Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Danúbia Diniz Nantes

Construções Geométricas e Expressões Algébricas

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2019

Danúbia Diniz Nantes

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2019

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T
N191c
2019

Nantes, Danúbia Diniz, 23-
Construções geométricas e expressões algébricas / Danúbia Diniz Nantes. – Florestal, MG, 2019.
x, 68f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.
Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo \\ (Orientador)}.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.68.

1. Construções geométricas. 2. Àlgebra. 3. Geometria. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática. II. Título.

516

Danúbia Diniz Nantes

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Aprovada: 22 de fevereiro de 2019.

Viviane Pardini Valério

Alexandre Alvarenga Rocha

Danielle Franco Nicolau Lara
(Coorientadora)

Luiz Gustavo Perona Araújo
(Orientador)

Dedicatória

Dedico esse trabalho aos meus pais, Dimas Maurício de Nantes e Ângela Diniz Nantes, que lutaram a vida inteira para me proporcionar a herança mais transformadora que eu poderia desejar: a educação!

Agradecimentos

Agradeço ao meu marido André Luiz Avelar pela compreensão e paciência, por ter estudado comigo e por ter sido meu apoio e incentivo.

Agradeço ao professor Luiz Gustavo Perona Araújo pelos ensinamentos e colaboração, pelo empenho, profissionalismo, organização e disponibilidade, por ter me orientado de modo assertivo e receptivo e por ter influenciado de modo decisivo na condução e conclusão deste projeto.

Agradeço à professora Danielle Franco Nicolau Lara pelas importantes sugestões que contribuíram grandemente para o enriquecimento do meu texto.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

$\overrightarrow{AB}$ Semirreta de origem no ponto A passando pelo ponto B.

$\overleftrightarrow{AB}$ Reta que passa pelos pontos A e B.

$\overline{AB}$ Segmento de reta com extremidades nos pontos A e B.

$A\hat{V}B$ Ângulo com vértice em V cujos lados são as semirretas $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$.

$\hat{A}$ Ângulo com vértice no ponto A.

ΔPMQ Triângulo com vértices nos pontos P, M e Q.

$r \perp s$ A reta r é perpendicular à reta s.

$r \parallel s$ A reta r é paralela à reta s.

$\widehat{\mathbf{AB}}$ Arco de extremidades nos pontos A e B.

$\widehat{\mathbf{ACB}}$ Arco de extremidades nos pontos A e B que passa pelo ponto C.

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$ O triângulo ABC é congruente ao triângulo PQR.

$\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ O segmento de reta AB é congruente ao segmento de reta PQ.

Lista de Figuras

Resumo

NANTES, Danúbia Diniz, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2019. **Construções Geométricas e Expressões Algébricas**. Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo. Coorientadora: Danielle Franco Nicolau Lara.

Neste trabalho vamos nos dedicar às construções básicas com régua e compasso, às construções de polígonos regulares inscritos no círculo e segmentos que representam expressões algébricas. Analisaremos, à luz da teoria da extensão de corpos, quando um segmento é construtível e, utilizando o *Teorema de Gauss*, avaliaremos quais polígonos regulares são construtíveis. Além disso, apresentaremos propostas de aplicações do tema em sala de aula.

Abstract

NANTES, Danúbia Diniz, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2019. **Geometric Constructions and Algebraic Expressions**. Adviser: Luiz Gustavo Perona Araújo. Co-adviser: Danielle Franco Nicolau Lara.

In this work we will focus on the basic constructions with ruler and compass, the constructions of regular polygons inscribed in the circle and segments representing algebraic expressions. We will analyze, in light of the theory of field extension, when a segment is constructible and, using the *Gauss'Theorem*, we will evaluate which regular polygons can be constructible. In addition, we will present proposals for applications of the theme in the classroom.

Sumário

1 Introdução

O estudo da geometria nos ensinos fundamental e médio tem algumas justificativas de acordo com Nuniz Neto em [5]: A primeira está ligada ao entendimento do mundo que nos cerca: a geometria tem a capacidade de desenvolver o pensamento espacial, fundamental para as capacidades de organização e localização. A segunda tem caráter prático: a geometria está aplicada no cotidiano e nas ciências. A terceira tem motivação cultural: a geometria é o resultado da ação de muitos cérebros em diferentes épocas e lugares do mundo. Quando Euclides escreveu sua obra *Os Elementos*, ele conseguiu reunir os conhecimentos matemáticos de quase dois mil anos. Essa é uma importante herança cultural que deve ser assimilada pelas novas gerações. A quarta envolve à própria matemática: expor os estudantes à linguagem sistemática da matemática e aos modos de argumentar logicamente é importante para a composição do corpo de conhecimentos que um jovem deve acumular para que possa fazer uma transição tranquila para o ensino superior.

O ensino de geometria associado aos métodos de construções com régua e compasso possibilitam o desenvolvimento do raciocínio pois exigem grande conhecimento da teoria e das propriedades das figuras.

O estudo da geometria proposto por Euclides, (sec. III antes de cristo), sobretudo nos primeiros livros de *Os Elementos*, sempre esteve acompanhado de construções geométricas com régua (sem graduação) e compasso. Nesses livros encontramos construções de ângulos, segmentos, triângulos e polígonos inscritos em círculos.

Outros matemáticos como François Viéte (1540 – 1603) e Rene Descartes (1596 – 1650) também se ocuparam em resolver alguns problemas matemáticos utilizando o método das construções geométricas; o primeiro em seu livro *Effectionum geometricarum canonica recensio*, mostra a solução de equações do segundo grau via régua e compasso e o segundo no livro *La géométrie*, trabalha com as operações fundamentais da aritmética – adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação em construções simples com régua e compasso, além disso também descreve a solução de equações de grau dois pelo mesmo método.

Existem problemas da geometria que não puderam ser resolvidos apenas com régua e compasso, dentre eles destacamos a trissecção do ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo, ao longo do texto alguns desses serão abordados como curiosidade ou exemplo.

O segundo capítulo desta dissertação trata das construções elementares, nele encontramos um breve aporte teórico, as descrições detalhadas dos procedimentos utilizados bem como suas justificativas baseadas nos conceitos da geometria plana.

O terceiro capítulo traz segmentos e expressões algébricas construtíveis, também acompanhados dos procedimentos e justificativas, além da discussão teórica sobre a construtibilidade de segmentos. Faremos a junção de segmentos construtíveis com a teoria da extensão de corpos.

O capítulo 4 trata da construção de polígonos regulares inscritos na circunferência, mais uma vez, trataremos dos procedimentos de construção e justificativas. Acrescentado a isso faremos um estudo algébrico dos polígonos construtíveis e apresentaremos o *Teorema de Gauss*:

Teorema 1.1 (Teorema de Gauss): Um polígono regular de n lados é construtível se, e somente se, n é da forma 2^r ou $2^q \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, onde q, r e k são números naturais, $q > 1$, e $p_1, \ldots, p_k$ são números primos distintos da forma $p_i = 2^{2^{s_i}} + 1$, $1 \leq i \leq k$, s_i natural. Os números da forma $2^{2^s} + 1$ são chamados primos de Fermat.

As teorias citadas são pouco conhecidas e, em geral, não são apresentados aos alunos de ensino fundamental e médio. A proposta desse trabalho é estudar todo esse conteúdo, as consequências importantes e elaborar atividades – com uso de régua e compasso e também com recursos computacionais – para serem aplicadas em sala de aula. As propostas de atividades comporão o capítulo 5.

2

Construções Geométricas Elementares

Nesse capítulo, inicialmente, trataremos dos teoremas que darão sustentação teórica às construções geométricas com régua e compasso elementares, depois passaremos aos procedimentos detalhados de cada uma delas acompanhados de suas respectivas justificativas ou comentários.

2.1 Definições e teoremas

Alguns postulados da geometria Euclidiana e resultados como congruência e semelhança de triângulos, propriedades dos polígonos, Teoremas de *Tales* e de *Pitágoras* e etc., foram omitidos por considerarmos que o leitor já os conhece, para mais detalhes consultar [5] e [6] .

Postulado 2.1 (Postulado da colocação da régua): Dados os pontos A e B em uma reta, pode ser escolhido um sistema de coordenadas para que a coordenada de A seja zero e a coordenada de B seja positiva.

Definição 2.1 (Distância entre dois pontos): Ao longo do texto, denotaremos por AB a distância entre os pontos A e B, em outras palavras, o comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$.

Definição 2.2 (Circunferência): É o conjunto de pontos do plano equidistantes de um ponto dado. Indicamos por $C(A, r)$ a circunferência de centro em A e raio r.

- O interior de $C(A, r)$ é o conjunto de todos os pontos P tais que $AP < r$. P é interno à circunferência.
- O exterior de $C(A, r)$ é o conjunto de todos os pontos P tais que $AP > r$. P é externo à circunferência.
- A união de uma circunferência com seu interior é chamada uma região circular fechada ou círculo.

Teorema 2.1 (Teorema da localização dos pontos): Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta e seja x um número positivo. Então existe um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$.

Demonstração. Pelo Postulado da Colocação da Régua, podemos escolher um sistema de coordenadas para a reta $\overleftrightarrow{AB}$ de modo que a coordenada de A seja zero e a coordenada de B seja um número positivo d. Seja P o ponto cuja coordenada é o número positivo x. Então P pertence a $\overrightarrow{AB}$ e $AP = |x - 0| = |x| = x$. Como somente um ponto da semirreta tem a coordenada x, somente um ponto da semirreta estará a uma distância x de A. □

Teorema 2.2 (Teorema fundamental das circunferências): Seja uma reta s e uma circunferência de centro P e raio r. Se P' é a projeção ortogonal de P sobre s, então uma e só uma das seguintes situações ocorre.

1. Todo ponto de s é um ponto exterior à circunferência.

2. O ponto P' está na circunferência, e a reta e a circunferência são tangentes neste ponto. Neste caso, todos os outros pontos de s são pontos exteriores à circunferência.

3. O ponto P' é um ponto interior da circunferência, e a reta intersecta a circunferência em exatamente dois pontos equidistantes de P'.

Demonstração. Seja a reta s e a circunferência $C(P, r)$. Seja P' a projeção ortogonal sobre s. Existem três possibilidades para o ponto P' em relação à circunferência: P' é exterior, interior, ou pertence à circunferência.

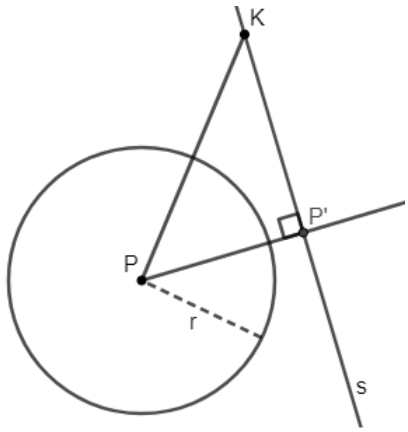


Figura 2.1: P' é externo à circunferência

1. Suponha que P' é ponto exterior a $C(P, r)$. Da definição 2.2 obtemos $PP' > r$. Seja K um ponto qualquer da reta s, distinto de P'. Temos que a menor distância entre um ponto e uma reta é o segmento perpendicular à reta logo, temos que $PK > PP'$. Assim, K é também ponto exterior da circunferência. (Figura 2.1).

2. Seja P' um ponto da circunferência, isto é, seja $PP' = r$. De modo análogo, para qualquer ponto K de s distinto de P', temos $PK > PP' = r$, e K é ponto exterior à circunferência. Portanto o único ponto comum à reta e à circunferência é P', s é tangente à circunferência. (Figura 2.2).

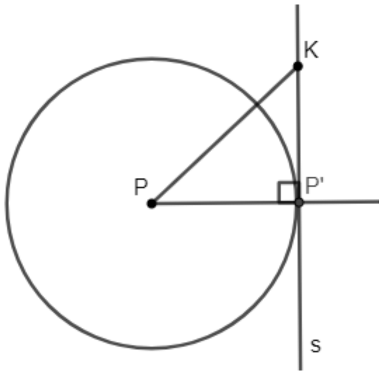


Figura 2.2: A reta s é tangente à circunferência.

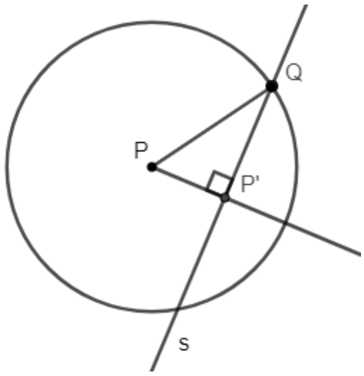


Figura 2.3: A reta s é secante à circunferência.

3. Suponhamos agora P' um ponto interior à circunferência, ou seja, $PP' < r$. Sendo $PP'Q$ um triângulo retângulo, qualquer ponto Q que esteja na reta s e na circunferência deve satisfazer o *Teorema de Pitágoras*: $r^2 = (PP')^2 + (P'Q)^2$. Logo $P'Q = \sqrt{r^2 - (PP')^2}$.
   Reciprocamente, tomando um ponto Q em s tal que $P'Q = \sqrt{r^2 - (PP')^2}$, então Q satisfaz $PQ = r$ e, portanto, está na circunferência. (Figura 2.3).

□

Teorema 2.3 (Teorema da intersecção reta-circunferência): Se uma reta intersecta o interior de uma circunferência, então intersecta a circunferência em dois pontos distintos.

Demonstração. A prova é consequência direta do item 3 do Teorema 2.2. □

Teorema 2.4 (Teorema das duas circunferências): Sejam dadas duas circunferências de centros P e Q e raios r_1 e r_2, respectivamente, onde d é a distância entre P e Q. Se $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$, então as duas circunferências cortam-se em dois pontos, um em cada lado da reta que passa pelos centros. As duas circunferências são secantes. (Figura 2.4).

Demonstração. Seja C_1 a circunferência de centro P e raio r_1, e seja C_2 a circunferência de centro Q e raio r_2. Seja $PQ = d$. A condição de existência dos

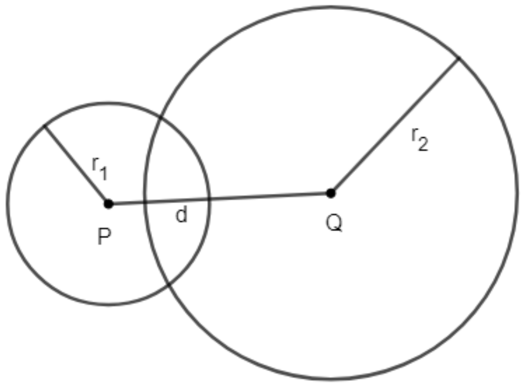


Figura 2.4: Circunferências secantes

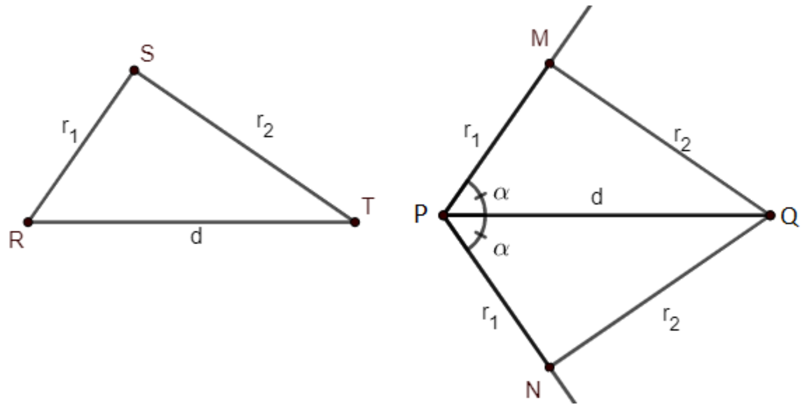


Figura 2.5: Triângulos congruentes

triângulos garante que existe um triângulo RST cujos lados tem comprimentos r_1, r_2 e d. (Figura 2.5). Em cada lado de $\overleftrightarrow{PQ}$ consideremos uma semirreta de origem P tal que os ângulos formados com $\overrightarrow{PQ}$ sejam congruentes a α. Consideremos os pontos M e N, um em cada semirreta, tais que $PM = PN = r_1$. A circunferência C_1 passa pelos pontos M e N. Pelo caso de congruência L.A.L., obtemos

$$\Delta PMQ \cong \Delta RST \cong \Delta PNQ.$$

Portanto, $MQ = r_2 = NQ$, e assim a circunferência C_2 passa pelos pontos M e N. Como duas circunferências têm, no máximo, dois pontos em comum estes são os únicos pontos pertencentes às duas circunferências. $\square$

Definição 2.3 (Arco capaz): Usaremos a definição para arco capaz de Rezende e Queiroz disponível em [6]. (Figura 2.6).

> *Consideremos dois pontos A e B sobre uma circunferência e um dos arcos da circunferência determinados por esses dois pontos. Para todo ponto V sobre esse arco, com V distinto de A e de B, o ângulo $A\hat{V}B = \alpha$ é constante e dizemos que o ponto V vê o segmento de AB sob o ângulo α. O arco AVB, excluídas suas extremidades A e B,é chamado arco capaz do ângulo α sobre o segmento AB.*

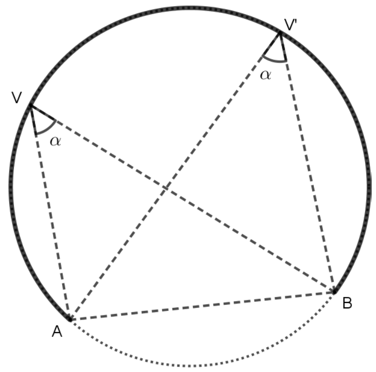


Figura 2.6: Arco capaz

2.2 Procedimentos

A seguir alguns esclarecimentos e procedimentos básicos que auxiliarão no entendimento dos processos empregados ao longo do texto.

2.2.1 Régua e compasso

A régua e o compasso formam o mais importante par de instrumentos do desenho geométrico.

A régua atualmente é um instrumento graduado – normalmente em centímetros e milímetros – utilizada para medir pequenas distâncias e, principalmente, para traçar linhas retas.

Todas as construções apresentadas ao longo do texto fazem uso da régua sem graduação, portanto ela não será utilizada para medir.

O compasso é composto de dois braços articulados, uma ponta de grafite, uma ponta seca (em geral metálica) e parafusos de fixação. É utilizado para traçar circunferências, arcos, transportar e comparar segmentos de reta.

Consideraremos possível utilizar esses dois objetos para:

- Traçar, por dois pontos distintos A e B, uma reta, uma semirreta, um segmento de reta ou uma circunferência de centro em A e raio AB;
- Traçar uma reta qualquer passando por um ponto;
- Traçar, a partir de três pontos não colineares, um ângulo ou um triângulo;
- Determinar pontos de intersecção entre duas retas, uma reta e uma circunferência ou entre duas circunferências. Essas são consideradas as três operações elementares das construções geométricas.

2.2.2 Descrição das construções

Para facilitar e resumir os procedimentos das construções utilizaremos alguns acordos quanto a linguagem que será utilizada. Vejamos alguns significados:

- "Centro em A" – colocar a ponta seca do compasso sobre o ponto A.

- "Raio AB" ou "raio a" – a abertura do compasso tem o comprimento de $\overline{AB}$ ou comprimento igual ao número a, respectivamente.
- "Traçar um arco" entende-se que seja com o auxílio do compasso. Na grande maioria dos casos não é necessário traçar uma circunferência inteira, optamos então por traçar apenas parte da mesma.
- "Traçar $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, ou $\overleftrightarrow{AB}$" entende-se que seja com o auxílio da régua.

2.3 Construções geométricas elementares

2.3.1 Transporte de segmento de reta

Consiste em construir um segmento de reta novo com o mesmo comprimento de um dado. (Figura 2.7).

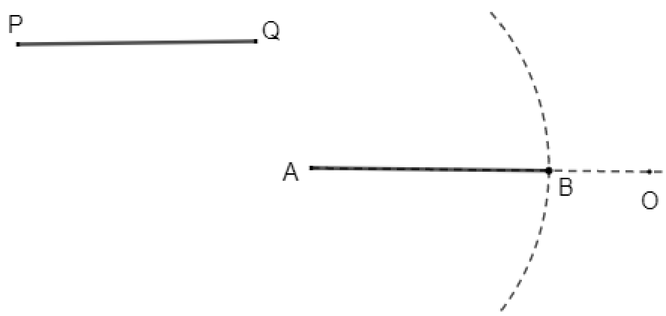


Figura 2.7: Transporte de segmento de reta

Procedimento:

– Traçar $\overrightarrow{AO}$.

– Centro em A, raio $\overline{PQ}$, traçar um arco. A interseção do arco com a semirreta é o ponto B.

– $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$.

Justificativa:
A existência do ponto B é justificada pelo Teorema 2.3.

2.3.2 Transporte de ângulo

Consiste em construir um ângulo, a partir de uma semirreta, congruente a um ângulo dado. (Figura 2.8).
Procedimento:

– Traçar $\overrightarrow{AO}$.

– Centro em V, raio livre, traçar um arco. As interseções do arco com os lados do ângulo $P\hat{V}T$ são os pontos B e C.

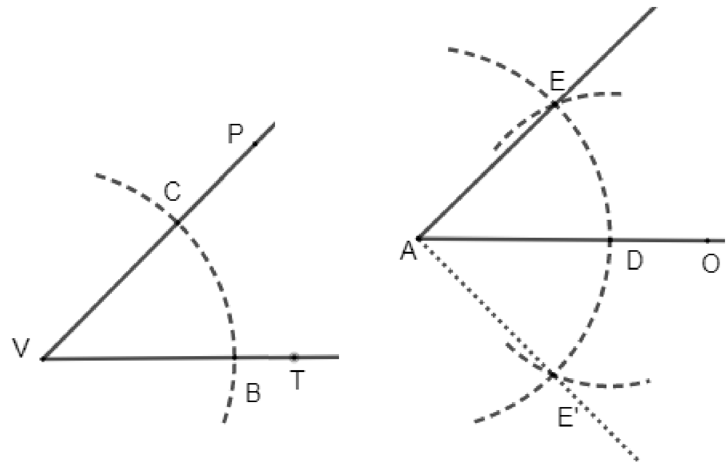


Figura 2.8: Transporte de ângulo

– Centro em A, raio igual ao anterior, traçar um arco. A interseção do arco com $\overrightarrow{AO}$ é o ponto D.

– Centro em D, raio $\overline{BC}$, traçar um arco. A intersecção dos arcos são os pontos E e E'. Escolhemos o ponto E uma vez que E' dará um resultado equivalente.

– Traçar $\overrightarrow{AE}$.

– $D\hat{A}E \cong P\hat{V}T$.

Justificativa:
O ângulo $D\hat{A}E$ tem como um de seus lados a semirreta $\overrightarrow{AO}$, e, pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos, é congruente ao ângulo $P\hat{V}T$ dado, sendo, portanto, o ângulo procurado.

2.3.3 Mediatriz de um segmento de reta

Consiste em traçar uma reta que seja perpendicular a um segmento de reta dado passando pelo seu ponto médio. (Figura 2.9).
Procedimento:

– Centro em A, raio maior que metade do comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$, traçar um arco de cada lado de $\overline{AB}$.

– Centro em B, raio igual ao anterior, traçar dois arcos. As interseções dos arcos definem os pontos P e Q.

– Traçar $\overleftrightarrow{PQ}$.

– A interseção de $\overleftrightarrow{PQ}$ com $\overline{AB}$ é o ponto M, médio de $\overline{AB}$.

– $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overline{AB}$.

Justificativa:
Os quatro arcos que traçamos são, na verdade, parte de duas circunferências de mesmo raio e centros em A e B, que pelo Teorema 2.4, encontram-se em dois pontos

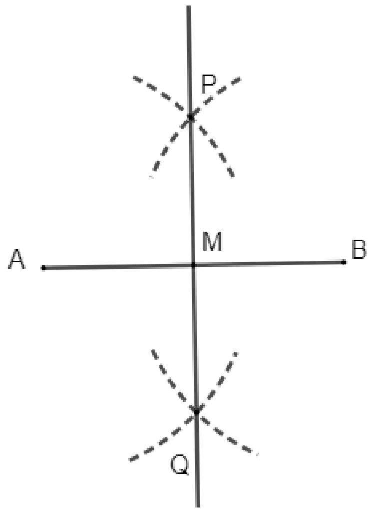


Figura 2.9: Reta mediatriz

que chamamos P e Q que são equidistantes de A e B, logo, pertencem à mediatriz de $\overline{AB}$.

2.3.4 Reta perpendicular a uma reta r por um ponto de r

Consiste em traçar uma reta perpendicular a uma reta r dada passando por um ponto pertencente a ela. (Figura 2.10).

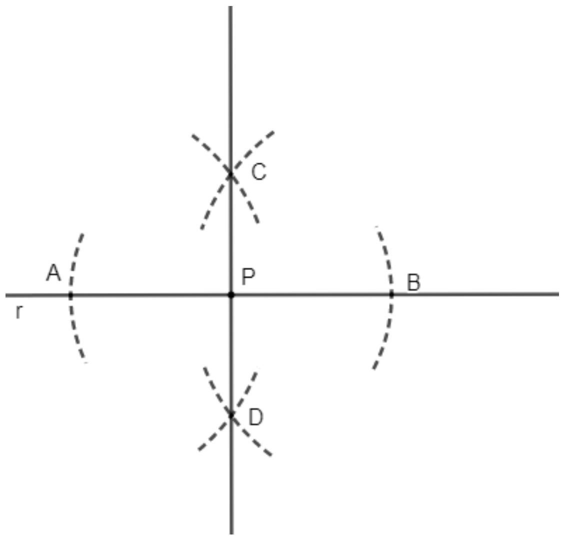


Figura 2.10: Reta perpendicular à r passando por P, $P \in r$.

Procedimento:

- Centro em P, raio livre, traçar dois arcos interceptando r. As interseções determinam os pontos A e B.

- Centro em A, raio maior que o anterior, traçar dois arcos, um de cada lado de r.

- Centro em B, raio igual ao anterior, traçar dois arcos. As interseções dos arcos definem os pontos C e D.

– Traçar $\overleftrightarrow{CD}$.

– $\overleftrightarrow{CD} \perp r$.

Justificativa:
P é o ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$. A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.

2.3.5 Reta perpendicular a uma reta r por um ponto fora de r

Consiste em traçar uma reta perpendicular a uma reta r dada passando por um ponto fora dela. (Figura 2.11).

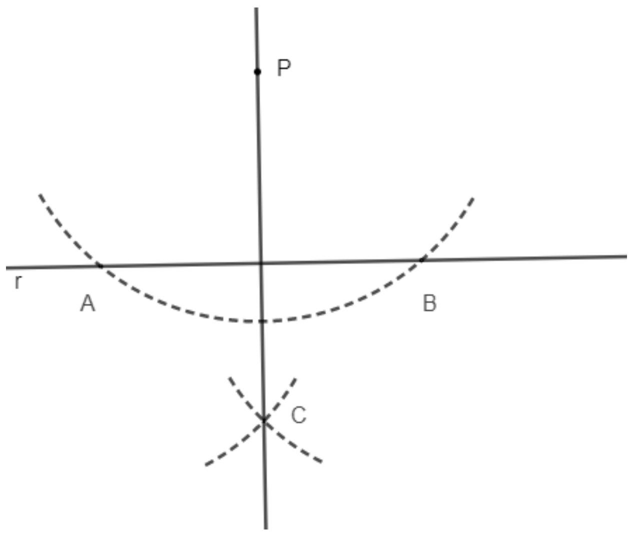


Figura 2.11: Reta Perpendicular à r passando por P, $P \notin r$.

Procedimento:

– Centro em P, raio maior que a distância entre P e r, traçar um arco interceptando r duas vezes. As interseções determinam os pontos A e B.

– Centro em A, raio maior que metade de $\overline{AB}$, traçar um arco.

– Centro em B, raio igual ao anterior, traçar um arco. A interseção dos arcos define o ponto C.

– Traçar $\overleftrightarrow{CP}$.

– $\overleftrightarrow{CP} \perp r$.

Justificativa:
Como P é equidistante de A e de B então P pertence a mediatriz de $\overline{AB}$.

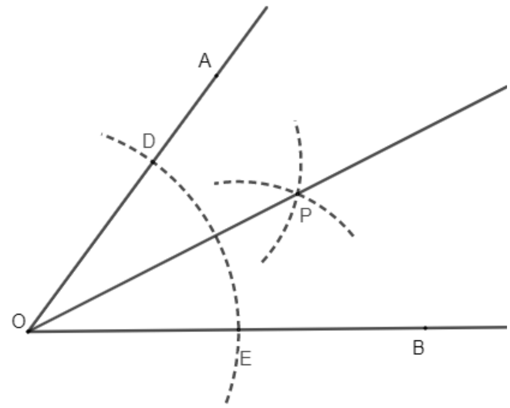


Figura 2.12: Bissetriz de um ângulo

2.3.6 Bissetriz de um ângulo

Consiste em traçar uma semirreta pelo vértice de um ângulo dado dividindo-o ao meio. (Figura 2.12).

Procedimento:

- Centro em O, raio livre, traçar um arco. As interseções do arco com os lados de $A\hat{O}B$ são os pontos D e E.
- Centro em D, raio maior que metade de $\overline{DE}$, traçar um arco.
- Centro em E, raio igual ao anterior, traçar um arco. A interseção dos arcos define o ponto P.
- Traçar $\overrightarrow{OP}$.
- $A\hat{O}P \cong P\hat{O}B$.

Justificativa:

Os triângulos DOP e POE são congruentes pelo caso L.L.L. daí decorre a congruência dos ângulos.

2.3.7 Retas paralelas I

Consiste em traçar uma reta paralela à reta s, dada a distância d entre as duas. (Figura 2.13).

Procedimento:

- Traçar a partir de dois pontos distintos A e B, as retas m e n perpendiculares a r. (Figura 2.10).
- Centro em A, raio d, traçar um arco. A interseção do arco com a reta m é o ponto C.
- Centro em B, raio d, traçar um arco. A interseção do arco com a reta n é o ponto D.
- Traçar $\overleftrightarrow{CD}$

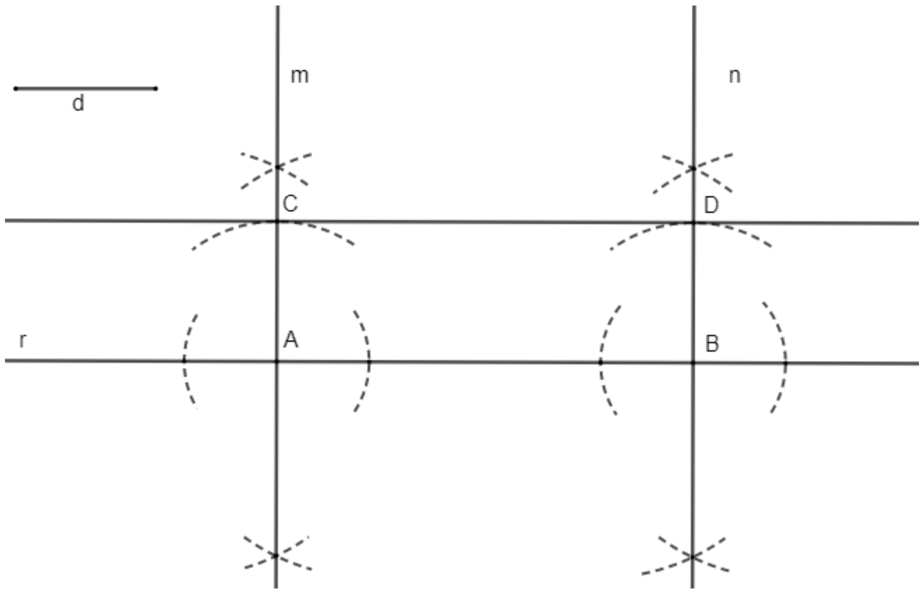


Figura 2.13: Retas Paralelas I

– $\overleftrightarrow{CD} \parallel r$.

Justificativa:
O quadrilátero $ABDC$ tem os lados opostos congruentes, portanto é um paralelogramo.

2.3.8 Retas paralelas II

Consiste em traçar uma reta paralela à reta r, passando por um ponto P fora de r. (Figura 2.14).

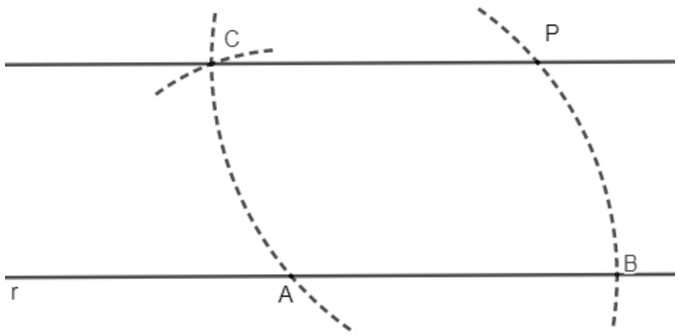


Figura 2.14: Retas paralelas II

Procedimento:

– Centro em P, raio maior que a distância entre r e P, traçar um arco. A interseção do arco com r é o ponto A.

– Centro em A, raio igual ao anterior, traçar um arco. A interseção do arco com r é o ponto B. Note que o arco passa por P.

– Centro em A, raio $\overline{PB}$, traçar um arco. A interseção dos arcos é o ponto C.

– $\overleftrightarrow{CP} \parallel r$.

Justificativa:
O quadrilátero $ABPC$ tem os lados opostos congruentes, portanto é um paralelogramo.

2.4 Arco capaz

Consiste em construir o arco capaz de um ângulo conhecido $C\hat{E}D$ dado um segmento de reta $\overline{AB}$. (Figura 2.15).

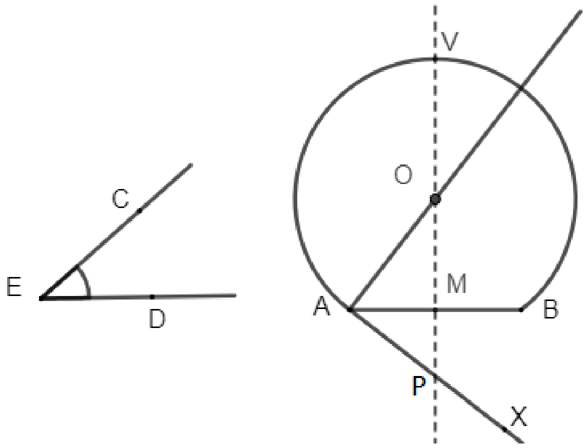


Figura 2.15: $\widehat{\text{AVB}}$ é o arco capaz de $C\hat{E}D$

Procedimento:

– Traçar a mediatriz de $\overline{AB}$.

– Transportar $C\hat{E}D$ sobre $\overline{AB}$. Traçar $\overrightarrow{AX}$, obtendo o ângulo $B\hat{A}X$.

– Traçar, por A, a perpendicular a $\overrightarrow{AX}$. A interseção desta perpendicular com a mediatriz de $\overline{AB}$ é o Ponto O, centro do arco capaz.

– Centro em O, raio $\overline{AO}$, traçar o arco capaz $\widehat{\text{AVB}}$.

Justificativa:
M é o ponto médio $\overline{AB}$ e P a intersecção da mediatriz $\overline{AB}$ com $\overleftrightarrow{AX}$. Os triângulos retângulos OAP e AMP são semelhantes pelo caso A.A. de semelhança de triângulos, assim temos $A\hat{O}P \cong C\hat{E}D$. Como o triângulo OAB é isósceles e a reta $\overleftrightarrow{OM}$ é a mediatriz da base, temos $A\hat{O}B = 2A\hat{O}M$. Temos então que o ângulo inscrito $A\hat{V}B$ tem medida igual a metade do ângulo central $A\hat{O}B$ pois definem o mesmo arco correspondente $\widehat{\text{AVB}}$, ou seja, a medida de $A\hat{V}B$ é igual a medida de $C\hat{E}D$.

2.5 Triângulos

Nesta seção discutiremos diversas maneiras de se construir um triângulo a partir de seus elementos.

2.5.1 Triângulo equilátero

Consiste em construir um triângulo equilátero conhecendo a medida d de seu lado. (Figura 2.16).

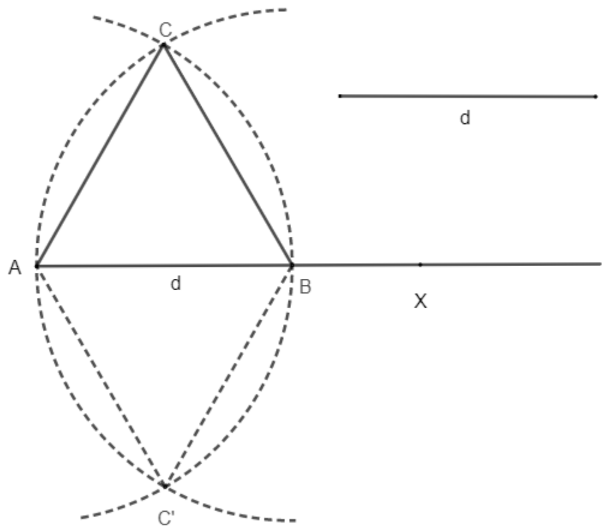


Figura 2.16: Triângulo equilátero

Procedimento:

- Traçar $\overrightarrow{AX}$.
- Centro em A, raio d, traçar um arco. A interseção do arco com a semirreta é o ponto B.
- Centro em B, raio d, traçar um arco. As interseções dos arcos são os pontos C e C'. Escolhemos o ponto C pois o ponto C' nos dará um resultado equivalente à C.
- Traçar $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

Justificativa:
Os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes a d, logo ABC é um triângulo equilátero.

2.5.2 Triângulo conhecidas as medidas de seus lados

Consiste em construir um triângulo dadas as medida a, b e c de seus três lados. (Figura 2.17).

Procedimento:

- Traçar $\overrightarrow{BX}$.
- Centro em B, raio a, traçar um arco. A interseção do arco com a semirreta é o conto C.
- Centro em C, raio b, traçar um arco.

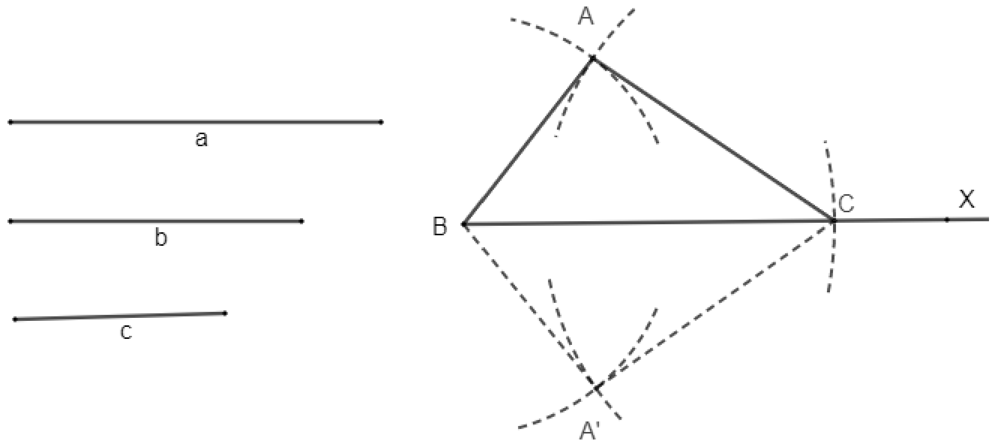


Figura 2.17: Triângulo conhecidas as medidas de seus lados

– Centro em B, raio c, traçar um arco. A interseção dos arcos são os pontos A e A'. Escolheremos o ponto A pois A' nos dará um resultado equivalente.

– Traçar $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Justificativa:
O triângulo ABC está determinado pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos e existe desde que cada um de seus lados seja menor que a soma dos outros dois.

2.5.3 Triângulo conhecidas as medidas de dois lados e do ângulo entre eles

Consiste em construir um triângulo dadas as medidas a e b de dois de seus lados e do ângulo α entre eles. (Figura 2.18).

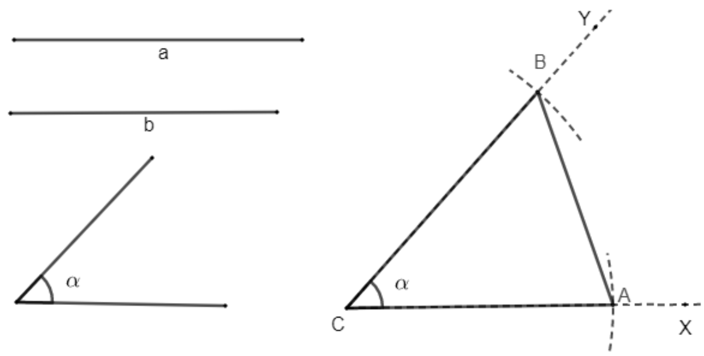


Figura 2.18: Triângulo conhecidas as medidas de dois lados e do ângulo entre eles

Procedimento:

– Traçar $\overrightarrow{CX}$.

– Centro em C, raio a, traçar um arco. A interseção do arco com a semirreta é o ponto A.

- Transportar o ângulo α para $\overrightarrow{CX}$.
- Traçar a $\overrightarrow{CY}$.
- Centro em C, raio b, traçar um arco. A interseção do arco com $\overrightarrow{CY}$ é o ponto B.
- Traçar $\overline{AB}$.

Justificativa:
O triângulo ABC está determinado pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos.

2.5.4 Triângulo conhecidas as medidas de dois ângulos e do lado adjacente a eles

Consiste em construir um triângulo dadas as medidas α e β de dois de seus ângulos e do lado a adjacente a esses ângulos. (Figura 2.19).

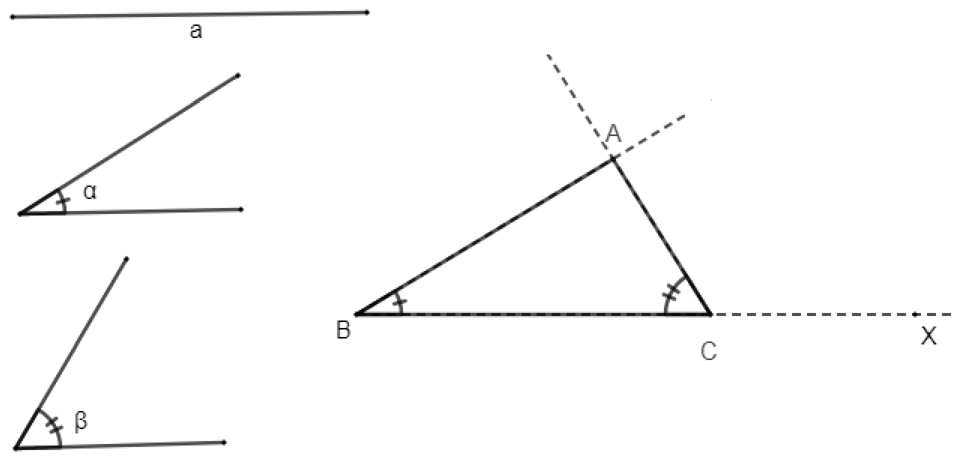


Figura 2.19: Triângulo conhecidas as medidas de dois ângulos e do lado adjacente a eles

Procedimento:

- Traçar $\overrightarrow{BX}$.
- Transportar o segmento de reta a sobre $\overrightarrow{BX}$ determinando o ponto C.
- Num mesmo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ transportar o ângulo α sobre $\overrightarrow{BX}$ e o ângulo β sobre $\overrightarrow{CB}$. A interseção dos lados dos ângulos é o ponto A.

Justificativa:
O triângulo ABC está determinado pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos.

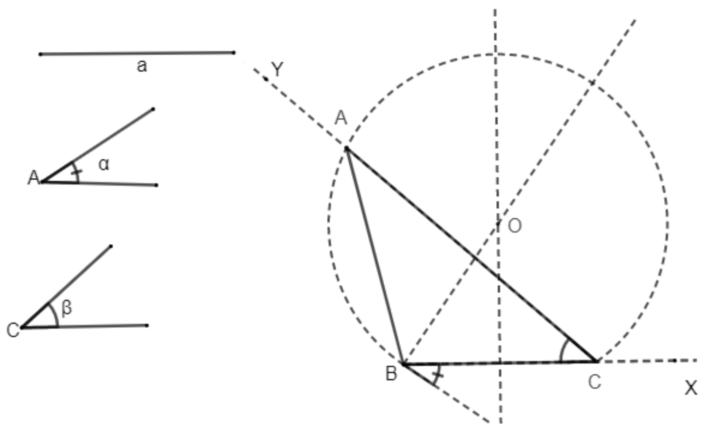


Figura 2.20: Triângulo conhecidas as medidas de um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto

2.5.5 Triângulo conhecidas as medidas de um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto

Consiste em construir um triângulo dadas as medidas de um lado a, um ângulo oposto a esse lado β e um ângulo adjacente a esse lado α. (Figura 2.20).

Procedimento:

- Traçar $\overrightarrow{BX}$.
- Transportar o segmento de reta a sobre $\overrightarrow{BX}$ determinando o ponto C.
- Transportar sobre $\overrightarrow{CB}$ o ângulo α. Traçar $\overrightarrow{CY}$.
- Traçar sobre $\overline{BC}$ o arco capaz BC do ângulo β. A interseção do arco com $\overrightarrow{CY}$ é o ponto A.
- Traçar $\overline{AB}$.

Justificativa:

O triângulo ABC está determinado pelo caso L.A.A. de congruência de triângulos.

2.5.6 Triângulo retângulo conhecidas a hipotenusa e a altura relativa a ela

Consiste em construir um triângulo retângulo dadas as medidas a da hipotenusa e h_a da altura relativa à hipotenusa. (Figura 2.21).

Procedimento:

- Transportar a hipotenusa a sobre $\overrightarrow{BP}$ determinando o ponto C.
- Traçar o arco capaz $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ do ângulo reto.
- Traçar a reta r, paralela à $\overleftrightarrow{BC}$, a uma distância h_a. A interseção da reta r com $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ são os pontos A e A'.

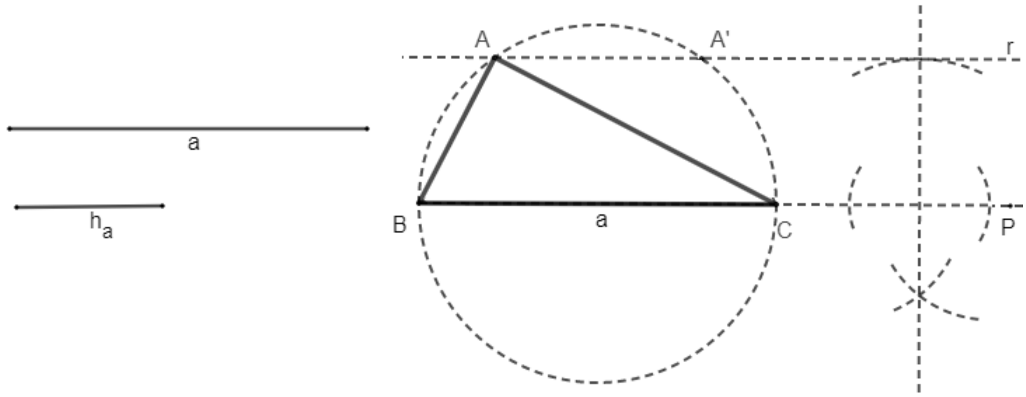


Figura 2.21: Triângulo retângulo conhecidas a hipotenusa e a altura relativa a ela

– Traçar o triângulo ABC. Escolhemos o ponto A pois A' nos dará um resultado equivalente.

Comentário:
O triângulo fica bem determinado pela imposição dos passos da construção.

2.5.7 Triângulo conhecidos um lado, a altura e a mediana relativas a esse lado

Consiste em construir um triângulo dadas as medidas a de um lado, h_a da altura e m_a da mediana relativas a esse lado. (Figura 2.22).

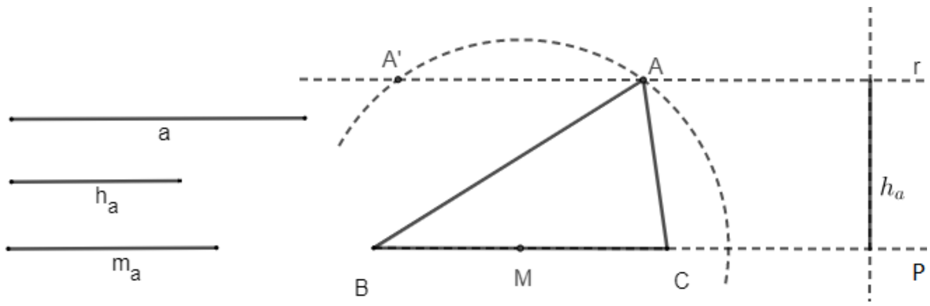


Figura 2.22: Triângulo conhecidos um lado, a altura e a mediana relativas a ele

Procedimento:

– Transportar o segmento de reta a sobre $\overrightarrow{BP}$ determinando o ponto C.

– Traçar a reta r, paralela à $\overleftrightarrow{BC}$, a uma distância h_a.

– Traçar o ponto médio M de $\overline{BC}$.

– Traçar a circunferência $C(M,m_a)$. A interseção da circunferência com a reta r são os pontos A e A'.

– Traçar o triângulo ABC. Escolhemos o ponto A pois A' nos dará um resultado equivalente.

Discussão do problema:

O triângulo fica bem determinado pela imposição dos passos da construção.

Se $h_a > m_a$ a construção não terá solução.

Se $h_a = m_a$ a construção terá como solução um triângulo isósceles.

Se $h_a < m_a$ a construção terá como solução quatro triângulos escalenos congruentes.

2.5.8 Triângulo conhecidos seu perímetro e dois de seus ângulos

Consiste em construir um triângulo dada a medida $2p$ de seu perímetro e as medidas $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de dois de seus ângulos. (Figura 2.23).

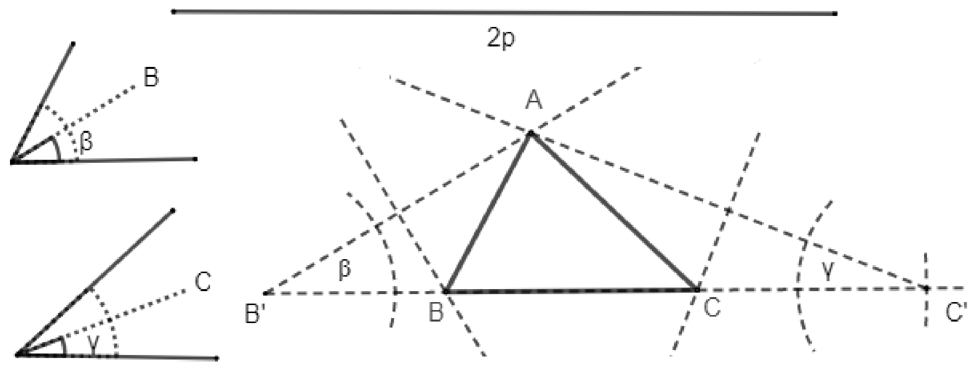


Figura 2.23: Triângulo conhecidos seu perímetro e dois de seus ângulos

Procedimento:

- Transportar o segmento de reta de medida $2p$ (perímetro do triângulo) sobre uma semirreta, obter $\overline{B'C'}$.
- Traçar as bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ obtendo os ângulos de medidas β e γ.
- Transportar sobre $\overrightarrow{B'C'}$ o ângulo de medida β e sobre $\overrightarrow{C'B'}$ o ângulo de medida γ, ambos em um mesmo semiplano definido por $\overleftrightarrow{B'C'}$.
- A interseção dos lados dos ângulos β e γ é o ponto A.
- Traçar as mediatrizes de $\overline{B'A}$ e $\overline{C'A}$. As interseções das mediatrizes com $\overline{B'C'}$ são os pontos B e C, vértices do triângulo procurado.
- Traçar $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

Justificativa:

Os triângulos ABB' e ACC' são isósceles de bases $\overline{AB'}$ e $\overline{AC'}$, respectivamente. O ângulo $A\hat{B}C$ é externo ao triângulo ABB' e portanto vale o dobro de β, ou seja tem medida igual a medida do ângulo $\hat{B}$. De modo análogo temos que a medida do ângulo $A\hat{C}B$ é o dobro de γ, ou seja tem medida igual a medida do ângulo $\hat{C}$.

Como os triângulos ABB' e ACC' são isósceles temos que $AB + BC + AC = BB' + BC + CC' = 2p$.

2.6 Ângulos

Utilizando o transporte de ângulo e a bissetriz podemos construir muitos ângulos bem como operar com suas medidas.

Definição 2.4 (Ângulo reto): Ao longo do texto usaremos a expressão *ângulo reto* para designar um ângulo cuja medida seja igual a 90°.

2.6.1 Ângulos de 60° e 30°

Consiste em construir um ângulo medindo 60° e outro medindo 30°. (Figura 2.24).

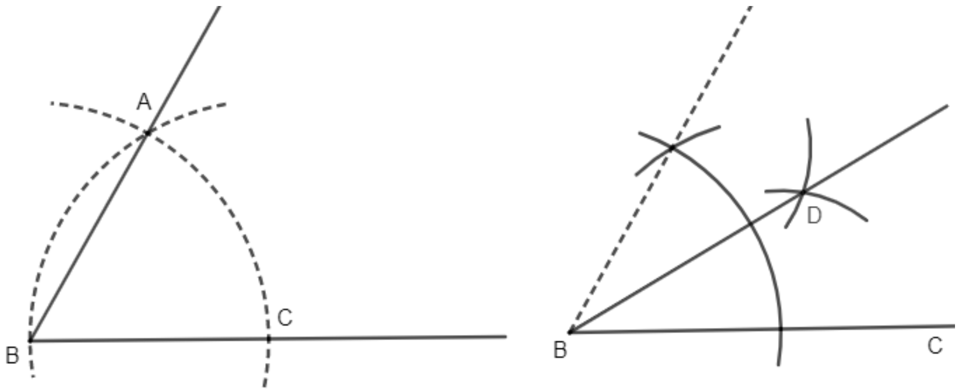


Figura 2.24: Ângulos de 60° e 30°

Procedimento:

– Para o ângulo de 60° basta construir um triângulo ABC equilátero com lado qualquer.

– Para o ângulo de 30° basta construir a bissetriz do ângulo 60°.

Justificativa:
Os triângulos equiláteros são também equiângulos, logo cada ângulo interno tem 60°. A bissetriz do ângulo de 60° nos dá o ângulo de 30°.

2.6.2 Ângulo de 15°

Consiste em construir um ângulo medindo 15°. (Figura 2.25).
Procedimento e justificativa:

– Para o ângulo de 15° basta construir a bissetriz do ângulo 30°.

2.6.3 Ângulo de 120°

Consiste em construir um ângulo medindo 120°. (Figura 2.26).
Procedimento:

– Traçar uma semirreta com origem em O.

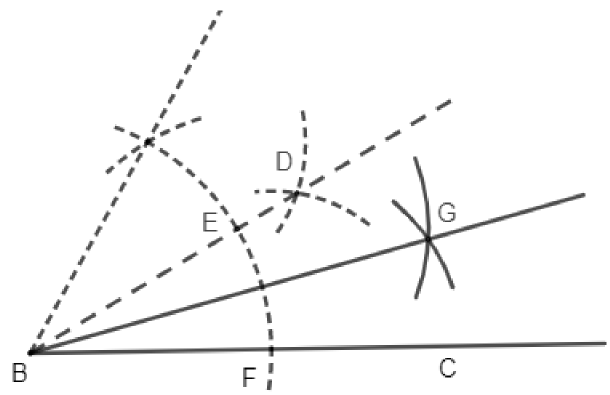


Figura 2.25: Ângulo de 15°

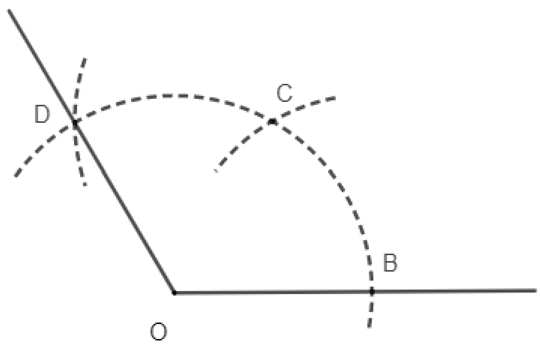


Figura 2.26: Ângulo de 120°

– Centro em O, raio livre, traçar um arco. A interseção do arco com a semirreta é o ponto B.

– Centro em B, raio igual ao anterior, traçar um arco. A interseção dos arcos é o ponto C.

– Centro em C, raio igual ao anterior, traçar um arco. A interseção dos arcos é o ponto D.

Justificativa:
O ângulo de 120° é a soma de dois ângulos de 60°.

2.6.4 Ângulo de 90°

Consiste em construir um ângulo medindo 90°. (Figura 2.27).
Procedimento:

– Construir um ângulo de 120°.

– Traçar a bissetriz do ângulo $C\hat{O}D$.

Justificativa:
O ângulo de 90° é a soma dos ângulos de 60° e 30°.

Trouxemos aqui o quarto modo diferente de construir um ângulo de 90°, as construções das perpendiculares e da mediatriz também têm como resultado o ângulo

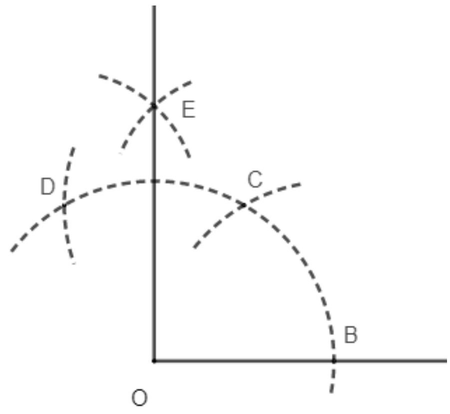


Figura 2.27: Ângulo de $90\,^\circ$

reto. A especificidade deste método é que podermos escolher qual ponto será vértice do ângulo.

2.6.5 Ângulo de $45\,^\circ$

Consiste em construir um ângulo medindo $45\,^\circ$. (Figura 2.28).

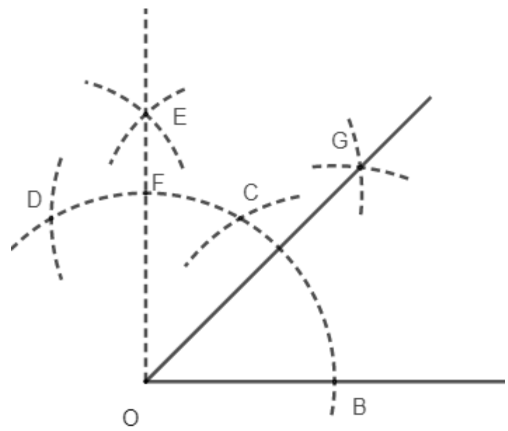


Figura 2.28: Ângulo de $45\,^\circ$

Procedimento e justificativa:

– Para o ângulo de $45\,^\circ$ basta construir a bissetriz do ângulo $90\,^\circ$.

2.6.6 Ângulo de $75\,^\circ$

Consiste em construir um ângulo medindo $75\,^\circ$. (Figura 2.29).
Procedimento:

– Construir um ângulo de $90\,^\circ$.

– Traçar a bissetriz do ângulo $C\hat{O}E$.

Justificativa:
O ângulo de $75\,^\circ$ é a soma dos ângulos de $60\,^\circ$ e $15\,^\circ$.

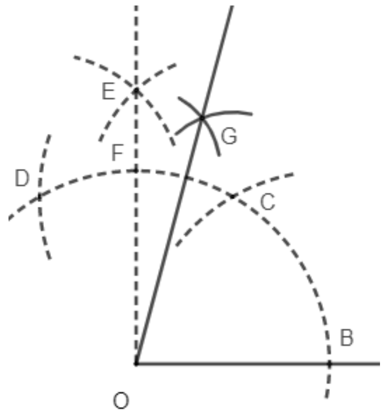


Figura 2.29: Ângulo de 75°

2.6.7 Dividir um ângulo reto em três partes congruentes

Consiste em dividir um ângulo medindo 90° em três ângulos de 30°. (Figura 2.30).

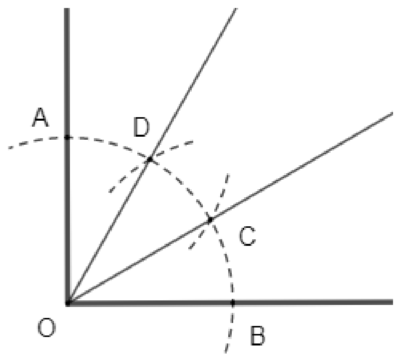


Figura 2.30: Dividir um ângulo reto em três parte congruentes

Procedimento:

– A partir do ângulo reto $A\hat{O}B$ Traçar dois ângulos de 60°.

O problema da trisecção do ângulo ocupou por muito tempo os matemáticos antigos, hoje sabemos que nem todos os ângulo podem ser divididos em três partes congruentes usando-se apenas régua e compasso. Não é nosso objetivo discutir a trisecção dos ângulos, para maiores detalhes consulte [1] e [6].

2.6.8 Traçar a bissetriz de um ângulo com vértice inacessível

Consiste em traçar a bissetriz do ângulo $A\hat{V}B$ cujo vértice não se encontra dado. (Figura 2.31).

Procedimento:

– Traçar r, paralela à $\overrightarrow{VB}$ por um ponto C de $\overrightarrow{VA}$.

– Centro em C, raio livre, traçar um arco. As interseções dos arcos com $\overrightarrow{VA}$ e r são os pontos D e E.

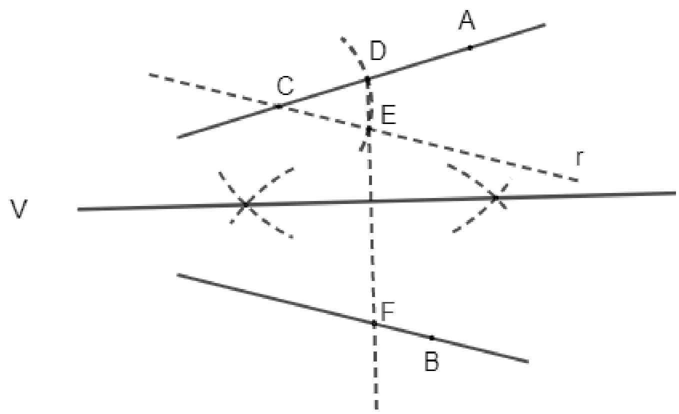


Figura 2.31: Bissetriz de um ângulo com vértice inacessível

– Traçar $\overrightarrow{DE}$. A interseção de $\overrightarrow{DE}$ com $\overrightarrow{VB}$ é o ponto F.

– Traçar a mediatriz de $\overline{DF}$.

Justificativa:

O triângulo VDF é semelhante ao triângulo CDE pelo caso A.A., logo é isósceles de base $\overline{DF}$ e a mediatriz relativa à base coincide com a bissetriz.

3

Segmentos Construtíveis - Expressões Algébricas

Neste capítulo nos dedicaremos às construções geométricas com régua e compasso que representam números e expressões algébricas.

A construção de segmentos está relacionada com a de números, pois são construtíveis apenas os segmentos cujas medidas sejam números construtíveis.

Passaremos pela *Teoria Algébrica dos Números* para verificar quais são os números construtíveis.

Vamos, inicialmente, descrever construções que representam números e expressões que podem ser executadas com régua e compasso.

3.1 Segmentos construtíveis

As duas primeiras construções apesar de extremamente simples são muito utilizadas.

3.1.1 Soma de dois segmentos

Consiste em construir o segmento $a + b$ dados dois segmentos de reta de comprimentos a e b. (Figura 3.1).

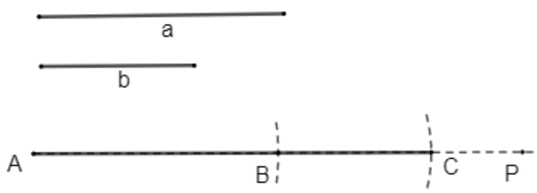


Figura 3.1: Soma dos segmentos de medidas a e b.

Procedimento:

– Transportar sobre $\overrightarrow{AP}$ o segmento de comprimento a. A interseção do arco com $\overrightarrow{AP}$ é o ponto B.

– Transportar sobre $\overrightarrow{BP}$ o segmento de comprimento b. A interseção do arco com $\overrightarrow{BP}$ é o ponto C.

– $\overline{AC} = a + b$.

3.1.2 Subtração de dois segmentos

Consiste em construir o segmento $a - b$ dados dois segmentos de reta de comprimentos a e b tais que $a > b$. (Figura 3.2).

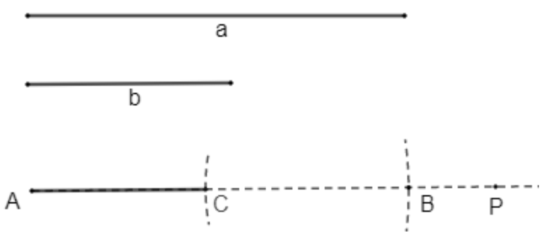


Figura 3.2: Diferença entre segmentos de medidas a e b.

Procedimento:

– Transportar sobre $\overrightarrow{AP}$ o segmento de comprimento a. A interseção do arco com $\overrightarrow{AP}$ é o ponto B.

– Transportar sobre $\overrightarrow{BA}$ o segmento de comprimento b. A interseção do arco com $\overrightarrow{BP}$ é o ponto C.

– $\overline{AC} = a - b$.

3.1.3 Raízes de números naturais

Consiste em construir um segmento de reta igual a $\sqrt{a}$, sendo a um número natural qualquer. (Figura 3.3).

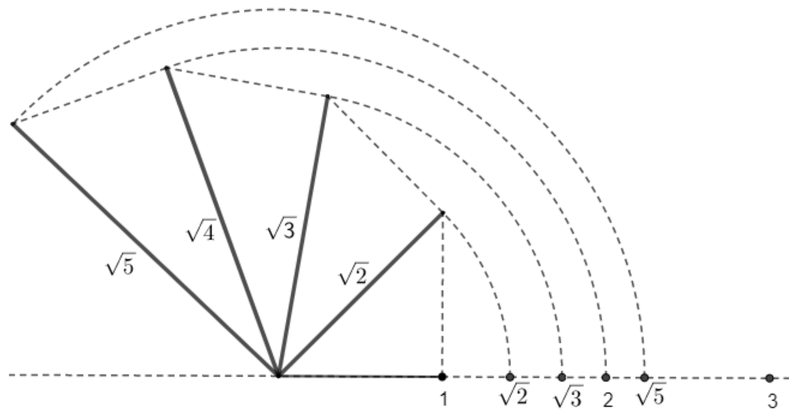


Figura 3.3: Segmentos iguais a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... etc.

Procedimento:

– Construir um triângulo retângulo isósceles cujo cateto seja o segmento unitário. (Figura 2.18).

– A hipotenusa do triângulo medirá $\sqrt{2}$.

– Usando o procedimento anterior construir o triângulo retângulo cujos catetos meçam $\sqrt{2}$ e 1, respectivamente.

– A hipotenusa do triângulo medirá $\sqrt{3}$.

– Repetir os passos anteriores até alcançar o número $\sqrt{a}$ para a desejado.

Justificativa:
Os comprimentos dos segmentos representados pelas hipotenusas decorrem diretamente do *Teorema de Pitágoras*.

3.1.4 A 4ª proporcional

Consiste em construir, dados os segmentos de reta de comprimentos a, b e c, um segmento de reta igual a x, de modo que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$. (Figura 3.4).

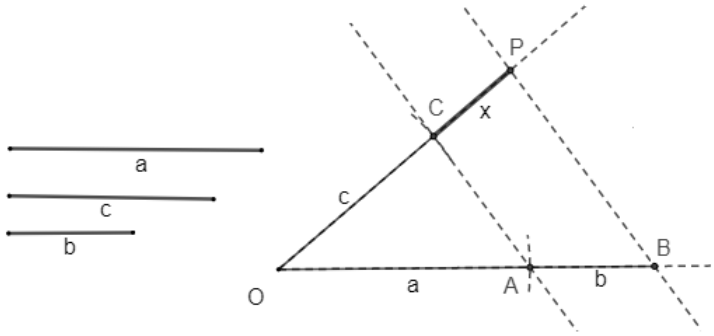


Figura 3.4: x é a 4ª proporcional de a, b e c.

Procedimento:

– Construir um ângulo arbitrário com vértice no ponto O.

– Centro em O, raio a, definir o ponto A sobre um dos lados do ângulo.

– Centro em A, raio b, definir o ponto B sobre o mesmo lado do ângulo.

– Centro em O, raio c, definir o ponto C sobre o outro lado do ângulo.

– Traçar $\overleftrightarrow{AC}$.

– Traçar por B um reta paralela a $\overleftrightarrow{AC}$. Definir o ponto P sobre $\overrightarrow{OC}$.

– O segmento $\overline{CP} = x$ é a 4ª proporcional entre a, b e c.

Justificativa:
O resultado segue diretamente do *Teorema de Tales*.

Observação: A construção da 4ª proporcional nos dá o produto ou o quociente de dois segmentos, e consequentemente o de números, bastando para isso que um dos segmentos dados seja o segmento unitário.

Para construir um segmento de tamanho $a \cdot b$ basta tomar a 4ª proporcional dos segmentos de medidas 1(unitário), a e b, nessa ordem, agora, se quisermos construir um segmento de tamanho $\dfrac{a}{b}$ tomamos a 4ª proporcional dos segmentos b, 1(unitário) e a, respectivamente.

3.1.5 A 3ª proporcional

Consiste em construir, dados os segmentos de reta de comprimentos a e b, um segmento de reta igual a x, de modo que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{x}$. (Figura 3.5).

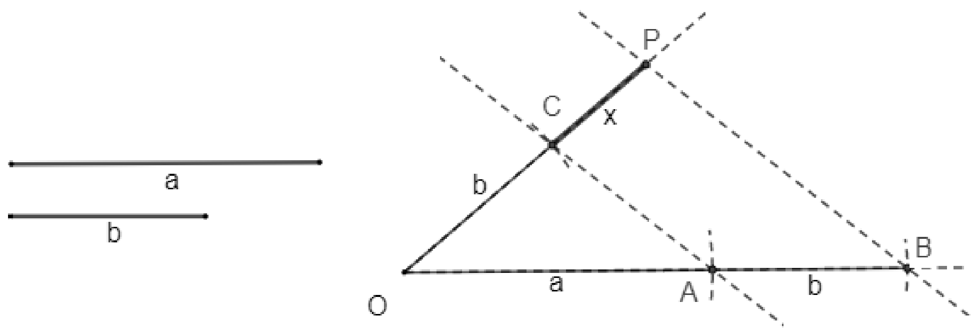


Figura 3.5: x é a 3ª proporcional entre a e b.

Procedimento:

– Construir um ângulo arbitrário com vértice no ponto O.

– Centro em O, raio a, definir o ponto A sobre um dos lados do ângulo.

– Centro em A, raio b, definir o ponto B sobre o mesmo lado do ângulo.

– Centro em O, raio b, definir o ponto C sobre o outro lado do ângulo.

– Traçar $\overleftrightarrow{AC}$.

– Traçar por B um reta paralela a $\overleftrightarrow{AC}$. Definir o ponto P sobre $\overrightarrow{OC}$.

– O segmento $\overline{CP} = x$ é a 3ª proporcional entre a e b.

Justificativa:
O resultado segue diretamente do *Teorema de Tales*.

3.1.6 Média geométrica

Consiste em construir, dados os segmentos de reta de comprimentos a e b, um segmento de reta a $x = \sqrt{ab}$. (Figura 3.6).
Procedimento:

– Centro em A raio a. Definir o ponto B sobre $\overrightarrow{AY}$.

– Centro em B raio b. Definir o ponto C sobre $\overrightarrow{AY}$.

– Traçar o ponto médio de $\overline{AC}$. Definir o ponto M.

– Centro em M, raio $\overline{AM}$, traçar $\overset{\frown}{\text{AC}}$.

– Traçar uma perpendicular a $\overline{AC}$ passando por B. A interseção da reta com o arco AC é o ponto D.

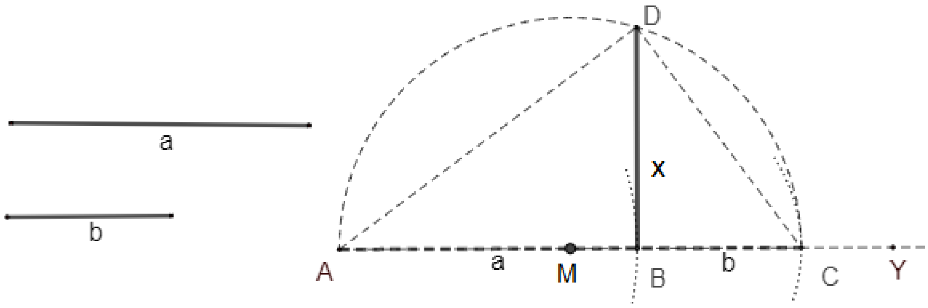


Figura 3.6: $x = \sqrt{ab}$.

– $x = \overline{BD}$ é a média geométrica entre a e b.

Justificativa:

O triângulo ACD é retângulo em D pois está inscrito em uma semicircunferência. $\overline{BD}$ é a altura relativa à hipotenusa $\overline{AC}$. Pela semelhança entre os triângulo ABD e DBC (caso AA) temos que: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$ assim, $\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}$, ou seja, $\overline{BD}$ é a média geométrica dos segmentos que determina sobre a hipotenusa.

Observação: A construção da média geométrica pode substituir a construção de raízes de números reais bastando para isso que um dos segmentos dados seja o segmento unitário.

3.1.7 O quadrado de um segmento dado

Consiste em construir, dado um segmento de reta de comprimento a, um segmento de reta igual a a^2. (Figura 3.7).

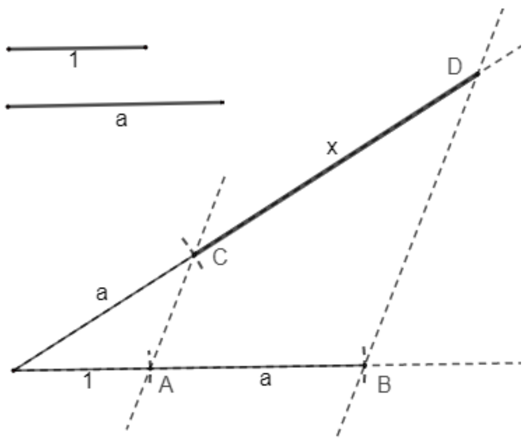


Figura 3.7: $x = a^2$.

Procedimento:

– Construir um ângulo arbitrário.

– Transportar o segmento unitário seguido do segmento a sobre um de seus lados. Obter os pontos A e B

– Transportar o segmento a sobre o outro lado. Obter o ponto C.

– Traçar $\overleftrightarrow{AC}$.

– Traçar por B um reta paralela a $\overleftrightarrow{AC}$. Definir o ponto D.

– $x = \overline{CD} = a^2$

Justificativa:

Observemos que essa é a construção da 3ª proporcional entre o segmento unitário e o segmento de comprimento a. Assim, pelo *Teorema de Tales* temos que $\dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{x}$ assim, $x = a^2$.

3.1.8 O segmento inverso

Consiste em construir, dado um segmentos de reta de comprimento a, um segmento de reta igual a $\dfrac{1}{a}$. (Figura 3.8).

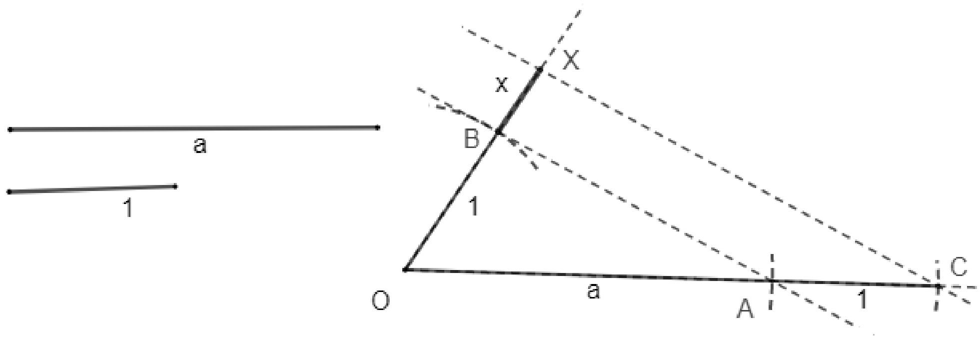


Figura 3.8: $x = \dfrac{1}{a}$.

Procedimento:

– Usar a construção da 3ª proporcional considerando os segmentos de comprimentos a e 1. (Figura 3.5).

Justificativa:

Pelo *Teorema de Tales* temos que $a = \dfrac{1}{x}$ assim, $x = \dfrac{1}{a}$.

3.1.9 Divisão de segmentos em partes iguais

Consiste em dividir um segmentos de reta dado em m partes iguais sendo m um número natural. (Figura 3.9).

Procedimento:

– Traçar um ângulo arbitrário $B\hat{A}C$.

– Traçar sobre $\overrightarrow{AC}$, com raio qualquer, consecutivamente m arcos de modo que o próximo tenha centro na interseção do arco anterior com a semirreta. Obter os pontos P_1, P_2, ..., P_{m-1}, P_m.

– Traçar $\overleftrightarrow{CB}$.

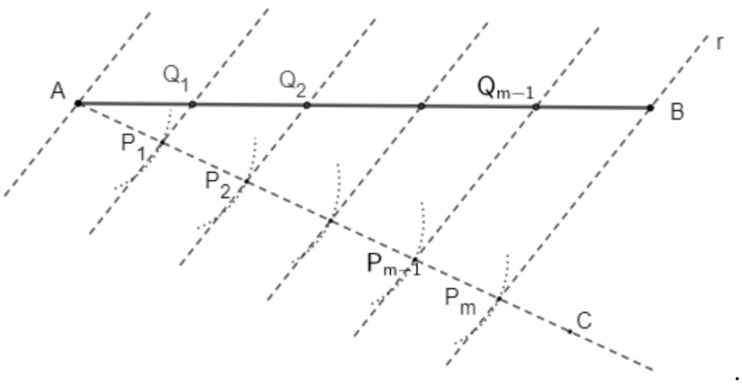


Figura 3.9: Segmento dividido em m partes iguais.

– Traçar por P_1, P_2, ..., P_{m-1} e P_m, retas paralelas a $\overleftrightarrow{CB}$. Obter os pontos Q_1, Q_2, ..., Q_{m-1}, que dividem $\overline{AB}$ em m partes congruentes.

Justificativa:
O resultado segue do *Teorema de Tales*.

3.1.10 Divisão de segmentos em partes proporcionais

Consiste em dividir um segmentos de reta dado em partes proporcionais a segmentos dados. (Figura 3.10).

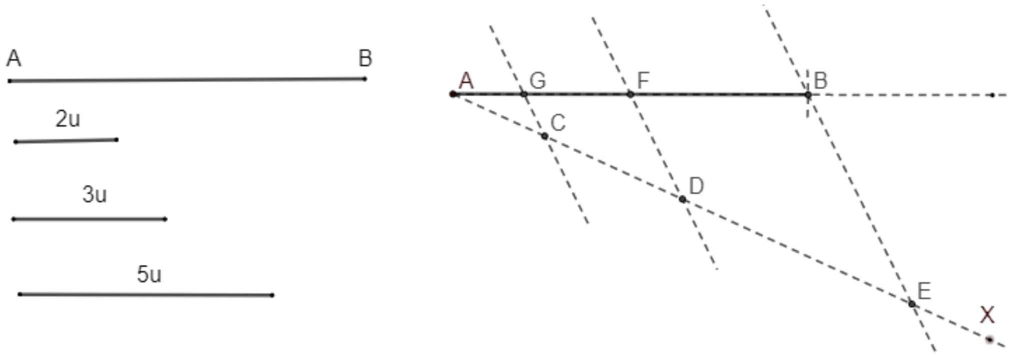


Figura 3.10: Segmento dividido em partes proporcionais a 2, 3 e 5.

Procedimento:

– Traçar um ângulo arbitrário $B\hat{A}X$.

– Transportar sobre $\overrightarrow{AX}$, de modo consecutivo, os segmentos de reta de medidas $2u$, $3u$ e $5u$. Obter os pontos C, D e E.

– Traçar $\overleftrightarrow{BE}$.

– Traçar por C, D e E retas paralelas a $\overleftrightarrow{BE}$. Obter os pontos F e G que dividem $\overline{AB}$ na proporção desejada.

Justificativa:
O resultado segue do *Teorema de Tales*.

3.2 Expressões algébricas construtíveis

3.2.1 Divisão harmônica

Consiste em dividir um segmento de reta dado numa razão $k = \dfrac{m}{n}$ sendo m e n os comprimentos de segmentos dados. (Figura 3.11).

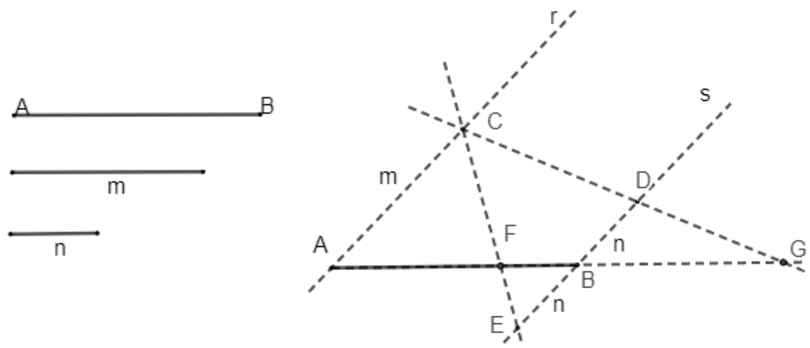


Figura 3.11: Divisão harmônica.

Procedimento:

- Transportar $\overline{AB}$ para uma semirreta.
- Traçar por A uma reta r obliqua a $\overleftrightarrow{AB}$.
- Transportar sobre r o segmento m. Definir o ponto C.
- Traçar por B a reta s paralela à r.
- Transportar com centro em B o segmento n nos dois semiplanos definidos por $\overleftrightarrow{AB}$. Definir os pontos D e E.
- Traçar $\overleftrightarrow{CE}$. Definir o ponto F.
- Traçar $\overleftrightarrow{CD}$. Definir o ponto G.
- $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{m}{n}$ e $\dfrac{AG}{BG} = \dfrac{m}{n}$

Justificativa:

As razões decorrem, respectivamente, da semelhança entre os triângulos ACF e BEF, caso AA, e da semelhança entre os triângulos ACG e BDG, caso AA.

3.2.2 Secção áurea

Definição 3.1 (Secção áurea): De acordo com Rezende e Queiroz em [6] temos que:

> *Dado o segmento $a = \overline{AB}$, podemos determinar nele um ponto E tal que $\overline{AE}$ seja a média geométrica entre $\overline{AB}$ e $\overline{BE}$, ou seja, $\overline{AE} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{BE}}$.*
>
> *O segmento $\overline{AE}$ é chamado segmento áureo interno de AB.*

Figura 3.12: Segmento áureo

Se denotamos $\overline{AE} = x$, obtemos $\overline{EB} = a - x$ e, então, podemos escrever

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}.$$

Dessa igualdade obtemos a equação $x^2 + ax - a^2 = 0$, que tem como soluções

$$x = a\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

A construção com régua e compasso consiste determinar o ponto E sobre $\overline{AB}$ de modo que $\overline{AE}$ seja a média geométrica entre $\overline{AB}$ e $\overline{BE}$. Este método foi chamado por *Euclides* como sendo "dividir um segmento em média e extrema razão". (Figura 3.13).

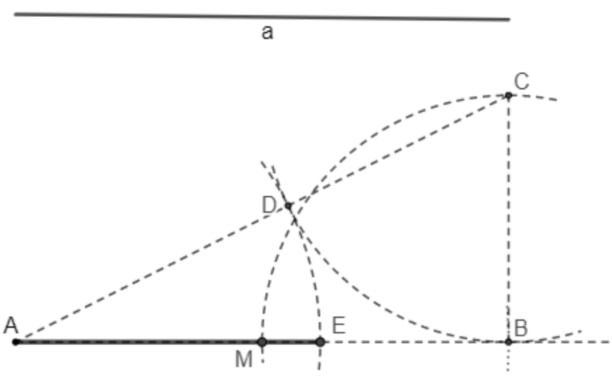


Figura 3.13: Secção áurea.

Procedimento:

– Transportar para uma semirreta o segmento a. Definir os pontos A e B.

– Traçar o ponto M médio de $\overline{AB}$.

– Traçar por B uma perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

– Transportar sobre a perpendicular o segmento de reta AM. Definir o ponto C.

– Transportar, a partir de C, $\overline{CB}$ sobre $\overrightarrow{CA}$. Definir o ponto D.

– Transportar, a partir de A, $\overline{AD}$ sobre $\overline{AB}$. Definir o ponto E.

Justificativa:

O triângulo ABC é retângulo em B logo, aplicando o *Teorema de Pitágoras*, teremos $AC^2 = AB^2 + BC^2$, ou seja, $\left(a + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ que é equivalente a $x^2 + ax - a^2 = 0$ cuja solução positiva é $x = a\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

3.2.3 Segmento igual a $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

Consiste em obter, dados os segmentos a e b, o segmento de reta x de modo que $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. (Figura 3.14).

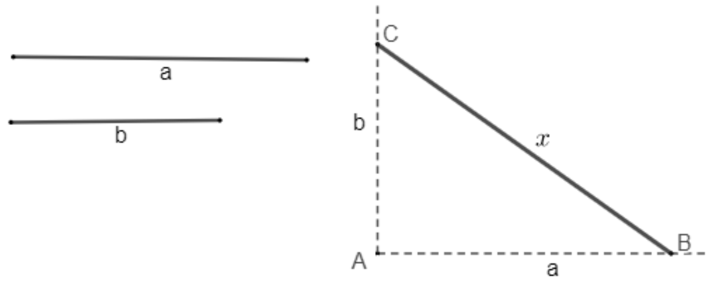


Figura 3.14: $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

Procedimento:

- Transportar o segmento de reta a para uma semirreta. Definir os pontos A e B.
- Traçar por A uma semirreta perpendicular a $\overline{AB}$.
- Transportar b para a semirreta nova. Definir o ponto C.
- Traçar $\overline{BC} = x$.

Justificativa:
x é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC, logo seu comprimento é dado pelo *Teorema de Pitágoras*.

3.2.4 Segmento igual a $y = \sqrt{a^2 - b^2}$

Consiste em obter, dados os segmentos a e b com $a > b$, o segmento de reta y de modo que $y = \sqrt{a^2 - b^2}$. (Figura 3.15).

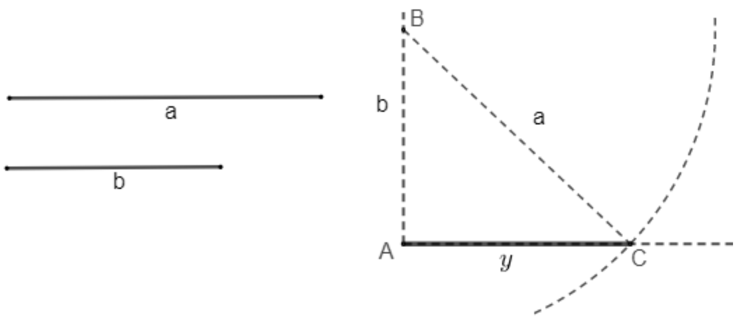


Figura 3.15: $y = \sqrt{a^2 - b^2}$

Procedimento:

- Transportar o segmento de reta b para uma semirreta. Definir os pontos A e B.
- Traçar por A uma semirreta perpendicular a $\overline{AB}$.

– Centro em B, raio a traçar um arco. A interseção do arco com a semirreta é o ponto C.

– $\overline{AC} = y$.

Justificativa:
Como o triângulo ABC é retângulo em A, o comprimento de $\overline{AC}$ é dado pelo *Teorema de Pitágoras*.

3.2.5 Segmento igual a $z = \sqrt{a+b}$

Consiste em obter, dados os segmentos a e b , o segmento de reta z de modo que $z = \sqrt{a+b}$. (Figura 3.16).

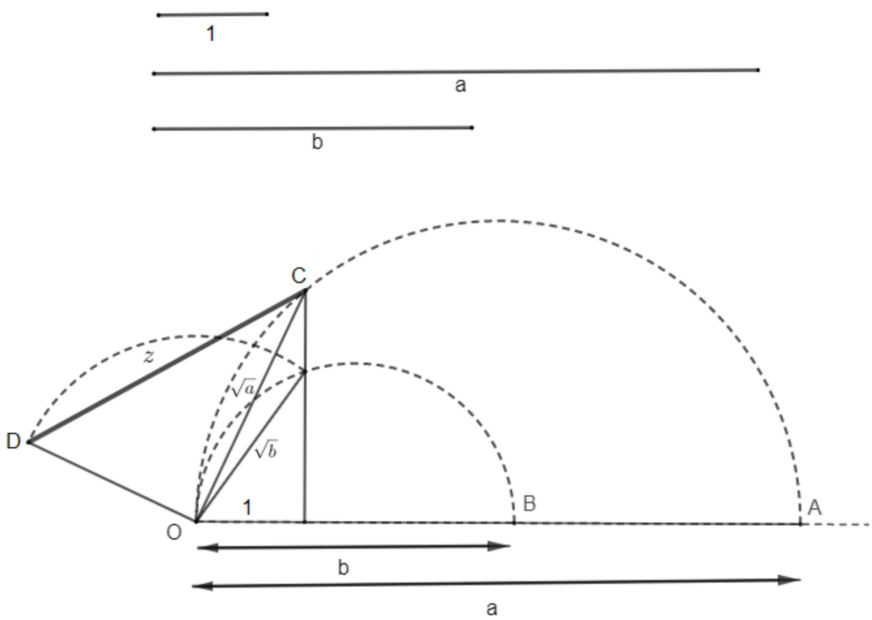


Figura 3.16: $z = \sqrt{a+b}$

Procedimento:

– Transportar os segmentos a e b para a semirreta com origem em O. Obter os pontos A e B, respectivamente.

– Traçar usando a construção da média geométrica (Figura 3.6) consecutivamente, os segmentos $\sqrt{b}$ e $\sqrt{a}$. Definir o ponto C.

– Usar a construção 3.2.3 para traçar um triângulo retângulo de catetos $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$. Definir $\overline{DC}$.

Justificativa:
Como o triângulo CDO é retângulo em O, o comprimento de $\overline{CD}$ é dado pelo *Teorema de Pitágoras*.

3.3 Condição para a construtibilidade de segmentos

Ao longo desta seção veremos porque a construção de segmentos com régua e compasso está associada com a de números e porque podem ser construídos apenas segmentos cujas medidas sejam números construtíveis. Alguns resultados da *Teoria Algébrica dos Números* garantem que se um número é construtível então é algébrico.

A seguir apresentaremos um aporte teórico com origem na *álgebra linear* e na *teoria de extensão de corpos* para melhor compreensão do teorema que prova quais são os números construtíveis. Alguns resultados serão utilizados sem demonstração pois fogem do objetivo principal do texto. O leitor mais curioso pode encontrar mais detalhamentos em [1] e [3].

Definição 3.2 (Operações elementares): Assim como Gonçalves em [1], chamaremos de operações elementares os procedimentos de construção com régua e compasso que geram pontos no plano, a saber:

1. Interseção entre duas retas.
2. Interseção entre uma reta e uma circunferência.
3. Interseção entre duas circunferências.

De acordo com Hefez em [3] para algebrizarmos o problema das construções com régua e compasso temos que fazer a identificação de $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$. Destacaremos, para tanto, os pontos $0 + 0i$ e $1 + 0i$, que suporemos contidos em qualquer conjunto de pontos S a ser considerado. Ganharemos, desse modo, a possibilidade de efetuar multiplicações de pontos.

A identificação de $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$:

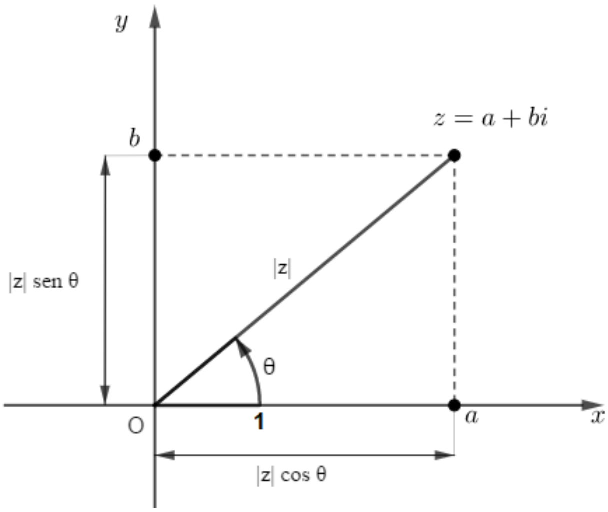


Figura 3.17: $z = a + bi = |z|(cos\theta + isen\theta)$

Note que o eixo x, o eixo y e o círculo unitário são construtíveis.

Supondo $z \neq 0$ um número complexo construtível, podemos escrever $z = a + bi$ ou $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$, na forma trigonométrica, onde $\theta \in [0; 2\pi)$ é dado em radianos. (Figura 3.17).

Definição 3.3 (Pontos construtíveis): Supondo que $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$. Um ponto $z \in \mathbb{C}$ é construtível com régua e compasso, se existir uma sequência de pontos $z_3, ..., z_s$ de $\mathbb{C}$, onde $z_s = z$ e cada um dos z_j, $j \geq 3$, é obtido por meio de uma das operações elementares envolvendo os pontos que lhe são anteriores na sequência.

O segmento de reta da origem até z e as retas passando por z, vertical e horizontal, são construtíveis. Logo, são construtíveis o comprimento $|z|$, os números reais a e b, assim como o ângulo θ.

Dados os números complexos construtíveis z_1 e z_2, podemos construir com régua e compasso os números complexos $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Definição 3.4 (Corpo): Um *corpo* é uma estrutura algébrica composta por um conjunto K munido de duas operações: adição, que associa a cada par de elementos $x, y \in K$ sua soma $x + y \in K$ e multiplicação que faz corresponder esses elementos ao seu produto $x \cdot y \in K$. Este conjunto K munido de tais operações devem satisfazer aos axiomas seguintes:

- Axiomas da adição:
  - Associatividade: $(x + y) + z = x + (y + z)$ quaisquer que sejam x, y e $z \in K$.
  - Comutatividade: $x + y = y + x$ quaisquer que sejam x e $y \in K$.
  - Elemento neutro: existe $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$ qualquer que seja $x \in K$.
  - Simétrico: $\forall x \in K$ $\exists z \in K$ tal que $x + z = 0$.
- Axiomas da multiplicação:
  - Associatividade: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ quaisquer que sejam x, y e $z \in K$.
  - Comutatividade: $x \cdot y = y \cdot z$ quaisquer que sejam x e $y \in K$.
  - Elemento neutro: existe $1 \in K$ tal que $x \cdot 1 = x$ qualquer que seja $x \in K$.
  - Inverso multiplicativo: $\forall x \in K$ tal que $x \neq 0$, existe um inverso $z \in K$ tal que $x \cdot z = 1$.

Definição 3.5 (Polinômio irredutível): Sejam F um corpo e um polinômio $f(x) \in F[x] \setminus F$, em que $F[x]$ é o conjunto dos polinômios com coeficientes em F. Dizemos que $f(x)$ é um *polinômio irredutível* em $F[x]$ se possuir a seguinte propriedade:

Se $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, com $g(x); h(x) \in F[x]$, então $f(x)$ ou $g(x)$ é um polinômio constante não nulo.

Portanto, um polinômio $f(x)$ é redutível em $F[x]$ se, e somente se, existem polinômios $g(x); h(x) \in F[x]$ tais que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, com $0 < gr(g(x)) < gr(f(x))$ e $0 < gr(h(x)) < gr(f(x))$, em que $gr(f(x))$ é o grau do polinômio $f(x)$.

Exemplo 3.3.1: Como $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ em $\mathbb{R}[x]$, então $x^2 - 2$ não é irredutível em $\mathbb{R}[x]$. Entretanto, $x^2 - 2$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$, pois tem grau 2 e não tem raiz em $\mathbb{Q}$, ou seja o polinômio não pode ser escrito como um produto de polinômios cujos coeficientes estejam no conjunto dos números racionais.

Definição 3.6 (Números algébricos): Um número é *algébrico* sobre um corpo F se for raiz de uma equação polinomial com coeficientes em F; e é de grau n se não existir uma outra equação desse tipo, de menor grau, da qual ele seja raiz. Se α é raiz de um polinômio irredutível de grau n em $F[x]$, então n será o grau de α em F.

Exemplo 3.3.2: Os elementos $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[4]{2}$ de $\mathbb{R}$ são algébricos sobre $\mathbb{Q}$. Note que eles são, respectivamente, raízes dos polinômios $x^2 - 2$, $x^3 - 2$ e $x^4 - 2$ em $\mathbb{Q}[x]$, e não são raízes de polinômios de graus menores.

Definição 3.7 (Extensão de corpos): Quando temos dois corpos F e K, tais que $F \subset K$, e as operações de adição e multiplicação em K se restringem às operações em F, diremos que F é um subcorpo de K, ou que K é uma *extensão* de F. Em tal caso escrevemos $K|F$, ou ainda,

$$\begin{array}{c} K \\ | \\ F \end{array}$$

Exemplo 3.3.3: São exemplos de extensões de corpos:

$$\mathbb{R}|\mathbb{Q}, \quad \mathbb{C}|\mathbb{Q} \quad \text{e} \quad \mathbb{C}|\mathbb{R}.$$

Note que podemos “enxergar”, em $K|F$, o espaço vetorial K sobre F.

Definição 3.8 (Adjunção de elementos): Seja $K|F$ uma extensão de corpos e seja $\alpha \in K$. Definimos a *adjunção* de α a F como sendo o menor subcorpo de K contendo $F \cup \alpha$ e o denotamos por $F[\alpha]$. Assim, $F \subset F[\alpha] \subset K$ e $\alpha \in F[\alpha]$.

Isto significa que $F[\alpha]$ é um subcorpo de K tal que se L é um subcorpo de K com $F \subset L$ e $\alpha \in L$, então $F[\alpha] \subset L$.

Exemplo 3.3.4: O menor subcorpo de $\mathbb{R}$ contendo $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$ é $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Definição 3.9 (Grau da extensão): A dimensão do espaço vetorial K sobre o F será chamada de *grau da extensão* e será denotada por $[K : F]$.

Se K é extensão de F por um número algébrico α então a dimensão $[K : F]$ é o grau do polinômio irredutível sobre F no qual α é raiz.

Exemplo 3.3.5: O polinômio $x^2 + 1$ é irredutível sobre $\mathbb{R}$ e a raiz desse polinômio é i. Então se $F = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$ temos $[K : F] = 2$.

Exemplo 3.3.6: $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ é uma extensão de $\mathbb{Q}$, o polinômio $x^3 - 2$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ mas tem raiz em $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ então, $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}] = 3$.

Definição 3.10 (Extensão finita): Uma extensão $K|F$ será dita *finita*, se K como espaço vetorial sobre F tiver dimensão finita, ou seja, se $[K : F] < \infty$.

Lema 3.1: Se $L|K$ e $K|F$ são duas extensões finitas, então a extensão $L|F$ é finita e $[L : F] = [L : K][K : L]$. (Demonstração em [3].)

Definição 3.11 (Extensão algébrica): Uma extensão $K|F$ é *algébrica*, se e somente se, todo $\alpha \in K$ é algébrico sobre F.

Exemplo 3.3.7: A extenção $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ é algébrica. De fato, se $\alpha = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $(\alpha - a)^2 = -b^2$, assim $\alpha^2 - 2a\alpha + b^2 + a^2 = 0$. Logo α é raiz de $x^2 - 2ax + b^2 + a^2 \in \mathbb{R}[x]$.

Lema 3.2: Toda extensão finita é algébrica. (Demonstração em [3].)

Chamaremos de $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos de $\mathbb{C}$ construtíveis com régua e compasso a partir de $S = \{0, 1\}$. Como a soma, a diferença, o produto e o quociente de dois números construtíveis são construtíveis, (ver construções: 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.4) temos que $\mathcal{C}$ é um corpo que contém $\mathbb{Q}$.

Para mostrar a não construtibilidade de um ponto $z \in \mathbb{C}$, partimos do conhecimento dos possíveis graus dos elementos de $\mathcal{C}$ e mostramos que o grau de z é incompatível com esses.

Supondo que z foi obtido pela construção da sequência de pontos $z_3, ..., z_s = z$. Como $z_j \in \mathcal{C}$, é claro que $\overline{z}_j \in \mathcal{C}$. Avaliando o grau das extensões

$$\mathbb{Q}(z_3, \overline{z}_3)|\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}(z_3, \overline{z}_3, z_4, \overline{z}_4)|\mathbb{Q}(z_3, \overline{z}_3),\ ...\ \text{e}$$

$$\mathbb{Q}(z_3, \overline{z}_3, ..., z_s, \overline{z}_s)|\mathbb{Q}(z_3, \overline{z}_3, ..., z_{s-1}, \overline{z}_{s-1}).$$

Como notação utilizaremos $K_j = \mathbb{Q}(z_2, \overline{z}_2, ..., z_j, \overline{z}_j)$, $j \geq 2$. Temos que $K_2 = \mathbb{Q}$ e para $j > 2$, temos que $K_j = \mathbb{Q}(z_3, \overline{z}_3, ..., z_j, \overline{z}_j)$.

Proposição 3.1: Cada uma das extensões $K_j|K_{j-1}$ acima tem grau um, dois ou quatro, para $j = 3, ..., s$.

Demonstração. Fixemos um número natural $j \geq 3$ e sejam p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5 pontos de K_{j-1}, com $p_1 \neq p_2$ e $p_4 \neq p_5$.

A equação da reta que passa por p_1 e p_2 em coordenadas z e $\overline{z}$ de $\mathbb{C}$ (sendo $p_1 = p_1' + p_1''i$ e $p_2 = p_2' + p_2''i$) pode ser dada, após algumas manipulações algébricas, conforme Hefez em [3], por

$$(\overline{p}_1 - \overline{p}_2)z + (p_2 - p_1)\overline{z} + (p_1\overline{p}_2 - \overline{p}_1 p_2) = 0.$$

Assim como a equação do círculo de centro em p_3 e raio $|p_4 - p_5|$, com $p_3 = p_3' + p_3''i$, $p_4 = p_4' + p_4''i$ e $p_5 = p_5' + p_5''i$ é dada por

$$(z - p_3)(\overline{z} - \overline{p}_3) = (p_4 - p_5)(\overline{p}_4 - \overline{p}_5).$$

Assim, uma reta que passa por pontos de K_{j-1} e raio igual à distância entre dois pontos de K_{j-1} tem equações do tipo

$$az + b\overline{z} = c \text{ e } z\overline{z} + d + e\overline{z} + f = 0$$

com $a, b, c, d, e, f \in K_{j-1}$.

O ponto de interseção de duas retas distintas é solução de um sistema do tipo

$$\begin{cases} az + b\overline{z} + c = 0 \\ a'z + b'\overline{z} + c' = 0 \end{cases}$$

onde $a, b, c, a', b', c' \in K_{j-1}$. Este sistema tem uma única solução, que calculada pela *Regra de Cramer*, está em K_{j-1}, bem como sua conjugada. Assim, se z_j é esta solução, temos que $[K_j : K_{j-1}] = 1$.

Os pontos de interseção de dois círculos com centros e raios em K_{j-1} são as soluções de um sistema do tipo

$$\begin{cases} z\overline{z} + d + e\overline{z} + f = 0 \\ z\overline{z} + d' + e'\overline{z} + f' = 0 \end{cases}$$

com $d, e, f, d', e', f' \in K_{j-1}$. Subtraindo uma equação da outra, obtemos um sistema

$$\begin{cases} z\overline{z} + d + e\overline{z} + f = 0 \\ az + b\overline{z} + c = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $a, b, c, d, e, f \in K_{j-1}$, que é a interseção de um círculo com uma reta, ambas com coeficientes em K_{j-1}.

Substituindo z ou $\overline{z}$ da segunda, na primeira equação do sistema (3.1), vemos que se z_j é um ponto de interseção de dois círculos ou de um círculo e uma reta, com coeficientes em K_{j-1}, então tanto z quanto $\overline{z}$ são raízes de uma equação do segundo grau com coeficientes em K_{j-1}. Este fato nos mostra que $[K_{j-1}(z_j) : K_{j-1}] \leq 2$ e que $[K_{j-1}(\overline{z}_j) : K_{j-1}] \leq 2$. Como $K_j = K_{j-1}(z_j,\overline{z}_j)$, temos a seguinte torre de extensões:

$$\begin{array}{c} K_j = K_{j-1}(z_j,\overline{z}_j) \\ |n \\ K_{j-1}(z_j) \\ |m \\ K_{j-1} \end{array}$$

Temos que $\overline{z}$ é raiz de uma equação do segundo grau com coeficientes em K_{j-1} e é raiz de um polinômio de grau dois sobre $K_{j-1}(z_j)$. Portanto, pelo Lema 3.1

$$[K_j : K_{j-1}] = [K_j : K_{j-1}(z_j)][K_{j-1}(z_j) : K_{j-1}] = nm$$

com $n \leq 2$ e $m \leq 2$, daí segue o resultado. □

Corolário 3.1: O grau $[K_s : \mathbb{Q}]$ da extensão $K_s|\mathbb{Q}$ é uma potência de 2.

Demonstração. Pelo Lema 3.1 temos que o grau

$$[K_s : \mathbb{Q}] = [K_s : K_{s-1}][K_{s-1} : K_{s-2}] \cdots [K_3 : \mathbb{Q}].$$

O resultado segue da Proposição 3.1. □

Finalmente temos condições de enunciar e provar o teorema mais importante desta seção. Nele encontramos a justificativa para a construtibilidade de um número e, por consequência, de um segmento de reta.

Teorema 3.1: Se z é um ponto construtível com régua e compasso, então z é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ e tem grau igual a uma potência de 2.

Demonstração. Se z é construtível, existem pontos $z_3, ..., z_s = z$ tais que cada z_j é obtido por operações elementares a partir dos pontos 0, 1, $z_3, ..., z_{j-1}$. Logo, $z + z_s \in K_s$ e portanto, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(z) \subset K_s$. Daí, $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]$ divide $[K_s : \mathbb{Q}]$. Em particular, $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]$ é finito. Logo, pelo Lema 3.2, z é algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Pelo Corolário 3.1, segue-se que $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]$ é uma potência de 2. □

3.3.1 Duplicação do Cubo

O problema da duplicação do cubo com régua e compasso, que desafiou os matemáticos da antiguidade, surgiu por volta de 400 anos antes de cristo quando uma peste matou cerca de um quarto da população grega.

Conta-se que ao perguntarem ao oráculo de Apolo, na ilha de Delos, o que fazer para acabar com a peste ele tenha mandado dobrar o altar cúbico de Apolo. Os Atenienses ao tetarem obedecer ás ordens do oráculo dobraram todas as dimensões do cubo. A peste não se extinguiu pois ao dobrar o comprimento das arestas acabaram por multiplicar por oito o volume do altar e não a dobrá-lo.

A história ficou conhecida como o problema de Delos e consiste em se construir com régua e compasso a aresta de um cubo com o dobro do volume de um cubo cuja aresta seja conhecida.

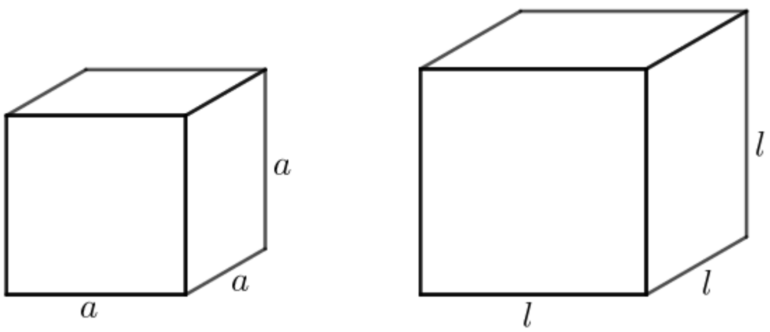


Figura 3.18: $V_1 = a^3, V_2 = l^3, V_2 = 2 \cdot V_1$

O problema pode ser resumido em se construir um segmento de medida $a\sqrt[3]{2}$ dado um cubo de aresta a, ou seja, sendo dois cubos de arestas a e l e volumes $V_1 = a^3$ e

$V_2 = l^3$, respectivamente, para que tenhamos $V_2 = 2 \cdot V_1$ temos que ter $l^3 = 2 \cdot a^3$ assim $l = a\sqrt[3]{2}$.

Para construir o segmento $a\sqrt[3]{2}$ bastaria construir o segmento $\sqrt[3]{2}$ pois o produto pode ser obtido fazendo-se a 4ª proporcional entre os segmentos 1(unitário), a e $\sqrt[3]{2}$.

Temos que $\sqrt[3]{2}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ pois é raiz da equação $x^3 - 2 = 0$ mas não é construtível pois não existe um polinômio irredutível de grau 2 e coeficientes racionais da qual ele seja raiz. Logo, apesar de ser algébrico, pelo teorema 3.1, $\sqrt[3]{2}$ não é construtível.

Assim, prova-se que, o problema da duplicação do cubo não tem solução com régua e compasso.

4

Polígonos Regulares Construtíveis e o Teorema de Gauss

Neste capítulo trataremos da construção de polígonos regulares inscritos na circunferência e faremos uma discussão sobre quais são os polígonos regulares que podem ser construídos com régua e compasso.

Apresentaremos o *Teorema de Gauss*, que permite classificar os polígonos em construtíveis ou não.

4.1 Polígonos regulares inscritos na circunferência

Polígonos regulares são polígonos que possuem todos os lados com o mesmo comprimento e todos os ângulos internos congruentes.

Polígonos inscritos são internos às circunferências e cada um de seus vértices é um ponto da circunferência.

4.1.1 Quadrado

Consiste em construir um quadrado inscrito em uma circunferência dada. (Figura 4.1).

Procedimento:

- Traçar uma reta passando pelo centro O da circunferência. As interseções da reta com a circunferência são os pontos A e B.

- Traçar a mediatriz de $\overline{AB}$. As interseções da mediatriz com a circunferência são os pontos C e D.

- Traçar o quadrado $ADBC$

Justificativa

Os ângulo centrais com vértice no ponto O são retos, sendo assim os pontos A, D, B e C dividem a circunferência em 4 partes congruentes.

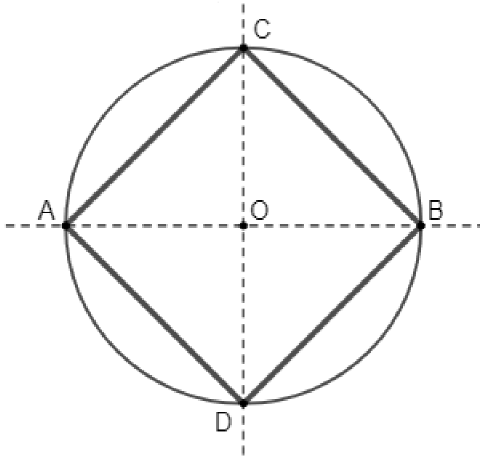


Figura 4.1: Quadrado inscrito na circunferência

4.1.2 Hexágono regular

Consiste em construir um hexágono regular inscrito em uma circunferência dada. (Figura 4.2).

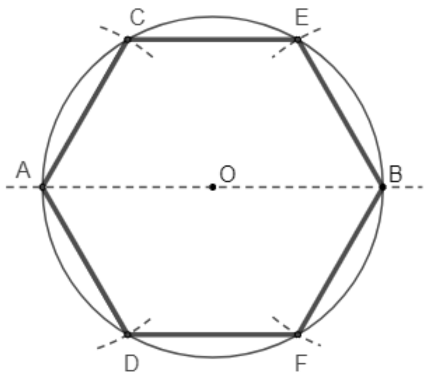


Figura 4.2: Hexágono regular inscrito na circunferência

Procedimento:

- Traçar uma reta passando pelo centro O da circunferência. As interseções da reta com a circunferência são os pontos A e B.
- Centro em A, raio igual ao anterior, traçar um arco interceptando a circunferência em D.
- Centro em A, raio igual ao anterior, traçar um arco interceptando a circunferência em C.
- Centro em B, raio igual ao anterior, traçar um arco interceptando a circunferência em E.
- Centro em B, raio igual ao anterior, traçar um arco interceptando a circunferência em F.

– Traçar o hexágono $ADFBEC$.

Justificativa:

O hexágono divide a circunferência em 6 triângulo isósceles cujas bases são os lados do polígono. A circunferência está dividida em seis partes congruentes então cada ângulo central tem $60\,°$. Assim, cada um dos 6 triângulos isósceles tem $60\,°$ de ângulo do vértice e consequentemente $60\,°$ em cada base, o que os torna equiláteros. Ou seja, o raio da circunferência tem o mesmo comprimento do lado do hexágono regular.

4.1.3 Triângulo equilátero

A construção do triângulo equilátero segue diretamente da construção do hexágono regular. (Figura 4.3).

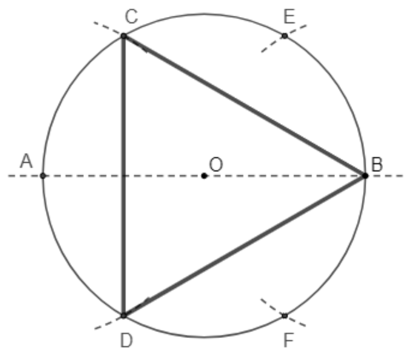


Figura 4.3: Triângulo equilátero inscrito na circunferência

Procedimento:

– Repetir os passos da construção anterior até acharmos os pontos A, B, C, D, E e F sobre a circunferência dada.

– Traçar o triângulo BCD ou o triângulo AFE. Os dois resultados são equivalentes.

4.1.4 Decágono regular

Consiste em construir um decágono regular inscrito em uma circunferência dada. (Figura 4.4).

Procedimento:

– Traçar uma reta passando pelo centro O da circunferência. As interseções da reta com a circunferência são os pontos A e B.

– Traçar a mediatriz de $\overline{AB}$. As interseções da mediatriz com a circunferência são os pontos C e D.

– Traçar a mediatriz de $\overline{OB}$. Definir o ponto E.

– Centro E, raio CE, traçar um arco que intercepta $\overline{AB}$ no ponto F.

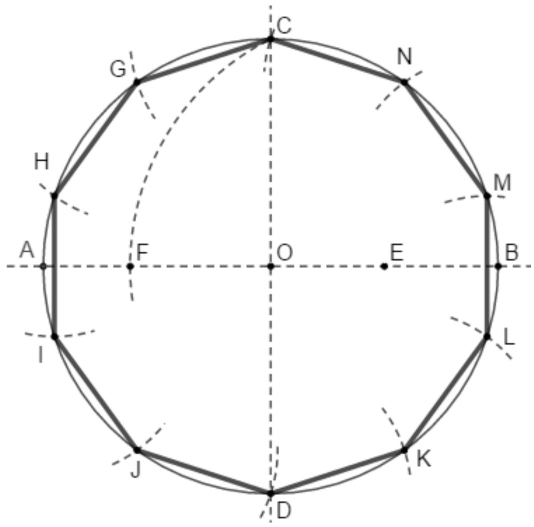


Figura 4.4: Decágono regular inscrito na circunferência

- Centro em C, raio FO, traçar um arco interceptando a circunferência em G.
- Centro em G, raio igual ao anterior, traçar um arco interceptando a circunferência em H.
- Centro em H, raio igual ao anterior, traçar um arco interceptando a circunferência em I.
- Centro em I, raio igual ao anterior, traçar um arco interceptando a circunferência em J.
- Centro em D, raio igual ao anterior, traçar um arco interceptando a circunferência em K.
- Centro em K, raio igual ao anterior, traçar um arco interceptando a circunferência em L.
- Centro em L, raio igual ao anterior, traçar um arco interceptando a circunferência em M.
- Centro em M, raio igual ao anterior, traçar um arco interceptando a circunferência em N.
- Traçar o decágono $CGHIJDKLMN$.

Justificativa:

A construção do lado do decágono regular equivale a encontrar um arco da circunferência dada cuja medida seja $36\,°$.

Considere um o ângulo central $C\hat{A}B$ medindo $36\,°$ de uma circunferência $C(A, r)$.

O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$ e ângulos da base medem $72\,°$ cada. Considerando o segmento $\overline{CD}$ congruente a $\overline{BC}$ com D em $\overline{AB}$. Nota-se que ambos são congruentes ao lado do decágono regular inscrito em $C(A, r)$. (Figura 4.5).

O triângulo CDB é isósceles de base $\overline{DB}$. Logo, $C\hat{D}B$ também mede $72\,°$.

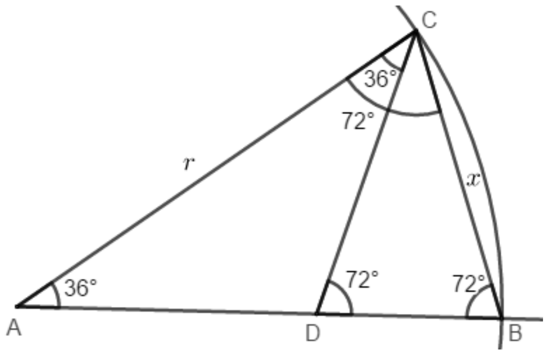


Figura 4.5: Triângulo isósceles ABC

Assim temos que os triângulos ABC e CDB são semelhantes pelo caso A.A. e podemos escrever $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$.

Note que o triângulo ADC também é isósceles, tem base $\overline{AC}$, $A\hat{C}D \cong C\hat{A}B$ e ambos medem $36\,°$. Logo, temos que os segmentos de reta $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ tem o mesmo comprimento do lado do decágono regular.

Fazendo o lado do decágono regular igual a x temos que $\dfrac{r}{x} = \dfrac{x}{r-x}$. Isso nos mostra que x é o segmento áureo de r, assim $x = r\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

4.1.5 Pentágono regular

A construção do pentágono regular segue diretamente da construção do decágono regular. (Figura 4.6).

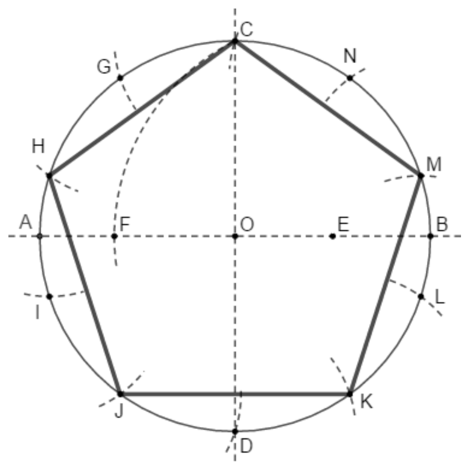


Figura 4.6: Pentágono regular inscrito na circunferência

Procedimento:

- Repetir os passos da construção anterior até acharmos os pontos sobre a circunferência dada.

- Traçar o pentágono $CHJKM$.

Solução alternativa: O lado do pentágono é o segmento de reta $\overline{CF}$, desse modo, podemos fazer uma versão mais simples da construção. (Figura 4.7).

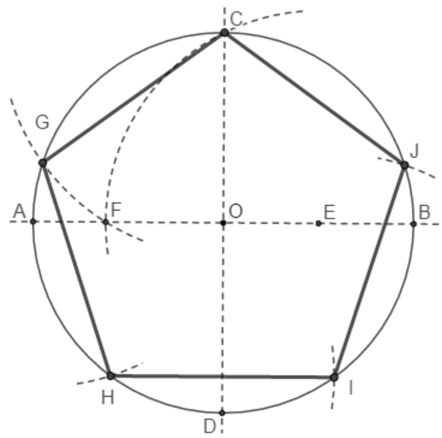


Figura 4.7: Pentágono regular

4.1.6 Outros polígonos construtíveis

Podemos construir todos os polígonos de $2^m n$ lados desde que saibamos construir o polígono de n lados por sucessivas bisseções dos ângulos do polígono de n lados.

De acordo com as construções apresentadas até aqui poderemos obter a partir do quadrado, do pentágono e do hexágono regulares, respectivamente, os polígonos regulares com:

- 8, 16, 32, 64, ... lados;
- 10, 20, 40, 80, ... lados;
- 12, 24, 48, 96, ... lados.

4.2 A construtibilidade de polígonos regulares

De acordo com Rezende e Queiroz [6], em 1796 *Gauss* relacionou o problema de construir um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio R (a partir de 0 e 1) com a resolução da equação $x^n = 1$. De fato, as soluções complexas dessa equação dividem a circunferência em n arcos de mesmo comprimento, a partir da solução 1, e são chamadas raízes n-ésimas da unidade. São elas $1, w, w^2, ..., w^{n-1}$, onde

$$w = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Assim, o problema se resume em construir o *cosseno* (ou o *seno*) do ângulo central $\frac{2\pi}{n}$. Ou seja, o número real $\frac{2\pi}{n}$ deverá ser álgébrico cujo grau é uma potência de 2.

Proposição 4.1: Seja $n = n_1 n_2$, onde n_1 e n_2 são números naturais maiores do que ou iguais a 2, primos entre si. O polígono regular inscrito de n lados é construtível com régua e compasso se, e somente se, os polígonos regulares inscritos de n_1 e n_2 lados são ambos construtíveis.

Demonstração. Se um polígono de n_1 lados pode ser construído então podemos construir um arco de $\frac{2\pi}{n_1}$ e se um polígono de n_2 lados pode ser construído então podemos construir um arco de $\frac{2\pi}{n_2}$. Como n_1 e n_2 são primos entre si então $mdc(n_1, n_2) = 1$. Logo, pela *Relação de Bézout* (descrita em [2]) existem x e y inteiros tais que $n_1 x + n_2 y = 1$. Assim, $x \cdot \frac{2\pi}{n_2} + y \cdot \frac{2\pi}{n_1} = \frac{2\pi}{n_1 n_2}$. Reciprocamente, se o polígono regular de n lados é construtível, basta traçar convenientemente n_1 diagonais tomando os vértices n_1 a n_2 para obter um polígono regular de n_1 lados; de modo análogo se obtém um polígono regular de n_2 lados. □

Definição 4.1 (Primos de Fermat): Os *primos de Fermat* são números da forma $2^{2^s} + 1$. Para s variando de 0 até 4 temos que $2^{2^s} + 1$ vale respectivamente, 3, 5, 17, 257, 65537 que são realmente primos.

Até hoje, não foram encontrados outros "primos de Fermat" que fossem realmente primos além dos cinco citados acima.

Proposição 4.2 (Wantzel): Um polígono com um número primo p de lados, em que p não é primo de Fermat, não é construtível com régua e compasso.

Demonstração. De fato, o polinômio mínimo sobre $\mathbb{Q}$ de uma raiz p-ésima da unidade é

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1.$$

Portanto, pelo Teorema 3.1, temos que se $p - 1$ não é uma potência de dois, o polígono de p lados não é construtível com régua e compasso. Portanto, se p não é um primo de Fermat, o polígono não é construtível. □

Corolário 4.1: Se o número n de lados de um polígono regular for divisível por um número primo diferente de 2 e que não é um primo de Fermat, então o polígono não é construtível.

Demonstração. De fato, seja p o número primo diferente de 2 e que não é de Fermat que divide n, logo $n = rp$, o que em vista da Proposição 4.1, implicaria que o polígono de p lados é construtível; contradição. □

Proposição 4.3: Se p é um número primo maior do que 2, então o polígono regular de p^r lados, com $r \geq 2$, não é construtível.

Demonstração. Basta mostrar que o polígono de p^2 lados não é construtível. Uma raiz p^2-ésima primitiva ζ da unidade é raiz do polinômio

$$\frac{x^{p^2} - 1}{x^p - 1} = x^{p(p-1)} + x^{p(p-2)} + \cdots + x^{2p} + x^p + 1$$

que sabemos ser irredutível em $Q[x]$ pelo critério de irredutibilidade de *Eisenstein* (enunciado e demonstração podem ser encontrados em [1]). Logo o grau de ζ sobre $\mathbb{Q}$ é igual a $p(p-1)$, que não é uma potência de 2. □

Corolário 4.2 (Wantzel): Se um polígono regular de n lados é construtível com régua e compasso, então n se decompõe como produto de uma potência de 2 e de primos de Fermat distintos.

Demonstração. Seja $n = 2^r p_1 \cdots p_s$, com $p_k > 2$ e $k = 1,...,s$, a decomposição de n em fatores primos. Se algum dos p_k não for primo de Fermat, o polígono de n lados não é construtível, pois, caso contrário, o polígono de p_k lados seria construtível, o que contradiz a Proposição 4.2. Se $p_k = p_j$, para algum par de k e j distintos, o polígono de n lados não é construtível, pois, caso contrário, o polígono de p_k^2 lados seria construtível, o que contradiz a Proposição 4.3. □

O teorema de Gauss nos responde quais dos polígono regulares podem ser construídos fazendo uso apenas de régua sem graduação e compasso. Não faramos sua prova, mas observemos que uma de suas implicações são os resultados demonstrados anteriormente.

Teorema 4.1 (Teorema de Gauss): Um polígono regular de n lados é construtível se, e somente se, n é da forma 2^r ou $2^q \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, onde q, r e k são números naturais, $q > 1$, e $p_1, \ldots, p_k$ são números primos distintos da forma $p_i = 2^{2^{s_i}} + 1$, $1 \leq i \leq k$, s_i natural. Os números da forma $2^{2^s} + 1$ são chamados primos de Fermat.

Aplicando o teorema podemos ver que são construtíveis com régua e compasso, por exemplo, os polígonos regulares com números de lados iguais a: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, ..., e não o são os polígonos regulares com números de lados iguais a: 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 23, ...

5

Aplicações em sala de aula

Neste capítulo faremos propostas de aplicações das construções geométricas em sala de aula. As propostas aliarão a prática das construções com régua e compasso à conteúdos da geometria plana euclidiana.

Faremos um proposta de construções de triângulos em dois momentos: no primeiro será realizado o estudo da condição de existência dos triângulo, para isso, será utilizada uma atividade investigativa utilizando régua e compasso. Os alunos farão a construção de alguns triângulos dados os comprimentos de seus lados. Serão desafiados a testar quais são as relações entre esses tamanhos que permitem, sem construção, avaliar a existência ou não dos polígonos de três lados. No segundo momento faremos a construção de triângulos dados alguns de seus elementos (um lado, uma altura e uma mediana) e testaremos para quais relações entre essas medidas a construção resulta em triângulo.

Na segunda atividade faremos as construções, com régua e compasso, do hexágono regular e do quadrado inscritos na circunferência e desafiaremos os estudantes a construírem outros polígonos derivados desses.

Em uma terceira proposta faremos o uso do software de geometria dinâmica *GeoGebra*. Com ele, construiremos a bissetriz de um ângulo de dois modos diferentes e relacionaremos uma de suas propriedades com a construção feita.

Também utilizando o *GeoGebra* montaremos uma construção que permita fazer o cálculo das raízes quadradas de números naturais.

5.1 Atividade 1 – Triângulos

A primeira parte da atividade seguinte foi aplicada nas turmas de desenho geométrico do 8º ano do Colégio Santo Agostinho - Contagem no ano de 2018. Veja, no Apêndice A, fotos da atividade realizada por um dos estudantes. A proposta completa também poderia ser utilizada nas aulas de geometria de turmas de 7º ou 9º anos do ensino fundamental dependendo do programa da escola.

- **Objetivos:** Aprender a construir, com régua e compasso, um triângulo conhecidas as medidas de seus lados, entender a condição de existência dos triângulos e realizar a construção de triângulos dadas um lado a altura e a mediana.

- **Material:** Régua, compasso e lápis ou lapiseira.
- **Conhecimentos prévios:** Para realizar a primeira parte desta atividade o estudante deverá ter um mínimo de familiaridade na utilização de um compasso e conhecer o conceito de triângulo. Para a segunda parte o aluno tem que conhecer as construções de retas paralelas e ponto médio, as definições de mediana e altura e a congruência de triângulos.
- **Uso da régua:** Nesta atividade a régua será usada para medir comprimentos, além do tradicional uso de traçar segmentos de reta, pois consideramos mais simples que os alunos possam fazer as comparações usando valores numéricos para os lados do triângulo.
- **Comando da atividade – Primeira Parte:** Construa, usando régua e compasso, um triângulo cujos lados meçam 8 cm, 5 cm e 7 cm.
- **Execução – Primeira Parte:** Durante a construção o indicado é que os estudantes possam fazer o desenho acompanhados pelas instruções do(a) professor(a). Os passos vão sendo executados no quadro e os estudantes acompanham construindo no caderno.
- **Descrição do procedimento da construção – Primeira Parte:** É importante que os estudantes sejam os protagonistas da escrita do processo realizado. A construção tem ao todo 4 passos, peça aos alunos que refaçam o desenho mentalmente e registrem como foi feito. Se necessário, faça pequenas intervenções quanto à ordem e à linguagem.

  Aproveite para discutir como melhorar a construção: avaliem qual é o melhor lado (medida) para se começar e como aproveitar bem o espaço disponível para o desenho.
- **Trabalho autônomo – Primeira Parte:** Proponha a construção de mais três triângulos, aproveite para relembrar as classificações quanto à medida dos lados.
  - **Triângulo equilátero:** 6 cm, 6 cm e 6 cm.
  - **Triângulo isósceles:** 5 cm, 5 cm e 5 cm.
  - **Triângulo escaleno:** 10 cm, 6 cm e 8 cm
- **Desafio – Primeira Parte:** Construa, usando régua e compasso, um triângulo cujos lados meçam 4 cm, 9 cm e 4 cm.

  Proponha a construção de um triângulo "impossível", forneça as medidas acima, que não resultarão no polígono, e observe a reação dos estudantes.
- **Reflexão – Primeira Parte:** Peça que escrevam o que aconteceu e que proponham uma explicação. Estimule a troca de ideias e faça com que testem suas conjecturas com os triângulos que "deram certo" e encontrem outros que não possam ser construídos.

- **Formalização – Primeira Parte:** Nesta fase do trabalho a grande maioria dos alunos já chegou a um critério de existência dos triângulos ou tem algum palpite. Proponha um debate e através das ideias que forem surgindo e escrevam juntos à condição de existência dos triângulos.

- **Análise da proposta depois de aplicada:** A primeira parte da atividade foi realizada com as quatro turmas de 8º ano de desenho geométrica do Colégio Santo Agostinho - Contagem no ano de 2018.

  Durante a aplicação percebeu-se que os objetivos foram plenamente atingidos. Os alunos ao seguirem as instruções dadas foram capazes de construir triângulos com régua e compasso e chegarem ao critério de existência destes polígonos. Não houve quase nenhuma interferência da professora nas conclusões e discussões que os alunos tiveram. Avalio como muito positiva a proposta apresentada pois fez com que os estudantes pudessem testar e chegar a conclusões sobre a geometria de forma autônoma, sendo os resposnsáveis pela construção do próprio conhecimento.

- **Comando da atividade – Segunda Parte:** Construir usando régua e compasso um triângulo que tenha um lado a de 7 cm, a altura relativa a esse lado (h_a) com 5 cm e a mediana relativa a esse lado (m_a) de 6 cm.

- **Análise preliminar – Segunda Parte:** A construção proposta depende de outras já trabalhadas. A sugestão é fazer uma sondagem e dar pistas para que as soluções surjam da própria turma. Questione sobre as definições de altura e mediana, peça para que os estudantes relacionem essas características com as construções que já tenham feito anteriormente e conduza a discussão. Quando chegarem a um acordo inicie o desenho.

- **Execução – Segunda Parte:** Uma vez mais é indicado que os estudantes possam construir acompanhados pelas instruções detalhadas do(a) professor(a). Considerando que algumas partes já são de conhecimento do aluno enfatize as relações entre os processos e partes novas.

- **Descrição do procedimento da construção – Segunda Parte:** Novamente, estimule seus alunos a escreverem o processo realizado. As construções anteriores, que serviram de base para a nova, podem apenas ser citadas, uma vez que seus procedimentos já foram anteriormente registrados. Essa parte da atividade é fundamental para a apreensão dos conhecimentos por parte dos estudantes.

- **Trabalho autônomo – Segunda Parte:** Proponha a construção de mais três triângulos com as seguintes indicações de medidas:

  - $a = 7\ cm$, $h_a = 8\ cm$ e $m_a = 8\ cm$.
  - $a = 5\ cm$, $h_a = 6\ cm$ e $m_a = 4\ cm$.
  - $a = 7\ cm$, $h_a = 8\ cm$ e $m_a = 7\ cm$.

- **Reflexão – Segunda Parte:** Diante dos resultados obtidos peça para que os estudantes avaliem a situação. Questione: o que aconteceu em cada caso? É possível que os resultados tenham relação com os comprimentos propostos?

  Peça que comparem os valores das altura e da mediana. Estimule a troca de ideias.

- **Fechamento – Segunda Parte:** Após as discussões espera-se que os alunos cheguem às seguintes conclusões:

  Se $h_a > m_a$ a construção não terá solução.

  Se $h_a = m_a$ a construção terá como solução um triângulo isósceles.

  Se $h_a < m_a$ a construção terá como solução quatro triângulos escalenos congruentes.

  Ajude os estudantes a escreverem os resultados em linguagem matemática.

5.2 Atividade 2 – Polígonos regulares inscritos na circunferência

Parte dessa atividade foi desenvolvida nas turmas de 8º ano do colégio Santo Agostinho - Contagem em 2018 e as fotos do trabalho de um dos estudantes podem ser vistas no Apêndice A.

Ela é indicada para estudantes das séries finais do ensino fundamental.

- **Objetivos:** Aprender a construir alguns polígonos regulares inscritos na circunferência e associar essas construções à da bissetriz para obtermos novos resultados.

  Serão dois momentos: o primeiro baseado na construção do hexágono regular inscrito na circunferência, a partir dessa construção faremos o triângulo regular e o dodecágono regular inscritos na circunferência. O segundo momento trata da construção do quadrado a partir da construção da reta mediatriz. Depois, associado à bissetriz, faremos o octógono regular.

- **Material:** Régua, compasso e lápis ou lapiseira.

- **Conhecimentos prévios:** Os estudante devem saber construir com régua e compasso a mediatriz de um segmento de reta e a bissetriz de um ângulo além de conhecer as propriedades dos polígonos.

- **Comando da atividade – Hexágono regular:** Construa, usando régua e compasso o hexágono regular inscrito na circunferência.

- **Execução – Hexágono regular:** Os estudantes fazem as etapas do desenho acompanhando as instruções do(a) professor(a).

- **Descrição do procedimento da construção – Hexágono regular:** Após o término do desenho peça para que os alunos repassem os passos da construção e registrem no caderno.

- **Polígonos obtidos a partir do hexágono:** Faça alguns questionamentos para a turma: Qual ou quais outros polígonos podemos construir aproveitando a construção do hexágono? Existem polígonos cuja quantidade de lados é múltipla do número de lados do hexágono? Que construção já aprendida anteriormente podemos utilizar para construir novos polígonos?

  Aproveite as respostas dos estudantes e peça para que construam o triângulo equilátero e o dodecágono regular inscritos na circunferência.

  O interessante nessa parte é observar o trabalho dos estudantes e interferir apenas se perceber que estão cometendo algum engano.

- **Comando da atividade – Quadrado:** Construa, usando régua e compasso o quadrado inscrito na circunferência.

- **Análise preliminar – Quadrado:** Pergunte aos estudantes sobre as características dos quadrados, verifique se conhecem a propriedade que diz que as diagonais são perpendiculares. Peça que associem a proposta com alguma construção já vista anteriormente. Troque ideias com a turma e decidam, juntos, qual é a melhor proposta.

- **Execução – Quadrado:** Tomada a decisão sobre qual construção anterior deve ser utilizada deixe que os alunos façam de modo independente o trabalho. Oriente apenas em caso de dúvidas.

- **Descrição do procedimento da construção – Quadrado:** Peça para que os estudantes descrevam a construção que acabaram de realizar e anotem os passos no caderno.

- **Polígono obtido a partir do quadrado:** Repita, com o quadrado, a discussão feita para o hexágono e peça que os estudantes construam o octógono regular inscrito na circunferência.

- **Reflexão:** Qual propriedade da construção de polígonos podemos obter com essas construções? Fomente a discussão. Espera-se que os alunos cheguem a conclusão de que a partir da construção de determinado polígono sempre podemos obter outro com o dobro de lados do anterior.

5.3 Atividade 3 – Bissetriz

A proposta de atividade a seguir foi elaborada para as série finais do ensino fundamental, 8º e 9º anos.

Foi preparada utilizando-se a versão a versão 6.0 do *GeoGebra* mas pode, com pequenas alterações, ser realizada nas versões anteriores.

Para facilitar o entendimento de qual função deverá ser utilizada numeramos as janelas da barra de ferramentas do software conforme a figura 5.1.

A atividade será dividida em duas partes, na primeira, utilizaremos a ferramenta *Bissetriz* para avaliarmos uma propriedade dessa semirreta e, na segunda parte,

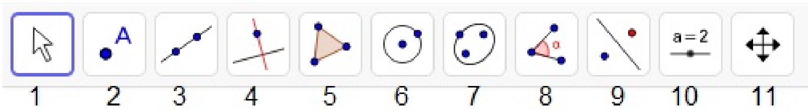


Figura 5.1: Barra de ferramentas do *GeoGebra*

obteremos a bissetriz usando a ferramenta *Compasso* e discutiremos a validade da construção.

- **Objetivos:** Aprender a construir, de duas maneiras diferentes, a bissetriz de um ângulo e avaliar uma de suas propriedades.

- **Material:** Software de geometria dinâmica *GeoGebra*, disponível para download em [4].

- **Conhecimentos prévios:** Para realizar esta atividade o estudante deverá conhecer os conceitos de ângulos e congruência de triângulos.

- **Roteiro da atividade – Primeira parte**

  1. Abra o *GeoGebra* e selecione a opção *Geometria*. A tela ficará vazia.
  2. No canto superior direito clique sobre as três barras paralelas, escolha a opção *Configurações*, no item *Rotular* selecione *Apenas para os Pontos Novos*. Feche a janela de configurações.
  3. Selecione a ferramenta *Semirreta* (janela 3). Clique sobre a tela branca em dois lugares diferentes. A semirreta $\overrightarrow{AB}$ será criada.
  4. Clique sobre o ponto A e depois em um lugar vazio da tela. A semirreta $\overrightarrow{AC}$ será criada e formará o ângulo $B\hat{A}C$.
  5. Escolha a ferramenta *Ângulo* (janela 8). Clique nos pontos B, A e C, nessa ordem. O ângulo será medido, marcado e momeado.
  6. Com a ferramenta *Mover* (janela 1), clique sobre os pontos e verifique as alterações no ângulo.
  7. Use a ferramenta *Bissetriz* e clique sobre os pontos B, A e C, nessa ordem. A semirreta que representa a bissetriz aparecerá.
  8. Escolha a ferramenta *Ponto em Objeto*, clique sobre a bissetriz. O ponto D aparecerá.
  9. Novamente com a ferramenta *Ângulo* (janela 8) meça os ângulos $B\hat{A}D$ e $D\hat{A}C$. Utilize a ferramenta *Mover* (janela 1) para posicionar melhor as medidas que aparecerão e para avaliar as mudanças que ocorrem com os ângulos a medida que os pontos forem movimentados.
  10. Ative a ferramenta *Reta Perpendicular* (janela 4). Clique sobre o ponto D e sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$ e depois sobre o ponto D e a semirreta $\overrightarrow{AC}$. As retas perpendiculares aos lados do ângulo aparecerão.

11. Utilize a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* (janela 2). Marque as interseções das perpendiculares com os lados do ângulo. Os pontos E e F aparecerão.
12. Ativando a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro* (janela 8) meça os comprimentos entre os pontos D e E e entre os pontos D e F.
13. Use mais uma vez a ferramenta *Mover* (janela 1). Movimente o ponto D e observe a variação dos comprimentos. Espera-se que ao fim da construção a aparência do desenho esteja, salvo os valores, próxima a da figura 5.2.

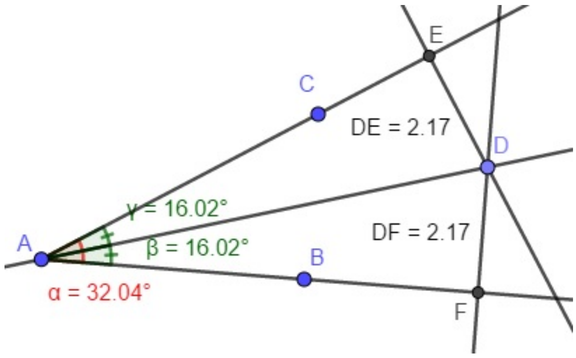


Figura 5.2: Atividade 3 - Bissetriz 1ª parte

- **Reflexão – Primeira parte**

  1. O que você observa em relação aos comprimentos DE e DF quando movimentar a construção?
  2. Proponha uma justificativa para o fato observado.
  3. Qual propriedade podemos associar às bissetrizes diante do exposto?

- **Formalização – Primeira parte:** Proponha um debate: levante as ideias e conjecturas dos estudantes, verifique se algum aluno usará a congruência de triângulos para explicar o fato. Use a ideia de lugar geométrico para finalizar a primeira parte da atividade.

- **Roteiro da atividade – Segunda parte**

  1. Repita os 4 primeiros passos da primeira parte da atividade.
  2. Ative a ferramenta *Circulo dados Centro e Um de seus Pontos* (janela 6), clique sobre o ponto A e depois sobre C. Uma circunferência com centro em A e raio AC aparecerá.
  3. Utilize a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* (janela 2) e marque o ponto D de interseção entre a circunferência e a semirreta $\overrightarrow{AB}$.
  4. Selecione a ferramenta *Compasso* (janela 6), clique sobre os pontos C, A e C, nessa ordem e depois nos pontos C, A e D, também na ordem em

que foram citados. Aparecerão duas circunferências de raio AC e centros em C e D, respectivamente.

5. Ative, novamente a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* (janela 2), clique nas duas últimas circunferências. O ponto E irá aparecer.
6. Escolha a ferramenta *Semirreta* (janela 3), clique nos pontos A e E.
7. Usando a ferramenta *Ângulo* (janela 8) meça os ângulos $C\hat{A}E$ e $E\hat{A}B$.
8. Use a ferramenta *Mover* (janela 1) para avaliar a construção. Espera-se que ao fim da construção a aparência do desenho seja próxima a da figura 5.3.

   Observação: Na figura 5.3 aparência das circunferências foi alterada utilizando-se as configurações. Clique com o botão direito sobre a imagem, escolha *Configurações* e na aba *Estilo* selecione a textura que desejar.

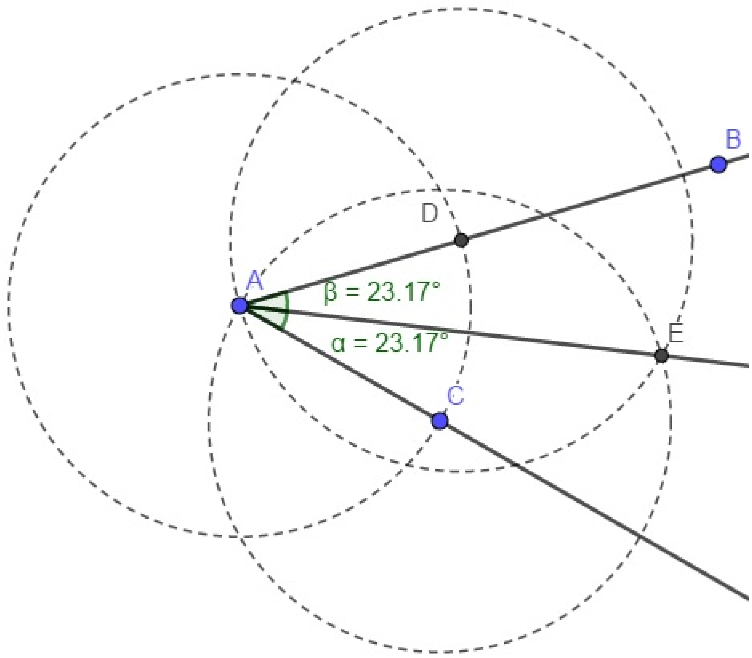


Figura 5.3: Atividade 3 - Bissetriz 2ª parte

- **Reflexão – Segunda parte**

  1. O que você observa em relação às medidas dos ângulos $C\hat{A}E$ e $E\hat{A}B$ ao movimentar a construção?
  2. Como você poderia justificar o fato da construção ter criado a bissetriz do ângulo?

- **Formalização – Segunda parte:** Converse com os estudantes, levante conjecturas, verifique se eles conseguem relacionar a propriedade da atividade anterior com o observado e justificar a construção.

5.4 Atividade 4 – Raízes quadradas de números naturais

A proposta a seguir foi elaborada pensando no 9º ano do ensino fundamental e Utilizou-se a versão a versão 6.0 do *GeoGebra*.

Nesta atividade a numeração das janelas da barra de ferramentas do software será feita conforme a figura 5.1.

- **Objetivos:** Aprender a construir a raiz quadrada de números naturais e obter uma "ferramenta" que faça esse cálculo.

- **Material:** Software de geometria dinâmica *GeoGebra*, disponível para download em [4].

- **Conhecimentos prévios:** Para realizar esta atividade o estudante deverá conhecer as relações métricas nos triângulos retângulos.

- **Roteiro da atividade**

1. Abra o *GeoGebra* e selecione a opção *Geometria*. A tela ficará vazia.
2. No canto superior direito clique sobre as três barras paralelas, escolha a opção *Configurações*, no item *Rotular* selecione *Apenas para os Pontos Novos*. Feche a janela de configurações.
3. Novamente, no canto superior direito clique sobre as três barras paralelas, escolha a opção *Exibir*, selecione a opção *Campo de Entrada*. Uma linha escrito "Entrada ..." aparecerá na parte inferior da tela. (Figura 5.4).

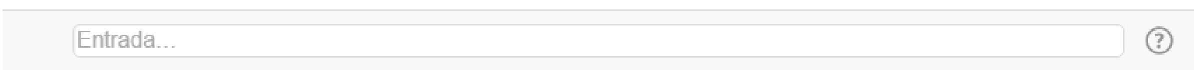


Figura 5.4: Campo de entrada *GeoGebra*

4. Selecione a ferramenta *Controle Deslizante* (janela 10). Clique no canto superior direto da tela. Na janela que aparecer mude o nome do controle para AB, escolha *mínimo* 1, *máximo* 50 e *incremento* 1. Aperte *OK*. O controle deslizante AB vai aparecer na tela.
5. Clique novamente na parte superior da tela, abaixo do controle AB e crie o controle BC com as mesmas configurações de AB.
6. Escolha a ferramenta *Mover* (janela 1). No campo de entrada digite $A = (0{,}0)$, aperte *enter*. O ponto A vai aparecer na tela.
7. Repita o processo digitando no campo de entrada $B = (AB{,}0)$ e $C = (AB + CD{,}0)$, um de cada vez. Os pontos B e C aparecerão na tela.
8. Clique sobre as bolinhas dos controles deslizantes, arraste-as e observe os pontos se moverem.

9. Selecione a ferramenta *Segmento* (janela 3). Clique sobre os pontos A e B e depois sobre os pontos B e C. Os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ aparecerão.
10. Ative a ferramenta *Semicírculo Definido por Dois Pontos* (janela 6). Clique sobre os pontos A e C. O semicírculo de diâmetro AC aparecerá.
11. Escolha a ferramenta *Reta Perpendicular* (janela 4). Clique no ponto B e depois no segmento $\overline{AB}$. Uma reta aparecerá.
12. Acione a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* (janela 2). Clique sobre a reta e sobre o semicírculo. O ponto D aparecerá.
13. Use, novamente, a ferramenta *Segmento* (janela 3). Clique sobre os pontos B e D.
14. Com a ferramenta *Exibir\Esconder Objeto* (janela 3) acionada clique sobre a reta e depois tecle *Esc.* A reta ficará invisível.
15. Ative a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro* (janela 8). Clique sobre os pontos B e D. A distância BD vai aparecer. Tecle *Esc.*
16. Movimente os controles deslizantes. O comprimento do segmento de reta $\overline{BD}$ é a raiz quadrada do produto dos números mostrados nos controles deslizantes.

Espera-se que a construção feita tenha a aparência, excetuando-se as cores, da figura 5.5. As cores podem ser facilmente alteradas clicando-se com o botão direito sobre o objeto e escolhendo a opção *Configurações*.

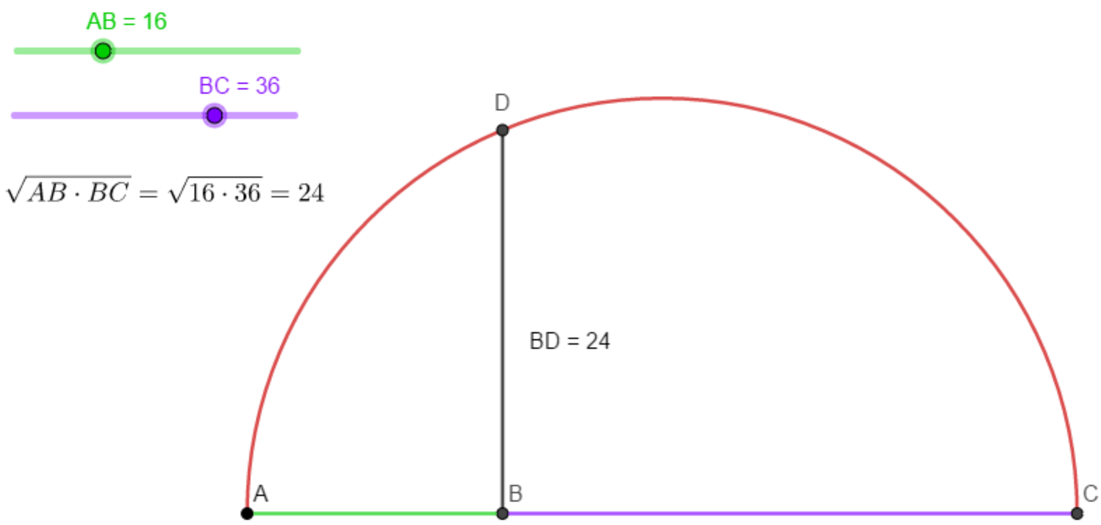


Figura 5.5: Atividade 4

- **Análise da construção:** Analisando a construção podemos notar que os pontos A, C e D são os vértices de um triângulo retângulo em $\hat{D}$, assim, o segmento de reta $\overline{BD}$ é a altura relativa a hipotenusa e os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são as projeções dos catetos $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$ sobre a hipotenusa. Logo, o resultado segue das relações métricas no triângulo retângulo.

6

Conclusões

O estudo da geometria acompanhada das construções geométricas com régua e compasso nem sempre é privilegiado nas escolas de ensino fundamental e médio e, muitas vezes, os alunos de graduação também não tem um estudo mais abrangente do assunto. É fundamental que todo professor de matemática do ensino básico possa ter um conhecimento mais fundamentado sobre o assunto para que, desse modo, possa desenvolver com seus estudantes essa importante área do conhecimento humano.

O estudo das construções com régua e compasso associadas às justificativas da geometria plana euclidiana e o uso das tecnologias na educação levam ao desenvolvimento dos estudantes pois os obrigam a pensar logicamente, fazer inferências, estabelecer relações e comparações. O desenvolvimento dessas habilidade pode proporcionar ao aluno, desde cedo, um raciocínio mais dinâmico e os capacitar a resolver problemas.

É fascinante perceber como alguns tópicos da matemática permanecem praticamente imutáveis por séculos enquanto que outros necessitaram da evolução dos estudos param serem entendidos em sua plenitude. Como exemplo destes temos as construções geométricas que continuam a ser feitas praticamente como propostas por Euclides em sua obra *Os Elementos* a mais dois mil anos atrás e como exemplo daqueles temos os problemas não resolvidos com régua e compasso da antiguidade, como a duplicação do cubo, que precisaram esperar o desenvolvimento da álgebra com sua teoria da extensão de corpos dos séculos XVIII e XIX para que fossem completamente elucidados.

É muito bonito ver que a matemática é o produto da humanidade como um todo, que várias mentes em épocas e lugares diferentes puderam contribuir para o seu desenvolvimento. Não podemos deixar esse importante legado se estagnar ou morrer temos que nos empenhar para aprendermos o máximo que pudermos e repassar às gerações mais jovens.

Espero que este singelo estudo possa inspirar algum professor para que adote em sua prática docente as tecnologias voltadas para o ensino de geometria e de outras áreas da matemática. Que possam perceber o quão intrincados são os caminhos do conhecimento e de como somos privilegiados de viver em uma época em que temos amplo acesso aos conhecimentos desenvolvidos pelos matemáticos e por outros estudiosos.

A

Apêndice

As fotos foram feitas a partir da apostila de construções geométricas de um dos alunos para o qual partes das a Atividades 1 e 2 foram aplicada. A apostila foi elaborada por mim e é utilizada na disciplina de desenho geométrico do 8º ano do ensino fundamental do Colégio Santo Agostinho - Contagem onde leciono desde 2009.

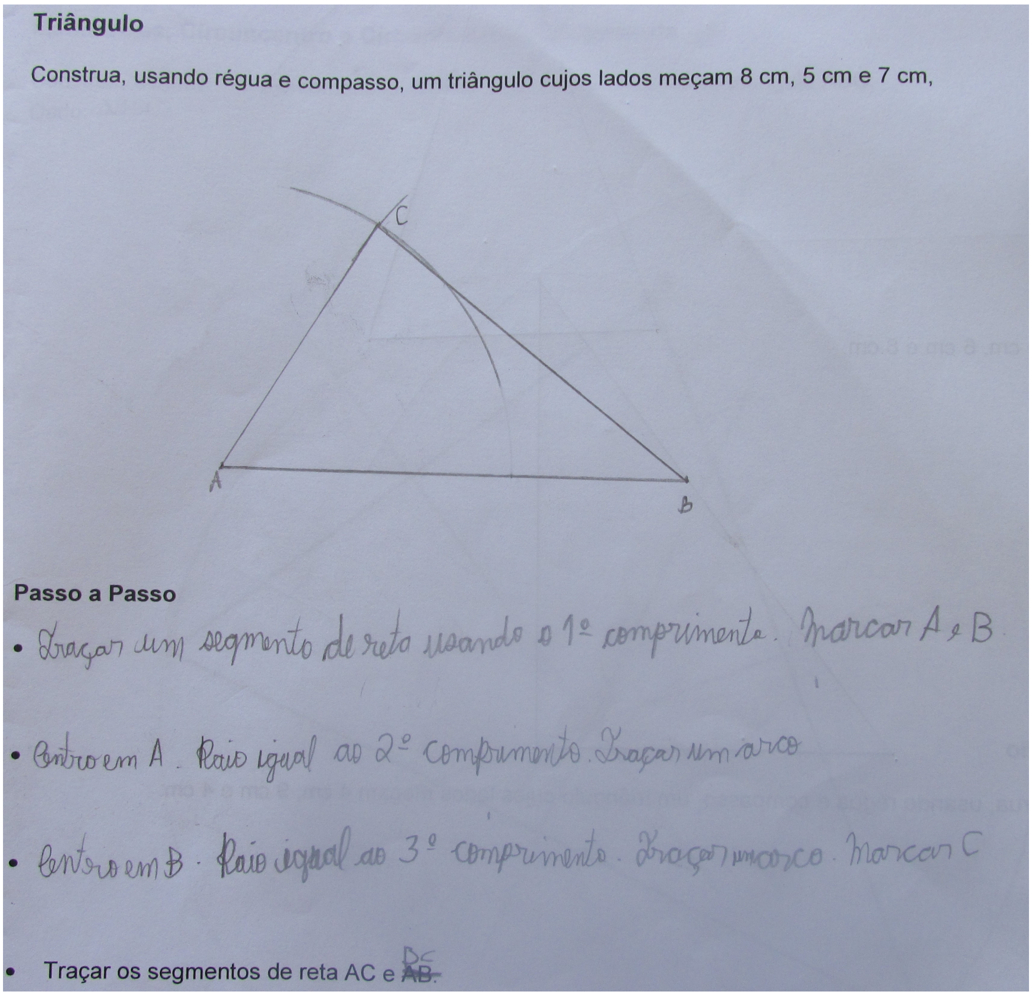


Figura A.1: Construção do triângulo e passo a passo – Atividade 1

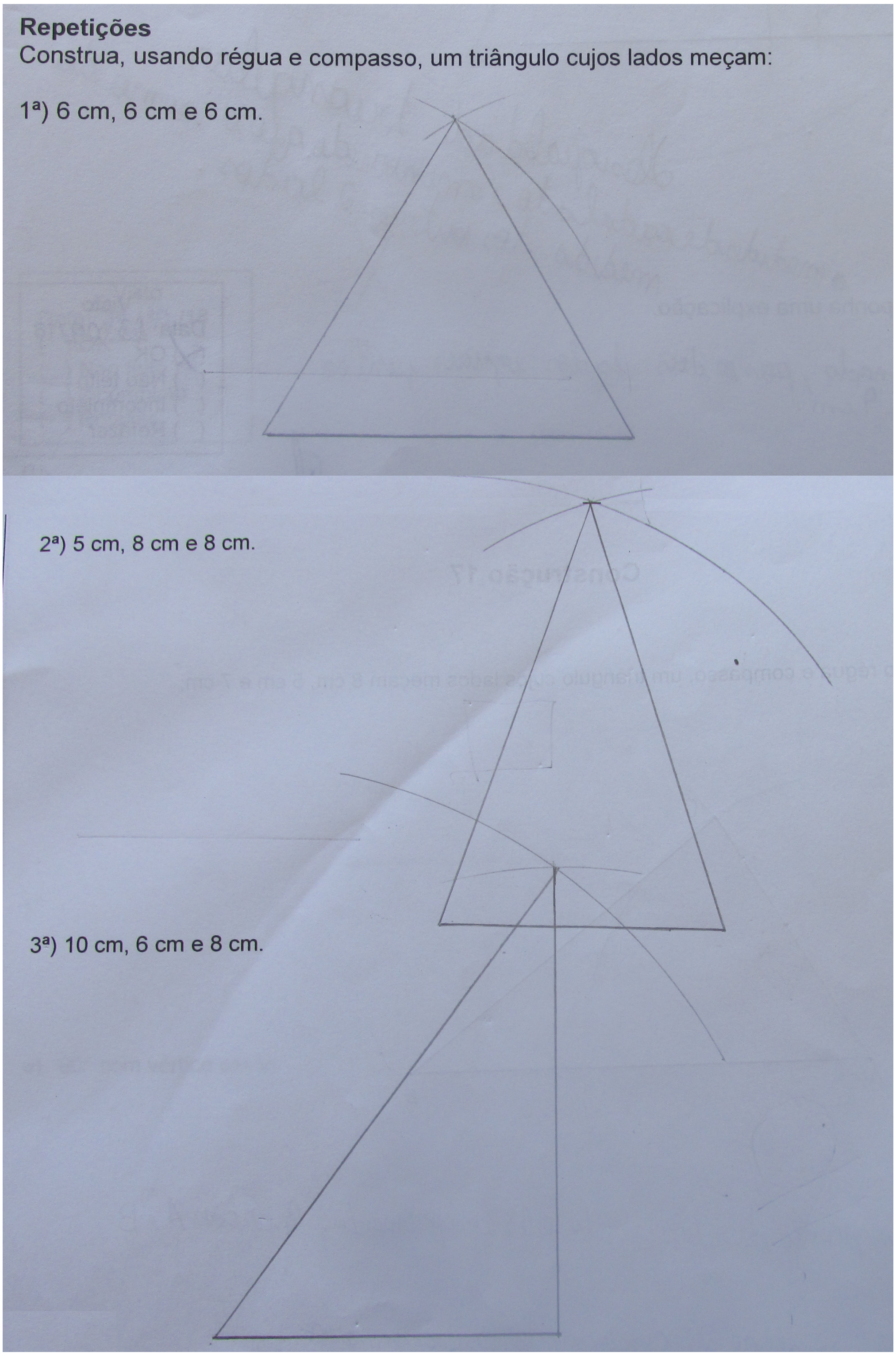


Figura A.2: Trabalho autônomo do estudante – Atividade 1

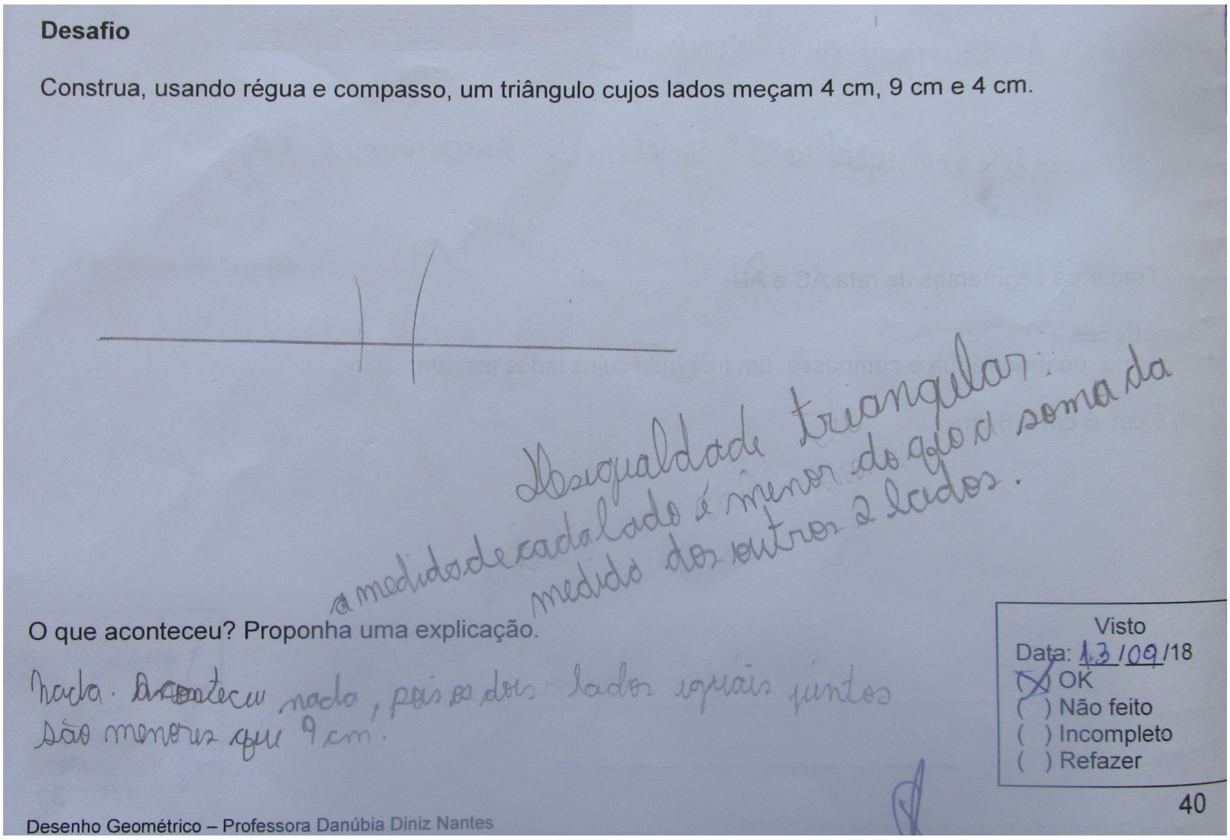
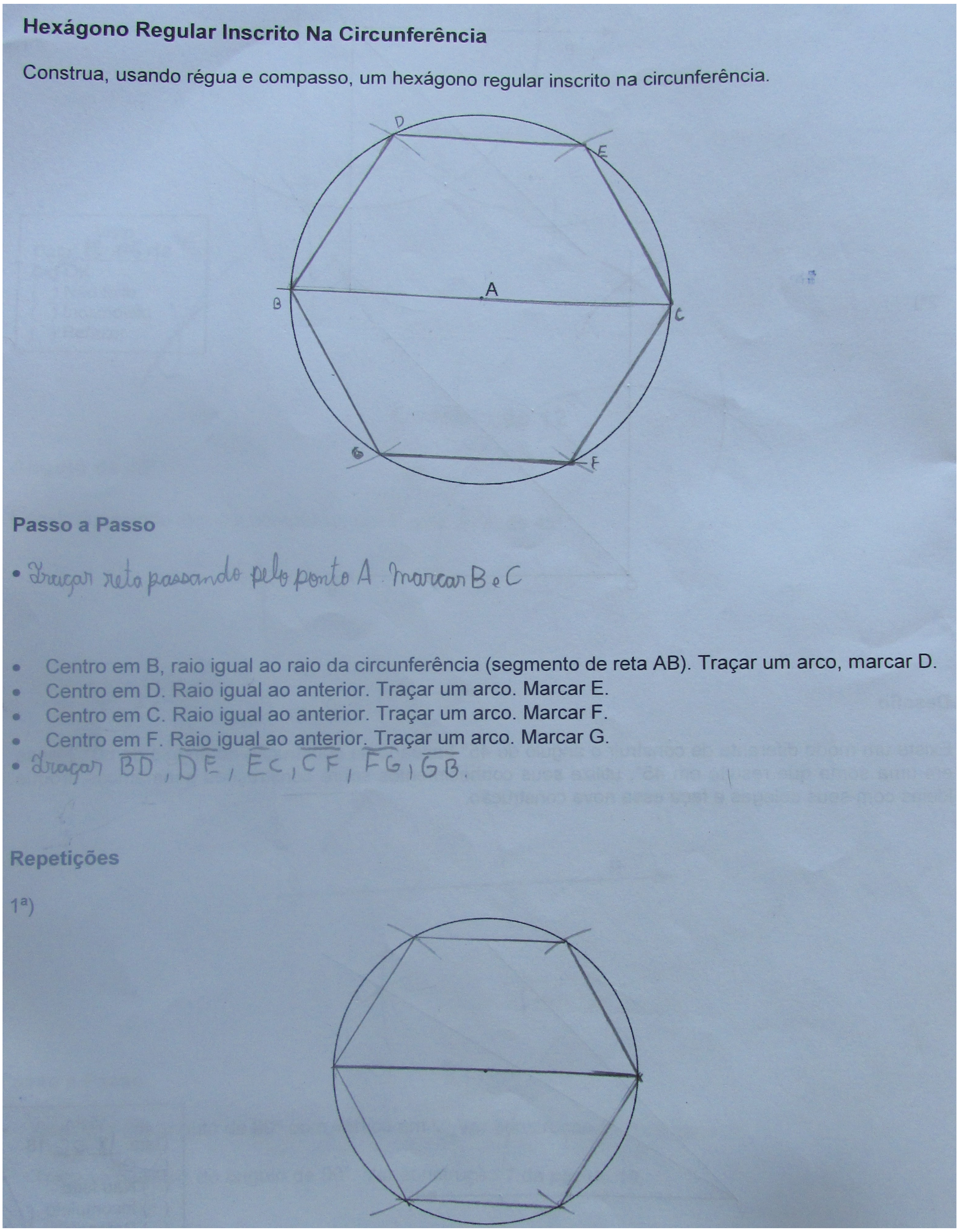


Figura A.3: Analisando a condição de existência dos triângulos – Atividade 1



Hexágono Regular Inscrito Na Circunferência

Construa, usando régua e compasso, um hexágono regular inscrito na circunferência.

Passo a Passo

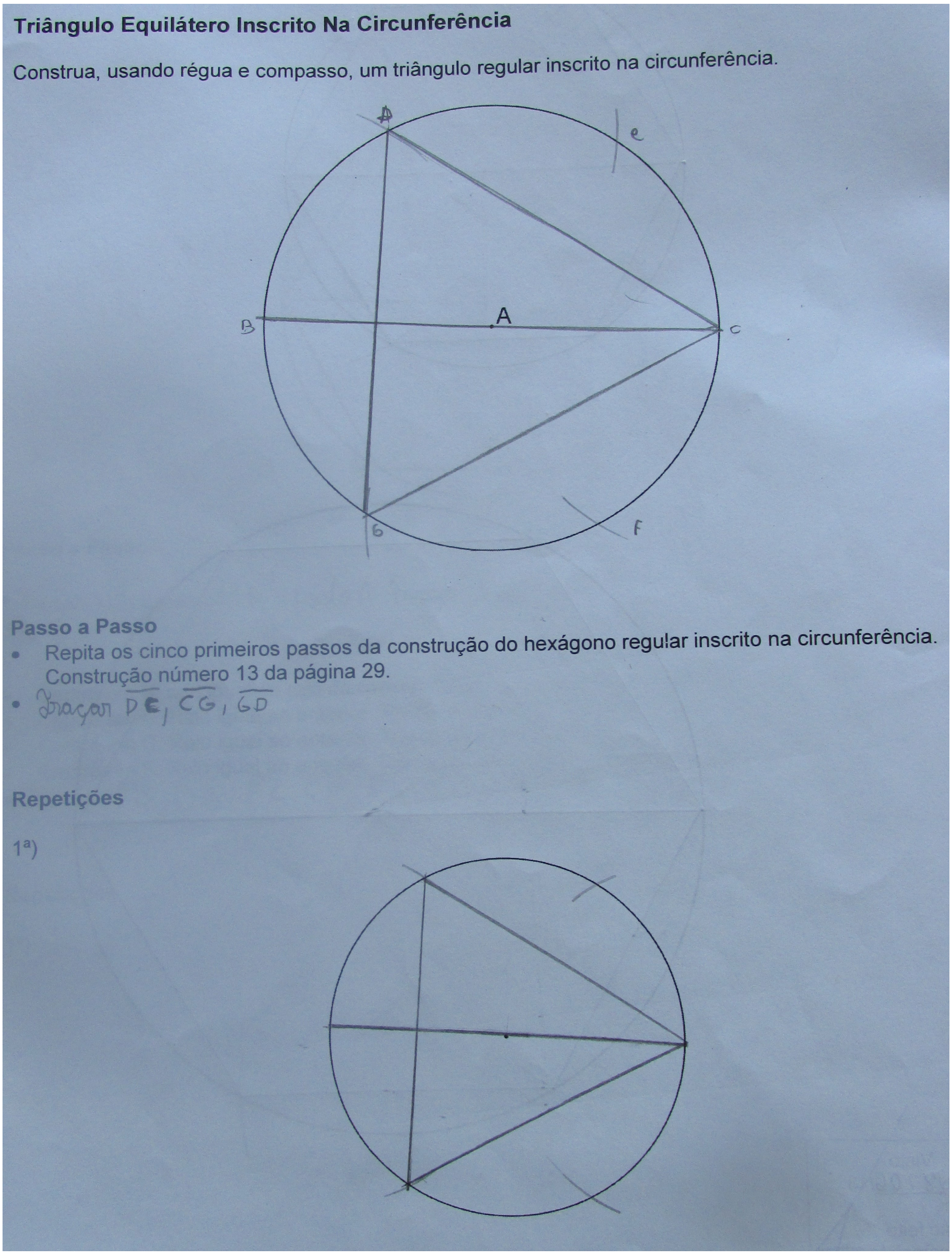
- Traçar reta passando pelo ponto A. Marcar B e C

- Centro em B, raio igual ao raio da circunferência (segmento de reta AB). Traçar um arco, marcar D.
- Centro em D. Raio igual ao anterior. Traçar um arco. Marcar E.
- Centro em C. Raio igual ao anterior. Traçar um arco. Marcar F.
- Centro em F. Raio igual ao anterior. Traçar um arco. Marcar G.
- Traçar $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$, $\overline{CF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GB}$.

Repetições

1ª)

Figura A.4: Construção hexágono regular – Atividade 2



Triângulo Equilátero Inscrito Na Circunferência

Construa, usando régua e compasso, um triângulo regular inscrito na circunferência.

Passo a Passo

- Repita os cinco primeiros passos da construção do hexágono regular inscrito na circunferência. Construção número 13 da página 29.
- Traçar $\overline{DE}$, $\overline{CG}$, $\overline{GD}$

Repetições

1ª)

Figura A.5: Construção triângulo equilátero – Atividade 2

Bibliografia

[1] Gonçalves, A. *Introdução à álgebra.* Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[2] Hefez, A. *Iniciação à Aritmética.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

[3] Hefez, A. e Villela, M. L. T. *Polinômios e Equações Algébricas.* 1ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2012, p. 269.

[4] Hohenwarter, M. et al. *GeoGebra.* 2017. URL: http://www.geogebra.org (acesso em 8 de abr. de 2018).

[5] Neto, A. C. M. *Geometria.* 1ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2013, p. 502.

[6] Rezende, E. e Queiroz, M. de. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas.* Editora da Unicamp, 2008.