Universidade Federal de Mato Grosso
Campus Universitário do Araguaia
Instituto de Ciências Exatas e da Terra

Uma abordagem das frações contínuas no ensino médio

Antonio Eduardo da Silveira Pacheco

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos**

Barra do Garças - MT

12 de julho de 2019

Uma abordagem das frações contínuas no ensino médio

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Antonio Eduardo da Silveira Pacheco e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 12 de julho de 2019.

Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos
Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

P116a Pacheco, Antonio Eduardo da Silveira.
Uma abordagem das frações contínuas no ensino médio / Antonio Eduardo da Silveira Pacheco. -- 2019
xiii, 71 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Juan Elmer Villanueva Zevallos.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Expressões decimais. 2. Frações contínuas. 3. representação decimal dos números reais. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - 78.060900 - Cuiabá/MT
Tel: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Uma abordagem das frações contínuas no ensino médio"

Autor: Antônio Eduardo da Silveira Pacheco

defendida e aprovada em 12/07/2019.

Composição da Banca Examinadora:

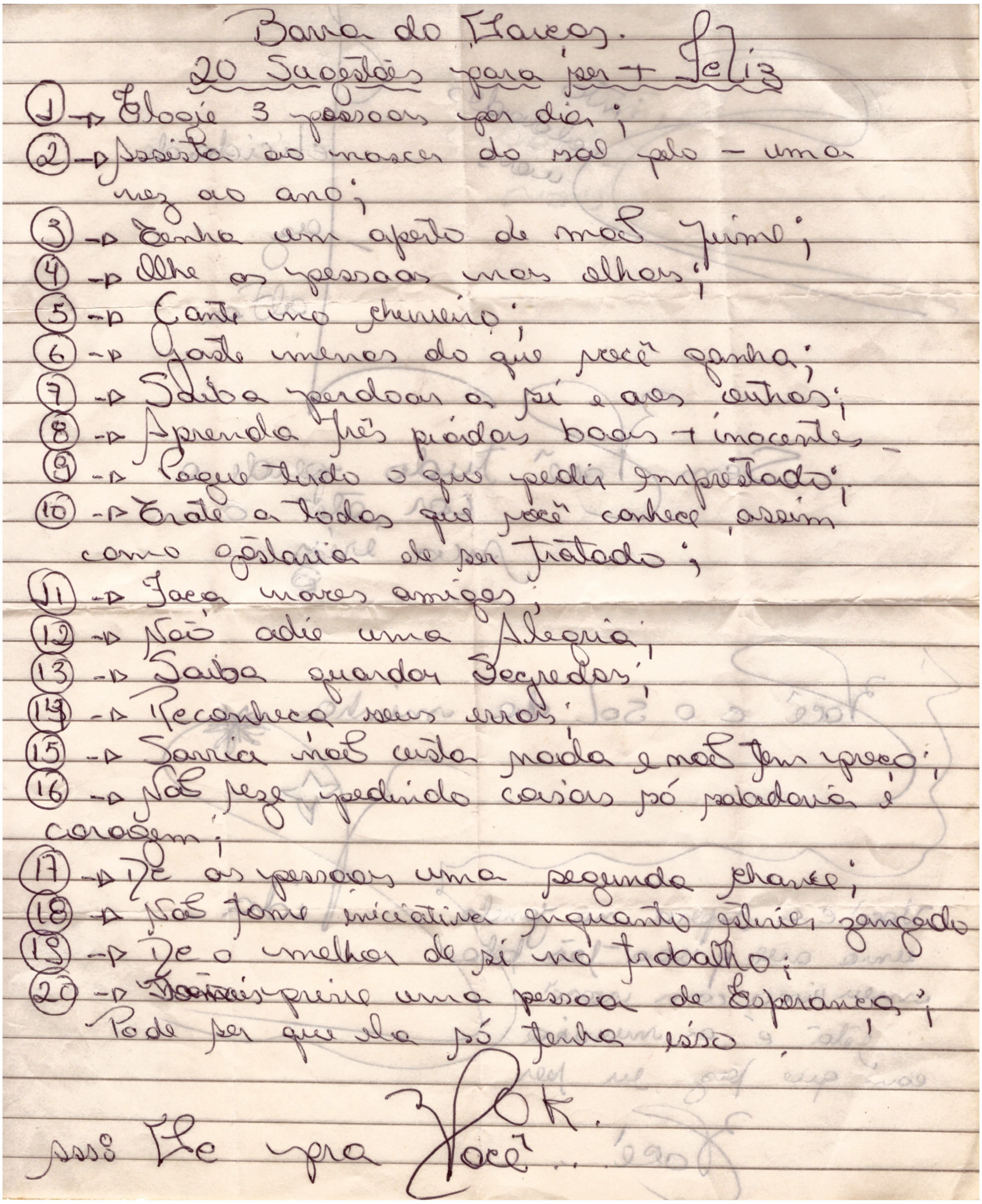
Presidente Banca/Orientador Doutor Juan Elmer Villanueva Zevallos
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Adilson Antônio Berlatto
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Marcelo Almeida de Souza
Instituição: Universidade Federal de Goiás

Barra do Garças, 12/07/2019.

À minha preciosa mãe Genozira Luiza de Jesus (in memorian) que não teve a oportunidade de compartilhar essa conquista. Antes da sua precoce partida deixou a seguinte reflexão de um autor desconhecido.



Barra do Garças.

20 Sugestões para ser + Feliz

1 -> Elogie 3 pessoas por dia;
2 -> Assista ao nascer do sol pelo - uma vez ao ano;
3 -> Tenha um aperto de mão firme;
4 -> Olhe as pessoas nos olhos;
5 -> Cante no chuveiro;
6 -> Gaste menos do que você ganha;
7 -> Saiba perdoar a si e aos outros;
8 -> Aprenda três piadas boas + inocentes
9 -> Pague tudo o que pedir emprestado;
10 -> Trate a todos que você conhece, assim como gostaria de ser tratado;
11 -> Faça novos amigos;
12 -> Não adie uma Alegria;
13 -> Saiba guardar Segredos;
14 -> Reconheça seus erros;
15 -> Sorria não custa nada e não tem preço;
16 -> Não reze pedindo coisas só sabedoria e coragem;
17 -> Dê as pessoas uma segunda chance;
18 -> Não tome iniciativa enquanto estiver zangado
19 -> Dê o melhor de si no trabalho;
20 -> Jamais prive uma pessoa de Esperança; Pode ser que ela só tenha isso!

OK.

Isso é pra Você...

Agradecimentos

À Deus, por ter dado força nos dias mais obscuros e me guiado perante as minhas dificuldades.

Ao meu orientador, pela paciência, dedicação e apoio nas horas que mais precisei.

À minha família e amigos, que me apoiaram e incentivaram ao ingressar e concluir os meus estudos.

A minha noiva, por ter estado ao meu lado e mesmo diante das dificuldades encontradas me incentivou a continuar.

Aos professores que acompanharam minha jornada.

Aos amigos do mestrado, que ao longo destes dois anos se tornaram parte da minha família.

Aquele que habita no esconderijo do Altíssimo, à sombra do Onipotente descansará. Direi do Senhor: Ele é o meu Deus, o meu refúgio, a minha fortaleza, e nele confiarei. Porque ele te livrará do laço do passarinheiro, e da peste perniciosa. Ele te cobrirá com as suas penas, e debaixo das suas asas te confiarás; a sua verdade será o teu escudo e broquel. Não terás medo do terror de noite nem da seta que voa de dia. Nem da peste que anda na escuridão, nem da mortandade que assola ao meio-dia. Mil cairão ao teu lado, e dez mil à tua direita, mas não chegará a ti.

Salmos 91:1-7

Bíblia Sagrada

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem sobre a representação dos números reais por meio das frações contínuas, sugerindo-se atividades as quais possam ser trabalhadas no Ensino Médio. Exibe-se uma proposta para a inclusão das frações contínuas na grade curricular do Ensino Básico.

Palavras-chave: Expressões decimais, frações contínuas, representação decimal dos números reais.

Abstract

This work presents an approach on the representation of real numbers through continued fractions, suggesting activities that can be worked in High School. A proposal for the inclusion of continued fractions in the curriculum of Basic Education is shown.

Key-words: Decimal expressions, continued fractions, decimal representation of real numbers.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Os *números reais* é o conjunto numérico mais utilizado no Ensino Médio, devido a sua aplicação no dia-a-dia. Para efetuar cálculos, a forma eficiente de representar os números reais é por meio de expressões decimais.

Tipicamente, uma *expressão decimal* é escrita como

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

onde a_0 é um número inteiro e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$, para todo $n \in \mathbb{N}$, os quais são chamados de *dígitos*. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número a_n é chamado de *n-ésimo dígito* da expressão decimal α. Alguns exemplos específicos de expressões decimais são os símbolos:

$$\gamma = 13,24600\ldots \quad \delta = 35,121212\ldots \quad \text{e} \quad \pi = 3,14159265\ldots$$

No caso de γ, entende-se que todos os dígitos após o número 6 são compostos por zeros. No caso de β, os dígitos após a virgula é composta pela justaposição de 12 infinitamente. Porém, no caso de π, não há uma regra que permite dizer quais os próximos dígitos a partir do nono.

O emprego de reticências é uma maneira informal, porém, muito útil no âmbito do ensino da matemática no conteúdo de expressões decimais, que é estudado nas turmas de oitavo ano. Desta feita, aplicar um novo conhecimento através de uma perspectiva diferente é fundamental para o desenvolvimento de matemática no ensino básico, ficando a cargo do professor motivar e buscar novas formas de ensinar. Assim, pode-se fazer a seguinte pergunta: "existe outra forma de representar os números reais?". Sendo então, este o principal desígnio do trabalho.

Com esta finalidade, apresentara-se-á uma outra forma de expressar os números reais, por meio das *frações contínuas* com a interpretação geométrica das mesmas. Utilizou-se o software LaTeX, para ilustrar as figuras deste trabalho.

Para isso o trabalho será composto de quatro capítulos, sendo os dois primeiros relativos a um estudo teórico que foram levantados para amparar o entendimento matemático necessário para o educador. O terceiro capítulo é um estudo pedagógico baseado nos principais documentos e normativas de regulamentação do ensino básico brasileiro, e que sugere-se a inclusão dessa proposta nos componentes curriculares do ensino básico. Finalmente, o quarto capítulo, traz o desenvolvimento dessa proposta na educação básica tais como os resultados obtidos.

No Capítulo 1, é realizado um estudo formal sobre a representação decimal dos números reais. Mostra-se que todo número real possui uma representação decimal.

No Capítulo 2, é abordado uma outra representação dos números reais, por meio das *frações contínuas*. Em particular, mostra-se uma maneira de representar todos os números racionais, como fração contínua, utilizado-se o algoritmo de Euclides. Além disso, apresenta-se uma representação geométrica das frações contínuas, muito útil para compreensão dos racionais e irracionais no Ensino Básico.

No Capítulo 3, é feito uma análise dos documentos brasileiros que regulamentam a educação brasileira, dando enfase em dois destes documentos a *Base Nacional Comum Curricular* (Brasil, 2018) que recentemente foi lançada para o Ensino Médio e o documento da *Plano Desenvolvimento da Educação/Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica* (Brasil, 2008), onde propõe-se a criação de um novo descritor "D22a", dentro do Tema III: Números e Operações/Álgebra e Funções.

No Capítulo 4, apresenta-se uma série de atividades as quais foram aplicadas no 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Jaraguá no município de Água Boa - MT. Finaliza-se esse capítulo com o relatório da realização das aulas ministradas.

A fim de alcançar esse objetivo, é preciso desenvolver uma teoria sólida que agregue um conhecimento para criar e buscar atividades que estimulassem aos alunos proporcionando uma aprendizagem onde este passaria a compreender com um novo olhar as aplicações dos conteúdos que viram durante a sua vida escolar.

Capítulo 1

Estudo dos números reais no ensino médio

O conjunto dos números reais é de suma importância para a vida dos alunos, pois estes acabam utilizando-os para o resto da suas vidas, seja ao pesar algum objeto, a medir alguma coisa com uma fita métrica, ao expressar os resultados que encontram nas disciplinas de matemática. Desta feita, representa-se tais números utilizando as expressões decimais. O objetivo desse capítulo é fazer um estudo formal das expressões decimais dos números reais.

Este capítulo baseia-se nas referências Lima (2014) e Kalapodi (2010).

1.1 Expressões decimais dos números reais

Apresentar-se-á a seguir a definição formal de *expressão decimal* dos números reais.

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números inteiros tal que $0 \leq a_n \leq 9$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado, $a_0 \in \mathbb{Z}$, considere-se a série

$$a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{10^n}. \tag{1.1}$$

A série dada em (1.1) é convergente. De fato, para verificar isto observa-se que $\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$, para todo inteiro $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n} = 9\left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, $\frac{1}{10} < 1$ e, portanto, a série geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n$ é convergente.

Logo, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{9}{10^n}$ é convergente. Então, pelo Teste de Comparação, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, \tag{1.2}$$

é convergente. Ao somar o inteiro a_0 em (1.2), a série ainda é convergente. Tal número denota-se por $\overline{\alpha}$. Isto é,

$$\overline{\alpha} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}. \tag{1.3}$$

Definição 1.1. Diz-se que um número real α tem uma *representação decimal* se existe uma sequência de inteiros $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq a_n \leq 9$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\alpha = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Esta expressão, acostuma-se escrever como

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

e chama-se de *expressão decimal* de α.

Por exemplo, uma representação decimal de um inteiro a é da forma

$$a = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

onde, $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $a = a, 000\ldots$.

O número $\alpha = 13,428000\ldots$ é a representação decimal do número $\frac{3357}{250}$. De fato,

$$\frac{3357}{250} = 13 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000}.$$

Logo, pode-se escrever $\frac{3357}{250} = 13 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, onde

$$a_n = \begin{cases} 4, & \text{se } n = 1; \\ 2, & \text{se } n = 2; \\ 8, & \text{se } n = 3; \\ 0, & \text{se } n \geq 4; \end{cases}$$

Por outro lado, o número $\beta = 25,121212\ldots$ é a representação decimal do número

$\frac{829}{33}$. De fato,

$$\frac{829}{33} = 25 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{2}{10000} + \dots$$

Logo, pode-se escrever $\frac{829}{33} = 25 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$, onde

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é impar;} \\ 2, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Definição 1.2. Seja x um número real, chama-se o *maior inteiro de x* ou *parte inteira de x* ou *piso de x* ao inteiro

$$\lfloor x \rfloor = \max \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}.$$

Por exemplo, a parte inteira dos números 4, $\frac{1}{3}$ e $-\frac{47}{10}$ são, respectivamente, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor \frac{1}{3} \rfloor = 0$ e $\lfloor -\frac{47}{10} \rfloor = -5$.

Teorema 1.3. *Todo número real positivo tem uma representação decimal.*

Demonstração. Seja α um número real positivo. Denota-se por $a_0 := \lfloor \alpha \rfloor$. Define-se indutivamente a sequência $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pondo

$$\beta_1 = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor \quad \text{e} \quad \beta_{n+1} = 10\beta_n - \lfloor 10\beta_n \rfloor,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que $0 \leq \beta_n < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $0 \leq \beta_n < 1$, tem-se que $0 \leq 10\beta_n < 10$ e, assim, $0 \leq 10\beta_n - \lfloor 10\beta_n \rfloor < 1$. Isto é, o termo $\lfloor 10\beta_n \rfloor$ é um dígito do sistema decimal, em que denota-se por a_n, ou seja, $\lfloor 10\beta_n \rfloor = a_n$. Assim, tem-se que

$$\beta_n = \frac{a_n + \beta_{n+1}}{10},$$

para todo inteiro $n \in \mathbb{N}$. Define-se a sequência $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como sendo

$$\alpha_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}.$$

Prova-se por indução sobre n, que

$$\alpha = \alpha_n + \frac{\beta_{n+1}}{10^n}. \tag{1.4}$$

Como $0 \leq \beta_{n+1} < 1$, então $0 \leq \frac{\beta_{n+1}}{10^n} < \frac{1}{10^n}$. Como $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, pelo teorema do Sanduíche, tem-se que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\beta_{n+1}}{10^n} = 0$. Pela equação 1.4, tem-se $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$.

Assim, obtêm-se a seguinte série infinita que é uma representação de α:

$$\alpha = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

$\square$

A representação decimal não é única. Para ver isto, observa-se que $1 = 1,0000\cdots = 0,9999\ldots$. De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha = 0,999\ldots &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} \\
&= \left(\frac{9}{10^0} - \frac{9}{10^0}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} \\
&= 9\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} - 1\right) \\
&= 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) \\
&= 9\left(\frac{10}{9} - 1\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$.

Generaliza-se que todo inteiro n, possui duas representações decimais

$$n = n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \ \ (a_n = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}) \quad \text{e} \quad n = (n-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}.$$

Os números racionais, em geral, não possuem representação decimal única.

A igualdade $1 = 0,999\ldots$ costuma causar perplexidade aos menos experientes. A única maneira de dirimir o aparente paradoxo é esclarecer que o símbolo $0,999\ldots$ na realidade significa o número cujos valores aproximados são $0,9$; $0,99$; $0,999$; etc.

No seguinte capítulo, apresenta-se uma outra forma de expressar os números reais, por meio das *frações contínuas*.

Capítulo 2

Representação dos números reais como frações contínuas

Uma outra abordagem da representação dos números reais é por meio das *frações contínuas*. Tal representação é considerada inusitada visto que não está presente na grade curricular dos alunos. Existe uma necessidade em motivar os alunos quanto a importância das ferramentas matemáticas que são ensinadas durante o ensino básico. Com isto, ensinar as frações contínuas permite o uso de diversas técnicas que durante a vida escolar do aluno é ensinada a esmo, sendo que muitas vezes não se conhece as suas aplicações e utilidade, como por exemplo: a racionalização, o algoritmo de Euclides e operações entre números racionais. O objetivo desse capítulo é fazer um estudo introdutório das frações contínuas.

Esse capítulo, baseia-se nas referências Moreira et all (2012), Cheng (2007), Olds (1963), Lorenzo e Jorge (2007), Eves (2004) e Vorobiov (1974).

2.1 Fração contínua

Uma *fração contínua* é uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}}, \tag{2.1}$$

onde $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são sequências de números inteiros com $a_n > 0$ e $b_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.[1]

Se $b_n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então a expressão (2.1) se reduz a

[1]Em geral, as sequências $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ podem ser números reais, ver em Cheng (2007).

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_{n-2}}{a_{n-2} + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}}}}}. \tag{2.2}$$

No caso (2.2), diz-se que a fração contínua é *finita*, e no caso (2.1), diz-se que é *infinita*.

A fração contínua é dita *simples* se a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for constante e seus termos iguais a 1, o qual denota-se por

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}. \tag{2.3}$$

Uma expressão da forma

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

denomina-se *fração contínua simples finita*. Os termos $a_0, a_1, a_2, \dots$ são chamados de *quocientes parciais*.

Dado um número real x, diz-se que x possui uma *representação em fração contínua* se existem duas sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números inteiros com $a_n > 0$ e $b_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}}.$$

2.1.1 Um pouco de história

A seguir apresentam-se exemplos de frações contínuas que foram utilizados por alguns matemáticos contribuindo para o desenvolvimento deste assunto, para mais detalhes ver em Cheng (2007), Olds (1963) e Eves (2004).

O algebrista italiano Rafael Bombelli (1526-1572), nascido em Bologna (Itália), entendia que

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ddots}}}}.$$

Todavia, cabe ressaltar que o Bombelli não utilizava a notação dos tempos atuais.

O nobre e matemático britânico William Brouncker (1620-1684) um dos fundadores e primeiro presidente da Royal Society de Londres, que também manteve relações com Wallis, Fermat e entre outros matemáticos de primeira linha, em 1658, contribuiu com a expansão da fração contínua de $\dfrac{4}{\pi}$ (considerada uma importante descoberta para a história do π).

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}}.$$

O famoso matemático suíço Leonhard Paul Euler (1707-1783) foi um dos primeiros a desenvolver a teoria das frações contínuas. Representou o número $e = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ como a fração contínua simples

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}},$$

ou, equivalentemente, $e - 1 = [1; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots, 1, 1, 2n, \ldots]$.

O suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) foi um matemático de alto quilate, filho de um alfaiate pobre e, em grande parte, um autodidata. Lambert foi o primeiro a provar rigorosamente que o número π era irracional. E por volta de 1770, escreveu o cálculo $\tan x$ na forma de frações contínuas,

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}$$

Lambert usou a expressão para concluir que se x é um número racional não nulo, então $\tan x$ não pode ser um número racional. Sendo assim, como $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, então π não pode ser racional.

Um dos grandes matemáticos do século XVIII Joseph Louis Lagrange (1736-1813) nascido em Turim na Itália, em uma de suas grandiosas obras *"Traité de Résolution des Équations Numériques de Tous Degrés"* demonstrou que as raízes irracionais de equações quadráticas possuem uma expansão em fração contínua periódica. Algumas dessas podem ser vistas a seguir, conforme Cheng (2007).

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} \quad \text{e} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}.$$

Também, para $a^2 + b > 0$, tem-se

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}}$$

2.1.2 Desenvolvimento de um número em fração contínua

O processo de conversão do número real x em uma fração contínua denomina-se *desenvolvimento de x em fração contínua*.

A fim de ver que todo número racional pode-se representar como uma fração contínua, considere-se inicialmente um caso particular. Sejam a e b inteiros coprimos com $b > 1$. Suponha que o algoritmo de Euclides, aplicado aos inteiros a e b, seja dado por

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_0 + r_1, \quad \text{com } 0 \leq r_1 < b, && (2.4)\\ b &= r_1 \cdot q_1 + r_2, \quad \text{com } 0 \leq r_2 < r_1, && (2.5)\\ r_1 &= r_2 \cdot q_2 + r_3, \quad \text{com } 0 \leq r_3 < r_2, && (2.6)\\ r_2 &= r_3 \cdot q_3. && (2.7) \end{aligned}$$

Da igualdade (2.4), obtêm-se

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}. \tag{2.8}$$

Porém, da igualdade (2.5), deduz-se

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}. \tag{2.9}$$

Do mesmo modo, da igualdade (2.6), tem-se

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}, \tag{2.10}$$

e da igualdade (2.7),

$$\frac{r_2}{r_3} = q_3. \tag{2.11}$$

Logo, de (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11), conclui-se

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}} = [q_0; q_1, q_2, q_3].$$

Em particular, como o algoritmo de Euclides aplicados nos inteiros 43 e 30 é

$$\begin{aligned} 43 &= 30 \cdot 1 + 13,\\ 30 &= 13 \cdot 2 + 4,\\ 13 &= 4 \cdot 3 + 1,\\ 4 &= 1 \cdot 4. \end{aligned}$$

Conclui-se que o desenvolvimento em fração contínua do número $\frac{43}{30}$ é dado por

$$[1;2,3,4] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}.$$

Isto é, $\frac{43}{30} = [1;2,3,4]$.

Foi feito o processo de desenvolvimento de $\frac{a}{b}$ em fração contínua, quando o algoritmo de Euclides aplicado nos números a por b tem exatamente quatro passos. No próximo resultado, prova-se o caso geral, isto é, para quaisquer inteiros a e b coprimos e $b > 1$.

Se o algoritmo de Euclides, aplicados nos inteiros a e b, é dado pelas seguintes divisões sucessivas

$$\begin{array}{rcll} a & = & b \cdot q_0 + r_1, & \text{com } 0 \leq r_1 < b, \\ b & = & r_1 \cdot q_1 + r_2, & \text{com } 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 & = & r_2 \cdot q_2 + r_3, & \text{com } 0 \leq r_3 < r_2, \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ r_{n-2} & = & r_{n-1} q_{n-1} + r_n, & \text{com } 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} & = & r_n q_n, & \end{array}$$

chamaremos de *quocientes parciais das divisões sucessivas de a e b*, aos inteiros $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Lema 2.1. *Seja $\frac{a}{b}$ um número racional com a e b inteiros coprimos e $b > 1$. Se $q_0, q_1, \ldots, q_n$ são os quocientes parciais das divisões sucessivas de a e b, então*

$$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, \ldots, q_n].$$

Demonstração. Provar-se-á, por indução sobre n, que para todo par de inteiros a e b coprimos com $b > 1$, tem-se

$$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, \ldots, q_n],$$

onde $q_0, q_1, \ldots, q_n$ são os quocientes parciais das divisões sucessivas de a e b. Com efeito, para $n = 1$ o resultado é verdadeiro, pois dados a e b inteiros coprimos com $b > 1$, tais que

$$\begin{array}{rcll} a & = & b \cdot q_0 + r_1, & \text{com } 0 \leq r_1 < b, \\ b & = & r_1 q_1. & \end{array}$$

Então,
$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1} = [q_0; q_1].$$

Procedendo indutivamente, suponha que o resultado seja válido para algum $n \in \mathbb{N}$. A continuação mostra-se que o resultado é válido para $n+1$. De fato, dados a e b inteiros coprimos com $b > 1$ tais que,

$$r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1}, \quad \text{com } 0 \leq r_i < r_{i-1},$$

para todo inteiro i tal que $1 \leq i \leq n$, onde $r_{-1} = a$, $r_0 = b$, $r_n = 1$ e $r_{n+1} = 0$. Então,

$$\frac{a}{b} = \frac{r_{-1}}{r_0} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}. \tag{2.12}$$

Como os inteiros $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ são os quocientes parciais das divisões sucessivas de $r_0 = b$ por r_1, então pela hipótese indutiva,

$$\frac{b}{r_1} = [q_1; , q_2, \ldots, q_{n+1}]. \tag{2.13}$$

Logo, de (2.12) e (2.13), tem-se

$$\frac{a}{b} = \frac{r_0}{r_1} = q_0 + \frac{1}{[q_1; , q_2, \ldots, q_{n+1}]} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1}}}}} = [q_0; q_1, \ldots, q_{n+1}].$$

Mostrando que o resultado é verdadeiro para $n+1$. Portando, pelo Principio de Indução Matemática, $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, \ldots, q_n]$, para todo par de inteiros a e b com $b > 1$, onde $q_0, q_1, \ldots, q_n$ são os quocientes parciais das divisões sucessivas de a por b. □

Teorema 2.2. *Um número x é racional se, e somente se, possui uma representação em fração contínua simples finita.*

Demonstração. A condição necessária é o Lema 2.1 e a condição suficiente segue da definição de fração contínua finita. □

Existem diversos métodos para encontrar a fração contínua que representa um número, a maneira mais fácil de se representar um número racional é por meio das divisões sucessivas ou algoritmo de Euclides.

Exemplo 2.3. O Teorema 2.2, garante que o número racional $\frac{235}{139}$ possui uma representação em fração contínua finita, descrita a seguir. Pelo algoritmo de Euclides entre os números 235 e 139, tem-se que

$$
\begin{aligned}
235 &= 139 \cdot 1 + 96,\\
139 &= 96 \cdot 1 + 43,\\
96 &= 43 \cdot 2 + 10,\\
43 &= 10 \cdot 4 + 3,\\
10 &= 3 \cdot 3 + 1,\\
3 &= 1 \cdot 3.
\end{aligned}
$$

Neste caso, os quocientes parciais das divisões sucessivas de 235 e 139 são $1, 1, 2, 4, 3$ e 3. Logo, pelo Lema 2.1 tem-se

$$\frac{235}{139} = [1; 1, 2, 4, 3, 3] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}}}}.$$

2.2 Representação de um número como fração contínua

Nesta seção, apresentar-se-á uma maneira de encontrar as frações contínuas simples segundo Moreira et all (2012). Os resultados apresentados é uma forma de encontrar os quocientes parciais das frações contínuas simples mais interessantes para os números irracionais, porém servem perfeitamente com os racionais.

Definição 2.4. Seja x um número real. Define-se indutivamente a sequência $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ por $\alpha_0(x) := x$ e

$$\alpha_{n+1}(x) := \begin{cases} \alpha_n(x), & \text{se } \alpha_n(x) \in \mathbb{Z},\\ \dfrac{1}{\alpha_n(x) - \lfloor \alpha_n(x) \rfloor}, & \text{se } \alpha_n(x) \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A sequência $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, definida por $a_n(x) := \lfloor \alpha_n(x) \rfloor$ será chamada de *sequência dos quocientes parciais* de x.

Os quocientes parciais do número 2, são por definição $a_0(2) = \lfloor \alpha_0(2) \rfloor = 2, a_1(2) = \lfloor \alpha_1(2) \rfloor = 2, \ldots, a_n(2) = \lfloor \alpha_n(2) \rfloor = 2, \ldots$, ou seja, $a_n(2) = \lfloor \alpha_n(2) \rfloor = 2$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De fato, se $x \in \mathbb{Z}$, então a sequência dos quocientes parciais de x é constante, o qual é dado no próximo resultado.

Proposição 2.5. *Se x é um inteiro, então a sequência $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dos seus quocientes parciais é constante.*

Demonstração. Provar-se-á, por indução sobre n, que $\alpha_n(x) = x$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por definição, para $n = 0$, o resultado é imediato, pois $\alpha_0(x) = x$. Procedendo indutivamente, suponhamos que o resultado seja válido para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Prova-se, agora, que o resultado é válido para $n+1$. De fato, pela hipótese indutiva, $\alpha_n(x) = x$. Como $\alpha_n(x) = x$ é um inteiro, então, pela Definição 2.4, segue que $\alpha_{n+1}(x) = \alpha_n(x) = x$. Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, a sequência $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ é constante para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Pelo visto anteriormente, segue que $a_n(x) = \lfloor \alpha_n(x) \rfloor = x$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

Quando não houver confusão, denota-se simplesmente por $\alpha_n := \alpha_n(x)$ e $a_n := a_n(x)$.

A Proposição 2.5, pode-se generalizar para os números racionais, isto é, a partir de um índice suficientemente grande, a sequência torna-se constante. A fim de ver isto, considere-se inicialmente um caso particular. Sejam a e b inteiros coprimos com $b > 1$. Suponha que o algoritmo de Euclides, aplicado aos inteiros a e b, seja dado por

$$a = b \cdot q_0 + r_1, \quad \text{com } 0 \leq r_1 < b, \tag{2.14}$$

$$b = r_1 \cdot q_1 + r_2, \quad \text{com } 0 \leq r_2 < r_1, \tag{2.15}$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3, \quad \text{com } 0 \leq r_3 < r_2, \tag{2.16}$$

$$r_2 = r_3 \cdot q_3, \tag{2.17}$$

onde, $r_3 = 1$.

Obter-se-á os quocientes parciais de $\frac{a}{b}$. Para isso, encontra-se os termos da sequência $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ e posteriormente os quocientes parciais. Assim, com as mesmas notações da Definição 2.4, tem-se $\alpha_0 = \dfrac{a}{b}$. Pondo, $a = r_{-1}$ e $b = r_0$, tem-se

$$\alpha_0 = \frac{a}{b} = \frac{r_{-1}}{r_0}. \tag{2.18}$$

Assim, das igualdades (2.14) e (2.18), obtêm-se

$$a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor = \left\lfloor \frac{r_{-1}}{r_0} \right\rfloor = \left\lfloor q_0 + \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = q_0.$$

Deste modo, o termo $\alpha_1(x)$ é obtido através de

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - \lfloor \alpha_0 \rfloor} = \frac{1}{\dfrac{a}{b} - q_0} = \frac{1}{\dfrac{a - q_0 \cdot b}{b}} = \frac{b}{r_1} = \frac{r_0}{r_1}. \tag{2.19}$$

Assim, pelas igualdades (2.15) e (2.19), deduz-se

$$a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = \left\lfloor q_1 + \frac{r_2}{r_1} \right\rfloor = q_1.$$

O termo α_2 é dado por

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - \lfloor \alpha_1 \rfloor} = \frac{1}{\dfrac{b}{r_1} - q_1} = \frac{1}{\dfrac{b - q_1 \cdot r_1}{r_1}} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{2.20}$$

De modo que, as igualdades (2.16) e (2.20), tem-se

$$a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor = \left\lfloor q_2 + \frac{r_3}{r_2} \right\rfloor = q_2.$$

O termo α_3 é dado por

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - \lfloor \alpha_2 \rfloor} = \frac{1}{\dfrac{r_1}{r_2} - q_2} = \frac{1}{\dfrac{r_1 - q_2 r_2}{r_2}} = \frac{r_2}{r_3}. \tag{2.21}$$

Como $r_3 = 1$, pelas das igualdades (2.17) e (2.21), tem-se

$$a_3 = \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor = \lfloor r_2 \rfloor = q_3.$$

Logo, os quocientes parciais de $\frac{a}{b}$ são dados por $a_0 = q_0$, $a_1 = q_1$, $a_2 = q_2$ e $a_3 = q_3$. No seguinte resultado, exibir-se-á que $\alpha_i = \frac{r_{i-1}}{r_i}$ para todo inteiro i tal que $0 \leq i \leq n$.

Proposição 2.6. *Seja $x = \frac{a}{b}$ um número racional com a e b inteiros coprimos e $b > 1$. Considere os inteiros $q_0, q_1, \ldots, q_n, r_1, \ldots, r_n$ tais que $0 \leq r_k < r_{k-1}$ e*

$$r_{k-1} = r_k q_k + r_{k+1},$$

para todo inteiro k tal que $1 \leq k \leq n$, onde $r_{-1} = a$, $r_0 = b$, $r_n = 1$ e $r_{n+1} = 0$. Então, a sequência $(\alpha_k(x))_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é dada por

$$\alpha_k(x) = \frac{r_{k-1}}{r_k}, \text{ para todo inteiro } k \text{ tal que } 0 \leq k \leq n, \tag{2.22}$$

e $\alpha_k(x) = q_n$, para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq n + 1$. Em particular, os quocientes parciais de

x são dados por $a_k = q_k$, para todo inteiro k tal que $0 \leq k \leq n$, e $a_k(x) = q_n$, para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq n+1$.

Demonstração. Provar-se-á, por indução sobre k, que

$$\alpha_k(x) = \frac{r_{k-1}}{r_k},$$

para todo inteiro k tal que $0 \leq k \leq n$. Para $k = 0$, o resultado é trivialmente verdadeiro, pois $\alpha_0(x) = x = \dfrac{a}{b} = \dfrac{r_{-1}}{r_0}$.

Procedendo indutivamente, suponha-se que o resultado seja válido para algum inteiro k com $0 \leq k < n$, isto é,

$$\alpha_k(x) = \frac{r_{k-1}}{r_k}.$$

Prova-se agora que o resultado é válido para $k+1$. De fato, como $r_k > r_n = 1$ (pois $0 \leq k \leq n-1$), segue que $\alpha_k \notin \mathbb{Z}$. Então, $\alpha_{k+1}(x) = \dfrac{1}{\alpha_k(x) - \lfloor \alpha_k(x) \rfloor}$. Logo, pela hipótese indutiva, tem-se

$$\alpha_{k+1}(x) = \frac{1}{\dfrac{r_{k-1}}{r_k} - \left\lfloor \dfrac{r_{k-1}}{r_k} \right\rfloor} = \frac{1}{\dfrac{r_{k-1}}{r_k} - q_k} = \frac{r_k}{r_{k-1} - q_k r_k} = \frac{r_k}{r_{k+1}}.$$

Mostrando, assim, que o resultado é válido para $k+1$. Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, $\alpha_k(x) = \dfrac{r_{k-1}}{r_k}$, para todo inteiro k tal que $0 \leq k \leq n$, onde $r_{-1} = a$, $r_0 = b$, $r_n = 1$ e $r_{n+1} = 0$.

Provar-se-á agora, por indução sobre k, que $\alpha_k(x) = q_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq n+1$. Pelo visto anteriormente,

$$\alpha_n(x) = \frac{r_{n-1}}{r_n} = r_{n-1} = q_n.$$

Agora, para $k = n+1$ o resultado é verdadeiro, pois $\alpha_k(x) = \alpha_{n+1}(x)$. Como $\alpha_n(x)$ é inteiro, tem-se que $\alpha_{n+1}(x) = \alpha_n(x) = q_n$.

Procedendo indutivamente, suponha que o resultado seja válido para algum $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq n+1$, isto é, $\alpha_{n+k}(x) = q_n$. Prova-se agora, que o resultado é válido para $k+1$.

Pela hipótese indutiva tem-se que $\alpha_k(x)$ é um inteiro, então $\alpha_{k+1}(x) = \alpha_k(x) = q_n$ e o resultado é válido para $k+1$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, $\alpha_k = q_n$, para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq n+1$.

Finalmente, tem-se que

$$a_k(x) = \lfloor \alpha_k(x) \rfloor = \left\lfloor \frac{r_{k-1}}{r_k} \right\rfloor = q_k,$$

para todo inteiro k tal que $k \geq n+1$. Além disso,

$$a_k(x) = \lfloor \alpha_k(x) \rfloor = \lfloor q_n \rfloor = q_n,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq n+1$. $\square$

Observação 2.7. Seja $x = \dfrac{a}{b}$ um número racional com a e b inteiros coprimos e $b > 1$. Suponha-se que $q_0, q_1, \ldots, q_n$ sejam os quocientes parciais das divisões sucessivas de a e b. Pela Proposição 2.6 tem-se que a sequência dos quocientes parciais de x $(a_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é dada por

$$a_k = \begin{cases} q_k, & \text{se } 0 \leq k \leq n, \\ q_n, & \text{se } k \geq n+1. \end{cases}$$

Isto é, os primeiros n termos da sequência dos quocientes parciais de $x = \dfrac{a}{b}$ coincidem com os quocientes parciais das divisões sucessivas de a e b. Assim, pelo Lema 2.1,

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

A seguir apresentam-se dois exemplos de números reais em fração contínua, segundo a Definição 2.4.

Exemplo 2.8. Escrever-se-á algebricamente a fração contínua do número $\frac{9}{13}$. Com as mesmas notações da Definição 2.4, tem-se $\alpha_0 = \dfrac{9}{13}$. Deste modo, $a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor = \left\lfloor \frac{9}{13} \right\rfloor = 0$. O termo α_1 é dado por

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - \lfloor \alpha_0 \rfloor} = \frac{1}{\dfrac{9}{13} - 0} = \frac{13}{9}.$$

Assim, $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{13}{9} \right\rfloor = 1$. O termo α_2 é obtido da seguinte forma:

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - \lfloor \alpha_1 \rfloor} = \frac{1}{\dfrac{13}{9} - 1} = \frac{1}{\dfrac{4}{9}} = \frac{9}{4}.$$

Logo, $a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor = 2$. Analogamente, obtém-se o termo α_3, como segue:

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - \lfloor \alpha_2 \rfloor} = \frac{1}{\dfrac{9}{4} - 2} = \frac{1}{\dfrac{1}{4}} = \frac{4}{1} = 4,$$

e, portanto, $a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = \lfloor 4 \rfloor = 4$. Finalmente, $\alpha_n = 4$, para todo inteiro $n \geq 4$.

Portanto, os quocientes parciais da fração $\frac{9}{13}$ são: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 4$, isto é,

$$\frac{9}{13} = [0;1,2,4] = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}.$$

Exemplo 2.9. Escrever-se-á algebricamente a fração contínua do número $e-1$. Com as mesmas notações da Definição 2.4, tem-se $\alpha_0 = e - 1 \approx 1,718284182\ldots$. Deste modo, $a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor = 1$. O termo α_1 é dado por

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - \lfloor \alpha_0 \rfloor} \approx 1,392211\ldots$$

Assim, $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1$. O termo α_2 é obtido da seguinte forma:

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - \lfloor \alpha_1 \rfloor} \approx 2,549654\ldots$$

Logo, $a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 2$. Analogamente, obtém-se o termo α_3, como segue:

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - \lfloor \alpha_2 \rfloor} \approx 1,819326\ldots$$

e, portanto, $a_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = 1$. Este processo continua infinitamente, pois o número $e-1$ é irracional. Assim, o desenvolvimento da fração contínua do número $e-1$ é dada por

$$e - 1 = [1;1,2,1,1,4,1,1,\ldots] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}}}.$$

Uma pergunta que surge naturalmente é *a representação em fração contínua é única?*. E a resposta é não. De fato, considere as frações contínuas o número $\alpha = \frac{3}{4}$, então, $\alpha = [0;1,3]$ e $\alpha = [0;1,2,1]$.

2.2.1 Interpretação geométrica das frações contínuas

Uma aplicação interessante quanto ao estudo das frações contínuas se dá pelo meio das representações geométricas que podem ser feitas. Desse modo, como fazer uma representação geométrica das frações contínuas?

Uma interpretação geométrica para a representação de um número por fração contínua[2], se dá por enchermos um retângulo $1 \times x$ com quadrados de forma "gulosa", isto é, sempre colocando o maior quadrado possível dentro do espaço livre.

Para facilitar a notação, adota-se o retângulo com base igual à 1 e altura x. O retângulo da forma $1 \times x$ fornece a representação geométrica da fração contínua $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ ou $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ do número x.

Dado um número real positivo x diferente de 1, tem-se que: $0 < x < 1$ ou $x \geq 1$.

Caso 1: $0 < x < 1$.

- O termo a_0 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos dentro do retângulo $1 \times x$ com lado 1. Como não é possível fazer isto, tem-se $a_0 = 0$.

- O termo a_1 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos dentro do retângulo $1 \times x$ com lado x. Se o retângulo $1 \times x$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos este, obtendo o termo a_2. O termo a_2 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos, dentro do retângulo $\alpha_1 \times x$ com lado α_1, onde α_1 é a medida do segmento que sobrou ao ser retirado todos os segmentos de comprimento x do segmento de comprimento 1, no estágio anterior. Se o retângulo $\alpha_1 \times x$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos este mais uma vez, obtendo o termo a_3. O termo a_3 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos, dentro do retângulo $\alpha_1 \times \alpha_2$ com lado α_2, onde α_2 é a medida do segmento que sobrou ao ser retirado todos os segmentos de comprimento α_1 do segmento de comprimento α, no estágio anterior. Se o retângulo $\alpha_1 \times \alpha_2$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos novamente este, obtendo o termo a_4 e, assim, sucessivamente até preencher totalmente o retângulo $1 \times x$ por uma quantidade finita de quadrados ou continuar infinitamente este processo.

Caso 2: $x \geq 1$.

- O termo a_0 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos dentro do retângulo $1 \times x$ com lado 1. Neste caso, $a_0 > 0$. Se o retângulo $1 \times x$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

[2] Esta representação geométrica foi desenvolvida pelo meu orientador baseado em (Moreira et all, 2012), a quem agradeço.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos este, obtendo o termo a_1. O termo a_1 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos, dentro do retângulo $1 \times \alpha_1$ com lado α_1, onde α_1 é a medida do segmento que sobrou ao ser retirado todos os segmentos de comprimento 1 do segmento de comprimento x, no estágio anterior. Se o retângulo $1 \times \alpha_1$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos este mais uma vez, obtendo o termo a_2. O termo a_2 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos, dentro do retângulo $\alpha_2 \times \alpha_1$ com o lado α_2, onde α_2 é a medida do segmento que sobrou ao ser retirado todos os segmentos de comprimento α_1 do segmento de comprimento 1, no estágio anterior. Se o retângulo $\alpha_2 \times \alpha_1$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos novamente este, obtendo o termo a_3 e, assim, sucessivamente até preencher totalmente o retângulo $1 \times x$ por uma quantidade finita de quadrados ou continuar infinitamente este processo.

Em resumo, a quantidade de quocientes parciais é igual a quantidade de quadrados com tamanhos distintos. Se a figura der continuidade infinitamente, isto é, a quantidade de quadrados for infinita, então a representação geométrica será a de um número irracional.

A seguir apresenta-se as representações geométricas dos exemplos 2.8 e 2.9.

Exemplo 2.10. Descrever-se-á passo a passo a representação geométrica do número racional $\frac{9}{13}$ (correspondente ao Exemplo 2.8).

Passo 1: Desenha-se o retângulo com a base 1 e altura $x = \frac{9}{13}$. obtendo-se o retângulo $1 \times \frac{9}{13}$, como na Figura 2.1.

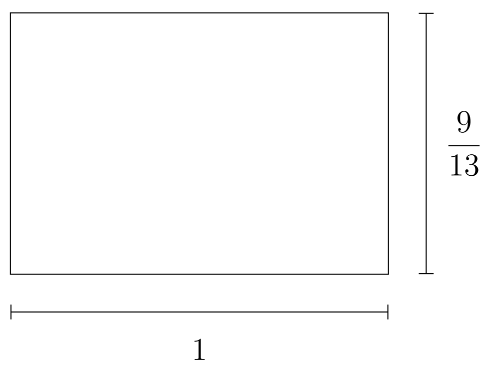


Figura 2.1: Retângulo $1 \times \frac{9}{13}$

Passo 2: Desenha-se a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo $1 \times \frac{9}{13}$, com lado 1. Como a base do retângulo $1 > \frac{9}{13}$, não é possível obter um quadrado com tal tamanho (em relação ao nosso retângulo), então $a_0 = 0$.

Passo 3: Desenha-se a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo $1 \times \frac{9}{13}$, com lado $\frac{9}{13}$. Neste caso, pode-se desenhar apenas um quadrado de lado $\frac{9}{13}$, o qual fixa-se na parte superior do retângulo como na Figura 2.2. Assim, tem-se $a_1 = 1$.

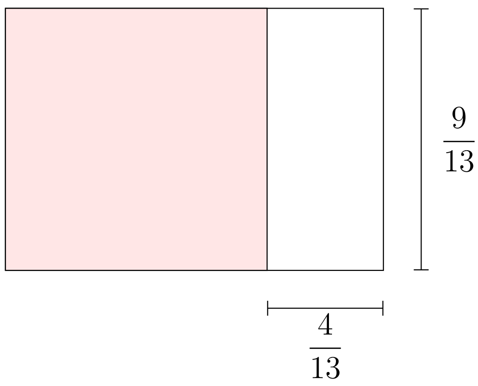


Figura 2.2: Quadrado de lado $\frac{9}{13}$ e retângulo $\frac{4}{13} \times \frac{9}{13}$

Passo 4: Desenha-se a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo que sobrou no Passo 3 (retângulo de cor branca). Neste caso, desenha-se dois quadrados de lado $\frac{4}{13}$ no extremo esquerdo do retângulo $\frac{4}{13} \times \frac{9}{13}$, como mostrado da Figura 2.3, obtendo-se agora dois quadrados de lados $\frac{4}{13}$ e um retângulo $\frac{4}{13} \times \frac{1}{13}$. Assim, tem-se que $a_2 = 2$.

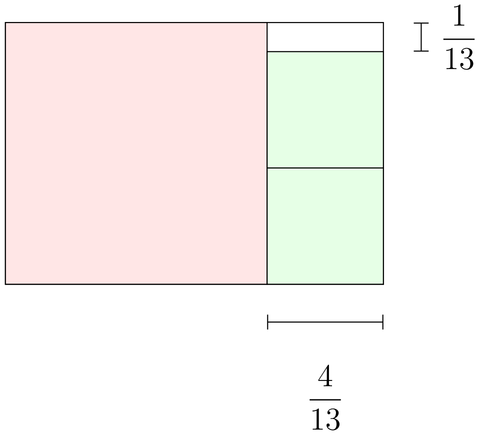


Figura 2.3: Quadrados de lado $\frac{4}{13}$ e retângulo $\frac{4}{13} \times \frac{1}{13}$

Passo 5: Desenha-se a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo que sobrou no Passo 4 (retângulo de cor branca). Neste caso, desenha-se quatro quadrados de lado $\frac{1}{13}$ na base do retângulo $\frac{4}{13} \times \frac{1}{13}$, como mostrado da Figura 2.4, obtendo-se agora quatro quadrados de lados $\frac{1}{13}$. Assim, tem-se $a_3 = 4$.

Agora, pelos passos 1, 2, 3, 4 e 5, tem-se que $\frac{9}{13} = [0; 1, 2, 4]$. Assim, a representação gráfica da fração contínua do número $\frac{9}{13}$ é dada na Figura 2.5. Veja que os

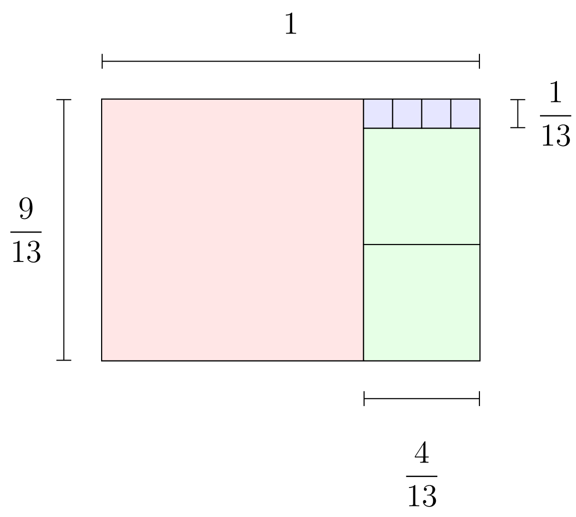


Figura 2.4: Quadrados de lado $\frac{1}{13}$

números 0, 1, 2 e 4 são exatamente a quantidade de quadrados que consegue-se formar com os lados 1, $\frac{9}{13}$, $\frac{4}{13}$ e $\frac{1}{13}$, respectivamente.

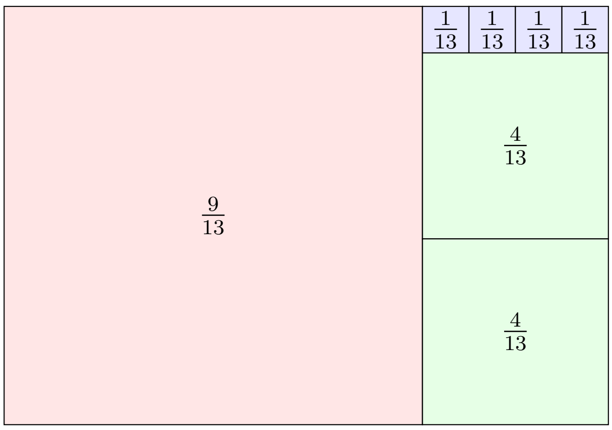


Figura 2.5: Representação geométrica da fração contínua $[1; 2, 3]$

Exemplo 2.11. Descrever-se-á passo a passo a construção da representação gráfica do número real $e - 1$ (correspondente ao Exemplo 2.9).

Passo 1: Desenha-se o retângulo com a base 1 e altura $x = e - 1$. Assim, obtêm-se o retângulo $1 \times (e - 1)$, como na Figura 2.6.

Passo 2: Desenha-se a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo $1 \times (e - 1)$, com lado 1. Neste caso, pode-se desenhar apenas um quadrado de lado 1, o qual fixa-se na parte superior do retângulo como na Figura 2.7. Assim, tem-se $a_0 = 1$.

Passo 3: Desenha-se a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo que sobrou no Passo 2 (retângulo de cor branca). Neste caso, desenha-se um quadrado de lado α_1 no extremo esquerdo do retângulo $1 \times \alpha_1$, como mostrado da Figura 2.8, obtendo-se agora um quadrados de lados α_1 e um retângulo $\alpha_2 \times \alpha_3$. Assim, tem-se $a_1 = 1$.

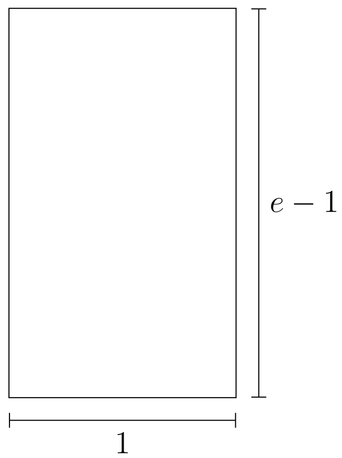


Figura 2.6: Retângulo $1 \times (e-1)$

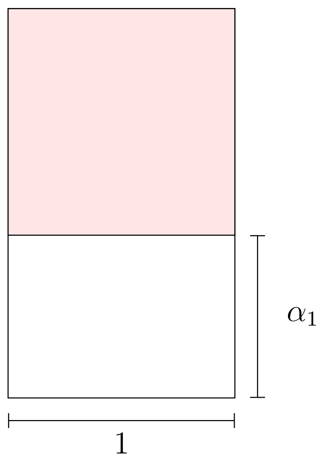


Figura 2.7: Quadrado de lado 1 e retângulo $1 \times \alpha_1$

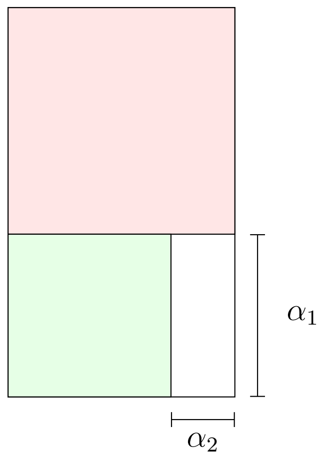


Figura 2.8: Quadrado de lado α_1 e retângulo $\alpha_2 \times \alpha_1$

Passo 4: Desenha-se a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo que sobrou no Passo 3 (retângulo de cor branca). Neste caso, desenha-se dois quadrados de lado α_2 na base do retângulo $\alpha_2 \times \alpha_1$, como mostrado da Figura 2.9, obtendo-se agora dois quadrados de lados α_2 e um retângulo $\alpha_2 \times \alpha_3$. Assim, tem-se $a_2 = 2$.

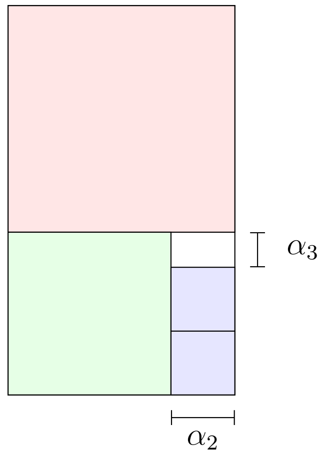


Figura 2.9: Quadrados de lado α_2 e retângulo $\alpha_2 \times \alpha_3$

Passo 5: Desenha-se a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo que sobrou no Passo 4 (retângulo de cor branca). Neste caso, desenha-se um quadrado de lado α_3 no extremo esquerdo do retângulo $\alpha_2 \times \alpha_3$, como mostrado da Figura 2.10, obtendo-se agora um quadrados de lados α_3 e um retângulo $\alpha_4 \times \alpha_3$.

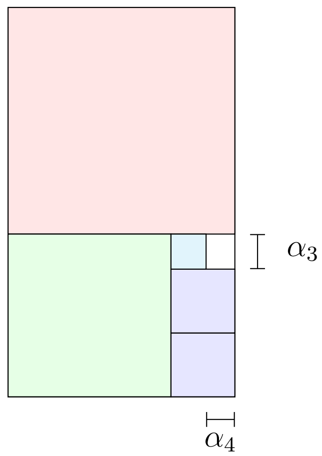


Figura 2.10: Quadrado de lado α_3 e retângulo $\alpha_4 \times \alpha_3$

Este processo continua infinitamente. Assim, por mais pequeno que seja o retângulo sempre será possível construir outros quadrados dentro dele, como pode-se ver na Figura 2.12, aplicando-se um zoom.

A representação gráfica da fração contínua do número $e - 1$ é dada pela Figura 2.11.

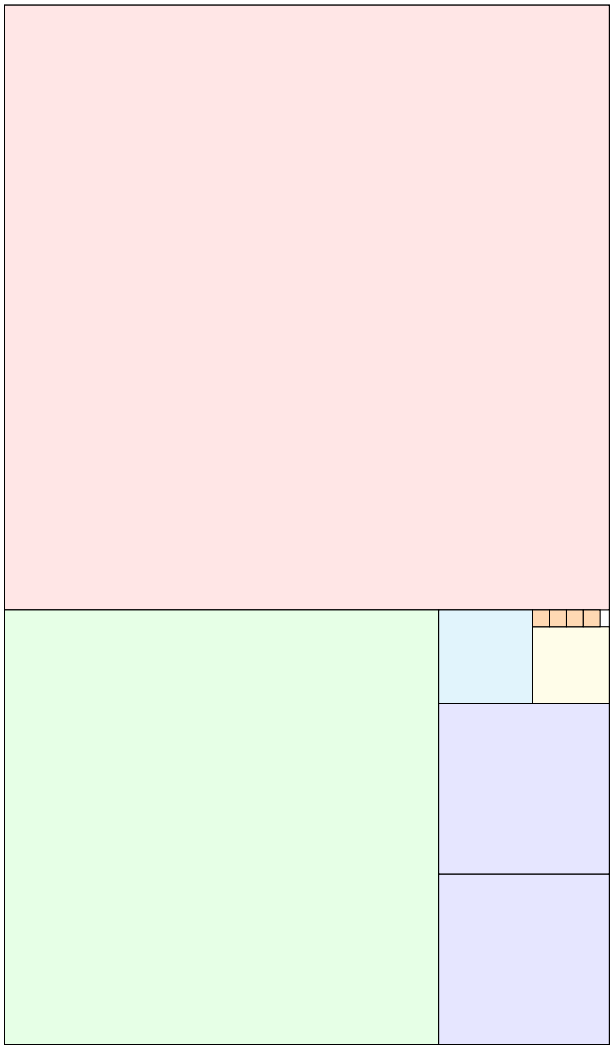


Figura 2.11: Representação geométrica da fração contínua $[1; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots]$

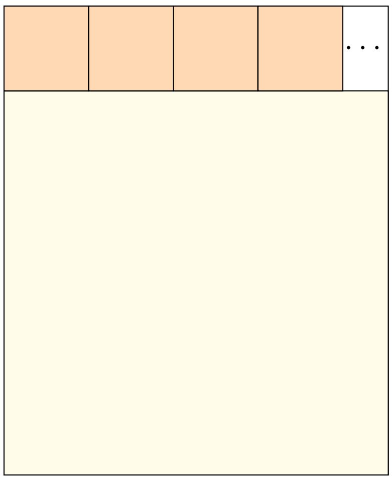


Figura 2.12: Zoom da Figura 2.11

Definição 2.12. Sejam x um número real e $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ a sequência dos quocientes parciais de x. Sejam $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ e $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ duas sequências de números inteiros, tais que $(p_n(x), q_n(x)) = 1$, $q_n(x) > 0$ e

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = [a_0(x); a_1(x), \ldots, a_n(x)],$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A fração $\dfrac{p_n(x)}{q_n(x)}$ é chamada de n-ésima *reduzida* da fração contínua de x.

A sequência $\left(\dfrac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ é chamada de *sequência de reduzidas da fração contínua de x.*

A seguir, enuncia-se um Teorema que garante que todo número irracional pode se expressar como uma fração contínua, cuja demonstração pode ser vista em (Moreira et all, 2012).

Teorema 2.13. *Seja x um número irracional. A sequência de reduzidas da fração contínua de x e $\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ é convergente e*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = x.$$

Em virtude do Teorema 2.13, tem-se que

$$x = \lim_{n\to\infty} [a_0(x); a_1(x), \ldots, a_n(x)],$$

o qual denota-se por

$$x = [a_0(x); a_1(x), a_2(x), \ldots].$$

Como observado por (Moreira et all, 2012, pág. 155) a representação dos números reais por fração contínua torna o reconhecimento de um racional mais simples do que na representação decimal. De fato, ver uma fração contínua já pode-se afirmar se o número é racional ou irracional, basta observar se a fração contínua é finita ou não. Mas isso não é possível com a os números decimais, por exemplo, o número $0,14285714285714\ldots$ é racional? e o número $0,058823529411764705\ldots$? A resposta é sim, os dois números são respectivamente, $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{17}$.

Capítulo 3

Frações contínuas na matriz curricular da educação básica

Neste capítulo, apresentar-se-á uma proposta da inserção de *frações contínuas* na Matriz Curricular de Matemática para o Ensino Médio, abordando algumas razões que justificam a introdução do referido tema, nas séries que integram essa modalidade de ensino.

Os tópicos relacionados ao ensino da educação básica, em especial no Ensino Médio, podem ser vistos no *Plano de Desenvolvimento da Educação/Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica* (PDE/Saeb). Tais tópicos, na disciplina de matemática, estão agrupados em quatro grandes áreas de conhecimento (Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações/Álgebra e Funções e Tratamento da Informação). Em cada uma destas é descrita o que se espera do aluno em avaliações, tais tópicos são chamados de *descritores*, identificados com a letra D.

Na Tabela 3.1, apresenta-se as grandes áreas de conhecimento e, a quantidade de descritores presentes por área. Tais descritores são detalhados em (Brasil, 2008, págs. 77 à 80), aonde observa-se que nenhum dos descritores faz menção sobre o conteúdo de *fração contínua*. No Tema III: Números e Operações/Álgebra e Funções destaca-se o descritor: D14 (Identificar a localização de números reais na reta numérica). Dessa forma como pode ser visto,

Tema	**Grande área de conhecimento**	**Descritores**
I	Espaço e Forma	D1 ao D10
II	Grandezas e Medidas	D11 ao D13
III	Números e Operações/Álgebra e Funções	D14 ao D33
IV	Tratamento da Informação	D34 e D35

Tabela 3.1: Distribuição dos descritores nas grandes áreas de ensino.

> *(...) é possível alargar e aprofundar o conhecimento dos alunos sobre números e operações, mas não isoladamente dos outros conceitos, isto é, pode-se tratar os números decimais e fracionários, mas mantendo de perto a relação estreita com problemas que envolvem medições, cálculos aproximados, porcentagens, assim como os números irracionais devem se ligar ao trabalho com geometria e medidas. É ainda importante para o aluno, nessa etapa de sua formação, o desenvolvimento da capacidade de estimativa da ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e da capacidade de tratar com valores numéricos exatos ou aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível* (Brasil, 2002, pág. 119).

Segundo os *Parâmetros Curriculares Nacionais Complementares do Ensino Médio* (PCN+), nas competências de matemática, foram elegidas três competências como metas a serem alcançadas pela educação básica. Como ver-se em (Brasil, 2002, pág. 113), as competências são: representação e comunicação, investigação e compreensão, e contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural. Para isso, o próprio PCN+ articulou três temas estruturados para que possam alcançar as competências, tais temas foram articulados da seguinte forma: 1) Álgebra: números e funções, 2) Geometria e Medidas e 3) Análise de dados. Em particular, o Tema 1, é subdividido em duas unidades temáticas: a) Variação de Grandezas, e b)Trigonometria. Dessas duas unidades destaca-se a unidade de Variação de Grandezas. No tema de Variação de Grandezas, encontram-se os seguintes tópicos: *noção de função e sequências numéricas*: *progressões e noção de infinito*;

> *VARIAÇÃO DE GRANDEZAS: noção de função; funções analíticas e não-analíticas; representação e análise gráfica; sequências numéricas: progressões e noção de infinito; variações exponenciais ou logarítmicas; funções seno, cosseno e tangente; taxa de variação de grandezas* (Brasil, 2002, pág. 122).

Fazendo uma análise, percebe-se que o PCN+ menciona a noção de infinito. Dentro desta, encontram-se os números reais, os quais são ensinados através de expressões decimais. Visto que o descritor em destaque e a unidade temática 1, no conteúdo de expressões decimais e aproximação de valores aproximados nos números irracionais podem ser vistos com uso de diversas técnicas, o uso das frações contínuas é um dos métodos que consideramos mais apropriado, pois a maioria das ferramentas necessárias para se estudar as frações contínuas já é base da matriz curricular dos alunos.

3.1 Descritor para frações contínuas: D14a

Como visto anteriormente, uma boa ferramenta para se abordar os números irracionais seria adequar as frações contínuas no Ensino Médio. Esse conteúdo deveria estar entre os números reais. Para isso, deve-se buscar uma linguagem de aplicação, quanto na busca de aproximações dos números irracionais; podendo-se trabalhar até alguns exemplos como as frações contínuas e a geometria, entre outras.

O objetivo deste trabalho é a inserção das frações contínuas na avaliação anual do PDE/Saeb. Apresenta-se uma proposta para um novo descritor: "D14a" entre os descritores D14 e D15, dentro do Tema III: Números e Operações/Álgebra e Funções:

D14a	Identificar um número racional ou irracional através das frações contínuas.

Assim, sugere-se a inserção deste conteúdo para estudantes do ensino básico, acarretando em uma reformulação nos livros didáticos atuais, incluindo tal tema entre o segundo e terceiro ano do Ensino Médio. Dessa forma, as frações contínuas podem ser vistas com um complemento didático, em que o aluno teria a oportunidade de aplicar ferramentas matemáticas que está habituado.

3.2 Base nacional comum curricular

A *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC), é um dos mais novos documentos educacionais que tem por finalidade melhorar a Educação Básica e além de tudo padronizar a base do currículo brasileiro. A BNCC possui dez competências gerais que o aluno deve adquirir nas três etapas de ensino (Ensino Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Para buscar que os alunos adquiram tais competências, a BNCC norteia que as práticas pedagógicas devem estar posicionadas para o desenvolvimento das competências. Aonde os alunos devem "saber" e, sobretudo, do que devem "saber fazer". A explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.

Para enfatizar a estrutura da BNCC do Ensino Médio, ela prevê as seguintes áreas de conhecimento:

- Linguagens e suas tecnologias;
- Matemática e suas tecnologias;
- Ciências da Natureza e suas tecnologias;
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

A BNCC, quando se trata do Ensino Médio, propõe para cada área do conhecimento deste, competências específicas, que por sua vez são articuladas às respectivas competências das áreas de conhecimento do Ensino Fundamental, modificando-a para o atendimento das especificidades de formação dos estudantes do Ensino Médio.

Para cada uma das competências específicas, são descritas *habilidades* a serem desenvolvidas, além de habilidades específicas de matemática que é um componente obrigatório durante os três anos do Ensino Médio como determinado pela LDB, Art. 35-A, § 3º. Cabe ressaltar que todas as habilidades da BNCC foram definidas tomando como referência o limite de 1.800 horas do total da carga horária da etapa como previsto pela LDB, Art. 35-A, § 5º.

Uma das maiores vantagens da BNCC é a possibilidade de flexionar os conteúdos de acordo com as necessidades, como pode ser visto em

> *[...] matemática e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino;* (Brasil, 2018, pág. 477)

Baseado nesse trecho da BNCC, pode-se adequar novos conceitos para o Ensino Médio. Desta forma, as frações contínuas enquadra como um aplicação de conhecimentos diferenciados e, que por sua vez, se enquadra na oferta do sistema de ensino. A seguir, apresentar-se as competências específicas de matemática, para verificar em quais habilidades as frações contínuas podem se encaixar.

As competências especificas para disciplina de matemática voltadas para o Ensino Médio são;

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas

sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

As frações contínuas na Competência 3 exercem um grande papel, pois utiliza de diversas formas para interpretar, construir conceitos e ainda modelar novos tipos de soluções de problemas. Por ser um conteúdo que não está na grade curricular, permite ainda aos estudantes construir uma linguagem matemática sólida e consistente. Tal papel é plausível para o Ensino Médio, pois é uma forma de verificar as habilidades construídas durante a sua vida escolar.

A habilidade que pode-se enquadrar as frações contínuas é (EM13MAT315) presente na Competência 3:

> (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

O processo de conversão de um número em fração contínua permite, por meio das divisões sucessivas, um algoritmo que auxilia esse processo, ou seja, trabalha-se a habilidade (EM13MAT315).

Capítulo 4

Representação dos números reais como frações contínuas: uma proposta para o ensino médio

Neste capítulo, serão apresentadas a proposta metodológica, as atividades trabalhadas com os alunos e, por fim, mostra-se os resultados obtidos. Algumas dessas atividades se baseiam nos exercícios propostos por (Olds, 1963), os quais foram modificados, pelo orientador do trabalho, facilitando a compreensão dos alunos e do professor na aplicação dessas atividades.

4.1 Metodologia

Nesta seção, apresenta-se os procedimentos metodológicos que foram utilizados no desenvolvimento desse trabalho.

Foi realizado um levantamento bibliográfico a partir de livros, artigos científicos, páginas de web sites, estudos teóricos, listas de exercícios e dos principais documentos apresentados pelo governo.

Para o desenvolvimento do trabalho, foi planejada uma sequência de atividades, utilizando a metodologia de resolução de problemas, com o intuito de que o aluno pratique o tema proposto.

Inicialmente, foi trabalhado a contextualização das divisões sucessivas e o algoritmo de Euclides. Já era esperada a dificuldade nas divisões de números inteiros, o trabalho com as frações contínuas dos números racionais visou recuperar essa deficiência na aprendizagem dos alunos. Posteriormente, usou-se a conversão de uma fração contínua em um número racional, envolvendo os conceitos básicos de operações em números racionais.

As atividades foram aplicadas aos alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Jaraguá, situada na Rua Principal s/n, assentamento Jaraguá, Água Boa-MT, nos meses de março, abril e maio de 2019.

4.2 Atividades desenvolvidas

Nesta seção, serão descritas as atividades, baseadas na metodologia resolução de problemas[1], com os alunos do 3º ano do Ensino Médio no 1º semestre do ano de 2019, na Escola Estadual Jaraguá.

Atividade 1. Use o algoritmo de Euclides para encontrar o máximo divisor comum dos números 2019 e 1492[2], aplicando o método da chave para encontrar os quocientes e restos parciais das divisões sucessivas. Apresente o algoritmo de Euclides

---

Objetivo: Utilizar o método das chaves para divisão de números inteiros para auxiliar no desenvolvimento do algoritmo de Euclides.

Solução:

Passo 1: Aplicar o método da chave para achar o quociente e o resto da divisão dos inteiros 2019 e 1492.

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,1\,9 & 1\,4\,9\,2 \\ \cline{2-2} 5\,2\,7 & 1 \end{array}$$

Logo, o quociente da divisão de 2019 e 1492 é 1 e o resto é 527. Assim, a divisão euclidiana entre os números 2019 e 1492 é dada por

$$2019 = 1492 \cdot 1 + 527.$$

Passo 2: Aplicar o método da chave para achar o quociente e o resto da divisão dos inteiros 1492 e 527.

$$\begin{array}{r|l} 1\,4\,9\,2 & 5\,2\,7 \\ \cline{2-2} 4\,3\,8 & 2 \end{array}$$

Logo, o quociente da divisão de 1492 e 527 é 2 e o resto é 438. Assim, a divisão euclidiana entre os números 1492 e 527 é dada por

$$1492 = 527 \cdot 2 + 438.$$

[1] Para mais detalhes sobre metodologia de resolução de problemas ver em Polya (1995).

[2] Como uma consequência de um erro de rota, o genovês Cristóvão Colombo descobriu a América em 12 de outubro de 1492. Assim, a fim de ter uma interdisciplinaridade, escolhe-se o número 1492, por uma razão histórica. Para mais detalhes ver em Salmoral (1992).

Passo 3: Aplicar o método da chave para achar o quociente e o resto da divisão dos inteiros 527 e 438.

$$\begin{array}{r|l} 5\ 2\ 7 & 4\ 3\ 8 \\ \cline{2-2} 8\ 9 & 1 \end{array}$$

Logo, o quociente da divisão de 527 e 438 é 1 e o resto é 89. Assim, a divisão euclidiana entre os números 527 e 438 é dada por

$$527 = 438 \cdot 1 + 89.$$

Passo 4: Aplicar o método da chave para achar o quociente e o resto da divisão dos inteiros 438 e 89.

$$\begin{array}{r|l} 4\ 3\ 8 & 8\ 9 \\ \cline{2-2} 8\ 2 & 4 \end{array}$$

Logo, o quociente da divisão de 438 e 89 é 4 e o resto é 82. Assim, a divisão euclidiana entre os números 438 e 89 é dada por

$$438 = 89 \cdot 4 + 82.$$

Passo 5: Aplicar o método da chave para achar o quociente e o resto da divisão dos inteiros 89 e 82.

$$\begin{array}{r|l} 8\ 9 & 8\ 2 \\ \cline{2-2} 7 & 1 \end{array}$$

Logo, o quociente da divisão de 89 e 82 é 1 e o resto é 7. Assim, a divisão euclidiana entre os números 89 e 82 é dada por

$$89 = 82 \cdot 1 + 7.$$

Passo 6: Aplicar o método da chave para achar o quociente e o resto da divisão dos inteiros 82 e 7.

$$\begin{array}{r|l} 8\ 2 & 7 \\ \cline{2-2} 1\ 2 & 1\ 1 \\ 5 & \end{array}$$

Logo, o quociente da divisão de 82 e 7 é 11 e o resto é 5. Assim, a divisão euclidiana entre os números 82 e 7 é dada por

$$82 = 7 \cdot 11 + 5.$$

Passo 7: Aplicar o método da chave para achar o quociente e o resto da divisão dos inteiros 7 e 5.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$$

Logo, o quociente da divisão de 7 e 5 é 1 e o resto é 2. Assim, a divisão euclidiana entre os números 7 e 5 é dada por

$$7 = 5 \cdot 1 + 2.$$

Passo 8: Aplicar o método da chave para achar o quociente e o resto da divisão dos inteiros 5 e 2.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array}$$

Logo, o quociente da divisão de 5 e 2 é 2 e o resto é 1. Assim, a divisão euclidiana entre os números 5 e 2 é dada por

$$5 = 2 \cdot 2 + 1.$$

Passo 9: Aplicar o método da chave para achar o quociente e o resto da divisão dos inteiros 2 e 1.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

Logo, o quociente da divisão de 2 e 1 é 2 e o resto é 0. Assim, a divisão euclidiana entre os números 2 e 1 é dada por

$$2 = 1 \cdot 2.$$

Conclusão: A expansão do algoritmo de Euclides é dado na forma

$$\begin{aligned} 2019 &= 1492 \cdot 1 + 527, \\ 1492 &= 527 \cdot 2 + 438, \\ 527 &= 438 \cdot 1 + 89, \\ 438 &= 89 \cdot 4 + 82, \\ 89 &= 82 \cdot 1 + 7, \\ 82 &= 7 \cdot 11 + 5, \\ 7 &= 5 \cdot 1 + 2, \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1, \\ 2 &= 1 \cdot 2. \end{aligned}$$

Portanto, o máximo divisor comum entre os números 2019 e 1492 é 1, o qual é o último resto não nulo das divisões sucessivas.

Atividade 2. Use o algoritmo de Euclides para encontrar o máximo divisor comum dos números 2015 e 1517.

Objetivo: Aplicar a divisão euclidiana para encontrar os quocientes e restos parciais no desenvolvimento do algoritmo de Euclides.
Solução:
Passo 1: Realizar a divisão euclidiana dos números 2015 e 1517 para obter o quociente e o resto.

$$2015 = 1517 \cdot 1 + 498.$$

Passo 2: Realizar a divisão euclidiana dos números 1517 e 498 para obter o quociente e o resto.

$$1517 = 498 \cdot 3 + 23.$$

Passo 3: Realizar a divisão euclidiana dos números 498 e 23 para obter o quociente e o resto.

$$498 = 23 \cdot 21 + 15.$$

Passo 4: Realizar a divisão euclidiana dos números 23 e 15 para obter o quociente e o resto.

$$23 = 15 \cdot 1 + 8.$$

Passo 5: Realizar a divisão euclidiana dos números 15 e 8 para obter o quociente e o resto.

$$15 = 8 \cdot 1 + 7.$$

Passo 6: Realizar a divisão euclidiana dos números 8 e 7 para obter o quociente e o resto.

$$8 = 7 \cdot 1 + 1.$$

Passo 7: Realizar a divisão euclidiana dos números 7 e 1 para obter o quociente e o resto.

$$7 = 1 \cdot 7.$$

Portanto, o máximo divisor comum entre os números 2015 e 1517 é 1, o qual é o último resto não nulo das divisões sucessivas.

Atividade 3. Use o algoritmo de Euclides para encontrar o máximo divisor comum dos seguintes números:

a) 1449 e 1380;   b) 3800 e 2299;   c) 7455 e 3528.

Objetivo: Aplicar algoritmo de Euclides para encontrar os quocientes parciais, restos parciais e o máximo divisor comum de dois números.
Solução:

a) Aplicando a divisão euclidiana nos números 1449 e 1380, tem-se

$$1449 = 1380 \cdot 1 + 69.$$

Em seguida, divide-se 1380 por 69, obtendo-se

$$1380 = 69 \cdot 20.$$

Portanto, o máximo divisor comum entre os números 1449 e 1380 é 69.

b) Utilizando a divisão euclidiana nos inteiros 3800 e 2299, obtêm-se o quociente 1 e o resto 1501. Em seguida, dividimos 2299 por 1501, obtendo o quociente 1 e resto 798. Depois, dividimos 1501 pelo resto da segunda divisão 798, observando que o quociente é 1 e o resto é 703. Novamente, aplica-se a divisão de 798 pelo resto anterior 703, chegando agora no quociente 1 e resto 95. Assim, sucessivamente, até a obtenção do resto zero, como a seguir:

$$\begin{aligned}
3800 &= 2299 \cdot 1 + 1501,\\
2299 &= 1501 \cdot 1 + 798,\\
1501 &= 798 \cdot 1 + 703,\\
798 &= 703 \cdot 1 + 95,\\
703 &= 95 \cdot 7 + 38,\\
95 &= 38 \cdot 2 + 19,\\
38 &= 19 \cdot 2.
\end{aligned}$$

Portanto, o máximo divisor comum entre os números 3800 e 2299 é 19.

c) Utilizando-se as divisões sucessivas entre os inteiros os inteiros 7455 e 3528, obtêm-se o algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned}
7455 &= 3528 \cdot 2 + 399,\\
3528 &= 399 \cdot 8 + 336,\\
399 &= 336 \cdot 1 + 63,\\
336 &= 63 \cdot 5 + 21,\\
63 &= 21 \cdot 3.
\end{aligned}$$

Portanto, o máximo divisor comum entre os números 7455 e 3528 é igual a 21.

Atividade 4. Uma *fração contínua infinita* é uma expressão da forma,

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}, \tag{4.1}$$

onde a_0 é um inteiro e os números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são inteiros positivos, ou seja, a diferença dos números a_0 e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é que o primeiro pode ser nulo ou negativo.

Uma *fração contínua finita* tem apenas um número finito de termos, com a forma

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}. \tag{4.2}$$

Os termos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ são chamados de *quocientes parciais*. Para simplificar as expressões (4.1) e (4.2), diz-se simplesmente *fração contínua*.
Expresse os seguintes símbolos como uma fração contínua.

a) $[1; 2, 3, 4, 5, 6, 7]$; b) $[-2; 3, 2]$; c) $[2; 1, 1, 2, 1, 1, 4, \ldots]$.

Objetivo: Transcrever a notação de uma fração contínua visando a compreensão do seus quocientes parciais.
Solução:

a) **Passo 1:** Identificar os quocientes parciais do símbolo $[1; 2, 3, 4, 5, 6, 7]$. Neste caso, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$, $a_5 = 6$ e $a_6 = 7$.

Passo 2: Identificar se o símbolo representa uma fração contínua finita ou infinita. Como a quantidade de quocientes parciais é finito, então a fração contínua é finita.

Passo 3: Colocar na forma de fração contínua (finita).

$$[1; 2, 3, 4, 5, 6, 7] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7}}}}}}.$$

b) **Passo 1:** Identificar os quocientes parciais do símbolo $[-2; 3, 2]$. Neste caso, $a_0 = -2$, $a_1 = 3$ e $a_2 = 2$.

Passo 2: Identificar se o símbolo representa uma fração contínua finita ou infinita. Como quantidade de quocientes parciais é finito, então a fração contínua é finita.

Passo 3: Colocar na forma de fração contínua (finita).

$$[-2; 3, 2] = -2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}.$$

c) **Passo 1:** Identificar os quocientes parciais do símbolo $[2; 1, 1, 2, 1, 1, 4, \ldots]$. Neste caso, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$, $a_5 = 1$, $a_6 = 4$, $\ldots$.

Passo 2: Identificar se o símbolo representa uma fração contínua finita ou infinita. Como a quantidade de quocientes parciais é infinito, então a fração contínua é infinita.

Passo 3: Colocar na forma de fração contínua (infinita).

$$[2; 1, 1, 2, 1, 1, 4, \ldots] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}}.$$

Atividade 5. Encontre o valor de x que satifaz as seguintes frações contínuas:

a) $x = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}$;

b) $x = [0; 2, 1, 4, 2]$.

Objetivo: Converter uma fração contínua finita em um número racional.

Solução:

a) Observe que

$$x = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}} = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{6}{5}}} = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{5}{6}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{29}{6}} = 3 + \frac{6}{29} = \frac{93}{29}.$$

Portanto, o valor de x é $\dfrac{93}{29}$.

b) Inicialmente, observe-se que

$$x = [0; 2, 1, 4, 2] = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Assim,

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{9}{2}}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{9}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{9}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{11}} = \cfrac{1}{\cfrac{31}{11}} = \frac{11}{31}.$$

Portanto, o valor de x é $\dfrac{11}{31}$.

Atividade 6. Encontre $\frac{p}{q}$, se $\frac{p}{q} = [3; 7, 15, 2]$. Converta $\frac{p}{q}$ em um número decimal e compare com o valor de π ($\pi = 3,141592653589\ldots$).

Objetivo: Aplicar as frações contínuas finitas como aproximação de números irracionais.
Solução: Inicialmente, observe-se que

$$[3; 7, 15, 2] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Assim,

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{2}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\cfrac{31}{2}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{2}{31}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{219}{31}} = 3 + \frac{31}{219} = \frac{688}{219}.$$

Portanto, $\frac{p}{q} = \frac{688}{219}$. O número decimal que representa a fração contínua é $\frac{688}{219} = 3,\overline{14155251}$; que é um valor que aproxima-se do número π, onde as primeiras quatro casas decimais coincidem.

Atividade 7. Seja x um número real, considere os seguintes casos:

1. Se x é um número inteiro, então a representação em fração contínua de x denota-se por $[x]$. Assim, $[x] = x$.

2. Se x é um número racional, então a representação em fração contínua de x é da forma
$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

3. Se x é um número irracional, então a representação em fração contínua de x é da forma
$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

   Em alguns casos, obtêm-se o desenvolvimento $[a_0; a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k, b_1, \ldots, b_k, \ldots]$. Essa representação é de um número *irracional periódico* e, escreve-se, como
$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{b_1, \ldots, b_k}].$$

Verifique se cada um dos números abaixo é inteiro, racional ou irracional, justificando convenientemente sua resposta.

a) $[7]$;

b) $[1; 4, 2, 1]$;

c) $[2; 7, 8, 7, 8, 2]$;

d) $[1, \overline{1}]$;

e) $[2; 1, \overline{3, 4}]$;

f) $[0; \overline{7, 4, 5, 8}]$;

g) $[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$;

h) $[4; \overline{8, 6}]$.

Objetivo: Identificar via as frações contínuas se os números são: inteiros, racionais ou irracionais.

Solução:

a) O número é inteiro, pois [7]=7.

b) O número é racional, pois os quocientes parciais são finitos ($a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 1$).

c) O número é racional, pois os quocientes parciais são finitos ($a_0 = 2$, $a_1 = 7$, $a_2 = 8$, $a_3 = 7$, $a_4 = 8$ e $a_5 = 2$).

d) O número é irracional, pois os quocientes parciais são infinitos e periódicos ($a_0 = 1$ e $b_1 = 1$).

e) O número é irracional, pois os quocientes parciais são infinitos e periódicos ($a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $b_1 = 3$ e $b_2 = 4$).

f) O número é irracional, pois os quocientes parciais são infinitos e periódicos ($a_0 = 0$, $b_1 = 7$, $b_2 = 4$,$b_3 = 5$ e $b_4 = 8$).

g) O número é irracional, pois os quocientes parciais são infinitos ($a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$,...).

h) O número é irracional, pois os quocientes parciais são infinitos e periódicos ($a_0 = 4$, $b_1 = 8$, $b_2 = 6$).

Atividade 8. O processo de conversão de um número em fração contínua se chama *desenvolvimento* deste número em fração contínua.

A seguir apresenta-se uma maneira de obter-se os quocientes parciais de uma fração $\frac{a}{b}$. Sejam a e b inteiros coprimos com $b > 1$.

Suponha que o algoritmo de Euclides, aplicado aos inteiros a e b, seja dado por

$$
\begin{array}{rcll}
a & = & b \cdot q_0 + r_1, & \text{com } 0 \leq r_1 < b, \\
b & = & r_1 \cdot q_1 + r_2, & \text{com } 0 \leq r_2 < r_1, \\
r_1 & = & r_2 \cdot q_2 + r_3, & \text{com } 0 \leq r_3 < r_2, \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
r_{n-2} & = & r_{n-1}q_{n-1} + r_n, & \text{com } 0 \leq r_n < r_{n-1}. \\
r_{n-1} & = & r_n q_n. &
\end{array} \tag{4.3}
$$

Da primeira igualdade de (4.3), obtêm-se

$$
\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}. \tag{4.4}
$$

Porém, da segunda igualdade de (4.3), deduz-se

$$
\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}. \tag{4.5}
$$

Do mesmo modo, da terceira igualdade de (4.3), tem-se

$$
\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}, \tag{4.6}
$$

Logo, de (4.4), (4.5) e (4.6), conclui-se

$$
\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}.
$$

Fazendo esse processo indutivamente até o fim, chega-se a igualdade

$$
\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}.
$$

Converta o número $\frac{37}{27}$ em fração contínua.

Objetivo: Aprender a utilizar o algoritmo de Euclides para o desenvolvimento de um número racional em fração contínua.

Solução:

Passo 1: Aplicar o algoritmo de Euclides nos inteiros 37 e 27. Deste modo, a expansão do algoritmo de Euclides é dada por

$$\begin{aligned} 37 &= 27 \cdot \underline{1} + 10, \\ 27 &= 10 \cdot \underline{2} + 7, \\ 10 &= 7 \cdot \underline{1} + 3, \\ 7 &= 3 \cdot \underline{2} + 1, \\ 3 &= 1 \cdot \underline{3}. \end{aligned}$$

Passo 2: Identificar os quocientes parciais da expansão do algoritmo de Euclides. Neste caso, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ e $a_4 = 3$, ou seja, $[1; 2, 1, 2, 3]$.

Passo 3: Representar o número $\dfrac{37}{27}$ como uma fração contínua.

$$\frac{37}{27} = [1; 2, 1, 2, 3] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}.$$

Atividade 9. Converta cada número em uma fração contínua.

a) $\dfrac{17}{11}$;

b) $\dfrac{51}{33}$;

c) $\dfrac{233}{177}$;

d) $\dfrac{355}{106}$;

e) $3,54$;

f) $0,23$;

g) $3,14159$.

Objetivo: Aprender a utilizar o algoritmo de Euclides para encontrar a fração contínua de um número racional.

Solução:

a) Aplicando o algoritmo de Euclides nos números 17 e 11, tem-se

$$\begin{aligned} 17 &= 11 \cdot \underline{1} + 6 \\ 11 &= 6 \cdot \underline{1} + 5 \\ 6 &= 5 \cdot \underline{1} + 1 \\ 5 &= 1 \cdot \underline{5}. \end{aligned}$$

Logo, os quocientes parciais do número $\frac{17}{11}$ são $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_3 = 5$.

Deste modo, a fração contínua do número $\frac{17}{11}$ é dado por

$$[1; 1, 1, 5] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}.$$

b) Observe que $\frac{51}{33} = \frac{17}{11}$. Logo, pelo item (a), a representação da fração contínua de $\frac{51}{33}$ é dada por

$$[1; 1, 1, 5] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}.$$

c) Aplicando o algoritmo de Euclides nos números 233 e 177, tem-se

$$\begin{aligned} 233 &= 177 \cdot \underline{1} + 56, \\ 177 &= 56 \cdot \underline{3} + 9, \\ 56 &= 9 \cdot \underline{6} + 2, \\ 9 &= 2 \cdot \underline{4} + 1, \\ 2 &= 1 \cdot \underline{2}. \end{aligned}$$

Logo, os quocientes parciais do número $\frac{233}{177}$ são $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 4$ e $a_4 = 2$.

Deste modo, a fração contínua do número $\frac{233}{177}$ é dada por

$$[1; 3, 6, 4, 2] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

d) Aplicando o algoritmo de Euclides nos números 355 e 106, tem-se

$$\begin{aligned} 355 &= 106 \cdot \underline{3} + 37, \\ 106 &= 37 \cdot \underline{2} + 32, \\ 37 &= 32 \cdot \underline{1} + 5, \\ 32 &= 5 \cdot \underline{6} + 2, \\ 5 &= 2 \cdot \underline{2} + 1, \\ 2 &= 1 \cdot \underline{2}. \end{aligned}$$

Logo, os quocientes parciais do número $\frac{355}{106}$ são $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 6$, $a_4 = 2$ e $a_5 = 2$.

Deste modo, a fração contínua do número $\frac{355}{106}$ é dada por

$$[3; 2, 1, 6, 2, 2] = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

e) Escrevendo o número decimal $3,54$ na forma de fração, obtêm-se: $3,54 = \frac{354}{100}$. Aplicando o algoritmo de Euclides nos números 354 e 100, tem-se

$$\begin{aligned} 354 &= 100 \cdot \underline{3} + 54, \\ 100 &= 54 \cdot \underline{1} + 46, \\ 54 &= 46 \cdot \underline{1} + 8, \\ 46 &= 8 \cdot \underline{5} + 6, \\ 8 &= 6 \cdot \underline{1} + 2, \\ 6 &= 2 \cdot \underline{3}. \end{aligned}$$

Logo, os quocientes parciais do número $3,54$ são $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 5$, $a_4 = 1$ e $a_5 = 3$.

Deste modo, a fração contínua do número $3,54$ é dada por

$$[3; 1, 1, 5, 1, 3] = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}.$$

f) Escrevendo o número decimal $0,23$ na forma de fração, obtêm-se: $0,23 = \frac{23}{100}$. Aplicando o algoritmo de Euclides nos números 23 e 100, tem-se

$$\begin{aligned} 23 &= 100 \cdot \underline{0} + 23, \\ 100 &= 23 \cdot \underline{4} + 8, \\ 23 &= 8 \cdot \underline{2} + 7, \\ 8 &= 7 \cdot \underline{1} + 1, \\ 7 &= 1 \cdot \underline{7}. \end{aligned}$$

Logo, os quocientes parciais do número $0,23$ são $a_0 = 0$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ e $a_4 = 7$.

Deste modo, a fração contínua do número $0,23$ é dada por

$$[0; 4, 2, 1, 7] = 0 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}}}.$$

g) Escrevendo o número decimal $3,14159$ na forma de fração, obtêm-se: $3,14159 = \frac{314159}{100000}$. Aplicando o algoritmo de Euclides nos números 314159 e 100000, tem-se

$$\begin{aligned} 314159 &= 100000 \cdot \underline{3} + 14159, \\ 100000 &= 14159 \cdot \underline{7} + 887, \\ 14159 &= 887 \cdot \underline{15} + 854, \\ 887 &= 854 \cdot \underline{1} + 33, \\ 854 &= 33 \cdot \underline{25} + 29, \\ 33 &= 29 \cdot \underline{1} + 4, \\ 29 &= 4 \cdot \underline{7} + 1, \\ 4 &= 1 \cdot \underline{4}. \end{aligned}$$

Logo, os quocientes parciais do número $3,14159$ são $a_0 = 3$, $a_1 = 7$, $a_2 = 15$, $a_3 = 1$, $a_4 = 25$, $a_5 = 1$, $a_6 = 7$ e $a_7 = 4$.

Deste modo, a fração contínua do número $3,14159$ é dada por

$$[3;7,15,1,25,1,7,4] = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}}}}.$$

Atividade 10. Faça o que se pede:

a) Dadas as frações contínuas, encontre os números racionais os quais eles representam.

1. $[2;1,4,2]$
2. $[2;1,4,3]$
3. $[2;1,4,4]$
4. $[2,1,4,5]$

b) Determine as frações contínuas dos seguintes números.

1. $\dfrac{47}{18}$
2. $\dfrac{18}{47}$.

c) Verifique que $[2;1,4,n] = \dfrac{14n+3}{5n+1}$, para todo número inteiro positivo n.

Objetivo: Analisar padrões em problemas que envolvam as frações contínuas finitas.

Solução:

a) 1. $$[2;1,4,2] = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{9}{2}}} = 2+\cfrac{1}{1+\frac{2}{9}} = 2+\cfrac{1}{\frac{11}{9}} = 2+\frac{9}{11} = \frac{31}{11}.$$

2. $$[2;1,4,4] = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{17}{4}}} = 2+\cfrac{1}{1+\frac{4}{17}} = 2+\cfrac{1}{\frac{21}{17}} = 2+\frac{17}{21} = \frac{59}{21}.$$

3. $$[2;1,4,3] = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{13}{3}}} = 2+\cfrac{1}{1+\frac{3}{13}} = 2+\cfrac{1}{\frac{16}{13}} = 2+\frac{13}{16} = \frac{45}{16}.$$

4. $$[2;1,4,5] = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{21}{5}}} = 2+\cfrac{1}{1+\frac{5}{21}} = 2+\cfrac{1}{\frac{26}{21}} = 2+\frac{21}{26} = \frac{73}{26}.$$

b) 1. Aplicando o algoritmo de Euclides nos números 18 e 47, tem-se

$$\begin{aligned} 47 &= 18 \cdot \underline{2} + 11, \\ 18 &= 11 \cdot \underline{1} + 7, \\ 11 &= 7 \cdot \underline{1} + 4, \\ 7 &= 4 \cdot \underline{1} + 3, \\ 4 &= 3 \cdot \underline{1} + 1, \\ 3 &= 1 \cdot \underline{3}. \end{aligned}$$

Logo, os quocientes parciais do número $\frac{47}{18}$ são $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$ e $a_5 = 3$.
Deste modo, a fração contínua do número $\frac{47}{18}$ é dada por e

$$[2; 1, 1, 1, 1, 3] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}.$$

2. Aplicando o algoritmo de Euclides nos números 18 e 47, tem-se

$$18 = 47 \cdot 0 + 18.$$

Em seguida, divide-se 47 por 18. Porém, isto já foi realizado. Logo, o algoritmo de Euclides entre os inteiros 18 e 47 é dado por

$$\begin{aligned} 18 &= 47 \cdot \underline{0} + 18, \\ 47 &= 18 \cdot \underline{2} + 11, \\ 18 &= 11 \cdot \underline{1} + 7, \\ 11 &= 7 \cdot \underline{1} + 4, \\ 7 &= 4 \cdot \underline{1} + 3, \\ 4 &= 3 \cdot \underline{1} + 1, \\ 3 &= 1 \cdot \underline{3}. \end{aligned}$$

Logo, os quocientes parciais do número $\frac{18}{47}$ são $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $a_5 = 1$ e $a_6 = 1$.

Deste modo, a fração contínua do número $\frac{47}{18}$ é dada por e

$$\frac{18}{47} = [0; 2, 1, 1, 1, 1, 3] = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}}.$$

c) Dado um número inteiro positivo n, tem-se

$$[2; 1, 4, n] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{n}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{4n+1}{n}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{n}{4n+1}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{4n+1+n}{4n+1}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{5n+1}{4n+1}} = 2 + \frac{4n+1}{5n+1} = \frac{10n + 2 + 4n + 3}{5n+1} = \frac{14n+3}{5n+1}.$$

Atividade 11. Pode-se representar as frações contínuas de um número α através de quadrados justapostos que não se sobrepõem dois a dois dentro de um retângulo.

A seguir apresenta-se uma representação geométrica das frações contínuas[3].

Para facilitar a notação, adota-se o retângulo com base igual à 1 e altura α. O retângulo da forma $1 \times \alpha$ fornece a representação geométrica da fração contínua $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ ou $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ do número α.

Dado um número real positivo α diferente de 1, tem-se que: $0 < \alpha < 1$ ou $\alpha \geq 1$.
Caso 1: $0 < \alpha < 1$.

- O termo a_0 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos dentro do retângulo $1 \times \alpha$ com lado 1. Como não é possível fazer isto, tem-se $a_0 = 0$.

- O termo a_1 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos dentro do retângulo $1 \times \alpha$ com lado α. Se o retângulo $1 \times \alpha$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos este, obtendo o termo a_2. O termo a_2 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos, dentro do retângulo $\alpha_1 \times \alpha$ com lado α_1, onde α_1 é a medida do segmento que sobrou ao ser retirado todos os segmentos de comprimento α do segmento de comprimento 1, no estágio anterior. Se o retângulo $\alpha_1 \times \alpha$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

[3]Este texto foi extraído do Capítulo 2, Subseção 2.2.1.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos este mais uma vez, obtendo o termo a_3. O termo a_3 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos, dentro do retângulo $\alpha_1 \times \alpha_2$ com lado α_2, onde α_2 é a medida do segmento que sobrou ao ser retirado todos os segmentos de comprimento α_1 do segmento de comprimento α, no estágio anterior. Se o retângulo $\alpha_1 \times \alpha_2$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos novamente este, obtendo o termo a_4 e, assim, sucessivamente até preencher totalmente o retângulo $1 \times \alpha$ por uma quantidade finita de quadrados ou continuar infinitamente este processo.

Caso 2: $\alpha \geq 1$.

- O termo a_0 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos dentro do retângulo $1 \times \alpha$ com lado 1. Neste caso, $a_0 > 0$. Se o retângulo $1 \times \alpha$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos este, obtendo o termo a_1. O termo a_1 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos, dentro do retângulo $1 \times \alpha_1$ com lado α_1, onde α_1 é a medida do segmento que sobrou ao ser retirado todos os segmentos de comprimento 1 do segmento de comprimento α, no estágio anterior. Se o retângulo $1 \times \alpha_1$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos este mais uma vez, obtendo o termo a_2. O termo a_2 é a quantidade de quadrados que podem ser preenchidos, dentro do retângulo $\alpha_2 \times \alpha_1$ com o lado α_2, onde α_2 é a medida do segmento que sobrou ao ser retirado todos os segmentos de comprimento α_1 do segmento de comprimento 1, no estágio anterior. Se o retângulo $\alpha_2 \times \alpha_1$ for totalmente preenchido, o processo acaba.

- Se o processo anterior não acabou, repetimos novamente este, obtendo o termo a_3 e, assim, sucessivamente até preencher totalmente o retângulo $1 \times \alpha$ por uma quantidade finita de quadrados ou continuar infinitamente este processo.

Em resumo, a quantidade de quocientes parciais é igual a quantidade de quadrados com tamanhos distintos. Se a figura der continuidade infinitamente, isto é, a quantidade de quadrados for infinita, então a representação geométrica será a de um número irracional.

Por exemplo, a Figura 4.1, representa a fração contínua $[a_0; a_1, a_2, a_3]$ do número α, onde

- $a_0 = 0$, pois $0 < \alpha < 1$.

- $a_1 = 2$, pois a quantidade de quadrados com lado α é 2.

- $a_2 = 3$, pois a quantidade de quadrados com lado α_1 é 3.

- $a_3 = 4$, pois a quantidade de quadrados com lado α_2 é 4.

Desta forma, o número α é dado por:

$$[0; 2, 3, 4] = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{13}{30}.$$

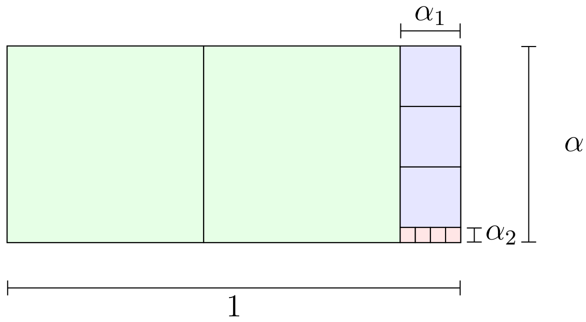


Figura 4.1: Representação geométrica da fração contínua do número $\alpha = \frac{13}{30}$, que corresponde ao Caso 1

De forma análoga, a Figura 4.2 representa a fração contínua $[a_0; a_1, a_2, a_3]$ do número α, onde

- $a_0 = 1$, pois a quantidade de quadrados com lado 1 é 1.

- $a_1 = 2$, pois a quantidade de quadrados com lado α_1 é 2.

- $a_2 = 3$, pois a quantidade de quadrados com lado α_2 é 3.

- $a_3 = 4$, pois a quantidade de quadrados com lado α_3 é 4.

Desta forma, o número α é dado por:

$$[1; 2, 3, 4] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{30}{13}.$$

A Figura 4.3 é um exemplo de representação de um número irracional.

A Figura 4.4 é um retângulo da forma $1 \times \alpha$, o qual representa a fração contínua do número α. Assim, todos os quadriláteros hachurados da mesma cor são quadrados

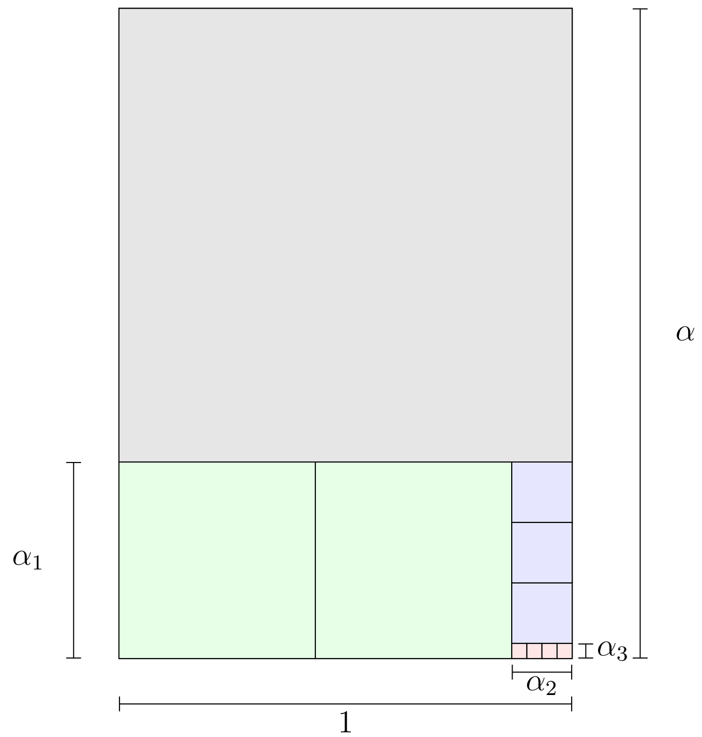


Figura 4.2: Representação geométrica da fração contínua do número $\alpha = \frac{30}{13}$, que corresponde ao Caso 2

com o mesmo lado. Qual é a representação por frações contínuas do número α? Qual é a fração irredutível de α?

Objetivo: Identificar figuras geométricas para encontrar o desenvolvimento em fração contínua de um número racional, que represente o desenho.

Solução:

Passo 1: Identificar o termo a_0. Como a base do retângulo é $1 > \alpha$, não é possível obter um quadrado com lado 1, então o quociente parcial a_0 é 0.

Passo 2: Reconhecer quantos termos existem observando o desenho. Como o primeiro termo é zero e a figura possui três quadrados de tamanhos distintos, a representação em fração contínua é do tipo $[0; a_1, a_2, a_3]$.

Passo 3: Identificar os termos a_1, a_2, a_3.

- Os dois quadrados verdes de lado α estão dispostos de forma mais "gulosa" possível. Logo, o termo a_1 é 2.

- Os três quadrados azuis estão dispostos de forma mais "gulosa" possível (os quais tem tamanho menor que os de a cor verde). Logo, o termo a_2 é 3.

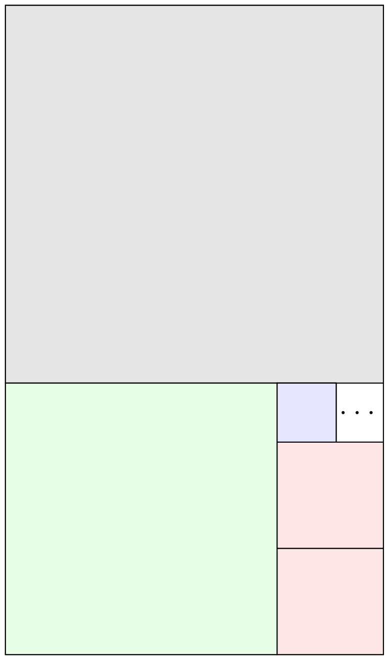


Figura 4.3: Representação gráfica de um número irracional $e - 1 = [1; 1, 2, 1, 1, 4, \ldots]$

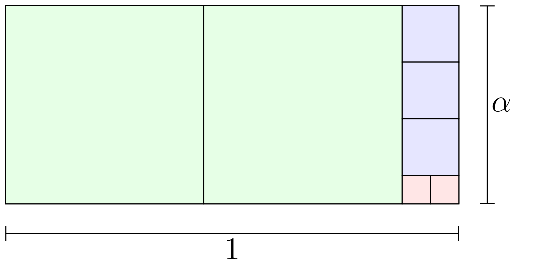


Figura 4.4: Representação geométrica do número α como frações contínuas

- Finalmente, os dois quadrados vermelhos estão dispostos de forma mais "gulosa" possível (os quais tem tamanho menor que os de a cor azul). Logo, o termo a_3 é 2.

Passo 4: Escrever a fração contínua. A representação por frações contínuas de α é dada por $[0; 2, 3, 2]$ ou, equivalentemente,

$$[0; 2, 3, 2] = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Passo 5: Converter a fração contínua em um número racional. Pelas propriedades de adição e divisão dos números racionais, segue que

$$[0;2,3,2] = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{2}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{7}} = \cfrac{1}{\cfrac{16}{7}} = \frac{7}{16}.$$

Portanto, $\alpha = \frac{7}{16}$.

Atividade 12. Dado o número racional $\dfrac{10}{7}$, represente-o geometricamente como na Atividade 11. Em seguida, compare com a fração contínua obtida algebricamente.

Objetivo: Ilustrar uma fração contínua com uma interpretação gráfica.

Solução:

Passo 1: Representar graficamente a fração contínua do número $\frac{10}{7}$.

Passo 1.1: Desenhar o retângulo com a base 1 e altura $\alpha = \frac{10}{7}$. Assim, desenha-se o retângulo $1 \times \frac{10}{7}$, como na Figura 4.5.

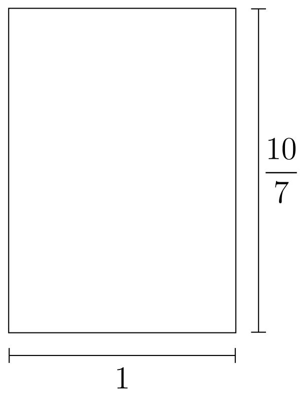


Figura 4.5: Retângulo $1 \times \frac{10}{7}$

Passo 1.2: Desenhar a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo $1\times\frac{10}{7}$, com lado 1. Neste caso, pode-se desenhar apenas um quadrado de lado 1, o qual fixa-se na parte superior do retângulo como na Figura 4.6. Assim, tem-se $a_0 = 1$.

Passo 1.3: Desenhar a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo que sobrou no Passo 1.2 (retângulo de cor branca). Neste caso, desenha-se dois quadrados de lado $\frac{3}{7}$ no extremo esquerdo do retângulo $1\times\frac{3}{7}$, como mostrado da Figura 4.7, obtendo-se agora dois quadrados de lados $\frac{3}{7}$ e um retângulo $\frac{3}{7} \times \frac{1}{7}$. Assim, tem-se que $a_1 = 2$.

Passo 1.4: Desenhar a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo que sobrou no Passo 1.3 (retângulo de cor branca). Neste caso, desenha-se três quadrados

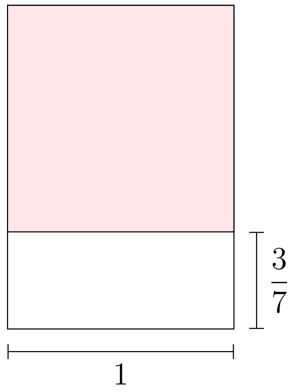


Figura 4.6: Quadrado de lado 1 e retângulo $1 \times \frac{3}{7}$

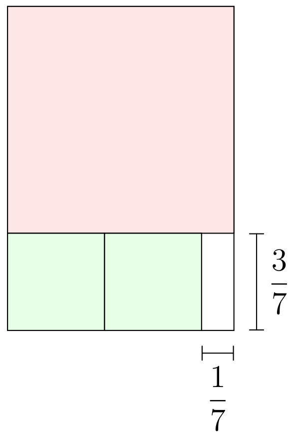


Figura 4.7: Quadrado de lado $\frac{3}{7}$ e retângulo $1 \times \frac{1}{7}$

de lado $\frac{1}{7}$ na base do retângulo $\frac{1}{7} \times \frac{3}{7}$, como mostrado da Figura 4.8, obtendo-se agora dois quadrados de lados $\frac{3}{7}$ e um retângulo $\frac{3}{7} \times \frac{1}{7}$. Assim, tem-se $a_2 = 3$.

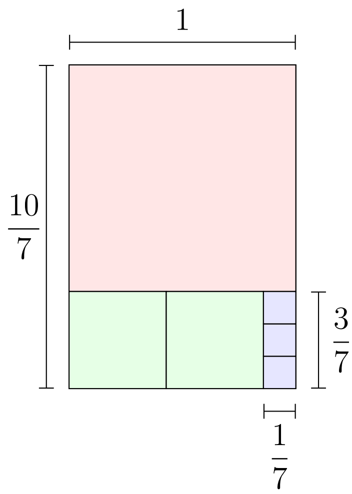


Figura 4.8: Quadrado de lado $\frac{1}{7}$ e retângulo $\frac{3}{7} \times \frac{1}{7}$

Passo 1.5: Representar o desenho da fração contínua. A representação gráfica da fração contínua $[1; 2, 3]$ é dada pela Figura 4.9. Veja que a fração contínua $\frac{10}{7} = [1; 2, 3]$ os números 1, 2 e 3 são exatamente a quantidade de quadrados que conseguimos formar com os lados 1, $\frac{3}{7}$ e $\frac{1}{7}$, respectivamente.

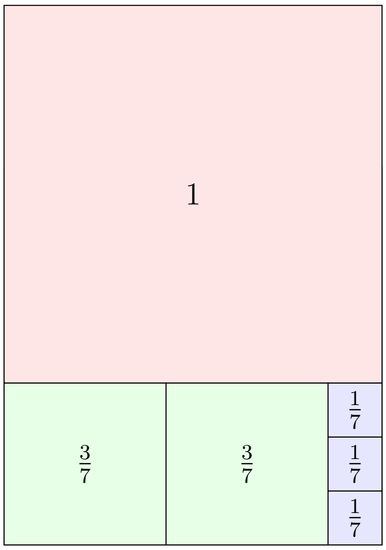


Figura 4.9: Representação geométrica da fração contínua $[1; 2, 3]$

Passo 2: Escrever algebricamente a fração contínua do número $\frac{10}{7}$. Após divisões sucessivas, obtêm-se

$$\frac{10}{7} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = [1; 2, 3].$$

Conclusão: A representação geométrica do número $\frac{10}{7}$ coincide com a representação algébrica.

Atividade 13. Dado o número racional $\dfrac{7}{16}$ escreva-o como uma fração contínua e represente-o geometricamente como na Atividade 11.

Objetivo: Ilustrar uma fração contínua com uma interpretação gráfica.

Solução:

Passo 1: Desenhar o retângulo com a base 1 e altura α. Neste caso, $\alpha = \frac{7}{16}$, assim, desenha-se o quadrado $1 \times \frac{7}{16}$, como na Figura 4.10.

Passo 2: Desenhar a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo $1 \times \frac{7}{16}$ com lado 1. Como a base do retângulo é $1 > \alpha$, não é possível obter um quadrado com tal tamanho (em relação ao nosso retângulo), então $a_0 = 0$.

Figura 4.10: Retângulo $1 \times \frac{7}{16}$

Passo 3: Desenhar a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo $1 \times \frac{7}{16}$ com tamanho $\dfrac{7}{16}$. Neste caso, desenha-se dois quadrados de lado $\dfrac{7}{16}$, fixando na parte esquerda do retângulo como na Figura 4.11, obtendo agora dois quadrados de lados $\dfrac{7}{16}$ e um retângulo $\frac{2}{16} \times \frac{7}{16}$. Assim, tem-se $a_1 = 2$.

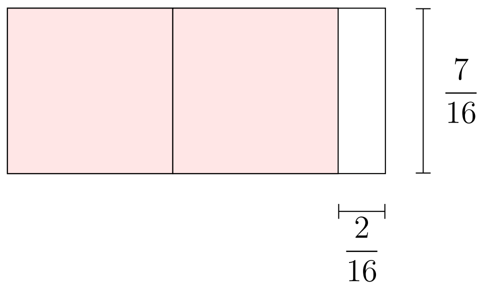


Figura 4.11: Quadrado de lado $\frac{7}{16}$ e retângulo $\frac{2}{16} \times \frac{7}{16}$

Passo 4: Desenhar a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo $\frac{2}{16} \times \frac{7}{16}$ com tamanho $\frac{2}{16}$. Neste caso, desenha-se três quadrados de lado $\frac{2}{16}$ na base do retângulo $\frac{2}{16} \times \frac{7}{16}$, como mostrado da Figura 4.12, obtendo agora três quadrados de lados $\frac{2}{16}$ e um retângulo $\frac{2}{16} \times \frac{1}{16}$. Assim, tem-se que $a_2 = 3$.

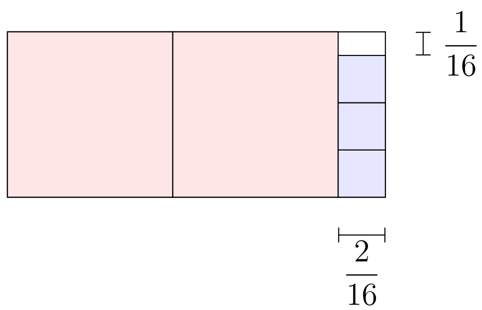


Figura 4.12: Quadrado de lado $\frac{2}{16}$ e retângulo $\frac{2}{16} \times \frac{1}{16}$

Passo 5: Desenhar a maior quantidade de quadrados possíveis no retângulo $\frac{2}{16} \times \frac{1}{16}$ com tamanho $\frac{1}{16}$. Neste caso, desenha-se dois quadrados de lado $\frac{1}{16}$ no retângulo $\frac{2}{16} \times \frac{1}{16}$ como mostrado da Figura 4.13, obtendo agora dois quadrados de lados $\frac{1}{16}$. Assim, tem-se $a_3 = 2$.

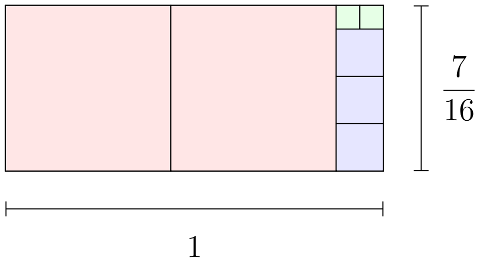


Figura 4.13: Quadrado de lado $\frac{7}{16}$ e retângulo $\frac{2}{16} \times \frac{7}{16}$

Passo 6: Representar o desenho da fração contínua. A representação gráfica da fração contínua $[0; 2, 3, 2]$ é dada pela Figura 4.14.

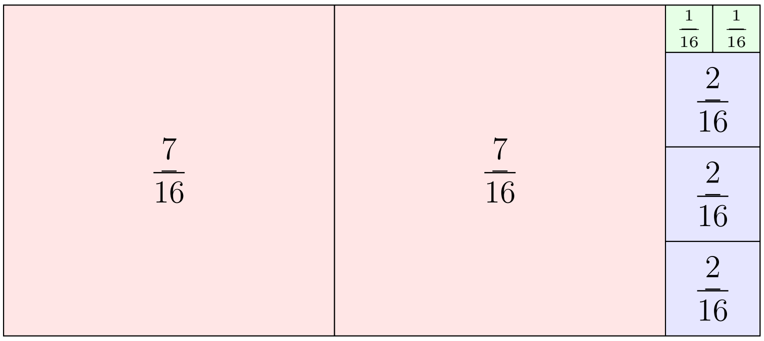


Figura 4.14: Representação gráfica da fração contínua $[0; 2, 3, 2]$

Atividade 14. Ao solicitar aos alunos que apresentassem o gráfico da fração contínua do número $\dfrac{7}{16}$ (Atividade 13), em uma folha quadriculada fornecida pelo professor, um dos alunos apresentou o resultado mostrado na Figura 4.15. Ao observar o desenho feito por esse aluno, percebeu-se que de fato o desenho representava uma fração contínua, porém, não era a solicitada na Atividade 13. Assim, foi feita a reprodução do desenho com as mesmas escalas utilizadas por esse aluno com a seguinte pergunta. Qual é o número racional que representa essa fração contínua? [4]

Objetivo: Avaliar o conhecimento adquirido sobre o tema, utilizando uma possível dúvida dos alunos.

Solução:

Passo 1: Identificar o termo a_0. Como a base do retângulo é $1 > \alpha$, não é possível obter um quadrado com tal tamanho (em relação ao nosso retângulo), então o quociente parcial a_0 é 0.

Passo 2: Reconhecer quantos termos existem observando o desenho. Como o primeiro termo é zero e a figura possui dois quadrados de tamanhos distintos, a representação em fração contínua é do tipo $[0; a_1, a_2]$.

[4]A Atividade 14, surgiu dentro da sala de aula ao se realizar a Atividade 13, no dia 29 de maio de 2019. Pode-se ver a figura esperada como resposta na Figura 4.14.

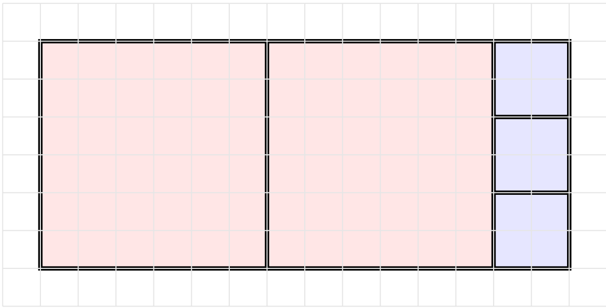


Figura 4.15: Reprodução do desenho feito pelo aluno mencionado (a folha original extraviou-se)

Passo 3: Identificar os termos a_1, a_2. Os dois quadrados vermelhos estão dispostos de forma mais "gulosa" possível. Logo, o termo a_1 é 2. Os três quadrados azuis estão dispostos de forma mais "gulosa" possível. Logo, o termo a_2 é 3.
Passo 4: Escrever a fração contínua. A representação por frações contínuas de α é dada por $[0; 2, 3]$ ou, equivalentemente,

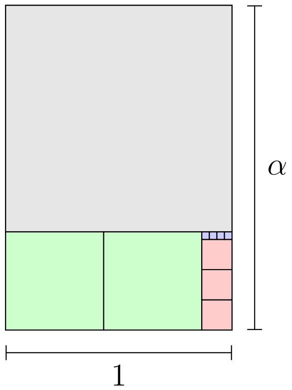
$$[0;2,3] = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}.$$

Passo 5: Converter a fração contínua em um número racional. Pelas propriedades de adição e divisão dos números racionais, segue que

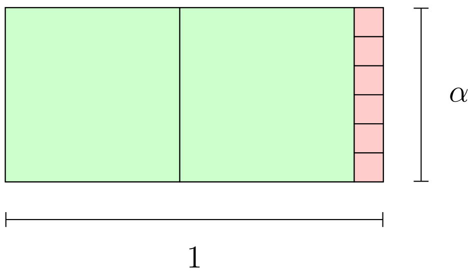
$$[0;2,3] = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}} = \frac{3}{7}.$$

Portanto, $\alpha = \frac{3}{7}$.
Conclusão: O que torna interessante essa atividade é que os alunos desenvolveram uma técnica, que o número associado a fração contínua pode ser obtido fazendo a contagem dos quadradinhos, ou seja, algumas respostas foram $\frac{6}{14}$.

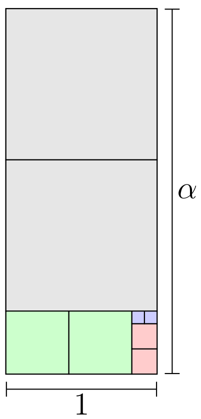
Atividade 15. Nas figuras seguintes, todos os quadriláteros hachurados da mesma cor são quadrados com o mesmo lado, onde a quantidade de quadrados de cada cor representa o quociente parcial da fração contínua de um número α. Em cada retângulo $1 \times \alpha$, qual é a representação por frações contínuas do número α? Qual é a fração irredutível de α?



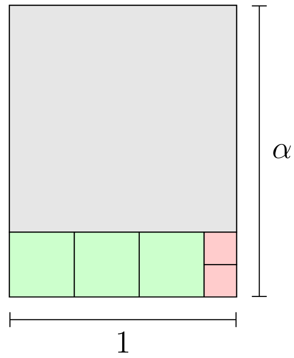
a)



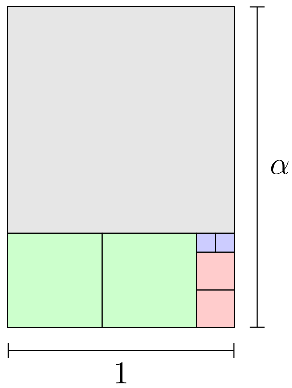
b)



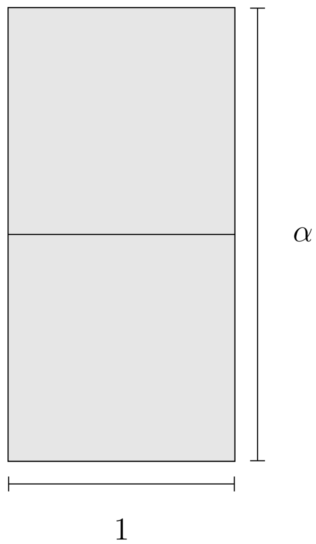
c)



d)



e)



f)

Objetivo: Praticar as figuras geométricas para a descoberta do número racional que represente o desenho.

Solução:

a) **Passo 1:** Encontrar a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ do número α. Veja que $\alpha \geq 1$, assim, este item corresponde ao Caso 2. Desta forma, observando o número de quadrados da mesma cor, tem-se que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ e $a_3 = 4$.

Passo 2: Escrever a fração contínua associada a figura. Deste modo,

$$[1;2,3,4] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}.$$

Passo 3: Converter a fração contínua em uma fração irredutível.

$$[1;2,3,4] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30}.$$

b) **Passo 1:** Encontrar a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ do número α. Veja que $0 < \alpha < 1$, assim, este item corresponde ao Caso 1. Desta forma, observando o número de quadrados da mesma cor, tem-se que $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$.

Passo 2: Escrever a fração contínua associada a figura. Deste modo,

$$[0;2,6] = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}}.$$

Passo 3: Converter a fração contínua em uma fração irredutível.

$$[0;2,6] = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}} = \frac{6}{13}.$$

c) **Passo 1:** Encontrar a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ do número α. Veja que $\alpha \geq 1$, assim, este item corresponde ao Caso 2. Desta forma, observando o número de quadrados da mesma cor, tem-se que $a_0 = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 2$.

Passo 2: Escrever a fração contínua associada a figura. Deste modo,

$$[2;2,2,2] = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Passo 3: Converter a fração contínua em uma fração irredutível.

$$[2;2,2,2] = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 2 + \cfrac{1}{\frac{12}{5}} = 2 + \frac{5}{12} = \frac{29}{12}.$$

d) **Passo 1:** Encontrar a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ do número α. Veja que $\alpha \geq 1$, assim, este item corresponde ao Caso 2. Desta forma, observando o número de quadrados da mesma cor, tem-se que $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ e $a_2 = 2$.

Passo 2: Escrever a fração contínua associada a figura. Deste modo,

$$[1; 3, 2] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}.$$

Passo 3: Converter a fração contínua em uma fração irredutível.

$$[1; 3, 2] = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{2}} = 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7}.$$

e) **Passo 1:** Encontrar a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ do número α. Veja que $\alpha \geq 1$, assim, este item corresponde ao Caso 2. Desta forma, observando o número de quadrados da mesma cor, tem-se que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 2$.

Encontrar a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ do número α. Observe que $\alpha > 1$, então $a_0 = 1$, desta forma, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 2$.

Passo 2: Escrever a fração contínua associada a figura. Deste modo,

$$[1; 2, 2, 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Passo 3: Converter a fração contínua em uma fração irredutível.

$$[1; 2, 2, 2] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{12}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}.$$

f) **Passo 1:** Encontrar a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ do número α. Veja que $\alpha > 1$, assim, este item corresponde ao Caso 2. Desta forma, observando o número de quadrados da mesma cor, tem-se apenas o termo $a_0 = 2$.

Passo 2: Escrever a fração contínua associada a figura. Neste caso, a figura representa o número inteiro

$$[2] = 2.$$

4.2.1 Relatório da atividades desenvolvidas

A aplicação das atividades propostas trata-se de um experimento por abordar como tema as *frações contínuas*, que não estão na atual base comum curricular. Para isso, foi solicitado a gestão escolar a prévia autorização, garantindo que não haveria prejuízo nas aulas. Todas as atividades foram feitas em horário de aula, pois não era possível fazer em um contra-turno, devido ao transporte escolar e a maioria dos alunos residirem em propriedades rurais afastadas. Deste modo, optou-se por aulas mensais, a fim de não prejudicar as aulas do componente curricular.

A primeira aula foi aplicada no dia 20 de março de 2019. A aula foi ministrada com o objetivo de conseguir esboçar o algoritmo de Euclides, utilizar o método da chaves para encontrar as divisões sucessivas e conhecer as frações contínuas. Para isso foram aplicadas as atividades 1, 2, 3 e 4. O desenvolvimento das atividades 1, 2 e 3 foram consideradas extensas; assim, seria interessante, numa próxima realização das mesmas, procurar exemplos mais simples.

Na primeira aula foi relembrado aos alunos como calcular as divisões utilizando o método das chaves. Nessa aula, percebeu-se a dificuldade dos alunos quanto a divisão, no qual metade desses não sabiam utilizar o método das chaves; descreveram que sempre que podiam faziam o uso das calculadoras. A divisão entre números inteiros é algo que os alunos não estavam habituados, pois sempre tendiam a encontrar os números decimais. O objetivo principal dessa aula, foi alcançado com sucesso, pois ao final os alunos já adquiriram a habilidade de utilizar o algoritmo de Euclides, para esboçar as divisões sucessivas. A aula foi finalizada com a explicação de qual era o próximo objetivo, dando uma breve ideia do que era esperado com a divisão sucessiva nas frações contínuas. Nesse momento, a turma queria que a aula tivesse continuidade, mostrando interesse sobre o tema das frações contínuas.

A segunda aula foi aplicada no dia 30 de abril de 2019 com intuito de propiciar que todos os alunos encontrassem frações contínuas de números racionais e vice-e-versa. Para alcançar o objetivo foi realizada uma revisão sobre o algoritmo de Euclides e, posteriormente, iniciada a construção das frações contínuas. Para tal, foram aplicadas as atividades 5, 6 e 7, determinando que os alunos resolvessem operações entre frações para encontrar os números racionais. Neste momento, os alunos apresentaram dificuldade, previamente esperada, porém, de forma progressiva, ao final da última atividade, começaram a desenvolver os cálculos com perceptível facilidade. Posteriormente, aplicaram o desenvolvimento de um número racional para uma fração contínua, por meio do algoritmo de Euclides, em que foi trabalhada as atividades 8, 9 e 10. Para a obtenção dos quocientes e restos parciais, sugeriu-se aos alunos realizar o método das chaves em folhas de rascunho. Nessa última parte, não se percebeu dificuldades com o conteúdo. Os alunos gostaram do tema, ao ponto de ir voluntariamente ao quadro para aplicarem a sua própria solução, como pode ser visto na Figura 4.16.

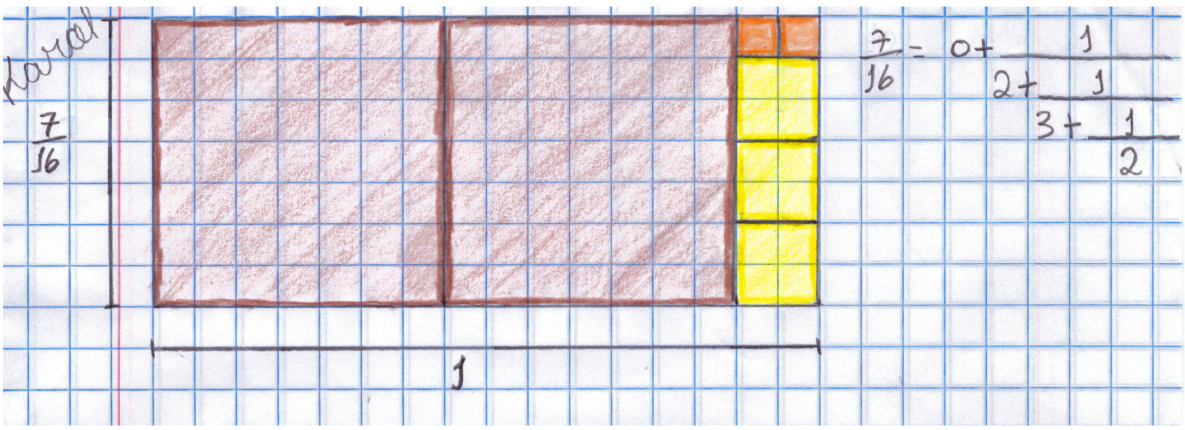
Figura 4.16: Aluno resolvendo problemas proposto em sala de aula

A terceira e última aula foi realizada no dia 29 de maio de 2019. A figura 4.17 é uma foto tirada durante essa aula.

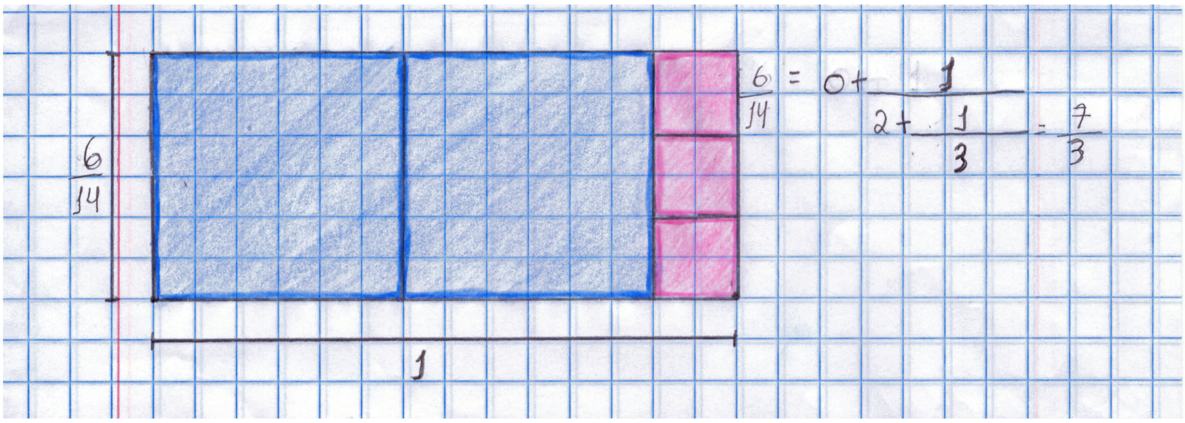
O objetivo principal foi a compreensão da representação gráfica das frações contínuas. Para a aula foram utilizados os seguintes materiais: folha quadriculada, régua, lápis de cor e folhas de rascunho. Para alcançar tais objetivos, trabalhou-se as atividades 11, 12, 13, 14 e 15. A aplicação limitou-se ao uso de folhas quadriculadas, somente; contudo, poderiam ser utilizados softwares, como por exemplo, o Geogebra. Esse último não foi apresentado aos alunos, devido a falta de um laboratório de informática na escola. As folhas quadriculadas tornou mais interessante a aula, pois os alunos no final dos exercícios adquiriram habilidade para escolha da escala, um ganho que é fundamental em outras disciplinas como a Geografia. A limitação da folha quadriculada, não foi excedida, pois

Figura 4.17: Aluno do 3º ano da Escola Estadual Jaraguá

o objetivo era ser claro e direto como deve ser ensinada a matemática para alunos do ensino básico. Uma dificuldade encontrada para se trabalhar as aulas foi a falta de materiais pedagógicos, para constar, realizou-as com duas réguas (uma delas sendo do meu uso pessoal), um conjunto de lápis de cor (de um aluno) e, as folhas quadriculadas foram levadas de Barra do Garças e cedidas pelo professor, devido a dificuldade em encontrar esses materiais no assentamento. A Figura 4.18, é uma imagem escaneada das atividades 13 e 14, cedidas pela aluna Karol, no dia 29 de maio de 2019.



(a) Atividade 13



(b) Atividade 14

Figura 4.18: Atividades feitas pela aluna Karol em folha quadriculada

Por fim, as atividades foram aplicadas com sucesso durante três etapas. Todos os objetivos foram alcançados, os alunos gostaram do tema, percebeu-se que a relutância inicial por parte de alguns discentes acabou após o método das chaves. Observou-se, também, que existia uma certa preguiça para fazer o uso do método das chaves por parte de alguns alunos, quando introduziu o divisão euclidiana e o algoritmo de Euclides, os alunos que não sabiam fazer o uso do método das chaves, aprenderam, mostrando que a dificuldade pode ser batida com algo novo. Outra operação que mostrou-se ganho no conhecimento desses alunos foi a de fazer operações com números racionais. As frações contínuas, mesmo não estando no currículo, auxilia ao alunos melhorar, aprender e a aplicar diversas ferramentas matemáticas.

Considerações finais

Os números reais são apresentados inicialmente no ensino fundamental pelas expressões decimais, a partir daí, torna-se a única maneira de representar esse conjunto numérico. Neste trabalho, foi proposto a inserção de um outro método para abordagem desse conteúdo no ensino básico, via as frações contínuas. Ao fazer uma breve leitura sobre os conceitos explorados pela teoria das frações contínuas percebeu-se o quanto os alunos do ensino básico ganhariam ao estudá-las.

O tema proposto foi aplicado na Escola Estadual Jaraguá, localizada na zona rural do município de Água Boa-MT. Os alunos da referida escola, sempre sofreram com a falta de professores de matemática. A defasagem no ensino desses alunos é geral, pois enfrentam diversos problemas, dentre eles, a distância para chegarem a escola, a falta de professores qualificados, e a precariedade no ensino do campo.

Várias escolas brasileiras se enquadram na mesma realidade supracitada. Então, qual seria uma forma de amenizar as deficiências dos alunos, quanto ao aprendizado, principalmente em matemática? Aqui, não encontra-se resposta à esse questionamento, todavia, acredita-se que cabem aos educadores tentar amortizar todos esses problemas criando novas formas de agregar conhecimento aos alunos, com algo desafiador, inovador e interessante.

Espera-se que a presente pesquisa venha contribuir com professores do ensino médio, para poder ensinar formas alternativas de apresentação dos números reais.

Ao leitor interessado, sugere-se pesquisar a forma de calcular a soma de dois números racionais, utilizando apenas os quocientes parciais das divisões sucessivas dos seus numeradores e denominadores, respectivos.

Referências

Brasil (2002), Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: MEC. Disponível em: <`http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf`>. Acesso em: 19 de dezembro de 2018

Brasil (2008), Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação (Ensino Médio)? matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília. Disponível em: < `http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/prova%20brasil_matriz2.pdf` >. Acesso em: 19 de dezembro de 2018.

Brasil (2013), Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília. Disponível em: < `http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file`>. Acesso em: 19 de dezembro de 2018.

Brasil (2018), Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Brasília: MEC/Secretaria de Educação. Disponível em: < `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf`>. Acesso em: 20 de maio de 2019

Cheng, Y. T. (2007) *Continued Fractions*. A Thesis presented in partial fulfillment of criteria for honors in mathematics. Cornell University Mathematics Department Senior Thesis. Ithaca- New York.

Eves, H. (2004) *Introdução à história da matemática*. 4 ed. Campinas: Unicamp.

Kalapodi, A. (2010) *The decimal representation of real numbers*. Internation Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology, Vol. 41, No. 7, p.889-900

Lima, E. L. (2014). *Números e Funções Reais*. 1 ed., 2ª impressão. Rio de Janeiro: Coleção Profmat, SBM.

Lorenzo, J. D. e Jorge, D. R. (2007) *Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas*, 26º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.

Moreira, G. T. A., Martínez, F. E. B., Saldanha, N. C. (2012). *Tópicos de Teoria dos Números*. 1 ed. Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2012.

Olds, C. D. (1963). *Continued Fractions- New Mathematical Library* Random House. Nova York.

Polya, G (1995). *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Tradução e adptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2 reimpre. Rio de Janeiro: interciência.

Salmoral, M. L. (1992) *Historia general de España y América*, 2ª ed., Rialp. ISBN 9788432121029.

Vorobiov, N.N. (1974). *Numeros de Fibonacci.* Tradução de Carlos Vega. Editora MIR, URSS.