Universidade Federal de Mato Grosso
Campus Universitário do Araguaia
Instituto de Ciências Exatas e da Terra

Resolução de problemas olímpicos sobre funções exponencial e logarítmica

Elienai Resende Nunes Rodrigues

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos**

Barra do Garças - MT

12 de julho de 2019

Resolução de problemas olímpicos sobre funções exponencial e logarítmica

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Elienai Resende Nunes Rodrigues e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 12 de julho de 2019.

Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos
Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

R696r Rodrigues, Elienai Resende Nunes.
Resolução de problemas olímpicos sobre funções exponencial e logarítmica / Elienai Resende Nunes Rodrigues. -- 2019
xii, 108 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Juan Elmer Villanueva Zevallos.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Ensino de matemática. 2. Olimpíadas de matemática. 3. Funções exponenciais e logarítmicas. 4. Resolução de problemas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - 78.060900 - Cuiabá/MT
Tel: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Resolução de problemas olímpicos sobre funções exponencial e logarítmica"

Autora: Elienai Resende Nunes Rodrigues

defendida e aprovada em 12/07/2019.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Juan Elmer Villanueva Zevallos
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Adilson Antônio Berlatto
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Marcelo Almeida de Souza
Instituição: Universidade Federal de Goiás

Barra do Garças, 12/07/2019.

A minha família, em especial ao meu avô, que não está mais entre nós, por todo ensinamento, amor, carinho e incentivo.

Agradecimentos

À Deus, pois Ele é misericordioso e o seu amor é eterno. Sempre me guardando e livrando dos males de cada dia.

Ao meu orientador, pela paciência, complacência e dedicação ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu esposo, pela compreensão e por ter estado ao meu lado e mesmo diante das dificuldades encontradas me incentivou a continuar.

Ao meu filho, por todo amor e carinho apresentado, mesmo com tantos dias distantes.

Aos meus pais, sogros, irmã, que sempre acreditaram em mim, sendo meu pilar e apoio ao longo dessa caminhada.

Aos meus primos, tios e avós, pelas orações e palavras de amor e estímulo.

Aos amigos do mestrado, que ao longo destes dois anos nos tornamos uma família, compartilhando emoções e frustrações.

Aos colegas de trabalho que me apoiaram, dando o suporte necessário para a conclusão desse mestrado.

Aos professores que acompanharam minha jornada e foram essenciais à minha formação como profissional.

Deus é nosso refúgio e fortaleza, socorro bem presente na angústia.

Salmos 46:1

Bíblia Sagrada

Resumo

Este trabalho aborda a importância das competições olímpicas para o ensino-aprendizagem de matemática. São apresentados diversos problemas olímpicos nacionais e internacionais, relacionados com as funções exponenciais e logarítmicas. Busca-se apresentar uma proposta de trabalho, inserindo esses problemas em aulas extracurriculares, com alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Ensino de matemática, olimpíadas de matemática, funções exponenciais e logarítmicas e resolução de problemas.

Abstract

This research approaches the importance of olympic competitions for mathematics teaching and learning. It presents various national and international olympic problems related to exponential and logarithmic functions. We intend to present a work proposal, inserting these problems in extracurricular classes, with students of the high school.

Key-words: Teaching mathematics, mathematics Olympics, exponential and logarithmic functions and problem solving.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

O ensino de matemática foi se construindo e aperfeiçoando ao longo dos séculos, a busca por novas ferramentas de ensino motivou o surgimento das competições olímpicas. Ferramenta esta que repercute positivamente na atualidade, pois, são inúmeras competições olímpicas existentes, todas elas com objetivo maior de melhorar o ensino-aprendizagem da disciplina, descobrir ou incentivar novos talentos na área.

Neste sentido, esta dissertação tem por objetivo, discorrer sobre as diversas competições olímpicas de matemática existentes atualmente, trazendo uma aplicabilidade para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas. Apresenta-se um estudo, com definições e propriedades das funções supracitadas, além de uma proposta para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas com resolução de exercícios cobrados em competições olímpicas. Utilizou-se o software GeoGebra, para ilustrar as soluções dos exercícios trabalhados, quando possível, a fim de facilitar a compreensão do aluno do ensino básico.

Para alcançar tais objetivos, este trabalho foi estruturado em quatro capítulos, sendo o primeiro relativo as competições olímpicas nacionais e internacionais realizadas atualmente, o segundo, dará o suporte teórico dos conceitos e definições das funções exponenciais e logarítmicas, o terceiro, apresentará problemas olímpicos resolvidos que foram cobrados em olimpíadas nacionais ou internacionais. Finalmente o quarto capítulo, traz uma proposta de planos de aulas, que poderão ser desenvolvidos em aulas extracurriculares para o Ensino Médio.

No Capítulo 1, é apresentado um breve histórico das competições olímpicas, na área de matemática. Destacando-se as olimpíadas realizadas atualmente em âmbito nacional e internacional, assim como, a importância do papel das mesmas para o ensino-aprendizagem de matemática.

No Capítulo 2, é abordado a definição de potência que possui como base um número real positivo diferente de um, e expoente real, partindo dos expoentes naturais, e seguindo com os inteiros e racionais. Após essa construção, seguem-se a definição e propriedades da função logaritmo.

No Capítulo 3, trata-se da resolução de problemas, envolvendo o tema de funções exponenciais e logarítmicas, os quais foram apresentados em olimpíadas nacionais ou internacionais. Os problemas estão separados por continente e organizados por grau de dificuldade em sua respectiva seção.

No Capítulo 4, apresenta-se uma proposta de aulas, que envolvem atividades olímpicas para serem trabalhadas no Ensino Médio. Visa não só a melhoria no ensino-aprendizagem mas, também, o incentivo aos alunos, para participarem das diversas competições olímpicas existentes atualmente.

Capítulo 1

Olimpíadas de Matemática e sua importância para o ensino

O estudo da matemática mostrou-se cada vez mais importante no decorrer dos anos. Desta forma, as dificuldades encontradas também estiveram presente por todo o tempo. A busca por ferramentas para aperfeiçoar o ensino-aprendizagem de matemática, resulta na metodologia da resolução de problemas e, em consequência, as competições olímpicas. Foram inicialmente inúmeras competições locais, e vários estudos para aperfeiçoamento, até chegarmos nos moldes atuais, onde as olimpíadas de matemática tomaram proporções enormes, tornando-se grande aliada ao ensino dos dias atuais. As olimpíadas proporcionam aos estudantes oportunidades de mostrar seus talentos, além de incentivar o aperfeiçoamento dos estudos na área.

De acordo com Lima (2007), vivemos em um mundo rodeado de situações que envolvem a matemática, as dificuldades para ensinar essa disciplina sempre existiram, as mudanças na organização do ensino ocorreram através dos tempos, algumas disciplinas desapareceram dos currículos, mas a matemática e todas as dificuldades ligadas a ela perdurou como elemento fundamental da estrutura do ensino.

No decorrer dos anos, se foram buscando ferramentas para aperfeiçoar e incentivar o ensino e a aprendizagem da matemática, e a resolução de problemas se demonstrou importante nesse processo. Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (Brasil, 2007), a resolução de problemas é a peça central para o ensino de matemática, pois, assim, os alunos enfrentam desafios, constroem estratégias de resolução e argumentação, além de relacionar diferentes etapas do conhecimento.

Neste sentido, observa-se que as olimpíadas científicas surgem como uma ferramenta pedagógica poderosa que auxilia na formação de uma nova rota educacional. Elas surgem em forma de competições com objetivo de incentivar e encontrar talentos nas mais diversas áreas do conhecimento, além de dar oportunidades e abrir portas para os estudantes.

1.1 Olimpíadas de Matemática

As *olimpíadas científicas*, também conhecidas como *olimpíadas do conhecimento*, são competições intelectuais em que pessoas demonstram habilidades em uma determinada área de conhecimento intelectual. Realizadas entre estudantes do ensino básico ou superior, estas competições consistem na realização de provas ou alguma atividade prática, em que os competidores possam demonstrar todo o conhecimento prévio de um determinado assunto, podendo então competir por medalhas, bolsas de iniciação científica dentre outros, além de cultivarem laços culturais e espírito de excelência.

De um modo geral, Nascimento *et al.* (2007) expõe que as competições científicas apresentam diversos objetivos subjacentes, tais como, aproximar uma determinada área de conhecimento às vidas dos estudantes, mostrando como ela se aplica na solução de problemas do cotidiano, de modo que eles se envolvam naturalmente e criem interesse por ela. A depender do tipo de competição, incentiva o trabalho em grupo e estratégias cooperativas de aprendizagem. Descobre novos talentos, proporciona meios para que os alunos criem novos vínculos com a escola, melhora valores afetivos como, a autoconfiança e a autoestima do aluno, à medida que este desenvolve sua capacidade de resolução de problemas.

Atualmente existem inúmeras competições científicas, nas mais diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo: Matemática, Física, Informática, Biologia, História, Português, dentre tantas outras. Em particular, as Olimpíadas de Matemática foram as primeiras competições científicas que se tem conhecimento. De fato, Boyer (1986) diz que os desafios científicos sobrevêm desde o século XVI, onde por volta de 1541 foi organizada uma competição entre Tartaglia[1] e Fior[2], para expor suas descobertas sobre as equações cúbicas. Nesta feita, cada um dos concorrentes propôs 30 questões para que o oponente resolvesse em um tempo fixado, Tartaglia foi o vencedor.

As competições posteriores se resumiam em duelos, onde se apostava dinheiro, prestígio, ou até mesmo postos em universidades. O ganhador era aquele que resolvia o maior número de problemas propostos.

Destaca-se a seguir algumas das principais olimpíadas de matemática nacionais e

[1]Niccolo Fontana (1499-1557), conhecido como Tartaglia devido a um problema na fala, ganhava a vida ensinando ciências e matemática em várias cidades da Itália. Teve um papel muito importante na resolução de equações cúbicas e na aritmética (Eves, 2004, págs. 307 - 308).

[2]Antonio Fior, matemático italiano nascido no final do século XV, foi discípulo de Scipione del Ferro (1465-1526), com quem aprendeu a fórmula para resolução da equação cúbica (Eves, 2004, pág. 302).

internacionais dos dias atuais, as quais foram extraídas das seguintes páginas da internet: *Olimpíada Brasileira de Matemática*, *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*, *International Mathematical Olympiad Foundation* e *Ministerio de Educación.*

1.1.1 Olimpíadas Internacionais

Atualmente o ensino-aprendizagem de matemática conta com diversas competições olímpicas a nível internacional realizadas ao redor do mundo. A seguir apresenta-se as principais delas:

- A *Olimpíada Internacional de Matemática* (IMO), teve início em 1959 na Romênia, onde aconteceu sua primeira edição, a qual teve a participação de sete países. Desde então a competição é realizada todos os anos, com exceção apenas do ano de 1980, e em alguns anos de existência já havia atingido todos os cinco continentes e aproximadamente 100 países distintos. Os objetivos são simples e os mesmos desde o início, que é apoiar matemáticos/alunos em idade escolar, para que estes possam desenvolver suas habilidades na resolução de problemas. A cada ano, a competição é realizada em um país diferente, no ano de 2017 foi a vez do Brasil sediar.

- A *Olimpíada Ibero-Americana de Matemática* (OIM), abrange toda a América Latina, Espanha e Portugal. É desenvolvida para jovens menores de 18 anos, onde cada país é representado por uma equipe de até quatro estudantes. Seu objetivo principal é estimular o estudo da matemática, o desenvolvimento de jovens talentos, além de instigar novas amizades entre os países participantes. Sua primeira edição foi em 1985, e vem ocorrendo até os dias atuais.

- A *Olimpíada de Matemática do Cone Sul*, teve sua primeira edição realizada em 1988, os países participantes são os da porção meridional da América do Sul e é direcionada para estudantes menores de 16 anos.

- A *Asian Pacific Mathematics Olympiad*, dedicada para alunos do ensino médio, teve início em 1989 e abrange diversos países asiáticos e da América. Tem por objetivos principais a descoberta o encorajamento e o desafio de estudantes, além de criar oportunidades de intercâmbio de informações sobre currículos e práticas escolares.

- A *Olimpíada Nacional de Matemática Escolar* (ONEM), é um evento acadêmico realizado no Peru, que busca promover o desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas dos alunos do país, a fim de resolver problemas que surgem em diversas situações. A ONEM busca estimular o interesse pelo aprendizado da matemática, de forma a contribuir para o aprimoramento das conquistas da aprendizagem. Além de incentivar o fortalecimento da criatividade dos alunos na resolução de problemas, utilizando conceitos sólidos e relações matemáticas, promovendo o surgimento de jovens talentos através de competição saudável, companheirismo e amizade entre os participantes. Villanueva (2018) diz que o evento teve sua primeira edição em 2001, contou com a participação de 5 cidades e cerca de 500 alunos. Inicialmente a olimpíada foi organizada pela Sociedade Peruana Matemática, e em 2004 teve o apoio do Ministério da Educação onde expandiu-se significativamente.

- A *Romanian Master in Mathematics* (RMM), realizada desde 2007, convoca apenas representantes de países que foram os melhores do mundo em eventos do gênero. Os objetivos são dentre outros, oferecer oportunidades para jovens demonstrarem seus talentos matemáticos.

- A *Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa* (OMCPLP), é uma competição jovem, teve sua primeira edição em 2011 e alcança estudantes de oito países de expressão portuguesa, dentre eles Br
  asil, Portugal, Timor Leste e alguns países do continente africano.

- A *European Girls Mathematical Olympiad* (EGMO), uma competição similar a IMO, porém cada país participante deve enviar sua equipe formada apenas por estudantes de matemática femininas, em idade escolar. A ideia inicial da competição se deu em 2009, e surgiu devido à necessidade de algo para incentivar as jovens europeias, uma vez que estas tinham dificuldades financeiras em participar de eventos do tipo em outros países. A primeira edição só aconteceu em 2012, porém teve total apoio dos organizadores de outras grandes competições internacionais.

- A *Olimpíada Iraniana de Geometria* (IGO), inicialmente criada apenas para estudantes locais em 2014, posteriormente em 2015 abre suas portas para o mundo. Realizada em quatro níveis (elementar, médio, avançado e livre), tem por objetivo principal popularizar o pensamento geométrico, proporcionar troca de experiências a professores de geometria, e ainda dar oportunidade aos amantes da área.

- A *Olimpíada de Maio*, uma competição realizada no mês de maio, que conta com a participação de estudantes de dois níveis do ensino básico, que possuem no máximo 15 anos de idade. Abrange a América Latina, Espanha e Portugal. No Brasil a prova é aplicada apenas para os estudantes premiados em competições nacionais.

Cabe ressaltar que o Brasil participa de quase todas as competições olímpicas citadas acima. Em particular, na IMO 2017, realizada na cidade do Rio de Janeiro, os alunos que representaram o país, conseguiram duas medalhas de prata, uma de bronze e três menções honrosas. Já em 2018, a competição foi realizada na Romênia, e a equipe brasileira conquistou uma medalha de ouro, quatro de bronze e uma menção honrosa; o primeiro lugar na classificação mundial, ficou com a equipe dos Estados Unidos da América.

1.1.2 Olimpíadas Nacionais

O Brasil usufrui de duas competições a nível nacional para os alunos do ensino básico e superior, sendo elas a *Olimpíada Brasileira de Matemática* e a *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*, e ainda inúmeras outras regionais.

- A *Olimpíada Brasileira de Matemática* (OBM), é organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) juntamente com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Teve sua primeira edição realizada em 1979, e passou por vários processos de mudanças, até chegar aos moldes realizados atualmente. Nos dias 13 e 14 de novembro de 2018, foi realizada a 40º Edição da OBM, na qual teve 307 estudantes premiados. Sendo estes, 83 do Nível I, 77 do Nível II, 80 do Nível III e 67 do Nível Universitário. Os alunos ganhadores de medalhas de ouro, prata ou bronze, são convidados a participar da 22º Semana Olímpica[3].

  Apesar das diversas mudanças estruturais, seu objetivo inicial continua o mesmo, que é estimular o estudo da matemática nos alunos, aperfeiçoar e desenvolver a capacitação dos professores, interferir decisivamente em prol da melhoria do ensino da matemática, além de descobrir e incentivar jovens talentos para a área. Cabe à OBM selecionar e treinar os competidores que representarão o país nas diversas competições internacionais, além de oferecer total apoio aos eventos regionais do tipo.

  A OBM conta com uma revista e um site, onde divulga todas as informações necessárias e disponibiliza diversos materiais de apoio para alunos e professores que desejam aperfeiçoar seu conhecimento. As provas da OBM foram aplicadas inicialmente em dois níveis, Júnior (alunos de no máximo 15 anos de idade) e Sênior (alunos do ensino médio). Atualmente são aplicadas em quatro níveis, Nível I (5ª e 6ª série), Nível II (7ª e 8ª série), Nível III (ensino médio) e Nível Universitário (alunos que não terminaram a graduação). Para os Níveis I, II, e III as provas são aplicadas em uma única fase, e em duas fases para o Nível Universitário.

[3]A Semana Olímpica, a qual é realizada anualmente desde 1998. É uma atividade da OBM, que envolve os estudantes medalhistas desta competição. Durante a semana os alunos participam de aulas avançadas de matemática, frequentam palestras e recebem orientações acadêmicas, além de interagir com outros jovens em atividades de lazer.

A premiação é destinada aos alunos que obtiveram melhor desempenho nas provas, são elas medalhas (ouro, prata, bronze), bolsas de iniciação científica, certificados de reconhecimento pelo bom desempenho, dentre as inúmeras outras vantagens (como participar de competições internacionais) que o aluno poderá desfrutar. As escolas e os professores dos alunos destaques também recebem algum tipo de premiação e reconhecimento.

- A *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas* (OBMEP), é um projeto nacional, voltado atualmente para as escolas públicas e privadas do país. Criada em 2005, a OBMEP conta com a parceria do Ministério da Educação, juntamente com o IMPA e a SBM, a qual teve como base inicial o Projeto Numeratizar[4] do Estado do Ceará. Os objetivos atuais da OBMEP são:
  - Estimular e promover o estudo da matemática entre alunos das escolas públicas;
  - Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica;
  - Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas;
  - Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
  - Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e sociedades científicas;
  - Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

  Em 2005, quando foi criada, a OBMEP teve uma participação de 10,5 milhões de alunos e 93,5% dos municípios. Já em 2018, foram contabilizados 18,2 milhões de alunos em 99,4 % dos municípios brasileiros, sendo considerada a maior olimpíada de matemática do mundo em termo de quantidade de participações.

  Conforme Brasil (2010) as premiações oferecidas estão divididas em quatro tipos, sendo elas: menção honrosa, medalha de bronze, prata e ouro, nesta ordem crescente de reconhecimento. Estima-se que cerca de 90 % dos alunos que participaram alguma vez das olimpíadas nunca foram premiados. Aos professores das escolas responsáveis pela inscrição dos alunos, às escolas, aos municípios e às secretarias de educação são ofertados prêmios de acordo com os critérios vinculados à premiação e pontos obtidos pelos alunos, sendo que os critérios dessa premiação são descritos no Regulamento de cada edição da OBMEP.

[4]O Projeto Numeratizar, criado e realizado no Ceará pelo professor João Lucas Marques Barbosa (Universidade Federal do Ceará), visava o desenvolvimento de estratégias que possibilitem melhorar a qualidade do Ensino de Matemática na Educação Básica. A OBMEP pode ser considerada uma expansão nacional desse projeto. Viana (2017).

Em particular, no Estado de Mato Grosso, na primeira edição da OBMEP os alunos conquistaram 15 medalhas de prata e 15 de bronze, e na última conquistaram uma medalha de ouro, 8 pratas e 64 bronzes; sendo que três medalhas de bronze foram para a região do Vale do Araguaia, onde localiza-se o Polo de Barra do Garças do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1.2 A Importância das Competições Olímpicas para o Ensino de Matemática

A matemática auxilia as atividades rotineiras da sociedade, Lara e Lopes (2013) nos mostra que apesar da evidente necessidade do dia a dia, os professores ainda encontram grandes dificuldades em sala de aula, devido ao desinteresse por parte de alguns alunos, aos quais não conseguem associar teoria de sala de aula e prática do dia a dia. Desta forma, cabe ao professor a árdua tarefa de estar sempre em busca de alternativas diferenciadas de ensino, a fim de despertar e manter o interesse dos alunos.

Segundo Lara e Lopes (2013) a resolução de problemas surge como uma metodologia que possibilita ao aluno uma aprendizagem significativa, pois esta permite o prazer e a oportunidade de explorar novas ideias. Essa metodologia poder ser utilizada para abordar diferentes conteúdos, sendo empregada também em muitos programas de ensino, bem como em Olimpíadas de Matemática.

Nascimento *et al.* (2007) diz que o ensino por meio de competições vem se tornando uma alternativa metodológica bastante utilizada, uma vez que essas atividades extracurriculares desempenham funções psicossociais, afetivas e intelectuais básicas, que satisfazem diferentes objetivos pedagógicos no contexto escolar.

As Olimpíadas de Matemática surgem como uma forma de proporcionar o desenvolvimento crítico e lógico-matemático dos alunos, sempre incentivando o aperfeiçoamento e aprofundamento dos mais diversos assuntos ligados à área.

> As provas das Olimpíadas de Matemática compõem um rico material de aplicação dos conceitos matemáticos em situações cotidianas, visto que as questões são organizadas com uma abordagem problematizadora, as quais conduzem ao raciocínio, à indagações, reflexões, análises e estimulam a busca de diferentes soluções aos problemas (Lara e Lopes, 2013).

De acordo com Santos e Henrique (2015), as Olimpíadas de Matemática quando trabalhadas em sala de aula, desperta o interesse, acentua a vontade de aprender pelos alunos, além de tornar o ambiente produtivo em que os alunos socializam seus conhecimentos. Podendo ainda estes alunos, despertar interesse e, assim, tomar gosto por novas descobertas no cotidiano da sala de aula e fora dela. Por outro lado, existe uma certa resistência por parte dos alunos e alguns professores em aceitar a Olimpíada de Matemática logo no contato inicial. Isso pode ser justificado pelo fato de estarem acostumados com o sistema de ensino tradicional baseado na memorização e repetição.

Consequentemente, as Olimpíadas de Matemática vieram como uma quebra de paradigmas, buscando sempre ajudar o ensino-aprendizagem desta ciência nas mais diversas áreas.

Capítulo 2

As funções exponencial e logarítmica

Neste capítulo, serão apresentadas ferramentas importantes ao estudo sobre as funções exponencial e logarítmica. Nele, fala-se um breve histórico sobre estas funções. Define-se a potência que possui como base um número real positivo diferente de 1, e expoente real, partindo dos expoentes naturais, e seguindo com os inteiros e racionais. Logo após esta construção, dar-se-á a definição de função logaritmo. A sequência seguida, teve como suporte as referências: Bartle (1976) e Lima (2017).

2.1 Um pouco de história

Baseado em Eves (2004), observa-se que os estudos iniciais dos logaritmos, e consequentemente de sua inversa, as exponenciais, se deram no início do século XVII, quando John Napier[1], com intuito de tornar mais fáceis e rápidos, os cálculos numéricos muito utilizados na astronomia, navegação e afins, introduziu o conceito de logaritmos. Inicialmente, Napier não trabalhava com um conceito de base de um sistema de logaritmos. Em 1614, publicou em uma abordagem geométrica, a primeira tábua de logaritmos, em um texto intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos). Posteriormente, outros matemáticos se dedicaram em aperfeiçoar a ideia e publicaram, com uma abordagem algébrica, outras tábuas de logaritmos.

Atualmente, o logaritmo é universalmente conhecido como expoente, ou seja, se $n = b^x$, diz-se que x é o logaritmo de n na base b. Durante anos a tábua de logaritmo foi um instrumento muito usado por estudantes, desdo o ensino básico até a universidade, porém foi extinta com a chegada das calculadoras portáteis. Recentemente, com a utilização cada vez mais divulgada das calculadoras, as tábuas de logaritmos perderam

[1]John Napier (1550-1617), matemático, físico, astrônomo, astrólogo e teólogo escocês, nascido em Edimburgo. Gastou grande parte de sua vida em controvérsias políticas e religiosas, para se descontrair de suas polêmicas, deleitava-se estudando matemática, o que resultou em quatro importantes resultados para a atualidade.

muito do seu interesse como instrumento de cálculo, o mesmo acontecendo com outras tabelas matemáticas. Mas o estudo dos logaritmos ainda é e continuará a ser de central importância. Com efeito, embora eles tenham sido inventados como acessório para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são estreitamente relacionados com os logaritmos.

2.2 A função exponencial

Nesta seção, dar-se-á a definição de função exponencial, estabelecendo suas propriedades básicas. Para isto, definirá-se o conceito de potenciação para expoentes naturais, em seguida, para expoentes inteiros e finalmente para racionais.

2.2.1 Potências com expoentes naturais

Nesta subseção, define-se as potências de um número real positivo e expoente natural.

Definição 2.1. Seja $a \in \mathbb{R}^+$. A *potência de base a e expoente natural n* é o número a^n definido como:

$$a^1 := a \quad \text{e} \quad a^{n+1} := a^n \cdot a,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sendo $a > 0$, pela definição indutiva da potência de base a e expoente n, segue que $a^n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. São satisfeitas as seguintes propriedades:*

(1) $1^n = 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(2) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$;

(3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$ *tais que* $m > n$;

(5) $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$, *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$;

(6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(7) *Se* $a = b$, *então* $a^n = b^n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(8) *Se* $a < b$*, então* $a^n < b^n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(9) *Se* $a^n < b^n$*, para algum* $n \in \mathbb{N}$*, então* $a < b$*;*

(10) *Se* $a^n = b^n$*, para algum* $n \in \mathbb{N}$*, então* $a = b$

(11) *Se* $a > 1$*, para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$ *tais que* $n < m$*, tem-se* $a^n < a^m$*;*

(12) *Se* $a < 1$*, para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$ *tais que* $n < m$*, tem-se* $a^n > a^m$*.*

Demonstração.

(1) Provar-se-á por indução sobre n, que

$$1^n = 1, \tag{2.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, a igualdade (2.1) é válida para $n = 1$, pois

$$1^1 = 1.$$

Procedendo indutivamente, se (2.1) é válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostrar-se-á agora que a igualdade (2.1), é válida para $n + 1$. De fato, por definição,

$$1^{n+1} = 1^n \cdot 1.$$

Por outro lado, pela hipótese indutiva, tem-se que $1^n = 1$ e, assim,

$$1^{n+1} 1^n \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Isto mostra que a igualdade (2.1) é válida para $n+1$. Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, $1^n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Seja $m \in \mathbb{N}$. Demonstrar-se-á por indução sobre n, que

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \tag{2.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, para $n = 1$ a igualdade (2.2) é válida, pois

$$a^{m+1} = a^m \cdot a = a^m \cdot a^1.$$

Procedendo indutivamente, suponha-se que a igualdade (2.2) é válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Demonstrar-se-á agora que a igualdade (2.2), seja válida para $n+1$. De fato, por definição

$$a^{m+(n+1)} = a^{(m+n)+1} = a^{m+n} \cdot a^1.$$

Por outro lado, pela hipótese indutiva, tem-se que $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ e, assim,

$$a^{m+(n+1)} = a^{m+n} \cdot a^1 = (a^m \cdot a^n) \cdot a^1 = a^m \cdot (a^n \cdot a^1) = a^m \cdot a^{n+1}.$$

Isso mostra que a igualdade (2.2) é válida para $n + 1$. Logo pelo Princípio de Indução Matemática, $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como m era arbitrário, conclui-se o resultado.

(3) Mostrar-se-á por indução sobre n, que

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \tag{2.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, a igualdade (2.3) é válida para $n = 1$, pois

$$(a \cdot b)^1 = a \cdot b = a^1 \cdot b^1.$$

Procedendo indutivamente, suponha-se que a igualdade (2.3) é válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Provar-se-á agora que a igualdade (2.3) seja válida para $n + 1$. De fato, por definição,

$$(a \cdot b)^{n+1} = (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b).$$

Por outro lado, pela hipótese indutiva, tem-se que $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, e assim,

$$(a \cdot b)^{n+1} = (a^n \cdot b^n) \cdot (a \cdot b) = (a^n \cdot a) \cdot (b^n \cdot b) = a^{n+1} \cdot b^{n+1}.$$

Isto mostra que a igualdade (2.3) é válida para $n+1$. Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(4) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m > n$. Então, $m - n > 0$ e portanto, pelo item (2) tem-se

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)}.$$

Assim,

$$a^m = a^{n+(m-n)} = a^n \cdot a^{m-n}.$$

Como $a^n > 0$, multiplicando ambos os membros da igualdade por $\frac{1}{a^n}$ obtém-se

$$a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^n \cdot a^{m-n} \cdot \frac{1}{a^n},$$

então,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

(5) Inicialmente, provar-se-á que $(a^m)^n = a^{mn}$, para qualquer $m, n \in \mathbb{N}$. Seja $m \in \mathbb{N}$. Por indução sobre n, tem-se que

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \tag{2.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, para $n = 1$ a igualdade (2.4) é verdadeira, pois,

$$(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}.$$

Procedendo indutivamente, suponha-se que a igualdade (2.4) seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Demonstrar-se-á agora que a igualdade (2.4) seja válida para $n + 1$. De fato, por definição

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n \cdot a^m.$$

Por outro lado, pela hipótese indutiva, tem-se que $(a^m)^n = a^{mn}$, e, assim

$$(a^m)^{n+1} = a^{m \cdot n} \cdot a^m = a^{m \cdot n + m} = a^{m(n+1)}.$$

Isso mostra que a igualdade (2.4) é válida para $n + 1$. Logo pelo Princípio de Indução Matemática, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como m era arbitrário, conclui-se o resultado.

Finalmente, dados $m, n \in \mathbb{N}$, pelo visto anteriormente, $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Assim,

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m.$$

(6) Inicialmente, mostrar-se-á um caso particular.
Afirmação: $\left(b^{-1}\right)^n = \frac{1}{b^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Prova da afirmação: De fato, pelos itens (1), (2), (3) e (5), obtém-se,

$$1 = 1^n = (b \cdot b^{-1})^n = b^n \cdot (b^{-1})^n.$$

Logo,

$$\left(b^{-1}\right)^n = \frac{1}{b^n}.$$

Provar-se-a agora o item (6). Com efeito, pelo item (2) e a afirmação anterior,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

(7) Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que $a = b$. Provar-se-á por indução sobre n que

$$a^n = b^n, \tag{2.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, a igualdade (2.5) é válida para $n = 1$, pois

$$a^1 = a = b = b^1.$$

Procedendo indutivamente, suponha-se que a igualdade (2.5) seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, observa-se que a igualdade (2.5) seja válida para $n + 1$. De fato, pela hipótese, indutiva tem-se que $a^n = b^n$ e, sendo $a = b$, segue que

$$a^{n+1} = a^n \cdot a = b^n \cdot b = b^{n+1}.$$

Isso mostra que a igualdade (2.5) é válida para $n+1$. Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, $a^n = b^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(8) Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que $a < b$. Demonstrar-se-á por indução sobre n que

$$a^n < b^n, \tag{2.6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, a desigualdade é válida, pois

$$a^1 = a < b = b^1.$$

Procedendo indutivamente suponha-se que a desigualdade (2.6) é válida para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$a^n < b^n. \tag{2.7}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.7) por a, tem-se

$$a^{n+1} = a^n \cdot a < b^n \cdot a = ab^n. \tag{2.8}$$

Como $a < b$, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por b^n, obtém-se

$$ab^n = b^n \cdot a < b^n \cdot b = b^{n+1}. \tag{2.9}$$

Assim, de (2.8) e (2.9),

$$a^{n+1} < a \cdot b^n < b^{n+1}.$$

Isso mostra que a desigualdade (2.6) é válida para $n + 1$. Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, se $a < b$ então $a^n < b^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(9) Procedendo pelo absurdo, suponha-se que $a \geq b$. Então, $a > b$ ou $a = b$. Portanto, pelos itens (7) e (8), tem-se $a^n > b^n$ ou $a^n = b^n$, uma contradição, pois por hipótese $a^n < b^n$. Logo, $a < b$.

(10) Procedendo por absurdo, suponha-se que $a < b$ ou $a > b$. Portanto, pelos itens (7) e (8), tem-se $a^n < b^n$ ou $a^n > b^n$, uma contradição, pois por hipótese $a^n = b^n$. Logo, $a = b$.

(11) Seja $a > 1$. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $n < m$, tem-se $m - n > 0$. Como $a > 1$, pelo item (8),

$$a^{m-n} > 1^{m-n}.$$

Por outro lado, pelo item (1), $1^{m-n} = 1$. Logo

$$a^{m-n} > 1. \tag{2.10}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.10) por a^n, obtém-se

$$a^{m-n} \cdot a^n > 1 \cdot a^n = a^n.$$

Finalmente, pelo item (2), conclui-se

$$a^m = a^{(m-n)+n} = a^{m-n} \cdot a^n > a^n.$$

(12) Seja $a < 1$. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $n < m$, tem-se $m - n > 0$. Como $a < 1$, pelo item (8),

$$a^{m-n} < 1^{m-n}.$$

Por outro lado, pelo item (1), $1^{m-n} = 1$. Logo

$$a^{m-n} < 1. \tag{2.11}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.11) por a^n, obtém-se

$$a^{m-n} \cdot a^n < 1 \cdot a^n = a^n.$$

Finalmente, pelo item (2), conclui-se

$$a^m = a^{(m-n)+n} = a^{m-n} \cdot a^n < a^n.$$

$\square$

Pelo visto na Proposição 2.2, a função $f_a^{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por $f_a^{\mathbb{N}}(n) = a^n$, satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $f_a^{\mathbb{N}}(m+n) = f_a^{\mathbb{N}}(m) \cdot f_a^{\mathbb{N}}(n)$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$;

(2) se $a > 1$, então $f_a^{\mathbb{N}}$ é crescente;

(3) se $0 < a < 1$, então $f_a^{\mathbb{N}}$ é decrescente.

Além disso, mostra-se que se $a > 1$, então $f_a^{\mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente. A Figura 2.1, ilustra a função $f_a^{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por $f_a^{\mathbb{N}}(n) = 2^n$.

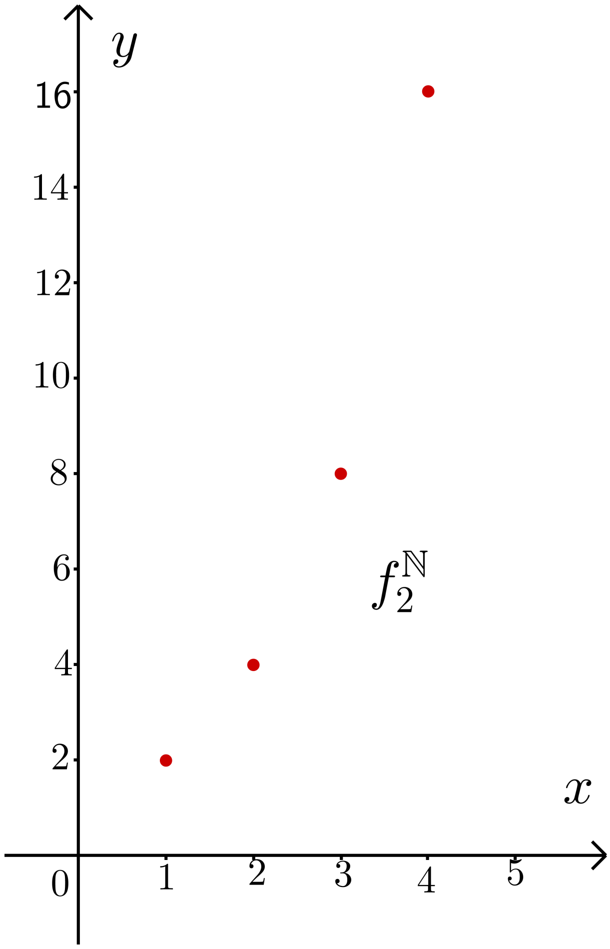

Figura 2.1: $f_a^{\mathbb{N}}(n) = 2^n, n \in \mathbb{N}$

2.2.2 Potências com expoentes inteiros

Atribuirá-se agora, um significado à potência a^n, quando n é um número inteiro, e a é um número real positivo.

Definição 2.3. Seja $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{Z}$. A *potência de base a e expoente n* é o número a^n definido como:

$$a^n := \begin{cases} a^n, & \text{se} \quad n > 0; \\ 1, & \text{se} \quad n = 0; \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{se} \quad n < 0. \end{cases}$$

Sendo $a > 0$, tem-se que $a^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, segue da definição, que $a^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 2.4. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. São satisfeitas as seguintes propriedades:*

(1) $1^n = 1$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$;

(2) $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$;

(3) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{Z}$;

(4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$,

(5) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{Z}$;

(6) $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$, *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{Z}$;

(7) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$,

(8) *Se* $a = b$, *então* $a^n = b^n$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$;

(9) *Se* $a^n = b^n$, *para algum* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *então* $a = b$;

(10) *Se* $a > 1$, *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{Z}$ *tais que* $n < m$ *tem-se* $a^n < a^m$;

(11) *Se* $0 < a < 1$, *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{Z}$ *tais que* $n < m$ *tem-se* $a^n > a^m$;

Demonstração.

(1) Dado $n \in \mathbb{Z}$, existem três casos a serem analisados, sendo eles: $n > 0$, $\quad n = 0 \quad$ e $\quad n < 0$.

Caso 1: $n > 0$. Pelo item (1) da Proposição 2.2, obtém-se $1^n = 1$.

Caso 2: $n = 0$**.** Tem-se por definição que

$$1^0 = 1.$$

Caso 3: $n < 0$**.** Como $n < 0$, então $-n > 0$, assim, tem-se por definição e pelo item (1) da Proposição 2.2 que

$$1^n = \frac{1}{1^{-n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

(2) Existem três casos a serem analisados, sendo eles: $n > 0$, $n = 0$ e $n < 0$.

Caso 1: $n > 0$**.** De fato, se $n > 0$, tem-se que

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{-(-n)}} = \frac{1}{a^n},$$

ou equivalentemente

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Caso 2: $n = 0$**.** Se $n = 0$, tem-se que

$$a^0 = 1 = \frac{1}{a^0}.$$

Caso 3: $n < 0$**.** Como $n < 0$, por definição tem-se que

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

(3) Inicialmente, provar-se-á um caso particular.

Afirmação: Se $n \in \mathbb{N}$, tem-se $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Prova da afirmação: Dado $m \in \mathbb{Z}$, existem três casos a serem analisados, sendo eles: $m > 0, \quad m = 0 \quad \text{e} \quad m < 0.$

Caso 1: $m > 0$**.** Pelo item (2) da Proposição 2.2, obtém-se $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Caso 2: $m = 0$**.** Tem-se

$$a^{0+n} = a^n = 1 \cdot a^n = a^0 \cdot a^n.$$

Caso 3: $m < 0$**.** Como $m < 0$, então $-m > 0$. Existem três casos a serem analisados: $n > -m, \quad n = -m \quad \text{e} \quad n < -m.$

Caso 3.1: $n > -m$**.** Como $n > -m$, então $n - (-m) > 0$. Assim, pelo item (4) da Proposição 2.2, tem-se que

$$a^{m+n} = a^{n+m} = a^{n-(-m)} = \frac{a^n}{a^{-m}} = a^n \cdot \frac{1}{a^{-m}} = a^n \cdot a^m = a^m \cdot a^n.$$

Caso 3.2: $n = -m$**.** Por definição

$$a^{m+n} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1. \tag{2.12}$$

Por outro lado, pelo item (2),

$$1 = a^m \cdot \frac{1}{a^m} = a^m \cdot a^{-m} = a^m \cdot a^n. \tag{2.13}$$

Portanto, de (2.12) e (2.13), $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Caso 3.3: $n < -m$**.** Como $n < -m$, então $m + n < 0$. Assim, por definição

$$a^{m+n} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = \frac{1}{a^{-m+(-n)}}.$$

Finalmente, pelo item (2) da Proposição (2.2),

$$a^{m+n} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = a^m \cdot a^n.$$

Provar-se-á agora, o caso geral. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$.

Caso 1': $n > 0$. Pela afirmação anterior, $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Caso 2': $n = 0$. Tem-se

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0.$$

Caso 3': $n < 0$. Existem três casos a serem analisados: $m > 0, \quad m = 0 \quad \text{e} \quad m < 0$.

Caso 3'.1: $m > 0$. Pela afirmação anterior, $a^{m+n} = a^{n+m} = a^n \cdot a^m = a^m \cdot a^n$.

Caso 3'.2: $m = 0$. Então,

$$a^{0+n} = a^n = 1 \cdot a^n = a^0 \cdot a^n.$$

Caso 3'.3: $m < 0$. Como $n, m < 0$, então, $m + n < 0$. Assim, por definição,

$$a^{m+n} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = \frac{1}{a^{-m+(-n)}}.$$

Pelo item (2) da Proposição (2.2),

$$a^{m+n} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = a^m \cdot a^n.$$

(4) Dado $n \in \mathbb{Z}$, existem três casos a serem analisados, sendo eles: $n > 0, n = 0$ e $n < 0$.

Caso 1: $n > 0$. De fato, se $n > 0$, segue do item (3) da Proposição 2.2 que $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Caso 2: $n = 0$. Tem-se que,

$$(a \cdot b)^0 = 1 = a^0 \cdot b^0.$$

Caso 3: $n < 0$. Como $n < 0$, por definição,

$$(a \cdot b)^n = \frac{1}{(a \cdot b)^{-n}}.$$

Tem-se que $-n > 0$, assim pelo item (3) da Proposição 2.2, obtém-se,

$$\frac{1}{(a \cdot b)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n.$$

(5) Existem três casos a serem analisados, sendo eles: $n > 0$, $n = 0$ e $n < 0$.

Caso 1: $n > 0$ Dado $n > 0$ e $m \in \mathbb{Z}$, novamente existem três casos a serem analisados, sendo eles: $m > 0, m = 0$ e $m < 0$.

Caso 1.1: $m > 0$. Como $m, n \in \mathbb{N}$, pelo item (4) da Proposição 2.2, tem-se $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Caso 1.2: $m = 0$. Pelo item (2) tem-se que

$$\frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} = a^{-n} = a^{0-n}.$$

Caso 1.3: $m < 0$. Dado $m \in \mathbb{Z}$, tal que $m < 0$, tem-se que $-m > 0$. Assim, por definição e pelo item (2) obtém-se que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n}. \tag{2.14}$$

Finalmente, pelo item (3), tem-se que

$$a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}. \tag{2.15}$$

Assim, de (2.14) e (2.15), segue que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Caso 2: $n = 0$. Dado $m \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$\frac{a^m}{a^0} = a^m = a^{m-0}.$$

Caso 3: $n < 0$**.** Dado $m \in \mathbb{Z}$, existem três casos a serem analisados, sendo eles: $m > 0, m = 0$ e $m < 0$.

Caso 3.1: $m > 0$**.** Pelo item (2), obtém-se

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n}.$$

Assim, pelo item (3), tem-se que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$$

Caso 3.2: $m = 0$**.** Pelo item (2), tem-se

$$\frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} = a^{-n} = a^{0-n}.$$

Caso 3.3: $m < 0$**.** Pelos itens (2) e (3), tem-se que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$$

Portanto, dos casos (1), (2) e (3), conclui-se o resultado.

(6) Inicialmente, provar-se-á que $(a^m)^n = a^{mn}$, para qualquer $m, n \in \mathbb{Z}$. Existem três casos a serem analisados, sendo eles: $n > 0, n = 0$ e $n < 0$.

Caso 1. $n > 0$. Dado $m \in \mathbb{Z}$, existem três casos a serem analisados, sendo eles: $m > 0$, $m = 0$ e $m < 0$.

Caso 1.1.$m > 0$. Como $m, n > 0$, pelo item (5) da Proposição 2.2, tem-se que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Caso 1.2. $m = 0$. De fato, pelo item (1), tem-se que

$$(a^0)^n = 1^n = 1 = 1^{0 \cdot n}.$$

Caso 1.3. $m < 0$**.** Como $m < 0$, então $-m > 0$. Pelo item (6), da Proposição 2.2 e pelo item (2), tem-se que

$$(a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-m \cdot n}} = a^{m \cdot n}.$$

Caso 2. $n = 0$. Por definição, tem-se

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}.$$

Caso 3. $n < 0$. Como $n < 0$, tem-se que $-n > 0$. Assim, por definição

$$(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}}. \tag{2.16}$$

Logo, pelo Caso 1 e pelo item (2),

$$\frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{m\cdot(-n)}} = \frac{1}{a^{-m\cdot n}} = a^{m\cdot n}. \tag{2.17}$$

Portanto, de (2.16) e (2.17), $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$.

Finalmente, dados $m, n \in \mathbb{Z}$, pelo visto anteriormente, $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$. Assim,

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n} = a^{n\cdot m} = (a^n)^m.$$

(7) Inicialmente, demonstrar-se-á um caso particular.
Afirmação: $\left(b^{-1}\right)^n = \frac{1}{b^n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
Prova da afirmação: De fato, pelos itens (1), (2), (4) e (6), obtém-se,

$$1 = 1^n = (b \cdot b^{-1})^n = b^n \cdot (b^{-1})^n.$$

Logo,

$$\left(b^{-1}\right)^n = \frac{1}{b^n}.$$

Mostrar-se-á agora o item (6). Com efeito, pelo item (2) e a afirmação anterior,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

(8) Dado $n \in \mathbb{Z}$, existem três casos a serem analisados, sendo eles: $n > 0$, $n = 0$ e $n < 0$.

Caso 1: $n > 0$. Se $n > 0$, segue do item (7) da Proposição 2.2, que $a^n = b^n$.

Caso 2: $n = 0$. Se $n = 0$, tem-se que

$$a^0 = 1 = b^0.$$

Caso 3: $n < 0$. Se $n < 0$, então $-n > 0$, e assim, por definição, pelo item (7) da Proposição 2.2 e pelo item (2), segue que

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{b^{-n}} = b^n.$$

(9) Dado $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, existem dois casos a serem analisados, sendo eles: $n > 0$ e $n < 0$.

Caso 1: $n > 0$. Se $n > 0$, segue do item (10) da Proposição 2.2 que $a = b$.

Caso 2: $n < 0$. Se $n < 0$, então $-n > 0$, assim, por definição tem-se

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{b^{-n}} = b^n.$$

Logo, $a^{-n} = b^{-n}$. Novamente utilizando o item (10) da Proposição 2.2, segue que $a = b$.

(10) Seja $a > 1$. Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $n < m$, tem-se $m - n > 0$. Como $a > 1$, pelo item (8) da Proposição 2.2,

$$a^{m-n} > 1^{m-n}.$$

Por outro lado, pelo item (1), $1^{m-n} = 1$. Logo

$$a^{m-n} > 1. \tag{2.18}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.18) por a^n, obtém-se

$$a^{m-n} \cdot a^n > 1 \cdot a^n = a^n.$$

Finalmente, pelo item (2), conclui-se

$$a^m = a^{(m-n)+n} = a^{m-n} \cdot a^n > a^n.$$

(11) Seja $a < 1$. Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $n < m$, tem-se $m - n > 0$. Como $a < 1$, pelo item (8) da Proposição 2.2,

$$a^{m-n} < 1^{m-n}.$$

Por outro lado, pelo item (1), $1^{m-n} = 1$. Logo

$$a^{m-n} < 1. \tag{2.19}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.19) por a^n, obtém-se

$$a^{m-n} \cdot a^n < 1 \cdot a^n = a^n.$$

Finalmente, pelo item (2), conclui-se

$$a^m = a^{(m-n)+n} = a^{m-n} \cdot a^n < a^n.$$

$\square$

Assim como visto anteriormente, pela Proposição 2.4 define-se a função $f_a^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, como sendo $f_a^{\mathbb{Z}}(n) = a^n$, a qual satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $f_a^{\mathbb{Z}}(m+n) = f_a^{\mathbb{Z}}(m) \cdot f_a^{\mathbb{Z}}(n)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$;

(2) Se $a > 1$, então $f_a^{\mathbb{Z}}$ é crescente;

(3) Se $a < 1$, então $f_a^{\mathbb{Z}}$ é decrescente.

Além disso, mostra-se que $f_a^{\mathbb{Z}}$ é ilimitada superiormente. A Figura 2.2, ilustra a função $f_a^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, definida por $f_a^{\mathbb{Z}}(n) = 2^n$.

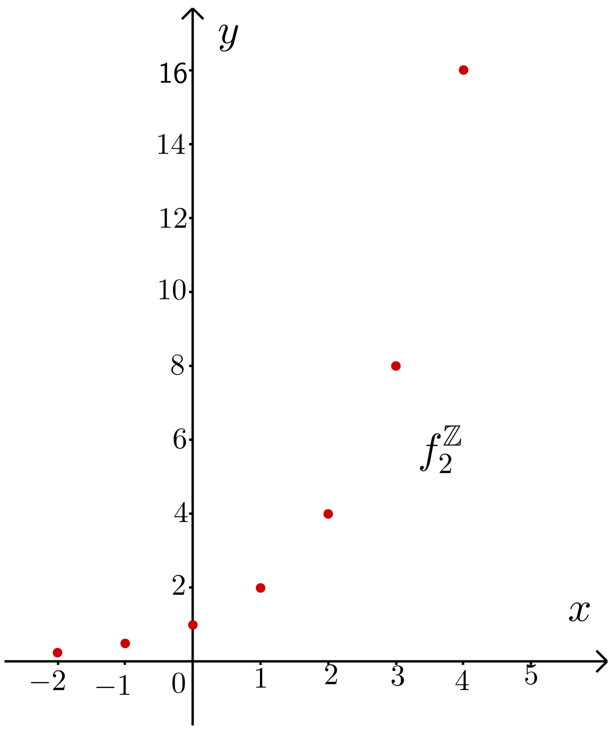

Figura 2.2: $f_a^{\mathbb{Z}}(n) = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$

2.2.3 Potências com expoentes racionais

Prosseguindo, observe que sentido pode ser dado à potência a^r quando $r = \frac{m}{n}$ é um número racional (onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$).

Definição 2.5. Seja $a \in \mathbb{R}^+$ e $r = \frac{m}{n}$ um número racional, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. A *potência de base a e expoente r* é o número a^r definido como:

[1] Dado $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ a equação $x^n = a$ possui uma única solução positiva. Tal solução denota-se por $\sqrt[n]{a}$ e lê-se "raiz n-ésima de a".

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Segue da definição, que $a^r > 0$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Proposição 2.6. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. São satisfeitas as seguintes propriedades:*

(1) $1^r = 1$, *para todo* $r \in \mathbb{Q}$;

(2) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$, *para quaisquer* $r, s \in \mathbb{Q}$;

(3) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$, *para todo* $r \in \mathbb{Q}$;

(4) $(a^r)^s = a^{rs} = (a^s)^r$, *para quaisquer* $r, s \in \mathbb{Q}$;

(5) *Se* $a < b$, *então* $a^r < b^r$ *para todo* $r \in \mathbb{Q}$, *com* $r > 0$;

(6) *Se* $a > 1$, *para quaisquer* $r, s \in \mathbb{Q}$ *tais que* $r < s$, *tem-se* $a^r < a^s$;

(7) *Se* $a < 1$, *para quaisquer* $r, s \in \mathbb{Q}$ *tais que* $r < s$, *tem-se* $a^r > a^s$.

Demonstração.

(1) Tome $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, pelos itens (6) e (1) da Proposição 2.4, tem-se que

$$(1^m)^n = 1^{mn} = 1.$$

Por definição de raiz n-ésima, obtém-se

$$1^r = 1^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{1^m} = 1.$$

(2) Tome $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, com $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$. Por definição de raiz n-ésima de a^m, tem-se que $(a^r)^n = (a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$, e, novamente por definição de raiz q-ésima, tem-se $(a^s)^q = (a^{\frac{p}{q}})^q = a^p$. Agora, pelo item (4) da Proposição (2.4), tem-se

$$(a^r \cdot a^s)^{nq} = (a^r)^{nq} \cdot (a^s)^{nq}. \tag{2.20}$$

Pelo item (7) da Proposição 2.4, obtém-se

$$(a^r)^{nq} \cdot (a^s)^{nq} = [(a^r)^n]^q \cdot [(a^s)^q]^n = (a^m)^q \cdot (a^p)^n = (a^m)^q \cdot (a^n)^p. \tag{2.21}$$

Por outro lado, pelos itens (7) e (3) da Proposição 2.4,

$$(a^m)^q \cdot (a^n)^p = a^{mq} \cdot a^{np} = a^{mq+np}. \tag{2.22}$$

Portanto, de (2.20), (2.21) e (2.22), tem-se

$$(a^r \cdot a^s)^{nq} = a^{mq+np}.$$

Assim, tem-se que $a^r \cdot a^s$ é a raiz nq-ésima de a^{mq+np}. Portanto, conclui-se que

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}.$$

(3) Analogamente ao item (1), tome $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de raiz n-ésima, tem-se que $(a^r)^n = (a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$ e $(b^r)^n = (b^{\frac{m}{n}})^n = b^m$. Então, pelo item (4) da Proposição 2.4, tem-se

$$(a^r \cdot b^r)^n = (a^r)^n \cdot (b^r)^n = a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m.$$

Assim, tem-se que $a^r \cdot b^r$ é a raiz n-ésima de $(a \cdot b)^m$. Portanto, conclui-se que

$$a^r \cdot b^r = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m} = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^r.$$

(4) Inicialmente, demonstrar-se-á que $(a^r)^s = a^{rs}$, para qualquer $r, s \in \mathbb{Q}$. Tome $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, com $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$. Então, pelo item (5) da Proposição (2.2), tem-se que

$$[(a^r)^s]^{nq} = \left[\left[(a^r)^{\frac{p}{q}}\right]^q\right]^n. \tag{2.23}$$

Agora, por definição de raiz q-ésima, tem-se que

$$\left[\left[(a^r)^{\frac{p}{q}}\right]^q\right]^n = [(a^r)^p]^n. \tag{2.24}$$

Pelo item (7) da Proposição 2.4 e por definição de raiz pn-ésima, tem-se

$$[(a^r)^p]^n = (a^r)^{pn} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{pn} = \left(a^{\frac{mp}{pn}}\right)^{pn} = a^{mp}. \tag{2.25}$$

Assim, de (2.23), (2.24) e (2.25) tem-se que, $[(a^r)^s]^{nq} = a^{mp}$. Logo, por definição de raiz nq-ésima, tem-se $(a^r)^s = \sqrt[nq]{a^{mp}}$. Portanto,

$$(a^r)^s = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{r \cdot s}.$$

Finalmente, dados $r, s \in \mathbb{Q}$, pelo visto anteriormente, $(a^s)^r = a^{s \cdot r}$. Assim,

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s} = a^{s \cdot r} = (a^s)^r.$$

(5) Tome $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Procedendo pelo absurdo, suponha que $a^{\frac{m}{n}} \geq b^{\frac{m}{n}}$, então, tem-se $a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}$ ou $a^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{m}{n}}$. Se $a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}$. Por definição de raiz n-ésima tem-se que $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n > \left(\sqrt[n]{b^m}\right)^n$ e então $a^m > b^m$, assim,

$$a > b,$$

o que é uma contradição. Se $a^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{m}{n}}$. Por definição de raiz n-ésima tem-se que$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = \left(\sqrt[n]{b^m}\right)^n$ e, portanto, $a^m = b^m$. Logo, pelo item (10) da Proposição 2.2, segue que

$$a = b,$$

o que também é uma contradição. Como em qualquer caso, obtém-se uma contradição, conclui-se que $a^r < b^r$.

(6) Seja $a > 1$. Dados $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $r < s$, tem-se $s - r > 0$. Como $a > 1$, pelo item (8) da Proposição 2.2,

$$a^{s-r} > 1^{s-r}.$$

Por outro lado, pelo item (1), $1^{s-r} = 1$. Logo

$$a^{s-r} > 1. \tag{2.26}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.26) por a^s, obtém-se

$$a^{s-r} \cdot a^r > 1 \cdot a^r = a^r.$$

Finalmente, pelo item (2), conclui-se

$$a^s = a^{(s-r)+s} = a^{s-r} \cdot a^r > a^r.$$

(7) Seja $a < 1$. Dados $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $r < s$, tem-se $s - r > 0$. Como $a < 1$, pelo item (8) da Proposição 2.2,

$$a^{s-r} < 1^{s-r}.$$

Por outro lado, pelo item (1), $1^{s-r} = 1$. Logo

$$a^{s-r} < 1. \tag{2.27}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.27) por a^r, obtém-se

$$a^{s-r} \cdot a^r < 1 \cdot a^r = a^r.$$

Finalmente, pelo item (2), conclui-se

$$a^s = a^{(s-r)+s} = a^{s-r} \cdot a^r < a^r.$$

□

Novamente, pela Proposição 2.6, a função $f_a^{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, definida por $f_a^{\mathbb{Q}}(r) = a^r$, satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $f_a^{\mathbb{Q}}(r+s) = f_a^{\mathbb{Q}}(r) \cdot f_a^{\mathbb{Q}}(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$;

(3) Se $a > 1$, então $f_a^{\mathbb{Q}}$ é crescente;

(4) Se $0 < a < 1$, então $f_a^{\mathbb{Q}}$ é decrescente.

Além disso, mostra-se que $f_a^{\mathbb{Q}}$ é ilimitada superiormente.

2.2.4 Potências com expoentes reais

Seguindo no roteiro anterior, nesta subseção irá estender a definição de potência para expoentes reais. Para isso, seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$, define-se o conjunto

$$T_x(a) = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, \quad r \leq x\}.$$

Observe que o conjunto $T_x(a)$ é não vazio. Além disso, ele é limitado superiormente e, portanto, existe o supremo[2] de $T_x(a)$.

Agora, para todo $r \in \mathbb{Q}$, mostra-se que

$$a^r = \sup T_r(a).$$

Em virtude disto, para um número real x, define-se *a potência de base a e expoente x* como sendo

$$a^x := \sup T_x(a).$$

Se a é um número real tal que $0 < a < 1$ é natural definir

$$a^x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Assim, como estabelecido nas subseções (2.2.1), (2.2.2) e (2.2.3), a potência de base a e expoente real satisfaz propriedades análogas a essas, as quais serão apresentadas sem demonstração na proposição seguinte.

[2]Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se *o supremo* do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X.

Proposição 2.7. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ com $a, b \neq 1$. São satisfeitas as seguintes propriedades:*

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$;

(2) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$;

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

(5) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$;

(6) *se* $a > 1$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$ *tais que* $x < y$ *tem-se* $a^x < a^y$;

(7) *se* $0 < a < 1$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$ *tais que* $x < y$ *tem-se* $a^x > a^y$.

2.2.5 A função $\exp_a$

A função $f_a^{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f_a^{\mathbb{R}}(x) = a^x$, chama-se *função exponencial com base a*, e denota-se por

$$\exp_a .$$

Em particular:

- $\exp_a(n) = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{vezes}}, \quad$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$;

- $\exp_a(n) = \frac{1}{a^{-n}}, \quad$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$;

- $\exp_a(r) = a^r = a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}, \quad$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}$ com $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$;

- $\exp_a(x) = a^x := \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$.

Pela Proposição 2.7, dado $a \in \mathbb{R}^+$, com $a \neq 1$,[3] a função $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

(2) Se $a > 1$, então, $\exp_a$ é crescente;

(3) Se $0 < a < 1$, então $\exp_a$ é decrescente.

[3] Essa restrição é necessária, pois 1 elevado a qualquer número resulta em 1. Logo, em vez de exponencial, terá-se uma função constante.

A propriedade (1) diz que, a função exponencial de base a transforma somas em produtos. Além disso, mostra-se que $\exp_a$ é ilimitada superiormente, contínua, sobrejetiva e côncava.

A Figura 2.3 mostra os gráficos das funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definidas por $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$, com $a > 1$ e $0 < b < 1$, as quais podem-se observar que f é crescente e g é decrescente.

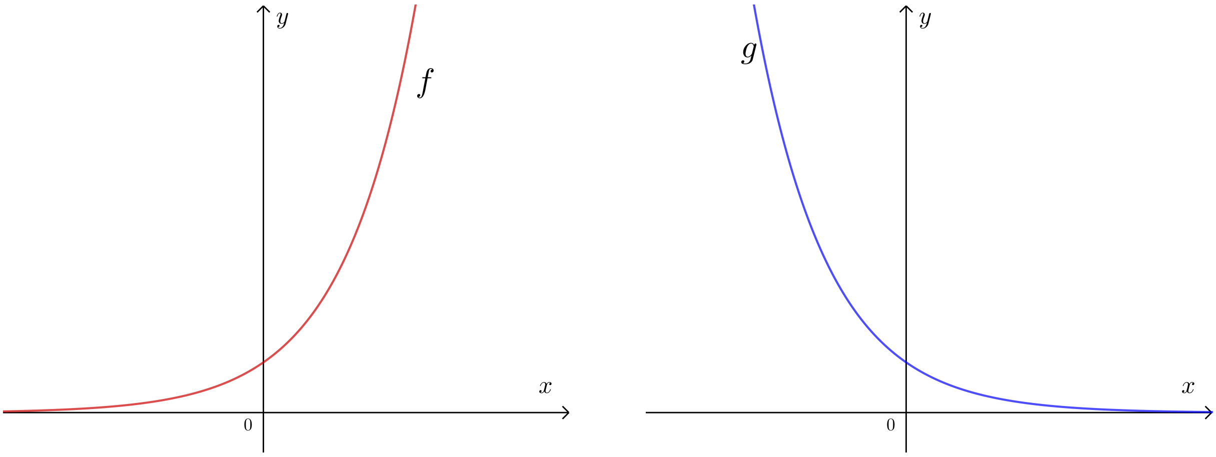

Figura 2.3: $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$

2.3 A função logarítmica

Nesta seção, dar-se-á a definição de *função logarítmica*, estabelecendo suas propriedades básicas. Viu-se na subseção 2.2.5 que, para todo número real positivo $a \neq 1$ a função exponencial $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, é uma correspondência biunívoca, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y),$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Sendo $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijetiva, segue que possui uma função inversa. A inversa da função exponencial de base a, é a função

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$. A função $\log_a$ é chamada de *função logaritmo na base a*. O número $\log_a x$ é chamado de *logaritmo de x na base a*.

Em particular, $\exp_a \circ \log_a = \mathcal{I}_{\mathbb{R}^+}$ e $\log_a \circ \exp_a = \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$. [4]

Ressalta-se ainda que, se X e Y são subconjuntos de números reais não vazios e $f^{-1} : Y \to X$ é a inversa da função $f : X \to Y$, então o gráfico da função f^{-1} é o simétrico[5] do gráfico da função f, em relação a diagonal[6] $\Delta \subset \mathbb{R}^2$.

As figuras (2.4) (2.5) mostram os gráficos das funções $\exp_a, \exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ e $\log_a, \log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, com $a > 1$ e $0 < b < 1$, as quais podem-se observar que $\exp_a$ e $\log_a$ são crescentes e $\exp_b$ e $\log_b$ são decrescentes.

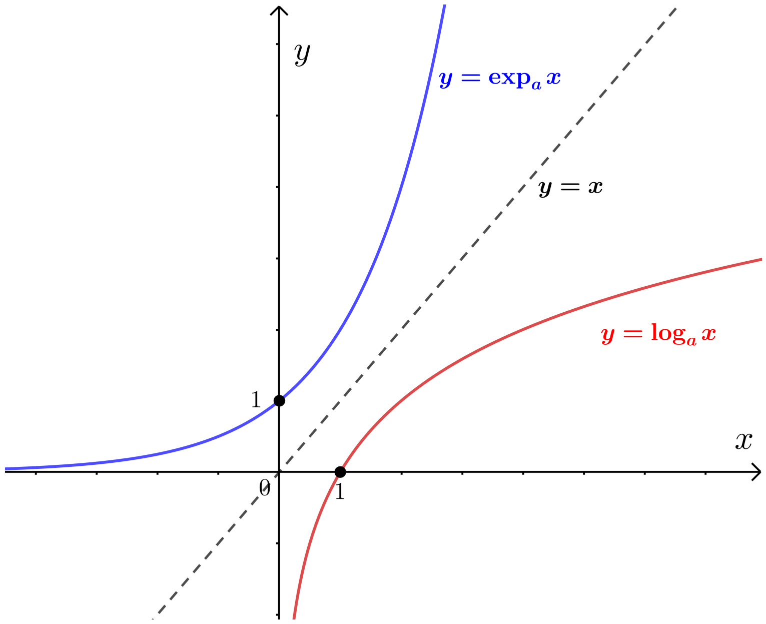

Figura 2.4: As funções $\exp_a$ e $\log_a$, $\quad a > 1$

[4]Se X é um conjunto não vazio, define-se a *função identidade* de X, como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

[5]Dois pontos P e Q no plano dizem-se *simétricos* em relação a uma reta r nesse plano, quando r é a mediatriz do segmento PQ. Duas figuras dizem-se *simétricas* em relação à reta r quando cada ponto de uma delas é o simétrico de um ponto da outra em relação a essa reta.

[6]Chama-se *diagonal* do plano $\mathbb{R}^2$ a reta $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

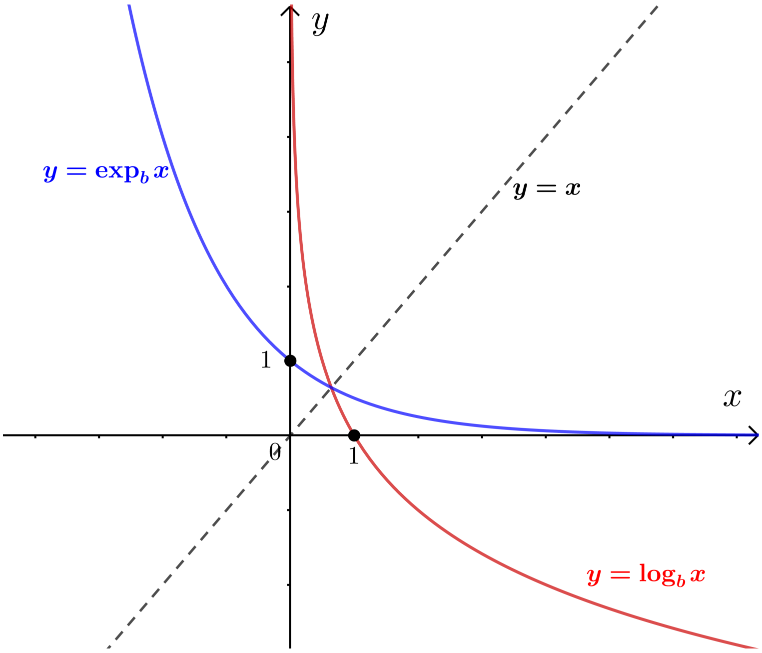

Figura 2.5: $\exp_b$ e $\log_b$, $\quad 0 < b < 1$

A seguir, apresenta-se algumas propriedades da função logaritmo.

Proposição 2.8. *Seja $a \in \mathbb{R}^+$ com $a \neq 1$. São satisfeitas as seguintes propriedades:*

(1) $a^{\log_a x} = x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$;

(2) $\log_a a^x = x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

(3) *para quaisquer* $x \in \mathbb{R}^+$ *e* $y \in \mathbb{R}$, $y = \log_a x$ *se, e somente se,* $a^y = x$;

(4) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$;

(5) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$;

(6) *para qualquer* $c \in \mathbb{R}$, $\log_a x^c = c \cdot \log_a x$, $\quad$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$;

(7) *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\log_a x = \log_a y \cdot \log_y x$;

(8) *se* $a > 1$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$ *tais que* $x < y$ *tem-se* $\log_a x < \log_a y$;

(9) *se* $0 < a < 1$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$ *tais que* $x < y$ *tem-se* $\log_a x > \log_a y$.

Demonstração.

(1) Como $\log_a$ é a inversa da função $\exp_a$, então

$$a^{\log_a x} = \exp_a(\log_a x) = x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

(2) Analogamente, como em (1), sendo $\exp_a$ a inversa de $\log_a$, tem-se

$$\log_a a^x = \log_a(\exp_a x) = x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

(3) Sejam $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$. Se $y = \log_a x$, pelo item (1),

$$a^y = a^{\log_a x} = x.$$

Reciprocamente, se $x = a^y$ então, pelo item (2),

$$\log_a x = \log_a a^y = y.$$

(4) Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, sejam $b = \log_a x$ e $c = \log_a y$. Pelo item (3), $a^b = x$ e $a^c = y$. Então,

$$\log_a xy = \log_a(a^b \cdot a^c). \tag{2.28}$$

Pelo item (1) da Proposição 2.7,

$$\log_a(a^b \cdot a^c) = \log_a a^{b+c}. \tag{2.29}$$

Finalmente, pelo item (2),

$$\log_a a^{b+c} = b + c. \tag{2.30}$$

Logo, de (2.28), (2.29) e (2.30), conclui-se que

$$\log_a xy = \log_a(a^b \cdot a^c) = \log_a a^{b+c} = b + c = \log_a x + \log_a y.$$

(5) Inicialmente, provar-se-á um caso particular.

Afirmação: $\log_a y^{-1} = -\log_a y$, para todo $y \in \mathbb{R}^+$.

Prova da afirmação: Tem-se que,

$$0 = \log_a 1 = \log_a y^{-1} \cdot y. \tag{2.31}$$

Pelo item (4),

$$\log_a y^{-1} \cdot y = \log_a y^{-1} + \log_a y. \tag{2.32}$$

Então, de (2.31) e (2.32),

$$\log_a y^{-1} + \log_a y = 0$$

e, portanto,

$$\log_a y^{-1} = -\log_a y.$$

Mostra-se, agora, o caso geral. De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, tem-se

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1}. \tag{2.33}$$

Pelo item (4),

$$\log_a xy^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1}. \tag{2.34}$$

Finalmente, pela afirmação anterior,

$$\log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y. \tag{2.35}$$

De (2.33), (2.34) e (2.35),

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

(6) Dados $x \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}$, sejam $y = \log_a x$ e $b = \log_a x^c$. Pelo item (3), $a^y = x$ e $a^b = x^c$. Então, $a^b = (a^y)^c$. Pelo item (3) da Proposição 2.7,

$$a^b = (a^y)^c = a^{cy},$$

ou seja

$$a^{\log_a x^c} = a^{c \cdot \log_a x}.$$

Como a função $\exp_a$ é injetiva, obtém-se

$$\log_a x^c = c \cdot \log_a x.$$

(7) Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, considere $u = \log_a x, \quad v = \log_a y \quad \text{e} \quad w = \log_y x$. Então, pelo item (3), tem-se que

$$a^u = x, \quad a^v = y \quad \text{e} \quad y^w = x.$$

Logo,

$$a^u = x = y^w = (a^v)^w.$$

Pelo item (3) da Proposição 2.7, obtém-se

$$a^u = a^{vw}$$

ou equivalentemente

$$a^{\log_a x} = a^{\log_a y \cdot \log_y x}.$$

Como a função $\exp_a$ é injetiva, conclui-se que

$$\log_a x = \log_a y \cdot \log_y x.$$

(8) Suponha-se $a > 1$ e sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$ tais que $x < y$. Considere $z = \log_a x$ e $w = \log_a y$. Pelo item (3), tem-se que $a^z = x$ e $a^w = y$. Como $x < y$, então $a^z < a^w$. Sendo a função $\exp_a$ crescente, segue que,

$$z < w.$$

Isto é, $\log_a x < \log_a y$.

(9) Suponha-se $0 < a < 1$ e sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$ tais que $x < y$. Considere $z = \log_a x$ e $w = \log_a y$. Pelo item (3), tem-se que $a^z = x$ e $a^w = y$. Como $x < y$, então $a^z < a^w$. Sendo a função $\exp_a$ decrescente, segue que,

$$z > w.$$

Isto é, $\log_a x > \log_a y$. □

Pela Proposição 2.8, dado $a \in \mathbb{R}^+$, com $a \neq 1$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

(2) Se $a > 1$, então $\log_a$ é crescente;

(3) Se $0 < a < 1$, então $\log_a$ é decrescente.

A propriedade (7) da função logaritmo de base a é conhecida como *mudança de base*. Tem-se, ainda, que $\log_a$ é ilimitada superiormente, contínua e sobrejetiva. A propriedade (4), de transformar produtos em somas:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século XVII, e de sua popularidade, até bem recentemente, como um eficiente instrumento de cálculo.

Essa importância é permanente: jamais desaparecerá porque, sendo a inversa da função exponencial (portanto equivalente a ela), a função logaritmo esta ligada a um grande números de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à mesma existente no instante dado.

As funções logarítmicas mais utilizadas são aquelas de base $a > 1$, especialmente as de base 10 (logaritmos *decimais*), base 2 (logaritmos *binários*) e de base e (logaritmos *naturais*), cujas notações para base 10 e base e são:

$$\log := \log_{10} \quad \text{e} \quad \ln := \log_e .$$

Capítulo 3

Problemas olímpicos relacionados com as funções Exponencial e Logarítmica

Neste capítulo, apresenta-se Problemas Olímpicos relacionados com as Funções Exponenciais e Logarítmicas, que foram cobrados em competições nacionais ou internacionais, os quais a maioria deles sofreram pequenas alterações no contexto pelo orientador do trabalho. Estes exercícios foram selecionados em livros e sítios de internet, estão organizados por nível de dificuldade, em cada respectiva seção. O critério de seleção usado, na escolha deles, foi a maior aplicação de propriedades das funções supracitadas.

Na resolução dos problemas apresentados foram explorados a criatividade, interpretação e aplicação de teoremas e proposições. As resoluções foram colocadas com todos os detalhes necessários, a fim de mostrar as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas. Salvo menção contrária, o universo solução das equações dos problemas selecionados é o conjunto dos números reais. Sempre quando possível, acrescentou-se um gráfico para facilitar a compreensão do problema proposto, para os quais utilizou-se o software GeoGebra.

Ressalta-se, que estes problemas podem ser trabalhados com alunos do Ensino Médio. No Capítulo 4, apresentaremos uma proposta de atividades envolvendo problemas olímpicos do mesmo molde que os apresentados na próxima seção.

3.1 Problemas asiáticos

Nesta seção, traz-se uma sequência de problemas apresentados em provas de diversos países asiáticos.

O Problema 1, extraído de Andreescu e Feng (2001), foi apresentado na *Korean*

Mathematics Competition, na Coreia, no ano de 2000. Este exercício pode ser trabalhado com o primeiro ano do Ensino Médio.

Problema 1 (Coreia, 2000)**.** Determine o conjunto solução da equação

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1.$$

Solução.
Pondo $2^x = a$ e $3^x = b$, e substituindo na equação dada tem-se

$$a^2 + b^2 - a - b - ab + 1 = 0. \tag{3.1}$$

Multiplicando ambos os membros da Equação 3.1 por 2, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 = 2a^2 + 2b^2 - 2a - 2b - 2ab + 2 &= (a^2 - 2a + 1) + (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2b + 1) \\ &= (a-1)^2 + (a-b)^2 + (b-1)^2 . \end{aligned}$$

Como

$$0 \leq (a-1)^2 \leq (a-1)^2 + (a-b)^2 + (b-1)^2 = 0,$$

segue que $a = 1$ e, portanto, $2^x = 1$. Logo, $x = 0$. Por outro lado, $2^0 + 3^0 - 4^0 + 6^0 - 9^0 = 1$. Portanto, $\{0\}$ é o conjunto solução da equação $2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$.

A Figura 3.1, ilustra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x$ e $g(x) = 1$. A abscissa do ponto de interseção destas funções, representa a solução da equação dada.

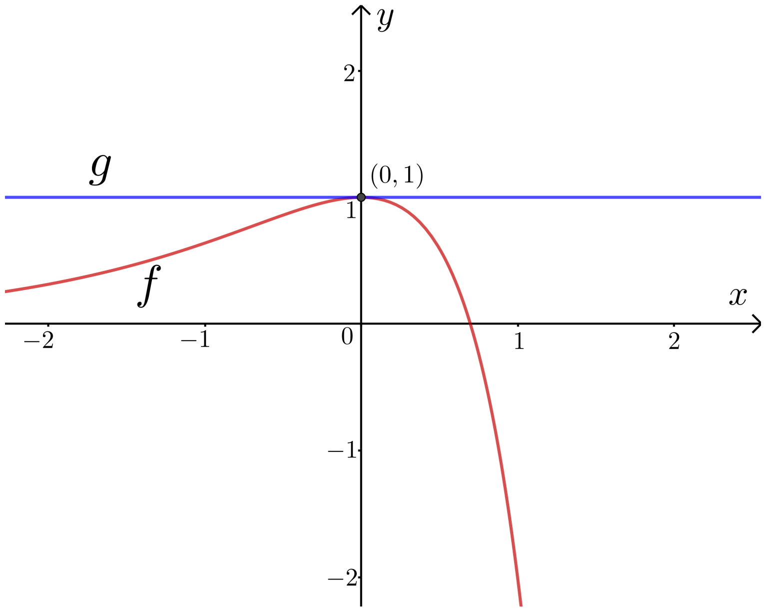

Figura 3.1: $2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$

O problema 2, extraído de Bin e Yee (2007), foi exposto na *China Mathematical Competition*, realizada na China, na província de Jilin, no ano de 2002. Este exercício pode ser trabalhado com o primeiro ano do Ensino Médio. Para este Problema utiliza-se o conceito de função par e função ímpar, sendo assim: Dado uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diz-se que f é *par* se tem $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, . Se tem $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a função chama-se *ímpar*.

Problema 2 (China, 2002)**.** Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2^x} - \frac{x}{2}.$$

Ao respeito da função f, pode-se afirmar:

(a) f é par.

(b) f é ímpar.

(c) f não é par nem ímpar.

(d)f é par e ímpar.

Solução.

Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, utilizando-se as propriedades das potências, tem-se:

$$
\begin{aligned}
f(-x) = \frac{-x}{1-2^{-x}} - \frac{-x}{2} &= \frac{-x}{1-\frac{1}{2^x}} + \frac{x}{2} \\
&= \frac{-x}{\frac{2^x-1}{2^x}} + \frac{x}{2} \\
&= \frac{x \cdot 2^x}{1-2^x} + \frac{x}{2} \\
&= \frac{x - x(1-2^x)}{1-2^x} + \frac{x}{2} \\
&= \frac{x}{1-2^x} - x + \frac{x}{2} \\
&= \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2} \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

Portanto, f é uma função par. Consequentemente, a alternativa correta, é o item (a).

A Figura 3.2, ilustra a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2}$, a qual observa-se que é simétrica a respeito do eixo y.

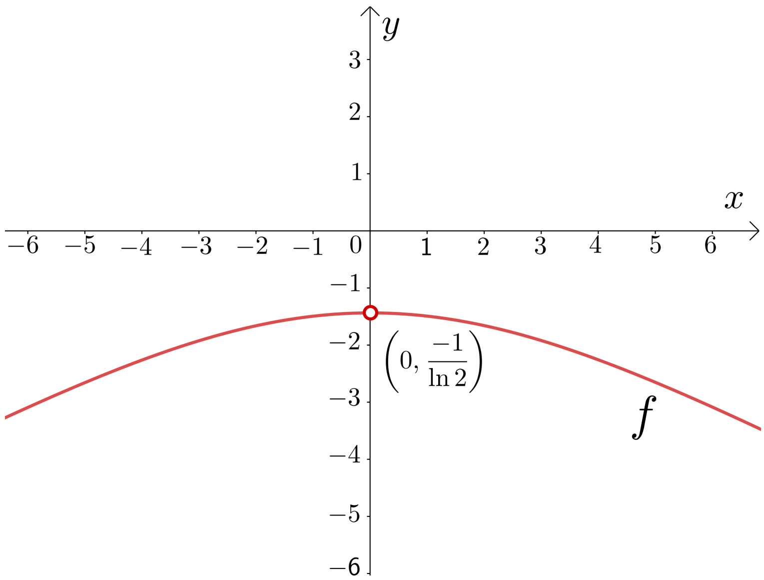

Figura 3.2: $f(x) = \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

O Problema 3 a seguir, extraído de Bin e Yee (2007), foi exposto na *China Mathematical Competition*, na Província de Hainan, na China no ano de 2004. Este exercício pode ser trabalhado com o primeiro ano do Ensino Médio.

Problema 3 (China 2004)**.** O conjunto solução da inequação

$$\sqrt{\log_2 x - 1} + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3 + 2 > 0$$

é:

(a) $[2,3)$ (b)$(2,3]$ (c) $[2,4)$ (d) $(2,4]$

Solução.

Observamos inicialmente que uma solução x deve satisfazer $\log_2 x - 1 \geq 0$, o qual é equivalente a $\log_2 x \geq 1 = \log_2 2$, e isto é equivalente a $x \geq 2$ (pois a função $x \longmapsto \log_2 x$ é crescente).

Por outro lado, a inequação dada pode ser reescrita como

$$\sqrt{\log_2 x - 1} + \frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2}} x + 2 > 0. \tag{3.2}$$

Agora, pela propriedade da mudança de base, tem-se que:

$$\sqrt{\log_2 x - 1}+\frac{3}{2}\log_{2^{-1}} x+2 = \sqrt{\log_2 x - 1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(-1)}\log_2 x+2 = \sqrt{\log_2 x - 1}-\frac{3}{2}\log_2 x+2.$$

Logo, a Inequação 3.2, é equivalente a

$$\sqrt{\log_2 x - 1} - \frac{3}{2}\log_2 x + 2 > 0. \tag{3.3}$$

Pondo, agora, $t = \sqrt{\log_2 x - 1}$, obtém-se $t^2 = \log_2 x - 1$ o qual é equivalente a $t^2 + 1 = \log_2 x$.

Logo, a Inequação 3.3, é equivalente ao seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} t - \frac{3}{2}(t^2+1) + 2 > 0, \\ t \geq 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Como

$$t - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2} + 2 = -\frac{3}{2}t^2 + t + \frac{1}{2},$$

segue que (3.4) é equivalente à:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} > 0, \\ t \geq 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Agora, para cada $t \in \mathbb{R}$ com $t \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3t^2 - 2t - 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (3t+1)(t-1) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 3t+1 < 0 \quad \text{e} \quad t-1 > 0 \quad \text{ou} \quad 3t+1 > 0 \quad \text{e} \quad t-1 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t < -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad t > 1 \quad \text{ou} \quad t > -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad t < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} < t < 1. \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq t < 1.
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução do sistema (3.5) é $[0, 1)$.

Finalmente, sendo $t = \sqrt{\log_2 x - 1}$, obtém-se,

$$0 \leq \sqrt{\log_2 x - 1} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \log_2 x - 1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 2 = 1 \leq \log_2 x < 2 = \log_2 4.$$

Sendo a função $x \mapsto \log_2 x$ crescente, segue que

$$0 \leq \sqrt{\log_2 x - 1} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq x < 4.$$

Consequentemente, o conjunto solução da inequação dada é $[2, 4)$. Assim, a alternativa correta, é o item (c).

A Figura 3.3, ilustra a função $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{\log_2 x - 1} + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3 + 2$ a qual observa-se que na parte do intervalo $[2, 4)$, o seu gráfico encontra-se acima do eixo x.

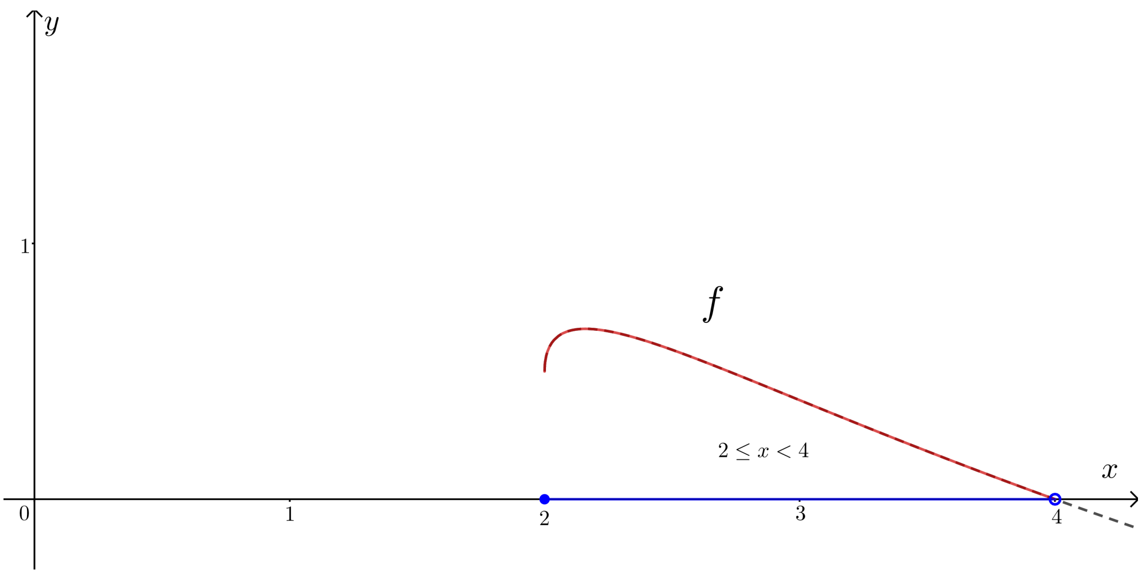

Figura 3.3: $f(x) = \sqrt{\log_2 x - 1} + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3 + 2, \quad x \geq 2$

O Problema 4, extraído de Aops (2018), foi apresentado na *India National Olympiad*, na Índia no ano de 1986. Este exercício pode ser trabalhado com o segundo ano do Ensino Médio.

Problema 4 (Índia, 1986)**.** Resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$$

Solução.
Note inicialmente que $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$. Assim, a primeira equação do sistema inicial, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 &\Leftrightarrow \log_2 x + \log_{2^2} y + \log_{2^2} z = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow \log_2\left(x^2yz\right) = 4 \\ &\Leftrightarrow x^2yz = 2^4. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Analogamente ao caso anterior, a segunda equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 &\Leftrightarrow \log_2 y + \log_{3^2} z + \log_{3^2} x = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2\log_3 y + \log_3 z + \log_3 x\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow \log_3\left(y^2zx\right) = 4 \\ &\Leftrightarrow y^2zx = 3^4. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Finalmente, a terceira equação pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} \log_4 z + \log_1 6x + \log_1 6y = 2 &\Leftrightarrow \log_4 z + \log_{4^2} x + \log_{4^2} y = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2\log_4 z + \log_4 x + \log_4 y\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow \log_4\left(z^2xy\right) = 4 \\ &\Leftrightarrow z^2xy = 4^4. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Assim, de (3.7), (3.8) e (3.9), o sistema de equações dado é equivalente ao seguinte sistema:

$$x^2yz = 2^4, \tag{3.9}$$

$$y^2zx = 3^4, \tag{3.10}$$

$$z^2xy = 4^4. \tag{3.11}$$

Multiplicando os três membros das equações (3.9), (3.10) e (3.11), lado a lado, obtém-se a seguinte igualdade

$$(xyz)^4 = (2 \cdot 3 \cdot 4)^4 = 24^4.$$

Pela injetividade da função $w \mapsto w^4, \quad w > 0$, conclui-se que

$$xyz = 24, \tag{3.12}$$

pois $xyz > 0$. Logo, substituindo (3.12) em (3.9), (3.10) e (3.11), tem-se

$$x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{27}{8} \quad \text{e} \quad z = \frac{32}{3}.$$

Por outro lado, $\left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right)$ é solução das equações (3.9), (3.10) e (3.11), pois

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{27}{8} \cdot \frac{32}{3} = \frac{3456}{216} = 16 = 2^4,$$

$$\left(\frac{27}{8}\right)^2 \cdot \frac{32}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{46656}{576} = 81 = 3^4,$$

$$\left(\frac{32}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{8} = \frac{55296}{216} = 256 = 4^4.$$

Portando, $\left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right)$ é a única solução do sistema dado.

A Figura 3.4, ilustra a função $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \frac{16}{x^2y}$.

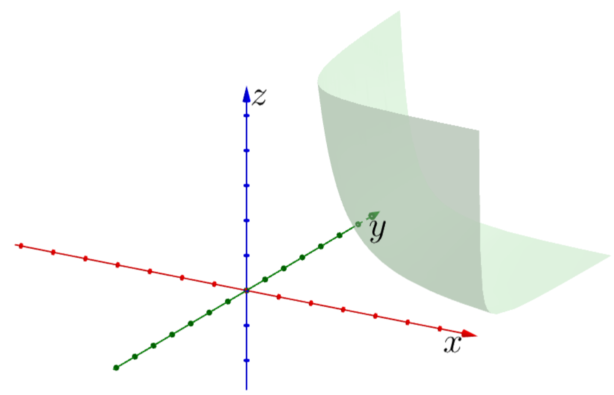

Figura 3.4: $f(x, y) = \frac{16}{x^2y}, \quad x, y > 0$

Fonte: elaborado pela autora

A Figura 3.5, ilustra a função $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(x, y) = \frac{81}{xy^2}$.

A Figura 3.6, ilustra a função $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $h(x, y) = \sqrt{\frac{256}{xy}}$.

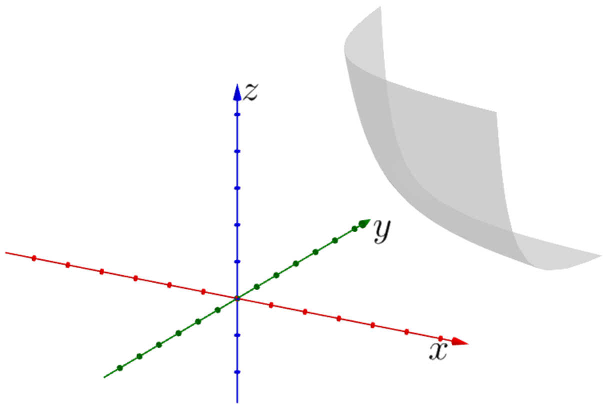

Figura 3.5: $g(x, y) = \frac{81}{xy^2}, \quad x, y > 0$

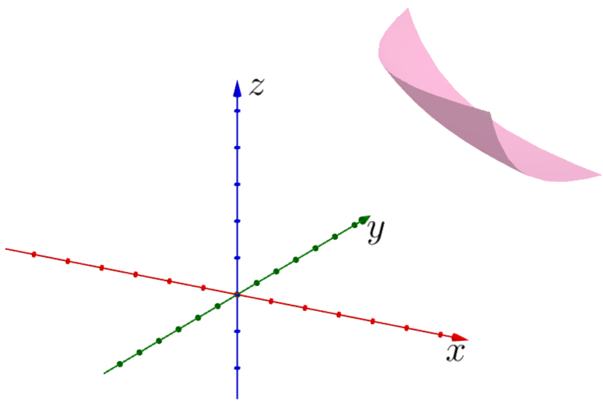

Figura 3.6: $h(x, y) = \sqrt{\frac{256}{xy}}, \quad x, y > 0$

A Figura 3.7, ilustra as interseção das funções $f, g, h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, o qual o ponto P, representa a solução do sistema dado.

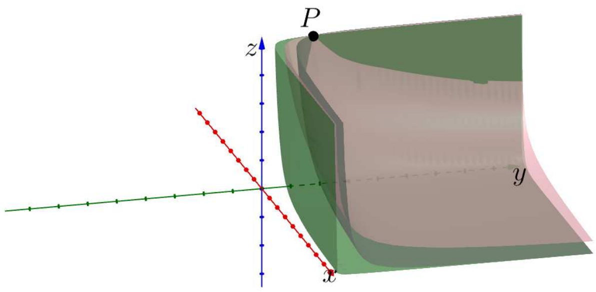

Figura 3.7: Ponto de interseção de f, g e $h : P = \left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right)$

O Problema 5, extraído de Bin e Yee (2007), foi cobrado na *China Mathematical*

Competition, na Província de Jilin no ano de 2002.

Problema 5 (China 2002)**.** Seja $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1\right\}$.

(a) Prove que $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2\,|y|\ x^2 - 4y^2 = 4\right\}$, e conclua que X tem infinitos elementos.

(b) Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = |x| - |y|$. Prove que f possui mínimo, e determine-o.

Solução.
(a) Usando as propriedades dos logaritmos, podemos reescrever a equação

$$\underbrace{\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y)}_{\log_4(x+2y)(x-2y)} = 1 = \log_4 4$$

da seguinte forma:

$$\begin{cases} x + 2y > 0, \\ x - 2y > 0, \\ \log_4(x+2y)(x-2y) = \log_4 4. \end{cases} \tag{3.13}$$

Pela injetividade da função $x \mapsto \log x$, o Sistema 3.13 é equivalente ao sistema de equações:

$$\begin{cases} x > -2y, \\ x > 2y, \\ (x+2y)(x-2y) = 4. \end{cases} \tag{3.14}$$

O Sistema 3.14 é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x > 2\,|y|\,, \\ x^2 - 4y^2 = 4. \end{cases} \tag{3.15}$$

Portanto, $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2\,|y|\,,\ x^2 - 4y^2 = 4\right\}$.

A seguir, mostra-se que X tem infinitos elementos. De fato, da segunda equação do Sistema 3.15, tem-se;

$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 = 4 + 4y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad |x| = \sqrt{4+4y^2} = \sqrt{4(1+y^2)} = 2\sqrt{1+y^2}. \end{aligned}$$

Sendo $x > 0$ (pois $x > 2|y| \geq 0$), tem-se que $x = 2\sqrt{1+y^2}$. Por outro lado, $x = 2\sqrt{1+y^2} > 2\sqrt{y^2} = 2|y|$. Logo, se $(x, y) \in X$, então $x = 2\sqrt{1+y^2}$.

Reciprocamente, $\left(2\sqrt{1+y^2}, y\right) \in X$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto, $X = \left\{ \left(2\sqrt{1+t^2}, t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$. Em particular, X possui infinitos elementos. O gráfico de X é dado na Figura 3.8.

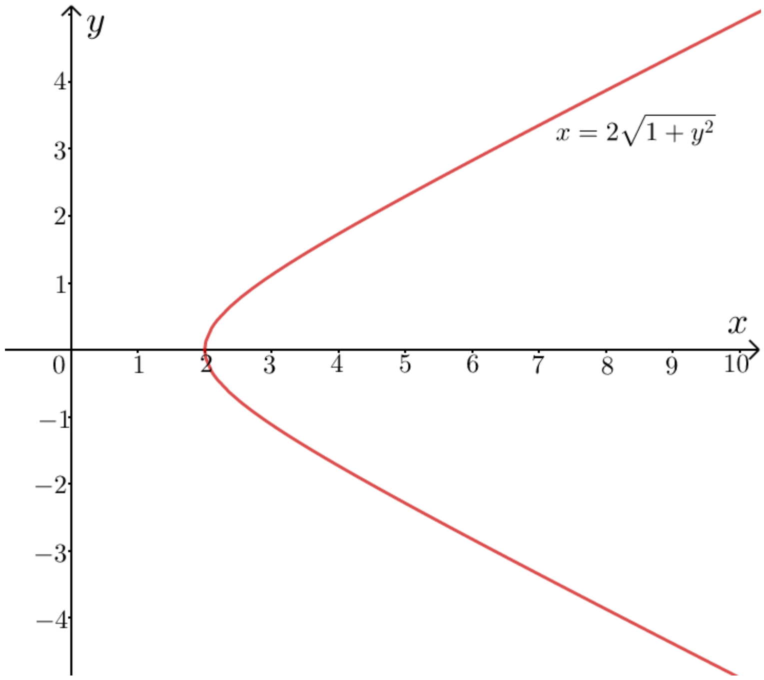

Figura 3.8: $X = \left\{\left(2\sqrt{1+y^2}, y\right) : y \in \mathbb{R}\right\}$

(b) Para todo $(x, y) \in X$, tem-se que $f(x, y) = f(x, -y)$. Assim, pode-se considerar apenas o caso $y \geq 0$. Tendo em vista que $x > 0$, precisa-se encontrar apenas o valor mínimo da função $f_+ : (x, y) \mapsto x - y, \quad (x, y) \in X \quad \text{e} \quad y \geq 0$.

Assim, fazendo $z = f_+(x, y) = x - y$, temos que $x = z + y$. Substituindo este valor de x em $x^2 - 4y^2 = 4$, obtém-se

$$\begin{aligned} (z+y)^2 - 4y^2 - 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 + 2zy + y^2 - 4y^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -3y^2 + 2zy + z^2 - 4 = 0 \cdot (-1) \\ &\Leftrightarrow \quad 3y^2 - 2zy - z^2 + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3y^2 - 2zy + (4 - z^2) = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

A equação de segundo grau $3y^2 - 2zy + (4 - z^2) = 0$ (na variável y) possuirá solução se, e somente se, $(-2z)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (4 - z^2) \geq 0$, o qual é equivalente a:

$$\begin{aligned} 4z^2 - 12(4 - z^2) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 16z^2 - 48 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 16z^2 \geq 48 \\ &\Leftrightarrow z^2 \geq 3 \\ &\Leftrightarrow |z| \geq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Sendo $y \geq 0 \quad \text{e} \quad x > 2\,|y|$, tem-se que $z = x - y > 2\,|y| - y = 2y - y = y \geq 0$. Então,

$$(-2z)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (4 - z^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \geq \sqrt{3}.$$

Logo, para todo $(x, y) \in X$ com $y \geq 0$, tem-se que $f_+(x, y) = x - y = z \geq \sqrt{3}$. Assim, a Equação 3.16 possui solução se, e somente se, $z \geq \sqrt{3}$.

A continuação, mostra-se que existe $(x, y) \in X$ com $y \geq 0$ tal que $z = x - y = \sqrt{3}$. De fato, para $z = \sqrt{3}$, de (3.16), tem-se:

$$3y^2 - 2\sqrt{3}y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Logo, para $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, de $x - y = \sqrt{3}$, tem-se $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Observe que $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \in X$. De fato, substituindo $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ no sistema de equações (3.15) tem-se

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} > \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

e

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{12}{3} = 4.$$

Segue então que, $f_+(x, y) \geq \sqrt{3} = f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, para todo $(x, y) \in X$ com $y \geq 0$. Consequentemente, $f(x, y) = |x| - |y| = x - |y| = f_+(x, |y|) \geq f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, para todo $(x, y) \in X$. Portanto, o valor mínimo de f é $f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}$.

3.2 Problemas africanos

Nesta seção, apresenta-se dois problemas expostos na Olimpíada Nacional da África do Sul.

Os Problemas 6 e 7, foram extraídos de Aops (2018) e, foram apresentados na *South Africa National Olympiad* , na África do Sul, no ano de 2011 e 1996 respectivamente.

Tais problemas podem ser trabalhados com alunos de todas as séries do Ensino Médio.

Problema 6 (África do Sul, 2011)**.** Determine o conjunto solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 1, \\ 4^x - 4^y = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Solução.
Considere $2^x = a \quad \text{e} \quad 2^y = b$. Assim, reescrevendo o sistema dado, tem-se

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ a^2 - b^2 = \frac{5}{3}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Isolando a na primeira equação do Sistema 3.17 obtém-se $a = b + 1$. Substituindo este valor na segunda equação, tem-se

$$(1+b)^2 - b^2 = \frac{5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2b + b^2 - b^2 = \frac{5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2b = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{3}.$$

Disso, conclui-se que $a = \frac{4}{3}$. Logo,

$$2^x = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad 2^y = \frac{1}{3}. \tag{3.18}$$

Aplicando $\log_2$ em ambos os lados das igualdades (3.18), tem-se que

$$\log_2 2^x = \log_2 \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \log_2 2 = \log_2 \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_2 \frac{4}{3}$$

e

$$\log_2 2^y = \log_2 \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y \log_2 2 = \log_2 \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y = \log_2 \frac{1}{3}.$$

Por outro lado,

$$\begin{cases} 2^{\log_2 \frac{4}{3}} - 2^{\log_2 \frac{1}{3}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1, \\ 4^{\log_2 \frac{4}{3}} - 4^{-\log_2 3} = 2^{\log_2 \left(\frac{4}{3}\right)^2} - 2^{\log_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\left\{ \left(\log_2 \frac{4}{3}, \log_2 \frac{1}{3} \right) \right\}$$

é o conjunto solução do sistema dado.

Problema 7 (África do Sul, 1996)**.** Determine o conjunto solução da equação

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Solução.
Multiplicando a equação inicial por $\frac{1}{5^x}$, a equação dada torna-se

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1. \tag{3.19}$$

Multiplicando por 5^x, a Equação 3.19 obtém-se a equação original. Logo, a equação dada é equivalente a Equação 3.19, a qual por sua vez, é equivalente a

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x - 1 = -\left(\frac{4}{5}\right)^x. \tag{3.20}$$

Considere $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1$ e $g(x) = -\left(\frac{4}{5}\right)^x$. Observe que f é decrescente e g é crescente. Como

$$f(2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{9}{25} - 1 = -\frac{16}{25} = -\left(\frac{4}{5}\right)^2 = g(2),$$

então $x = 2$ é solução da Equação 3.20.

Afirma-se que $x = 2$ é a única solução de (3.20). De fato, suponha-se que existe $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tal que a seja solução de (3.20). Então $f(a) = g(a)$. Assim, tem-se dois casos a serem analisados:

Caso 1. $a > 2$. Por hipótese f é crescente, então $f(a) > f(2)$. Por outro lado, sendo $f(a) = g(a)$ e $f(2) = g(2)$, obtém-se

$$g(a) = f(a) > f(2) = g(2).$$

Então, conclui-se que

$$g(a) > g(2),$$

o que é uma contradição, pois g é decrescente.

Caso 2. $a < 2$. Como f é crescente por hipótese, tem-se $f(a) < f(2)$. Por outro lado, $f(a) = g(a)$ e $f(2) = g(2)$ e, assim, obtém-se que

$$g(a) = f(a) < f(2) = g(2).$$

Então, conclui-se que $g(a) < g(2)$, uma contradição, pois g é decrescente.

Como em qualquer caso, obtém-se uma contradição, conclui-se que $a = 2$.

Assim, conclui-se que $x = 2$ é a única solução de (3.20). Portanto, $\{2\}$ é o conjunto solução da equação dada.

A Figura 3.9, ilustra a interseção das funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3^x + 4^x$ e $g(x) = 5^x$. A Figura 3.10, ilustra a interseção das funções $m, \ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $m(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1$ e $\ell(x) = -\left(\frac{4}{5}\right)^x$, cuja abscissa da sua interseção, é a mesma abscissa da interseção das funções f e g.

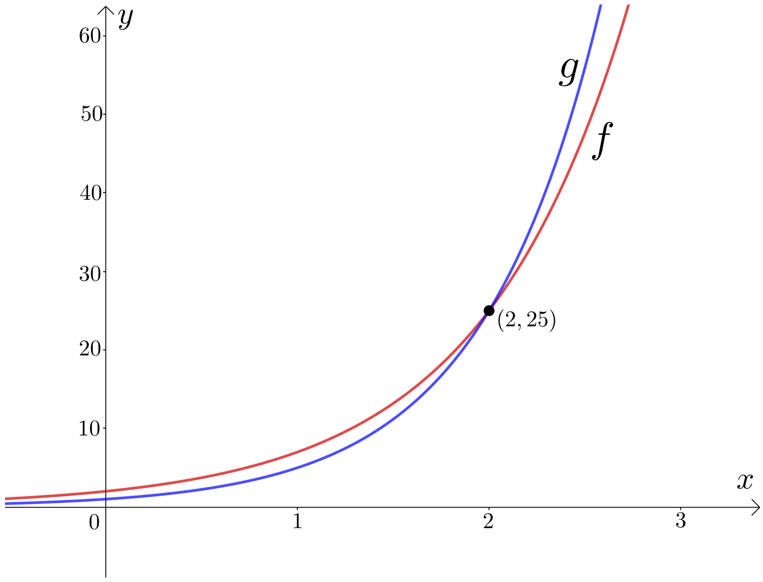

Figura 3.9: $3^x + 4^x = 5^x$

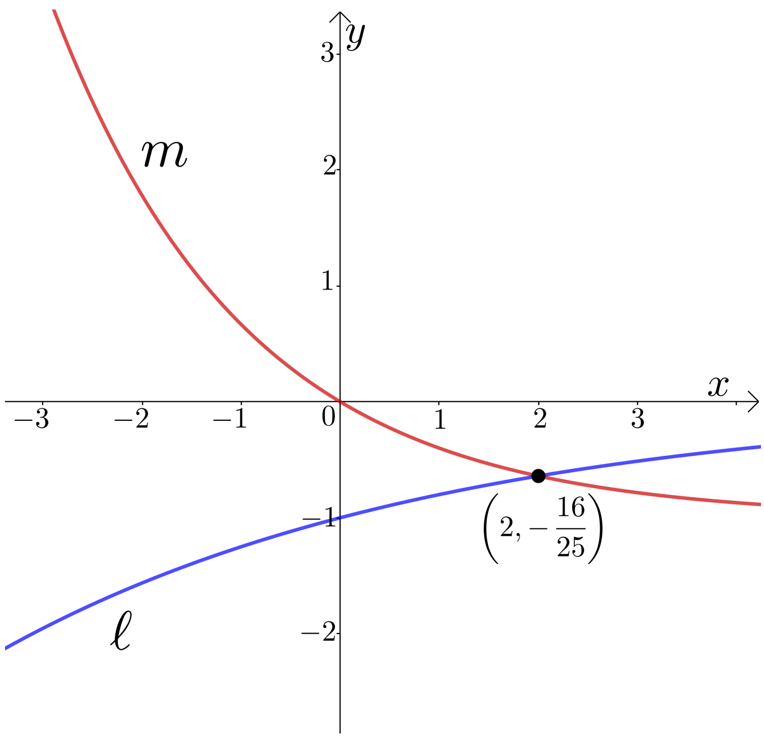

Figura 3.10: $\left(\frac{3}{5}\right)^x - 1 = -\left(\frac{4}{5}\right)^x$

3.3 Problemas europeus

Nesta seção, apresenta-se uma sequência de problemas expostos em diversos países europeus.

O Problema 8, extraído de Aops (2018), foi exibido na *Kosovo National Mathematical Olympiad*, em Kosovo no ano de 2016. Este problema pode ser trabalhado com alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Problema 8 (Kosovo, 2016)**.** Resolva a equação $\log_2(4^x+4) = x + \log_2(2^{x+1}-3)$.

Solução.
Para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\log_2(4^x+4) = x + \log_2(2^{x+1}-3) \quad &\Leftrightarrow \quad x + \log_2\left(2^{x+1}-3\right) - \log_2(4^x+4) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x + \log_2\left(\frac{2^{x+1}-3}{4^x+4}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \log_2\left(\frac{2^{x+1}-3}{4^x+4}\right) = -x \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{-x} = \frac{2^{x+1}-3}{4^x+4} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2^x} = \frac{2^{x+1}-3}{4^x+4}.
\end{aligned}$$

Logo, a equação dada é equivalente a equação

$$\frac{1}{2^x} = \frac{2^{x+1}-3}{4^x+4}. \tag{3.21}$$

Fazendo $2^x = t$ e substituindo em (3.21), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} = \frac{2t-3}{t^2+4} \quad &\Leftrightarrow \quad t^2+4 = 2t^2-3t \\
&\Leftrightarrow \quad t^2-3t-4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t+1)(t-4) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = -1 \quad \text{ou} \quad t = 4.
\end{aligned}$$

Portanto, como $t = 2^x > 0$ então $t = 4$. Logo, $2^x = 4$ e, portanto, $x = 2$. Por outro lado,

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = \frac{5}{20} = \frac{8-3}{16+4} = \frac{2^{2+1}-3}{4^2+4}.$$

Portanto, $x = 2$ é a única solução de $\frac{1}{2^x} = \frac{2^{x+1}-3}{4^x+4}$, que é equivalente a $\log_2(4^x+4) = x + \log_2(2^{x+1}-3)$.

A Figura 3.11, ilustra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \log_2(4^x + 4)$ e $g(x) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$. A abscissa da interseção destas funções, representa a solução da equação dada.

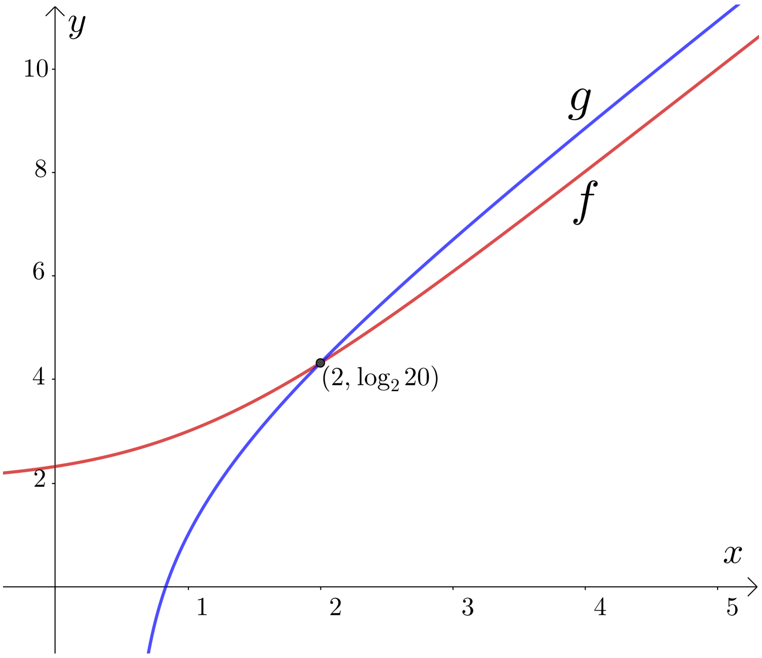

Figura 3.11: $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$

O Problema 9, extraído de Andreescu e Feng (2001), foi apresentado em uma competição na Romênia no ano de 1983. Este exercício pode ser trabalhado com alunos do segundo ano do Ensino Médio.

Problema 9 (Romênia, 1983)**.** Seja a um número real tal que $0 < a < 1$. Resolva $x^{a^x} = a^{x^a}$, no conjunto dos números reais positivos.

Solução.
Aplicando $\log_a$ em ambos os lados da igualdade $x^{a^x} = a^{x^a}$ temos:

$$\begin{aligned} x^{a^x} = a^{x^a} \quad &\Leftrightarrow \quad \log_a x^{a^x} = \log_a a^{x^a} \\ &\Leftrightarrow \quad a^x \log_a x = x^a \log_a a \\ &\Leftrightarrow \quad a^x \log_a x = x^a. \end{aligned}$$

Considere agora as funções $f, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = a^x, \quad g(x) = \log_a x \quad \text{e} \quad h(x) = x^a.$$

Observe que a equação dada é equivalente a equação

$$f(x) \cdot g(x) = h(x). \tag{3.22}$$

Observe ainda que $x = a$ é solução de (3.22), pois

$$f(a) \cdot g(a) = a^a \cdot \log_a a = a^a = h(a).$$

Afirma-se que $x = a$ é a única solução de (3.22). De fato, suponha-se que existe $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{a\}$ tal que b seja solução de (3.22).

Caso 1: $b = 1$. Se $b = 1$, então

$$h(1) = f(1) \cdot g(1) = a \cdot 0 = 0 < 1 = 1^a = h(1).$$

Logo, $h(1) < h(1)$, um absurdo.

Caso 2: $b > 1$. Para $b > 1$, tem-se que, $h(b) = b^a > 0$, $f(b) = a^b > 0$ e $g(b) = \log_a b < 0$. Daí, obtém-se

$$0 < h(b) = f(b) \cdot g(b) < 0.$$

O que implica em $0 < 0$, o qual é um absurdo.

Caso 3: $b < 1$. Como $b < 1$ por hipótese, então $g(b) > 0$.

Caso 3.1: $b > a$. Como h é crescente, segue que

$$f(b)g(b) = h(b) > h(a).$$

Também, sendo f e g decrescentes, tem-se

$$f(a) > f(b) \quad \text{e} \quad g(a) > g(b).$$

Multiplicando por $g(b)$ em ambos os lados da desigualdade $f(a) > f(b)$, tem-se

$$f(a)g(b) > f(b)g(b).$$

Multiplicando por $f(a)$ em ambos os lados da desigualdade $g(a) > g(b)$, tem -se

$$f(a)g(a) > f(a)g(b).$$

Por outro lado, observe que

$$h(a) = f(a)g(a) > f(a)g(b) > f(b)g(b) = h(b),$$

e então $h(a) > h(b)$, uma contradição, pois h é crescente.

Caso 3.2: $b < a$. Como h é crescente, segue que

$$f(b) \cdot g(b) = h(b) < h(a).$$

Sendo f e g decrescente, tem-se

$$f(a) < f(b) \quad \text{e} \quad g(a) < g(b).$$

Multiplicando $g(b)$ em ambos os lados da desigualdade $f(a) < f(b)$, tem-se

$$f(a)g(b) < f(b)g(b).$$

Multiplicando por $f(a)$ em ambos os lados da desigualdade $g(a) < g(b)$, tem -se

$$f(a)g(a) < f(a)g(b).$$

Por outro lado, observe que

$$h(a) = f(a)g(a) < f(a)g(b) < f(b)g(b) = h(b),$$

e então $h(a) < h(b)$. Contradição, pois h é crescente.

Assim, conclui-se $x = a$ é única solução de (3.22). Consequentemente, $x = a$ é única solução da equação dada.

No caso particular de $a = \frac{1}{2}$, considere as funções $\ell, m, f, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definidas por $\ell(x) = x^{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$, $m(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^{\frac{1}{2}}}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $h(x) = x^{\frac{1}{2}}$. A Figura 3.12, ilustra as funções ℓ e m. A abscissa da interseção destas funções, representa a solução da equação dada.

A Figura 3.13, ilustra as funções $f \cdot g$ e h. A abscissa da interseção destas funções, representa a solução da equação equivalente a equação dada.

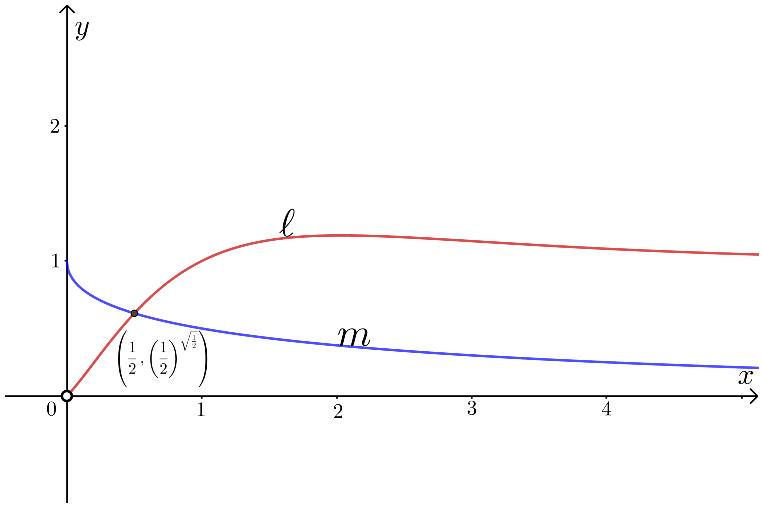

Figura 3.12: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \log_{\frac{1}{2}} x = x^{\frac{1}{2}}$

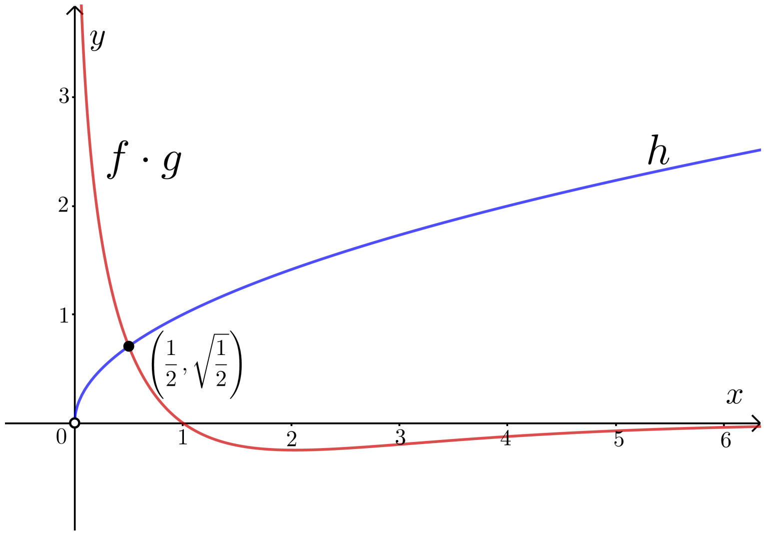

Figura 3.13: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \log_{\frac{1}{2}} x = x^{\frac{1}{2}}$

O Problema 10, extraído de Aops (2018), foi exibido na *International Mathematical Olympiad*, na Eslovênia em 13 de julho de 2006, e foi enviado para competição pela equipe dos Estados Unidos da América. Este exercício pode ser trabalhado com o terceiro ano do Ensino Médio.

Problema 10 (Eslovênia, 2006)**.** Determine o conjunto solução, no conjunto de números inteiros, da seguinte equação:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Solução.
Para $x = 0$, tem-se

$$y^2 = 1 + 2^0 + 2^{2\cdot 0+1} = 4.$$

Logo, $(0,2)$ e $(0,-2)$ são soluções inteiras da equação dada.

Se (x,y) é uma solução inteira, então $x \geq 0$. De fato, se $x < 0$, então

$$y^2 = 1 + \frac{1}{2^{-x}} + \frac{1}{2^{-(2x+1)}} = \frac{2^{-(2x+1)} + 2^{-x+1} + 1}{2^{-(2x+1)}}. \tag{3.23}$$

Como $2^{-(2x+1)} + 2^{-x+1} + 1$ é ímpar e $2^{-(2x+1)}$ é par, a Equação 3.23 não possui solução inteira.

Se (x,y) é uma solução inteira, então $(x,-y)$ também é solução. Pelo visto anteriormente, pode-se considerar a equação dada, com $x > 0$ e $y > 0$. Assim, reescrevendo a equação inicial

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x\left(1 + 2^{x+1}\right) = (y-1)(y+1). \tag{3.24}$$

Daí, pode-se concluir que os fatores $y-1$ e $y+1$ são pares e apenas um deles é divisível por 4, pois $(1,a)$ não é solução para todo $a \in \mathbb{Z}^+$. Consequentemente, $x \geq 3$ (caso contrário, se $x = 2$ então $9 = k(y+\epsilon)$, para algum k e $\epsilon = \pm 1$, logo, teria-se ímpar igual a par). Também, um desses fatores é divisível por 2^{x-1} (par igual a par), mas não por 2^x (pois novamente teria-se, ímpar igual a par). Então, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y - 1 = 2^{x-1}m$ ou $y + 1 = 2^{x-1}m$. Logo,

$$y = 2^{x-1}m + \epsilon, \quad \text{onde} \quad \epsilon = \pm 1 \tag{3.25}$$

De (3.25) e da equação original, obtém-se:

$$\begin{aligned}
1 + 2^x\left(1 + 2^{x+1}\right) = \left(2^{x-1}m + \epsilon\right)^2 \quad & \Leftrightarrow 1 + 2^x + 2^{2x+1} = 2^{2x-2}m^2 + 2^x m\epsilon + 1 \\
& \Leftrightarrow 2^x\left(1 + 2^{x+1}\right) = 2^x\left(2^{x-2}m^2 + m\epsilon\right) \\
& \Leftrightarrow 1 + 2^{x+1} = 2^{x-2}m^2 + m\epsilon \\
& \Leftrightarrow 1 - m\epsilon = 2^{x-2}m^2 - 2^{x+1}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$1 + 2^x\left(1 + 2^{x+1}\right) = \left(2^{x-1}m + \epsilon\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - m\epsilon = 2^{x-2}\left(m^2 - 8\right). \tag{3.26}$$

Se $\epsilon = 1$ teria-se,

$$1 - m = 2^{x-2}\left(m^2 - 8\right).$$

Como $1-m \leq 0$ e $2^{x-2} > 0$, então

$$m^2 - 8 \leq 0,$$

isto é, $m = 1$ (pois m é ímpar). No entanto, $m = 1$ não satisfaz (3.26). Se $\epsilon = -1$, a Equação 3.26 fica da forma

$$1 + m = 2^{x-2}\left(m^2 - 8\right) \geq 2\left(m^2 - 8\right),$$

pois $x \geq 3$. Daí,

$$\begin{aligned}
1 + m \geq 2\left(m^2 - 8\right) \quad & \Leftrightarrow \quad 1 + m \geq 2m^2 - 16 \\
& \Leftrightarrow \quad 2m^2 - m - 17 \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 2m^2 - m + \frac{1}{8} - 17 \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 2\left(m^2 - \frac{2}{4}m + \frac{1}{16}\right) - \frac{137}{8} \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 2\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{137}{8} \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{137}{16} \\
& \Leftrightarrow \quad m \leq \frac{1+\sqrt{137}}{4} \quad \text{ou} \quad m \geq \frac{1-\sqrt{137}}{4} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1-\sqrt{137}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{137}}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto, a solução inteira que satisfaz a inequação é $m \leq 3$ (pois se $m \geq 4$, então $2m^2 - m - 17 > 0$). Por outro lado, m é impar, então $m = 1$ ou $m = 3$. Como $m = 1$ não satisfaz a Equação 3.26, pois

$$1 - 1 \cdot 1 = 0 \neq -7 \cdot 2^{x-2}$$

Se $m = 3$, tem-se

$$1 + 3 = 2^{x-2}\left(3^2 - 8\right) \quad \Leftrightarrow \quad 16 = 2^x \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$

Então, conclui-se de (3.25) que

$$y = 2^{4-1} \cdot 3 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 23.$$

Portanto, se (x, y) é solução com $x > 0$, então $x = 4$ e $y = \pm 23$. Por outro lado,

$$1 + 2^4 + 2^{2 \cdot 4+1} = 529 = (\pm 23)^2.$$

Logo, a equação dada possui quatro soluções no conjunto dos números inteiros, sendo elas: $(0, 2), (0, -2), (4, 23) \quad \text{e} \quad (4, -23)$.

Consequentemente, $\{(0, 2), (0, -2), (4, 23), (4, -23)\}$ é o conjunto solução da equação dada.

3.4 Problemas norte-americanos

Nesta seção, apresenta-se uma sequência de problemas expostos em alguns países da América do Norte. Tais problemas podem ser trabalhados com alunos do Ensino Médio.

O Problema 11, extraído de Aops (2018), foi cobrado na *American Invitational Mathematics Examination*, nos Estados Unidos da América, no ano de 2018. Este exercício pode ser trabalhado com alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Problema 11 (Estados Unidos da América, 2018)**.** Para cada par ordenado de números reais (x, y) satisfazendo

$$\log_2 (2x + y) = \log_4 \left(x^2 + xy + 7y^2\right)$$

existe um número real K tal que

$$\log_3 (3x + y) = \log_9 \left(3x^2 + 4xy + Ky^2\right).$$

Determine o produto de todos os valores possíveis de K.

Solução.

Observe que, para que a equação dada esteja bem definida, x e y ambos não podem ser iguais a zero simultaneamente. Trazendo os logaritmos das equações dadas para a base 10 tem-se:

$$\begin{aligned}
\log_2(2x+y)=\log_4\left(x^2+xy+7y^2\right) &\Leftrightarrow \frac{\ln(2x+y)}{\ln 2}=\frac{\ln(x^2+xy+7y^2)}{\ln 4}\\
&\Leftrightarrow \frac{\ln(2x+y)}{(\ln 2)}=\frac{\ln(x^2+xy+7y^2)}{2\ln 2}\\
&\Leftrightarrow \ln(2x+y)=\frac{\ln(x^2+xy+7y^2)}{2}\\
&\Leftrightarrow 2\ln(2x+y)=\ln\left(x^2+xy+7y^2\right)\\
&\Leftrightarrow \ln(2x+y)^2=\ln\left(x^2+xy+7y^2\right) \quad (3.27)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\log_3(3x+y)=\log_9\left(3x^2+4xy+Ky^2\right) &\Leftrightarrow \frac{\ln(3x+y)}{\ln 3}=\frac{\ln(3x^2+4xy+Ky^2)}{\ln 9}\\
&\Leftrightarrow \frac{\ln(3x+y)}{(\ln 3)}=\frac{\ln(3x^2+4xy+Ky^2)}{3\ln 3}\\
&\Leftrightarrow \ln(3x+y)=\frac{\ln(3x^2+4xy+Ky^2)}{3}\\
&\Leftrightarrow 3\ln(3x+y)=\ln\left(3x^2+4xy+Ky^2\right)\\
&\Leftrightarrow \ln(3x+y)^3=\ln\left(3x^2+4xy+Ky^2\right) \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Como a função $x\mapsto \ln x$ é injetiva de (3.27), segue que

$$\begin{aligned}
\log_2(2x+y)=\log_4\left(x^2+xy+7y^2\right) &\Leftrightarrow (2x+y)^2=\left(x^2+xy+7y^2\right)\\
&\Leftrightarrow 4x^2+4xy+y^2=x^2+xy+7y^2\\
&\Leftrightarrow x^2+xy-2y^2=0\\
&\Leftrightarrow (x+2y)(x-y)=0\\
&\Leftrightarrow x=y \quad \text{ou} \quad x=-2y.
\end{aligned}$$

Analogamente, de (3.28), tem-se

$$\begin{aligned}
\log_3(3x+y)=\log_9\left(3x^2+4xy+Ky^2\right) &\Leftrightarrow (3x+y)^2=\left(3x^2+4xy+Ky^2\right)\\
&\Leftrightarrow 9x^2+6xy+y^2=3x^2+4xy+Ky^2\\
&\Leftrightarrow 6x^2+2xy+(1-K)y^2=0.
\end{aligned}$$

Se $x = y$, então

$$\begin{aligned} 6x^2 + 2xy + (1-K)\,y^2 = 0 &\Leftrightarrow 6y^2 + 2y^2 + (1-K)\,y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (9-K)\,y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad K = 9. \end{aligned}$$

Como $y \neq 0$ (pois caso contrário $x = y = 0$), então $K = 9$.

Do mesmo modo, se $x = -2y$ tem-se

$$\begin{aligned} 6x^2 + 2xy + (1-K)\,y^2 = 0 &\Leftrightarrow 24y^2 - 4y^2 + (1-K)\,y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (21-K)\,y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad K = 21. \end{aligned}$$

Como $y \neq 0$ (pois, caso contrário $x = -2y = 0$), então $K = 21$.

Logo, os possíveis valores de K são 9 e 21. Assim, o produto desses valores é $9 \cdot 21 = 189$.

O Problema 12, extraído de Aops (2018), foi exibido no *Math Prize For Girls Problems*, nos Estados Unidos da América, no ano de 2011. O exercício pode ser trabalhado com alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Problema 12 (Estados Unidos da América, 2011)**.** Seja $f : (10, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = (\log x)^{\log(\log(\log x))} - [\log(\log x)]^{\log(\log x)}.$$

Prove que f é a função nula.

Solução.

Dado $x \in (10, \infty)$, considere

$$a = (\log x)^{\log\log\log x} \tag{3.29}$$

e

$$b = (\log\log x)^{\log\log x}. \tag{3.30}$$

Aplicando log de ambos os lados de (3.29), obtém-se:

$$\log a = \log\,(\log x)^{\log\log\log x}. \tag{3.31}$$

Pela propriedade da potência, a Equação 3.31 é equivalente a

$$\begin{aligned} \log a = (\log\log\log x)\,(\log\,(\log x)) &\Leftrightarrow \log a = (\log\log\log x)\,(\log\log x) \\ &\Leftrightarrow a = 10^{(\log\log\log x)(\log\log x)}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Analogamente, de (3.30), tomando log ambos os lados,

$$\log b = \log\left(\log\log x\right)^{\log\log x}. \tag{3.33}$$

Novamente, pela propriedade da potência, a Equação 3.33 é equivalente à

$$\begin{aligned} \log b = (\log\log x)\left(\log\left(\log\log x\right)\right) &\Leftrightarrow \log b = (\log\log x)(\log\log\log x) \\ &\Leftrightarrow b = 10^{(\log\log x)(\log\log\log x)}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Portanto, de (3.32) e (3.34), $a = b$. Assim,

$$f(x) = (\log x)^{\log\log\log x} - (\log\log x)^{\log\log x} = a - b = 0.$$

Logo, f é a função nula.

O Problema 13, extraído de Aops (2018), foi apresentado na *Canada National Olympiad*, no Canadá, no ano de 1995. O exercício pode ser trabalhado com alunos do segundo ano do Ensino médio

Problema 13 (Canadá, 1995)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$. Avalie

$$\sum_{i=1}^{1995} f\left(\frac{i}{1996}\right).$$

Solução.
Observe que

$$f(x) = \frac{9^x}{9^x+3} = \frac{3^{2x}}{3^{2x}+3} = \frac{3^{2x}}{3^{2x}+3} \cdot \frac{3^{-1}}{3^{-1}} = \frac{3^{2x-1}}{3^{2x}\cdot 3^{-1} + 3\cdot 3^{-1}} = \frac{3^{2x-1}}{3^{2x-1}+1}.$$

Então, a soma é dada por

$$\sum_{i=1}^{1995} f\left(\frac{i}{1996}\right) = \sum_{i=1}^{997} f\left(\frac{i}{1996}\right) + f\left(\frac{998}{1996}\right) + \sum_{i=999}^{1995} f\left(\frac{i}{1996}\right) = \sum_{k=1}^{997} f\left(\frac{1996-k}{1996}\right).$$

Por outro lado, a soma inicial pode ser reescrita como:

$$\sum_{i=1}^{1995} f\left(\frac{i}{1996}\right) = \sum_{k=1}^{997}\left[f\left(\frac{k}{1996}\right) + f\left(\frac{1996-k}{1996}\right)\right] + f\left(\frac{998}{1996}\right). \tag{3.35}$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq k \leq 997$, tem-se

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{1996}\right) + f\left(\frac{1996-k}{1996}\right) &= \frac{3^{\frac{k}{998}-1}}{3^{\frac{k}{998}-1}+1} + \frac{3^{\frac{1996-k}{998}-1}}{3^{\frac{1996-k}{998}-1}+1} \\ &= \frac{3^{\frac{k-998}{998}}}{3^{\frac{k-998}{998}}+1} + \frac{3^{\frac{-k+998}{998}}}{3^{\frac{-k+998}{998}}+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Observe então, que a soma.

$$\sum_{k=1}^{997}\left[f\left(\frac{k}{1996}\right) + f\left(\frac{1996-k}{1996}\right)\right] = \sum_{k=1}^{997} 1 = 997 \tag{3.36}$$

Observe ainda que

$$f\left(\frac{998}{1996}\right) = \frac{3^{2\frac{998}{1996}-1}}{3^{2\frac{998}{1996}-1}+1} = \frac{3^0}{3^0+1} = \frac{1}{2}. \tag{3.37}$$

Logo, substituindo (3.36) e (3.37), em (3.35), tem-se

$$\sum_{i=1}^{1995} f\left(\frac{i}{1996}\right) = 997 + \frac{1}{2} = \frac{1995}{2}.$$

3.5 Problemas sul-americanos

Nesta seção, apresenta-se uma sequência de problemas expostos na América do Sul. Tais problemas podem ser trabalhados com alunos do Ensino Médio.

3.5.1 Problemas brasileiros

O Problema 14, extraído de OPM (2018), foi apresentado na *Olimpíada Pessoense de Matemática*, em João Pessoa-PB no ano de 2013. O exercício pode ser trabalhado com alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Problema 14 (João Pessoa-PB, 2013)**.** Prove que a equação exponencial

$$9^x + 15^x = 25^x$$

possui única solução.

Solução.

Dado $x \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\begin{aligned} 9^x + 15^x = 25^x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{9^x + 15^x}{25^x} = \frac{25^x}{25^x} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3^{2x} + 3^x \cdot 5^x}{5^{2x}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1. \end{aligned}$$

Logo, a equação dada é equivalente a

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1. \tag{3.38}$$

Tome agora, $\left(\frac{3}{5}\right)^x = y$. Substituindo em (3.38), tem-se:

$$y^2 + y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como $y > 0$, tem-se que $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, ou seja,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Então,

$$x = \log_{\frac{3}{5}} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2\log_{\frac{3}{5}} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_{\frac{3}{5}} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5}}{4} = 1.$$

Isso mostra que $x = \log_{\frac{3}{5}} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ é a única solução da equação $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$, e consequentemente, a equação dada possui uma única solução.

A Figura 3.14, ilustra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 9^x + 15^x$ e $g(x) = 25^x$. A abscissa da interseção destas funções, representa a solução da equação dada.

A Figura 3.15, ilustra as funções $m, \ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $m(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{5}\right)^x$ e $\ell(x) = 1$. A abscissa da interseção destas funções, representa a solução da equação equivalente a equação dada.

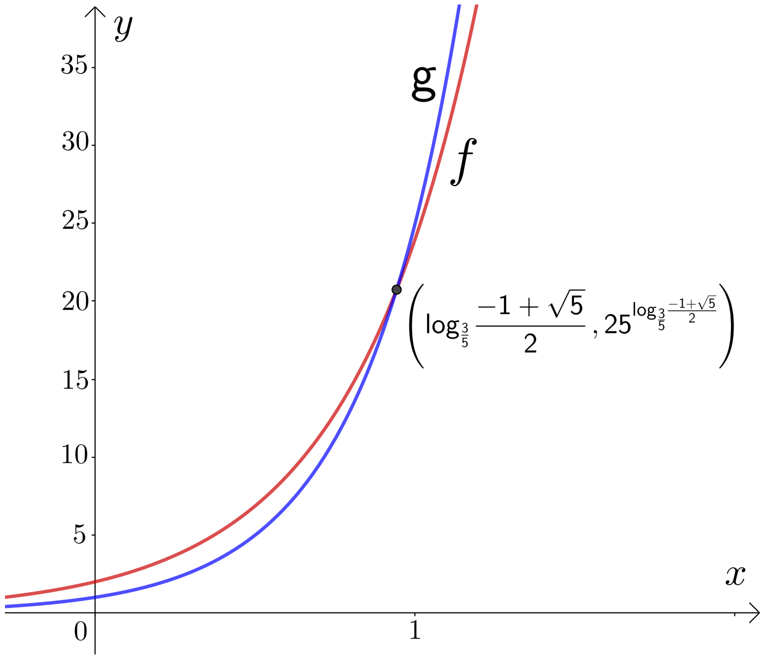

Figura 3.14: $9^x + 15^x = 25^x$

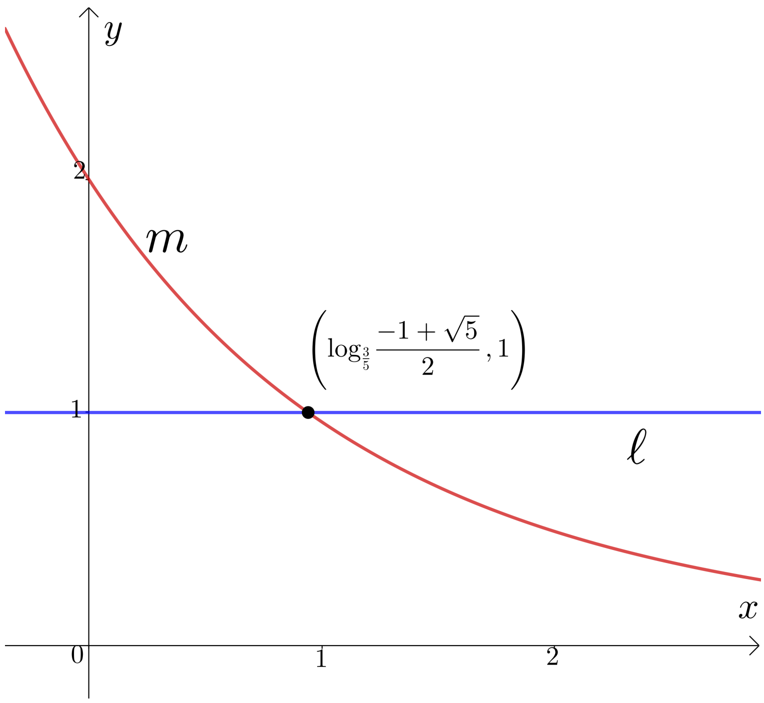

Figura 3.15: $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{5}\right)^{x} = 1$

Os Problemas 15, 16, e 17 foram extraídos de Carneiro *et al.* (2014), foram expostos na *Olimpíada Cearense de Matemática*, no Estado do Ceará nos anos de 1982, 1983, e 1994 respectivamente. Tais exercícios podem ser trabalhados com alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Problema 15 (Ceará, 1982)**.** Resolva a equação

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Solução.
Dado $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
4^x - 3^x \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 2^{2x} \cdot 2^{-1} &\Leftrightarrow 4^x - 3^x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3^x \cdot \sqrt{3} - 2^{2x} \cdot \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 4^x + \frac{4^x}{2} = 3^x \cdot \sqrt{3} + \frac{3^x}{\sqrt{3}} \\
&\Leftrightarrow 4^x \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&\Leftrightarrow 4^x \cdot \frac{3}{2} = 3^x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \\
&\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{3}{4}\right)^x \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Como a função $x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x$ é injetiva (por ser decrescente), conclui-se que $x = \frac{3}{2}$ é única solução da equação dada.

A Figura 3.16, ilustra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}}$ e $g(x) = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$. A abscissa da interseção destas funções, representa a solução da equação dada.

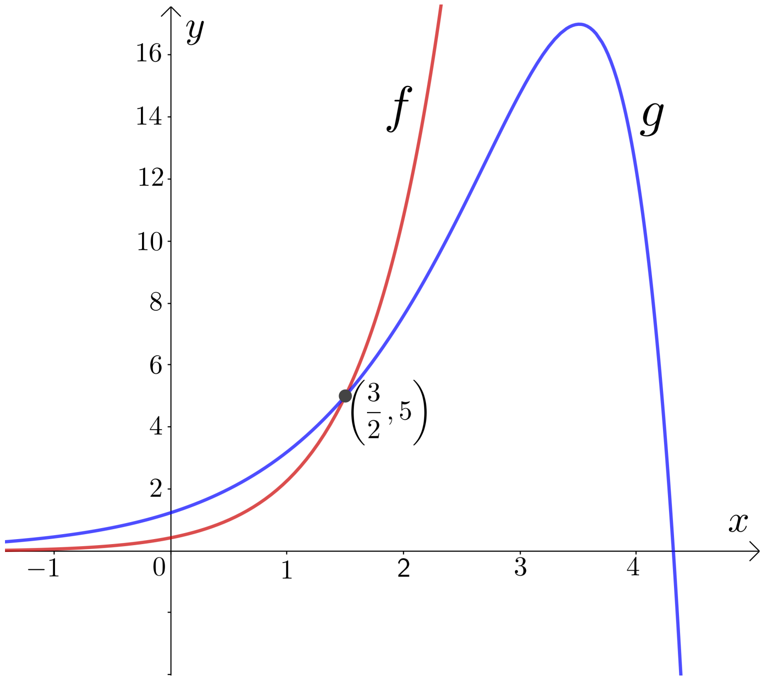

Figura 3.16: $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Problema 16 (Ceará, 1983)**.** Calcule o menor valor positivo de x que satisfaz a inequação

$$\log x \geq \log 2 + \frac{1}{2}\log x.$$

Solução.
Note que, se a inequação possui solução, só poderá ser um número positivo. Assim, dado $x \in \mathbb{R}^+$, usando as propriedades do logaritmo da potência e multiplicação, tem-se,

$$\log x \geq \log 2 + \frac{1}{2}\log x \quad \Leftrightarrow \quad \log x \geq \log 2 + \log\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad \log x \geq \log 2\sqrt{x}. \tag{3.39}$$

Como a função $x \mapsto \log x$ é crescente, tem-se

$$\log x \geq \log 2 + \frac{1}{2}\log x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 4x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4. \tag{3.40}$$

De (3.39) e (3.40):

$$\log x \geq \log 2 + \frac{1}{2}\log x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4.$$

Portanto, o menor valor que satisfaz a inequação inicial é $x = 4$.

A Figura 3.17, ilustra as funções $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \log x$ e $g(x) = \log 2 + \frac{1}{2}\log x$. A abscissa da interseção destas funções, representa a solução da inequação dada.

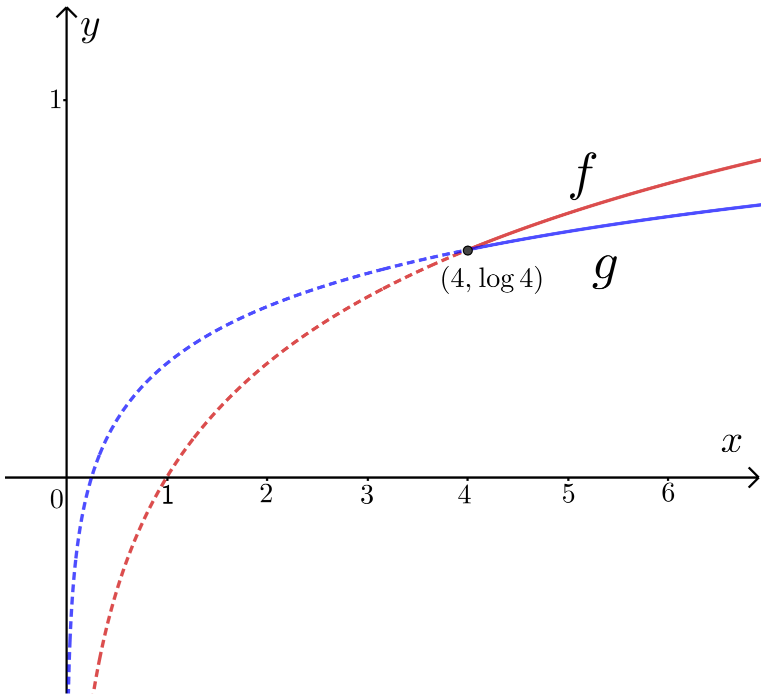

Figura 3.17: $\log x = \log 2 + \frac{1}{2}\log x, x > 0$

Problema 17 (Ceará, 1994)**.** Determine o conjunto solução, no conjunto de números reais positivos, do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^x = y^{9y}. \end{cases}$$

Solução.
Note que, se (x, y) é solução do sistema dado, então $x, y > 0$. Assim, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, aplicando as propriedades das potências, tem-se

$$x^y = y^x \quad \Leftrightarrow \quad (x^y)^x = (y^x)^x \quad \Leftrightarrow \quad x^{yx} = y^{x^2}. \tag{3.41}$$

e

$$x^x = y^{9y} \quad \Leftrightarrow \quad (x^x)^y = \left(y^{9y}\right)^y \quad \Leftrightarrow \quad x^{xy} = y^{9y^2}. \tag{3.42}$$

Substituindo (3.41) em (3.42) obtém-se

$$y^{9y^2} = y^{x^2}. \tag{3.43}$$

Então, de (3.43), segue dois casos:

- Caso 1: $y = 1$. Se $y = 1$, de $x^y = y^x$ tem-se $x^1 = 1^x = 1$, ou seja, $x = 1$. Também

  $$1^1 = 1^1 \quad \text{e} \quad 1^1 = 1 = 1^{9 \cdot 1}.$$

  Logo, $(1, 1)$ é solução do sistema dado.

- Caso 2: $y \neq 1$. Se $y \neq 1$, então, $x^2 = 9y^2 = (3y)^2 \Leftrightarrow x = 3y$. Substituindo na equação $x^y = y^x$ tem-se,

  $$\begin{aligned} (3y)^y = y^{3y} \quad &\Leftrightarrow \log_y (3y)^y = \log_y \left(y^3\right)^y \\ &\Leftrightarrow y \log_y 3y = y \log_y y^3 \\ &\Leftrightarrow \log_y 3y = \log_y y^3. \end{aligned}$$

  Como $x \mapsto \log x$ é injetiva, tem-se

  $$3y = y^3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = y^2.$$

  Logo, $x = 3\sqrt{3}$.

  Por outro lado, substituindo $\left(3\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, nas equações do sistema inicial tem-se

  $$\left(3\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3^3}\right)^{\sqrt{3}} = \left(\left(\sqrt{3}\right)^3\right)^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}\right)^{3\sqrt{3}},$$

  e

  $$\left(3\sqrt{3}\right)^{3\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3^3}\right)^{3\sqrt{3}} = \left(\left(\sqrt{3}\right)^3\right)^{3\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}\right)^{9\sqrt{3}}.$$

  Logo, $\left(3\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ é solução do sistema dado.

Assim, o conjunto solução da equação dada é $\left\{(1, 1), \left(3\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)\right\}$.

Apresenta-se a seguir o Problema 18, extraído de UFSM (2016), o qual foi cobrado na *Olimpíada Regional de Matemática* no município de Santa Maria-RS e região, no ano de 2016. O exercício pode ser trabalhado com alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Problema 18 (Santa Maria-RS, 2016)**.** Sejam a, b, c e d números reais positivos e diferentes de 1. Considere as afirmações:
(a) $a^{\log_c a} = b^{\log_c a}$.
(b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$.
(c) $\log_{ab} bc = \log_a c$.
Verifique quais das afirmações anteriores são verdadeiras e quais são falsas.

Solução.

A afirmação (a) é verdadeira. De fato, a igualdade

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \tag{3.44}$$

é equivalente à

$$\log_c a^{\log_c b} = \log_c b^{\log_c a} \tag{3.45}$$

e tem-se ainda que (3.45) é equivalente à

$$(\log_c b)\,(\log_c a) = (\log_c a)\,(\log_c b)\,. \tag{3.46}$$

Como (3.46) é uma igualdade verdadeira, conclui-se que (3.44) é verdadeira.

A afirmação (b), também, é verdadeira. Com efeito, observando-se que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c}\left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = \frac{a^{\log_d c}}{b^{\log_d c}}\cdot\frac{b^{\log_d a}}{c^{\log_d a}}\cdot\frac{c^{\log_d b}}{a^{\log_d b}}. \tag{3.47}$$

Por outro lado, do item (a), temos que

$$a^{\log_d c} = c^{\log_d a},\quad b^{\log_d c} = c^{\log_d b},\quad b^{\log_d a} = a^{\log_d b}. \tag{3.48}$$

Logo, de (3.47) e (3.48), conclui-se

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c}\left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = \frac{a^{\log_d c}}{b^{\log_d c}}\cdot\frac{b^{\log_d a}}{a^{\log_d c}}\cdot\frac{b^{\log_d c}}{b^{\log_d a}} = 1.$$

Portanto, afirmação (b) é verdadeira.

Finalmente, mostra-se que a afirmação (c) é falsa. Para isto mostraremos que $\log_{ab} bc = \log_a c$ se, e somente se, $a = c$. De fato, pela definição de logaritmo, temos

$$\log_{ab} bc = \log_a c \Leftrightarrow ab^{\log_a c} = bc.$$

Por sua vez, a última igualdade é equivalente a

$$\log_c ab^{\log_a c} = \log_c bc.$$

Pela propriedade da potência e multiplicação dos logaritmos, tem-se que

$$\begin{aligned}\log_c ab^{\log_a c} = \log_c bc &\Leftrightarrow (\log_a c)\cdot(\log_c ab) = \log_c bc\\ &\Leftrightarrow (\log_a c)\cdot(\log_c a + \log_c b) = \log_c b + \log_c c\\ &\Leftrightarrow \log_a c\cdot\log_c a + \log_a c\cdot\log_c b = \log_c b + 1.\end{aligned}$$

Logo,

$$\log_{ab} bc = \log_a c \Leftrightarrow \log_a c \cdot \log_c a + \log_a c \cdot \log_c b = \log_c b + 1. \tag{3.49}$$

Aplicando a propriedade da mudança de base em (3.49) tem-se

$$\log_{ab} bc = \log_a c \Leftrightarrow \frac{\log_c c}{\log_c a} \cdot \log_c a + \log_a c \cdot \log_c b = \log_c b + 1.$$

Como $\frac{\log_c c}{\log_c a} \cdot \log_c a = 1$, segue que $\log_{ab} bc = \log_a c$ é equivalente a

$$\log_a c \cdot \log_c b = \log_c b. \tag{3.50}$$

Finalmente, como $b > 0$, conclui-se que (3.50) é equivalente a $\log_a c = 1$. Portanto,

$$\log_{ab} bc = \log_a c \Leftrightarrow \log_a c = 1 \Leftrightarrow a = c.$$

Consequentemente, a afirmação (c) é falsa.

O Problema 19, extraído de OCM (2006) foi exibido na Olimpíada Campinense de Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande-PB, no ano de 2006. O exercício pode ser trabalhado com alunos do segundo ano do Ensino Médio.

Problema 19 (Campina Grande-PB, 2006)**.** O número de soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} x^{\log_y x} \cdot y = x^{\frac{5}{2}}, \\ \log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1. \end{cases}$$

é:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Solução.

Observe que, se (x, y) é solução do sistema dado, então $x, y > 0$. Assim, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, considere, $a = a(x, y) = \log_y x$, tem-se $x = y^a$. Logo, o sistema dado é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} (y^a)^a \cdot y = (y^a)^{\frac{5}{2}}, \\ \log_4 y \cdot \log_y (y - 3y^a) = 1. \end{cases}$$

E por sua vez, a Equação $(y^a)^a \cdot y = (y^a)^{\frac{5}{2}}$ é equivalente a

$$y^{(a^2+1)} = y^{\frac{5a}{2}}$$

Como a função exponencial é injetiva segue que

$$a^2 + 1 = \frac{5a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 - 5a + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2a - 1)(a - 2) = 0.$$

Logo, $a = 2$ ou $a = \frac{1}{2}$. Afirmamos que $a \neq 2$. Com efeito, se $a = 2$ teria-se que $x = y^2$. Logo, substituindo na equação $\log_4 y \cdot \log_y (y - 3y^a) = 1$, ficaria da forma

$$\log_4 y \cdot \log_y (y - 3y^2) = 1. \tag{3.51}$$

Fazendo a mudança de base no primeiro termo do produto da Equação 3.51 tem-se

$$\frac{1}{\log_y 4} \cdot \log_y (y - 3y^2) = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_y (y - 3y^2) = \log_y 4.$$

Como a função $w \mapsto \log_y w$é injetiva tem-se

$$y - 3y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3y^2 - y + 4 = 0$$

O qual é uma equação de segundo grau, na variável y, que não possui solução real, pois,

$$1^2 - 4(-3)(-4) = 1 - 48 = -47.$$

Portanto, $a = \frac{1}{2}$ e, assim, substituindo em $x = y^a$ tem-se que $x = \sqrt{y}$. Então, a Equação $\log_4 y \cdot \log_y (y - 3y^a) = 1$ ficará da forma

$$\log_4 y \cdot \log_y (y - 3\sqrt{y}) = 1.$$

Procedendo de maneira análoga ao caso anterior teremos:

$$\log_y 4 = \log_y (y - 3\sqrt{y}) \quad \Leftrightarrow$$

$$y - 3\sqrt{y} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y - 4 = 3\sqrt{y} \quad \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 8y + 16 = 9y \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 17y + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(y - 16)(y - 1) = 0.$$

Logo, $y = 16$ ou $y = 1$. Se $y = 1$, então $x = 1$. No entanto, $(1, 1)$ não satisfaz o sistema inicial. Portanto $y = 16$. Para $y = 16$, tem-se $x = \sqrt{16} = 4$. Por outro lado, observe que $(4, 16)$ é solução do sistema dado, pois

$$4^{\log_{16} 4} \cdot 16 = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^2 = 4^{\frac{5}{2}}$$

e

$$\log_4 16 \cdot \log_{16}(16 - 3 \cdot 4) = 2 \cdot \log_{16} 4 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Logo, $(4, 16)$ é a única solução do sistema, e consequentemente a alternativa correta é a (b).

O Problema 20, foi apresentado no terceiro nível da *Olimpíada Lavrense de Matemática* em 2006, no município de Lavras, Minas Gerais (OLM, 2006). O exercício pode ser trabalhado com alunos do segundo ano do Ensino Médio.

Problema 20 (Lavras-MG, 2006)**.** Calcule o valor da expressão:

$$\sum_{k=1^\circ}^{89^\circ} \log(\tan k),$$

onde k é a medida em grau de um arco, no ciclo trigonométrico.
(a) 0.
(b) $\log \left[\prod_{k=1^\circ}^{89^\circ} (\tan k) \right]$.
(c) 10.
(d) $\log \left[\sum_{k=1^\circ}^{89^\circ} (\tan k) \right]$.

Solução.
Primeiramente, tem-se que $\tan k = \frac{\operatorname{sen} k}{\cos k}$ e $\cos k = \operatorname{sen}\ (90^\circ - k)$. Assim, a expressão dada pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1^\circ}^{89^\circ} \log(\tan k) &= \log \left(\prod_{k=1^\circ}^{89^\circ} \tan k \right) \\ &= \log \left(\prod_{k=1^\circ}^{89^\circ} \frac{\operatorname{sen} k}{\cos k} \right) \\ &= \log \left(\prod_{k=1^\circ}^{89^\circ} \frac{\operatorname{sen} k}{\operatorname{sen}\ (90^\circ - k)} \right) \\ &= \log \left(\frac{\prod_{k=1^\circ}^{89^\circ} \operatorname{sen} k}{\prod_{k=1^\circ}^{89^\circ} \operatorname{sen}\ (90^\circ - k)} \right). \end{aligned}$$

Como

$$\prod_{k=1^\circ}^{89^\circ} \operatorname{sen}\ (90^\circ - k) = \prod_{i=1^\circ}^{89^\circ} \operatorname{sen}\ (\operatorname{sen} i),$$

conclui-se que

$$\sum_{k=1^\circ}^{89^\circ} \log(\tan k) = \log \left(\frac{\prod_{k=1^\circ}^{89^\circ} \operatorname{sen} k}{\prod_{i=1^\circ}^{89^\circ} \operatorname{sen}\ (\operatorname{sen} i)} \right) = \log 1 = 0.$$

Logo, o valor da expressão é 0, e então a alternativa correta é a alternativa (a).

Capítulo 4

Uma proposta de atividade olímpica no Ensino Médio

Neste capítulo, apresenta-se uma proposta, com uma sequência de aulas para alunos do Ensino Médio. O plano é uma sugestão de trabalho que envolve o tema de funções exponenciais e logarítmicas em problemas olímpicos, onde serão exploradas as propriedades e definições destas funções, na resolução de diversos problemas olímpicos. Será apresentado uma sequência de tópicos e atividades, dentro do conteúdo supracitado, que podem ser trabalhados com alunos do Ensino Médio.

A escolha dos problemas se deu por aqueles que possam auxiliar os alunos no desenvolvimento e compreensão do conteúdo. Além do estímulo, no crescimento da aprendizagem, busca-se incentivar estes alunos a participarem de algum tipo de competição matemática.

Para elaboração desta proposta, foram consideradas as orientações sugeridas nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) e, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCNEM), além de diversos problemas extraídos de sites, que são destinados a divulgação de olimpíada matemática, e exercícios, extraídos de livro didático.

4.1 A resolução de problemas e o ensino de matemática

Conforme o PCN+ em Brasil (2007), na sociedade em que vivemos, o ensino de matemática se faz necessário em uma grande diversidade de situações. Sejam elas como apoio às outras áreas do conhecimento, instrumento para lidar com situações do cotidiano, ou ainda desenvolver habilidades de pensamento. Quando o aluno chega ao Ensino Médio, que é a etapa final da escolaridade básica, o papel da matemática passa a ter ainda uma parcela de conhecimento humano, pois, contribui com os jovens para a construção de uma visão de mundo.

O aprender matemática de uma forma mais contextualizada, facilita e relaciona outros conhecimentos essenciais para formação dos alunos, a medida que estes estruturam novos pensamentos, capacita-os para compreender, interpretar, analisar, avaliar e tirar conclusões próprias de diversas situações. Neste sentido, a resolução de problemas entra como uma ferramenta essencial, pois todas estas habilidades que se destacam entre o "pensar" e o "saber" se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente em um desafio.

Como já foi dito, a resolução de problemas é uma peça importante para o ensino em geral, no entanto, existe uma linha tênue entre as definições de problemas e exercícios, segundo Allevato (2014), problema se caracteriza por uma atividade contextualizada em que não existem regras ou uma sequência pronta para a resolução. Já o exercício, como o próprio significado nos diz, é o ato de exercitar, por em prática repetitivamente um método, ou algorítimo aprendido. Onuchic (1999, apud Allevato (2014)), define problema como tudo aquilo que se não sabe fazer, mas que está interessado em resolver.

No sentido de aproximar as propostas sugeridas nos PCNEM e PCN+, com a realidade do cotidiano do aluno e o tema de funções exponenciais e logarítmicas, foram selecionados alguns problemas que foram cobrados em olimpíadas realizadas em âmbito nacional ou internacional, os quais quando possível, foi sugerido o uso do software educacional *GeoGebra*[1], como auxílio na compreensão das resoluções desde um ponto de vista geométrico. Prieto (2005), nos diz que os softwares educacionais fornecem ao aluno um retorno a respeito da resolução do exercício, podendo este aluno analisar e refletir sobre os conceitos, estratégias aplicadas, e os possíveis erros cometidos, permitindo então o recomeço e a maior compreensão do problema apresentado.

Na seção seguinte, será apresentada a proposta mencionada anteriormente. O intuito maior dessa sequência, é a preparação dos alunos para as diversas competições existentes na área de matemática.

[1] O *GeoGebra* é um software destinado ao ensino de matemática, de todos os níveis, une geometria, álgebra e cálculo em um único ambiente de aprendizagem. Criado por Markus Hohenwarter, e uma equipe internacional de programadores, é um software gratuito que tem por objetivo principal incentivar o aluno em um processo de investigação, aumentando sua capacidade de argumentação (Batista, 2012).

4.2 Uma proposta de atividades a serem desenvolvidas

A proposta à seguir foi pensada para alunos de escolas situadas em áreas com poucos recursos. É notório que atualmente a maioria dos alunos do ensino básico não contam com cursos preparatórios para olimpíadas, ou qualquer outro projeto deste tipo.

Nesta feita, será apresentada uma sequência de atividades, extra-curriculares, para alunos do ensino médio, cujo objetivo principal é desenvolver e aprimorar a capacidade de interpretar e resolver problemas olímpicos sobre as funções exponenciais e logarítmicas.

Na resolução dos problemas propostos, foram consideradas quatro etapas importantes, sendo elas:

Etapa 1. Compreender o problema. É a fase de maior importância na resolução de um problema. Neste momento é que se deve ler o problema (quantas vezes se fizer necessário), e compreender seu significado;

Etapa 2. Estabelecer um plano. Após a leitura e compreensão do problema, deve-se tentar fazer uma analogia com outros problemas já resolvidos anteriormente ou proposições já vistas, e então traçar um plano de resolução. Caso não haja visto nenhuma ajuda, buscar reformulação do problema, destacando e utilizando todos os dados possíveis;

Etapa 3. Executar o plano. Este é o momento de por em prática todo o plano traçado na etapa anterior, sempre tendo a cautela de não deixar passar despercebido nenhum detalhe fornecido;

Etapa 4. Revisão da resolução. Essa etapa sugere uma verificação do que se foi feito, a fim de detectar alguma falha que possa ter ocorrido. Neste momento, caso tenha acontecido algum erro nas etapas anteriores, deve-se retomar e reestruturar os passos, da melhor maneira possível.

A planificação da seção a seguir, é composta por cinco aulas, com duração de 180 minutos cada uma. Na primeira aula trabalhará-se as definições, propriedades e gráfico da função exponencial, além das equações e inequações exponenciais, e alguns exercícios básicos, os quais não são necessariamente olímpicos, para fixação do conteúdo. A segunda trará uma sequência com cinco problemas olímpicos, selecionados por grau de dificuldade, que aplicará diretamente as definições e propriedades a função exponencial. Na terceira aula, trabalha-se tanto as propriedades e definições dos logaritmos, quanto a função logarítmica, equações e inequações, finalizando com exercícios básicos, os quais também não são necessariamente olímpicos. A quarta e quinta aula, traz uma sequência de problemas olímpicos que envolvem todo o conteúdo estudado nas aulas anteriores.

Das atividades e exercícios propostos a seguir, alguns foram cobrados em competições olímpicas, outros foram extraídos de livros didáticos, nesta feita obteve-se da seguintes referências: OBMEP (2010), CMF (2006, 2015), Dante (2016), SMOST (1988), Carneiro *et al.* (2014).

4.2.1 Aula 1.

A primeira aula consiste em uma revisão de todas as definições e propriedades que regem a função exponencial, além de rever os métodos é técnicas de resolução das equações e inequações exponenciais. O propósito é fazer com que os alunos retomem seus conhecimentos sobre a função exponencial, uma vez que eles já deverão ter uma noção básica deste conteúdo.

Conteúdos programáticos:

- Função Exponencial.

  Definição e Propriedades.

  Gráfico da Função Exponencial.

- Equações e Inequações Exponenciais.

Pré-requisitos:

- Definições e propriedades das potências.
- Definições e propriedades das raízes.
- Funções.

  Domínio, contradomínio e imagem.

  Função crescente e decrescente.

  Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva.

- Equações e inequações.

Objetivos:

Compreender e aplicar as propriedades das funções exponenciais, além de construir e interpretar seus gráficos e elementos que os constituem. Montar estratégias de resolução de equações e inequações exponenciais.

Desenvolvimento da aula:

- Definir a função exponencial.
- Construir e explorar o gráfico da função exponencial, e fazer o uso do software GeoGebra, explorando todos seus recursos.
- Ressaltar as propriedades que envolvem as funções exponenciais.
- Definir e montar estratégias de resolução de equações e inequações exponenciais.
- Resolução de exercícios.

Atividades propostas:

As atividades propostas a seguir, tem por objetivo recapitular as definições e propriedades das funções exponenciais. Por meio delas, os alunos poderão preparar-se para atividades mais elaboradas.

Atividade 1. (Dante, 2016, pág. 165). Resolva as seguintes equações:
(a) $3^{x-1} = 81$;
(b) $9^{x+1} = \frac{1}{27}$;
(c) $2^{x^2-3x-4} = 1$.

Solução.
(a) Inicialmente, pelas propriedades das potências, observe que $81 = 3^4$. Observe ainda que a equação dada pode ser transformada em uma igualdade de potências, ou seja

$$3^{x-1} = 81 = 3^4.$$

Como a função exponencial $x \mapsto 3^x$ é injetiva, pode-se igualar os expoentes. Assim,

$$3^{x-1} = 3^4 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5.$$

Logo, $x = 5$ é a única solução da equação dada.

Esta atividade, pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.1, mostra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3^{x-1}$, $g(x) = 81$. A abscissa da interseção dessas funções, representa a solução da equação dada.

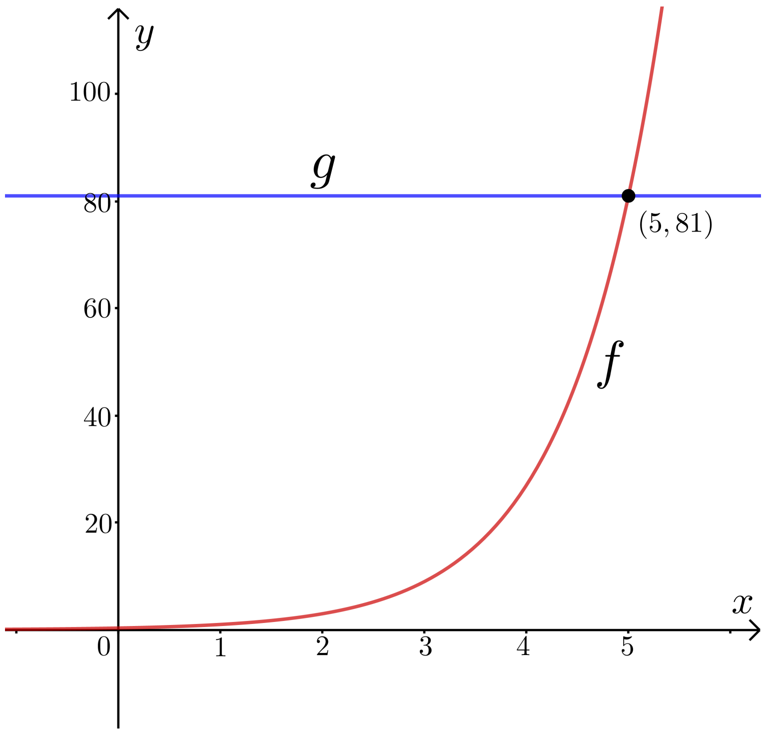

Figura 4.1: $3^{x-1} = 81$

(b) Inicialmente, pelas propriedades das potências, observe que $9^{x+1} = (3^2)^{x+1} = 3^{2x+2}$, e $\frac{1}{27} = 27^{-1} = (3^3)^{-1} = 3^{-3}$. Assim, transformando a equação dada em uma igualdade de potências, tem-se:

$$3^{2x+2} = 9^{x+1} = \frac{1}{27} = 3^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2x+2} = 3^{-3}.$$

Novamente como no item (a), utilizando a função exponencial $x \mapsto 3^x$, pode-se igualar os expoentes. Assim,

$$3^{2x+2} = 3^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{2}.$$

Logo, $x = -\frac{5}{2}$ é a única solução da equação dada.

Esta atividade também, pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.2, mostra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 9^{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{27}$. A abscissa da interseção dessas funções, representa a solução da equação dada.

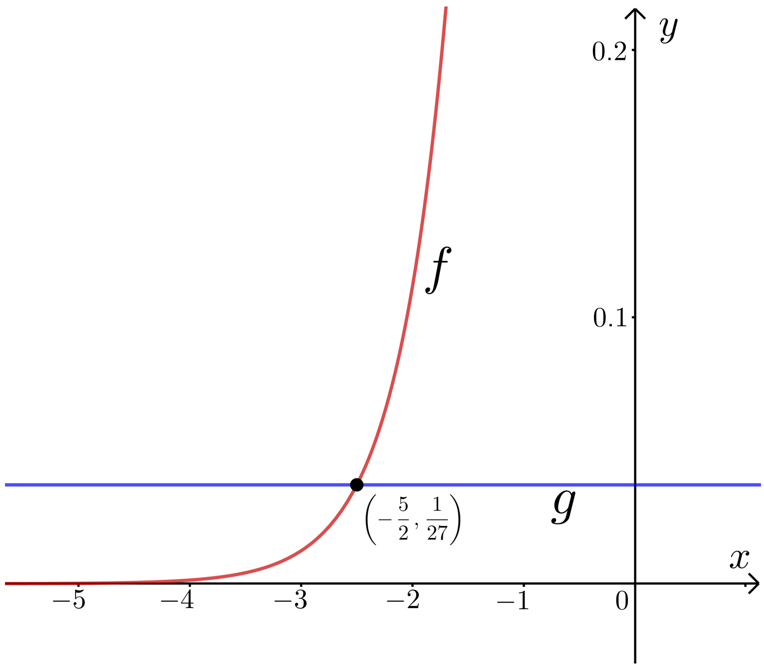

Figura 4.2: $9^{x+1} = \frac{1}{27}$

(c) Inicialmente, pelas propriedades das potências, observe que $1 = 2^0$. Assim, transformando a equação dada em uma igualdade de potências, tem-se

$$2^{x^2-3x-4} = 1 = 2^0.$$

Como a função exponencial $x \mapsto 2^x$ é injetiva, pode-se igualar os expoentes. Assim,

$$2^{x^2-3x-4} = 2^0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Logo, basta resolver a equação de segundo grau na variável x. Tem-se

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -1.$$

Portanto, $x = 4$ e $x = -1$ são soluções da equação dada.

Esta atividade, pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.3, mostra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2^{x^2-3x-4}$, $g(x) = 1$. As abscissas da interseções dessas funções, representam a solução da equação dada.

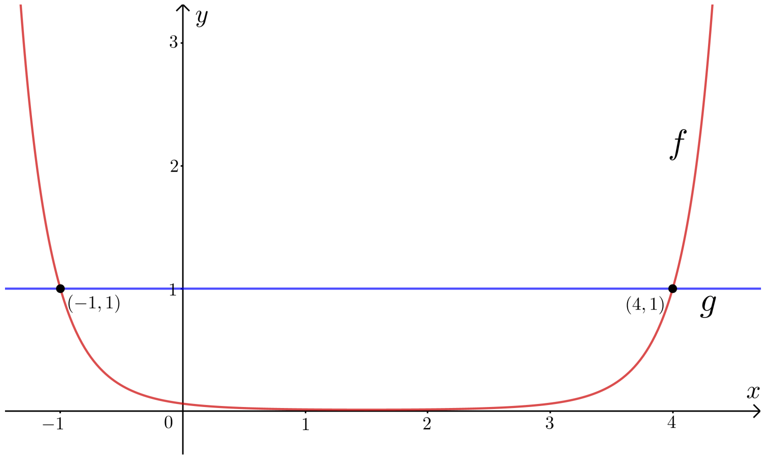

Figura 4.3: $2^{x^2-3x-4} = 1$

Atividade 2. (Dante, 2016, pág. 165). Determine o conjunto solução do sistema de equações

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 1, \\ 3^x \cdot 9^y = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Solução. Inicialmente, observe que pelas propriedades das potências, o sistema inicial pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 5^0, \\ 3^x \cdot 3^{2y} = 9^{-1}, \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 5^0, \\ 3^{x+2y} = 3^{-2}. \end{cases}$$

Como as equações do sistema, foram transformadas em equações com potências da mesma base, e sendo a função exponencial é injetiva, obtém-se o seguinte sistema equivalente ao sistema dado:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + 2y = -2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Subtraindo as equações do Sistema 4.1 obtém-se

$$y - 2y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2.$$

Substituindo $y = -2$ na equação $x + y = 0$, tem-se

$$x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Por outro lado, substituindo $x = 2 \quad \text{e} \quad y = -2$, no Sistema de equações 4.1, tem-se:

$$\begin{cases} 2 + (-2) = 0, \\ 2 + 2 \cdot (-2) = -2. \end{cases}$$

Logo, $\{(2, -2)\}$, é o conjunto solução do sistema dado.

Atividade 3. (Dante, 2016, pág. 168). Resolva as inequações:
(a) $2^{x+7} < 32$;
(b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \geq 4^{x+3}$;
(c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Solução.
(a) Inicialmente observe que $32 = 2^5$, assim, transformando a inequação dada em uma desigualdade de potências da mesma base, tem-se

$$2^{x+7} < 32 = 2^5.$$

Como a função $x \mapsto 2^x$ é crescente (pois $2 > 1$), o sentido da desigualdade se mantém. Logo,

$$2^{x+7} < 2^5 \quad \Leftrightarrow \quad x + 7 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2.$$

Portanto, o conjunto solução da inequação dada é o intervalo $(-\infty, -2)$.

Esta atividade, pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.4, mostra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2^{x+7}$, $g(x) = 32$, a qual observa-se que na parte do intervalo $(-\infty, -2)$, o gráfico da f encontra-se abaixo do gráfico da g.

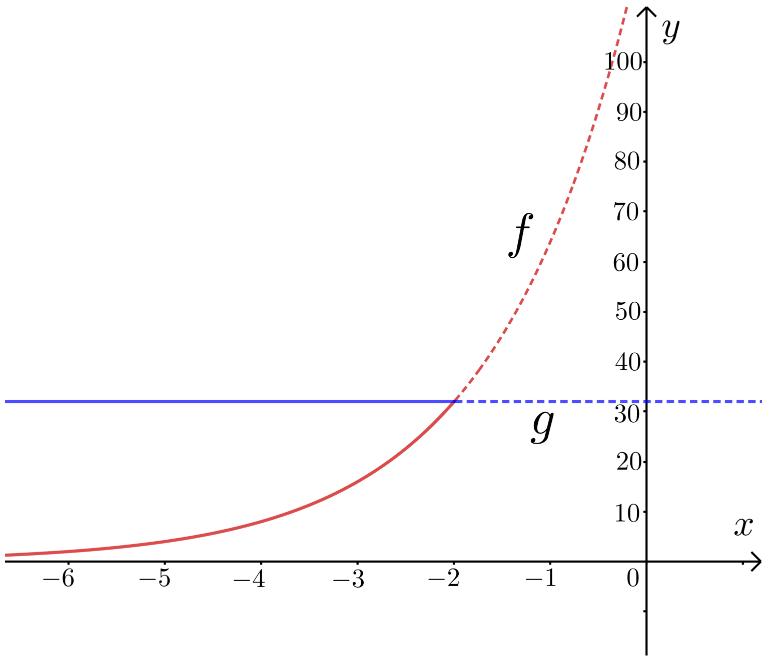

Figura 4.4: $2^{x+7} < 32$

(b) Inicialmente observe que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(2^{-1}\right)^{x+1} = 2^{-x-1}.$$

Por outro lado,

$$4^{x+3} = \left(2^{2}\right)^{x+3} = 2^{2x+6}.$$

Assim, transformando a inequação dada em uma desigualdade de potências da mesma base, tem-se

$$2^{-x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \geq 4^{x+3} = 2^{2x+6}.$$

Novamente como no item (a), utilizando a função $x \mapsto 2^x$ e o fato de ser crescente (pois $2 > 1$), o sentido da desigualdade se mantém. Logo,

$$\begin{aligned} 2^{-x-1} \geq 2^{2x+6} \quad & \Leftrightarrow -x-1 \geq 2x+6 \\ & \Leftrightarrow -7 \geq 3x \\ & \Leftrightarrow 3x \leq 7 \\ & \Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução da inequação dada é o intervalo $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right]$.

Esta atividade, também pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.5, mostra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$, $g(x) = 4^{x+3}$, a qual observa-se que na parte do intervalo $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$, o gráfico da f encontra-se acima do gráfico da g, e no ponto $x = -\frac{7}{3}$ eles se intersectam.

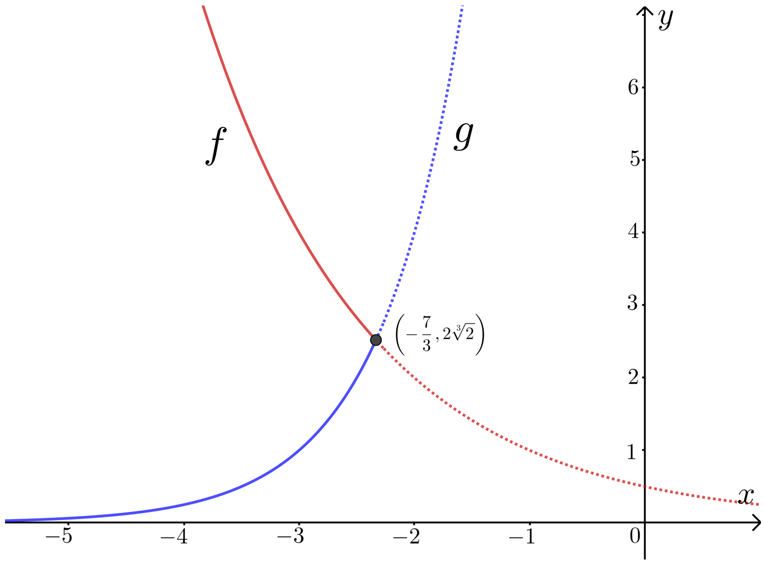

Figura 4.5: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \geq 4^{x+3}$

(c) Observe que neste caso, já tem-se uma desigualdade com potências da mesma base. Assim, como a função $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ é decrescente (pois $0 < \frac{1}{3} < 1$), troca-se o sentido da desigualdade, logo,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x \leq 2.$$

Então, resolvendo da equação de segundo grau, na variável x, obtém-se:

$$\begin{aligned} x^2 - x \leq 2 \qquad &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \quad \text{e} \quad x + 1 \leq 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 \leq 0 \quad \text{e} \quad x + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 2 \quad \text{e} \quad x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \leq 2 \quad \text{e} \quad x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução da inequação dada é o intervalo $[-1, 2]$.

Esta atividade, pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.6, mostra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x}$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$, a qual observa-se que na parte do intervalo $(-1, 2)$, o gráfico da f encontra-se acima do gráfico da g, e nos pontos $x = -1$ e $x = 2$, eles se intersectam.

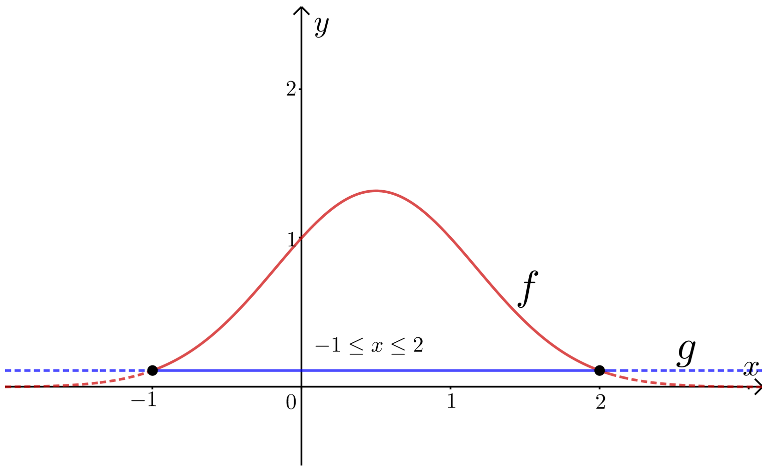

Figura 4.6: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2$

4.2.2 Aula 2.

A segunda aula, consiste em resolução de atividades olímpicas sobre função exponencial. O intuito da aula, é fazer com que os alunos exercitem os conhecimentos adquiridos na aula anterior.

Conteúdo programático:

- Resolução de Problemas Olímpicos sobre Função Exponencial.

Pré-requisitos:

- Definição e Propriedades da Função Exponencial.
- Gráfico da Função Exponencial.
- Equações e Inequações Exponenciais.
- Desigualdade das médias aritmética e geométrica.

Objetivos:

Os objetivos da aula, serão compreender e aplicar as propriedades das funções exponenciais, construir e interpretar gráficos, além de resolver equações e inequações exponenciais.

Desenvolvimento da aula:

- Resolução de problemas olímpicos sobre função exponencial, fazendo o uso do software GeoGebra sempre que possível, explorando todos seus recursos.

Atividades propostas:

Atividade 4 (Banco de Questões 2010)**.** Qual é o número de soluções da equação $2\left(2^{2x}\right) = 4^x + 64$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) Infinitos

Solução.

Inicialmente, usando as definições de potência, a equação dada pode ser reescrita como:

$$2\left(2^{2x}\right) = 2^{2x} + 64. \tag{4.2}$$

Tome

$$a = 2^{2x}. \tag{4.3}$$

Substituindo (4.3) em (4.2) obtém-se:

$$2a = a + 64 \quad \Leftrightarrow \quad a = 64.$$

Assim, substituindo o valor de a em 4.3, tem-se

$$64 = 2^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad 2^6 = 2^{2x}.$$

Como a função exponencial $x \mapsto 2^x$ é injetiva, então

$$2^6 = 2^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Por outro lado, se $x = 3$, então

$$2(2^{2\cdot 3}) = 2(2^6) = 2^7 = 2(2^6) = 2^6 + 2^6 = 2^{2\cdot 3} + 2^6 = 2^{2\cdot 3} + 64$$

Portanto, $x = 3$ é a única solução da equação dada e assim, a alternativa correta é a (b).

Esta atividade, pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.7, mostra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2(2^{2x})$, $g(x) = 4^x + 64$. A abscissa da interseção dessas funções, representa a solução da equação dada.

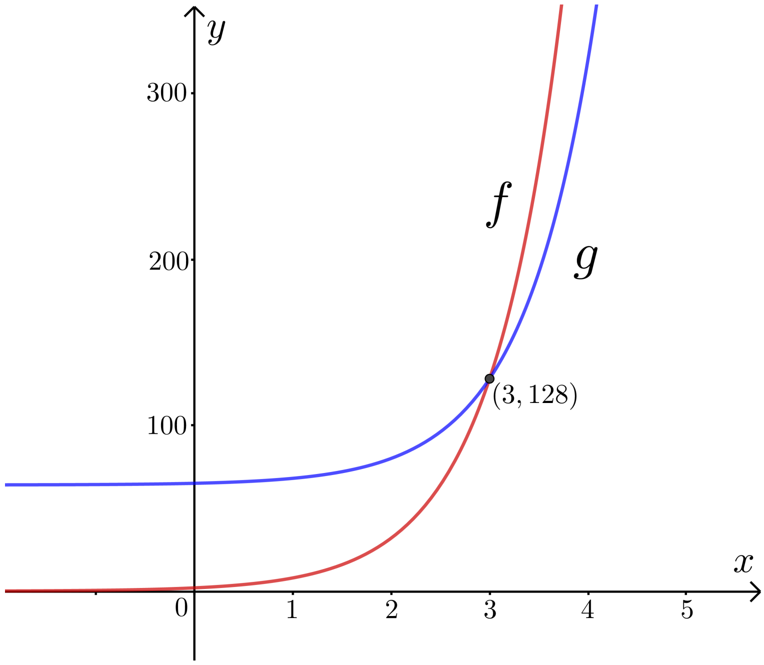

Figura 4.7: $2(2^{2x}) = 4^x + 64$

Atividade 5 (Portugal, 2006)**.** Se $4^x = 9$ e $9^y = 256$, então xy é igual a:

(a) 2006 (b) 48 (c) 36 (d) 10 (e) 4

Solução.

Pelas propriedades da potências, equações dadas podem ser escritas como :

$$2^{2x} = 3^2 \quad e \quad 3^{2y} = 2^8.$$

Multiplicando-as lado a lado, e aplicando novamente as propriedades das potências, obtém-se

$$2^{2x} \cdot 3^{2y} = 3^2 \cdot 2^8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2^{2x}}{2^8} = \frac{3^2}{3^{2y}} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2x-8} = 3^{2-2y}. \tag{4.4}$$

Observe agora que a igualdade será válida se, e somente se, $2x - 8 = 0$ e $2 - 2y = 0$, que equivale em $x = 4$ e $y = 1$. Portanto, o produto de xy será dado por $1 \cdot 4 = 4$, e então a alternativa correta é o item (e).

Atividade 6 (Portugal, 2015)**.** Quantas soluções tem a equação $2^{2x} = 4^{x+1}$?

(a) 0 (b) Infinitos (c) 2 (d) 1 (e) 3

Solução.

Aplicando as propriedades das potências, para transformar a equação dada em uma igualdade de potências de mesma base, obtém-se:

$$2^{2x} = 2^{2(x+1)}.$$

Como $x \mapsto 2^x$ é injetiva, tem-se que

$$2x = 2\,(x+1) \tag{4.5}$$

Observe que a Equação 4.5 não possui solução em $\mathbb{R}$. Então, concluímos que a alternativa correta é o item (a).

Esta atividade, pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.8, ilustra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = (2^{2x})$, $g(x) = 2^{2x+1}$. Como a equação não possui solução dentro do conjunto dos números reais, as funções não se intersectam.

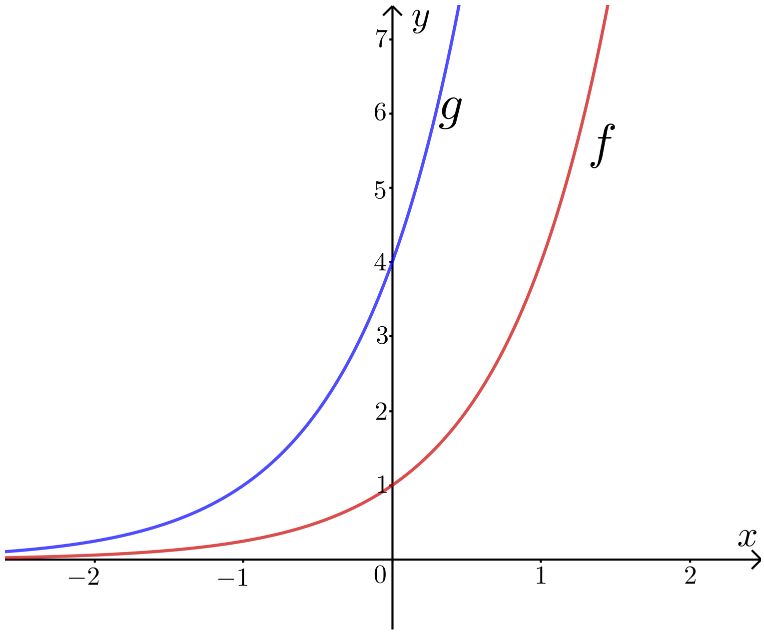

Figura 4.8: $(2^{2x}) = 2^{2x+1}$

Atividade 7 (Ceará, 1989)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real tal que

$$5^{2x} - 2 \cdot 5^x \cdot f(x) + 1 = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(x) \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e que existe um único $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$.

Solução. Primeiramente, observe que $5^x > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Então, isolando $f(x)$ na equação inicial, tem-se

$$f(x) = \frac{5^{2x}+1}{2 \cdot 5^x}.$$

Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, obtém-se

$$\frac{5^{2x}+1}{2} \geq \sqrt{5^{2x} \cdot 1} \quad \Leftrightarrow \quad 5^{2x}+1 \geq 2\sqrt{5^{2x} \cdot 1} = 2 \cdot 5^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5^{2x}+1}{2 \cdot 5^x} \geq 1.$$

Logo, tem-se provado que $f(x) \geq 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Para que $f(x)$ seja igual a 1, deve-se ter

$$\frac{5^{2x}+1}{2} = 5^x = \sqrt{5^{2x} \cdot 1},$$

ou seja, as médias aritméticas e geométricas devem ser iguais e, portanto,

$$5^{2x} = 1 = 5^0.$$

Assim, como a função $x \mapsto 5^x$ é injetiva, tem-se que

$$2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Por outro lado,

$$f(0) = \frac{5^0+1}{2 \cdot 5^0} = 1.$$

Logo, $x = 0$ é o único valor tal que $f(x) = 1$.

Esta atividade, pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.9, ilustra a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \frac{5^{2x}+1}{2 \cdot 5^x}$. Note que o gráfico da f encontra-se acima da reta $y = 1$, ocorrendo a igualdade somente no caso $x = 0$.

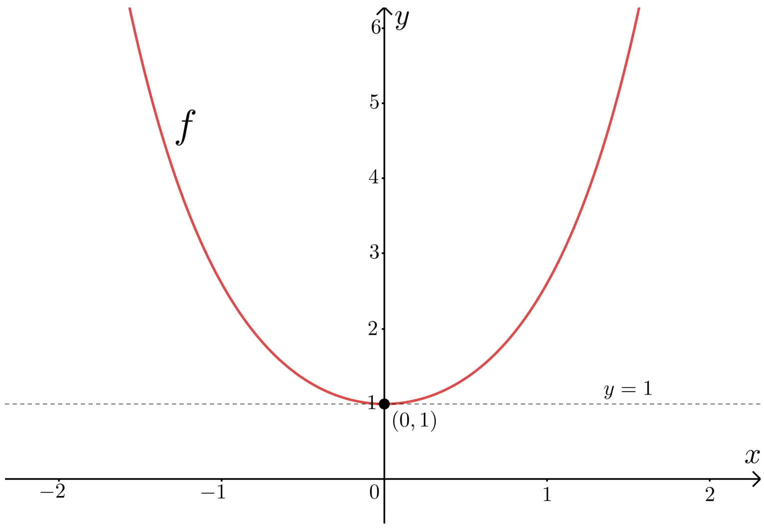

Figura 4.9: $f(x) = \frac{5^{2x}+1}{2 \cdot 5^x}$

4.2.3 Aula 3.

A terceira aula consiste em uma revisão de todas as definições e propriedades que regem os logaritmos e as funções logarítmicas, além de rever os métodos e técnicas de resolução das equações e inequações logarítmicas. O propósito é fazer com que os alunos retomem seus conhecimentos em relação aos logaritmos, uma vez que eles já deverão ter uma noção preliminar deste conteúdo.

Conteúdos programáticos:

- Logaritmo

  Definição.

  Propriedades operatórias.

  Mudança de base.

- Função logarítmica.

  Definição.

  Gráfico da função logarítmica.

- Equações e inequações logarítmicas.

Pré-requisitos:

- Definições e propriedades das potências e raízes.
- Definição e Propriedades da Função Exponencial.
- Gráfico da Função Exponencial.
- Equações e Inequações Exponenciais.

Objetivos:

Compreender e aplicar as propriedades dos logaritmos e das funções logarítmicas, bem como, construir e interpretar seus gráficos de funções logarítmicas. Resolver equações e inequações logarítmicas.

Desenvolvimento da aula:

- Definir logaritmo de um número.
- Expor e compreender as propriedades operatórias dos logaritmos.
- Explanar sobre as propriedades de mudança de base.
- Definir função logarítmica.

- Construir e explorar o gráfico da função logarítmica, e fazer o uso do software GeoGebra, beneficiando-se de todos seus recursos.
- Estabelecer e montar estratégias de resolução das equações e inequações logarítmicas.
- Resolução de problemas olímpicos.

Atividades propostas:

Atividade 8. (Dante, 2016, pág. 178). Calcule o valor de:
(a) $\log_2 128$;
(b) $\log_{\sqrt{3}} 9$;
(c) $2^{\log_5 10 \cdot \log_2 5}$;
(d) $2^{\frac{\log_2 3}{3}}$;
(e) $3^{1+\log_3 5}$.

Solução.
(a) Pela definição de logaritmo, tem-se que

$$\log_2 128 = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 128 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 2^7.$$

Como a função exponencial $x \mapsto 2^x$ é injetiva, obtém-se que $x = 7$. Portanto, $\log_2 128 = 7$.
(b) Pela definição de logaritmo, tem-se que

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{3}\right)^x = 9. \tag{4.6}$$

Por outro lado, pelas propriedades das potências, obtém-se que,

$$\left(\sqrt{3}\right)^x = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^{\frac{x}{2}} \quad \text{e} \quad 9 = 3^2.$$

Assim, a Equação 4.6 tornará-se uma igualdade de potências da mesma base, ou seja,

$$\left(\sqrt{3}\right)^x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{\frac{x}{2}} = 3^2.$$

Como a função exponencial $x \mapsto 3^x$ é injetiva, obtém-se que

$$3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$

Portanto, $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$.
(c) Pelas propriedades das potências e dos logaritmos, tem-se que,

$$2^{\log_5 10 \cdot \log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{\log_5 10} = 5^{\log_5 10} = 10.$$

Portanto, $2^{\log_5 10 \cdot \log_2 5} = 10$.

(d) Pelas propriedades das potências e dos logaritmos, tem-se que,

$$2^{\frac{\log_2 3}{3}} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}.$$

Portanto $2^{\frac{\log_2 3}{3}} = \sqrt[3]{3}$.

(e) Pelas propriedades das potências e dos logaritmos, tem-se que,

$$3^{1+\log_3 5} = 3^{\log_3 3 + \log_3 5} = 3^{\log_3 3 \cdot 15} = 3^{\log_3 15} = 15.$$

Portanto, $3^{1+\log_3 5} = 15$.

Atividade 9. (Dante, 2016, pág. 181). Dado $\log_b a = 6$, calcule $\log_a b^3$.

Solução.

Inicialmente em consequência da propriedade da mudança de base, $\log_a b^3$ é equivalente a

$$\log_a b^3 = \frac{\log_b b^3}{\log_b a}.$$

Como, $\log_b a = 6$, e pela propriedade do logaritmo da potência, tem-se que

$$\frac{\log_b b^3}{\log_b a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o valor de $\log_a b^3$ é $\frac{1}{2}$.

Atividade 10. (Dante, 2016, pág. 198). Resolva as equações.

(a) $\log_2(x-3) + \log_2 x = 2$;

(b) $\log_9 x + \log_{27} x - \log_2 x = -1$.

Solução.

(a) Inicialmente observe que $x - 3 > 0 \quad \text{e} \quad x > 0$ então, $x > 3$. Observe ainda que pela propriedade do produto dos logaritmos, tem-se que

$$\log_2(x-3) + \log_2 x = \log_2[(x-3)x].$$

Por outro lado, pela definição de logaritmo, $2 = \log_2 4$. Então, a equação dada inicialmente torna-se equivalente a

$$\log_2[(x-3)x] = \log_2 4.$$

Como a função $x \mapsto \log_2 x$ é injetiva, obtém-se que

$$\log_2[(x-3)x] = \log_2 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x = 4.$$

Resolvendo a equação de segundo grau, na variável x, resulta-se em

$$x^2 - 3x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -1.$$

Como a condição inicial é $x > 3$, então, a solução da equação dada é $x = 4$.

Esta atividade, pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.10, mostra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \log_2(x-3) + \log_2 x$, $g(x) = 2$. As abscissas da interseções dessas funções, representam a solução da equação dada.

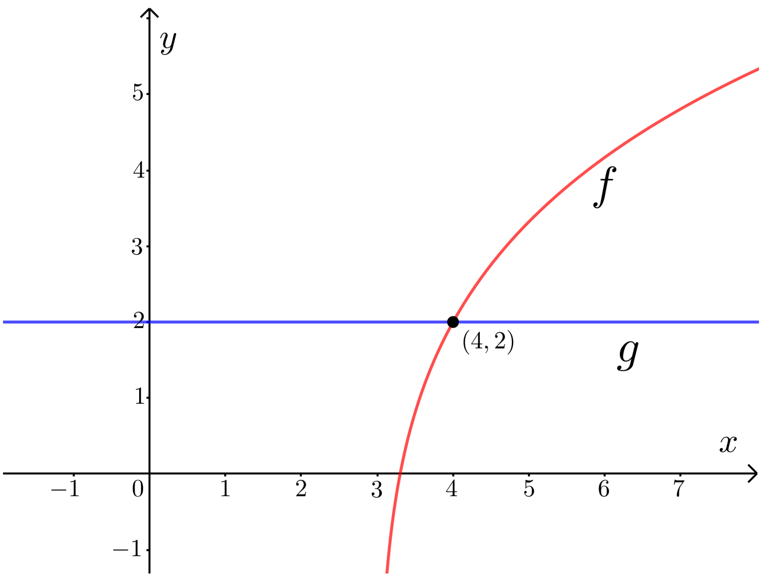

Figura 4.10: $\log_2(x-3) + \log_2 x = 2$

(b) Inicialmente observe que $x > 0$. Reescrevendo a equação dada em uma equação equivalente, com logaritmos na base 3, pela propriedade de mudança de base, obtém-se

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 9} + \frac{\log_3 x}{\log_3 27} - \log_3 x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log_3 x}{2} + \frac{\log_3 x}{3} - \log_3 x = -1. \tag{4.7}$$

Resolvendo a Equação 4.7, e aplicando as propriedades dos logaritmos tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\log_3 x}{2} + \frac{\log_3 x}{3} - \log_3 x = -1 \quad & \Leftrightarrow 3\log_3 x + 2\log_3 x - 6\log_3 x = -6 \\ & \Leftrightarrow -\log_3 x = -6 \quad \cdot(-1) \\ & \Leftrightarrow \log_3 x = 6 \\ & \Leftrightarrow 3^6 = x \\ & \Leftrightarrow x = 729. \end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação dada é $x = 729$.

Atividade 11. (Dante, 2016, pág. 199). Resolva as inequações.

(a) $\log_2 (x+1) \geq \log_2 6$;

(b) $\log_{49} 2x - \log_{49} 3 \geq \log_7 x + \log_{49} 2$.

Solução.

(a) Inicialmente observe que $x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-1$. Observe ainda que a função logarítmica $x \mapsto \log_2 x$ é crescente (pois $2>1$) assim, conserva-se o sentido da desigualdade, e então:

$$\log_2(x+1) \geq \log_2 6 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 \geq 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 5.$$

Portanto o conjunto solução da inequação dada é o intervalo $[5, +\infty)$.

Esta atividade, pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.11, mostra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \log_2 (x+1)$, $g(x) = \log_2 6$, a qual observa-se que na parte do intervalo $(5, +\infty)$, o gráfico da f encontra-se acima do gráfico da g, e no ponto $x=5$ eles se intesectam.

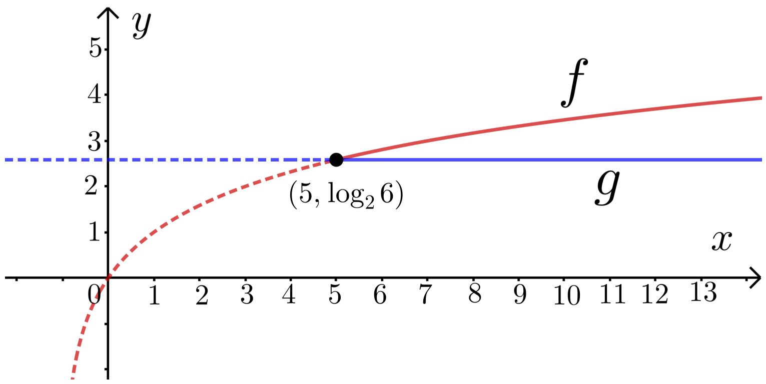

Figura 4.11: $\log_2 (x+1) \geq \log_2 6$

(b) Inicialmente observe que $x>0$. Agora pela propriedade da mudança de base,

$$\log_7 x = \frac{\log_{49} x}{\log_{49} 7} = \frac{\log_{49} x}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \log_{49} x = \log_{49} x^2.$$

Assim, a inequação dada é equivalente a

$$\log_{49} 2x - \log_{49} 3 \geq \log_{49} x^2 + \log_{49} 2. \tag{4.8}$$

Por fim, pelas propriedades da multiplicação e divisão dos logaritmos, a Inequação 4.8 torna equivalente a

$$\log_{49} \frac{2x}{3} \geq \log_{49} 2x^2.$$

Como a função $x \mapsto \log_{49} x$ é crescente (pois $49>1$), então

$$\log_{49} \frac{2x}{3} \geq \log_{49} 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{3} \geq 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 - 2x \leq 0. \tag{4.9}$$

Basta agora resolver a Inequação 4.9 de segundo grau na variável x. Logo,

$$\begin{aligned} 6x^2 - 2x \leq 0 \quad & \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{3}x \leq 0 \\ & \Leftrightarrow x\left(x - \frac{1}{3}\right) \leq 0 \\ & \Leftrightarrow x \leq 0 \quad \text{e} \quad x \geq \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad x \leq \frac{1}{3} \\ & \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Como $x > 0$, então o conjunto solução da inequação dada é o intervalo $\left(0, \frac{1}{3}\right]$.

Esta atividade, pode ser ilustrada geometricamente. De fato, a Figura 4.12, mostra as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \log_{49} \frac{2x}{3}$, $g(x) = \log_{49} 2x^2$, a qual observa-se que na parte do intervalo $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, o gráfico da f encontra-se acima do gráfico da g, e no ponto $x = \frac{1}{3}$, eles se intersectam.

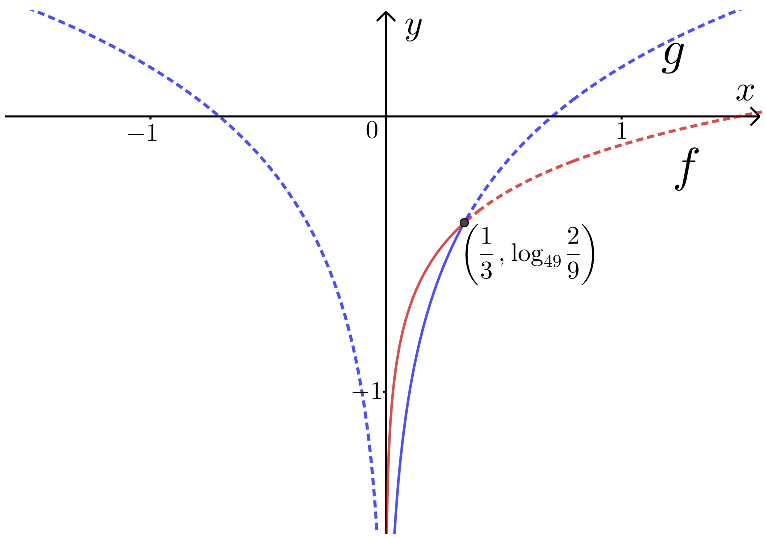

Figura 4.12: $\log_{49} \frac{2x}{3} \geq \log_{49} 2x^2$

4.2.4 Aula 4.

A quarta aula, consiste em resolução de atividades olímpicas sobre as funções exponenciais e logarítmicas. O intuito da aula, é fazer com que os alunos exercitem e coloquem em prática todos os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores.

Conteúdos programáticos:

- Resolução de problemas olímpicos sobre funções exponenciais e logarítmicas.

Pré-requisitos:

- Definições e propriedades da função exponencial .
- Definição e propriedades da função logaritmo.

Objetivos:

Aplicar as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas. Desenvolver estratégias de resolução de problemas olímpicos sobre as funções estudadas nas aulas anteriores.

Desenvolvimento da aula:

- Resolução de problemas olímpicos sobre funções exponenciais e logarítmicas.

Atividades propostas:

Atividade 12 (Cingapura, 1988)**.** O valor de

$$\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36}$$

é:

(a) $\frac{1}{36}$ (b)$\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d)$\frac{1}{2}$ (e) nenhuma das anteriores.

Solução.
Inicialmente, observe que, pela propriedade da mudança de base, e a propriedade que transforma produto em soma, tem-se que:

$$\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36} = \log_{36} 2 + \log_{36} 3 = \log_{36} 2 \cdot 3 = \log_{36} 6. \tag{4.10}$$

Por outro lado pela propriedade que define os logaritmos,

$$\log_{36} 6 = y \quad \Leftrightarrow \quad 36^y = 6 \quad \Leftrightarrow \quad (6^2)^y = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 6^{2y} = 6. \tag{4.11}$$

Pela injetividade da função $x \mapsto 6^x$, de (4.11) conclui-se que

$$6^{2y} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}. \tag{4.12}$$

Logo, de (4.10), (4.11) e (4.12),

$$\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36} = \log_{36} 6 = y = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a alternativa correta, é o item (d).

Atividade 13 (Ceará, 1988)**.** Se

$$\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_3(\log_4(\log_2 y)) = \log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0,$$

determine o valor de $x + y + z$.

Solução.
Note inicialmente que as equações dadas podem ser trabalhadas separadamente. Assim, a primeira equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_3(\log_4 x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_4 x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4^3 = 64.$$

Analogamente ao caso anterior, da segunda equação obtém-se:

$$\log_3(\log_4(\log_2 y)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_4(\log_2 y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = 4^2 = 16.$$

Finalmente, a terceira equação pode ser escrita como segue:

$$\log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(\log_3 z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_3 z = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z = 3^2 = 9.$$

Portanto, conclui-se que, $x = 64, y = 16$ e $z = 9$. Consequentemente, $x + y + z = 64 + 16 + 9 = 89$.

Atividade 14 (Ceará, 1986)**.** Sejam x, y reais que satisfazem a equação:

$$2\log(x - 2y) = \log x + \log y.$$

Calcule o valor de $\frac{x}{y}$.

Solução.
Inicialmente, ressalta-se que x e y devem ser ambos positivos, e $x > 2y$, para que estes logaritmos estejam bem definidos. Pela propriedade da multiplicação e potência dos logaritmos, tem-se

$$\log(x - 2y)^2 = \log(xy).$$

Por outro lado $x \mapsto \log x$ é uma função injetiva, então:

$$(x - 2y)^2 = xy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5xy + 4y^2 = 0. \tag{4.13}$$

Daí, com $y^2 \neq 0$, dividindo a 4.13 por y^2, obtém-se:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 4 = 0.$$

Tome agora, $\frac{x}{y} = t$, então tem-se

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)(t-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \quad \text{ou} \quad t = 4.$$

Como $x > 2y$, então $\frac{x}{y} > 2$ e, assim, conclui-se que $\frac{x}{y} = t = 4$.

Atividade 15 (Campina Grande-PB, 2006)**.** Ao dobrarmos uma folha de papel retangular pela metade uma vez, obtemos uma espessura correspondente a duas folhas. Suponha que é possível continuar dobrando essa folha dessa maneira quantas vezes quisermos. Qual o número mínimo de dobras a serem efetuadas para que obtenhamos uma espessura maior ou igual que a distância da Terra à Lua, sabendo que a distância Terra-Lua é de 400.000 km, e a espessura de uma pilha com 100 folhas é 1,0 cm? (Utilize o valor: $\log 2 = 0,3$).

(a) 31 (b) 37 (c) 38 (d) 42 (e) 51

Solução.

Quando dobramos a primeira vez à folha de papel, obteremos a espessura correspondente à duas folhas. Ao fazermos a segunda dobra teremos a espessura de quatro folhas, a terceira oito folhas e assim sucessivamente, ou seja, a n-ésima dobra corresponde a uma espessura de 2^n folhas. Como a espessura de 100 folhas é 1,0 cm, a espessura (x) de 2^n folhas em centímetros é de

$$x = \frac{2^n}{100}.$$

Por outro lado, a distância Terra-Lua é de 400 000 Km, o que em centímetros será dada por

$$40.000.000.000 = 2^2 \cdot 10^{10}.$$

Daí temos que o número n de dobras deverá ser tal que:

$$\frac{2^n}{100} \geq 2^2 \cdot 10^{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2^n}{2^2} \geq 10^{10} \cdot 10^2,$$

ou, equivalentemente,

$$2^{n-2} \geq 10^{12}. \tag{4.14}$$

Aplicando $\log_{10}$ ambos os lados de (4.14), temos

$$\log_{10} 2^{n-2} \geq \log_{10} 10^{12}.$$

Usando a propriedade da potência:

$$\log_{10} 2^{n-2} = (n-2)\log_{10} 2 \geq 12\log_{10} 10 = \log_{10} 10^{12}.$$

Então, como $\log_{10} 2 = 0,3$, obtém-se que,

$$(n-2)\cdot(0,3) = (n-2)\cdot\frac{3}{10} \geq 12 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3n}{10} - \frac{6}{10} \geq 12 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 42$$

Logo, o número mínimo de dobras a serem efetuadas é 42. Portando, a alternativa correta é o item (d).

Atividade 16 (Ceará, 1996)**.** Resolva o sistema

$$\begin{cases} \log_5(x+y) + \log_6(x-y) = 3, \\ x^2 - y^2 = 125. \end{cases}$$

Solução.
Trabalhando com a segunda equação do sistema de equações dado, obtém-se

$$x^2 - y^2 = 125$$

ou, equivalentemente,

$$(x+y)(x-y) = 5^3. \tag{4.15}$$

Aplicando $\log_5$ em (4.15) , tem-se

$$\log_5[(x+y)(x-y)] = \log_5 5^3.$$

Donde,

$$\log_5(x+y) + \log_5(x-y) = 3. \tag{4.16}$$

Agora, subtraindo a Equação 4.16, da primeira equação dos sistema dado, tem-se

$$\log_6(x-y) - \log_5(x-y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_6(x-y) = \log_5(x-y),$$

o que acontece se, e somente se, $x - y = 1$. E, assim, substituindo na Equação 4.15, conclui-se que $x + y = 125$. Com isso, o sistema inicial é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 125. \end{cases} \tag{4.17}$$

Resolvendo o sistema (4.17), tem-se como solução o par $(63, 62)$. Portanto, $(63, 62)$ é a única solução do sistema de equações inicialmente dado.

4.2.5 Aula 5.

Conteúdos programáticos:

- Resolução de problemas olímpicos sobre funções exponenciais e logarítmicas.

Pré-requisitos:

- Definições e propriedades da função exponencial .
- Definição e Propriedades da Função logaritmo.

Objetivos:

Desenvolver estratégias de resolução de problemas olímpicos sobre as funções exponenciais e logarítmicas, aplicando todo o conhecimento adquirido nas aulas anteriores.

Desenvolvimento da aula:

- Resolução de problemas olímpicos sobre função exponencial e logarítmica.

Atividades propostas:

Atividade 17 (Maringá, 2015)**.** Determine todas as soluções inteiras positivas para a equação $2^x + 2^y + 2^z = 2336$.

Solução. Suponha, sem perda de generalidade que, $x \leq y \leq z$. Com isso, pode-se escrever $y = x + a$ e $z = y + b$, ou ainda $z = x + a + b$.
Além disso, a fatoração em primos do número $2336 = 2^5 \cdot 73$. Daí, tem-se

$$2^x + 2^y + 2^z = 2^x + 2^{x+a} + 2^{x+a+b} = 2^x \left(1 + 2^a + 2^{a+b}\right) = 2^5 \cdot 73.$$

Por outro lado, observe que $\left(1 + 2^a + 2^{a+b}\right)$ é ímpar, logo não existe nenhum fator de 2 nesse número e, assim, pode-se concluir que $x = 5$ e

$$1 + 2^a + 2^{a+b} = 73. \tag{4.18}$$

De 4.18, segue que

$$2^a + 2^{a+b} = 2^a \left(1 + 2^b\right) = 72.$$

Novamente, a fatoração em primos de $72 = 2^3 \cdot 3^2$, e então

$$2^a \left(1 + 2^b\right) = 2^3 \cdot 9.$$

Procedendo de maneira análoga, pode-se concluir que $a = 3$ e $1 + 2^b = 9$. Logo, $2^b = 8 = 2^3$, então $b = 3$.
Assim, uma solução para equação dada, é $x = 5, y = 5 + 3 = 8 \quad \text{e} \quad z = 5 + 3 + 3 = 11$.
Por outro lado,

$$2^5 + 2^8 + 2^{11} = 32 + 256 + 2048 = 2336.$$

Logo $(5, 8, 11)$ é solução da equação dada, as demais soluções, são obtidas apenas permutando os valores de x, y e z. Consequentemente, as soluções são: $(5, 8, 11), (5, 11, 8), (8, 11, 5)$, $(8, 5, 11), (11, 5, 8)$ e $(11, 8, 5)$.

Outras atividades desta aula, podem ser complementadas com os exercícios expostos no Capítulo 3.

Considerações finais

As Olimpíadas de Matemática se expandiram de maneira grandiosa, passando de pequenas competições locais, a competições de nível mundial, abrangendo quase todas as nações do mundo.

A realização de olimpíadas ou atividades competitivas se tornam importantes para os estudantes, pois proporcionam a eles oportunidade de aprofundar os estudos em assuntos do seu interesse. Viu-se nestas competições uma forma de incentivar e apoiar os participantes à exercitarem e até mesmo descobrirem seus talentos matemáticos.

Logo, o principal objetivo desse trabalho foi incitar o estudo das funções exponenciais e logarítmicas, de modo a unir esta aprendizagem com as olimpíadas de matemática, buscando sempre relacionar as principais propriedades de cada uma, para melhores resultados do ensino-aprendizagem. Neste sentido, a proposta exposta, busca colaborar com o ensino das funções exponenciais e logarítmicas no Ensino Médio, além de incentivar a participação dos alunos em competições olímpicas, ligadas a área de matemática.

Aos professores cabe a tarefa de encorajar e incentivar seus alunos a participarem destas competições, mostrando que para se destacar, não precisa de habilidades sobre-humanas, basta apenas uma singela quantidade de afinidade, muita força de vontade e algumas instruções do caminho a ser seguido. Desta feita, o ensino de matemática, conta com uma aliada importantíssima para seu aperfeiçoamento.

Espera-se que a presente pesquisa venha contribuir com professores dos diversos níveis de ensino. Que estes possam colocar em prática o assunto discutido, ampliando as sugestões para os mais variados temas olímpicos matemáticos.

Referências

Aops. (2018) *Art of Problem Solving*. Disponível em: https://artofproblemsolving.com/community/c13_contests. Acesso em 27 nov. 2018.

Allevato, N. S. D.(2014).*Trabalhar Através da Resolução de Problemas: Possibilidades em dois Diferentes Contextos*. Vidya Revista Eletrônica. v. 34, n. 1. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/26/214. Acesso em 12 mar. 2019.

Andreescu, T. e Feng, Z. (2001). *101 Problems in Algebra From The Training of The USA IMO Team*. 1. ed. AMT Publishing.

Bartle, R.G. (1976).*The Elements of Real Analysis*. ed. 2. Wiley International Edition.

Batista, L. S.(2012). *O GeoGebra como ferramenta de auxílio pedagógico no estudo das funções quadráticas*. O Professor PDE e os Desafios da Escola Pública Paranaense. Volume 1.

Bin, X. e Yee, L. P. (2007). *Mathematical Olympiad in China: Problems and Solutions*. Disponível em: https://www.pdfdrive.com/mathematical-olympiad-in-china-problems-and-solutions-e15261864.html. Acesso em 13 set. 2018.

Boyer, C. B. (1986). *História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide*. 6. ed. Edgard Blucher.

Brasil. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. MEC/SEMTEC.

Brasil. (2007). *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio*. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC/SEMTEC.

Brasil. (2010). *Avaliação do Impacto da Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas: OBMEP 2010.* 2. ed. Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos.

Carneiro, E., Campos, O. e Paiva, M. (2014). *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio.* 1. ed. SBM.

CMF. (2006) *Canguru Matemático sem Fronteiras.* Disponível em: `http://www.mat.uc.pt/canguru/2006/Estudante2006.pdf`. Acesso em 25 jan. 2019.

CMF. (2015) *Canguru Matemático sem Fronteiras.* Disponível em: `http://www.mat.uc.pt/canguru/Arqprovas/2015/provaEstudante15.pdf`. Acesso em 25 jan. 2019.

Dante, L. R. (2006). *Matemática Contexto e Aplicações, Ensino Médio 1.* 3. ed. Ática.

Eves, H. (2004) *Introdução à História da Matemática. Tradução: Higyno H. Domingues.* 1. ed. Unicamp.

Lara, M. T. V. de e Lopes, M. R. C. M. (2013). *Olimpíadas de Matemática: Uma Estratégia de Ensino.* Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE. Volume 1.

Lima, E. L. (2007). *Matemática e Ensino.* 3. ed.SBM.

Lima, E. L. (2017). *Números e Funções Reais.* Coleção PROFMAT. 1. ed. SBM.

Nascimento, M. G. do, Pallano, D. e Oeiras, J. (2007). *Competições Escolares: Uma Alternativa na Busca em Educação.* SBIE. p. 284-287.

OBMEP. (2010).*Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública.* Banco de Questões.Disponível em: `http://www.obmep.org.br/bq/bq2010.pdf`. Acesso em 23 jan. 2019.

OCM. (2012). *Olimpíada Campinense de Matemática Professor Jose Vieira Alves.* Disponível em: `http://www.ufcg.edu.br/~ocm/index.php/provas-e-gabaritos`. Acesso em 10 jan. 2019.

OLM. (2006). *Olimpíada Lavrense de Matemática.* Disponível em: `http://www.dex.ufla.br/olm/2016%20OLM%20Nivel%20III.pdf`. Acesso em 28 jan. 2019.

OMM. (2015). *Olimpíada de Matemática de Maringá e Região.* Disponível em: `https://drive.google.com/file/d/0B6CfGc-uxmescDJVaFo0Z2lOMVk/view`. Acesso em 28 jan. 2019.

OMIF. (2018). *Olimpíada de Matemática dos Institutos Federais.* Disponível em: http://omif.muz.ifsuldeminas.edu.br/attachments/article/7/primeira_fase_2018.pdf. Acesso em 25 jan. 2019.

OPM. (2018). *Olimpíada Pessoense de Matemática.* Disponível em: http://www.mat.ufpb.br/opm/index.php/provas-e-gabaritos. Acesso em 27 nov. 2018.

Prieto, L. M. (2005). *Uso das Tecnologias Digitais em Atividades Didáticas nas Séries Iniciais.* Revista Renote. v.3, n. 1. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/13934/7837. Acesso em 12 mar. 2019.

Santos, J. M. de A. e Henrique, M. L. (2015). *A Olimpíada Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas OBMEP: Experiências e Perspectivas dos Alunos do Ensino Médio.* II CONEDU. Editora Realize.

SMOST. (1988). *Singapore Mathematical Olympiad Selection Test.* Disponível em: https://sms.math.nus.edu.sg/smsmedley/Vol-17-1/Singapore%20Mathematical%20Olympiad%20Selection%20Test%201988.pdf. Acesso em 11 jan. 2019.

UFSM. (2016). - *Universidade Federal de Santa Maria.* Pet matemática. Disponível em: http://w3.ufsm.br/petmatematica/index.php/orm. Acesso em 13 set. 2018.

Viana, M. (2017). *OBMEP: Mirando o Futuro.* OBMEP 12 anos. v. 1, n. 1, Rio de Janeiro.

Villanueva, J. T.(2018). *Olimpíadas de Matemática no Peru.* Disponível em: https://onemperu.files.wordpress.com/2014/07/peruvian-olympiad-wfnmc7.pdf. Acesso em: 24 nov. de 2018.