



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI - UFCA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

O USO DE DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO-APRENDIZAGEM  
DE MATEMÁTICA

JOÃO CELSO DA LUZ

JUAZEIRO DO NORTE - CE  
2019

JOÃO CELSO DA LUZ

O USO DE DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO-APRENDIZAGEM  
DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior

JUAZEIRO NO NORTE - CE

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Cariri  
Sistema de Bibliotecas

---

- L994u Luz, João Celso da.  
O uso de demonstrações geométricas no ensino-aprendizagem de matemática/João Celso da Luz. – 2019.  
83 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.  
(Inclui bibliografia p.64-66).
- Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia –Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2019.
- Orientação: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior.
1. Provas. 2. Demonstrações. 3. Visualização.4. Representações geométricas. I. Título.

---

CDD 510.7

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

---

## Uso de Demonstrações Geométricas no Ensino- Aprendizagem de Matemática

**JOÃO CELSO DA LUZ**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 19 de julho de 2019.

### Banca Examinadora

Valdinês Leite de Sousa Júnior

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior  
Orientador

Leandro da Silva Tavares

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares

UFCA

Steve da Silva Vicentim

Prof. Dr. Steve da Silva Vicentim

UFCA

Clarice Dias de Albuquerque  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Clarice Dias de Albuquerque

UFCA

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, ao meu pai Celso e a minha mãe Angelita pela firmeza e zelo com que me trouxeram e prepararam para a vida.

Aos meus irmãos Antônio, Roberto, Carleide e especialmente Creiton pelo incentivo, exemplo e companheirismo. Também a minha companheira Patrícia pelas contribuições, compreensão, paciência e incentivo.

Ao professor Valdinês Leite, pela paciência, orientação e confiança.

Aos colegas de mestrado pelo acolhimento, companheirismo, e prestatividade.

Aos professores da UFCA que compõem o PROFMAT.

Aos professores e amigos da UFPI, pela jornada no curso e graduação.

A CAPES, SBM, idealizadores do PROFMAT e a todos que direta ou indiretamente contribuíram para essa realização.

*Dedico este trabalho a minha família, aos meus amigos #zins, e em especial ao meu pai (in memoriam).*

*“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota”. (Madre Teresa de Calcuta)*

# Resumo

Buscando melhores métodos para explicação ou compreensão acerca de importantes assuntos desenvolvidos em sala de aula, o presente trabalho propõe, apresentar e estimular o uso de provas simples, visuais, ou até mesmo demonstrações formais, de resultados e fórmulas matemáticas no âmbito do Ensino Fundamental e Médio. Como a compreensão a partir da visualização é mais significativa, e encoraja os alunos a buscar e adquirir conhecimento, apresentamos algumas provas visuais de alguns resultados básicos, por vezes, acompanhadas de argumentos algébricos para explicar as ilustrações. Em seguida, destacamos algumas representações geométricas de somas numéricas e finalmente apresentamos algumas demonstrações geométricas de irracionalidade. Visando enriquecer tais abordagens e envolver o leitor na busca por outros resultados, ao fim de cada capítulo propomos alguns exercícios cuja solução é similar às discussões anteriores. Os resultados presentes neste trabalho, foram extraídos ou inspirados principalmente em Alsina e Nelsen (2006) e Morais Filho, Andrade e Silva (2017).

**Palavras-chave:** Provas. Demonstrações. Visualização. Representações geométricas.

# Abstract

Searching for better methods to explanation or comprehension about important issues developed inside classroom, the present work proposes to present and estimate the usage of simple proofs, visuals, or even formal demonstrations about the results and mathematical formulas in the Elementary and High school teaching levels. Since the visual comprehension is to be more significant, and encourages learners to acquire and improve knowledge, we presented some visual proofs related to some basic results, sometimes, followed by algebraic arguments to explain the illustrations. Then, we highlighted some geometrical representations of numerical sums and finally we present some geometric demonstrations of irrationality. In order to enrich such approaches and involve the reader in the search for other results, in the end of each chapter we propose some activities whose solution is similar to the previous discussions. The results presented in this work were extracted or inspired mainly in Alsina and Nelsen (2006) and Morais Filho, Andrade and Silva (2017).

**Keywords:** Proofs. Demonstrations. Visualization. Geometric representations.

# Lista de Figuras

3.1	Quadrado da soma de dois termos . . . . .	20
3.2	Quadrado da diferença de dois termos . . . . .	21
3.3	Diferença de quadrados, parte I . . . . .	22
3.4	Diferença de quadrados, parte II . . . . .	23
3.5	Propriedade distributiva, parte I . . . . .	23
3.6	Propriedade distributiva, parte II . . . . .	24
3.7	Desigualdade das médias aritmética e geométrica . . . . .	25
3.8	Teorema de Pitágoras, parte I . . . . .	26
3.9	Teorema de Pitágoras, parte II . . . . .	27
3.10	Teorema de Pitágoras, parte III . . . . .	27
3.11	Teorema de Pitágoras, parte IV . . . . .	28
3.12	Teorema de Tales, parte I . . . . .	28
3.13	Teorema de Tales, parte II . . . . .	29
3.14	Completar quadrado . . . . .	30
3.15	Completar quadrado, fórmula geral . . . . .	32
3.16	Determinante e a área do paralelogramo, parte I . . . . .	33
3.17	Determinante e a área do paralelogramo, parte II . . . . .	33
3.18	Determinante e a área do paralelogramo, parte III . . . . .	34
3.19	Determinante e a área do paralelogramo, parte IV . . . . .	34
3.20	Prova sem palavras do Teorema de Pitágoras . . . . .	35
3.21	Lei dos senos . . . . .	36
4.1	Soma de naturais ímpares, parte I . . . . .	37
4.2	Soma de naturais ímpares, parte II . . . . .	38
4.3	Soma de metades, parte I . . . . .	38
4.4	Soma de metades, parte II . . . . .	39

4.5	Triângulos equiláteros congruentes . . . . .	40
4.6	Soma das potências de um quarto, parte I . . . . .	40
4.7	Soma das potências de um quarto, parte II . . . . .	41
4.8	Triângulo decomposto em 9 partes . . . . .	41
4.9	Soma das potências de quatro nonos . . . . .	42
4.10	Soma das potências de um terço . . . . .	43
4.11	Série alternada . . . . .	44
4.12	Soma infinita de uma PG . . . . .	45
4.13	Séries numéricas geometricamente . . . . .	45
4.14	Soma de inteiros geometricamente . . . . .	46
4.15	Soma de naturais geometricamente . . . . .	46
4.16	Soma de cubos geometricamente . . . . .	47
5.1	Irrracionalidade da raiz de 2 geometricamente . . . . .	51
5.2	Outra forma geométrica para a irracionalidade da raiz de 2 . . . . .	52
5.3	Irrracionalidade da raiz de 3 geometricamente . . . . .	53
5.4	Outra forma geométrica para a irracionalidade da raiz de 3 . . . . .	54
5.5	Irrracionalidade da raiz de 5 geometricamente, parte I . . . . .	55
5.6	Irrracionalidade da raiz de 5 geometricamente, parte II . . . . .	56
5.7	Outra forma geométrica para a irracionalidade da raiz de 5 . . . . .	59
5.8	Irrracionalidade da raiz de 6 geometricamente, parte I . . . . .	60
5.9	Irrracionalidade da raiz de 6 geometricamente, parte II . . . . .	61
5.10	Irrracionalidade da raiz de 6 geometricamente, parte III . . . . .	62
A.1	Polígono regular de $n$ lados . . . . .	69
A.2	Triângulo que decompõe o polígono . . . . .	70
A.3	Polígonos decompostos em triângulos . . . . .	71
A.4	Pentágono, parte I . . . . .	73
A.5	Pentágono, parte II . . . . .	73
A.6	Pentágono, parte III . . . . .	74
B.1	Quadrado da soma mais quadrado da diferença . . . . .	75
B.2	Quadrado da soma de três termos . . . . .	76
B.3	Desigualdade das médias geométrica e harmônica . . . . .	76

B.4 Prova do Teorema de Pitágoras . . . . .	77
B.5 Prova da Lei dos Senos . . . . .	77
B.6 Média dos quadrados e quadrado da média . . . . .	78
B.7 Soma das oitavas partes . . . . .	78
B.8 Soma das potências de um nono . . . . .	79
B.9 Soma de ímpares . . . . .	80
B.10 Quinta parte do quadrado . . . . .	81
B.11 Soma das potências de um quinto . . . . .	82
B.12 Soma de cubos . . . . .	83

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Referências</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>Prova de alguns resultados básicos</b>	<b>19</b>
3.1	Quadrado da soma de dois termos . . . . .	19
3.2	Quadrado da diferença de dois termos . . . . .	20
3.3	Diferença dos quadrados de dois termos . . . . .	22
3.4	Propriedade distributiva . . . . .	23
3.5	Desigualdade das médias . . . . .	24
3.6	Teorema de Pitágoras . . . . .	26
3.7	Teorema de Tales . . . . .	28
3.8	Resolvendo equações do segundo grau . . . . .	29
3.8.1	Demonstração da fórmula geral . . . . .	31
3.9	Área de um paralelogramo por meio de determinantes . . . . .	32
3.10	Exercícios propostos . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Séries Numéricas</b>	<b>37</b>
4.1	Soma dos $n$ primeiros naturais ímpares . . . . .	37
4.2	P.G. de primeiro termo e razão $1/2$ . . . . .	38
4.3	P.G. de primeiro termo e razão $1/4$ . . . . .	39
4.4	P.G. de primeiro termo e razão $4/9$ . . . . .	41
4.5	P.G. de primeiro termo e razão $1/3$ . . . . .	42
4.6	Série alternada . . . . .	43
4.7	P.G. de primeiro termo $a$ e razão $r$ , com $0 < r < 1$ . . . . .	44
4.8	Exercícios propostos . . . . .	45

<b>5</b>	<b>Demonstrações geométricas de irracionalidade</b>	<b>48</b>
5.1	Irracionalidade de $\sqrt{2}$ . . . . .	50
5.2	Irracionalidade de $\sqrt{3}$ . . . . .	52
5.3	Irracionalidade de $\sqrt{5}$ . . . . .	55
5.4	Irracionalidade de $\sqrt{6}$ . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>64</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>66</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>69</b>
	<b>Apêndice B</b>	<b>75</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Um dos objetivos do ensino da Matemática na Educação Básica é o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, para que os alunos se tornem capazes de argumentar, justificar, explicar, provar e demonstrar seus resultados, seus raciocínios e pensamentos em todos os âmbitos da vida. Por isso, é importante e necessário se trabalhar com as provas e demonstrações matemáticas em sala de aula, uma vez que, se começarmos a levar o aluno a pensar, argumentar e justificar suas ideias, estaremos ajudando a formar um cidadão crítico e capaz de defender suas ideias e argumentos, não só matematicamente, mas também socialmente.

Porém, o uso de provas ou demonstrações matemáticas não é comum nos últimos anos do Ensino Fundamental. Ao invés disso, a prática escolar fica voltada somente para resolução de problemas, sem suas devidas justificativas, o que pode levar à falta de reflexão por parte do educando, no que concerne ao raciocínio matemático.

Assim, é necessário compreendermos que a Matemática não se resume à resolução de exercícios simplesmente com aplicação de fórmulas, mas que há um discurso passível de demonstração e que é essencial ao entendimento dos conteúdos, pois mostra ao educando a validade das declarações feitas, exibindo as etapas do processo dedutivo, para assim desenvolver no educando o raciocínio lógico-dedutivo. É necessário também entendermos que a argumentação lógico-dedutiva não é uma habilidade que pode ser ensinada em algumas aulas, isto é, o processo de argumentação, justificação, explicação até chegar a prova deve ser desenvolvido desde os primeiros anos, ao longo de toda escolaridade, em uma constante gradação dos níveis de argumentação, com o intuito de conduzir o aluno a construir justificativas que possam ser aceitas como provas de resultados matemáticos.

Diante da necessidade de tornar o ensino-aprendizagem de Matemática mais atrativo e significativo, as provas visuais ganham destaque em artigos de Matemáticos importantes como o do professor Hilário Alencar, veja Alencar, Cândido e Farias (2019). Inspirado nos trabalhos do Professor Roger B. Nelsen, veja Alsina e Nelsen (2006), Nelsen (2015) e Nelsen (1993), nos quais apresenta várias *Provas sem Palavras*, o presente trabalho propõe explorar a visualização de certos resultados por meio de figuras e quando necessário ao entendimento e convencimento explicaremos tais figuras.

Como a Matemática do Ensino Básico é rica em situações problemas e em fórmulas que trazem aos alunos diversas aplicações, este trabalho apresenta provas de alguns resultados clássicos usando conhecimentos elementares de Matemática e figuras geométricas. Inicialmente, as demonstrações visuais selecionadas abordam resultados que são frequentemente utilizados ao longo do Ensino Básico e que são fáceis de se visualizar geometricamente. No que segue, apresentamos provas visuais que requerem mais abstração tanto para sua construção como para sua compreensão. Apresentamos também representações visuais de somas numéricas, principalmente na forma de progressões geométricas. E finalizamos com algumas demonstrações geométricas de irracionalidade que embora visuais, requerem maior abstração e conhecimento Matemático para justificar suas conclusões. O objetivo é contribuir para que professores e alunos compreendam melhor a teoria, de onde surgem as fórmulas, não ficando simplesmente no abstrato. Espera-se também que esse trabalho inspire professores do Ensino Básico a tentar convencer seus alunos acerca da veracidade dos resultados matemáticos, procurando dar significado por meio de palavras, desenhos, gestos ou esboços de acordo com o nível de abstração dos alunos, podendo chegar a demonstrações teóricas partindo de axiomas e teoremas.

O trabalho está organizado em seis capítulos. Inicialmente trata-se sobre a importância da visualização matemática, por meio das provas e demonstrações visuais, para o ensino-aprendizagem. O Capítulo 3 apresenta provas de alguns resultados básicos através da área de quadrados e retângulos, tais como, produtos notáveis, os teoremas de Pitágoras e Tales, equação do segundo grau e a área de um paralelogramo. O Capítulo 4 é dedicado as demonstrações de séries numéricas através de figuras geométricas. Enquanto o Capítulo 5 apresenta demonstrações geométricas de irracionalidade de alguns números. Em seguida são feitas considerações finais sobre a dissertação e, finalmente, nos anexos apresentamos demonstrações das proposições utilizados no Capítulo 5, além de uma solução para os

exercícios propostos nos Capítulos 3 e 4.

## Capítulo 2

### Referências

Conforme propõe os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), os recursos didáticos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Assim, compreendemos que a Matemática deve ser abordada de uma maneira menos abstrata, voltada para a realidade dos alunos. Para tal, é necessário fazer uso de metodologias que desenvolvam um ensino que atenda às necessidades locais dos estudantes, pois:

Os alunos trazem para a escola conhecimentos, ideias e intuições, construídos através das experiências que vivenciam em seu grupo sociocultural. Eles chegam à sala de aula com diferenciadas ferramentas básicas para, por exemplo, classificar, ordenar, quantificar e medir. Além disso, aprendem a atuar de acordo com os recursos, dependências e restrições de seu meio. (BRASIL, 1997, p.25).

Assim, “a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios” (BRASIL, 1998, pg.27).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), está presente a importância da utilização de representações gráficas na forma de expressões gráficas, ou seja, para desenhos e construções, justificando-se assim, que:

No ensino da matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquema, tabelas

e figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados. (BRASIL, 1997, p.19).

Neste sentido, a visualização matemática tem grande importância para o desenvolvimento do pensamento matemático, uma vez que pode influenciar a construção de significados de conceitos matemáticos, ampliar a criatividade do aluno e servir de ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Corroborando com essa ideia, Flores (2010, p. 274) aponta “a visualização como uma experiência do olhar e do pensar” e conclui que “a visualização matemática é entendida como uma expressão do pensamento, uma forma de olhar e de pensar”. Flores (2010) resgata o termo visualidade, a fim de entender como aprofundar o estudo do olhar em Matemática. Dessa forma, propõe estudos “entre visualidade, cultura visual e visualização matemática como possibilidade para pensar, teorizar e articular as pesquisas em educação matemática e visualização” (FLORES, 2010, p. 291).

As representações com figuras, imagens e diagramas sempre fizeram parte do “fazer matemático”, pois:

A visualização foi o incentivo geral do trabalho criativo dos matemáticos de todos os tempos. Um ou outro tipo de imagem acompanha constantemente suas especulações, (...). A visualização, (...), ocupa um importante papel no desenvolvimento do pensamento matemático. Como tinha que ser, dada a natureza cognitiva do homem, tão condicionada pelos elementos visuais, intuitivos, simbólicos, representativos, e como corresponde à natureza da matemática e seus propósitos. (GUZMÁN, 1996).

As representações visuais com figuras ou imagens aproximam o conhecimento matemático da realidade, possibilitando compreender a Matemática a partir de formas e contornos existentes ao nosso redor. Nesse sentido, Medina, Liblik e Medeiros (2011) destacam que

As imagens, para Torrealba (2004), desempenham um papel fundamental na nova sociedade de informação, enriquecendo as mensagens e reforçando-as,

sendo em algumas vezes ela própria a mensagem. No que tange ao uso de imagens no processo de ensino-aprendizado, Comênio, considerado o pai da didática, publicou em 1658 o primeiro livro ilustrado com o título “O Mundo em Imagens”. Comênio mostra ao mundo as potencialidades do uso de imagens no processo ensino-aprendizagem por acreditar que a leitura se torne mais eficaz com a combinação de texto e imagens (MEDINA; LIBLIK; MEDEIROS, 2011, p.487).

Ainda refletindo sobre formas de compreender melhor o conhecimento matemático, para Hersh (1993), que disserta sobre a finalidade da prova, por um lado, na pesquisa matemática ela tem a função de convencer juízes qualificados, na sala de aula, por outro lado, sua função é de explicar, esclarecer para estimular a compreensão dos alunos. Além disso, para Aguilar Jr e Nasser (2012, p. 136), ensinar por meio de uma prova “consiste em mostrar ao educando a validade da declaração feita, exibindo as etapas do processo dedutivo, para assim desenvolver no educando o raciocínio lógico-dedutivo”.

Siu (1993), por sua vez, cita que o papel da prova não é apenas o de verificar se uma afirmação dada é verdadeira ou não. “A prova tem um papel no reforço da compreensão. Se a única função de uma prova fosse de verificação, nada viria a ser adquirida mediante provas diferentes do mesmo teorema. Mas provas diferentes não servem apenas para convencer, mas também para esclarecer” (SIU, 1993, p.352).

Como observado por Miller (2012), “nossa capacidade de perceber conceitos visualmente é incrivelmente poderosa e nós seríamos tolos se não a utilizarmos para maximizar a extensão do nosso entendimento. Em geral, as provas visuais podem, e devem ser usadas além de provas formais” (MILLER, 2012, pg. 23). Miller (2012) ainda acrescenta que: “Mesmo que elas não provem logicamente um teorema de determinados axiomas, elas podem adicionar clareza e compreensão concreta a uma outra série opaca de deduções matemáticas. E se nada mais, as provas visuais servem para estimular o pensamento matemático e a curiosidade, que são tão vitais para o progresso matemático como os resultados em si” (MILLER, 2012, pg. 23).

# Capítulo 3

## Prova de alguns resultados básicos

Neste capítulo, apresentaremos demonstrações interessantes de alguns resultados matemáticos básicos com ideias geométricas, mais visuais. O objetivo é fornecer uma perspectiva mais clara para que alunos e professores encontrem estímulo e encorajamento para estudar e criar novas demonstrações. A compreensão a partir da visualização torna o conhecimento mais significativo, promove a formação de conceitos, desperta o interesse e curiosidade, desenvolve o raciocínio e portanto contribui para o aperfeiçoamento das habilidades matemáticas dos alunos.

### 3.1 Quadrado da soma de dois termos

*O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo:*

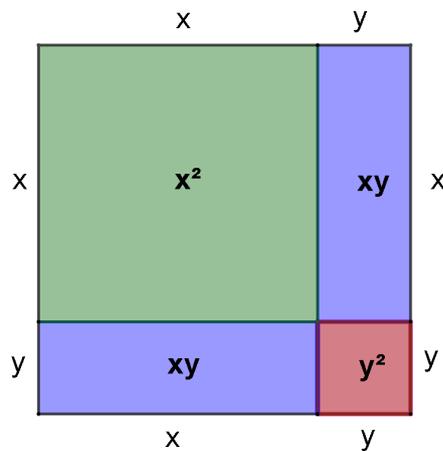
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Esse resultado é comumente apresentado no ensino fundamental e tem grande importância para a realização de cálculos matemáticos, tornando-os mais práticos e rápidos. Devido a sua relevância nos procedimentos matemáticos, é muito importante compreender que essa fórmula não é uma invenção do acaso, veja Ortega (2018, p.30). Para tal, observe a Figura 3.1, onde tem-se um quadrado com lados de medida  $x + y$ .

Por um lado, a área do quadrado de lado  $x + y$  da Figura 3.1 é dada por

$$A = (x + y)^2.$$

Figura 3.1: Quadrado da soma de dois termos



Fonte: Autor

Por outro lado, esse quadrado foi dividido em dois quadrados menores, um de lado  $x$  e outro de lado  $y$ , e em dois retângulos de lados  $x$  e  $y$ . Assim, a soma dessas áreas é igual a área total do quadrado maior, ficando

$$\begin{aligned} A &= x^2 + xy + xy + y^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Assim, verifica-se a veracidade dessa identidade.

## 3.2 Quadrado da diferença de dois termos

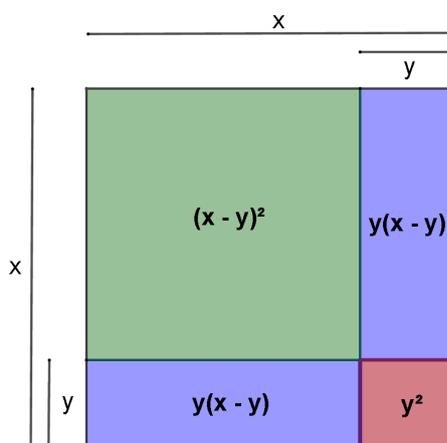
Semelhante ao resultado anterior em termos de aplicações, o quadrado da diferença de dois termos consiste em:

*o quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo, isto é,*

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Para compreender melhor (vide Ortega (2018, p.31)), observe na Figura 3.2, o quadrado com lados de medida  $x$ .

Figura 3.2: Quadrado da diferença de dois termos



Fonte: Autor

Sua área é

$$A = x^2.$$

Em contrapartida, esse quadrado foi dividido em dois quadrados menores, um de lado  $x-y$  e outro de lado  $y$ , e dois retângulos de lados  $x-y$  e  $y$ , então a soma dessas áreas é igual a área total do quadrado maior, ficando assim

$$\begin{aligned} A &= (x-y)^2 + y(x-y) + y(x-y) + y^2 \\ &= (x-y)^2 + 2y(x-y) + y^2 \\ &= (x-y)^2 + 2yx - 2y^2 + y^2. \end{aligned}$$

Como as duas áreas encontradas representam a área do mesmo quadrado, então temos que

$$x^2 = (x-y)^2 + 2xy - y^2,$$

assim,

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Portanto, tem-se a veracidade da afirmação.

### 3.3 Diferença dos quadrados de dois termos

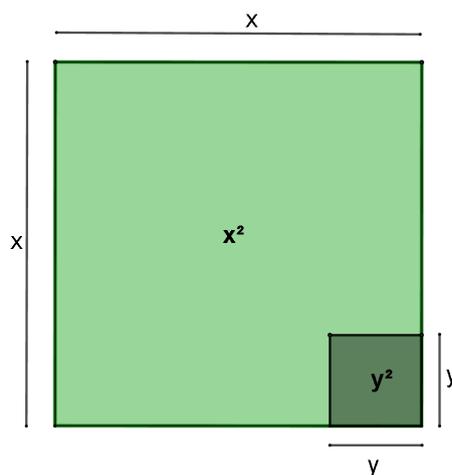
A diferença dos quadrados de dois termos é tão importante quanto os dois resultados anteriores, e de grande utilidade na resolução de cálculos algébricos.

*A diferença dos quadrados de dois termos é igual ao produto da soma pela diferença desses termos:*

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

Para interpretar essa afirmação, veja Alsina e Nelsen (2006, p.19), considere na Figura 3.3, o quadrado com lados de medida  $x$  e área  $x^2$ , e o quadrado menor, inscrito, com lados de medida  $y$  e área  $y^2$ .

Figura 3.3: Diferença de quadrados, parte I



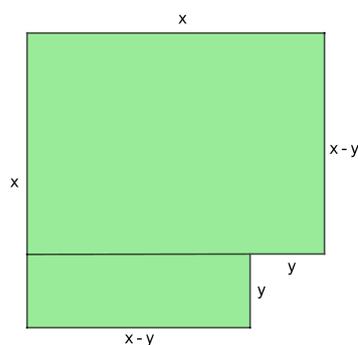
Fonte: Autor

Após a subtração da maior área pela menor área, a área restante pode ser dividida em duas partes, que são dois retângulos como na Figura 3.4.

A área restante será, portanto, a soma das áreas dos dois retângulos, a saber, o retângulo de lados  $x$  e  $x - y$  e o retângulo de lados  $y$  e  $x - y$ . Assim,

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= x(x - y) + y(x - y) \\ &= (x + y)(x - y).\end{aligned}$$

Figura 3.4: Diferença de quadrados, parte II



Fonte: Autor

### 3.4 Propriedade distributiva

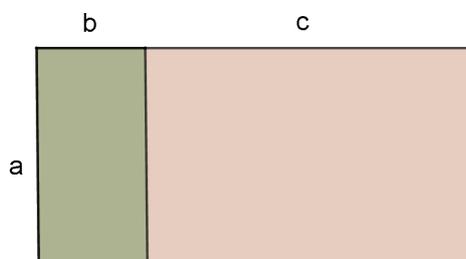
Dados os números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$ , a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição diz que:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Esse conceito é usado na álgebra para desenvolver expressões na forma  $a(b + c)$ . Geralmente, usamos a propriedade distributiva quando os dois termos dentro dos parênteses não podem ser somados, ou seja, não são termos semelhantes.

Para visualizar essa propriedade, observe na Figura 3.5, o retângulo cujos lados medem  $a$  e  $b + c$ . Para calcularmos a área desse retângulo podemos seguir duas formas diferentes.

Figura 3.5: Propriedade distributiva, parte I



Fonte: Autor

Primeiramente, a área de um retângulo é calculada através do produto da base pela altura. Neste caso, como a base e a altura do retângulo da Figura 3.5 medem, respecti-

vamente,  $a$  e  $b + c$ , tem-se

$$A = a(b + c).$$

Por outro lado, pode-se dividir o mesmo retângulo em dois retângulos menores de lados  $a$  e  $b$  e  $a$  e  $c$ . Daí, a soma das duas áreas é igual a área total do retângulo maior.

Logo,

$$A = ab + ac.$$

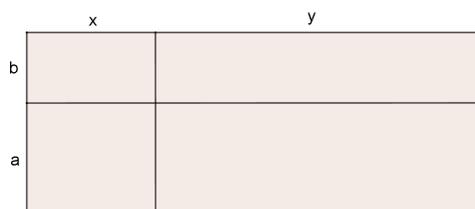
Como as duas áreas encontradas representam a área do mesmo retângulo, tem-se

$$a(b + c) = ab + ac.$$

De modo análogo, como mostra a Figura 3.6, veja que a área do retângulo de lados  $a + b$  e  $x + y$  é igual a soma das áreas do quatros retângulos menores. Assim,

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Figura 3.6: Propriedade distributiva, parte II



Fonte: Autor

## 3.5 Desigualdade das médias

A desigualdade entre as médias geométrica e aritmética permite resolver problemas em que se procura maximizar ou minimizar alguma expressão, e existem muitas aplicações na matemática básica, por exemplo, em geometria plana ao minimizar ou maximizar área e perímetro, em geometria espacial ao minimizar ou maximizar volumes.

Essa desigualdade nos diz que

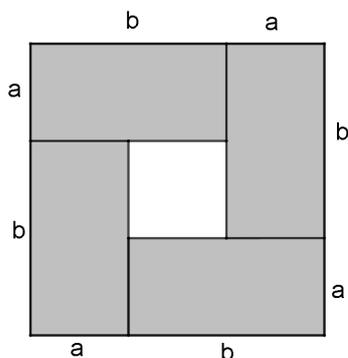
*se  $a$  e  $b$  forem números reais maiores que ou iguais a zero, então a média aritmética entre eles é sempre maior ou igual a média geométrica, isto é,*

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

A igualdade vale se, e somente se,  $a = b$ .

Para visualizar essa desigualdade, observe o quadrado na Figura 3.7 (vide Alsina e Nelsen (2006, p.16)), cujos lados medem  $a + b$ .

Figura 3.7: Desigualdade das médias aritmética e geométrica



Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

A área total do quadrado de lado  $a + b$  é  $A = (a + b)^2$ . Por outro lado, a área total do quadrado pode ser expressa pela soma das áreas dos quatro retângulos cujos lados medem  $a$  e  $b$  (retângulos cinza) mais a área do quadrado de lado  $b - a$  (quadrado branco) na Figura 3.7, isto é,

$$A = 4ab + (b - a)^2.$$

Assim,

$$(a + b)^2 = 4ab + (b - a)^2 \geq 4ab.$$

e portanto,

$$(a + b)^2 \geq 4ab.$$

Daí, segue que

$$\frac{(a + b)^2}{4} \geq ab,$$

e finalmente,

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Observe que a igualdade ocorre se, e somente se,  $a = b$ .

## 3.6 Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras relaciona os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo. É um tema abordado no Ensino Fundamental e largamente utilizado no Ensino Médio, pois existem aplicações possíveis do teorema de Pitágoras em diversas situações reais do cotidiano, além de ser utilizado por vários campos da Matemática e também por outras áreas como a Física.

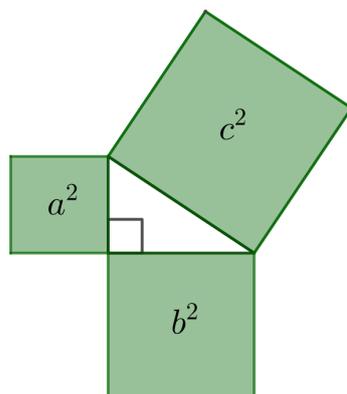
O teorema consiste no fato de que,

**Teorema 1.** *Em um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos:*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Para justificarmos esse teorema, veja Nelsen (2015, p.4), consideremos um triângulo retângulo com catetos de medidas  $a$  e  $b$  e hipotenusa de medida  $c$ . Tomemos quadrados sobre a hipotenusa e sobre os catetos desse triângulo, cada um com lado medindo o lado do triângulo ao qual está justaposto, como na Figura 3.8. A área do quadrado sobre a hipotenusa será  $c^2$  e as áreas dos quadrados sobre os catetos serão  $a^2$  e  $b^2$ .

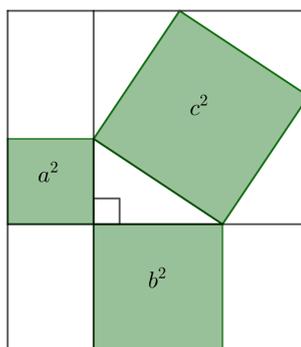
Figura 3.8: Teorema de Pitágoras, parte I



Fonte: Nelsen (2015)

Como na Figura 3.9, constrói-se um retângulo a partir do prolongamento das retas que contém os catetos, do prolongamento das retas paralelas a estas e que contém lados dos quadrados sobre os catetos e das retas, também paralelas a estas, passando pelos vértices do quadrado sobre a hipotenusa.

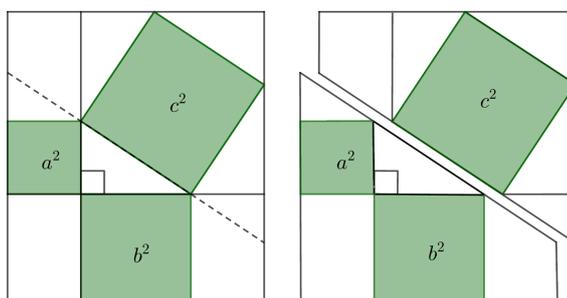
Figura 3.9: Teorema de Pitágoras, parte II



Fonte: Nelsen (2015)

Em seguida, veja a Figura 3.10, prolongando a reta que contém a hipotenusa, dividimos o retângulo em duas partes.

Figura 3.10: Teorema de Pitágoras, parte III

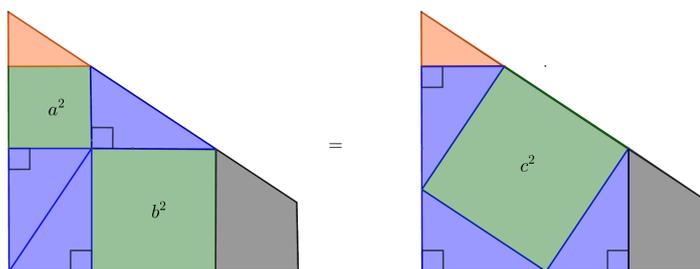


Fonte: Nelsen (2015)

Observe na Figura 3.11, que essas duas partes são iguais e estão igualmente divididas em um triângulo menor (triângulo laranja), em três outros triângulos congruentes entre si (triângulos azul) e em um trapézio retângulo.

Portanto, concluímos que  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Figura 3.11: Teorema de Pitágoras, parte IV



Fonte: Nelsen (2015)

### 3.7 Teorema de Tales

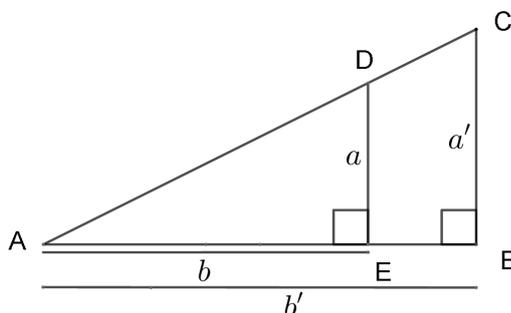
Um dos muitos teoremas geométricos atribuídos a Tales de Mileto diz que

**Teorema 2.** *Os pares de lados correspondentes de triângulos semelhantes são proporcionais.*

Este teorema é fundamental para o estudo da semelhança de figuras e a base para a definição de funções trigonométricas. Provaremos este teorema para triângulos retângulos, veja Alsina e Nelsen (2006, p.28).

Na Figura 3.12, observe que os triângulos retângulos ABC e AED são semelhantes, pois têm dois ângulos em comum, o ângulo  $\hat{A}$  e um ângulo reto. Assim temos o triângulo

Figura 3.12: Teorema de Tales, parte I



Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

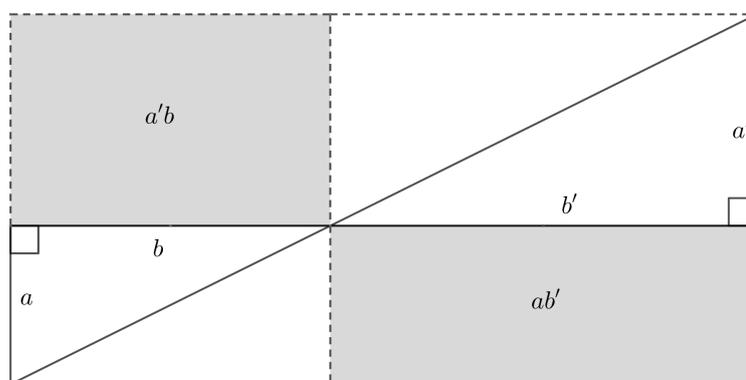
AED sobreposto ao triângulo ABC. O objetivo é verificar que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

onde  $a$  e  $b$  são os catetos do triângulo AED e  $a'$  e  $b'$  catetos do triângulo ABC.

Para tal, giramos o triângulo AED  $180^\circ$  sobre o vértice A e, em seguida, desenhamos um retângulo sobre os dois triângulos, conforme indicado pelas linhas tracejadas na Figura 3.13.

Figura 3.13: Teorema de Tales, parte II



Fonte: Alsina e Nelsen (2006, p.28)

Os triângulos acima da diagonal do retângulo são congruentes aos triângulos que estão abaixo dessa diagonal e, portanto, têm a mesma área. Daí, os dois retângulos cinza têm a mesma área, ou seja,  $a'b = ab'$ . Donde,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

### 3.8 Resolvendo equações do segundo grau

Geralmente, quando se estuda equações do segundo grau, o método de resolução mais usado pelos professores é a fórmula geral, conhecida como Fórmula de Bhaskara. Pelo fato de sua demonstração ser longa e complicada, ela raramente é apresentada. A seguir, apresentaremos um método, conhecido como completamento de quadrados, que contém tanto

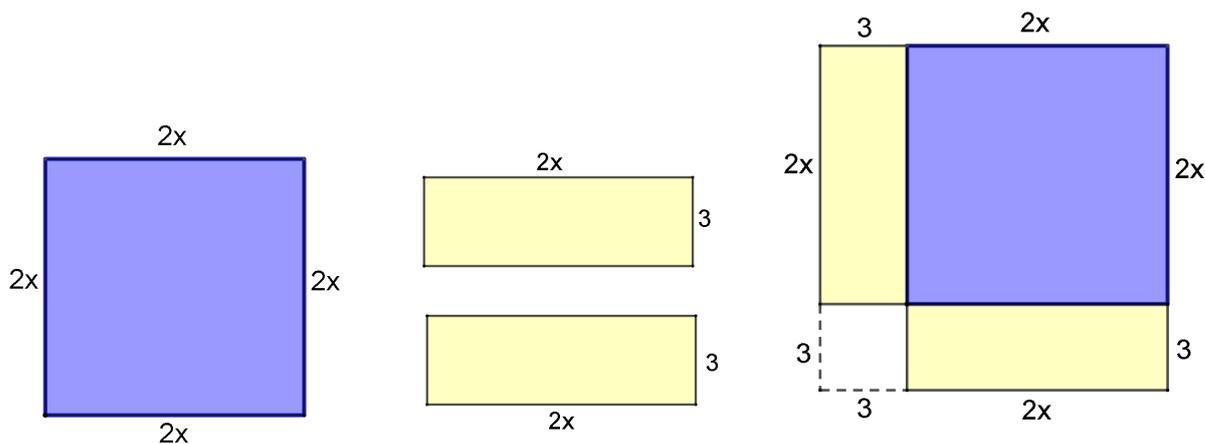
a abordagem geométrica quanto a algébrica, pois ele utiliza ideias geométricas e as transforma em argumentos algébricos e vice-versa, veja Quaranta et al. (2013, p.153-156). O intuito é apresentar uma prova da fórmula geral mais fácil de ser assimilada. Inicialmente, mostraremos um exemplo de como se utiliza o método de completar quadrado.

Consideremos a equação  $2x^2 + 6x + 4 = 0$ . Para facilitar o processo de completamento de quadrados e transformar a expressão em um trinômio quadrado perfeito, iremos inicialmente multiplicar a equação pelo coeficiente do termo  $x^2$ , isto é, por 2. A nova equação será  $4x^2 + 12x + 8 = 0$ , que equivale a

$$(2x)^2 + 2(2x)3 + 8 = 0.$$

Podemos representar o termo  $(2x)^2$  como a área de um quadrado de lado  $2x$ . Já o termo  $2(2x)3$  pode ser dividido em duas partes, e podemos representá-lo como a área de dois retângulos congruentes de lados  $2x$  e  $3$ . Unindo o quadrado de lado  $2x$  com os dois retângulos congruentes, percebemos que para completar um quadrado maior, será necessário somar um quadrado menor de lado  $3$  e área  $9$ , como mostra a Figura 3.14.

Figura 3.14: Completar quadrado



Fonte: Quaranta et al. (2013)

Assim, para descobrirmos o número que somaremos aos dois membros da equação para gerar um trinômio quadrado perfeito, basta fazermos uma subtração entre a área desse quadrado menor e o termo independente da equação. Isto é,  $9 - 8 = 1$ . Somando 1 aos

membros da equação, temos

$$4x^2 + 12x + 8 + 1 = 0 + 1,$$

e assim encontramos o trinômio quadrado perfeito

$$4x^2 + 12x + 9 = 1,$$

que equivale a  $(2x + 3)^2 = 1$ .

Extraindo a raiz dos membros da equação e resolvendo, obtemos

$$2x + 3 = \pm\sqrt{1},$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 1}{2}, \end{aligned}$$

e portanto, as raízes da equação são  $-1$  ou  $-2$ .

### 3.8.1 Demonstração da fórmula geral

Quando temos uma equação do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , podemos associá-la a um trinômio quadrado perfeito. Para tanto, devemos multiplicar toda a equação por um termo que viabilize tal associação, sem perda de generalidade multiplicaremos por  $4a$ . A nova equação será  $4aax^2 + 4abx + 4ac = 0$ , que é equivalente a

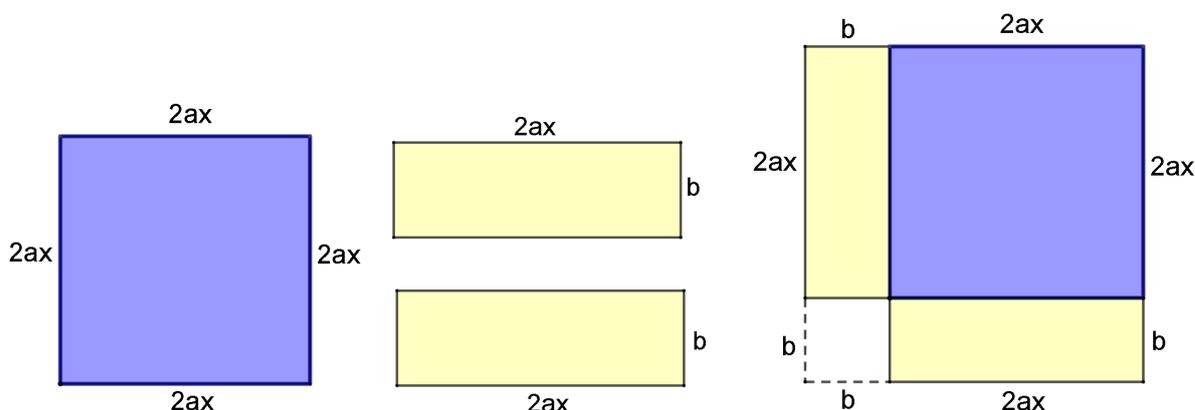
$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + 4ac = 0.$$

Daí, observe na Figura 3.15, que podemos representar o termo  $(2ax)^2$  como a área de um quadrado de lado  $2ax$ . Já o termo  $2(2ax)b$  pode ser dividido em duas partes, e podemos representar como a área de dois retângulos congruentes de lados  $2ax$  e  $b$ . Unindo o quadrado de lado  $2ax$  com os dois retângulos congruentes, percebemos que para completar um quadrado maior, será necessário acrescentar um quadrado menor de lado  $b$  e área  $b^2$ .

Assim, a diferença  $b^2 - 4ac$  é o número que precisaremos somar aos membros da equação para poder transformá-la em um trinômio quadrado perfeito. Então, somando  $b^2 - 4ac$ , temos

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + 4ac + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac,$$

Figura 3.15: Completar quadrado, fórmula geral



Fonte: Quaranta et al. (2013)

daí obtemos

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 = b^2 - 4ac,$$

que equivale a

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Extraindo a raiz quadrada dos membros da equação, obtemos

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Daí, subtraindo  $b$  dos seus membros obtem-se

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

E finalmente dividindo os dois membros por  $2a$ , tem-se

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

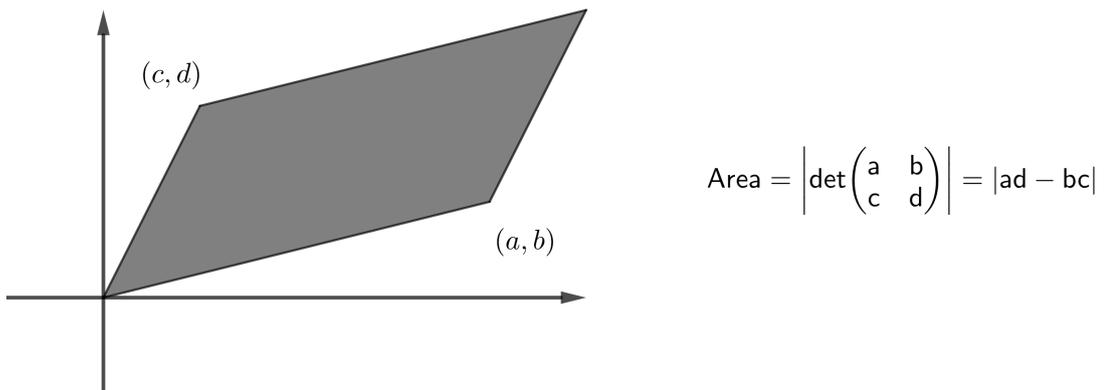
### 3.9 Área de um paralelogramo por meio de determinantes

Na geometria analítica do Ensino Médio é comum utilizar determinantes para concluir se três pontos estão alinhados ou não e, também, para calcular a área de triângulos a partir de seus vértices. Neste trabalho, apresentaremos uma prova visual de que a

área de um paralelogramo que tem um dos vértices na origem é numericamente igual ao módulo do determinante de uma matriz  $2 \times 2$  cujas linhas são as coordenadas dos dois vértices adjacentes à origem, veja Ortega (2018, p.117). Por conseguinte, o módulo do determinante de uma matriz  $2 \times 2$  é o dobro da área do triângulo definido pelas linhas da matriz como sendo as coordenadas de dois vértices do triângulo e a origem do plano cartesiano sendo o outro vértice. Se nenhum dos vértices de um triângulo está posicionado sobre a origem do plano cartesiano, podemos fazer uma translação dos eixos cartesianos, de forma que a origem sobreponha um desses vértices.

Observe na Figura 3.16, um paralelogramo onde um dos vértices está na origem do plano cartesiano. Os dois vértices adjacentes a este, estão sobre os pontos  $(a, b)$  e  $(c, d)$  do plano. Então a área desse paralelogramo é o valor absoluto, ou módulo, do determinante da matriz  $2 \times 2$  cujas linhas são as coordenadas dos pontos  $(a, b)$  e  $(c, d)$ . Para provarmos

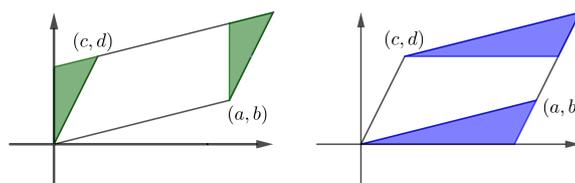
Figura 3.16: Determinante e a área do paralelogramo, parte I



Fonte: Alsina e Nelsen (2006, p.61)

esse resultado (no caso em que o paralelogramo está no primeiro quadrante), observe na

Figura 3.17: Determinante e a área do paralelogramo, parte II

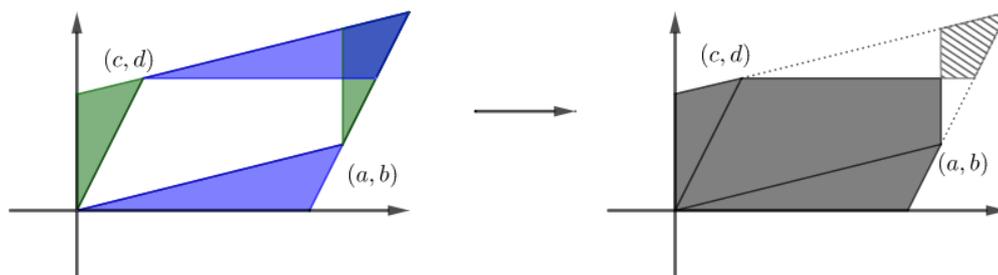


Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

Figura 3.17, que os triângulos destacados em cor verde tem mesma área bem como os triângulos destacados em azul também tem mesma área.

Assim a área do paralelogramo da Figura 3.16 será a subtração da área sombreada sem listras pela área sombreada com listras na Figura 3.18, veja Alsina e Nelsen (2006, p.62).

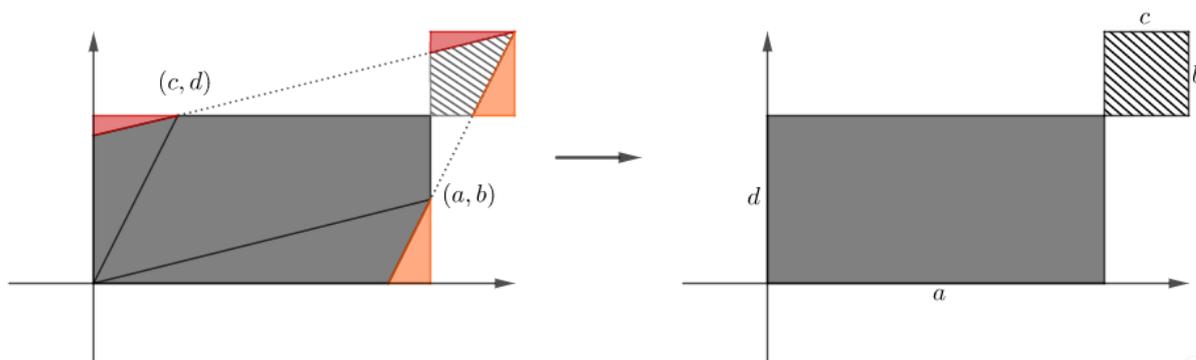
Figura 3.18: Determinante e a área do paralelogramo, parte III



Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

Finalmente observe, na Figura 3.19, que os triângulos destacados em cor vermelha possuem mesma área bem como os triângulos de cor laranja, assim a área do paralelogramo

Figura 3.19: Determinante e a área do paralelogramo, parte IV



Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

da Figura 3.16 corresponde a subtração da área sombreada pela área sombreada com listras, isto é, a área do paralelogramo será  $ad - bc$ , como queríamos provar.

### 3.10 Exercícios propostos

Nesta seção, propomos algumas atividades com o intuito de estimular o leitor a fazer provas semelhantes às realizadas nesse capítulo.

1) Use quadrados e retângulos, veja Nelsen (1993, p.20), para estabelecer a igualdade

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2).$$

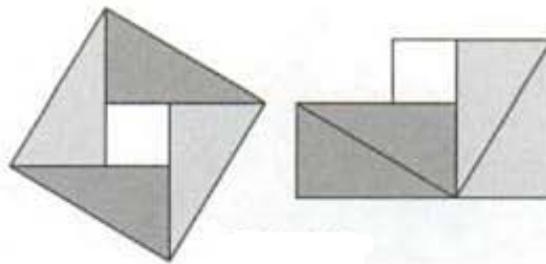
2) Encontrar uma representação geométrica para

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz).$$

3) Alterar as dimensões dos retângulos na Figura 3.7 para  $a/(a + b)$  e  $b/(a + b)$ , veja Alsina e Nelsen (2006, p.18), para obter uma prova da desigualdade entre a média geométrica e a média harmônica.

4) Use isometrias para estabelecer a prova sem palavras do teorema de Pitágoras na figura 3.20, veja Ortega (2018, p.108), atribuída ao matemático hindu do século XII Bhaskara Acharya (1114-1185).

Figura 3.20: Prova sem palavras do Teorema de Pitágoras

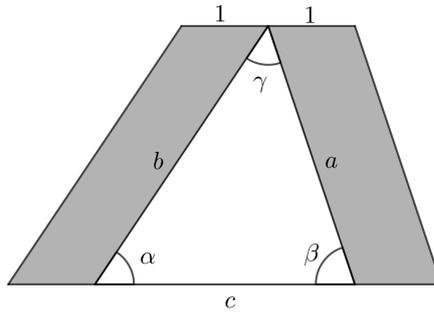


Fonte: Alsina e Nelsen (2006, p.30)

5) Use a figura 3.21, veja Alsina e Nelsen (2006, p.41), e a observação de que os paralelogramos sombreados têm área igual para deduzir a Lei dos Senos, ou seja,

$$\frac{\text{sen}\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\beta}{b}.$$

Figura 3.21: Lei dos senos



Fonte: Alsina e Nelsen (2006, p.41)

6) Mostrar que, dado um par de números positivos, a média dos quadrados desses números é maior que ou igual ao quadrado da média entres eles, isto é, estabelecer a seguinte desigualdade:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left( \frac{a + b}{2} \right)^2 .$$

# Capítulo 4

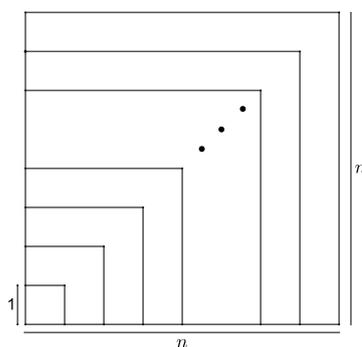
## Séries Numéricas

Neste capítulo serão apresentadas algumas ideias geométricas que fornecem uma visualização a cerca da veracidade de algumas somas numéricas. O objetivo é promover o desenvolvimento de hábitos matemáticos como pensar, conjecturar, testar (mesmo que informalmente) a confirmação de alguns resultados. Esse tipo de prova, pode ajudar nas funções de verificação, explicação, descoberta, comunicação e desafio intelectual, promovendo a construção do conhecimentos matemático de modo reflexivo e ativo.

### 4.1 Soma dos $n$ primeiros naturais ímpares

A Figura 4.1 representa a soma  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .

Figura 4.1: Soma de naturais ímpares, parte I

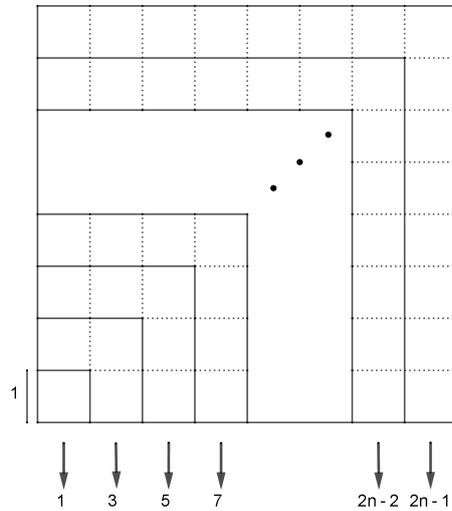


Fonte: Ortega (2018)

De fato, veja Ortega (2018, p.81), observando atentamente, como mostra a Figura

4.2, no canto inferior esquerdo tem-se um quadrado de lado 1. Em seguida, tem-se três

Figura 4.2: Soma de naturais ímpares, parte II



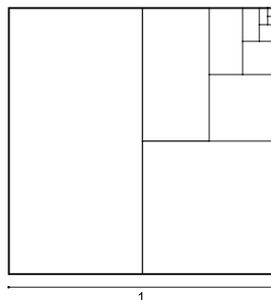
Fonte: Ortega (2018)

quadrados congruentes ao anterior. E assim segue com 5, 7, ...,  $2n - 2$ ,  $2n - 1$  quadrados congruentes aos anteriores. A soma das áreas desses quadrados de lado 1 corresponde a área total do quadrado maior de lado  $n$ , e portanto  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .

## 4.2 P.G. de primeiro termo e razão $1/2$

A Figura 4.3 representa a progressão geométrica  $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1$ .

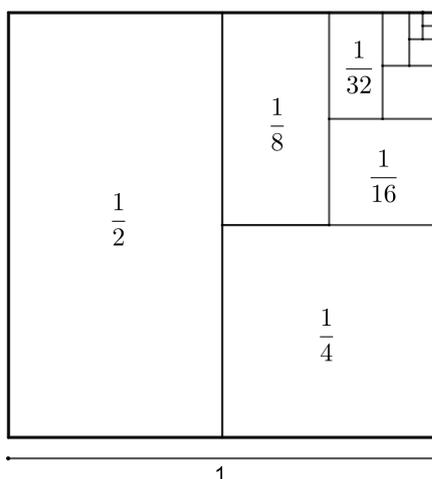
Figura 4.3: Soma de metades, parte I



Fonte: Alsina e Nelsen (2006, p.73)

De fato, veja Alsina e Nelsen (2006, p.73), ao dividir o quadrado de lado 1 ao meio, as metades têm área  $1/2$ . Tomando uma dessas metades e dividindo-a ao meio novamente, cada parte terá área  $1/4$ . No que segue, toma-se novamente a metade, que é  $1/8$  do total, e assim sucessivamente, como mostra a Figura 4.4.

Figura 4.4: Soma de metades, parte II



Fonte: Alsina e Nelsen (2006, p.73)

Continuando essa ação indefinidamente, temos que a soma de todas essas áreas tomadas corresponde a área do quadrado de lado 1, e portanto,

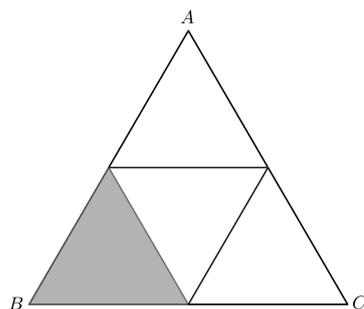
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

### 4.3 P.G. de primeiro termo e razão $1/4$

A Figura 4.6 representa a progressão geométrica  $1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \dots = 1/3$ , veja Alsina e Nelsen (2006, p.74). De fato, em um triângulo equilátero ABC qualquer, os pontos médios de cada lado dividem-no em quatro triângulos equiláteros congruentes, como mostra a Figura 4.5. Observe que a área do triângulo cinza é  $1/4$  da área do triângulo ABC.

Note que, na Figura 4.6, a área do maior triângulo cinza, no canto inferior esquerdo, é  $1/4$  da área do triângulo ABC, a área do segundo maior triângulo cinza é  $1/4$  de  $1/4$  da área do triângulo ABC, e assim por diante. Então, a soma das áreas dos triângulos de

Figura 4.5: Triângulos equiláteros congruentes



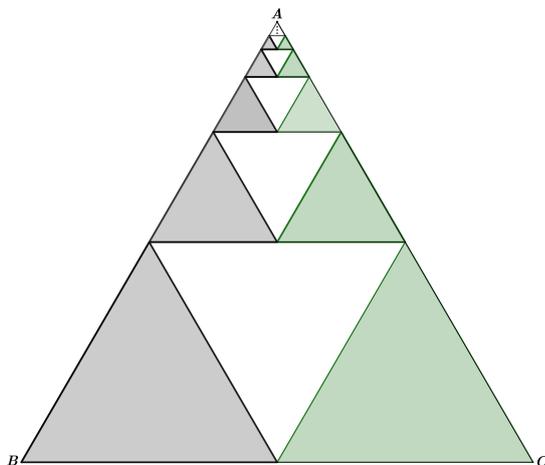
Fonte: Autor

cor cinza, é dada por

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

Por outro lado, perceba que a área do triângulo ABC corresponde a soma das áreas

Figura 4.6: Soma das potências de um quarto, parte I



Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

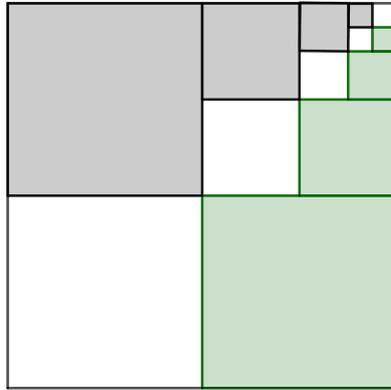
dos triângulos cinza, branco e verde, e que as áreas compreendidas pelos triângulos cinza, branco e verde são iguais. Assim, a soma das áreas dos triângulos de cor cinza representam  $1/3$  da área do triângulo ABC, e portanto,

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}$$

Analogamente, na Figura 4.7, por um lado os quadrados de cor cinza representam  $1/3$

do quadrado maior e por outro lado a soma de suas áreas é  $\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots$ , logo também ilustra que  $\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots = \frac{1}{3}$ , veja Alsina e Nelsen (2006, p.74).

Figura 4.7: Soma das potências de um quarto, parte II

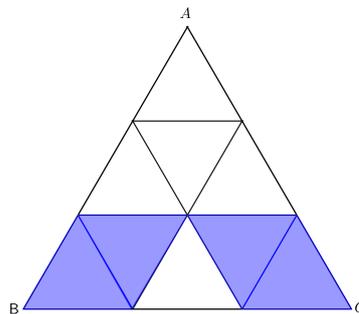


Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

#### 4.4 P.G. de primeiro termo e razão $\frac{4}{9}$

A soma  $\frac{4}{9} + (\frac{4}{9})^2 + (\frac{4}{9})^3 + \dots = \frac{4}{5}$  pode ser ilustrada pela Figura 4.9. De fato, dado um triângulo equilátero ABC, como na Figura 4.8, podemos decompô-lo em 9

Figura 4.8: Triângulo decomposto em 9 partes



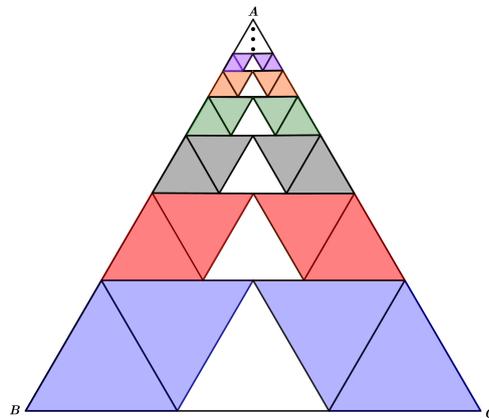
Fonte: Autor

triângulos equiláteros menores, cada um com lado medindo  $\frac{1}{3}$  do lado do triângulo ABC. Observe que a soma das áreas dos triângulos azul é  $\frac{4}{9}$  da área do triângulo ABC.

Na Figura 4.9, os triângulos de cor azul representa  $4/9$  do triângulo  $ABC$ . Já os triângulos de cor vermelha representam  $4/9$  de  $4/9$  do triângulo  $ABC$ , isto é,  $(4/9)^2$  do triângulo  $ABC$ , e assim segue para os triângulos de cor cinza, verde, laranja, etc. Dessa forma, a soma das áreas dos triângulos de cor azul, vermelho, cinza, verde, laranja, etc, é dada por

$$\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots$$

Figura 4.9: Soma das potências de quatro nonos



Fonte: Edgar (2016)

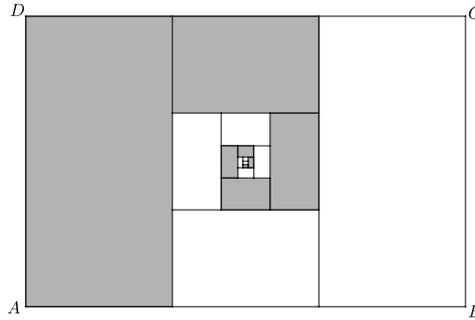
Note, por outro lado, que nessa decomposição, o triângulo foi dividido em trapézios, e que os triângulos de cor azul, vermelho, cinza, verde e etc, representam  $4/5$  de cada trapézio. Como a área do triângulo  $ABC$  corresponde também à soma das áreas dos trapézios, segue que a soma das áreas dos triângulos de cor azul, vermelho, cinza, verde, laranja e etc, representa  $4/5$  da área do triângulo  $ABC$ , e portanto,

$$\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots = \frac{4}{5}$$

## 4.5 P.G. de primeiro termo e razão $1/3$

A soma  $1/3 + (1/3)^2 + (1/3)^3 + \dots = 1/2$  pode ser representada pela Figura 4.10, veja Nelsen (2015, p.153). De fato, note que o maior retângulo cinza, do lado esquerdo, é  $1/3$  do retângulo  $ABCD$ , já o segundo maior retângulo cinza é  $1/3$  de  $1/3$  do retângulo

Figura 4.10: Soma das potências de um terço



Fonte: Nelsen (2015, p.153)

ABCD, e assim por diante. Assim, a soma das áreas dos retângulos de cor cinza, é dada por

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

Por outro lado, perceba que a área do retângulo ABCD corresponde à soma das áreas dos retângulos de cor cinza e branco, e que para cada retângulo de cor cinza, há um retângulo de cor branco cuja área é igual. Assim, a soma das áreas dos retângulos de cor cinza representam metade (ou 1/2) da área do retângulo ABCD, e portanto,

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots = \frac{1}{2}.$$

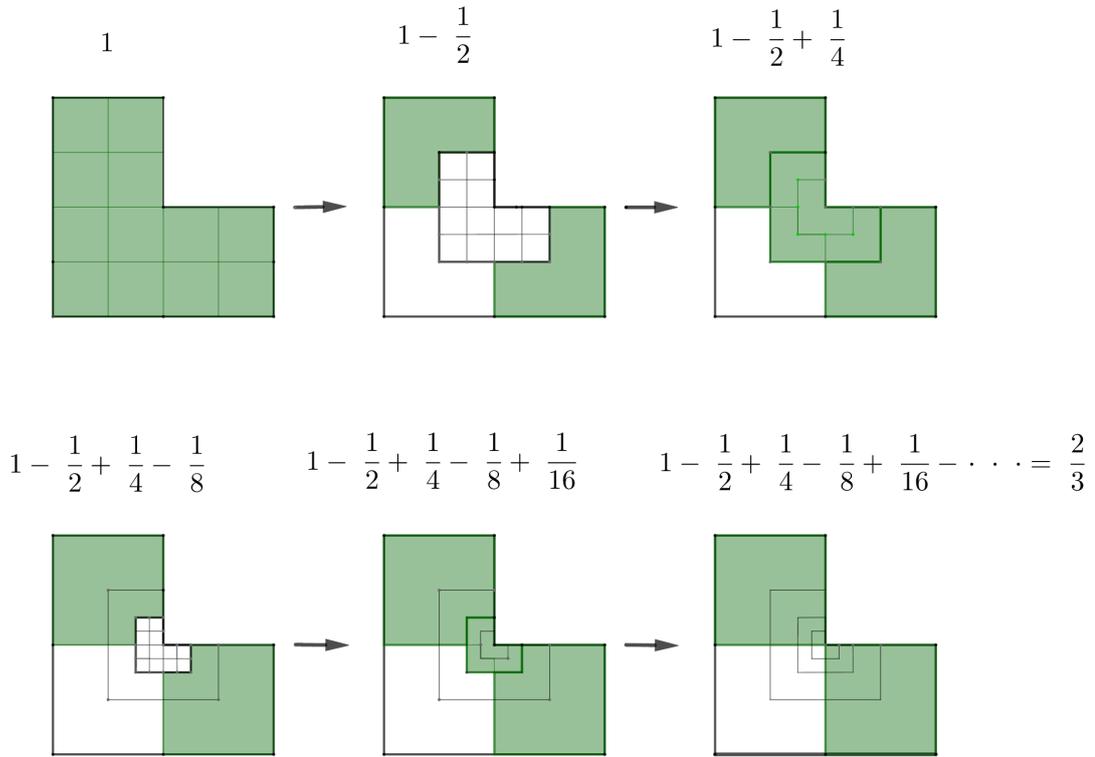
## 4.6 Série alternada

A série alternada  $1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + 1/16 - \dots = 2/3$ , veja Nelsen (2015, p.160), pode ser representada pela sequência de ilustrações da Figura 4.11, onde a região de cor verde na primeira ilustração é uma unidade de área.

A região de cor verde na segunda ilustração é a unidade de área da anterior menos dois quartos da sua área. Já na terceira ilustração repõe-se de volta um quarto retirado anteriormente. No que segue, retira-se 1/8, em seguida repõe-se 1/16 de modo que continuando esse processo indefinidamente a área resultante será, como mostra a última ilustração da Figura 4.11, 2/3 da unidade de área, e assim constata-se que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots = \frac{2}{3}.$$

Figura 4.11: Série alternada



Fonte: Nelsen (2015)

## 4.7 P.G. de primeiro termo $a$ e razão $r$ , com $0 < r < 1$ .

A Figura 4.12 representa a soma  $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = a/(1 - r)$  (soma infinita de uma progressão geométrica (PG) de primeiro termo positivo  $a$  e razão  $r$ ,  $0 < r < 1$ ).

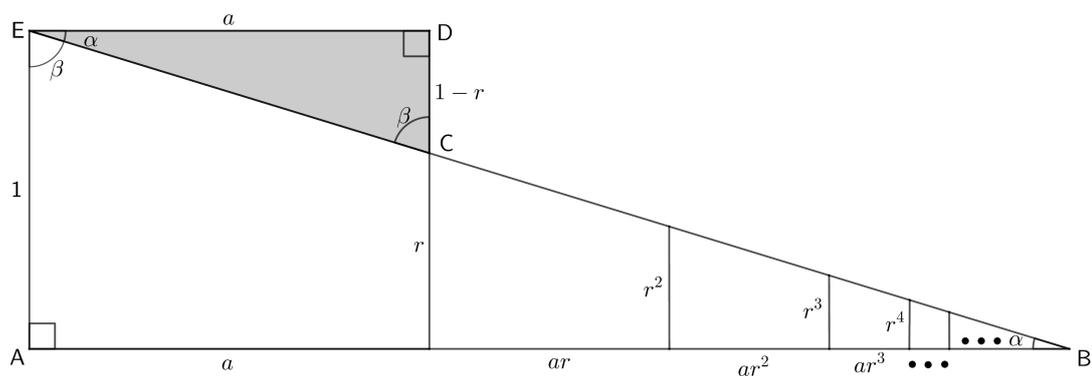
De fato (veja Alsina e Nelsen (2006, p.74), ou Ortega (2018, p.88)), note que no triângulo retângulo ABE da Figura 4.12, os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares. Daí, como os ângulos  $\beta$  e  $\angle CED$  também são complementares, segue que  $\angle CED = \alpha$ . Veja ainda que, no triângulo retângulo DEC os ângulos  $\angle CED$  e  $\angle ECD$  são complementares, então como  $\angle CED = \alpha$  segue que  $\angle ECD = \beta$ . Assim, por um lado, no triângulo ABE, tem-se

$$\tan(\beta) = \frac{a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots}{1}.$$

Por outro lado, no triângulo cinza temos

$$\tan(\beta) = \frac{a}{1 - r}.$$

Figura 4.12: Soma infinita de uma PG



Fonte: Alsina e Nelsen (2006, p.74)

Das duas igualdades conclui-se que

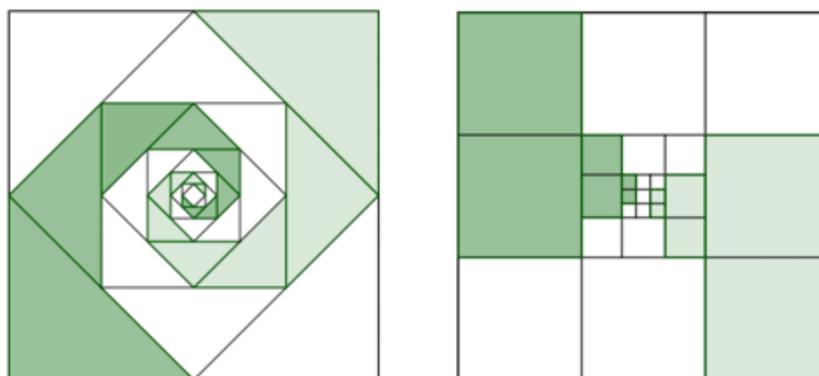
$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \frac{a}{1-r}.$$

## 4.8 Exercícios propostos

As atividades propostas a seguir tem como objetivo envolver o leitor na construção de alguns resultados, utilizando seus conhecimentos matemáticos para refletir sobre uma situação e testar seus raciocínios.

1) Quais séries (e suas somas) são ilustradas por essas figuras?

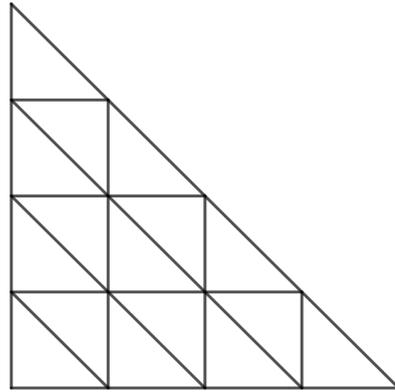
Figura 4.13: Séries numéricas geometricamente



Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

2) Qual identidade de inteiros é representada pela figura abaixo?

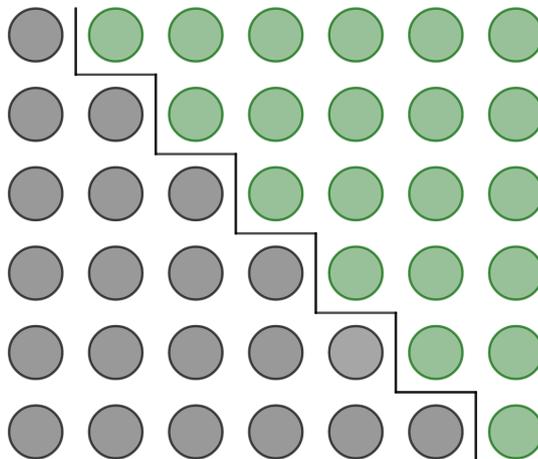
Figura 4.14: Soma de inteiros geometricamente



Fonte: Alsina e Nelsen (2006, p.18)

3) Qual identidade de naturais é representada pela figura abaixo?

Figura 4.15: Soma de naturais geometricamente



Fonte: Nelsen (1993)

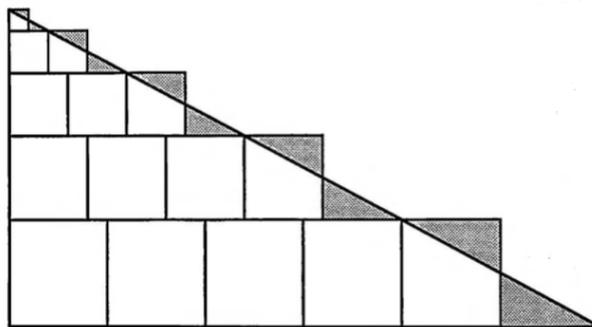
4) Mostrar geometricamente que  $1 + 2 \left(\frac{1}{2}\right) + 3 \left(\frac{1}{4}\right) + 4 \left(\frac{1}{8}\right) + 5 \left(\frac{1}{16}\right) + \dots$  é igual a 4.

5) Use figuras para ilustrar que  $\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots$  é igual a  $\frac{1}{4}$ .

6) Use o fato  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  e a figura a seguir para estabelecer

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Figura 4.16: Soma de cubos geometricamente



Fonte: Nelsen (1993, p.90)

## Capítulo 5

# Demonstrações geométricas de irracionalidade

Um marco na História da Matemática foi a descoberta dos segmentos incomensuráveis, uma das maiores realizações dos pitagóricos <sup>1</sup>. Eles provaram que não há nenhum número inteiro, nem nenhuma razão entre inteiros (número racional) que possa representar a medida da diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade. Como consequência, novos números tiveram que ser definidos para representarem essas medidas, surgindo assim os números irracionais.

O tratamento que se dá aos números irracionais no Ensino Básico é um tanto superficial. Os Parâmetros Curriculares Nacionais Do Ensino Fundamental apontam que uma das causas que contribui para que os alunos não desenvolvam bem o conceito dos números irracionais é que o estudo desses números têm se limitado quase que exclusivamente ao ensino do cálculo com radicais. No entanto, o estudo desses números pode ser introduzido por meio de situações problema como o problema clássico de calcular o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número  $\sqrt{2}$ . Nesse caso, pode-se informar (ou indicar a prova) da irracionalidade de  $\sqrt{2}$ , por não ser uma razão de inteiros. O problema das raízes quadradas de inteiros positivos que não são quadrados perfeitos, como  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , etc., poderia seguir semelhante ao caso particular de  $\sqrt{2}$  (BRASIL, 1998, p.106).

---

<sup>1</sup>Membros da escola pitagórica, fundada por Pitágoras (572 a.C. – 496 a.C., aproximadamente), que além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade unida por ritos secretos e cerimoniais.

Entretanto, na maioria das vezes, os exemplos nos livros didáticos de números irracionais são limitados e além dessa escassez de exemplos poucos livros trazem demonstrações, ou mesmo justificativas menos formais, da irracionalidade desses números. Diante dessa particularidade relativa ao tema e da realidade presenciada nos livros e na formação dos alunos, procuramos neste trabalho apresentar alguns números irracionais e, sobretudo, demonstrar a irracionalidade desses números. Para tal, faremos uma demonstração geométrica, com o intuito de tornar o teor mais compreensível, mais visual e mais palpável.

Neste capítulo forneceremos demonstrações geométricas de irracionalidade dos números  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  e  $\sqrt{6}$ . As demonstrações apresentadas são por contradição e seguem essencialmente os mesmos passos, veja Morais Filho, Andrade e Silva (2017, p.31-35). Além disso, para facilitar o entendimento, utilizamos figuras coloridas, indicando os passos para a construção. Acreditamos que tais demonstrações podem ser facilmente assimiladas por alunos de Ensino Básico e, inclusive, podem ser apresentadas por alunos ou professores em eventos escolares de Matemática.

Inicialmente, abordaremos as definições e os resultados que serão utilizados nas demonstrações de irracionalidade.

**Definição 1.** *Um polígono é convexo quando todos os pontos de um segmento de reta que possui as extremidades no interior do polígono também estão dentro dele.*

**Definição 2.** *Um polígono é chamado regular quando é convexo, possui todos os lados com a mesma medida e todos os ângulos internos congruentes.*

**Definição 3.** *Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é  $180^\circ$  graus.*

Os resultados a seguir, em particular, serão muito importantes para as demonstrações vindouras. No Apêndice A, apresentamos uma demonstração para cada um desses resultados.

**Proposição 1.** *A área de um polígono regular é proporcional ao quadrado da medida de seu lado.*

**Proposição 2.** *A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados,  $s_n$ , é dada pela fórmula:*

$$s_n = (n-2) \cdot \pi$$

onde,  $n$  é o número de lados do polígono.

Uma consequência direta desse resultado, é a determinação da medida do ângulo interno de um polígono regular, que é dada por:

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot \pi}{n}$$

onde  $\alpha$  é a medida de cada ângulo interno de um polígono regular de  $n$  lados.

**Proposição 3.** *O valor do  $\cos(2\pi/5)$  é  $(\sqrt{5} - 1)/4$ .*

**Proposição 4.** *Não existe sequência infinita decrescente de números inteiros positivos.*

**Proposição 5.** *Um pentágono  $P$  que tem todos os ângulos internos congruentes e três lados consecutivos de mesma medida, é um pentágono regular.*

## 5.1 Irrracionalidade de $\sqrt{2}$

Suponhamos, por contradição, que  $\sqrt{2} = a/b$  com  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a > b > 0$ . Daí,  $a^2 = 2b^2$ . Como a área de um polígono regular é proporcional ao quadrado da medida de seu lado, a igualdade anterior garante que, se  $\sqrt{2}$  for racional, existem dois quadrados  $A$  e  $B$ , de lados inteiros, medindo  $a$  e  $b$ , respectivamente, tais que a área do primeiro é duas vezes a área do segundo:

$$A = 2B. \tag{5.1}$$

Vamos dispor esses três quadrados conforme a Figura 5.1. Perceba que devemos ter  $b > a/2$  pois, caso contrário, teríamos  $4b^2 \leq a^2$ , o que é absurdo já que  $a^2 = 2b^2$ .

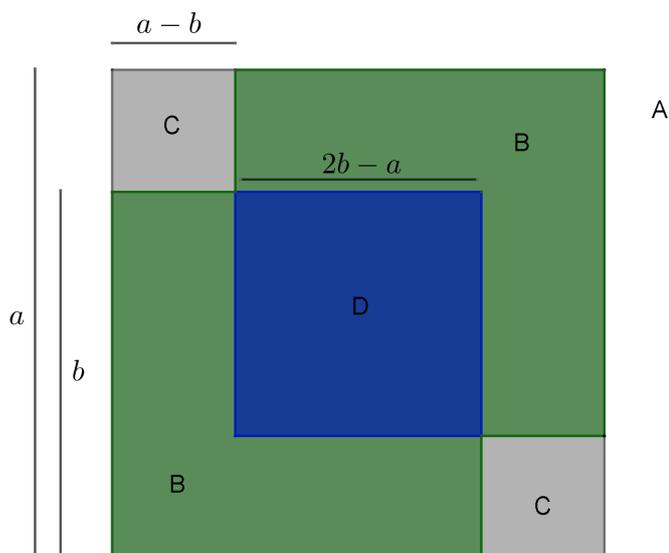
Olhando a decomposição dos polígonos na Figura 5.1, é possível expressar a área do quadrado  $A$  como

$$A = 2B + 2C - D,$$

e assim, por (5.1), obtemos que  $D = 2C$ .

O quadrado  $C$  tem lados de medida inteira igual a  $a - b$  e o quadrado  $D$  tem lados com medida inteira igual a  $2b - a$ , portanto os quadrado  $C$  e  $D$  possuem lados com medidas inteiras, menores do que as dos lados dos quadrados  $A$  e  $B$ . Podemos repetir a construção já realizada para os quadrados  $A$  e  $B$ , dessa vez, para os quadrados  $C$  e  $D$ , obtendo outros dois novos quadrados com lados de medidas inteiras e menores do que as dos quadrados  $C$  e  $D$ , e tais que a área de um é duas vezes a área do outro. Este processo pode ser indefinidamente repetido, e assim obtemos uma sequência infinita decrescente de

Figura 5.1: Irrracionalidade da raiz de 2 geometricamente



Fonte: Miller e Montague (2012)

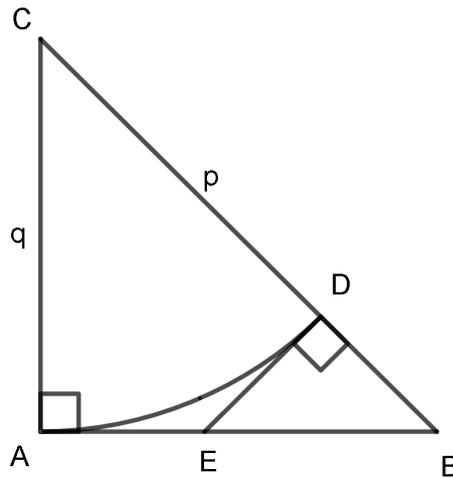
números inteiros positivos. Assim chegamos a uma contradição que surgiu da suposição de que  $\sqrt{2} = a/b$  com  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Portanto a conclusão é que  $\sqrt{2}$  é irracional.

Uma outra demonstração interessante da irracionalidade de  $\sqrt{2}$  fundamentada em argumentos geométricos consiste em assumir, por absurdo, que  $\sqrt{2} = p/q$ , com  $p$  e  $q$  números inteiros positivos ( $p > q$ ) e primos entre si. Então da igualdade  $\sqrt{2} = p/q$  obtemos  $p^2 = 2q^2 = q^2 + q^2$ , que é a relação do Teorema de Pitágoras. Assim, existirá um triângulo retângulo isósceles de lados inteiros  $p$  (hipotenusa) e  $q$  (catetos). Observe que quaisquer dois triângulos retângulos isósceles são semelhantes e, como  $p$  e  $q$  não possuem fator comum, esse triângulo de lados  $p$ ,  $q$  e  $q$  é o menor triângulo retângulo isósceles de lados inteiros.

Na Figura 5.2,  $\widehat{AD}$  é um arco de circunferência de raio  $q$  e centro  $C$ , com  $D \in CB$ . Toma-se  $E$  em  $AB$  de modo que  $\widehat{D} = 90^\circ$ . Daí, segue que  $DE$  é tangente ao arco de circunferência mencionada e, também, que  $EA = ED$ , já que são segmentos tangentes à circunferência traçados a partir de um ponto externo.

Como  $\widehat{B} = 45^\circ$ , segue que o triângulo  $EDB$  é isósceles e retângulo. Daí,  $ED = DB = p - q$ , que é inteiro. Também  $EB$  é inteiro, pois  $EB = q - AE = q - ED = q - (p - q) =$

Figura 5.2: Outra forma geométrica para a irracionalidade da raiz de 2



Fonte: Morais Filho, Andrade e Silva (2016)

$2q - p$ . Assim, o triângulo DEB é retângulo isósceles e possui lados inteiros menores do que  $p$  e  $q$ . Isso é um absurdo que seguiu da suposição de que  $\sqrt{2} = p/q$ , com  $p$  e  $q$  números inteiros positivos e primos entre si. Portanto a conclusão é que  $\sqrt{2}$  é irracional.

## 5.2 Irracionalidade de $\sqrt{3}$

Suponhamos, por contradição, que  $\sqrt{3} = a/b$ , com  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a > b > 0$ . Daí,  $a^2 = 3b^2$ . Como a área de um polígono regular é proporcional ao quadrado da medida de seu lado, a igualdade anterior garante que, se  $\sqrt{3}$  for racional, existem dois triângulos equiláteros A e B, de lados inteiros, medindo  $a$  e  $b$ , respectivamente, tais que a área do primeiro é três vezes a área do segundo:

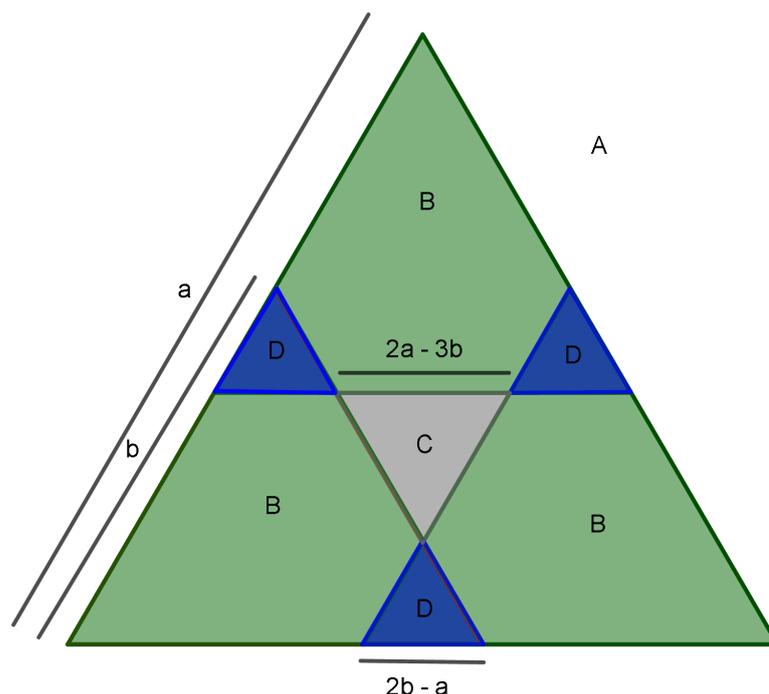
$$A = 3B. \tag{5.2}$$

Vamos dispor esses quatro triângulos como na Figura 5.3. Perceba que devemos ter  $a/2 < b$  pois, caso contrário, teríamos  $4b^2 \leq a^2$ , o que é absurdo pois  $a^2 = 3b^2$ . Olhando a decomposição dos polígonos na Figura 5.3, é possível expressar a área do triângulo A como

$$A = 3B + C - 3D$$

e por (5.2),  $C = 3D$ . Os triângulos C e D são semelhantes aos triângulos A e B, ou seja,

Figura 5.3: Irracionalidade da raiz de 3 geometricamente



Fonte: Morais Filho, Andrade e Silva (2017)

são equiláteros. Note que o triângulo D tem lado com medida inteira  $2b - a$ , e o triângulo C tem lado com medida inteira  $2a - 3b$ , logo os triângulos C e D possuem lados com medidas inteiras, menores do que as dos lados dos triângulos A e B.

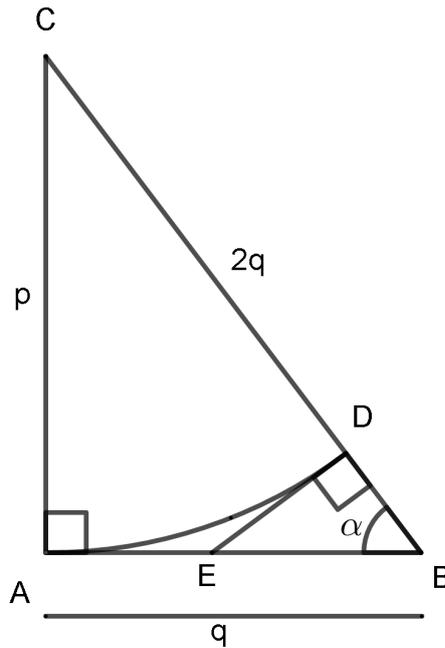
Se repetirmos essa construção feita com os triângulos A e B, agora, usando os triângulos C e D, obteremos novamente outros dois triângulos equiláteros com lados de medidas inteiras e menores do que as dos triângulos C e D, sendo que a área de um é três vezes a área do outro. Esse processo pode ser repetido indefinidamente, e como consequência obteremos uma sequência infinita decrescente de números inteiros positivos. Assim chegamos a uma contradição que surgiu da suposição de que  $\sqrt{3} = a/b$ , com  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Portanto a conclusão é que  $\sqrt{3}$  é irracional.

Uma outra demonstração interessante da irracionalidade de  $\sqrt{3}$  fundamentada em argumentos geométricos consiste em assumir, por absurdo, que  $\sqrt{3} = p/q$ , com  $p$  e  $q$  números inteiros positivos ( $p > q > p/2$ ). Então da igualdade  $\sqrt{3} = p/q$  obtemos  $p^2 = 3q^2$  e assim  $p^2 + q^2 = 4q^2$ , donde  $p^2 + q^2 = (2q)^2$ , que é a relação do Teorema de

Pitágoras. Assim, existirá um triângulo retângulo de catetos com medidas inteiras  $p$  e  $q$  e hipotenusa de medida inteira  $2q$ .

Na Figura 5.4,  $\widehat{AD}$  é um arco de circunferência de raio  $p$  e centro  $C$ , com  $D \in CB$ . Toma-se  $E$  em  $AB$  de modo que  $\widehat{D} = 90^\circ$ . Daí, segue que  $DE$  é tangente ao arco de

Figura 5.4: Outra forma geométrica para a irracionalidade da raiz de 3



Fonte: Moraes Filho, Andrade e Silva (2016)

circunferência mencionada e, também, que  $AE = ED$ , já que são segmentos tangentes à circunferência traçados a partir de um ponto externo. Note que  $DB = 2q - p$ . Note também que, no triângulo  $ABC$ ,  $\tan(\alpha) = p/q$  e por outro lado no triângulo  $DBE$ ,  $\tan(\alpha) = ED/DB$ , assim segue que

$$\frac{p}{q} = \frac{ED}{DB},$$

e como  $DB = 2q - p$ , temos

$$\frac{p}{q} = \frac{ED}{2q - p},$$

e conseqüentemente obtemos

$$\begin{aligned} ED &= \frac{2qp - p^2}{q} \\ &= \frac{2qp - 3q^2}{q} \\ &= 2p - 3q. \end{aligned}$$

Como  $EB = q - AE$ , e  $AE = ED$ , segue que  $EB = q - ED = q - (2p - 3q) = 4q - 2p = 2(2q - p)$ . Com isso, obtivemos um triângulo semelhante ao triângulo  $ABC$ , de lados também inteiros e estritamente menores que os de  $ABC$ . Aplicando o processo indefinidamente, chegaríamos a um absurdo, porquanto obteríamos uma sequência estritamente decrescente de números inteiros positivos, o que não pode ocorrer. Concluimos então que  $\sqrt{3}$  é irracional.

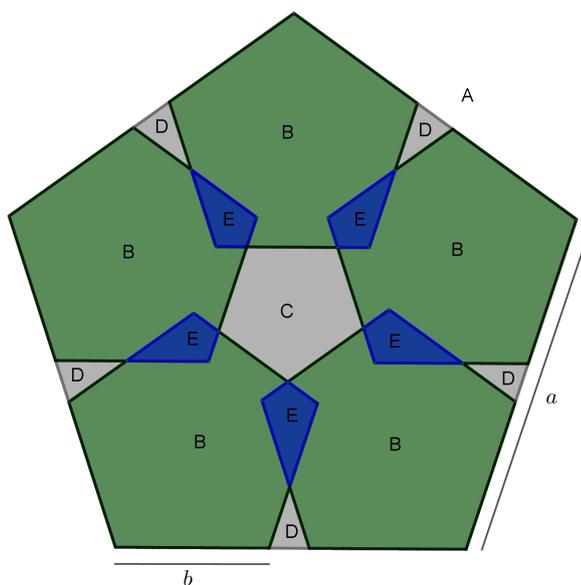
### 5.3 Irracionalidade de $\sqrt{5}$

Suponhamos, por contradição, que  $\sqrt{5} = a/b$ , com  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a > b > 0$ . Daí,  $a^2 = 5b^2$ . Como a área de um polígono regular é proporcional ao quadrado da medida de seu lado, a igualdade anterior garante que, se  $\sqrt{5}$  for racional, existem dois pentágonos regulares  $A$  e  $B$ , de lados inteiros, medindo  $a$  e  $b$ , respectivamente, tais que a área do primeiro é cinco vezes a área do segundo, isto é,

$$A = 5B. \tag{5.3}$$

Vamos dispor esses seis pentágonos regulares como na Figura 5.5. Perceba que devemos

Figura 5.5: Irracionalidade da raiz de 5 geometricamente, parte I



Fonte: Morais Filho, Andrade e Silva (2017)

ter  $b < a/2$  pois, caso contrário, teríamos  $4b^2 \geq a^2$ , o que é absurdo visto que  $a^2 = 5b^2$ . Olhando a decomposição dos polígonos na Figura 5.5, é possível expressar a área do polígono A como

$$A = 5B + C + 5D - 5E,$$

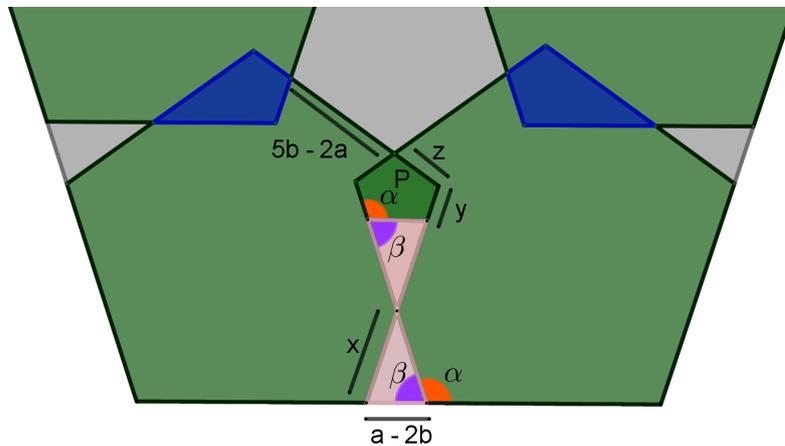
e assim, por (5.3), concluímos que  $C = 5E - 5D = 5(E - D)$ .

Olhando mais atentamente os polígonos E e D, seja  $P = E - D$  como na Figura 5.6. Mostraremos que P é um pentágono regular, e também que o seu lado tem medida inteira menor do que b. De fato, observando a Figura 5.6, no pentágono regular B cada ângulo interno tem medida

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(5-2) \cdot \pi}{5} \\ &= \frac{3\pi}{5}. \end{aligned}$$

Já no pentágono P, observa-se que dois ângulos internos são iguais a  $\alpha$  e outros dois são correspondentes a  $\alpha$ , isto é, quatro ângulos internos de P são congruentes a  $\alpha = 3\pi/5$ .

Figura 5.6: Irracionalidade da raiz de 5 geometricamente, parte II



Fonte: Morais Filho, Andrade e Silva (2017)

Por outro lado, sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos do pentágono P é  $(5 - 2)\pi = 3\pi$ , assim a medida do quinto ângulo interno do pentágono P é dada por

$$3\pi - 4 \cdot \frac{3\pi}{5} = \frac{15\pi - 12\pi}{5},$$

isto é, o quinto ângulo interno também mede  $3\pi/5$ , com isso, concluímos que todos os ângulos internos do pentágono  $P$  são congruentes.

Voltemos à Figura 5.6 e aos elementos que a compõe. Perceba que o ângulo  $\beta$  e o ângulo  $\alpha = 3\pi/5$  são suplementares, logo obtemos que  $\beta = 2\pi/5$ . Obtém-se ainda, da trigonometria, que

$$\cos(\beta) = \frac{\frac{a-2b}{2}}{x}.$$

Como  $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$ , temos que

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{\frac{a-2b}{2}}{x},$$

logo

$$x = \frac{2(a - 2b)}{\sqrt{5} - 1}.$$

Então, como  $y = b - 2x$ , segue que

$$\begin{aligned} y &= b - 2 \left( \frac{2(a - 2b)}{\sqrt{5} - 1} \right) \\ &= b - \frac{4(a - 2b)}{\sqrt{5} - 1} \\ &= b - b \frac{4\left(\frac{a}{b} - 2\right)}{\sqrt{5} - 1} \\ &= b \left[ 1 - \frac{4\left(\frac{a}{b} - 2\right)}{\sqrt{5} - 1} \right], \end{aligned} \tag{5.4}$$

e como por hipótese  $\sqrt{5} = a/b$ , substituindo  $a/b$  por  $\sqrt{5}$  em (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} y &= b \left[ 1 - \frac{4(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5} - 1} \right] \\ &= b \left[ \frac{\sqrt{5} - 1 - 4\sqrt{5} + 8}{\sqrt{5} - 1} \right] \\ &= b \frac{-3\sqrt{5} + 7}{\sqrt{5} - 1} \\ &= b \frac{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5} - 1} \\ &= b(\sqrt{5} - 2) \end{aligned}$$

e portanto, usando novamente que  $\sqrt{5} = a/b$ , concluímos que

$$y = b \left( \frac{a}{b} - 2 \right) = a - 2b.$$

Com isso, o lado inferior de  $P$  e os dois lados adjacentes a esse lado são congruentes, com medida inteira  $a - 2b < b$ . Assim concluímos, pela Proposição 5, que  $P$  é um pentágono regular com lado de medida inteira menor do que  $b$ .

Agora mostraremos que  $C$  é também um pentágono regular e que tem lado de medida inteira menor do que  $a$ . Para tal, observe que o polígono  $C$  da Figura 5.5 tem todos os seus ângulos internos opostos pelo vértice a ângulos internos do pentágono regular  $P$  da Figura 5.6, logo tem todos os seus ângulos internos congruentes. Observe ainda que todos os lados de  $C$  medem:

$$b - 2z = b - 2(a - 2b) = 5b - 2a < a.$$

Logo,  $C$  é também um pentágono regular com lado de medida inteira menor do que  $a$ .

Dessa forma  $C = 5P$ , onde  $C$  e  $P$  são pentágonos regulares com lados de medidas inteiras e menores do que  $a$  e  $b$ , respectivamente. Se repetirmos essa construção feita com os pentágonos regulares  $A$  e  $B$ , agora, usando os pentágonos regulares  $C$  e  $P$ , obteremos novamente outros dois pentágonos regulares com lados de medidas inteiras e menores do que as de  $C$  e  $P$ , sendo que a área de um é cinco vezes a área do outro. Esse processo pode ser repetido indefinidamente, e como consequência obteremos uma sequência infinita decrescente de números inteiros positivos. Assim, chegamos a uma contradição que surgiu da suposição de que  $\sqrt{5} = a/b$ , com  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Portanto, a conclusão é que  $\sqrt{5}$  é irracional.

Uma outra demonstração interessante da irracionalidade de  $\sqrt{5}$  fundamentada em argumentos geométricos consiste em assumir, por absurdo, que  $\sqrt{5} = p/q$ , com  $p$  e  $q$  números inteiros positivos ( $p > 2q$ ). Então da igualdade  $\sqrt{5} = p/q$  obtemos  $p^2 = 5q^2$  e assim  $p^2 = 4q^2 + q^2$ , donde  $p^2 = (2q)^2 + q^2$ , que é a relação do Teorema de Pitágoras. Assim, existirá um triângulo retângulo de catetos com medidas inteiras  $q$  e  $2q$  e hipotenusa de medida inteira  $p$ .

Na Figura 5.7,  $\widehat{AD}$  é um arco de circunferência de raio  $2q$  e centro  $C$ , com  $D \in CB$ . Toma-se  $E$  em  $AB$  de modo que  $\widehat{D} = 90^\circ$ . Daí, segue que  $DE$  é tangente ao arco de circunferência mencionada e, também, que  $AE = ED$ , já que são segmentos tangentes à circunferência traçados a partir de um ponto externo. Note que  $DB = p - 2q$ . Note também que, no triângulo  $ABC$ ,  $\tan(\alpha) = 2q/q$  e por outro lado no triângulo  $DBE$ ,  $\tan(\alpha) = ED/DB$ , assim

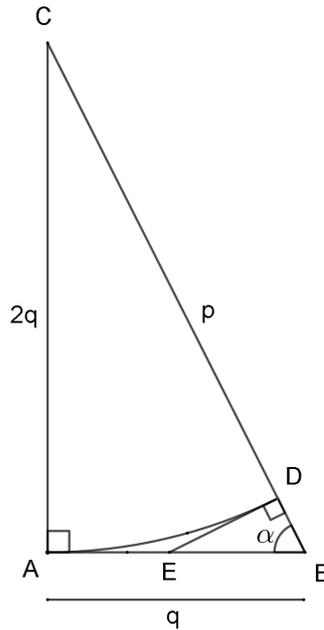
$$\frac{2q}{q} = \frac{ED}{DB},$$

e como  $DB = p - 2q$ , segue que

$$\frac{2q}{q} = \frac{ED}{p - 2q},$$

e logo  $ED = 2(p - 2q)$ . Como  $EB = q - AE$  e  $AE = ED$ , segue que  $EB = q - ED =$

Figura 5.7: Outra forma geométrica para a irracionalidade da raiz de 5



Fonte: Moraes Filho, Andrade e Silva (2016)

$q - 2(p - 2q) = 5q - 2p$ . Com isso, obtivemos um triângulo semelhante ao triângulo  $ABC$ , de lados também inteiros e estritamente menores que os de  $ABC$ . Aplicando o processo indefinidamente, chegaríamos a um absurdo, porquanto obteríamos uma sequência estritamente decrescente de números inteiros positivos, o que não pode ocorrer. Concluimos então que  $\sqrt{5}$  é irracional.

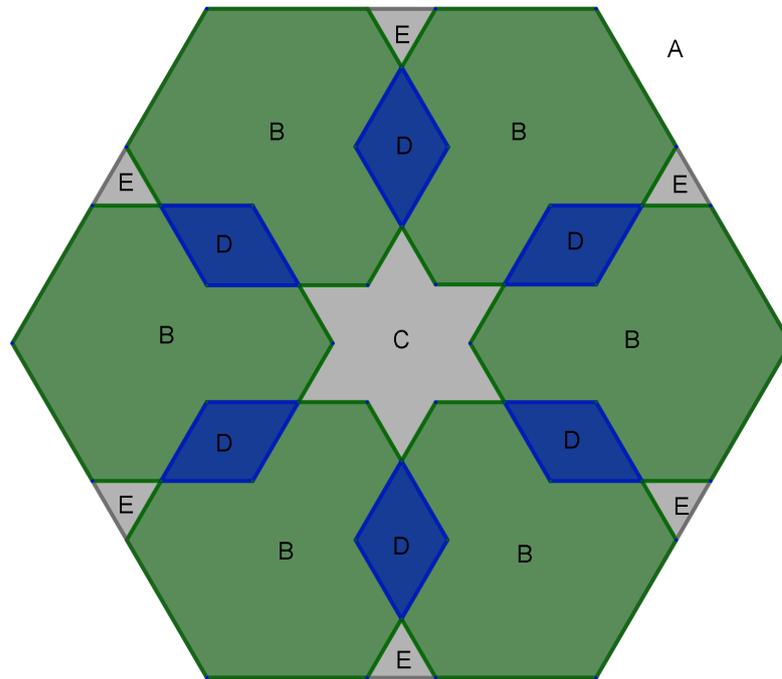
## 5.4 Irracionalidade de $\sqrt{6}$

Suponhamos, por contradição, que  $\sqrt{6} = a/b$ , com  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a > b > 0$ . Daí,  $a^2 = 6b^2$ . Como a área de um polígono regular é proporcional ao quadrado da medida de seu lado, a igualdade anterior garante que, se  $\sqrt{6}$  for racional, existem dois hexágonos regulares  $A$  e  $B$ , de lados inteiros, medindo  $a$  e  $b$ , respectivamente, tais que a área do primeiro é seis vezes a área do segundo, isto é,

$$A = 6B. \tag{5.5}$$

Vamos dispor esses sete hexágonos regulares como na Figura 5.8. Perceba que devemos ter  $b < a/2$  pois, caso contrário, teríamos  $4b^2 \geq a^2$ , o que é absurdo visto que  $a^2 = 6b^2$ .

Figura 5.8: Irrracionalidade da raiz de 6 geometricamente, parte I



Fonte: Morais Filho, Andrade e Silva (2017)

Olhando a decomposição dos polígonos na Figura 5.8, é possível expressar a área do polígono A como

$$A = 6B + C + 6E - 6D,$$

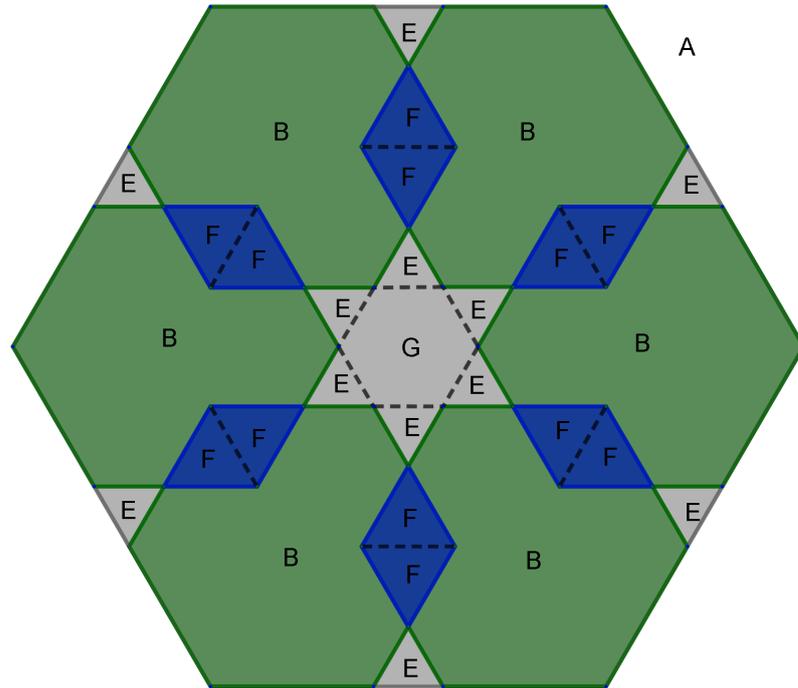
e assim, por (5.5), concluímos que

$$6D = C + 6E. \tag{5.6}$$

No que segue, vamos utilizar a seguinte decomposição da Figura 5.8, (veja Figura 5.9) na qual os triângulos E e F são equiláteros, com respectivas medidas inteiras  $a - 2b$  e  $3b - a$  e além disso G é um hexágono regular também de medida inteira  $a - 2b$ . Provaremos estas afirmações no final da demonstração.

Ora, sabemos que um hexágono regular pode ser formado por seis triângulos equiláteros congruentes com lado de mesma medida do hexágono, e assim, das Figuras 5.8 e 5.9, temos que  $6D = 12F = 2H$ , sendo H um hexágono regular com lado de medida inteira igual a medida do lado do triângulo F, que sabemos ser  $3b - a$ . Da mesma forma, como G é

Figura 5.9: Irrracionalidade da raiz de 6 geometricamente, parte II



Fonte: Morais Filho, Andrade e Silva (2017)

um hexágono regular de medida inteira  $a - 2b$  e  $E$  é um triângulo equilátero também de medida inteira  $a - 2b$ , segue que  $G = 6E$  e assim  $C = G + 6E = 2G$ . Utilizando estes fatos em (5.6), resulta que

$$6D = C + 6E \implies 2H = 2G + G \implies 3G = 2H.$$

Como a área de um polígono regular é proporcional ao quadrado da medida de seu lado, a última igualdade implica que:

$$3(a - 2b)^2 = 2(3b - a)^2$$

onde, multiplicando-se os dois membros da igualdade por 2 e organizando, obtém-se

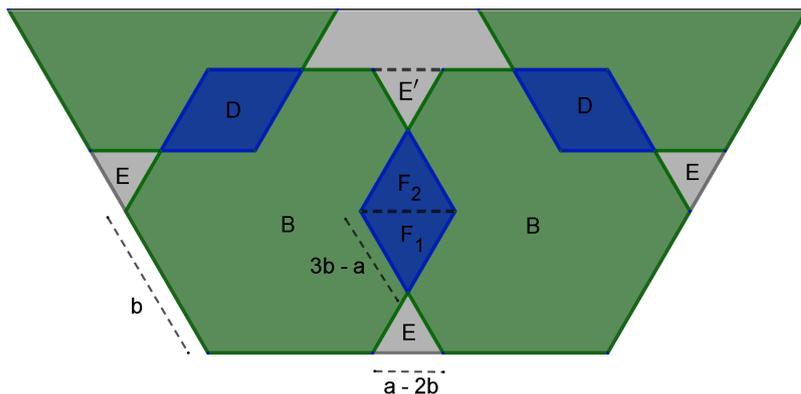
$$6(a - 2b)^2 = [2(3b - a)]^2,$$

o que, novamente, garante a existência de dois hexágonos regulares com respectivas medidas inteiras  $0 < 2(3b - a) < a$  e  $0 < (a - 2b) < b$  tais que a área do primeiro é seis vezes a área do segundo. Chegamos assim ao ponto a partir do qual segue a contradição

procurada, pois esse processo pode ser repetido indefinidamente, e como consequência obteríamos uma sequência infinita decrescente de números inteiros positivos. Portanto, a conclusão é que  $\sqrt{6}$  é irracional.

Agora, demonstraremos as afirmações feitas anteriormente. Para isso, veja a Figura 5.10.

Figura 5.10: Irrracionalidade da raiz de 6 geometricamente, parte III



Fonte: Morais Filho, Andrade e Silva (2017)

O triângulo E tem base de medida  $a - 2b$ , e como os ângulos internos da base são o suplemento de ângulos internos de um hexágono regular, que sabemos terem medidas  $(6 - 2)\pi/6 = 4\pi/6 = 2\pi/3$ , esses ângulos medem  $\pi - 2\pi/3 = \pi/3$  e conseqüentemente os três ângulos internos do triângulo E são congruentes de medida  $\pi/3$ . Assim, decorre que E é um triângulo equilátero de lado com medida inteira  $a - 2b$ .

Ainda, o ângulo interno inferior de  $F_1$  é oposto pelo vértice a um ângulo interno de E, medindo assim  $\pi/3$ . Do fato de o lado de E ter medida  $a - 2b$  e de o lado do hexágono regular B ter medida  $b$ , ambos os lados adjacentes a esse ângulo interno tem medida  $b - (a - 2b) = 3b - a$ . Conseqüentemente, cada um dos outros dois ângulos internos de  $F_1$  devem medir  $(\pi - \pi/3)/2 = \pi/3$ . Assim decorre que  $F_1$  é um triângulo equilátero de lado com medida inteira  $3b - a$  e ângulos internos medindo  $\pi/3$ .

Sendo  $F_1$  equilátero com ângulos internos medindo  $\pi/3$ , novamente pela medida do ângulo interno de um hexágono regular, os dois ângulos da base de  $F_2$  tem medida  $2\pi/3 - \pi/3 = \pi/3$ , logo todos os ângulos internos de  $F_2$  são congruentes de medida  $\pi/3$  e, conseqüentemente,  $F_2$  é um triângulo equilátero. Como  $F_1$  e  $F_2$  possuem um lado em

comum, eles são congruentes, isto é,  $F = F_1 = F_2$ .

Quanto ao triângulo  $E'$ , dois de seus lados tem medida  $b - (3b - a) = a - 2b$  e o ângulo compreendido entre eles é oposto pelo vértice a um ângulo de  $F_2$  de medida  $\pi/3$ , resultando que  $E'$  é um triângulo equilátero e, mais ainda, que  $E'$  é congruente ao triângulo  $E$ . Além disso, veja a Figura 5.9, os lados do polígono  $G$  são congruentes ao lado do triângulo  $E$  e todos os seus ângulos medem  $\pi - \pi/3 = 2\pi/3$ , logo  $G$  é um hexágono regular.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

É notório a importância da matemática cotidianamente em nossas vidas, de forma concreta. Porém, sabemos que muitas pessoas dizem ter dificuldades, ou pouca afinidade com a matemática. Assim, se torna muito importante a abordagem do professor em sala de aula para despertar no aluno um interesse maior pela disciplina.

Enquanto professor da rede pública de Ensino Básico, ao apresentar em sala de aula provas visuais semelhantes as que foram discutidas no Capítulo 3, espera-se que os alunos fiquem mais empolgados, mais curiosos, e comecem a enxergar a Matemática como algo interessante. Ao mostrar representações geométricas de séries numéricas como as do Capítulo 4, espera-se que os alunos fiquem estimulados, impressionados e dediquem mais atenção procurando entender, pois estão diante de algo surpreendente, lúdico. Quanto as demonstrações ou provas mais elaboradas, como as provas de irracionalidade do Capítulo 5, para a maioria dos alunos não é muito atrativa, porém não se deve deixar de utilizá-las, tomando sempre o cuidado de escolher as demonstrações a serem construídas e discutidas de acordo com o nível de conhecimento dos alunos.

Neste sentido, esperamos que os temas abordados nesse trabalho, bem como as atividades propostas, possam servir de estímulo e que sejam uma das alternativas possíveis para a concretização de uma prática de ensino onde professores e alunos possam investigar, analisar e criar situações problemas, se sentindo instigados a fazerem novas descobertas e formulações. É importante observar que não desejamos menosprezar as demonstrações matemáticas feitas com rigor e formalidade. O objetivo é aprofundar o olhar e entendimento dos alunos a partir de fatos ou objetos concretos, como figuras, desenhos, gestos ou esboços e, inclusive, permanecer no nível de manipulação deles, pois acreditamos que

uma vez que o aluno, com o auxílio do professor, esteja engajado e acostumado às representações visuais, pouco a pouco irá obter outros resultados de maneira mais rápida e significativa.

Ao final, espera-se que alunos e professores tomem os exemplos discutidos nesse trabalho como ponto de partida para novas investigações.

# Referências Bibliográficas

Aguilar JR, C. A.; Nasser, L. *Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental*. Vidya, Santa Maria, v. 32, n. 2, p. 133-147, 2012.

Alencar, H.; Cândido, L.; Farias, M. *Resoluções Visuais de Alguns Problemas de Matemática da Educação Básica*. PMO v.6, n.1, 2019. Disponível em: [http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm\\_uploads/2019/03/art1\\_vol7\\_2019\\_PMO\\_SBM-1.pdf](http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2019/03/art1_vol7_2019_PMO_SBM-1.pdf)  
Acesso em: 29 de março de 2019.

Alsina, C.; Nelsen, R. B. *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*. Mathematical Association of America, 2006.

Arsac, G. *Initiation au Raisonnement Déductif au Collège*. Lyon: Presses Universitaires de Lyon, 1992.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC /SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> Acesso: 25 de julho de 2019

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais, terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> Acesso: 15 de novembro de 2018.

Edgar, T. *Proof Without Words: Sums of Powers of 4/9*. Mathematics Magazine, v.89, n.3, p.191, 2016.

- Flores, C. R. *Cultura visual, visualidade, visualização matemática*. ZETETIKÉ, Campinas, v.18, Número temático, p. 271-293, 2010.
- Guzmán, M. O. *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid. Pirâmide. 1ª edição, 1996.
- Hersh, R. *Proving is convincing and explaining, Educational Studies in mathematics*, v. 24, p. 385-399, 1993.
- Medina, S. S. S.; Liblik, A. M. P.; Medeiros, Z. F. *Imagens no ensino de matemática*. Actas Del 3er Congreso Uruguayo de Educación Matemática, CUREM 3, 2011.
- Miller, R. L. *On Proofs Without Words*. Whitman College, May 14th, 2012.
- Miller, S.J., Montague, D. *Picturing irrationality*. Mathematics Magazine. Volume 85, 2012.
- Morais Filho, D. C.; Andrade, C. A. G. M.; Silva, I. S. *Demonstrações Geométricas de Irracionalidade*. Revista do Professor de Matemática, v. 94, p. 31-35, 2017.
- Morais Filho, D. C.; Andrade, C. A. G. M.; Silva, I. S. *Demonstração de Irracionalidade de Alguns Números Usando Dobraduras*. In: Congresso Nacional de Ensino e Pesquisa em Ciências, 2016, Campina Grande. Anais I CONAPESC, 2016. v. 1. Disponível em: [http://www.editorarealize.com.br/revistas/conapesc/trabalhos/TRABALHO\\_EV058\\_MD4\\_SA91\\_ID1507\\_16052016192351.pdf](http://www.editorarealize.com.br/revistas/conapesc/trabalhos/TRABALHO_EV058_MD4_SA91_ID1507_16052016192351.pdf) Acesso em: 15 de janeiro de 2019.
- Nelsen, R. B. *Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America, 2015.
- Nelsen, R. B. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Mathematical Association of America, 1993.
- Ortega, R. C. S. *Provas sem palavras : uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática* / Regina Cássia de Souza Ortega. Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2018. Disponível em: <http://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes/?polo=UTFPR&pag=2> Acesso em: 12 de março de 2019.

Quaranta, F.; Lourenço, E. G.; Alves, A.; Medeiros, I. S. *Geometria e aritmética combinam com equações do 2º grau?* HOLOS, vol. 6, 2013, p. 149-160 IFRN, Natal, Brasil. Disponível em: <http://www.redalyc.org/pdf/4815/481548608012.pdf> Acesso em: 8 de janeiro de 2019.

Siu, M.K.. *Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on Jiu zhang suan shu*. Educational Studies in mathematics, v. 24, p. 345-357, 1993.

Torrealba, J. C. *Aplicación eficaz de la imagen en los entornos educativos basados em la web*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña, 2004.

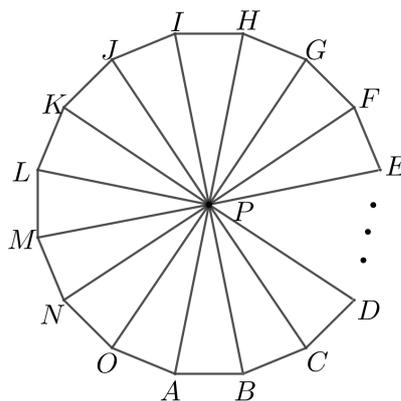
# Apêndice A

Neste apêndice, apresentamos uma demonstração para as proposições utilizadas no Capítulo 5.

**Proposição 1.** A área de um polígono regular é proporcional ao quadrado da medida de seu lado.

*Demonstração.* Dado um polígono regular de lado  $l$  e que possui  $n$  lados, com  $n \geq 3$  natural, seja  $P$  o seu centro. Construindo os segmentos de reta que ligam cada um de seus vértices a esse ponto, formamos  $n$  triângulos onde todos eles são isósceles e congruentes. Além disso, todos os ângulos centrais formados são congruentes e medem  $2\pi/n$ . A Figura A.1 a seguir representa um polígono que possui  $n$  lados e que cada um desses lados tem medida representada pela letra  $l$ .

Figura A.1: Polígono regular de  $n$  lados

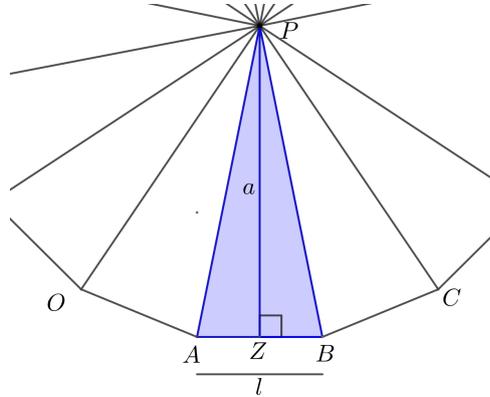


Fonte: Autor

Como os triângulos são congruentes, para calcular a área do polígono, basta calcular a área de um dos triângulos e multiplicar esse resultado por  $n$ , que é tanto o número de

lados do polígono como o número de triângulos obtidos. Portanto, calcularemos a área do triângulo  $ABP$  da Figura A.2.

Figura A.2: Triângulo que decompõe o polígono



Fonte: Autor

Na Figura A.2, o apótema  $a$  é o segmento de reta que liga o centro do polígono ao ponto médio  $Z$  de um de seus lados. Como o triângulo  $ABP$  é isósceles, o apótema também é altura e bissetriz nesse triângulo. Assim, sendo  $\angle BPA = 2\pi/n$ , temos que  $\angle BPZ = \pi/n$ . Daí,

$$\tan(\pi/n) = \frac{l/2}{a},$$

que resultam em

$$\begin{aligned} a &= \frac{l/2}{\tan(\pi/n)} \\ &= \frac{l}{2 \cdot \tan(\pi/n)}. \end{aligned}$$

Finalmente a área do polígono será dada por

$$\begin{aligned} A &= n \cdot \frac{l \cdot a}{2} \\ &= n \cdot l \cdot \frac{l}{4 \cdot \tan(\pi/n)} \\ &= k \cdot l^2, \end{aligned}$$

onde  $k = n/(4 \cdot \tan(\pi/n))$ . Portanto, a área de um polígono regular é proporcional ao quadrado da medida de seu lado.  $\square$

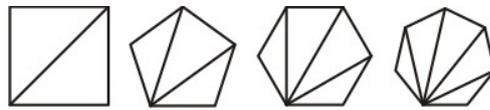
**Proposição 2.** A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados é dada pela fórmula:

$$s_n = (n-2) \cdot \pi$$

onde,  $s_n$  é a soma dos ângulos internos, e  $n$  é o número de lados do polígono.

*Demonstração.* Tomando um polígono convexo de  $n$  lados, para  $n > 3$ , podemos decompô-lo em triângulos, traçando diagonais a partir de um vértice qualquer como nas ilustrações da Figura A.3.

Figura A.3: Polígonos decompostos em triângulos



Fonte: Autor

Veja que há uma relação entre o número de lados do polígono e a quantidade de triângulos em que podemos decompô-lo, isto é, se o polígono tem  $n$  lados podemos decompô-lo em  $n - 2$  triângulos.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é igual à soma das medidas dos ângulos internos de todos os  $n - 2$  triângulos que o compõe, e como a soma das medidas dos ângulos internos de cada triângulo é igual a  $\pi$ , temos

$$s_n = (n-2) \cdot \pi$$

□

**Proposição 3.** O valor do  $\cos(2\pi/5)$  é  $(\sqrt{5} - 1)/4$ .

*Demonstração.* Sabemos que  $\cos x = \cos(2\pi - x)$ . Assim, note que

$$\begin{aligned} \cos\left(3 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) &= \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) \\ &= \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) \\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \\ &= \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

Daí,  $\cos(3 \cdot 2\pi/5) = \cos(2 \cdot 2\pi/5)$  e portanto  $\cos(3 \cdot 2\pi/5) - \cos(2 \cdot 2\pi/5) = 0$ . Utilizando as identidades trigonométricas  $\cos(2\theta) = 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1$  e  $\cos(3\theta) = 4 \cdot \cos^3(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta)$  na igualdade anterior, obtemos

$$4 \cdot \cos^3\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1 = 0.$$

Agora, tomando  $x = \cos(2\pi/5)$  obtemos

$$4x^3 - 3x - 2x^2 + 1 = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$(x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0.$$

Como  $x = \cos(2\pi/5) \neq 1$  concluímos que  $4x^2 + 2x - 1 = 0$ . As raízes reais dessa equação quadrática são  $x = (-1 \pm \sqrt{5})/4$  e como  $x = \cos(2\pi/5) > 0$ , concluímos que  $x = (-1 + \sqrt{5})/4$ , isto é,  $x = (\sqrt{5} - 1)/4$ .

□

**Proposição 4.** Não existe sequência infinita decrescente de números inteiros positivos.

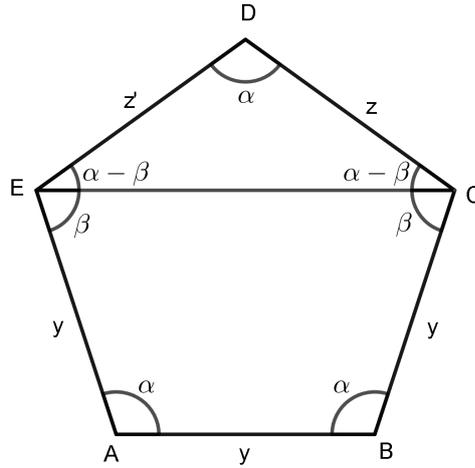
*Demonstração.* Suponha por absurdo que existem inteiros  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  tais que  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$ , isto é, formam uma sequência decrescente de números inteiros positivos. Sabemos que  $a_1$  é o maior elemento dessa sequência. Sabemos também que  $1 \not\leq a_1$  pois não existe inteiro positivo menor do que 1. Sabemos ainda que  $a_1 \neq 1$ , caso contrário não teríamos uma sequência infinita de inteiros positivos. Assim, devemos ter  $a_1 > 1$ , daí  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots > 1$  que é uma sequência limitada de inteiros, logo tem finitos termos. Portanto, não há sequência infinita decrescente de inteiros positivos.

□

**Proposição 5.** Um pentágono P que tem todos os ângulos internos congruentes e três lados consecutivos de mesma medida, é um pentágono regular.

*Demonstração.* Seja ABCDE (Figura A.4) o pentágono no qual os ângulos internos são congruentes de medida  $\alpha$ , e o lado inferior e os lados adjacentes a ele são congruentes de medida  $y$ . Devemos mostrar que  $z = z' = y$ . Note que no quadrilátero ABCE, os ângulos  $\angle EAB$  e  $\angle CBA$  são congruentes e os lados AE e BC tem mesma medida, então o lado CE é paralelo ao lado AB e portanto o quadrilátero ABCE é um trapézio isósceles. Como

Figura A.4: Pentágono, parte I



Fonte: Autor

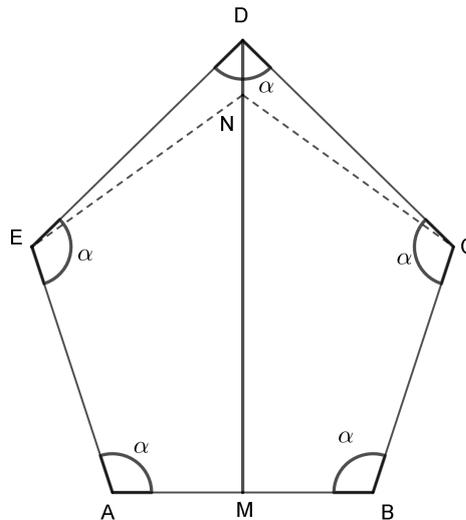
$\angle AEC = \angle BCE = \beta$  e  $\angle DEA = \angle DCB = \alpha$ , segue que  $\angle DEC = \angle DCE = \alpha - \beta$  e assim o triângulo CDE é isósceles com  $z = CD = DE = z'$ .

Suponhamos agora que  $AB \neq CD$ , isto é,  $y \neq z$ . Então, temos dois casos a considerar:

1)  $CD > AB$

Seja M o ponto médio do lado AB, e seja DM segmento de reta com extremidades no vértice D e no ponto M, como mostra a Figura A.5. Então existe  $N \in DM$  tal que  $NE = EA = AB = BC = CN$  e ABCNE é um pentágono regular.

Figura A.5: Pentágono, parte II



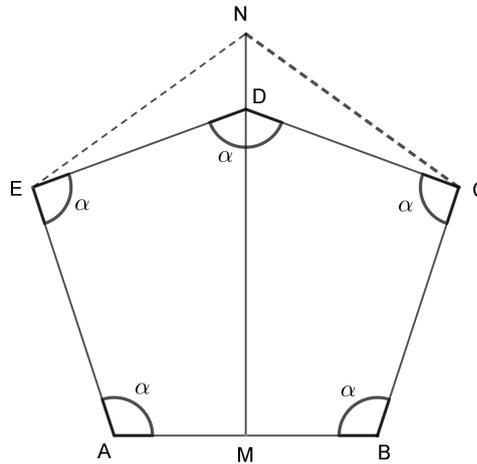
Fonte: Autor

Consequentemente,  $\alpha = 3\pi/5 = \angle BCD > \angle BCN = 3\pi/5$ , o que é absurdo.

2)  $CD < AB$

Seja  $M$  o ponto médio do lado  $AB$ , e seja  $DM$  segmento de reta com extremidades no vértice  $D$  e no ponto  $M$ , como ilustrado na Figura A.6. Então existe  $N \in DM$  tal que  $NE = EA = AB = BC = CN$  e  $ABCNE$  é um pentágono regular.

Figura A.6: Pentágono, parte III



Fonte: Autor

Consequentemente,  $\alpha = 3\pi/5 = \angle BCD < \angle BCN = 3\pi/5$ , o que é absurdo.

Portanto, devemos ter  $AB = CD$ , isto é,  $z = z' = y$ . □

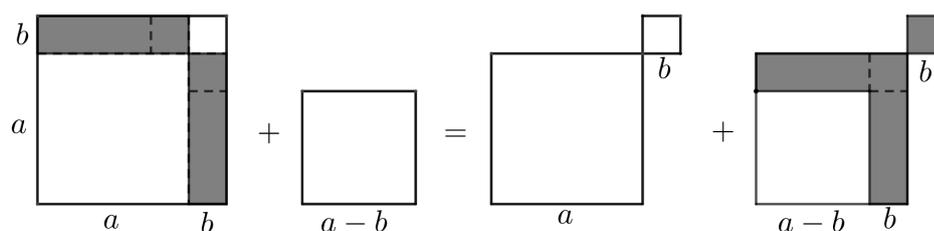
# Apêndice B

Neste apêndice, apresentamos uma sugestão ou uma solução para cada exercício proposto.

## Capítulo 3

1) Tome dois quadrados, um de lado  $a + b$  e outro de lado  $a - b$ . A soma das áreas destes dois quadrados será  $(a + b)^2 + (a - b)^2$ . Transforme o quadrado de lado  $a + b$  em dois quadrados menores sendo um de lado  $a$  e outro de lado  $b$ , e em dois retângulos de lados  $a$  e  $b$ . Usando os dois retângulos de lados  $a$  e  $b$  e o quadrado de lado  $a - b$  compomos uma nova região (última ilustração à direita na Figura B.1), que será um novo quadrado de lado  $a$  e um novo quadrado de lado  $b$ . Assim, na Figura B.1, estabelecemos a igualdade desejada.

Figura B.1: Quadrado da soma mais quadrado da diferença

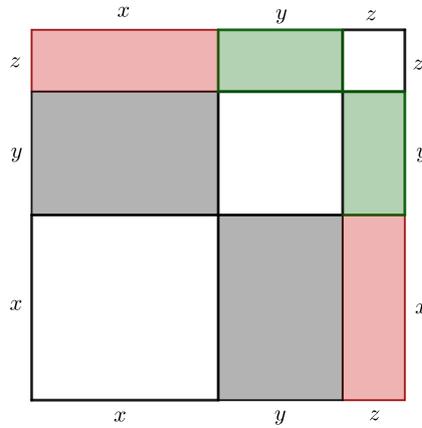


Fonte: Nelsen (1993, p.20)

2) Tome um quadrado de lado  $x + y + z$ , assim a sua área é  $(x + y + z)^2$ . Por outro lado, veja na Figura B.2, esse quadrado está dividido em três quadrados menores sendo um de lado  $x$ , outro de lado  $y$  e outro de lado  $z$ , dois retângulos de lados  $x$  e  $y$ , dois retângulos de lados  $x$  e  $z$  e dois retângulos de lados  $y$  e  $z$ . Assim a área total do quadrado corresponde a soma das áreas dos quadrados menores e dos retângulos, e portanto temos a representação

procurada.

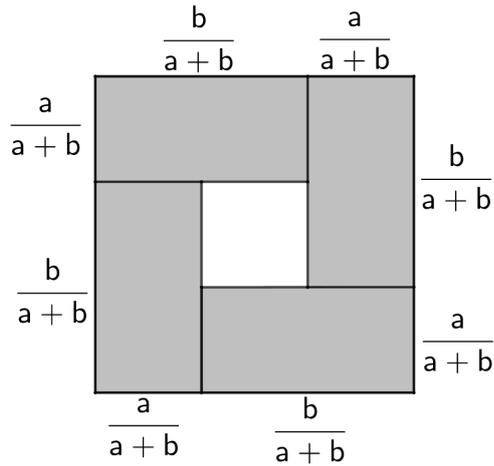
Figura B.2: Quadrado da soma de três termos



Fonte: Autor

3) Fazendo a mudança pedida, veja Figura B.3, por um lado a área total do quadrado é  $(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b})^2$  que é igual a 1. Por outro lado, a soma das áreas dos retângulos cinza é  $4(\frac{ab}{(a+b)^2})$ . Assim,  $1 \geq 4(\frac{ab}{(a+b)^2})$ , donde multiplicando por  $ab$  e extraindo a raiz quadrada obtemos  $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ , que equivale a  $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{1/a + 1/b}$ .

Figura B.3: Desigualdade das médias geométrica e harmônica

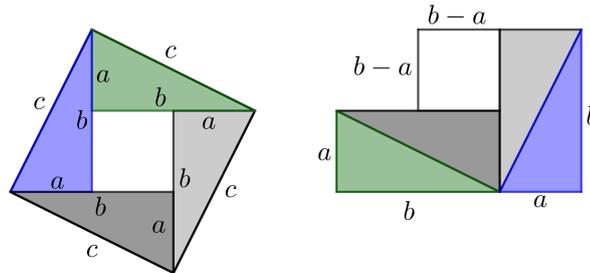


Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

4) Translada-se, veja a Figura B.4, o triângulo verde para baixo de modo que forma junto ao triângulo cinza escuro um retângulo de lados  $a$  e  $b$ . Transladamos também o triângulo

azul para formar junto ao triângulo cinza claro um outro retângulo de lados  $a$  e  $b$ . Assim, obtemos dois retângulos de lados  $a$  e  $b$  e um quadrado de lado  $b - a$  (ilustração à direita, na figura B.4). Daí, a área do quadrado de lado  $c$  será igual a soma das áreas dos dois retângulos de lados  $a$  e  $b$  e do quadrado de lado  $b - a$ , isto é:  $c^2 = 2ab + (b - a)^2$ , donde  $c^2 = b^2 + a^2$ .

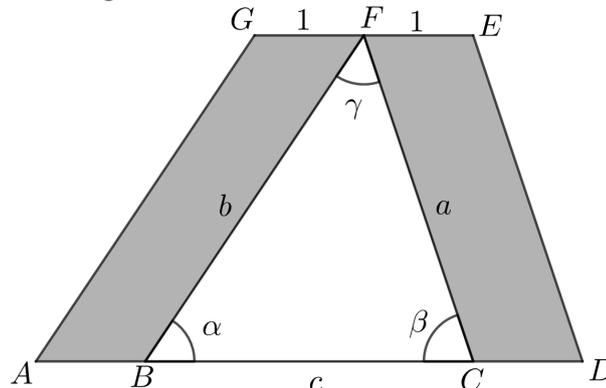
Figura B.4: Prova do Teorema de Pitágoras



Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

5) Observe, na Figura B.5, que o ângulo  $\angle BAG$  e o ângulo  $\alpha$  são correspondentes, bem como o ângulo  $\angle CDE$  é correspondente ao ângulo  $\beta$ . Assim, calculando a área do paralelogramo  $ABFG$  em função do ângulo  $\alpha$ , obtemos  $A = 1 \cdot b \cdot \text{sen}\alpha$ . Do mesmo modo, calculando a área do paralelogramo  $CDEF$  em função do ângulo  $\beta$ , obtemos  $A = 1 \cdot a \cdot \text{sen}\beta$ . Como os paralelogramos  $ABFG$  e  $CDEF$  têm mesma área, segue que  $b \cdot \text{sen}\alpha = a \cdot \text{sen}\beta$  e portanto,  $\text{sen}\alpha/a = \text{sen}\beta/b$ .

Figura B.5: Prova da Lei dos Senos

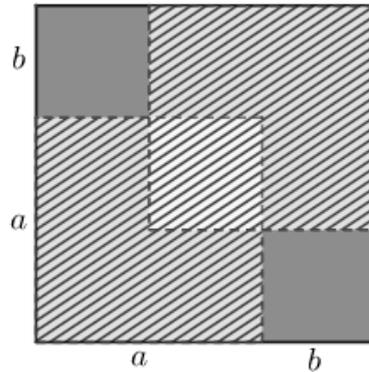


Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

6) Note que, na Figura B.6, por um lado a área do quadrado de lado  $a + b$  é

$A = (a + b)^2$ . Por outro lado, a área desse quadrado é igual a soma das áreas de dois quadrados de lado  $a$  e dois quadrados de lado  $b$ , menos a área de um quadrado de lado  $a - b$  (interseção entre os quadrados de lado  $a$ ), isto é,  $A = 2a^2 + 2b^2 - (a - b)^2$ . Assim, temos que  $2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2$ , donde, dividindo por 4, obtém-se a desigualdade procurada.

Figura B.6: Média dos quadrados e quadrado da média

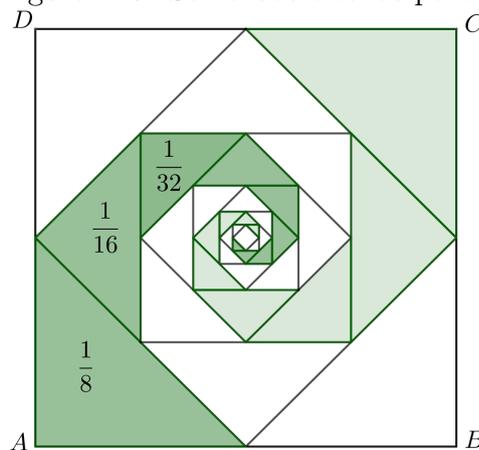


Fonte: Alsina e Nelsen (2006, p.84)

## Capítulo 4

1) Note que, na Figura B.7, o triângulo maior verde, no canto inferior esquerdo, representa

Figura B.7: Soma das oitavas partes



Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

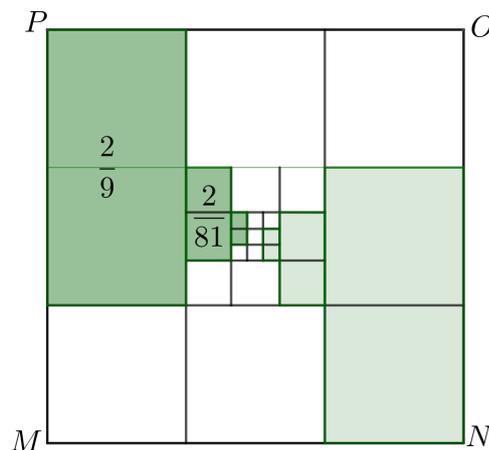
$1/8$  da área do quadrado ABCD. O segundo maior triângulo verde, representa  $1/8$  da

metade da área do quadrado  $ABCD$ , isto é,  $1/16$  da área do quadrado  $ABCD$ , e assim segue para os outros triângulos verdes de modo que, a soma das áreas desses triângulos verdes é  $1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots$ . Por outro lado, veja que para cada triângulo verde, existem outros três triângulos congruentes de mesma área. Logo, a soma das áreas dos triângulos verdes representam  $1/4$  da área total do quadrado  $ABCD$ . Assim temos que

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{4}.$$

Na Figura B.8, o quadrado  $MNOP$  foi dividido em 9 partes congruentes, e o retângulo maior verde é formado por duas dessas partes, logo sua área representa  $2/9$  da área total do quadrado  $MNOP$ . O segundo maior retângulo verde, é  $2/9$  de uma nona parte do quadrado  $MNOP$ , logo representa  $2/81$  da área do quadrado  $MNOP$ , e assim segue para os demais retângulos verdes, de modo que a soma das áreas dos retângulos verdes é  $2/9 + 2/81 + 2/729 + \dots$ .

Figura B.8: Soma das potências de um nono



Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

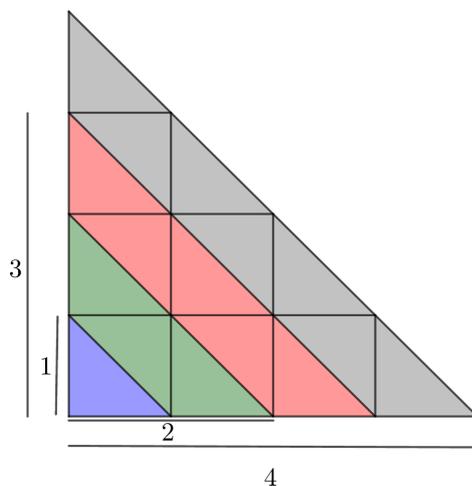
Observe, por outro lado, que para cada um desses retângulos verdes, existem outros três retângulos congruentes de mesma área. Assim, a soma das áreas dos retângulos verdes representa  $1/4$  da área total do quadrado  $MNOP$ , e portanto

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{81} + \frac{2}{729} + \dots = \frac{1}{4}.$$

2) Considere, sem perda de generalidade, que na Figura B.9 o triângulo maior está dividido

em quadrados de lado 1, e deste modo, cada triângulo azul, verde, vermelho, etc, tem área  $1/2$ .

Figura B.9: Soma de ímpares



Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

Note que, o área do triângulo azul é metade do quadrado de lado 1, isto é,  $1/2 = 1^2/2$ . A soma das áreas do triângulo azul e dos três triângulos verdes é metade da área do quadrado de lado 2, ou seja,  $1/2 + 3/2 = 2^2/2$ . A soma das áreas do triângulo azul, dos três triângulos verdes e dos cinco triângulos vermelhos é metade do quadrado de lado 3, isto é,  $1/2 + 3/2 + 5/2 = 3^2/2$ . Generalizando, para o quadrado de lado 1 temos um triângulo cuja área é sua metade, para o quadrado de lado 2 temos  $1 + 3$  triângulos cuja área é sua metade, para o quadrado de lado 3 temos  $1 + 3 + 5$  triângulos cuja área é sua metade, para o quadrado de lado 4 temos  $1 + 3 + 5 + 7$  triângulos cuja área é sua metade, para um quadrado de lado  $n$  temos  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$  triângulos cuja área é sua metade, isto é,

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2n - 1}{2} = \frac{n^2}{2}$$

donde, multiplicando por 2, obtemos

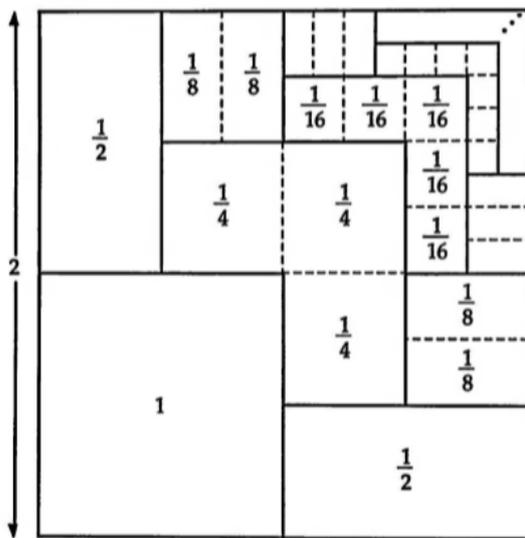
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

3) Na Figura 4.15, as bolas coloridas estão distribuídas em linhas e colunas de modo que, na primeira linha há 1 bola cinza, na segunda linha há 2 bolas cinzas, na terceira linha há 3 bolas cinzas e assim por diante. Para contarmos a quantidade de bolas cinzas até a linha

$n$ , de cima para baixo, podemos somar as quantidades em cada linha, e então teremos  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Por outro lado, veja que a linha  $n$  e a coluna  $n + 1$  determinam um retângulo composto por  $n(n + 1)$  bolas coloridas, e deste total metade das bolas é cinza. Assim, a quantidade de bolas cinzas até a linha  $n$ , corresponde a metade do total de bolas no retângulo determinado pela linha  $n$  e pela coluna  $n + 1$ , ou seja, a quantidade de bolas cinzas é  $n(n + 1)/2$ . Portanto, concluímos que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

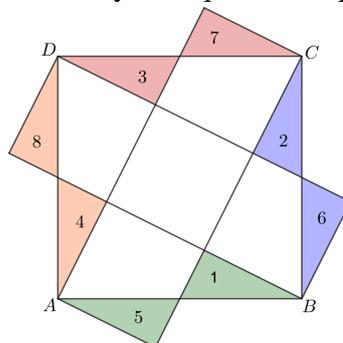
4)



Fonte: Nelsen (1993, p.124)

5) Inicialmente, observe que o quadrado ABCD, na Figura B.10, está dividido em cinco

Figura B.10: Quinta parte do quadrado

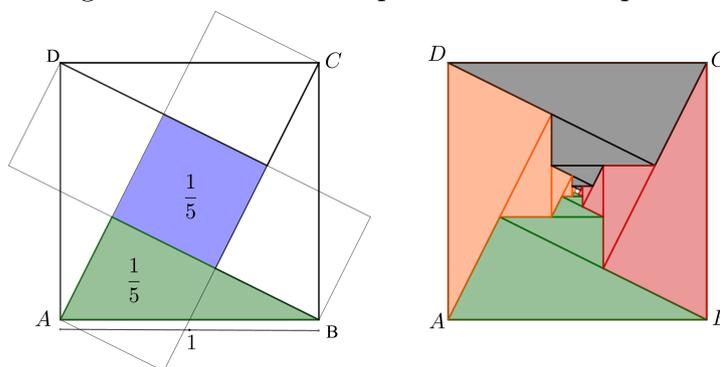


Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

quadrados menores congruentes entre si, pois o triângulo 1 é igual ao triângulo 5, bem como o 2 é igual ao 6, o 3 é igual ao 7 e o 4 é igual ao 8.

Assim, na Figura B.11, a ilustração à esquerda mostra que o triângulo verde representa  $1/5$  da área do quadrado  $ABCD$ , bem como o quadrado azul. Em seguida, na Figura B.11, a ilustração à direita mostra que o triângulo maior verde representa  $1/5$  da área do quadrado  $ABCD$ , já o segundo maior triângulo verde é  $1/5$  da quinta parte do quadrado  $ABCD$ , isto é,  $(1/5)^2$  do quadrado  $ABCD$ , e assim segue para os outros triângulos verdes de modo que a soma das áreas do triângulos verdes é  $1/5 + (1/5)^2 + (1/5)^3 + \dots$ .

Figura B.11: Soma das potências de um quinto



Fonte: Alsina e Nelsen (2006)

Por outro lado, na Figura B.11, a ilustração à direita mostra que os triângulos verdes representam  $1/4$  do quadrado  $ABCD$ , portanto concluímos que

$$\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots = \frac{1}{4}.$$

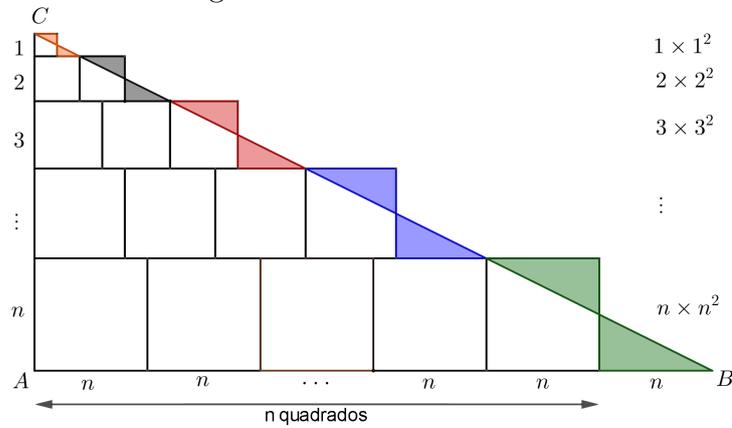
6) Observe na Figura B.12, que no vértice  $C$  temos um quadrado de lado 1, cuja área é  $1 \times 1^2$ . Em seguida, temos dois quadrados de lado 2, cuja área é  $2 \times 2^2$ . No que segue, temos três quadrados de lado 3, e assim sucessivamente, até  $n$  quadrados de lado  $n$ , cuja área é  $n \times n^2$ . Deste modo, a soma das áreas de todos esses quadrados é  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ .

Por outro lado, na Figura B.12, os triângulos destacados com a mesma cor são congruentes, logo a soma das áreas de todos os quadrados é igual a área do triângulo  $ABC$ . Note que, o lado  $AC$  do triângulo  $ABC$  tem medida  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ , logo

$$AC = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Já o lado  $AB$ , é composto por  $n + 1$  segmentos cada um de comprimento  $n$ , assim  $AB = n(n + 1)$ .

Figura B.12: Soma de cubos



Fonte: Nelsen (1993)

Portanto, a área do triângulo  $ABC$  é

$$\begin{aligned} A &= \frac{AC \cdot AB}{2} \\ &= \frac{(n(n + 1))^2}{4}, \end{aligned}$$

e assim concluímos que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n + 1)}{2} \right)^2.$$