, os autores, apresentam o software geométrico dinâmico “*Geogebra*”, descrevendo e exibindo como é possível construir figuras semelhantes.

Figura 77 – homotetia software geogebra L4



Homotetia

Esta atividade pode ser proposta ao final do estudo do capítulo 8.

Veja nos exemplos a seguir como podemos ampliar e reduzir polígonos utilizando homotetia no *Geogebra*.

Exemplo 1

Vamos ampliar um triângulo na razão de 1 para 2 de modo semelhante ao trabalhado na página **159**, em que era necessário o uso da régua e do compasso.

1. Construa um triângulo ABC com a opção **Polígono** e, com a opção **Ponto**, construa um ponto D externo a esse triângulo. Em seguida, trace as semirretas DA, DB e DC utilizando a opção **Semirreta**.
2. Selecione a opção **Círculo dados centro e um de seus pontos** e clique nos pontos A e D para construir uma circunferência de centro A e raio DA. Com a opção **Ponto**, clique na interseção da circunferência com a semirreta DA, obtendo o ponto E. Agora, para ocultar a circunferência, clique sobre ela com o botão direito do *mouse* e desmarque a opção **Exibir objeto**.
3. Observe que o ponto E é o vértice do triângulo ampliado que corresponde ao vértice A do triângulo original. Repita a etapa anterior para construir os outros dois vértices do triângulo ampliado. Por fim, construa esse triângulo com a opção **Polígono**.

Exemplo 2

Neste exemplo, vamos reduzir um polígono na razão de 1 para 0,5 utilizando uma ferramenta do *Geogebra* própria para a transformação por homotetia.

1. Com a opção **Polígono**, construa um polígono ABCDEF e, com a opção **Ponto**, insira um ponto G externo ao polígono.
2. Selecione a opção **Homotetia**, clique no polígono e, em seguida, no ponto G. Na janela que surgir, digite 0.5 no campo **Fator** e pressione **Enter**. Será obtida uma redução do polígono na razão de 1 para 0,5.

Homotetia
Fator
0.5

1. Para realizar a ampliação como no exemplo 1, mas utilizando a opção **Homotetia** do *Geogebra*, qual fator de homotetia deve ser escolhido? Faça a ampliação utilizando essa opção no *Geogebra*.
2. Construa um quadrilátero qualquer e, da maneira que preferir, faça as ampliações e reduções indicadas na atividade **34** da página **160**.

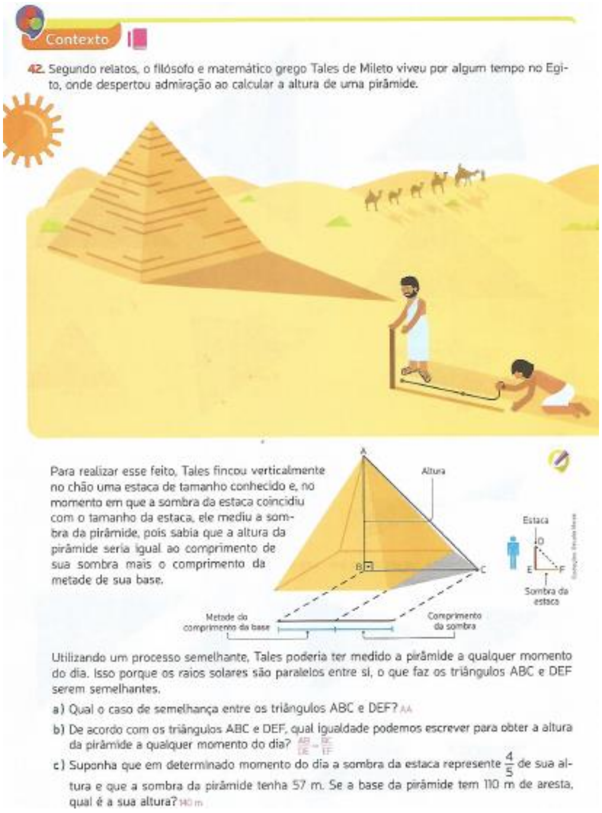
Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 279 e 280)

Como foi possível constatar, na Figura 77, o livro didático também aborda, o ensino de figuras semelhantes, introduzindo os docentes em um ambiente informatizado, porém, essa seção “Acessando tecnologias” não está inserida no capítulo 8, referente ao ensino de figuras semelhantes. Essa seção fica no final do livro didático, como uma espécie de material de apoio para o professor ou para o aluno. Essa seção deve constar na temática do ensino de figuras semelhantes de forma continua e não seccionada, pois, a atividade auxilia a construção e a concretização das condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes.

O processo de ensino e aprendizagem, proposto pelo livro L4, seria mais enriquecedor se a seção “Acessando tecnologias” estivesse dentro do capítulo 8, para auxiliar a assimilação e significação da conceitualização do ensino de semelhança de figuras, por meio das conexões possíveis de se estabelecer com a reprodução, ampliação e redução de forma geométricas semelhantes.

Prosseguindo com a descrição da temática de decidimos analisar, o livro didático, apresenta na seção “Contexto”, exibido na Figura 78, uma atividade que exibe como, supostamente, Tales de Mileto, conseguiu determinar a medida da altura de uma pirâmide, estão presentes registros multifuncionais e monofuncionais.

Figura 78 – Contexto histórico (Thales de Mileto) L4



Contexto

42. Segundo relatos, o filósofo e matemático grego Tales de Mileto viveu por algum tempo no Egito, onde despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide.

Para realizar esse feito, Tales fincou verticalmente no chão uma estaca de tamanho conhecido e, no momento em que a sombra da estaca coincidiu com o tamanho da estaca, ele mediu a sombra da pirâmide, pois sabia que a altura da pirâmide seria igual ao comprimento de sua sombra mais o comprimento da metade de sua base.

Utilizando um processo semelhante, Tales poderia ter medido a pirâmide a qualquer momento do dia. Isso porque os raios solares são paralelos entre si, o que faz os triângulos ABC e DEF serem semelhantes.

a) Qual o caso de semelhança entre os triângulos ABC e DEF? AA

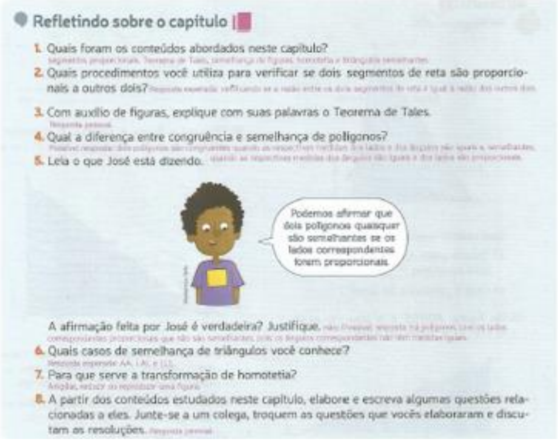
b) De acordo com os triângulos ABC e DEF, qual igualdade podemos escrever para obter a altura da pirâmide a qualquer momento do dia? $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

c) Suponha que em determinado momento do dia a sombra da estaca represente $\frac{4}{5}$ de sua altura e que a sombra da pirâmide tenha 57 m. Se a base da pirâmide tem 110 m de aresta, qual é a sua altura? 140 m

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 164)

Para finalizar a parte conceitual do capítulo 8 “Semelhança”, os autores, promovem uma retomada dos assuntos abordados. Na seção “Refletindo sobre o capítulo”, exposto na Figura 79, são levantados questionamentos a respeito dos subtemas abordados. Estão presentes nas enunciações dos questionamentos os registros multifuncionais discursivos.

Figura 79 – Atividades L4



Refletindo sobre o capítulo

1. Quais foram os conteúdos abordados neste capítulo? Segmentos proporcionais, Teorema de Tales, semelhança de figuras, homotetia e triângulos semelhantes.
2. Quais procedimentos você utiliza para verificar se dois segmentos de reta são proporcionais a outros dois?
3. Com auxílio de figuras, explique com suas palavras o Teorema de Tales. Resposta pessoal.
4. Qual a diferença entre congruência e semelhança de polígonos?
5. Leia o que José está dizendo.

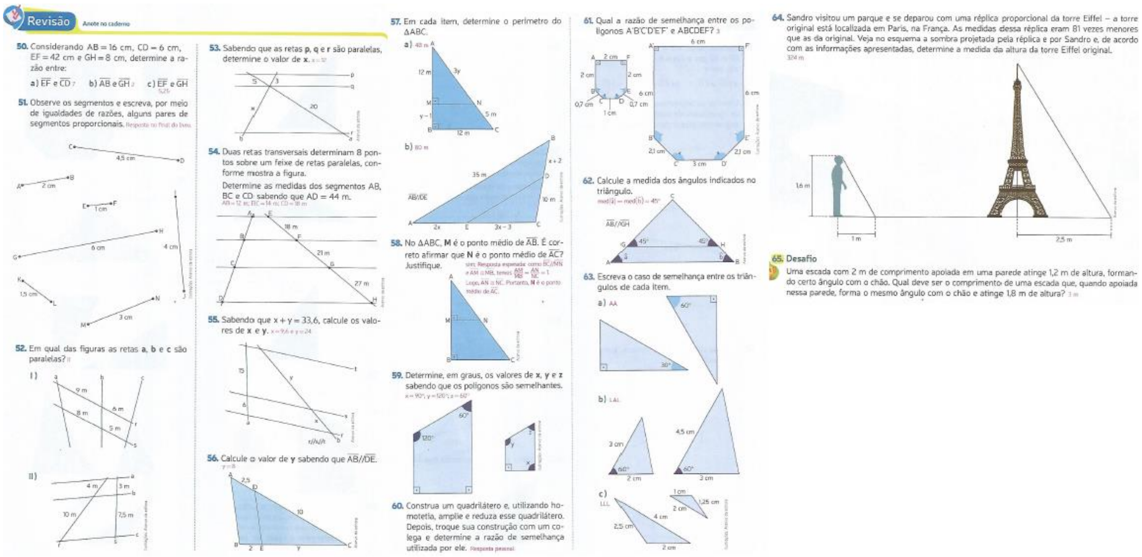
A afirmação feita por José é verdadeira? Justifique.

6. Quais casos de semelhança de triângulos você conhece? Resposta esperada: AA, LAL e LLL.
7. Para que serve a transformação de homotetia? Ampliar, reduzir ou reproduzir uma figura.
8. A partir dos conteúdos estudados neste capítulo, elabore e escreva algumas questões relacionadas a eles. Junte-se a um colega, troquem as questões que vocês elaboraram e discutam as resoluções. Resposta pessoal.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 166)

Dando continuidade da retomada o livro L4, na seção “Revisão” apresenta uma sequência de atividades relacionadas ao ensino promovido pelo capítulo 8 “Semelhança”, possível de se constatar, na Figura 80. As atividades são associadas ao ensino dos Segmentos Proporcionais, ao Teorema de Tales e a Semelhança de Figuras.

Figura 80 – Atividades L4



Revisão Anote no caderno

50. Considerando AB = 16 cm, CD = 6 cm, EF = 42 cm e GH = 8 cm, determine a razão entre:
a) $\overline{EF}$ e $\overline{CD}$ 7 b) $\overline{AB}$ e $\overline{GH}$ 2 c) $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ 5,25

51. Observe os segmentos e escreva, por meio de igualdades de razões, alguns pares de segmentos proporcionais. Resposta no final do livro.

52. Em qual das figuras as retas **a**, **b** e **c** são paralelas? II

53. Sabendo que as retas **p**, **q** e **r** são paralelas, determine o valor de **x**.

54. Duas retas transversais determinam 8 pontos sobre um feixe de retas paralelas, conforme mostra a figura.
Determine as medidas dos segmentos AB, BC e CD sabendo que AD = 44 m.
AB = 12 m; BC = 14 m; CD = 18 m

55. Sabendo que x + y = 33,6, calcule os valores de **x** e **y**. x = 9,6 e y = 24

56. Calcule o valor de **y** sabendo que $\overline{AB}//\overline{DE}$. y = 8

57. Em cada item, determine o perímetro do ΔABC.
a) 48 m
b) 80 m

58. No ΔABC, **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$. É correto afirmar que **N** é o ponto médio de $\overline{AC}$? Justifique. Sim; Resposta esperada: como $\overline{BC}//\overline{MN}$ e $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, temos $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1$. Logo, $\overline{AN} \cong \overline{NC}$. Portanto, **N** é o ponto médio de $\overline{AC}$.

59. Determine, em graus, os valores de **x**, **y** e **z** sabendo que os polígonos são semelhantes. x = 90°, y = 120°; z = 60°

60. Construa um quadrilátero e, utilizando homotetia, amplie e reduza esse quadrilátero. Depois, troque sua construção com um colega e determine a razão de semelhança utilizada por ele. Resposta pessoal.

61. Qual a razão de semelhança entre os polígonos A'B'C'D'E'F' e ABCDEF? 3

62. Calcule a medida dos ângulos indicados no triângulo.
med(â) = med(b̂) = 45°

63. Escreva o caso de semelhança entre os triângulos de cada item.
a) AA
b) LAL
c) LLL

64. Sandro visitou um parque e se deparou com uma réplica proporcional da torre Eiffel – a torre original está localizada em Paris, na França. As medidas dessa réplica eram 81 vezes menores que as da original. Veja no esquema a sombra projetada pela réplica e por Sandro e, de acordo com as informações apresentadas, determine a medida da altura da torre Eiffel original.
324 m

65. **Desafio**
Uma escada com 2 m de comprimento apoiada em uma parede atinge 1,2 m de altura, formando certo ângulo com o chão. Qual deve ser o comprimento de uma escada que, quando apoiada nessa parede, forma o mesmo ângulo com o chão e atinge 1,8 m de altura? 3 m

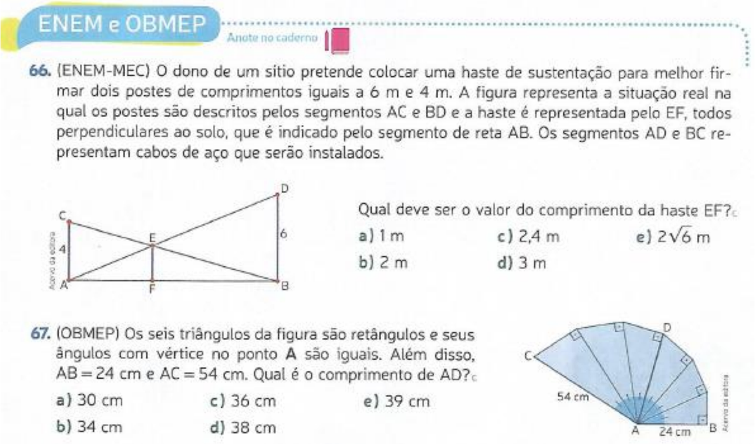
Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 167, 168, e 169)

Sobre as questões presentes na seção “Revisão” pode-se afirmar que da atividade 56 à atividade 64, são situações que envolve o ensino de figuras semelhantes. Com a exceção da questão 60, que explora a construção geométrica de forma semelhantes, os demais exercícios, propostos pelos autores, são atividades que abordam a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes, a congruência entre as medidas dos ângulos correspondentes, a definição da razão de semelhança.

Dessa forma podemos concluir que as enunciações são representações semióticos, inseridas nos registros multifuncionais discursivos e não discursivos, pois, são apresentadas pela língua natural alfabética e por figuras geométricas planas. E por sua vez, as possíveis soluções, envolvendo a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes e a congruência entre os ângulos correspondentes, são representações semióticas inseridas nos registros monofuncionais discursivos, visto que são representações indicadas pela escrita algébrica numérica.

O capítulo encerra com a seção “ENEM e OBMEP”. A temática dessa seção é apresentar, ao docente, exemplos de problemas, envolvendo o conteúdo ministrado no capítulo, que foram aplicados no ENEM ou na OBMEP. As enunciações das duas questões presentes nessa seção, que está exposta na Figura 81, são apresentadas pelos registros multifuncionais discursivos e não discursivos, e as possíveis soluções estão inseridas nos registros monofuncionais discursivos.

Figura 81 – Semelhança no ENEM / OBMEP L4



ENEM e OBMEP

Anote no caderno

66. (ENEM-MEC) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.

Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) 1 m
b) 2 m
c) 2,4 m
d) 3 m
e) $2\sqrt{6}$ m

67. (OBMEP) Os seis triângulos da figura são retângulos e seus ângulos com vértice no ponto **A** são iguais. Além disso, AB = 24 cm e AC = 54 cm. Qual é o comprimento de AD?

a) 30 cm
b) 34 cm
c) 36 cm
d) 38 cm
e) 39 cm

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 167, 168, e 169)

Concluído a fase da descrição do conteúdo apresentaremos dados coletados, de acordo com os critérios já estabelecidos na elaboração das fichas.

Assim, poderemos evidenciar os aspectos que está pesquisa decidiu estudar, verificar se existe, ou não, uma diversidade na abordagem no ensino de figuras semelhantes, seguindo a ótica da teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval.

Conclusões L4

Com a descrição do conteúdo, com a coleta e apresentação dos dados colhidos pelas fichas, apresentaremos nossas interpretações a respeito da existência, de uma multiplicidade, ou não, nas abordagens para o ensino de figuras semelhantes, presente no livro didático, Matemática – Vontade de saber (L4), dos autores Joamir Souza e da Patrícia Moreno Pataro.

De acordo com os objetivos propostos na pesquisa, conforme o referencial teórico adotado e seguindo os critérios definidos na metodologia, indicaremos as páginas, dos textos introdutórios e das questões, referente ao subtema “Semelhança de figuras” do capítulo 8 intitulado de “Semelhança”, para confirmar e reforçar as interpretações obtidas na descrição do conteúdo e na coleta dos dados pelas fichas temáticas.

Os registros multifuncionais discursivos e não discursivos, assim como, os registros monofuncionais discursivos são predominantes. Essa predominância ocorrer nas enunciações conceituais, na definição das condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, nos comandos das questões para determinar as medidas correspondentes. São registros indicados pelas representações semióticas da escrita da língua natural alfabética, pelas ilustrações das formas geométricas planas, e pela escrita algébrica numérica. O Quadro 23 consta as páginas e as questões referente a temática abordada na 1º ficha. Os dados apresentados confirmam as impressões descritas acima.

Quadro 23 – Classificação dos tipos de registros presentes na obra L4

TEXTOS	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros multifuncionais	Páginas: 144; 145; 156; 157; 159; 160; 279; 280.	Páginas: 144; 156; 159; 160; 279; 280.
Registros monofuncionais	Páginas: 144; 145; 156; 157; 159; 160; 279; 280.	Páginas: AUSENTE.
QUESTÕES	Representação discursiva	Representação não discursiva

Registros multifuncionais	Página: 157, questões: 25; 26; 27. Página: 158, questões: 28; 29; 30; 31; 32. Página: 160, questões: 33; 34; 35; 36.	Página: 157, questões: 25; 26, 27. Página: 158, questões: 28; 31; 32. Página: 160, questões: 33; 34; 36.
Registros monofuncionais	Página: 157, questões: 25; 27. Página: 158, questões: 28; 30; 31; 32. Página: 160, questões: 33; 34; 35; 36.	Páginas: AUSENTE.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Os registros apresentados, presentes na obra L4, são similares a demais obras, L1, L2, L3, porém, é possível destacar que o livro L4 apresentou uma representação semiótica, um tratamento, que ainda não havia sido evidenciada para ensino de figuras semelhantes nos outros livros. O livro didático Vontade de saber propõe o ensino da homotetia não apenas como os materiais convencionais, régua e compasso, mas, introduz o docente a um ambiente informatizado. Os autores, descrevem e demostram, como construir figuras semelhantes, usando os procedimentos da homotetia, mas, com auxílio do software geométrico, o “*Geogebra*”.

O software geométrico “*Geogebra*” é outra representação semiótica que propicia uma otimização o processo de ensino das figuras semelhantes. O livro didático L4, diferente dos outros materiais analisados e descritos, apresenta um meio informatizado que aborda o ensino de figuras semelhantes.

Este ambiente tecnológico apresenta, ao docente, segundo o referencial teórico adotado esta pesquisa, registros multifuncionais discursivos e não discursivo. Entretanto há ferramentas, no programa “*Geogebra*”, que se enquadram nos registros monofuncionais discursivos, ferramentas que podem mensurar as medidas dos lados correspondentes, ferramentas que determinam os perímetros e as áreas das formas geométricas produzidas. O Quadro 24 destaca as páginas e as questões envolvendo a temática presente na 2º ficha, permitindo válida nossas impressões.

Quadro 24 – Registro de materiais concretos presentes na obra L4

TEXTOS	Régua e compasso.	Software geométrico.
	Páginas: 159; 160	Páginas: 279; 280.
QUESTÕES	Régua e compasso.	Software geométrico.

	Páginas: 157, questão 26 Página: 160, questões: 33; 34; 35; 36.	Páginas: 279; 280.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

É importante apresentar aos docentes uma diversidade de registros, a fim de proporcionar diferentes tratamentos para um mesmo objeto matemático, assim, o docente terá acesso a um ensino construtivo e significativo, facilitando a transição do conceito geométrico para escrita algébrica. A obra L4, apresenta ao docente, duas abordagens para realizar reproduções, ampliações e reduções de forma geométricas semelhantes, porém, os autores não utilizam o potencial dessas representações para construir um ensino significativo. Visto que tais abordagens que podem auxiliar o entendimento da relação de proporcionalidade para a razão de semelhança com o quociente entre perímetros, com o quociente entre áreas e com o quociente entre volumes, de figuras semelhantes, não são utilizadas.

Considero que os autores não exploraram o potencial desses registros, pois, a obra não apresenta enunciações relacionado a constante de proporcionalidade com os perímetros, áreas e volumes, de formas geométricas semelhantes. Porém, o software "Geogebra" possui ferramentas que propicia o processo de investigação e experimentação que podem auxiliam a dedução da relação de proporcionalidade para a razão de semelhança com o quociente entre perímetros ou com o quociente entre áreas ou com o quociente entre volumes de figuras semelhantes. O Quadro 25 exibe a coleta das páginas e das questões, segundo a temática da 3º ficha, e demostra que o ensino de figuras semelhantes nessa temática é incompleto.

Quadro 25 – Registro da proporcionalidade envolvendo perímetro, área e volume presente na obra L4

TEXTOS	Páginas: AUSENTE.
QUESTÕES	Páginas: 158, questão: 28; 30; 31; 32.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Referente a temática das alterações de registros, evidenciamos que nos textos e nas questões envolvendo o ensino de semelhança, na obra L4, as mudanças do tipo conversões predominam em relação as mudanças do tipo tratamento. As alterações das representações da língua natural alfabética para as representações da escrita algébrica numérica, assim como as alterações das representações geométricas figurais para as representações da escrita algébrica numérica são mais frequentes que as alterações que ficam no mesmo registro semiótico. O Quadro 26 expõem as páginas e as questões coletadas na 4º ficha, seguindo tal temática.

Quadro 26 – Classificação das alterações dos registros presentes na obra L4

TEXTOS	Tratamento.	Conversões.
	Páginas: 144; 145; 156; 157; 159; 160; 279; 280.	Páginas: 145; 156; 160.
QUESTÕES	Tratamento.	Conversões.
	Página 157, questões: 26. Página: 158, questões: 29. Página: 160, questões:35. Página: 168, questão: 63.	Página 157, questões: 25; 27. Página: 158, questões: 28; 30; 31; 32. Página: 160, questões: 33; 34; 36. Página: 167, questão: 56. Página: 168, questão: 57; 58; 59; 61; 62. Página: 169, questões 64; 65; 66; 67.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Apesar do livro didático, Matemática – Vontade de saber (L4), demostrar uma diversidade de registros para reproduzir, ampliar, e reduzir formas geométricas semelhantes, por meio da utilização de régua e compasso, ou pelo manuseio do software Geogebra, a ausência da relação envolvendo a razão de semelhança com o quociente entre perímetros, com o quociente entre áreas e com o quociente entre volumes, de figuras semelhantes, torna o ensino proposto pela obra incompleto.

Considero que, para os autores proporcionarem uma compressão efetiva e significativa no processo da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica, é necessário enunciar tais relações.

5.5 OBRA L5: MATEMÁTICA – CONVERGÊNCIA

O livro didático, Matemática – Convergência, do autor Eduardo Chavante, produzido pela editora SM, de 1ª Edição, no ano de 2015, está inserido no Guia de Livros Didáticos Ensino Fundamental Anos Finais (Brasil 2016), e de acordo com o

Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD). O autor organizou os conteúdos em unidades, tal que, as unidades são compostas por capítulos e cada capítulo é subdividido em Subtema.

Quadro 27 – Sumário do livro didático da obra L5

Unidades.	Capítulos.	Subtemas.
Unid. – 1.	Capítulo – 1 Radiciação.	1 – Relembrando radiciação; 2 – Potenciação com expoente fracionário; 3 – Propriedades das raízes; 4 – Operações com radicais.
	Capítulo – 2 Equações.	1 – Equação do 2º grau com uma incógnita; 2 – Resolvendo equações do 2º grau; 3 – Estudando as raízes de equações do 2º grau; 4 – Sistema de duas equações com duas incógnitas.
Unid. – 2.	Capítulo – 3 Proporção.	1 – Ampliação, redução e reprodução de figuras planas; 2 – Segmentos proporcionais; 3 – Polígonos semelhantes; 4 – Teorema de Tales;5 – Homotetia.
	Capítulo – 4 Relações no triângulo retângulo.	1 – Relações métricas no triângulo retângulo; 2 – Relações trigonométricas no triângulo retângulo.
Unid. – 3.	Capítulo – 5 Funções.	1 – Ideia de função; 2 – Função Representação gráfica de uma função; 3 – Função quadrática.
	Capítulo – 6 Matemática financeira.	1 – Porcentagem, acréscimo e desconto; 2 – Juro.
	Capítulo – 7 Pesquisa estatística.	1 – População e amostra; 2 – Distribuição de frequências; 3 – Intervalos de classes.
Unid. – 4.	Capítulo – 8 Medidas de energia e medidas de informática.	1 – Medidas de energia.
	Capítulo – 9 Figuras geométricas planas.	1 – Circunferência e círculo; 2 – Polígonos inscritos e polígonos circunscritos em uma circunferência.
	Capítulo – 10 Figuras geométricas espaciais.	1 – Áreas da superfície do prisma e do cilindro; 2 – Volume do prisma e do cilindro.

Fonte: Fonte: Elaborado pelo autor (2019) uma adaptação do sumário da obra Matemática – Convergência (2015, p. 6 e 7).

O livro didático Matemática Convergência é composto por 4 unidades, que são divididos em 10 capítulos, que por sua vez, os capítulos, são subdivididos em subtemas, assuntos explorados que compõem a temática de cada um dos capítulos. A sequência didática da obra apresenta seções, não ordenadas, intituladas por: “Abertura do capítulo”; “Ampliando fronteiras”; “Verificando rota”; “Valores em ação”; “Vamos relembrar”; “Atividades”; “Conectando ideias”; “Ação e construção”; “Ferramentas”.

Realizaremos a descrição analítica, de acordo com os critérios estabelecidos e elaborados na metodologia, dos subtemas: “Ampliação, redução e reprodução de figuras planas”; “Polígonos semelhantes”. Tais subtemas estão inseridos no capítulo 3 “Proporção” que por sua vez compõem a unidade 2 da obra Matemática Convergência. Verificaremos se a obra L5 apresenta, ou não, uma diversidade nos tratamentos para o ensino de figuras semelhantes, sobre a ótica da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, a fim de averiguar se abordagens propostas favorecem aos, docentes, uma compreensão construtiva na transição do conceito geométrico para a escrita algébrico para o ensino de figuras semelhantes.

Descrição do conteúdo L5

Inicialmente o autor exploram, na seção “Abertura do capítulo”, a reprodução de objetos, a partir de imagens digitas, mencionando a funcionalidade da impressora 3D. Em sequência enuncia a ideia de ampliação e redução, por meio de questionamentos, referente ao texto de abertura do capítulo.

> Atualmente, existem diversas tecnologias que permitem a confecção de objetos tridimensionais a partir de modelos digitais. Muitas delas mostram as potencialidades da impressora 3D.
> Além das impressoras 3D comuns, que podem ser utilizadas em casa, há também impressoras capazes de moldar substâncias comestíveis ou de construir objetos grandes, como a carcaça de um automóvel ou peças para construir uma edificação. (CHAVANTE, 2015, p. 58)

> Ao imprimir um objeto um uma impressora 3D, dependendo das limitações do aparelho, pode-se realizar a impressão em tamanho maior ou menor que o original.
> A produção de um objeto em tamanho menor que o original está relacionada à ideia de ampliação ou redução? E a produção de um objeto em tamanho maior que original? (CHAVANTE, 2015, p. 59)

Ainda na “Abertura do capítulo” se apresenta uma sequência de figuras planas e exibe outras duas formas geométricas desenhadas em uma malha quadriculada, que pode ser constatado na Figura 82. A fim de construir as condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, explorando a proporcionalidades entre as dimensões correspondentes e a congruência entre os ângulos correspondentes.

Seguindo nossa descrição analítica, de acordo com o referencial teórico adotado, evidenciamos registros multifuncionais discursivos e não discursivos, bem como, registros monofuncionais discursivos, presentes na introdução promovida pelo livro didático L5. Afinal, para enunciar a “Abertura do capítulo” são usadas representações semióticas da língua natural alfabética, acompanhadas de formas geométricas planas, e para argumentar os questionamentos levantados nas enunciações, se utilizar a escrita algébrica numérica. Importante ressaltar que os autores ainda não introduziram na representação semiótica da língua natural alfabética o termo, semelhança de figuras, no contexto abordado.

Figura 82 – Enunciação malha quadriculada L5

Figuras em sequência

Observe a sequência de figuras.

- O que as figuras dessa sequência têm em comum? Possíveis respostas: a forma; as medidas dos ângulos internos.
- Construa no caderno a próxima figura da sequência de acordo com o padrão que você pôde observar, utilizando régua e transferidor. Veja a resposta deste item no Manual do Professor.

Relação entre as figuras

Observe uma figura reproduzida em duas malhas quadriculadas com diferentes tamanhos.

Sabendo que a figura reproduzida na malha menor tem 1,6 cm de altura, qual é a altura da figura reproduzida na malha maior? 3,2 cm

Fonte: Chavante (2015, p. 59)

Na página seguinte, Chavante (2015), continua abordando as ideias de ampliação, redução e reprodução de figuras planas. O livro apresenta uma fotografia original e em sequência exibe três outras fotografias que representam, uma ampliação, uma reprodução e uma redução, da fotografia original. De acordo com o autor, uma foto será uma ampliação de uma outra fotográfica original se manter a proporcionalidade entre suas dimensões, já para uma foto ser reprodução de uma outra fotografia original, deve se manter as mesmas dimensões, e por fim, para uma foto ser redução de uma outra fotografia original, deve manter a proporcionalidade entre suas dimensões.

A Figura 83, exibe a temática dada para as ampliações, reproduções e reduções, mas também apresenta ao, docente, uma forma de realizar ampliações, reproduções e reduções, por meio da malha quadriculada.

Figura 83 – Enunciação contextual fotografia L5

Observe a imagem ao lado, em que Fabiane foi fotografada dias antes de sua festa de aniversário de 15 anos.

Para compor parte da decoração da festa, a mãe de Fabiane pediu que fossem realizadas algumas cópias dessa fotografia.

Essa fotografia é uma **ampliação** da fotografia original, pois ela foi reproduzida em tamanho maior que o da fotografia original, mantendo suas dimensões proporcionais.

Essa fotografia é uma **reprodução** da fotografia original, pois ela foi reproduzida com o mesmo tamanho, isto é, com as mesmas dimensões, da fotografia original.

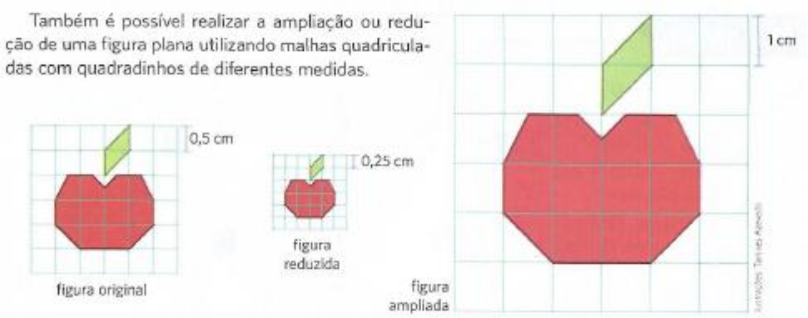
Essa fotografia é uma **redução** da fotografia original, pois ela foi reproduzida em tamanho menor que o da fotografia original, mantendo suas dimensões proporcionais.

A ampliação, redução ou reprodução de uma figura plana também pode ser realizada em uma malha quadriculada.

Fonte: Chavante (2015, p. 59)

A Figura 84, apresenta, como o livro L5, continua focando as ampliações e as reduções por meio das malhas quadriculadas. A obra aborda as razões das dimensões de uma figura original para as dimensões de uma ampliação e para as dimensões uma redução, expostas em malhas quadriculadas, tal que, as dimensões de cada quadrado, presente nas três malhas distintas, são diferentes.

Figura 84 – Enunciação malha quadriculada L5



Também é possível realizar a ampliação ou redução de uma figura plana utilizando malhas quadriculadas com quadradinhos de diferentes medidas.

Fonte: Chavante (2015, p. 61)

O autor, enuncia o significado dessas razões evidenciando a proporcionalidade entre os segmentos correspondentes:

> Observe as figuras apresentadas acima, podemos verificar que na figura original o lado de cada quadrinho da malha mede 0,5 cm e, na figura ampliada, 1 cm, ou seja, o dobro da medida do lado do quadradinho da figura original. Consequentemente, a medida de qualquer segmento de reta no contorno da figura ampliada correspondente ao dobro da medida do segmento de reta correspondente no contorno da figura original. Assim, dizemos que a figura ampliada está na razão 2:1 em relação à figura original, ou seja, 2 cm na figura ampliada corresponde a 1 cm na figura original:
>
> $$2:1=\frac{2\leftarrow\text{medida ampliada}}{1\leftarrow\text{medida original}}$$
>
> Também é possível verificar que na figura reduzida o lado de cada quadradinho da malha mede 0,25 cm, ou seja, metade da medida do lado do quadradinho da malha original. Assim, dizemos que a figura reduzida está na razão 1:2 em relação à figura original, ou seja, 1 cm na figura reduzida correspondente a 2cm na figura original:
>
> $$1:2=\frac{1\leftarrow\text{medida reduzida}}{2\leftarrow\text{medida original}}$$ (CHAVANTE, 2015, p. 61)

Consideremos que essa significação da proporcionalidade entre os segmentos correspondentes é importantíssima para o ensino de figuras semelhantes. O entendimento dessa proporcionalidade possibilita o aluno a construir outros conceitos, como a relação entre a razão das medidas dos lados correspondentes para a razão entre os perímetros das figuras semelhantes, bem como, a relação entre a razão das medidas dos lados correspondentes para a razão entre as áreas das figuras semelhantes, e por fim, possibilita o docente relacionar a razão das medidas dos lados correspondentes para a razão entre os volumes das figuras geométricas semelhantes.

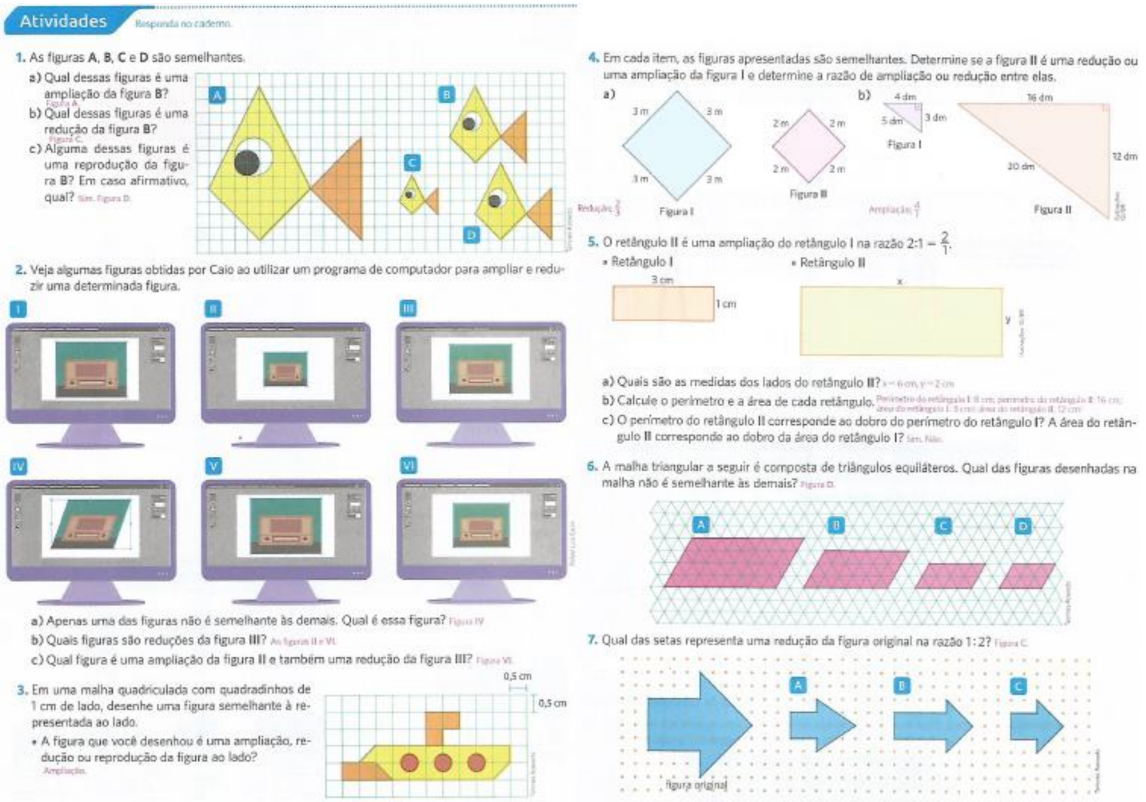
Após enunciar a proporcionalidade entre os segmentos correspondentes Chavante (2015) introduz o termo figuras semelhantes definindo que “Se uma figura plana é ampliação, redução ou reprodução de outra figura plana, dizemos que essas figuras são semelhantes”.

O livro didático L5, de forma particular, tem alguns aspectos que precisam ser destacados. A malha quadriculada é um tratamento frequente na obra, é uma metodologia recorrente para realizar ampliações, reproduções e reduções de formas geométricas planas. Sabendo da importância de apresentar diversos registros, representações semióticas, para consolidar o processo de ensino de figuras semelhantes, compreendo, há necessário de apresentar outros métodos para ampliar, reproduzir e reduzir, aos docentes.

A homotetia é uma metodologia que deve ser conectada ao ensino de figuras semelhantes, visto que é uma ferramenta que apresenta, aos docentes, informações que favorecem a otimização na compreensão do processo de transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica no ensino de figuras semelhantes. O ensino da homotetia deve ser inserido, conectado aos enunciados conceituais sobre o ensino de figuras semelhantes, explorando os procedimentos da homotetia como abordagens para reproduzir, ampliar ou reduzir formas e figuras planas.

Concluindo a introdução conceitual, sobre o ensino de semelhança de figuras, associado a reproduções, ampliações e reduções de formas geométricas, a obra promove uma seção de “Atividades”. De acordo com a Figura 85, podemos verificar que as questões têm como foco averiguar se os conceitos iniciais foram assimilados, pois, as questões continuam focado nas reproduções, ampliações e reduções de figuras planas, bem como, nas proporcionalidades entre os segmentos correspondentes. Assim, conforme o referencial teórico, podemos afirmar as representações semióticas, abordadas nessa seção, estão inseridas nos registros multifuncionais discursivos e não discursivos, tal como, nos registros monofuncionais discursivos, visto que as representações são indicadas pela língua natural alfabética, por figuras planas e pela escrita algébrica numérica.

Figura 85 – Atividades L5



Atividades Responda no caderno.

1. As figuras **A**, **B**, **C** e **D** são semelhantes.
   a) Qual dessas figuras é uma ampliação da figura **B**? Figura A.
   b) Qual dessas figuras é uma redução da figura **B**? Figura C.
   c) Alguma dessas figuras é uma reprodução da figura **B**? Em caso afirmativo, qual? Sim. Figura D.

2. Veja algumas figuras obtidas por Caio ao utilizar um programa de computador para ampliar e reduzir uma determinada figura.
   a) Apenas uma das figuras não é semelhante às demais. Qual é essa figura? Figura IV.
   b) Quais figuras são reduções da figura **III**? As figuras II e VI.
   c) Qual figura é uma ampliação da figura **II** e também uma redução da figura **III**? Figura VI.

3. Em uma malha quadriculada com quadradinhos de 1 cm de lado, desenhe uma figura semelhante à representada ao lado.
   - A figura que você desenhou é uma ampliação, redução ou reprodução da figura ao lado? Ampliação.

4. Em cada item, as figuras apresentadas são semelhantes. Determine se a figura **II** é uma redução ou uma ampliação da figura **I** e determine a razão de ampliação ou redução entre elas.
   a) Redução: $\frac{2}{3}$
   b) Ampliação: $\frac{4}{1}$

5. O retângulo **II** é uma ampliação do retângulo **I** na razão $2:1 = \frac{2}{1}$.
   - Retângulo I
   - Retângulo II
   a) Quais são as medidas dos lados do retângulo **II**? x = 6 cm, y = 2 cm
   b) Calcule o perímetro e a área de cada retângulo. Perímetro do retângulo I: 8 cm; perímetro do retângulo II: 16 cm; área do retângulo I: 3 cm²; área do retângulo II: 12 cm²
   c) O perímetro do retângulo **II** corresponde ao dobro do perímetro do retângulo **I**? A área do retângulo **II** corresponde ao dobro da área do retângulo **I**? Sim. Não.

6. A malha triangular a seguir é composta de triângulos equiláteros. Qual das figuras desenhadas na malha não é semelhante às demais? Figura D.

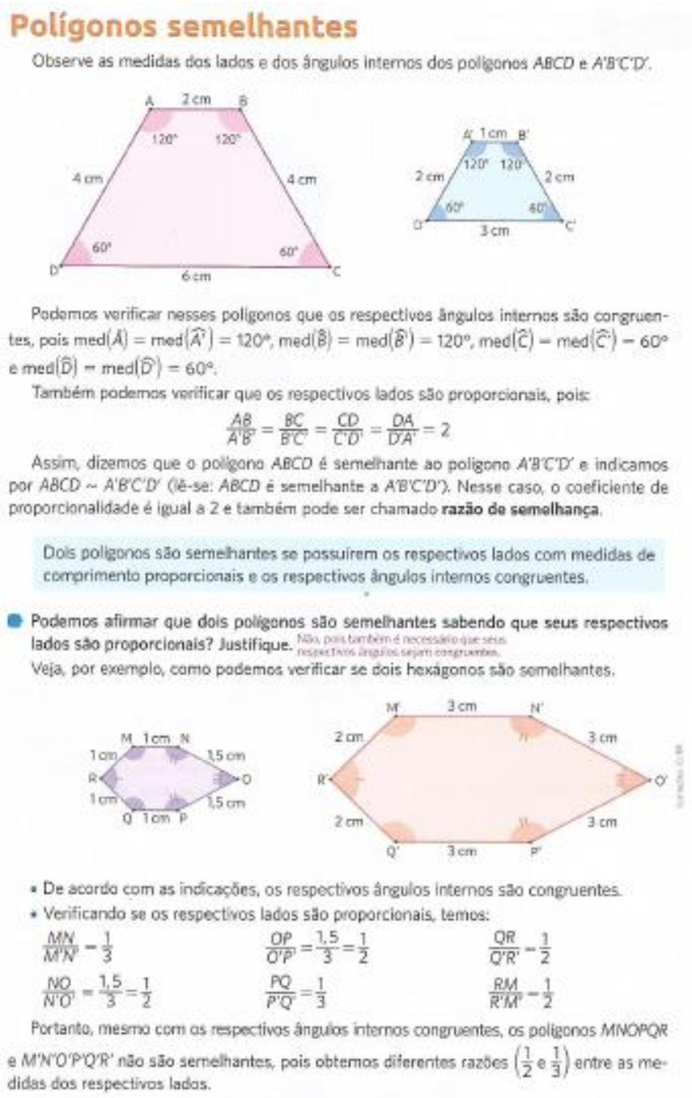
7. Qual das setas representa uma redução da figura original na razão 1 : 2? Figura C.

Fonte: Chavante (2015, p. 62 e 63)

Ainda no capítulo 3 intitulado de “Proporção”, no subtema “Polígonos semelhantes” o livro inicia a temática realizando comparações entre as medidas dos lados e entre as medidas dos ângulos internos de dois polígonos e de dois quadriláteros, ABCD e *A’B’C’D’*. Enunciando as condições para duas ou mais figura serem ditas semelhantes, por representações da língua natural alfabética, analisando as medidas métricas de formas geométricas por observações de figuras planas, destacando a congruência dos ângulos respectivos e a proporcionalidade entre os lados respectivos pela escrita algébrica numérica, podemos afirmar que os registros usados são os multifuncionais discursivos e não discursivos e os monofuncionais discursivos.

Na Figura 86 é possível constatar tais afirmações descritas acima, mas, também é perceptível o tratamento dado pelo livro didático referente a condição necessária e suficiente para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes.

Figura 86 – Polígonos semelhantes L5



Polígonos semelhantes

Observe as medidas dos lados e dos ângulos internos dos polígonos *ABCD* e *A'B'C'D'*.

Podemos verificar nesses polígonos que os respectivos ângulos internos são congruentes, pois $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{A'}) = 120°$, $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{B'}) = 120°$, $\text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{C'}) = 60°$ e $\text{med}(\hat{D}) = \text{med}(\hat{D'}) = 60°$.

Também podemos verificar que os respectivos lados são proporcionais, pois:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = 2$$

Assim, dizemos que o polígono *ABCD* é semelhante ao polígono *A'B'C'D'* e indicamos por *ABCD* ~ *A'B'C'D'* (lê-se: *ABCD* é semelhante a *A'B'C'D'*). Nesse caso, o coeficiente de proporcionalidade é igual a 2 e também pode ser chamado **razão de semelhança**.

Dois polígonos são semelhantes se possuírem os respectivos lados com medidas de comprimento proporcionais e os respectivos ângulos internos congruentes.

- **Podemos afirmar que dois polígonos são semelhantes sabendo que seus respectivos lados são proporcionais? Justifique.** Não, pois também é necessário que seus respectivos ângulos sejam congruentes.

Veja, por exemplo, como podemos verificar se dois hexágonos são semelhantes.

- De acordo com as indicações, os respectivos ângulos internos são congruentes.
- Verificando se os respectivos lados são proporcionais, temos:

$\frac{MN}{M'N'} = \frac{1}{3}$ $\quad\frac{OP}{O'P'} = \frac{1,5}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad\frac{QR}{Q'R'} = \frac{1}{2}$

$\frac{NO}{N'O'} = \frac{1,5}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{1}{3}$ $\quad\frac{RM}{R'M'} = \frac{1}{2}$

Portanto, mesmo com os respectivos ângulos internos congruentes, os polígonos *MNOPQR* e *M'N'O'P'Q'R'* não são semelhantes, pois obtemos diferentes razões $\left(\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{3}\right)$ entre as medidas dos respectivos lados.

Fonte: Chavante (2015, p. 65)

Ainda sobre as representações presentes na Figura 86 podemos destacar que para o autor:

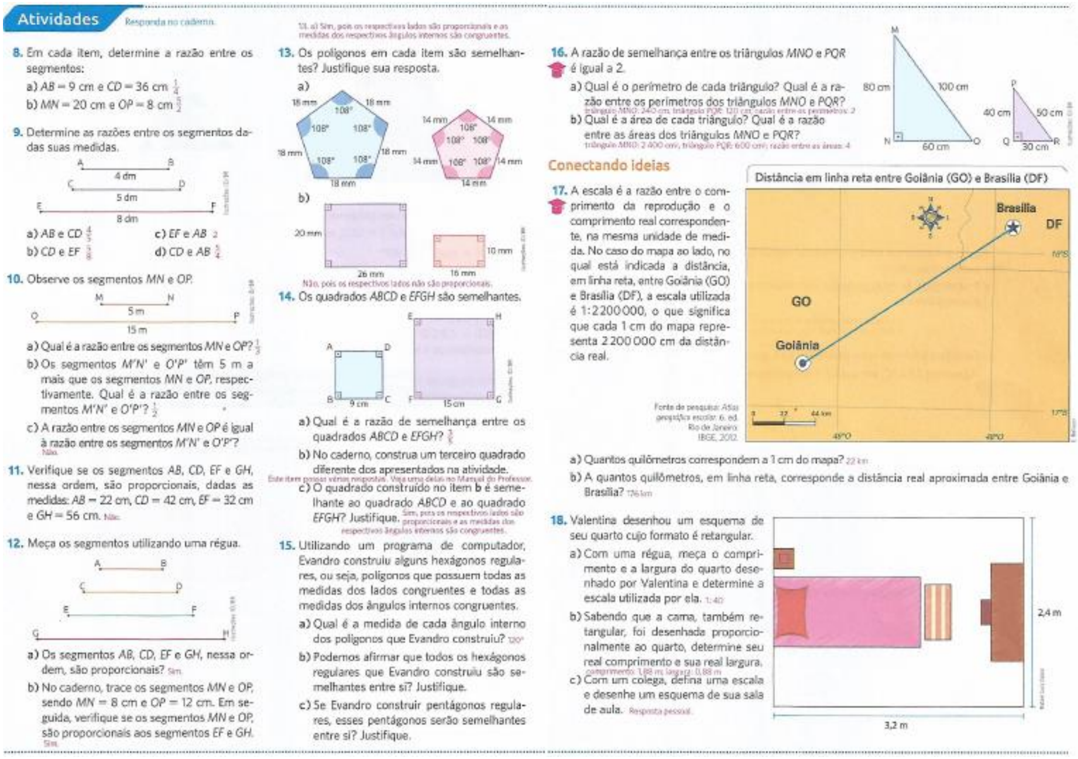
> "Dois polígonos são semelhantes se possuírem os respectivos lados com medidas de comprimento proporcionais e os respectivos ângulos internos congruentes" (CHAVANTE, 2015, p. 65)

Chavante (2015) ressalta que se apenas uma das condições forem confirmadas não é possível classificar as formas geométricas planas como figuras semelhantes. Os lados respectivos devem ser proporcionais e simultaneamente os ângulos respectivos devem ser congruentes, para só assim os polígonos serem classificados com figuras semelhantes.

Um aspecto que já foi mencionado em todas as obras analisadas, na fase descrição de conteúdo, foi a ausência de meios, ou métodos, de como identificar os lados correspondentes e os ângulos correspondentes das formas geométricas semelhantes. Nesta descrição específica, da obra L5, também constatamos a ausência de como indicar, ao docente, quais são os lados respectivos e quais são os ângulos respectivos das figuras semelhantes.

Após a apresentação das enunciações conceituais e dos tratamentos dados ao subtema “Polígonos semelhantes” o autor do livro didático Matemática Convergências propõe outra seção de “Atividades”. Nessa seção, que está exibida na Figura 87, consta situações, problemas que envolve as condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, exercícios que exploram a determinação de medidas por meio da proporcionalidade entre as medidas métricas dos lados respectivos e pela congruência dos ângulos respectivos. Ainda sobre a seção “Atividade”, há uma outra seção temática, “Conectando ideias”. Tal seção associa a razão escala com a razão de semelhança entre figuras semelhantes.

Figura 87 – Atividades L5



Atividades Responda no caderno.

8. Em cada item, determine a razão entre os segmentos:
a) $AB = 9$ cm e $CD = 36$ cm $\frac{1}{4}$
b) $MN = 20$ cm e $OP = 8$ cm $\frac{5}{2}$

9. Determine as razões entre os segmentos dadas suas medidas.

a) AB e CD $\frac{4}{5}$
b) CD e EF $\frac{5}{8}$
c) EF e AB 2
d) CD e AB $\frac{5}{4}$

10. Observe os segmentos MN e OP.

a) Qual é a razão entre os segmentos MN e OP? $\frac{1}{3}$
b) Os segmentos $M'N'$ e $O'P'$ têm 5 m a mais que os segmentos MN e OP, respectivamente. Qual é a razão entre os segmentos $M'N'$ e $O'P'$? $\frac{1}{2}$
c) A razão entre os segmentos MN e OP é igual à razão entre os segmentos $M'N'$ e $O'P'$? Não.

11. Verifique se os segmentos AB, CD, EF e GH, nessa ordem, são proporcionais, dadas as medidas: $AB = 22$ cm, $CD = 42$ cm, $EF = 32$ cm e $GH = 56$ cm. Não.

12. Meça os segmentos utilizando uma régua.

a) Os segmentos AB, CD, EF e GH, nessa ordem, são proporcionais? Sim.
b) No caderno, trace os segmentos MN e OP, sendo $MN = 8$ cm e $OP = 12$ cm. Em seguida, verifique se os segmentos MN e OP, são proporcionais aos segmentos EF e GH. Sim.

13. a) Sim, pois os respectivos lados são proporcionais e as medidas dos respectivos ângulos internos são congruentes.

13. Os polígonos em cada item são semelhantes? Justifique sua resposta.

a)

b)

Não, pois os respectivos lados não são proporcionais.

14. Os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ são semelhantes.

a) Qual é a razão de semelhança entre os quadrados $ABCD$ e $EFGH$? $\frac{3}{5}$
b) No caderno, construa um terceiro quadrado diferente dos apresentados na atividade.
Este item possui várias respostas. Veja uma delas no Manual do Professor.
c) O quadrado construído no item **b** é semelhante ao quadrado $ABCD$ e ao quadrado $EFGH$? Justifique. Sim, pois os respectivos lados são proporcionais e as medidas dos respectivos ângulos internos são congruentes.

15. Utilizando um programa de computador, Evandro construiu alguns hexágonos regulares, ou seja, polígonos que possuem todas as medidas dos lados congruentes e todas as medidas dos ângulos internos congruentes.
a) Qual é a medida de cada ângulo interno dos polígonos que Evandro construiu? 120°
b) Podemos afirmar que todos os hexágonos regulares que Evandro construiu são semelhantes entre si? Justifique.
c) Se Evandro construir pentágonos regulares, esses pentágonos serão semelhantes entre si? Justifique.

16. A razão de semelhança entre os triângulos MNO e PQR é igual a 2.
a) Qual é o perímetro de cada triângulo? Qual é a razão entre os perímetros dos triângulos MNO e PQR?
triângulo MNO: 240 cm; triângulo PQR: 120 cm; razão entre os perímetros: 2
b) Qual é a área de cada triângulo? Qual é a razão entre as áreas dos triângulos MNO e PQR?
triângulo MNO: 2 400 cm²; triângulo PQR: 600 cm²; razão entre as áreas: 4

Conectando ideias

17. A escala é a razão entre o comprimento da reprodução e o comprimento real correspondente, na mesma unidade de medida. No caso do mapa ao lado, no qual está indicada a distância, em linha reta, entre Goiânia (GO) e Brasília (DF), a escala utilizada é 1:2200000, o que significa que cada 1 cm do mapa representa 2 200 000 cm da distância real.

Distância em linha reta entre Goiânia (GO) e Brasília (DF)

Fonte de pesquisa: Atlas geográfico escolar. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

a) Quantos quilômetros correspondem a 1 cm do mapa? 22 km
b) A quantos quilômetros, em linha reta, corresponde a distância real aproximada entre Goiânia e Brasília? 176 km

18. Valentina desenhou um esquema de seu quarto cujo formato é retangular.
a) Com uma régua, meça o comprimento e a largura do quarto desenhado por Valentina e determine a escala utilizada por ela. 1:40
b) Sabendo que a cama, também retangular, foi desenhada proporcionalmente ao quarto, determine seu real comprimento e sua real largura.
comprimento: 1,88 m; largura: 0,88 m
c) Com um colega, defina uma escala e desenhe um esquema de sua sala de aula. Resposta pessoal.

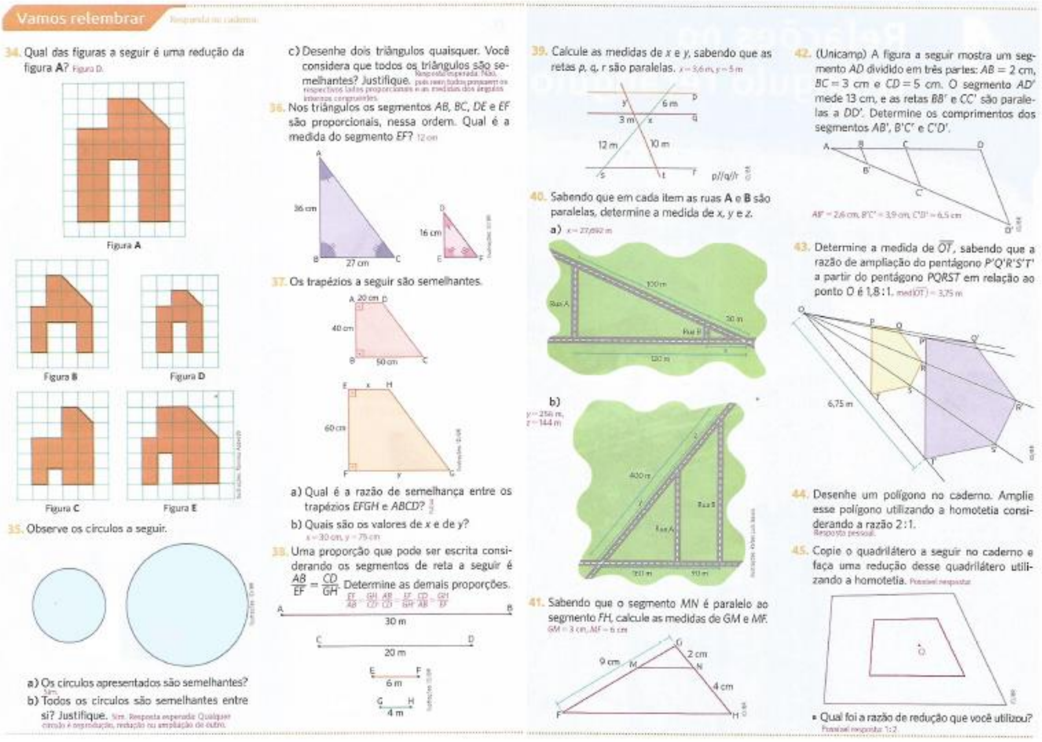
Fonte: Chavante (2015, p. 66 e 67)

As representações semióticas presentes as enunciações das questões da seção “Atividade”, exibido na Figura 87, estão inseridos nos registros multifuncionais discursivos e não discursivos, pois, são indicados pela língua natural alfabética, acompanhadas por formas geométricas planas. Já as possíveis soluções das atividades, tanto são, representações da língua natural alfabética, quanto são, representações da escrita algébrica numérica, assim, as soluções dos exercícios propostos na seção "Atividades" estão inseridas nos registros multifuncionais discursivo e monofuncionais discursivos.

Na seção "Vamos relembrar", é outra seção que apresenta um conjunto de exercícios, a fim de concretizar e retomar as conceitualizações enunciadas no capítulo 3, intitulado "Proporção". Assim, nessa seção estão atividades que envolvem os assuntos abordados nos subtemas: "Ampliação, redução e reprodução de figuras planas; Segmentos proporcionais; Polígonos semelhantes; Teorema de Tales; Homotetia.

A Figura 88 expõem atividades representadas pelos registros multifuncionais e monofuncionais. As enunciações e as possíveis soluções das questões são exibidas pelas representações semióticas da língua natural alfabética, pela exposição de formas geométricas planas e pela escrita algébricas numéricas.

Figura 88 – Atividades L5



Vamos relembrar Responda no caderno.

34. Qual das figuras a seguir é uma redução da figura A? Figura D.

35. Observe os círculos a seguir.

a) Os círculos apresentados são semelhantes? Sim.

b) Todos os círculos são semelhantes entre si? Justifique. Sim. Resposta esperada: Qualquer círculo é reprodução, redução ou ampliação de outro.

c) Desenhe dois triângulos quaisquer. Você considera que todos os triângulos são semelhantes? Justifique. Resposta esperada: Não, pois nem todos possuem os respectivos lados proporcionais e as medidas dos ângulos internos congruentes.

36. Nos triângulos os segmentos AB, BC, DE e EF são proporcionais, nessa ordem. Qual é a medida do segmento EF? 12 cm

37. Os trapézios a seguir são semelhantes.

a) Qual é a razão de semelhança entre os trapézios $EFGH$ e $ABCD$? $\frac{3}{2}$

b) Quais são os valores de x e de y? $x = 30$ cm, $y = 75$ cm

38. Uma proporção que pode ser escrita considerando os segmentos de reta a seguir é $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{GH}$. Determine as demais proporções. $\frac{EF}{AB} = \frac{GH}{CD}$; $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$; $\frac{CD}{AB} = \frac{GH}{EF}$

39. Calcule as medidas de x e y, sabendo que as retas p, q, r são paralelas. $x = 3{,}6$ m, $y = 5$ m

40. Sabendo que em cada item as ruas **A** e **B** são paralelas, determine a medida de x, y e z.

a) $x = 27{,}692$ m

b) $y = 256$ m, $z = 144$ m

41. Sabendo que o segmento MN é paralelo ao segmento FH, calcule as medidas de GM e MF. $GM = 3$ cm, $MF = 6$ cm

42. (Unicamp) A figura a seguir mostra um segmento AD dividido em três partes: $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm e $CD = 5$ cm. O segmento AD' mede 13 cm, e as retas BB' e CC' são paralelas a DD'. Determine os comprimentos dos segmentos AB', $B'C'$ e $C'D'$.

$AB' = 2{,}6$ cm, $B'C' = 3{,}9$ cm, $C'D' = 6{,}5$ cm

43. Determine a medida de $\overline{OT}$, sabendo que a razão de ampliação do pentágono $P'Q'R'S'T'$ a partir do pentágono $PQRST$ em relação ao ponto O é 1,8 : 1. med($\overline{OT}$) = 3,75 m

44. Desenhe um polígono no caderno. Amplie esse polígono utilizando a homotetia considerando a razão 2 : 1. Resposta pessoal.

45. Copie o quadrilátero a seguir no caderno e faça uma redução desse quadrilátero utilizando a homotetia. Possível resposta:

- Qual foi a razão de redução que você utilizou? Possível resposta: 1:2

Fonte: Chavante (2015, p. 66 e 67)

Sobre as questões exibidas na Figura 88 podemos afirmar que as questões 34, 35, 44, 45, são questões enunciadas com os registros multifuncionais discursivos e não discursivos. Para solucionar tais questões os alunos precisar expor suas conjecturas mentais usando o mesmo registro multifuncional discursivo e não discursivo, assim, tais questões envolve uma mudança de registro do tipo tratamento, pois, as alterações ficam inseridas no mesmo registro de representação semiótica.

A respeito das questões 36, 37, 40, 41, 42, 43, que estão inseridas no ensino de figuras semelhantes, podemos afirmar que são enunciadas pelas representações semióticas da língua natural alfabética e acompanhadas das representações figurais planas. Para solucionar tais questões os alunos precisar expressa suas conjecturas mentais pelas representações semióticas da escrita algébrica numérica. Dessa forma concluímos que se trata de uma mudança de registros do tipo conversões. Essas alterações caracterizam o processo de transição do conceito geométrico para escrita algébrica.

Finalizada a etapa da descrição do conteúdo seguiremos com a nossa análise exibindo os dados coletados, nas fichas, sobre as abordagens propostas nos textos conceituais e nos assuntos explorados nas questões envolvendo o ensino de figuras semelhantes. De acordo com os critérios adotados na metodologia e seguindo o referencial teórico, apresentaremos os dados, a fim de concretizar e concluir as interpretações assimiladas na etapa inicial da descrição. Dessa forma averiguando a existência, ou não, de uma multiplicidade de representações e registros que favoreçam o processo de transição do conceito geométrico para escrita algébrica no ensino da semelhança de figuras.

Conclusão L5

De acordo com os objetivos propostos na pesquisa, conforme o referencial teórico e seguindo os critérios definidos na metodologia, indicaremos as páginas, dos textos introdutórios e das questões, dos subtemas: “Ampliação, redução e reprodução de figuras planas” e “Polígonos semelhantes” do capítulo 3 “Proporção” do livro didático Matemática – Convergência (L5), do autor Eduardo Chavante. Sintetizaremos as informações coletadas pelas fichas, para comprovar as interpretações iniciais, formuladas no decorrer da descrição analítica, realizada na fase da descrição da obra, a fim de construir e concretizar, de formar conclusiva, as inferências sobre o ensino de figuras semelhantes.

Após a descrição do conteúdo apresentaremos no Quadro 28 as páginas dos contextos e das questões envolvendo os registros abordados para o ensino de figuras semelhantes. Tal como, as outras obras, o livro didático L5, apresenta uma predominância nos registros multifuncionais discursivos e não discursivos, assim como, há um predomínio nos registros monofuncionais discursivos. A partir das interpretações construídas na etapa da descrição do conteúdo e pela coleta de dados apurados nas fichas, conseguimos concluir que as representações semióticas, da língua natural alfabética, da exposição das formas geométricas e da escrita algébrica numérico, dominam as representações nas abordagens, tanto nos contextos introdutórios, quanto nos textos conceituais, e bem como, na elaboração das atividades que envolve o ensino de figuras semelhantes.

Quadro 28 – Classificação os tipos de registros presentes na obra L5

TEXTOS	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros multifuncionais	Páginas: 58; 59; 60; 61; 65.	Páginas: 59; 60; 61; 65.
Registros monofuncionais	Páginas: 59; 61; 65.	Páginas: AUSENTE.
QUESTÕES	Representação discursiva	Representação não discursiva
Registros multifuncionais	Página: 59, na abertura do capítulo. Página: 62, questões: 1; 2; 3. Página: 63, questões: 4; 5; 6; 7. Página 66, questões:13; 14; 15. Página 67, questões: 16; 17; 18. Página 78, questões: 34; 35; 36; 37. Página 79, questões: 40; 41; 42; 43; 44; 45.	Página: 59, na abertura do capítulo. Página: 62, questões: 1; 2; 3. Página: 63, questões: 4; 5; 6; 7. Página 66, questões: 13; 14. Página 67, questões: 16; 17; 18. Página 78, questões: 34; 35; 36; 37. Página 79, questões: 40; 41; 42; 43; 45.
Registros monofuncionais	Página: 63, questões: 4; 5. Página 66, questões: 14. Página 67, questões: 16; 17; 18. Página 78, questões: 36; 37. Página 79, questões: 40; 41; 42; 43; 44; 45.	Páginas: AUSENTE.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

A respeito de materiais concretos, constatamos a ausência de contextos, no ensino de semelhança, envolvendo o uso de régua e compasso, bem como, a inexistência do manuseio de software geométricos. A homotetia é abordada no livro didático, na página 72, porém, os procedimentos metodológicos da homotetia, para ampliar e reduzir, são enunciados como subtema do capítulo 3 “Proporção” e não há conexões com o ensino de figuras semelhantes. No decorrer da descrição do conteúdo da obra L5 é perceptível o uso frequência da malha quadriculada como metodologia para reproduzir, ampliar e reduzir forma geométricas semelhantes. Essa metodologia oportuniza aos docentes uma compreensão significativa para proporcionalidade entre os lados correspondentes, com tudo, essa didática não está presente no Quadro 29, pois, não se enquadra na temática da 2º ficha, afinal, não está de acordo com os aspectos definidos para nossa investigação.

Quadro 29 – Registro de materiais concretos presentes na obra L5

TEXTOS	Régua e compasso.	Software geométrico.
	AUSENTE.	AUSENTE.
QUESTÕES	Régua e compasso.	Software geométrico.
	Páginas: 79, questões: 44; 45.	AUSENTE.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Sobre as relações entre a constante de proporcionalidade para o quociente entre os perímetros, para o quociente entre as áreas e para quociente entre os volumes, das formas geométricas semelhantes, percebemos que não há contextos conceituais no livro L5. O quadro 30, apresenta registros agrupados pela 3º ficha, que aborda tal temática, porém, as abordagens propostas pela obra não podem ser consideradas suficiente para garantir a assimilação efetiva dessas relações. Diante de tal situação é valido afirmar que para resolver as questões envolvendo tais relações o aluno precisará recorrer a outro material didático ou ficará na dependência do professor enunciar as condições para deduzir e construir as relações entre a proporcionalidade dos lados correspondentes para perímetro, área, e volume, de formas geométricas semelhantes.

Quadro 30 – Registro da proporcionalidade envolvendo perímetro, área e volume presente na obra L5

TEXTOS	Páginas: AUSENTE.
QUESTÕES	Página: 63, questão: 5. Página: 67, questão: 16. Página: 63, questão: 5.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Durante a leitura analítica e a descrição do conteúdo, da obra L5, entendemos que há um equilíbrio a respeito das mudanças de registros. Tanto nos contextos introdutórios quanto nas questões envolvendo o ensino de semelhança, percebe-se que a alteração do tipo tratamento e a alteração do tipo conversões são mudanças frequentes que se apresentam, praticamente, com a mesma recorrência. O Quadro 31 exibe as páginas e questões agrupados pela 4º ficha que aborda a temática das alterações dos registros.

Quadro 31 – Classificação das alterações dos registros presentes na obra L5

TEXTOS	Tratamento.	Conversões.
	Páginas: 58; 59; 60; 61; 65.	Páginas: 59; 61; 65.
QUESTÕES	Tratamento.	Conversões.
	Página 59, na abertura do capítulo. Página: 62, questões: 1; 2; 3. Página: 63, questões: 5; 6; 7. Página: 66, questões: 13; 14; 15. Página: 78, questões: 34; 35. Página: 79, questões: 44; 45.	Página 63, questões: 4; 5. Página: 66, questão: 14. Página: 67, questões:16; 17; 18. Página: 78, questões: 36; 37. Página: 79, questões: 40; 41; 42; 43.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Perante as análises obtidas na fase da descrição do conteúdo construímos impressões, sobre o ensino de semelhança, e diante dos dados agrupados nas fichas temáticas podemos afirmar que livro didático Matemática – Convergência (L5) apresenta uma variedade de registros e representações. Mas, não podemos inferir que a obra apresenta uma multiplicidade de abordagens, para enunciar os conceitos e propriedades para o ensino de semelhança de figuras. Afinal, a obra não apresenta contextos ou atividades envolvendo materiais concretos, como, régua e compasso, não abordam o manuseio de softwares geométricos e não exploram as relações de proporcionalidade para perímetro, área e volume de forma geométricas semelhantes. Assim o livro L5 não proporciona uma diversidade de registros que propicia a compreensão da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica.

A diversidade de registros proporciona diferentes tratamentos para um mesmo objeto matemático. A multiplicidade de representações semióticas torna o ensino um processo enriquecedor e permite, ao docente, a possibilidade de construir suas próprias conjecturas conceituais. Para promover um ensino de figuras semelhantes significativo é necessário desenvolver uma variedade de abordagens que facilite a compreensão da transição do conceito geométrico para escrita algébrica. Assim, uma forma de tornar o ensino de figuras semelhantes significativo e eficiente é pela pluralidade de abordagens presentes nos livros didáticos.

5.6 ASPECTOS COMUNS E NÃO COMUNS

Além de verificar como a diversidade de representações semíticas são abordadas no ensino de semelhança de figuras, de acordo com os critérios definidos no referencial teórico e na metodologia da pesquisa, outros aspectos obtidos nas interpretações durante a análise instigaram este pesquisador. As sequências didáticas desenvolvidas em cada livro apresentam aspectos comuns e não comuns. Os aspectos que evidenciamos são as representações semióticas relacionadas ao ensino de figuras semelhantes. Tais aspectos são: as enunciações contextuais; os meios de reproduzir, ampliar e reduzir formas geométricas semelhantes; e a definição da razão de semelhança e suas consequências.

As enunciações contextuais e iniciais estão relacionadas aos contextos introdutórios sobre o ensino de semelhança de figuras. Para enunciar o conceito a obra L1 associa figuras semelhantes a reproduções fotográficas. Comentando que uma foto é, redução ou ampliação, de uma outra foto original caso mantenha a proporcionalidade entre suas dimensões correspondentes. As obras L2 e L5 realizam a mesma associação.

Outra enunciação que é frequente é a associação de figuras semelhantes a mapas cartográficos desenhados em escalas distintas. Essa situação, exibe uma certa localidade com tamanhos diferenciados mantendo a mesma forma geométrica e a proporcionalidade entre suas dimensões correspondentes. Essa abordagem é evidenciada e constatada nas obras L1, L3, L4.

A comparação entre figuras semelhantes às miniaturas, é mais uma enunciação recorrente presentes nas obras L1, L2, L4. Para um objeto ser miniatura de outro original, é necessário ter a mesma forma geométrica e manter a proporcionalidade entre suas dimensões correspondentes.

As temáticas abordadas nas enunciações citadas acima são aspectos comuns no ensino de figuras semelhantes, porém, há outras abordagens iniciais, não comuns, que associam figuras semelhantes a: maquetes; a resolução das imagens exibidas nas TVs; e a impressão de objetos em 3D, a partir de, imagens virtuais. Essas enunciações são exploradas respectivamente nas obras L2, L3 e L5.

Segue abaixo um quadro que sintetiza os aspectos comuns e não comuns entre os livros didáticos analisados, referente as enunciações contextuais evidenciadas neste estudo.

Quadro 32 – Aspectos comuns e não comuns nas enunciações contextuais

OBRAS	Fotografia	Mapas	Maquetes	Miniaturas	Impressões em 3D	Imagens de TVs
L1	▨	▨		▨		
L2	▨		▨	▨		
L3		▨				▨
L4		▨		▨		
L5	▨				▨	

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Os meios para realizar a reprodução, a ampliação e a redução, de formas geométricas semelhantes, é outro aspecto comum e não comum, presentes nas cinco obras selecionadas e analisadas. A malha quadriculada é uma representação semiótica multifuncional não discursiva que auxilia o docente a compreensão da necessidade da manutenção das proporcionalidades entre as medidas dos lados correspondentes, quando, se realiza ampliações ou reduções. Essa representação semiótica é um aspecto comum nas obras L1, L2 e L5.

A manipulação de materiais concretos como: régua; compasso; e transferidor, é um aspecto frequente, comum, para realizar reproduções, ampliações e reduções de formas geométricas semelhantes. Mas, nas obras, essa metodologia não é um meio usual que auxilia a construção ou concretização da conceitualização das condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, no ensino de semelhanças de figuras.

É importante ressaltar, que as obras apresentam em suas sequências didáticas, os procedimentos metodológicos da homotetia, consequentemente o uso de materiais concretos como: régua, compasso, e transferidor, para realizar reproduções, ampliações e reduções de formas geométricas semelhantes. Porém, a homotetia, não está inserida diretamente na temática das reproduções, ampliações e reduções de forma geométrica semelhantes, no ensino de figuras semelhantes, visto que os autores abordam a homotetia sem relacionar com a construção da conceitualização das condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes.

A afirmação acima já foi descrita e comentada na etapa da conclusão da obra L2 e na etapa da descrição do conteúdo da obra L4. Na oportunidade relatei que as autoras deixam de usar uma representação semiótica que contribuiria significativamente no processo de transição do conceito geométrico para a escrita dos algoritmos algébricos da congruência e da proporcionalidade no ensino de figuras semelhantes. Visto que a homotetia associada a construção da conceitualização das condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, no ensino de semelhança de figuras, é um meio que possibilita aos docentes a visualização de como identificar as medidas dos ângulos correspondentes congruentes e as medidas dos lados correspondentes proporcionais.

Ainda sobre o aspecto dos meios de reproduzir, ampliar e reduzir formas geométricas semelhantes, duas obras se destacam, pois, usam duas representações semióticas não comuns. A obra L4 apresenta, aos docentes, um outro registro multifuncional discursivo que auxilia a construção da condição para duas ou mais figura serem ditas semelhantes. Essa obra usa um software geométrico dinâmico, o “*Geogebra*”, inserido na temática do ensino de semelhança de figuras, no qual, realiza reproduções, ampliações e reduções de forma geométricas semelhantes.

O livro didático L3 promove uma atividade para realizar reproduções, ampliações e reduções de forma geométricas semelhantes, associada e inserida na temática do ensino de figuras semelhantes, incomum comparada as outras obras analisadas. O autor dessa obra orienta a construção e o manuseio de um pantógrafo para realizar reproduções, ampliações e reduções de forma geométrica semelhantes.

O quadro abaixo sintetiza os aspectos comuns e não comuns entre os livros didáticos analisados, referente aos meios de reproduzir, ampliar e reduzir formas geométricas semelhantes.

Quadro 33 – Aspectos comuns e não comuns nas reproduções ampliações e reduções

OBRAS	Malha quadriculada	Régua, compasso, transferidor	Software geométrico	Pantógrafo
L1	▨	▨		
L2	▨	▨		
L3		▨		▨
L4		▨	▨	
L5	▨	▨		

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

O último aspecto comum e não comum entre as obras, a ser destacado, se trata da definição da razão de semelhança e suas consequências. A significação detalhada da razão de semelhança, obtida pela razão entre os lados correspondentes, é importante, visto que possibilita aos docentes a construção de outras relações no ensino de semelhança de figuras. A proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes, indicado pela razão de semelhança entre duas figuras semelhantes, pode ser associado com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas e dos volumes das figuras semelhantes.

Todos as obras selecionadas para este estudo definem a razão de semelhança como a constante de proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes para duas figuras semelhantes. Porém, apenas os livros didáticos L1 e L2, apresenta a relação que existem entre a razão de semelhança com o quociente entre os perímetros e com o quociente entre as áreas.

Por meio das consequências da proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes, define-se que, se duas figuras são ditas semelhantes, então o quociente entre seus perímetros é igual a razão de semelhança. Bem como, se duas figuras são ditas semelhantes, então o quociente entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. E por fim, se duas figuras são semelhantes, então o quociente entre seus volumes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Entretanto, a relação envolvendo a razão de semelhanças com o quociente entre as medidas dos volumes de duas figuras semelhantes não está presente em nenhuma das cinco obras selecionadas e analisadas.

Apresentaremos um quadro que sintetiza os aspectos comuns e não comuns, entre os cincos livros didáticos, associado a definição da razão de semelhança e suas consequências.

Quadro 34 – Aspectos comuns e não comuns na definição da razão de semelhança e suas consequências

Obras	Razão de semelhança	Quociente entre os perímetros.	Quociente entre as áreas.	Quociente entre os volumes.
L1	■	■	■	
L2	■	■	■	
L3	■			
L4	■			
L5	■			

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Diante de tudo que foi apresentado nesse trabalho e desenvolvido por este pesquisador, podemos concluir de forma conclusiva e definitiva que alguns livros didáticos que estão inseridos no Guia de Livros Didáticos do Ensino Fundamental Anos Finais (Brasília 2016) apresentam uma multiplicidade de experiências. As obras L1 e L2 apresentam uma diversidade nas abordagens expostas pelas representações semiótica da língua natural alfabética, exibidas pelas representações semióticas figurais e expressa pelas representações semióticas da escrita algébrica numérica. Essas representações semióticas estão inseridas nos registros multifuncionais e monofuncionais, possibilitando ao docente uma compreensão significativa no processo de transição do conceito geométrico para a escrita dos algoritmos algébricos numéricos.

As obras L1 e L2 são diferenciadas em relação as outras três obras selecionadas, pois, ambas apresentam três enunciações contextuais diferentes relacionadas ao ensino de figuras semelhantes, demostram dois meios distintos de reproduzir, ampliar e reduzir forma geométricas semelhantes e apresentam a definição da razão de semelhança e sua relação com os quocientes entre as medidas dos perímetros e das áreas, consequências da proporcionalidade entre os lados correspondentes.

Considero que os livros didáticos L1 e L2 poderiam apresentar um volume ainda maior de registros e representações semióticas para favorecer a compressão do processo de transição do conceito geométrico para a escrita dos algoritmos algébricos numéricos no ensino de semelhanças de figuras. Afinal, as duas obras não associaram a razão de semelhança com o quociente entre as medidas dos volumes de figuras semelhantes. Não definindo, que se duas figuras são semelhantes, então o quociente entre seus volumes é igual ao cubo da razão de semelhança. Outro ponto que deixou a desejar, segundo este autor, foi ausência de outro meio que permita os docentes a construir a significação da conceitualização das condições para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes. A exploração de um software geométrico seria um registro que enriqueceria o ensino de semelhança de figuras.

Na presença dessas observações podemos constatar que a teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval é um meio que desenvolver o ensino de forma construtiva e significativa, pois, a apresentação de inúmeras representações semióticas para um mesmo objeto matemático possibilita o docente extrair diferentes informações. Dessa forma o livro didático, que é fonte de pesquisa e de estudo, deve apresentar uma pluralidade de registros, pois, favorecerá os docentes a construir suas conjecturas conceituais a partir da assimilação das distintas informações presente em cada uma representação semiótica abordadas no ensino de um determinado objeto matemático.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Pretendemos, com o desenvolvimento desta pesquisa, constatar como os livros didáticos do 9º Ano do ensino fundamental II, que estão presentes no Guia de Livros Didáticos do Ensino Fundamental Anos Finais (Brasil 2016) apresentam as abordagens propostas para o ensino de semelhanças de figuras. Para tal, fundamentamos nosso estudo de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval. Exibimos e identificamos os registros das representações semióticas, presentes nos textos conceituais e nas questões envolvendo o ensino de semelhança de figuras proposta nos livros didáticos. Averiguando se as representações semióticas produzidas nos livros selecionados proporcionam, aos docentes, condições que favorecem a compreensão do processo de transição do conceito geométrico para o algoritmo algébrico no ensino das figuras semelhantes.

Duval (2008), afirma que assimilação dos conteúdos matemáticos é otimizado, quando, é apresentado uma diversidade de registros, por meio, de inúmeras reproduções das representações semióticas para um mesmo objeto matemático. Assim, consideremos que o livro didático precisa promover uma multiplicidade de experiências, a fim de proporcionar um ensino construtivo, tornando a compressão, da transição do meio geométrico conceitual para o meio algébrico, no ensino de semelhanças de figuras, um processo significativo.

O processo analítico e descritivo das obras selecionadas, seguindo os critérios desenvolvidos na metodologia, apoia-se no estudo da Análise de Conteúdo de Laurence Bardin. Afinal, as conclusões, a respeito da existência, ou não, de uma diversidade nas abordagens no ensino da semelhança de figuras, seguindo a ótica da teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval, foi embasada na análise qualitativa dos contextos e questões, mas, também na quantificação e classificação dos tipos de registros presentes nos contextos e nas questões apresentadas nos livros didáticos.

Acumulamos interpretações por meio da leitura descritiva argumentativa na etapa descrição do conteúdo, a fim de classificar as representações semióticas em: registros multifuncionais discursivos; registros multifuncionais não discursivos; registros monofuncionais discursivos; registros monofuncionais não discursivos.

Para transformar as percepções obtidas, na descrição do conteúdo, em conclusões válida e fieis coletamos dados, informações que possibilitassem construir significações conclusivas a respeito do ensino de figuras semelhantes. Tais informações a respeito das abordagens propostas nas enunciações conceituais e nas questões envolvendo o ensino de figuras semelhança foram agrupadas e exibidas nos Quadros na etapa da apresentação dos dados.

Com a análise do conteúdo e com o agrupamento dos dados, desenvolvemos a etapa da conclusão, apresentado nossas conjecturas a respeito do ensino de semelhança de figuras proposto em cada obra.

Os livros selecionados para o estudo foram:

- Obra L1 - MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA. Autor: Ênio Silveira. Editora MODERNA, 3ª Edição – 2015.
- Obra L2 - MATEMÁTICA - IDEIAS E DESAFIOS. Autores: Dulce Satiko Onaga; Iracema Mori. Editora Saraiva, 18ª Edição – 2015.
- Obra L3 - MATEMÁTICA NOS DIAS DE HOJE - NA MEDIDA CERTA. Autores: José Jakubovic; Marília Centurión. Editora LEYA, 1ª Edição – 2015.
- Obra L4 - MATEMÁTICA – VONTADE DE SABER. Autores: Joamir Souza; Patrícia Moreno Pataro. Editora FTD, 3ª Edição – 2015.
- Obra L5 MATEMÁTICA – CONVERGÊNCIA. Autor: Eduardo Chavante. Editora SM, de 1ª Edição, no ano de 2015.

No decorrer da leitura descritiva e da análise argumentativa das cinco obras selecionadas percebermos que os registros das enunciações dos textos introdutórios e dos comandos das questões, para o ensino de semelhança de figuras, estão predominantemente inseridos nos registros multifuncionais discursivos e não discursivos, bem como, nos monofuncionais discursivos.

Afinal, para enunciar as condições teóricas e conceituais, para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, as representações semióticas usadas foram a escrita da língua natural alfabética. Já para exibir visualmente as condições conceituais, foram usadas as representações semióticas figurais, por meio da exposição de forma geométricas planas. Por sua vez, para verificar as condições teóricas e conceituais, para duas ou mais figuras serem ditas semelhantes, as representações semióticas usadas foram a escrita simbólica algébrica numérica, visto que os algoritmos indicam a congruência entre as medidas dos ângulos correspondentes e a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondente.

Consideramos que o estudo desenvolvido servirá como fonte de pesquisas futuras para outros trabalhos acadêmicos relacionados aos registros de representações semióticas, envolvendo a temática do processo da transição da conceitualização geométrica para a escrita algébrica numérica. Nossas expetativas com este estudo é contribuir no processo de ensino de forma significativa, otimizando a compreensão dos aspectos definidos como foco de estudo desta pesquisa.

Para o desenvolvimento desta pesquisa enfrentamos algumas dificuldades. Primeiramente agrupar o material didático, foco e fonte desta pesquisa, reunir as obras que forneceram embasamento teórico, e acumular os documentos oficiais, para apoiar nossas percepções, foi algo complexo, visto que não dispúnhamos desses materiais. Outra dificuldade, severa, foi o prazo para o desenvolvimento deste estudo. O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, organizado e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, poderia proporcionar condições mais favoráveis em relação ao prazo de produção e conclusão da dissertação, afinal, conciliar estudo acadêmico e trabalho profissional é algo que não é tão simples, mas, é evidente que sou grato pela oportunidade proporcionada e vivenciada.

REFERÊNCIAS

ALVES, Andréia Rodrigues Alves. **O desenho geométrico no 9º ano como estratégia didática no ensino da geometria.** 2017. 81 f. Dissertação (Mestrado em matemática) - Curso de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2017.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana:** coleção do professor de matemática. 11. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2012.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1988.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977.

BARDIN, Laurence**. Análise de conteúdo**. 4. ed. Lisboa: Edições70, 2010.

BEZERRA, Francinaldo da Silva. **Aprendizagem da geometria plana através da conversão de registros de representações geométricas e linguagem natural.** 2018. 79 f. Dissertação (Mestrado em matemática) - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas Programa de Pós-graduação em Matemática Mestrado Profissionalizante em Matemática, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2018.

BRASIL, Instituto Nacional De Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Exame Nacional do Ensino Médio: prova de redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias prova de matemática e suas tecnologias: 2º dia: 1ª aplicação: caderno 5: amarelo. Brasília, DF: INEP, 2016. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_05_AMARELO.pdf>. Acesso em: 05 maio 2019.

BRASIL, Instituto Nacional De Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Exame Nacional do Ensino Médio: prova de ciências da natureza e suas tecnologias prova de matemática e suas tecnologias: 2º dia: 2ª aplicação: caderno 7: azul. Brasília, DF: INEP, 2017. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2017_DIA_2_05_AMARELO.pdf>. Acesso em 05 maio 2019

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. . Brasília : MEC /SEF, 1998.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Matemática:** Convergência. São Paulo: Sm, 2015.

CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José. **Matemática nos dias de hoje:** Na medida certa. São Paulo: Leya, 2015.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. 9 v.

DUFRAYER, Gustavo Rodrigues. **Um panorama sobre o ensino da semelhança de figuras**. 2015. 85 f. Dissertação (Mestrado em matemática) – Curso de Matemática, universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015. Cap. 5.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: Proem, 2011.

FERREIRA, Leonardo dos S. **Como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano.** 2017. 48 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universida de estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2017

GUIA de livros didáticos: PNLD 2014: matemática. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Básica, 2013. 104 p.

MIRANDA, Josias Barbosa de. **Registro de Representação Semiótica de Funções Quadráticas: Análise de um Livro Didático**. 2018. 102 f. Dissertação (Mestrado em matemática) – Curso de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, São Paulo, 2018.

MONFORTE, Leandro da Silva Soares. **Semelhanças no GeoGebra e o modelo de Van Hiele.** 2017. 39 f. Dissertação (Mestrado em matemática) - Curso de Matemática, Unirio, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro Unirio, Rio de Janeiro, 2017.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática:** Ideias e desafios. 18. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria:** Coleção do profmat. Rio de Janeiro: Sbm, 2013.

SENA FILHO, Nilo da Silva. **Os sistemas de equações em livros didáticos do 7º Ano do ensino fundamental sob a perspectiva da teoria dos registros de representações semióticas**. 2019. 50 f. Dissertação (Mestrado em matemática) – Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus,2019.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática:** Compreensão e Prática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

Site SPAECE. **Resultado de proficiência na disciplina de matemática em 2017**. Disponível em:<http://resultados.caedufjf.net/resultados/publicacao/publico/escola.jsf>/ Acesso em: 29 maio 2019

SPAECE. **Matriz de referência da disciplina de matemática 9º ano fundamental**. Disponível em: http://www.spaece.caedufjf.net/o-sistema/matriz-de-referencia/ Acesso em: 29 maio 2019

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patricia Rosana Moreno. **Matemática:** Vontade de saber. 3. ed. São Paulo: Ftd, 2015. (9º ANO).

SPAECE. Disponível em <http://www.spaece.caedufjf.net/resultados/spaece.caedufjf>. Acesso em: 29 maio 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A – COLETA E REGISTRO DE DADOS FUNDAMENTADO PELO REFERENCIAL TEÓRICO

1º Ficha

Obra:		
Ator:		Ano:
Classificação dos registros que estão presentes nos textos didáticos e nas questões		
TEXTOS	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS	Páginas:	Páginas:
TOTAL		
REGISTROS MONOFUNCIONAIS	Páginas:	Páginas:
TOTAL		
QUESTÕES	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS	Páginas:	Páginas:
TOTAL		
REGISTROS MONOFUNCIONAIS	Páginas:	Páginas:
TOTAL		

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

2º Ficha

Obra:		
Ator:		Ano:
Registro dos tipos de matérias concretos presentes nos textos e nas questões		
TEXTOS	RÉGUA E COMPASSO.	SOFTWARE GEOMÉTRICO.
	Páginas:	Páginas:
TOTAL		
QUESTÕES	RÉGUA E COMPASSO.	SOFTWARE GEOMÉTRICO.
	Páginas:	Páginas:
TOTAL		

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

3º Ficha

Obra:	
Ator: Ano:	
Registro das consequências das propriedades da proporcionalidade envolvendo perímetro, área e volume	
TEXTOS	Páginas:
TOTAL	
QUESTÕES	Páginas:
TOTAL	

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

4º Ficha

Obra:		
Ator: Ano:		
Classificação das alterações dos registros para os textos e questões		
TEXTOS	TRATAMENTO.	CONVERSÕES.
	Páginas:	Páginas:
TOTAL		
QUESTÕES	TRATAMENTO.	CONVERSÕES.
	Páginas:	Páginas:
TOTAL		

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

APÊNDICE B – PRODUTO EDUCACIONAL

PROFMAT

Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE SEMELHANÇA DE FIGURAS.

AUTOR: HUGO ALVES MACHADO

2019

INTRODUÇÃO

De acordo com as considerações finais construídas na pesquisa, um estudo da semelhança de figuras envolvendo as representações semióticas presentes nos livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental, desenvolvido por este autor, diagnosticamos que alguns livros apresentam o ensino de figuras semelhantes de forma incompleta. A sequência didática proposta, por três livros, dos cinco selecionados não tratam em seus contextos conceituais a relação entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas e dos volumes, das formas geométricas semelhantes. As outras duas obras que abordam essas relações, não apresenta aos docentes a associação que existe entre a razão de semelhança com o quociente das medidas dos volumes de duas figuras semelhantes.

Outro ponto que evidenciamos durante a descrição e análise das obras que selecionamos para esta pesquisa, foi que, quando, tais relações são tratadas a abordagem não proporciona ao leitor, ao docente, um aspecto importante no ensino da geometria, que se trata do processo experimental e investigativo. Afinal esses aspectos são essenciais para tornar o ensino construtivo e significativo.

Dessa forma, entendemos que há uma necessidade de produzir um material de apoio que dê suporte e um embasamento para proporcionar aos docente uma compreensão otimizada no processo da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica, referente as relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas e dos volumes, das formas geométricas semelhantes no ensino de semelhança de figuras.

Elaboramos uma série de atividades sequenciadas que proporcionará ao docente uma multiplicidade de registros, pois, tais atividade foram elaboradas explorando diferentes representações semiótica. As atividades introduzem os alunos em uma experimentação promovendo ampliações e reduções de formas geométricas semelhantes, utilizando três representações diferentes, a malha quadriculada, a homoteria, e o software “Geobebra”, proporcionando ao aluno, segundo a Teoria de registros de representação semiótica de Raymund Duval, meios para transitar de um registro para outro. A sequência didática explora as transformações de mudanças de registros promovendo a conversão dos registros multifuncionais discursivos e não discursivos para os registros monofuncionais discursivos.

As atividades além de proporcionar uma diversidade de abordagens promoverão experiências que propicie a compreensão do processo da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica das relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas e dos volumes, das formas geométricas semelhantes no ensino de semelhança de figuras.

SUMÁRIO

1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1.1 ATIVIDADE – 1 AMPLIANDO FORMAS GEOMÉTRICAS NA MALHA QUADRICULADAS.

Observe a malha quadriculada abaixo. A partir do retângulo ABCD, construa um retângulo A’B’C’D’ duplicando as medidas lineares do retângulo ABCD.

Adotando (u.c.) como a unidade de medida de comprimentos lineares da malha quadriculada e consequentemente dos segmentos dos retângulos ABCD e A’B’C’D’, e (u.a) como a unidade de medida de área superficial da malha quadriculada e consequentemente da superfície dos retângulos ABCD e A’B’C’D’.

Responda cada um dos itens:

A) Indique a razão entre as medidas os lados correspondentes $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ para $\overline{A'B'}$.

B) Indique a razão entre as medidas dos lados correspondentes $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$.

C) Indique a razão de semelhança entre o retângulo ABCD para A’B’C’D’.

D) Indique a razão entre as medidas dos perímetros, ou seja, determine o quociente entre a medida do perímetro do retângulo ABCD para a medida do perímetro do retângulo A’B’C’D’.

OBS: Lembrando que o perímetro de um polígono é determinado pelo somatório das medidas lineares dos segmentos que forma o polígono.

E) Indique a razão entre as medidas das áreas, ou seja, determine o quociente entre a medida da área do retângulo ABCD para a medida da área do retângulo A’B’C’D’.

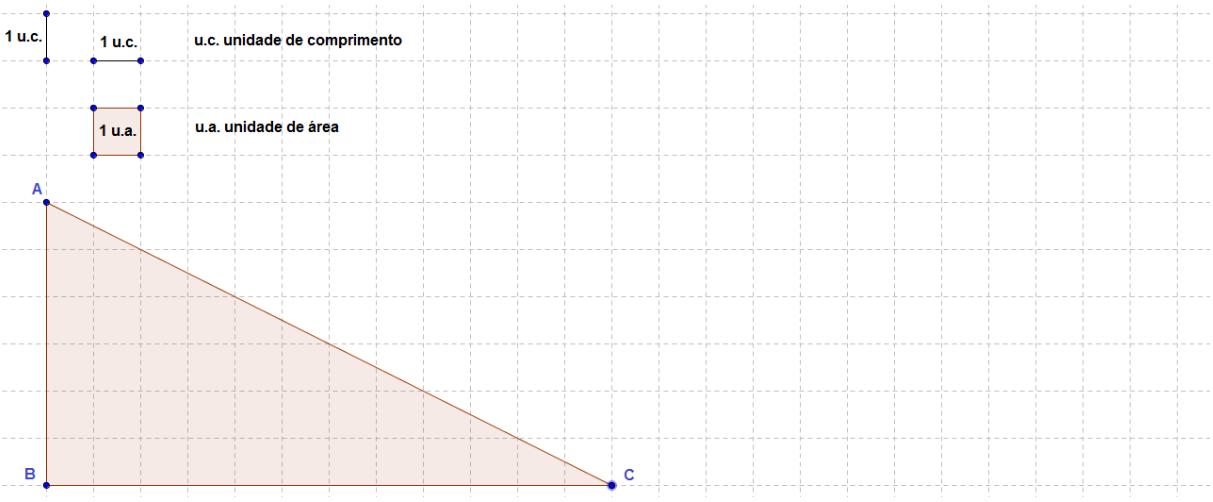
OBS: Lembrando que a área de um retângulo é determinada pelo produto entre suas dimensões, podendo ser definida pelo produto entre a medida do comprimento pela medida da largura.

F) Indique a relação entre a razão de semelhança para a razão das medidas dos perímetros dos retângulos ABCD e A'B'C'D'.

G) Indique a relação entre a razão de semelhança para a razão das medidas das áreas dos retângulos ABCD e A'B'C'D'.

1.2 ATIVIDADE – 2 REDUZIDO DE FORMA GEOMÉTRICAS NA MALHA QUADRICULADAS.

Observe a malha quadriculada abaixo. A partir do triângulo ABC, construa um triângulo A'B'C' reduzida as medidas lineares do triângulo ABC para a terça parte.



Adotando (u.c.) como a unidade de medida de comprimentos lineares da malha quadriculada e consequentemente dos segmentos dos triângulos ABC e A'B'C', e (u.a) como a unidade de medida de área superficial da malha quadriculada e consequentemente da superfície dos triângulos ABC e A'B'C'.

Responda cada um dos itens:

A) Indique a razão entre as medidas os lados correspondentes $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ para $\overline{A'B'}$.

B) Indique a razão entre as medidas dos lados correspondentes $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$.

C) Indique a razão entre as medidas dos lados correspondentes $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, ou seja determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$.

D) Indique a razão de semelhança entre triângulo ABC para o triângulo A’B’C’.

E) Indique a razão entre as medidas dos perímetros, ou seja, determine o quociente entre a medida do perímetro do triângulo ABC para a medida do perímetro do triângulo A’B’C’.

OBS: Lembrando que o perímetro de um polígono é determinado pelo somatório das medidas lineares dos segmentos que forma o polígono.

F) Indique a razão entre as medidas das áreas, ou seja, determine o quociente entre a medida da área do triângulo ABC para a medida da área do triângulo A’B’C’.

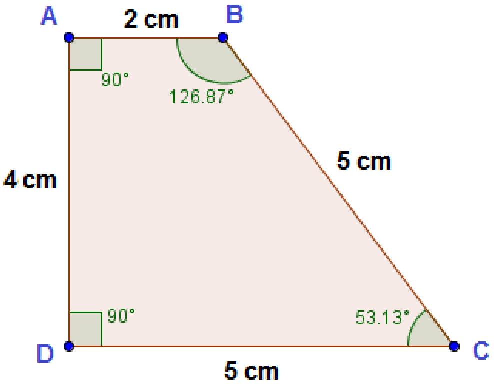
OBS: Lembrando que a área de um triângulo é determinada pela medida da base do triângulo e pela altura relativa à base do triângulo. Podemos afirmar que a área do triângulo é igual à metade do produto entre da medida da base do triângulo pela medida da altura relativa à base do triângulo.

G) Indique a relação entre a razão de semelhança para a razão das medidas dos perímetros dos triângulos ABC e A’B’C’.

H) Indique a relação entre a razão de semelhança para a razão das medidas das áreas dos triângulos ABC e A’B’C’.

1.3 ATIVIDADE – 3 REDUZINDO FORMAS GEOMÉTRICAS POR HOMOTETIA.

Observe o trapézio abaixo. A partir do trapézio ABCD, construa um outro trapézio A’B’C’D’ reduzindo as medidas lineares do trapézio ABCD na razão 1 para 0,5.



Em seguida, com régua e transferidor, registre as medidas dos segmentos lineares e as medidas dos ângulos internos do trapézio A’B’C’D’. De acordo como as medidas lineares indicadas nas dimensões dos trapézios ABCD e A’B’C’D’ responda cada um dos itens:

A) Indique a razão entre as medidas os lados correspondentes $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ para $\overline{A'B'}$.

B) Indique a razão entre as medidas dos lados correspondentes $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$.

C) Indique a razão entre as medidas dos lados correspondentes $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$.

D) Indique a razão entre as medidas dos lados correspondentes $\overline{DA}$ e $\overline{D'A'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{DA}$ e $\overline{D'A'}$.

E) Indique a razão de semelhança do trapézio ABCD para o trapézio A'B'C'D'.

F) Indique a razão entre as medidas dos perímetros, ou seja, determine o quociente entre a medida do perímetro do trapézio ABCD para a medida do perímetro do trapézio A'B'C'D'.

OBS: Lembrando que o perímetro de um polígono é determinado pelo somatório das medidas lineares dos segmentos que forma o polígono.

G) Indique a razão entre as medidas das áreas, ou seja, determine o quociente entre a medida da área do trapézio ABCD para a medida da área do trapézio A'B'C'D'.

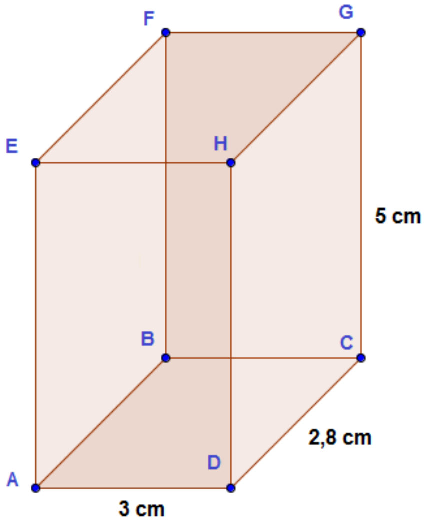
OBS: Lembrando que a área de um trapézio é determinada pela medida da base maior, pela medida da base menor e pela altura do trapézio. Podemos afirmar que área do trapézio é igual a metade do produto entre a medida da altura com o somatório das medidas da base maior e menor.

H) Indique a relação entre a razão de semelhança para a razão das medidas dos perímetros dos trapézios ABCD e A'B'C'D'.

I) Indique a relação entre a razão de semelhança para a razão das medidas das áreas dos trapézios ABCD e A'B'C'D'.

1.4 ATIVIDADE – 4 AMPLIANDO FORMAS GEOMÉTRICAS POR HOMOTETIA.

Observe o paralelepípedo ABCDEFGH abaixo, A partir do paralelepípedo ABCDEFGH, construa um paralelepípedo A'B'C'D'E'F'G'H' ampliando as medidas lineares do paralelepípedo ABCDEFGH na razão 1 para 2.



Em seguida, com uma régua as medidas dos segmentos lineares do paralelepípedo A’B’C’D’E’F’G’H”. De acordo como as medidas lineares indicadas nas dimensões dos paralelepípedos ABCDEFGH e A’B’C’D’E’F’G’H” responda cada um dos itens:

A) Indique a razão entre as medidas os lados correspondentes $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ para $\overline{A'B'}$.

B) Indique a razão entre as medidas dos lados correspondentes $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{D'C'}$.

C) Indique a razão entre as medidas dos lados correspondentes $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{CG}$ e $\overline{C'G'}$.

D) Indique a razão de semelhança entre o paralelepípedo ABCDEFGH e para o paralelepípedo A’B’C’D’E’F’G’H”.

E) Indique a razão entre as medidas dos perímetros, ou seja, determine o quociente entre a medida do perímetro do paralelepípedo ABCDEFGH para a medida do perímetro do paralelepípedo A’B’C’D’E’F’G’H’.

OBS: Lembrando que o perímetro de um paralelepípedo é determinado pelo somatório das medidas lineares das arestas que forma o sólido geométrico.

F) Indique a razão entre as medidas das áreas superficiais, ou seja, determine o quociente entre a medida da área superficial do paralelepípedo ABCDEFGH para a medida da área superficial do paralelepípedo A’B’C’D’E’F’G’H’.

OBS: Lembrando que a área superficial de um paralelepípedo é determinada pelo somatório das seis áreas retangulares que forma o solido geométrico.

G) Indique a razão entre as medidas dos volumes, ou seja, determine o quociente entre a medida do volume do paralelepípedo ABCDEFGH para a medida do volume do paralelepípedo A'B'C'D'E'F'G'H'.

OBS: Lembrando que o volume de um paralelepípedo é determinado pelo produto entre as três dimensões do sólido geométrico.

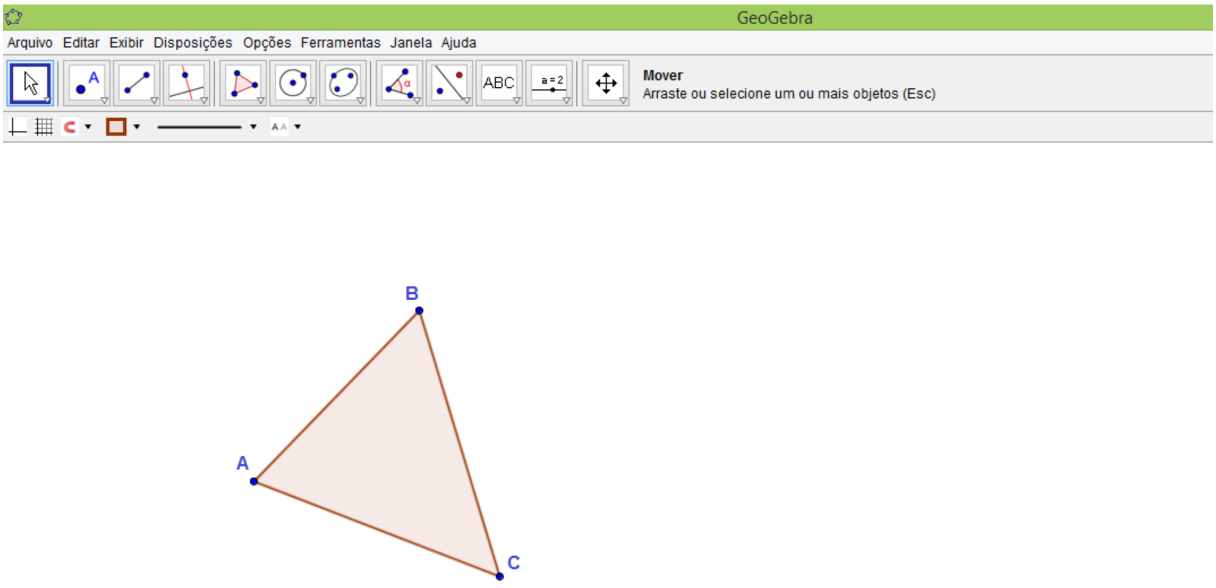
H) Indique a relação entre a razão de semelhança para a razão das medidas dos perímetros dos paralelepípedos ABCDEFGH e A'B'C'D'E'F'G'H'.

I) Indique a relação entre a razão de semelhança para a razão das medidas das áreas superficiais dos paralelepípedos ABCDEFGH e A'B'C'D'E'F'G'H'.

J) Indique a relação entre a razão de semelhança para a razão das medidas dos volumes dos paralelepípedos ABCDEFGH e A'B'C'D'E'F'G'H'.

1.5 ATIVIDADE – 5 AMPLIANDO FORMAS GEOMÉTRICAS OPERANDO SOFTWARE GEOMÉTRICO "*GEOGEBRA*".

A partir do triângulo ABC, construa um triângulo A'B'C' ampliando as medidas lineares do triângulo ABC para o dobro.



Usando o software para realizar a homotetia a partir do triângulo ABC, responda cada um dos itens abaixo, utilizando as ferramentas para medir a distância, comprimento, perímetros e áreas do triângulo A'B'C' semelhante ao triângulo ABC.

A) Indique a razão entre as medidas os lados correspondentes $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ para $\overline{A'B'}$.

B) Indique a razão entre as medidas dos lados correspondentes $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, ou seja, determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$.

C) Indique a razão entre as medidas dos lados correspondentes $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, ou seja determine o quociente entre as medidas dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$.

D) Indique a razão de semelhança entre triângulo ABC para o triângulo A’B’C’.

E) Indique a razão entre as medidas dos perímetros, ou seja, determine o quociente entre a medida do perímetro do triângulo ABC para a medida do perímetro do triângulo A’B’C’.

OBS: Lembrando que o perímetro de um polígono é determinado pelo somatório das medidas lineares dos segmentos que forma o polígono.

F) Indique a razão entre as medidas das áreas, ou seja, determine o quociente entre a medida da área do triângulo ABC para a medida da área do triângulo A’B’C’.

OBS: Lembrando que a área de um triângulo é determinada pela medida da base do triângulo e pela altura relativa à base do triângulo. Podemos afirmar que a área do triângulo é igual à metade do produto entre da medida da base do triângulo pela medida da altura relativa à base do triângulo.

G) Indique a relação entre a razão de semelhança para a razão das medidas dos perímetros dos triângulos ABC e A’B’C’.

H) Indique a relação entre a razão de semelhança para a razão das medidas das áreas dos triângulos ABC e A’B’C’.

2 ROTEIRO DAS ATIVIDADES

EIXO TEMÁTICO	**Espaço e Forma**
TEMA:	Relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas e dos volumes, das formas geométricas semelhantes
TÓPICO:	**Semelhança**
ANO:	9º Ano do Ensino Fundamental II
DURAÇÃO:	2 horas/atividade

2.1 OBJETIVOS DO ROTEIRO DE ATIVIDADE

- Proporcionar a compreensão do processo da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica das relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas e dos volumes, das formas geométricas semelhantes no ensino de semelhança de figuras

2.2 PROVIDÊNCIAS PARA A REALIZAÇÃO DE ATIVIDADE

- As atividades 1 e 2 poderão ser realizadas em sala de aula e necessitarão que os alunos tenham acesso a régua, transferidor e papel quadriculado.
- As atividades 3 e 4 poderão ser realizadas em sala de aula e necessitarão que os alunos tenham acesso a régua, compasso transferidor e papel A4.
- A atividade 5 deverá ser ministrada na sala de informática, pois, os alunos necessitarão de computadores para operar o software "*Geogebra*" e o professor de um *datashow*.

2.3 PRÉ-REQUISITOS

- Semelhança de figuras.
- Áreas e perímetros de triângulos, retângulos e trapézios.
- Volume do paralelepípedo.

2.4 MATERIAL UTILIZADO

- Régua;
- Compasso;
- Transferidor;
- Datashow;
- Computador;
- Software "Geogebra".

2.5 DESCRIÇÃO DOS PROCEDIMENTOS

Para as atividades 1 e 2 o professor desenvolverá ampliações e reduções de forma geométricas semelhantes, respectivamente de um retângulo e de um triângulo. Para tal usará a malha quadricula. Para as atividades 3 e 4 o professor desenvolverá reduções e ampliações de forma geométricas semelhantes, respectivamente de um trapézio e de um paralelepípedo. Para tal usará os procedimentos da homotetia. Para a atividade 5 o professor desenvolverá uma ampliação de um triângulo ABC, para tal usará o software geométrico "Geogebra".

2.5.1 ATIVIDADE – 1 AMPLIANDO FORMAS GEOMÉTRICAS NA MALHA QUADRICULADAS

Na atividade 1 o professor orientará os alunos a ampliar as medidas lineares do retângulo ABCD duplicando as medidas dos segmentos. Após a ampliação os alunos devem nomear o novo retângulo de A’B’C’D’, tal que, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, e $\overline{D'A'}$ sejam os lados correspondentes, respectivamente, dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em sequência o professor instigará uma investigação a respeito das relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas dos retângulos ABCD para o retângulo A’B’C’D’.

Para auxiliar a construção dessas relações os alunos podem usar a régua para mensurar as medidas correspondentes, ou ainda, podem usar a unidade de medida de comprimento da malha quadriculada (u.c.) e a unidade de medida de área superficial da malha quadriculada (u.a).

Assim, os alunos devem ser induzidos a perceber que quando a razão entre os lados correspondentes de dois polígonos semelhantes é igual $\frac{1}{2}$, o quociente entre as medidas dos perímetros desses mesmos polígonos é igual a $\frac{1}{2}$. Bem como, perceber que quando a razão entre os lados correspondentes de dois polígonos semelhantes é igual $\frac{1}{2}$, o quociente entre as medidas das áreas desses mesmos polígonos é igual a $\frac{1}{4}$.

2.5.2 ATIVIDADE – 2 REDUZIDO DE FORMA GEOMÉTRICAS NA MALHA QUADRICULADAS.

Na atividade 2 o professor orientará os alunos a reduzir as medidas lineares do triângulo ABC para terça parte. Após a redução os alunos devem nomear o novo triângulo de A’B’C’, tal que $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$e $\overline{C'A'}$ sejam os lados correspondentes, respectivamente, dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$e $\overline{CA}$. Em sequência o professor instigará uma investigação a respeito das relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas dos triângulos ABC para o triângulo A’B’C’.

Para auxiliar a construção dessas relações os alunos podem usar a régua para mensurar as medidas correspondentes, ou ainda, podem usar a unidade de medida de comprimento da malha quadriculada (u.c.) e a unidade de medida de área superficial da malha quadriculada (u.a).

Assim, os alunos devem ser induzidos a perceber que quando a razão entre os lados correspondentes de dois polígonos semelhantes é igual 3, o quociente entre as medidas dos perímetros desses mesmos polígonos é igual a 3 . Bem como, perceber que quando a razão entre os lados correspondentes de dois polígonos semelhantes é igual 3, o quociente entre as medidas das áreas desses mesmos polígonos é igual a 9.

2.5.3 ATIVIDADE – 3 REDUZINDO FORMAS GEOMÉTRICAS POR HOMOTETIA.

Na atividade 3 o professor orientará os alunos a reduzir as medidas lineares do trapézio ABCD na razão 1 para 0,5. Após a redução os alunos devem nomear o novo trapézio de A’B’C’D’, tal que $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, e $\overline{D'A'}$ sejam os lados correspondentes, respectivamente, dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em sequência o professor instigará uma investigação a respeito das relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas dos retângulos ABCD para o retângulo A’B’C’D’.

Para construir um trapézio A’B’C’D’ semelhante ao trapézio ABCD o professor descreverá os seguintes passos:

1. Marque um ponto fixo E, qualquer, no interior ao trapézio ABCD.
2. Com a régua trace retas, a partir de E, passando pelos pontos A, B, C e D.
3. Marque o ponto A’, ponto médio, do segmento $\overline{AE}$, traçando a mediatriz de $\overline{AE}$.
4. Marque o ponto B’, ponto médio, do segmento $\overline{BE}$, traçando a mediatriz de $\overline{BE}$.

5. Marque o ponto C', ponto médio, do segmento $\overline{CE}$, traçando a mediatriz de $\overline{CE}$.
6. Marque o ponto D', ponto médio, do segmento $\overline{DE}$, traçando a mediatriz de $\overline{DE}$.
7. Por fim, trace os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$, definindo o trapézio A'B'C'D', semelhante ao trapézio ABCD.

Para traça a mediatriz de um segmento, qualquer $\overline{PM}$, com o compasso a partir do ponto P trace uma circunferência de raio $\overline{PM}$, em seguida, a partir do ponto M trace uma circunferência de raio $\overline{PM}$. As interseções das circunferências determinam a reta mediatriz do segmento $\overline{PM}$.

Após a construção com a régua os alunos dever ser incentivados a realizar uma investigação a respeito das relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas dos trapézios ABCD para o trapézio A'B'C'D'.

Assim, os alunos devem ser induzidos a perceber que quando a razão entre os lados correspondentes de dois polígonos semelhantes é igual $\frac{1}{2}$, o quociente entre as medidas dos perímetros desses mesmos polígonos é igual a $\frac{1}{2}$. Bem como, perceber que quando a razão entre os lados correspondentes de dois polígonos semelhantes é igual $\frac{1}{2}$, o quociente entre as medidas das áreas desses mesmos polígonos é igual a $\frac{1}{4}$.

2.5.4 ATIVIDADE – 4 AMPLIANDO FORMAS GEOMÉTRICAS POR HOMOTETIA.

Na atividade 4 o professor orientará os alunos a ampliar as medidas lineares do paralelepípedo ABCDEFGH, na razão 1 para 2. Após a ampliação os alunos devem nomear o novo paralelepípedo de A'B'C'D'E'F'G'H", tal que $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$, $\overline{A'E'}$, $\overline{B'F'}$, $\overline{C'G'}$, $\overline{D'H'}$, $\overline{E'F'}$, $\overline{F'G'}$, $\overline{G'H'}$ e $\overline{H'E'}$ sejam as arestas correspondentes, respectivamente, dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AE}$,

$\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HE}$. Em sequência o professor instigará uma investigação a respeito das relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas, e dos volumes dos paralelepípedos ABCDEFGH para o paralelepípedo A'B'C'D'E'F'G'H'.

Para construir um paralelepípedo A'B'C'D'E'F'G'H' semelhante ao paralelepípedo ABCDEFGH o professor descreva os seguintes passos:

1. Marque um ponto fixo O, qualquer, exterior ao paralelepípedo ABCDEFGH.
2. Trace retas, a partir de O, passando pelos pontos A, B, C, D, E, F, G e H.
3. A partir do ponto A, desenhe uma circunferência, de raio $\overline{AO}$.
4. No prolongamento da reta $\overline{AO}$, marque o ponto A', na interseção da reta com a circunferência de raio $\overline{AO}$.
5. A partir do ponto B, desenhe uma circunferência, de raio $\overline{BO}$.
6. No prolongamento da reta $\overline{BO}$, marque o ponto B', na interseção da reta com a circunferência de raio $\overline{BO}$.
7. A partir do ponto C, desenhe uma circunferência, de raio $\overline{CO}$.
8. No prolongamento da reta $\overline{CO}$, marque o ponto H, na interseção da reta com a circunferência de raio $\overline{CO}$.
9. A partir do ponto D, desenhe uma circunferência, de raio $\overline{DO}$.
10. No prolongamento da reta $\overline{DO}$, marque o ponto G, na interseção da reta com a circunferência de raio $\overline{DO}$.
11. De forma análoga realize os procedimentos para os pontos E, F, G e H.
12. Por fim, trace os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$, $\overline{A'E'}$, $\overline{B'F'}$, $\overline{C'G'}$, $\overline{D'H'}$, $\overline{E'F'}$, $\overline{F'G'}$, $\overline{G'H'}$ e $\overline{H'E'}$, definindo um paralelepípedo A'B'C'D'E'F'G'H' semelhante ao paralelepípedo ABCDEFGH.

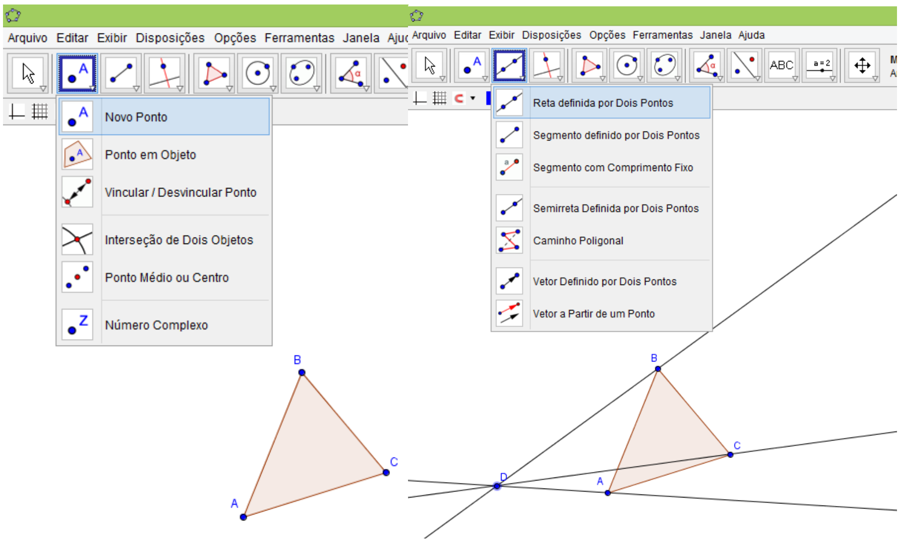
Após a construção com a régua os alunos dever ser incentivados a realizar uma investigação a respeito das relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas dos trapézios ABCD para o trapézio A’B’C’D’.

Assim, os alunos devem ser induzidos a perceber que quando a razão entre as arestas correspondentes de dois sólidos semelhantes é igual $\frac{1}{2}$, o quociente entre as medidas dos perímetros desses mesmos sólidos é igual a $\frac{1}{2}$. Bem como, perceber que quando a razão entre as arestas correspondentes de dois sólidos semelhantes é igual $\frac{1}{2}$, o quociente entre as medidas das áreas desses mesmos sólidos é igual a $\frac{1}{4}$. E por fim perceber que quando a razão entre as arestas correspondentes de dois sólidos semelhantes é igual $\frac{1}{2}$, o quociente entre as medidas dos volumes desses mesmos sólidos é igual a $\frac{1}{8}$.

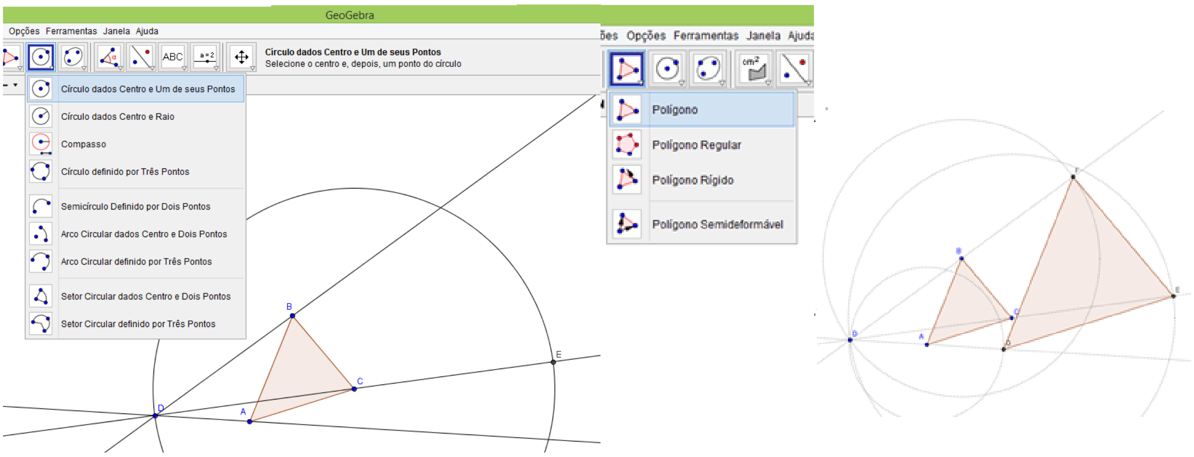
2.5.5 ATIVIDADE – 5 AMPLIANDO FORMAS GEOMÉTRICAS OPERANDO SOFTWARE GEOMÉTRICO “GEOGEBRA”.

Na atividade 5 o professor orientará os alunos a ampliar as medidas lineares do triângulo ABC duplicando os segmentos. Após a ampliação. Em sequência o professor instigará uma investigação a respeito das relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas dos triângulos ABC para o triângulo A’B’C’.

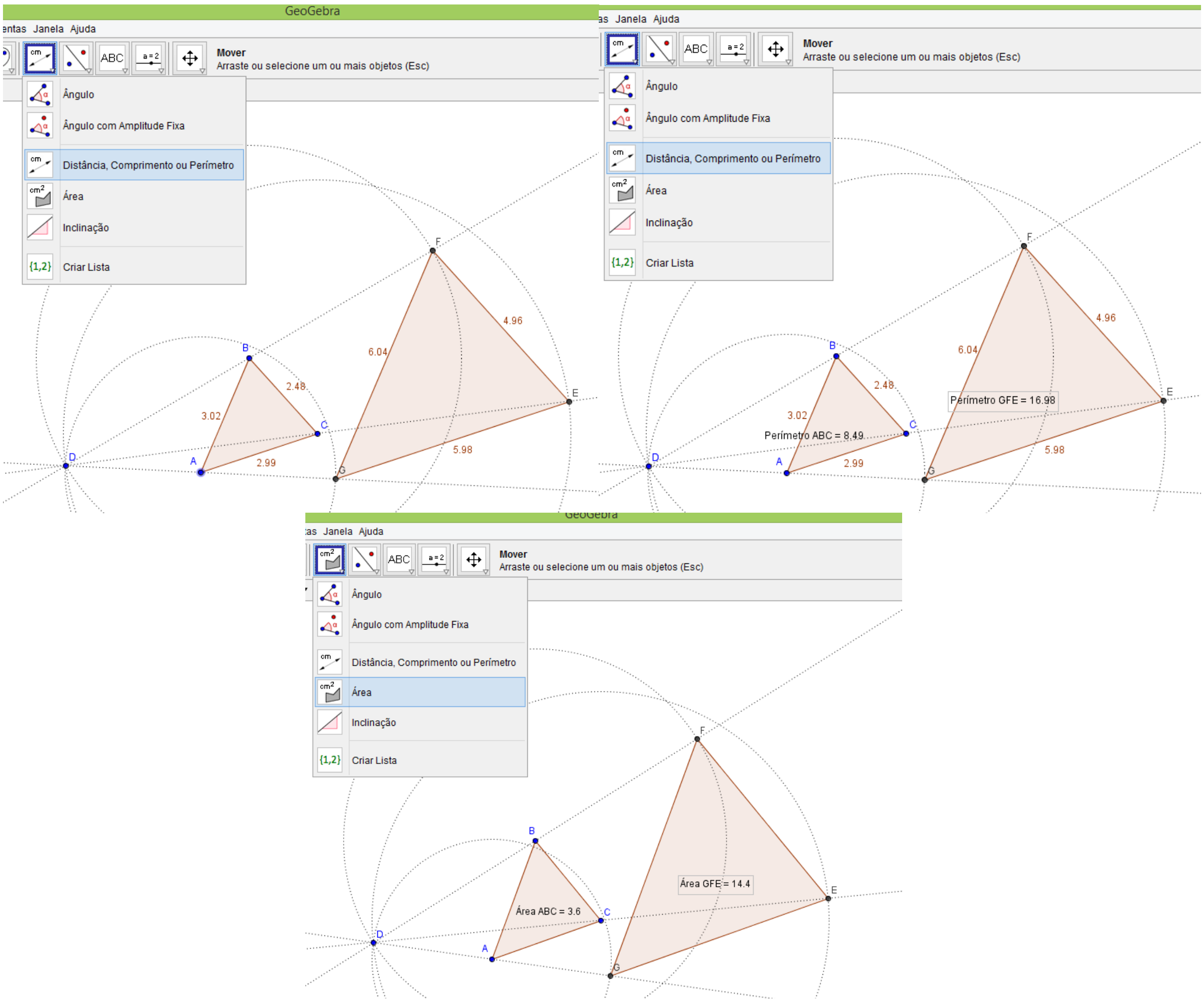
Com a ferramenta, Novo Ponto, os alunos fixarão um ponto exterior D. Usando a ferramenta, Reta definida por Dois Pontos, traçaremos as retas $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ e $\overline{DC}$.



Em sequência traçaremos uma circunferência de centro C e raio $\overline{DC}$, usando a ferramenta Círculo dados centro e um de seus pontos. Na interseção da reta $\overline{DC}$ com a circunferência de raio $\overline{DC}$ marcaremos o ponto C’. De forma análoga repetiremos os procedimentos para os ponto A e B, assim podemos traçar os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{C'A'}$ com a ferramenta Polígonos.


Circulo dados Centro e Um de seus Pontos
Selecione o centro e, depois, um ponto do círculo

Realizado a ampliação para promover a compreensão do processo da transição do conceito geométrico para a escrita algébrica numérica das relações entre a razão de semelhança com os quocientes entre as medidas dos perímetros, das áreas das formas geométricas semelhantes no ensino de semelhança de figuras, utilizaremos as ferramentas Distância, Comprimento ou perímetro em seguida a ferramenta Área.



Assim os alunos são induzidos a compreender que quando a razão entre os lados correspondentes duas formas geométricas semelhantes é igual $\frac{1}{2}$, o quociente entre as medidas dos perímetros dessas mesmas formas geométricas é igual a $\frac{1}{2}$. Bem como, perceber que quando a razão entre os lados correspondentes de duas formas geométricas semelhantes é igual $\frac{1}{2}$, o quociente entre as medidas das áreas dessas formas geométricas é igual a $\frac{1}{4}$.

Diante das orientações os alunos devem ser incentivados a deduzir que se duas formas geométricas são semelhantes, então, a razão entre seus os perímetros é igual a razão de semelhança, por sua vez, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança e por fim, a razão entre seus volumes é igual ao cubo da razão de semelhança.

ANEXOS

ANEXO A – MATRIZ DE REFERÊNCIA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

TEMA I: INTERAGINDO COM OS NÚMEROS E FUNÇÕES	
N° DESCRITOR	DESCRITOR
D7	Resolver situação problema utilizando mínimo múltiplo comum ou máximo divisor comum com números naturais.
D8	Ordenar ou identificar a localização de números inteiros na reta numérica.
D10	Resolver problema com números inteiros envolvendo suas operações.
D11	Ordenar ou identificar a localização de números racionais na reta numérica.
D12	Resolver problema com números racionais envolvendo suas operações.
D13	Reconhecer diferentes representações de um mesmo número racional, em situação-problema.
D15	Resolver problema utilizando a adição ou subtração com números racionais representados na forma fracionária (mesmo denominador ou denominadores diferentes) ou na forma decimal.
D17	Resolver situação problema utilizando porcentagem.
D18	Resolver situação problema envolvendo a variação proporcional entre grandezas direta ou inversamente proporcionais.
D19	Resolver problema envolvendo juros simples.
D21	Efetuar cálculos com números irracionais, utilizando suas propriedades.
D24	Fatorar e simplificar expressões algébricas.
D25	Resolver situação problema que envolvam equações de 1º grau.
D26	Resolver situação problema envolvendo equação do 2º grau.
D27	Resolver situação problema envolvendo sistema de equações do 1º grau.
TEMA II: CONVIVENDO COM A GEOMETRIA	
N° DESCRITOR	DESCRITOR
D48	Identificar e classificar figuras planas: quadrado, retângulo, triângulo e círculo, destacando algumas de suas características (número de lados e tipo de ângulos).
D49	Resolver problemas envolvendo semelhança de figuras planas.
D50	Resolver situação problema aplicando o Teorema de Pitágoras ou as demais relações métricas no triângulo retângulo.
D51	Resolver problemas usando as propriedades dos polígonos. (soma dos ângulos internos, número de diagonais e cálculo do ângulo interno de polígonos regulares).
D52	Identificar planificações de alguns poliedros e/ ou corpos

	redondos.
TEMA III: VIVENCIANDO AS MEDIDAS	
N° DESCRITOR	DESCRITOR
D65	Calcular o perímetro de figuras planas, numa situação problema.
D67	Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.
D69	Resolver problemas envolvendo noções de volume.
TEMA IV: TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO	
N° DESCRITOR	DESCRITOR
D75	Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas ou gráficos.
D77	Resolver problemas usando a média aritmética.

Fonte: Adaptação do site http://www.spaece.caedufjf.net/o-sistema/matriz-de-referencia/