



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Campus Universitário do Araguaia



**Espirógrafo, hipotrocoides e epitrocoides:
atividades exploratórias de curvas planas para o ensino
médio utilizando o GeoGebra**

Fabício Gonçalves de Jesus

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa**

Barra do Garças - MT
Julho de 2019

**Espirógrafo, hipotrocoides e epitrocoides:
atividades exploratórias de curvas planas para o ensino
médio utilizando o GeoGebra**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Fabrício Gonçalves de Jesus e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 31 de julho de 2019.

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa

Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins

Prof. Dr. Romildo da Silva Pina

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

G635e Gonçalves de Jesus, Fabrício.
Espirógrafo, hipotrocoides e epitrocoides : atividades exploratórias de curvas planas para o ensino médio utilizando o GeoGebra / Fabrício Gonçalves de Jesus. -- 2019
xiii, 116 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Márcio Lemes de Sousa.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Hipotrocoides. 2. Epitrocoides. 3. Espirógrafo. 4. GeoGebra. 5. Ensino. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - 78.060900 - Cuiabá/MT
Tel: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Espirógrafo, hipotrocoides e epitrocoides: atividades exploratórias de curvas planas para o ensino médio utilizando o GeoGebra"

Autor: Fabrício Gonçalves de Jesus

defendida e aprovada em 12/07/2019.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Marcio Lemes de Sousa

Márcio Lemes de Sousa

Examinador Interno Doutor
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Tibério Bittencourt

Tibério Bittencourt de Oliveira Martins

Examinador Externo Doutor
Instituição: Universidade Federal de Goiás

Romildo da Silva Pina

Romildo da Silva Pina

Barra do Garças, 12/07/2019.

Dedico este trabalho à minha esposa Suzana Barros de Oliveira e ao meu filho Carlos Eduardo Gonçalves de Oliveira.

Agradecimentos

Aos meus pais, Elzita e Francisco, pelas oportunidades que me deram;

À minha esposa Suzana Barros de Oliveira pela compreensão e sacrifício para que eu pudesse concluir essa empreitada;

À todos os professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFMT/CUA que muito contribuíram para mais essa jornada de conhecimento;

À todos os discentes da turma 2017 do PROFMAT da UFMT/CUA, pelo apoio, pela amizade e pelo companheirismo;

Agradecimento especial aos membros do “Quarteto Fantástico” (Antonio Eduardo da Silveira Pacheco, Evaldir Barbosa de Oliveira Júnior, Lindomar Campos Rodrigues e eu) pelos momentos de descontração e de grande parceria;

À todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu pudesse concluir essa importante etapa da minha vida.

Diante da vastidão do tempo e da
imensidão do universo, é um imenso
prazer para mim dividir um planeta e
uma época com você.

Carl Sagan

Resumo

O presente trabalho representa um estudo inicial de um conjunto de curvas planas chamadas de hipotrocoides e epitrocoides. O estudo é desenvolvido partindo das equações paramétricas que as descrevem para, em seguida, explorar as suas principais propriedades matemáticas por meio de diversos exemplos e gráficos. Algumas hipotrocoides e epitrocoides são geradas por um brinquedo chamado espirógrafo, popularmente conhecido no Brasil como Régua-Mágica. Logo, o espirógrafo, pode ser utilizado como um recurso educacional para auxiliar os professores da educação básica na contextualização de conceitos matemáticos que são trabalhados no ensino médio, tais como: funções trigonométricas, geometria analítica, isometrias, padrões geométricos e reconhecimento de curvas. Pensando nisso, o trabalho fornece atividades que podem ser trabalhadas no ensino médio, para explorar esses conceitos matemáticos e para explicar e modelar o funcionamento do espirógrafo por meio de construções e animações criadas no software de geometria dinâmica GeoGebra.

Palavras-chave: Hipotrocoides; Epitrocoides; Espirógrafo; GeoGebra; Ensino.

Abstract

The present work represents an initial study of a set of flat curves called hypotrochoids and epitrochoids. The study is developed from the parametric equations that describe them and then explore their main mathematical properties through various examples and graphs. Some hypotrochoids and epitrochoids are generated by a toy called a spirograph, popularly known in Brazil as *Magic Ruler*. Therefore, the spirograph can be used as an educational resource to assist teachers of basic education in the contextualization of mathematical concepts that are worked in high school, such as: trigonometric functions, analytical geometry, isometries, geometric patterns and curve recognition. Thinking about it, the work provides activities that can be worked out in high school to explore these mathematical concepts and to explain and model the operation of the spirograph through constructs and animations created in GeoGebra dynamic geometry software.

Keywords: Hypotrochoids; Epitrochoids; Spirograph; GeoGebra; Teaching.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de figuras	xiii
Introdução	1
1 O espirógrafo	3
1.1 O que é e como funciona?	3
1.2 Breve histórico do espirógrafo	5
1.3 O espirógrafo como recurso educacional	6
2 Noções fundamentais	8
2.1 Sistemas de coordenadas em \mathbb{R}^2	8
2.1.1 Sistema de eixos ortogonais	8
2.1.2 Sistema de coordenadas polares	11
2.1.3 Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas	13
2.2 Curvas planas	16
2.2.1 Curvas algébricas	16
2.2.2 Curvas parametrizadas	18
2.2.3 Parametrização da cicloide	23
2.2.4 Curvas polares	26
3 Hipotrocoides e epitrocoides	30
3.1 Definição e parametrização	30
3.2 O período fundamental	37
3.3 Gráficos de hipotrocoides e epitrocoides	42
3.3.1 Circunferência	49
3.3.2 Elipse	51

3.3.3	Hipocicloides e epicicloides	53
3.3.4	Deltoide	59
3.3.5	Astroide	64
3.3.6	Cardioide	67
3.3.7	Nefroide	69
3.3.8	Hipocicloides encurtadas e alongadas	72
3.3.9	Epicicloides encurtadas e alongadas	73
3.3.10	<i>Limaçons</i>	74
3.3.11	Rosáceas	76
3.4	Os teoremas da dupla geração	83
4	Aplicações para o ensino médio	91
4.1	Atividade 1: modelando o espirógrafo	92
4.2	Atividade 2: conhecendo algumas curvas clássicas	94
4.3	Atividade 3: Construção de figuras para colorir	99
4.4	Comentários gerais sobre as atividades 1, 2 e 3	102
	Considerações finais	104
	Referências bibliográficas	106
	Apêndice	108
	Apêndice A - Plotando gráficos de hipotrocoides e epitrocoides utilizando o L^AT_EX	108
	Anexo	113
	Anexo A - Identidades e transformações trigonométricas	113

Lista de Figuras

1.1	O espirógrafo.	3
1.2	Funcionamento do espirógrafo.	4
1.3	A régua-mágica.	4
1.4	Funcionamento da régua-mágica.	5
2.1	Coordenadas x e y do ponto P	9
2.2	Pontos no plano π	10
2.3	Quadrantes do sistema OXY	10
2.4	O eixo polar.	11
2.5	Coordenadas polares para ρ negativo.	11
2.6	Marcação de pontos em coordenadas polares.	12
2.7	Diferentes representações do ponto $(1, 5\pi/4)$	13
2.8	Representação de P no sistema polar e no sistema OXY	13
2.9	Conversão do ponto $(2, \pi/3)$ para coordenadas cartesianas.	14
2.10	Conversão do ponto $(1, -1)$ para coordenadas polares.	15
2.11	Curvas traçadas sem tirar o lápis do papel	16
2.12	Exemplos de curvas algébricas planas	17
2.13	Parametrização de uma curva	18
2.14	Esboço da curva paramétrica definida pelas equações $x(t) = t^2 - 2t$ e $y(t) = t + 1$ com $t \in \mathbb{R}$	19
2.15	Uma parametrização da circunferência unitária.	20
2.16	Outra parametrização da circunferência unitária.	21
2.17	O gráfico da função $y = x^2$ tratado como uma curva parametrizada.	23
2.18	A cicloide.	24
2.19	Posição inicial da circunferência λ	24
2.20	Parametrização da cicloide.	25
2.21	Construção da cicloide	26
2.22	Gráfico da curva polar $\rho = 2$	27
2.23	A espiral de Arquimedes para $0 \leq \theta \leq 4\pi$	28
3.1	Posição inicial de λ_1 e λ_2	30

3.2	P descrevendo uma hipotrocoide.	31
3.3	Determinando as coordenadas de P.	31
3.4	Posição inicial de λ_1 e λ_2	34
3.5	P descrevendo uma epitrocoide.	34
3.6	Determinando as coordenadas de P.	35
3.7	Hipotrocoides diversas	43
3.8	Epitrocoides diversas	44
3.9	Epitrocoides de mesmo traço, porém de tamanhos diferentes	46
3.10	Curvas diversas sobrepostas	48
3.11	A circunferência	49
3.12	Traçado da hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 3, 1, 0]$	50
3.13	Traçado da epitrocoide $\mathcal{E}[t; 2, 1, 0]$	51
3.14	A elipse	52
3.15	Traçado da hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 4, 2, 1]$	53
3.16	Cúspides da hipocicloide $\mathcal{H}[t; 6, 5]$	57
3.17	Traçado da hipocicloide $\mathcal{H}[t; 4, 2]$	58
3.18	A deltoide	59
3.19	Traçado da hipocicloide $\mathcal{H}[t; 3, 1]$	63
3.20	A astroide	64
3.21	Traçado da hipocicloide $\mathcal{H}[t; 4, 1]$	66
3.22	A cardioide	67
3.23	Traçado da epicicloide $\mathcal{E}[t; 1, 1]$	68
3.24	A nefroide	69
3.25	Traçado da epicicloide $\mathcal{E}[t; 2, 1]$	71
3.26	A hipocicloide $\mathcal{H}[t; 5, 1]$ em sua forma ordinária, encurtada e alongada.	72
3.27	A Epicicloide $\mathcal{E}[t; 6, 1]$ em sua forma ordinária, encurtada e alongada.	73
3.28	As <i>limaçons</i>	74
3.29	Traçado da epitrocoide $\mathcal{E}[t; 1, 1, 3]$	76
3.30	A rosácea $\rho = 2 \cos(2\theta)$	76
3.31	A rosácea $\rho = 2 \cos(3\theta)$	77
3.32	A rosácea $\rho = 2 \cos\left(\frac{4}{5}\theta\right)$	77
3.33	Traçado da hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 6, 7/2, 5/2]$	79
3.34	A hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.37) com $R = 16$ e $r = 9$ é uma rosácea de 16 pétalas	80
3.35	A hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.37) com $R = 7$ e $r = 4$ é uma rosácea de 7 pétalas	81

3.36	A hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.37) com $R = 18$ e $r = 17$ é uma rosácea com todas as suas interseções contidas em círculos concêntricos	82
3.37	O primeiro teorema da dupla geração	84
3.38	O segundo teorema da dupla geração	86
3.39	O terceiro teorema da dupla geração	88
3.40	Outra conexão entre hipotrocoides e epitrocoides	90
4.1	Resultado após a aplicação dos 14 passos.	93
4.2	Resultado após aplicar o 2 ^o passo da atividade 2.	95
4.3	Resultado após aplicar o 3 ^o passo da atividade 2.	95
4.4	Resultado após aplicar o 4 ^o passo da atividade 2.	96
4.5	Resultado após aplicar o 5 ^o passo da atividade 2.	96
4.6	Resultado após aplicar o 6 ^o passo da atividade 2.	97
4.7	Resultado após aplicar o 8 ^o passo da atividade 2.	97
4.8	Resultado após aplicar o 9 ^o passo da atividade 2.	98
4.9	Resultado após aplicar o 10 ^o passo da atividade 2.	98
4.10	Resultado após aplicar o 6 ^o passo da atividade 3.	100
4.11	Resultado após aplicar o 12 ^o passo da atividade 3.	101
4.12	Resultado após aplicar o 16 ^o passo da atividade 3.	101
4.13	Figuras criadas utilizando os passos da atividade 3.	102
4.14	<i>Screenshot</i> do episódio 04 da 5 ^a temporada do programa “Isto é Matemática”.103	

Introdução

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), uma das competências gerais da educação básica para os próximos anos é

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

(Brasil, 2018, p.9)

Isto significa que os professores precisam recorrer a diversas estratégias e metodologias de ensino capazes de conectar os conteúdos que são ministrados em sala de aula com a realidade e com o cotidiano do aluno.

Diante deste contexto, o presente trabalho fornece aos professores de matemática da educação básica uma possibilidade de se utilizar um brinquedo para contextualizar certos conteúdos da disciplina de matemática que são ministrados no ensino médio.

O brinquedo em questão se chama espirógrafo, mas no Brasil ele é popularmente conhecido como Régua-Mágica. Com o espirógrafo é possível produzir diversos desenhos e padrões geométricos. Alguns desses desenhos representam um conjunto de curvas planas chamadas de hipotrocoides e epitrocoides.

O capítulo 1 deste trabalho expõe sobre o funcionamento do espirógrafo, seu contexto histórico e traz argumentos que justificam a utilização do espirógrafo como recurso educacional capaz de contextualizar conteúdos da matemática que são tratados no ensino médio.

O capítulo 2 aborda as noções fundamentais que são necessárias no estudo das hipotrocoides e epitrocoides. Especificamente este capítulo trata sobre sistemas de coordenadas e curvas planas.

O capítulo 3 traz um estudo inicial sobre as hipotrocoides e epitrocoides. De início faz-se a parametrização dessas curvas para, em seguida, explorar por meio de diversos exemplos e gráficos as propriedades matemáticas que estão presentes nelas.

A abordagem utilizada para tratar sobre as hipotrocoides e epitrocoides é um tanto diferente do que há na maioria dos textos e livros de cálculo diferencial e integral e geome-

tria das curvas planas que, geralmente, usam as ferramentas do cálculo para determinar reta tangente, calcular comprimento de arco e área sobre a curva. A abordagem que foi utilizada no capítulo 3 trata formalmente sobre periodicidade, classificação e reconhecimento de curvas e cúspides.

Ao final do capítulo 3 aborda-se os *teoremas da dupla geração* com suas demonstrações e a relação que estes teoremas desempenham para otimizar o tempo computacional na geração de gráficos.

O capítulo 4 sugere algumas ideias e atividades capazes de explicar e modelar o funcionamento do espirógrafo utilizando o software GeoGebra. Ao todo são três atividades que exploram, de forma prática e lúdica, conceitos matemáticos que são trabalhados no ensino médio e conceitos introdutórios da geometria das curvas planas.

Em seguida vêm as considerações finais deste trabalho, fazendo um fechamento de tudo o que foi exposto e apresentando algumas reflexões para estudos futuros.

Como um dos grandes enfoques do capítulo 3 é a classificação e reconhecimento de curvas, o trabalho apresenta um apêndice onde o leitor curioso poderá utilizar para aprender a gerar gráficos de hipotrocoides e epitrocoides utilizando o sistema de editoração de textos técnicos e científicos L^AT_EX. Com isso o leitor poderá reproduzir, verificar e estudar os teoremas e as propriedades das hipotrocoides e epitrocoides presentes neste trabalho sem precisar sair do L^AT_EX.

Ao final desta dissertação há um anexo com identidades e transformações trigonométricas, pois no decorrer de todo o trabalho há um uso bastante intenso delas, tanto para desenvolver os conceitos estudados quanto para provar ou desenvolver outras fórmulas trigonométricas. Então o leitor poderá consultar este anexo sempre que julgar necessário.

Capítulo 1

O espirógrafo

Neste capítulo falaremos sobre o espirógrafo com foco em seu funcionamento, no seu contexto histórico e nas possibilidades de conexões que o mesmo oferece para o ensino da matemática na educação básica. Para escrever este capítulo utilizamos como referência Braggs (s.d.), Brasil (2006), Brasil (2000), Coopee (2015), History (s.d.), Madison (2017) e Kahootz (2014).

1.1 O que é e como funciona?

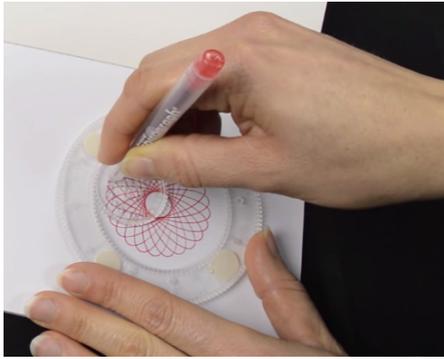
O espirógrafo é um brinquedo, geralmente de plástico, que contém um ou mais anéis dentados aonde são colocadas engrenagens de vários tamanhos e que contém alguns furos, veja a Figura 1.1.



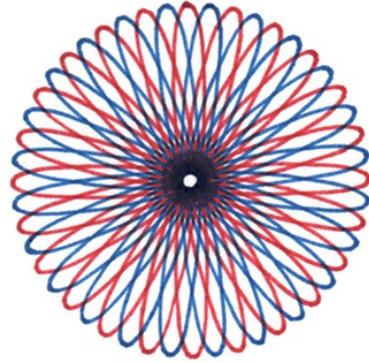
Figura 1.1: O espirógrafo.

Fonte: Kahootz (2014)

Esse conjunto de peças são postas sobre uma folha de papel (Figura 1.2a) e com o auxílio de um lápis ou uma caneta colocamos a sua ponta em algum furo da engrenagem fazendo-a girar internamente ou externamente ao anel dentado produzindo diversos desenhos (Figura 1.2b) que matematicamente representam as curvas planas conhecidas como *hipotrocoides* e *epitrocoides*.



(a) Peças do espirógrafo.



(b) Desenho gerado pelo espirógrafo.

Figura 1.2: Funcionamento do espirógrafo.

Fonte: Kahootz (2014)

O modelo de espirógrafo da Figura 1.1 é muito difícil de ser encontrado em lojas de brinquedos brasileiras, para a sua aquisição geralmente se recorre a lojas de comércio eletrônico pela Internet.

O modelo popular de espirógrafo no Brasil é conhecido como **Régua-Mágica** que, de fato, é uma régua retangular de dimensões $20,5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$, composta por formas geométricas e dois discos dentados aonde são colocadas uma das três engrenagens de tamanhos diferentes e contendo alguns furos, veja a Figura 1.3.



Figura 1.3: A régua-mágica.

O funcionamento da Régua-Mágica é idêntico ao do espirógrafo da Figura 1.1, no entanto não é possível com a Régua-Mágica gerar desenhos fazendo a engrenagem girar externamente ao disco dentado, apenas internamente assim como mostra a Figura 1.4.



Figura 1.4: Funcionamento da régua-mágica.

O espirógrafo é um brinquedo bastante simples que encanta e fascina crianças e adultos, pois explora nosso desejo infantil de desenhar e rabiscar, e por gerar de forma fácil e direta muitos desenhos dos mais diversos formatos. Utilizando a criatividade e a imaginação, cada um pode criar desenhos mais complexos utilizando-se de canetas de diversas cores e fazendo a sobreposição de outros desenhos.

1.2 Breve histórico do espirógrafo

O espirógrafo foi idealizado pelo matemático polonês Bruno Abdank-Abakanowicz (1852-1900) entre os anos de 1881 e 1900, no entanto o responsável por sua invenção e desenvolvimento se deve ao engenheiro britânico Denys Fischer (1918-2002) no início dos anos de 1960.

No início Denys Fischer havia concebido o espirógrafo como uma ferramenta de desenho, mas logo percebeu que o venderia mais se fosse comercializado como um brinquedo e, desde o seu lançamento em 1965 na Feira Internacional de Brinquedos de Nuremberg, foi um enorme sucesso.

No ano seguinte, em 1966, a empresa *Kenner Products* comprou os direitos de licenciamento do espirógrafo passando a comercializá-lo nos Estados Unidos.

Em 1967, a Associação Britânica de Varejistas de Brinquedos elegeu o espirógrafo como o Brinquedo do Ano.

Segundo Braggs (s.d.) a grande popularidade e sucesso do espirógrafo nos anos 60 e 70 se deve ao fato de que os seus padrões geométricos estavam em perfeita sintonia com

os movimentos artísticos daquela época, como o *Op Art* por exemplo, e influenciou até mesmo o mundo da moda.

Atualmente *SPIROGRAPH*[®] é uma marca registrada pela *Hasbro*, uma das maiores fabricantes de brinquedos e jogos do mundo, que adquiriu a *Kenner Products* na década de 90. Desde então a *Hasbro*, por intermédio de uma empresa parceira, a *Kahootz Toys*, vem comercializando o espirógrafo com uma variedade de modelos.

1.3 O espirógrafo como recurso educacional

Trabalhar o espirógrafo em sala de aula se justifica no atual cenário educacional, considerando que o ensino de matemática deve estar pautado, como é apontado por diversos pesquisadores, na formação integral do aluno. Isso significa que o educador precisa aplicar diversas metodologias de ensino e contextualizar os conteúdos que ministra para que haja uma aprendizagem significativa. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

(Brasil, 2000, p.43)

Sendo assim, o espirógrafo possibilita ao professor contextualizar e conectar conceitos matemáticos que são trabalhados em sala de aula, como por exemplo, funções trigonométricas, geometria analítica, isometrias e criação de curvas.

Além disso, os incríveis padrões geométricos criados pelo espirógrafo permite criar experiências, por meio de oficinas e feiras de ciências, para relacionar a matemática com a arte.

O espirógrafo também oferece a possibilidade de se trabalhar a matemática por meio de recursos computacionais e tecnológicos. Utilizar o computador no processo de ensino e aprendizagem é de extrema importância, pois segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

Já se pensando na Tecnologia para a Matemática, há programas de computador (*softwares*) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos [...].

Para o aprendizado da geometria, há programas que dispõem de régua e compasso virtuais e com menu de construção em linguagem clássica da geometria – reta perpendicular, ponto médio, mediatriz, bissetriz, etc. Feita uma

construção, pode-se aplicar movimento a seus elementos, sendo preservadas as relações geométricas impostas à figura – daí serem denominados programas de geometria dinâmica. [...]

Esses também enriquecem as imagens mentais associadas às propriedades geométricas. [...]

É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática.

(Brasil, 2006, p.88-89)

Portanto, o professor pode criar atividades sobre o espirógrafo agregando o uso do computador que permitirão sensibilizar o estudante para que o mesmo perceba que a matemática está presente em vários aspectos do nosso cotidiano, isto é, o estudante pode compreender que as curvas geradas pelo espirógrafo podem ser descritas através de expressões matemáticas e podem ser modeladas por meio de recursos computacionais.

Pensando nisso, o capítulo 4 deste trabalho oferece três atividades que o professor de matemática pode utilizar para que o estudante do ensino médio elabore construções e animações, por meio do software de geometria dinâmica GeoGebra, capazes de explicar e modelar o funcionamento do espirógrafo.

O GeoGebra representa uma excelente opção de software educacional gratuito para o ensino e aprendizagem da álgebra e geometria. Atualmente, o GeoGebra está bastante difundido entre os professores de matemática, por isso, não escrevemos um tutorial sobre os seus recursos, no entanto, as atividades propostas do capítulo 4, foram escritas de maneira que qualquer um, com conhecimentos mínimos em informática, poderá desenvolver.

Para finalizar, argumentamos que o trabalho com o espirógrafo em sala de aula está em perfeita concordância com o ensino por meio de atividades lúdicas, que representa outra metodologia defendida pela teorias educacionais modernas.

Capítulo 2

Noções fundamentais

Neste capítulo apresentamos e discutimos os principais conceitos que são necessários para estudar as hipotrocoides e epitrocoides. Tais conceitos se referem aos sistemas de coordenadas e curvas planas. As definições, os conceitos e as propriedades foram baseadas em Alencar e Santos (2002), Delgado et al. (2017), Stewart (2013) e Vainsencher (2009).

2.1 Sistemas de coordenadas em \mathbb{R}^2

Um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^2 é uma ferramenta matemática utilizada para localizar, descrever e representar objetos no espaço bidimensional, isto é, no plano.

Neste trabalho usaremos basicamente dois sistemas de coordenadas, o *sistema de eixos ortogonais* e o *sistema de coordenadas polares*.

No sistema de eixos ortogonais, também conhecido como sistema de coordenadas cartesianas, cada ponto do plano é representado por duas distâncias determinadas pela projeção ortogonal do ponto considerado sobre dois eixos ortogonais.

Já no sistema de coordenadas polares cada ponto do plano é representado por uma distância e um ângulo em relação a um ponto fixo de referência.

Nas subseções a seguir revisamos cada um desses sistemas.

2.1.1 Sistema de eixos ortogonais

Segundo (Delgado et al., 2017, p.5), o sistema de eixos ortogonais num plano π é um par de eixos, eixo OX e eixo OY, com unidade de medida de igual comprimento, que intersectam-se perpendicularmente na origem comum O. Por convenção, o eixo OX é denominado **eixo horizontal** ou **eixo das abscissas** e o eixo OY, **eixo vertical** ou **eixo das ordenadas**. Assim como proposto por (Delgado et al., 2017, p.5), em todo o texto faremos referência a essa configuração como **sistema de eixos ortogonais OXY** ou, brevemente, **sistema OXY**.

A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

De fato, ao ponto $P \in \pi$ fazemos corresponder o par ordenado (x, y) , onde x é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OX e y é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OY que passam por P , veja a Figura 2.1.

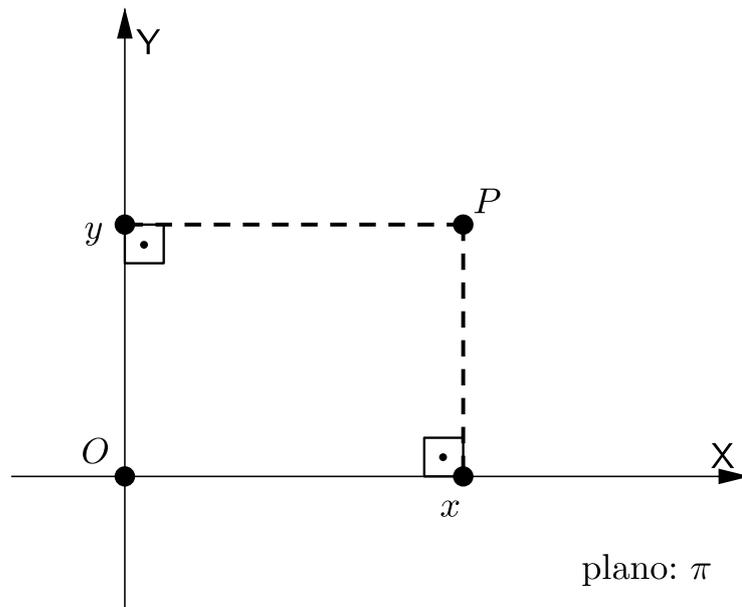


Figura 2.1: Coordenadas x e y do ponto P .

Reciprocamente, ao par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associamos o ponto P do plano π dado pela interseção da perpendicular ao eixo OX que passa pelo ponto desse eixo de coordenada x com a perpendicular ao eixo OY que passa pelo ponto desse eixo de coordenada y .

Sabendo que $(x, y) = (x', y')$ em \mathbb{R}^2 se e somente se $x = x'$ e $y = y'$, é simples verificar que a correspondência ponto do plano $\pi \longleftrightarrow$ par ordenado de \mathbb{R}^2 é uma bijeção, isto é, uma correspondência biunívoca.

Os números $x, y \in \mathbb{R}$ do par ordenado (x, y) associado ao ponto P são as **coordenadas cartesianas** do ponto P : x é a **abscissa** ou **primeira coordenada** de P e y é a **ordenada** ou **segunda coordenada** de P .

Notação: Se $P \in \pi$ corresponde a $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escrevemos $P = (x, y)$.

A Figura 2.2 ilustra alguns pontos do plano π com suas coordenadas em relação ao sistema OXY . O complementar dos eixos no plano é a união de quatro regiões denominadas quadrantes e enumeradas como na Figura 2.3.

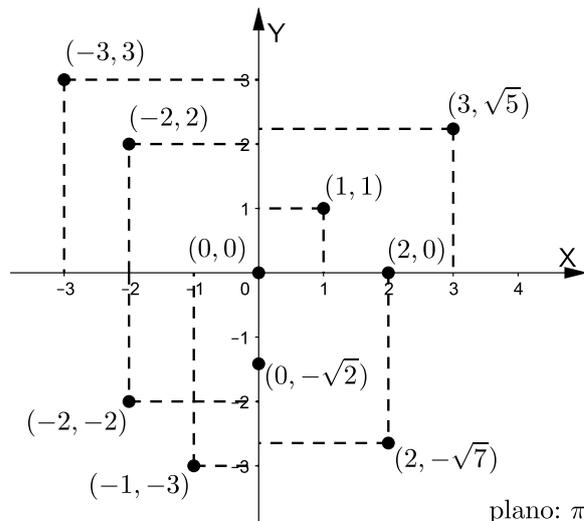


Figura 2.2: Pontos no plano π .

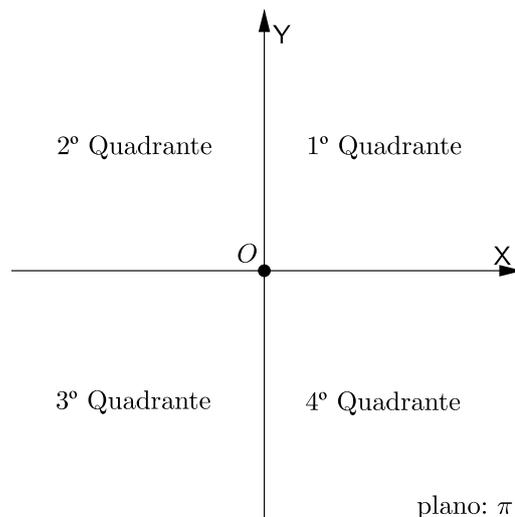


Figura 2.3: Quadrantes do sistema OXY.

Observe que os pontos do eixo OX têm coordenadas $(x, 0)$, os pontos do eixo OY têm coordenadas $(0, y)$ e os quadrantes, dados em coordenadas, são:

- 1º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$;
- 2º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ e } y > 0\}$;
- 3º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ e } y < 0\}$;
- 4º Quadrante = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y < 0\}$.

Exemplo 2.1: Mostre que o conjunto $\mathcal{A} = \{P = (x, y) \mid x^3 + y^3 = 1\}$ não intersecta o terceiro quadrante do plano.

Solução: Suponhamos por absurdo que o conjunto \mathcal{A} intersecta o terceiro quadrante do plano, então $P = (x, y)$ pertence ao 3º Quadrante, isto significa que

$$x < 0 \quad \text{e} \quad y < 0.$$

Elevando ambas desigualdades ao cubo, obtemos $x^3 < 0$ e $y^3 < 0$. Somando as desigualdades membro a membro, tem-se

$$x^3 + y^3 < 0.$$

O que é um absurdo, pois por hipótese $x^3 + y^3 = 1$.

Portanto, o conjunto $\mathcal{A} = \{P = (x, y) \mid x^3 + y^3 = 1\}$ não intersecta o terceiro quadrante do plano.

2.1.2 Sistema de coordenadas polares

Segundo Stewart (2013) o sistema de coordenadas polares foi introduzido por Newton, sendo bastante utilizado convenientemente para muitos propósitos.

Escolhemos um ponto O no plano chamado **polo** ou origem. Traçamos uma semirreta \overrightarrow{OX} chamada **eixo polar**, que geralmente representa o semi-eixo positivo OX do sistema OXY .

Se P for qualquer outro ponto do plano, seja ρ a distância de O até P e seja θ o ângulo, em radianos, entre o eixo polar e a reta OP , conforme a Figura 2.4.

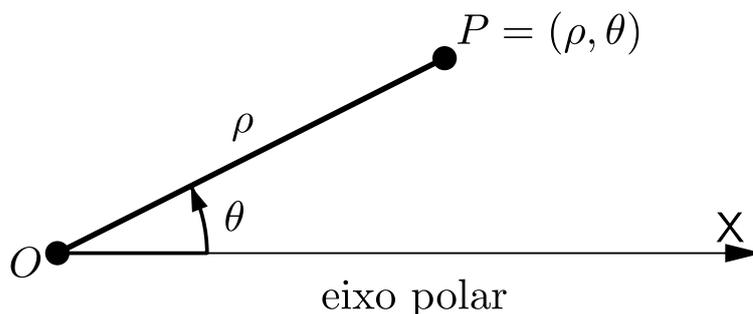


Figura 2.4: O eixo polar.

Assim, o ponto P é representado pelo par ordenado (ρ, θ) , onde ρ e θ são chamados **coordenadas polares** de P . Usamos a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário. Se $P = O$, então $\rho = 0$, e convencionamos que $(0, \theta)$ representa o polo para qualquer valor de θ .

Estendemos o significado de coordenadas polares (ρ, θ) para o caso no qual ρ é negativo convencionando que os pontos $(-\rho, \theta)$ e (ρ, θ) estão na mesma reta passando por O e estão à mesma distância $|\rho|$ a partir de O , mas em lados opostos de O , conforme a Figura 2.5.

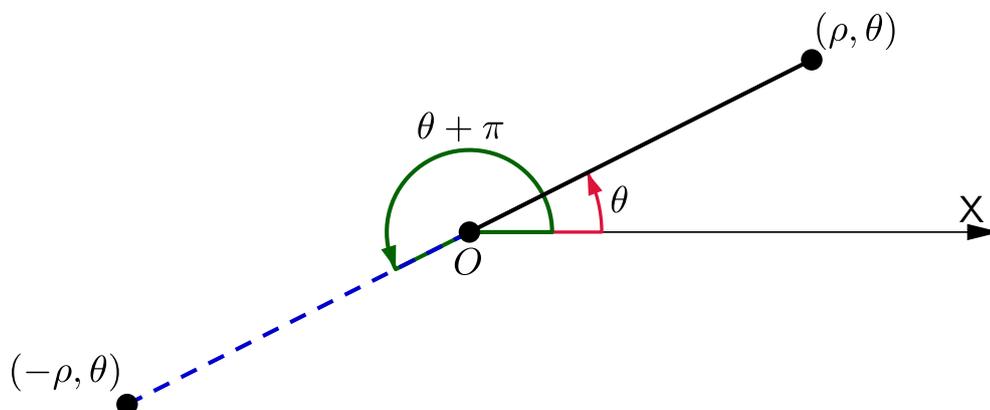


Figura 2.5: Coordenadas polares para ρ negativo.

Se $\rho > 0$, o ponto (ρ, θ) está no mesmo quadrante que θ ; se $\rho < 0$, ele está no quadrante do lado oposto ao polo. Observe que $(-\rho, \theta)$ representa o mesmo ponto que $(\rho, \theta + \pi)$.

Exemplo 2.2: Marque os pontos cujas coordenadas polares são dadas.

a) $\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$

c) $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$

b) $(2, 3\pi)$

d) $\left(-3, \frac{3\pi}{4}\right)$

Solução: Os pontos estão marcados na Figura 2.6. Na Figura 2.6d o ponto $\left(-3, \frac{3\pi}{4}\right)$ está localizado três unidades a partir do polo no quarto quadrante, porque o ângulo $\frac{3\pi}{4}$ está no segundo quadrante e $\rho = -3$ é negativo.

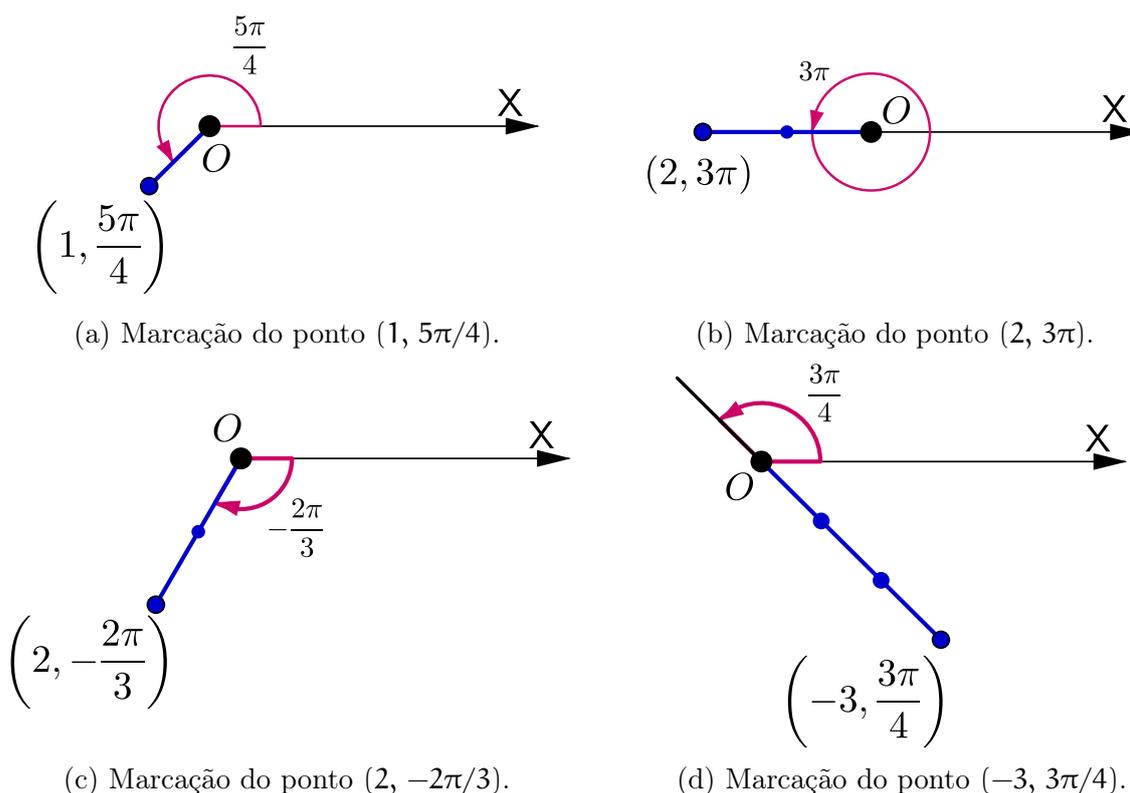


Figura 2.6: Marcação de pontos em coordenadas polares.

Como discutimos na subseção anterior, no sistema OXY cada ponto tem apenas uma representação, mas no sistema de coordenadas polares cada ponto tem muitas representações. Por exemplo, o ponto $\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ da Figura 2.6a poderia ser escrito como $\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right)$ ou $\left(1, \frac{13\pi}{4}\right)$ ou $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$, veja a Figura 2.7.

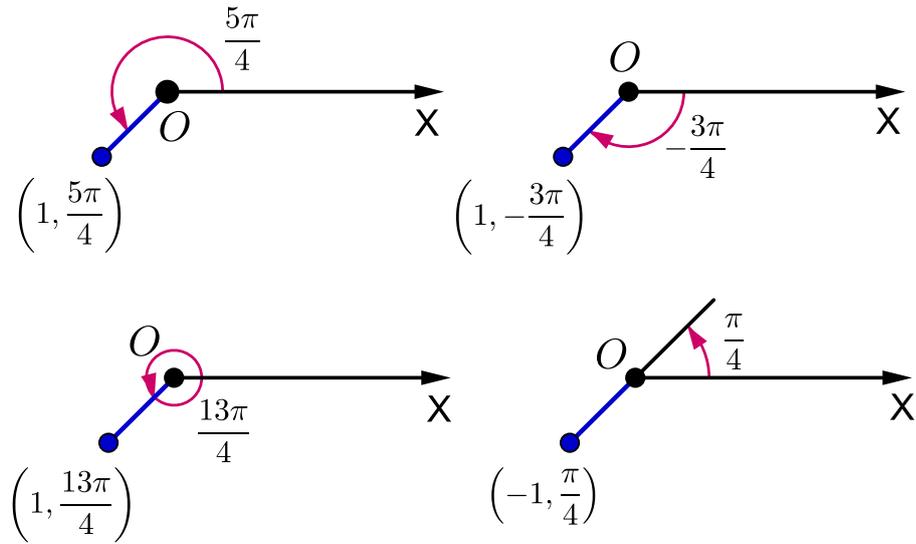


Figura 2.7: Diferentes representações do ponto $(1, 5\pi/4)$.

De fato, como uma rotação completa no sentido anti-horário é dada por um ângulo 2π , o ponto representado pelas coordenadas polares (ρ, θ) é também representado por

$$(\rho, \theta + 2n\pi) \quad \text{e} \quad (-\rho, \theta + (2n + 1)\pi)$$

onde n é qualquer inteiro.

2.1.3 Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas

A relação entre as coordenadas polares e cartesianas pode ser vista a partir da Figura 2.8, na qual o polo corresponde à origem e o eixo polar coincide com o eixo OX positivo.

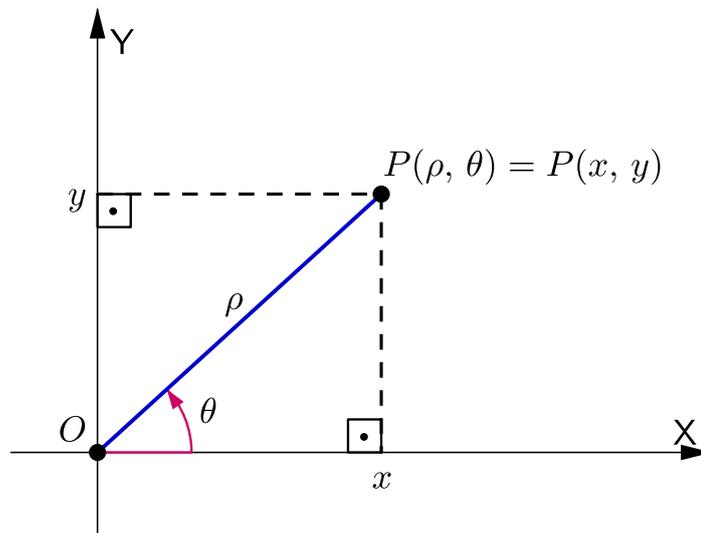


Figura 2.8: Representação de P no sistema polar e no sistema OXY .

Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (ρ, θ) , então

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} \quad \text{e} \quad \text{sen } \theta = \frac{y}{\rho}$$

se, e somente se,

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad y = \rho \text{sen } \theta. \quad (2.1)$$

Embora as equações acima tenham sido deduzidas a partir da Figura 2.8, que ilustra o caso aonde $\rho > 0$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, essas equações são válidas para todos os valores de ρ e θ .

As equações (2.1) nos permitem determinar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas. Para encontrarmos ρ e θ quando x e y são conhecidos, usamos as equações

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad \text{tg } \theta = \frac{y}{x}, \quad (2.2)$$

que podem ser deduzidas a partir das equações (2.1) ou simplesmente lidas a partir da Figura 2.8. Denominamos as equações (2.1) juntamente com as (2.2) de **Equações de Transformação**.

Exemplo 2.3: Converta o ponto $(2, \frac{\pi}{3})$ de coordenadas polares para cartesianas.

Solução: Como $\rho = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$, utilizando as equações de transformação (2.1), temos

$$x = \rho \cos \theta = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{e} \quad y = \rho \text{sen } \theta = 2 \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Portanto, o ponto é $(1, \sqrt{3})$ nas coordenadas cartesianas, veja a Figura 2.9.

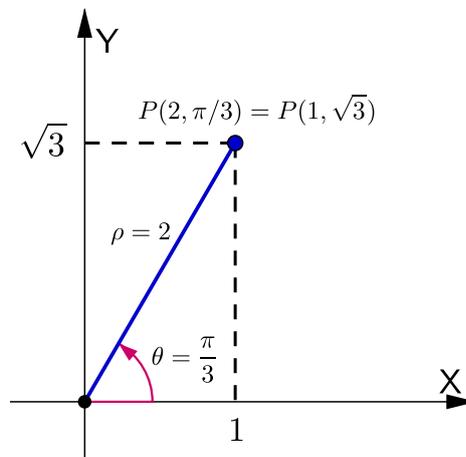


Figura 2.9: Conversão do ponto $(2, \pi/3)$ para coordenadas cartesianas.

Exemplo 2.4: Represente o ponto com coordenadas cartesianas $(1, -1)$ em termos de coordenadas polares.

Solução: Se escolhermos ρ positivo, então as equações de transformação (2.2) fornecem

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

e

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Como o ponto $(1, -1)$ está no quarto quadrante, podemos escolher $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$. Então uma resposta possível é $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$; e outra é $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$, veja a Figura 2.10.

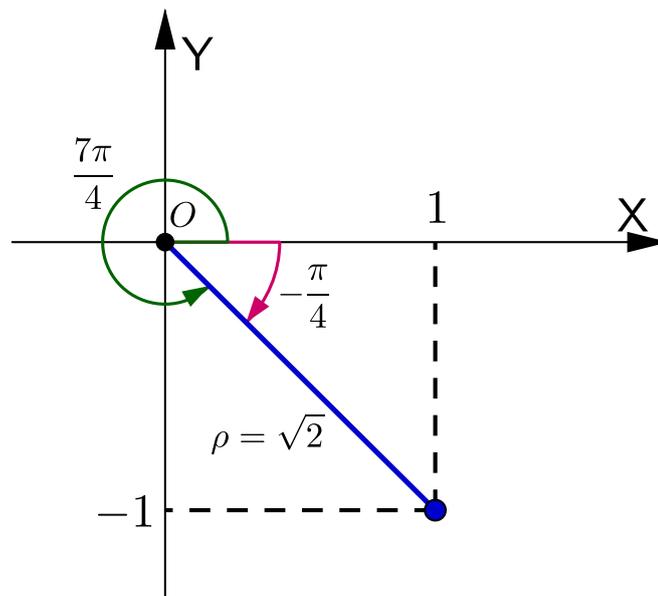


Figura 2.10: Conversão do ponto $(1, -1)$ para coordenadas polares.

Observação 2.1: As equações (2.2) não determinam univocamente θ quando x e y são dados, porque, à medida que θ aumenta no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, cada valor de $\operatorname{tg} \theta$ ocorre duas vezes. Portanto, para converter coordenadas cartesianas em coordenadas polares, não é apenas suficiente encontrar ρ e θ que satisfaçam as equações de transformação (2.2). Como no Exemplo 2.4, devemos escolher θ de modo que o ponto (ρ, θ) esteja no quadrante correto.

2.2 Curvas planas

O objetivo dessa seção é revisar os principais conceitos sobre as curvas planas que serão necessários para o estudo das curvas hipotrocoides e epitrocoides no próximo capítulo. Discutiremos sobre curvas algébricas, curvas parametrizadas e curvas em coordenadas polares.

2.2.1 Curvas algébricas

Inicialmente podemos pensar uma curva plana como sendo um subconjunto do plano \mathbb{R}^2 que tenha dimensão topológica igual 1, por exemplo, o gráfico de funções de uma variável real ou qualquer esboço “traçado” sem tirar o lápis do papel, como mostra a Figura 2.11.

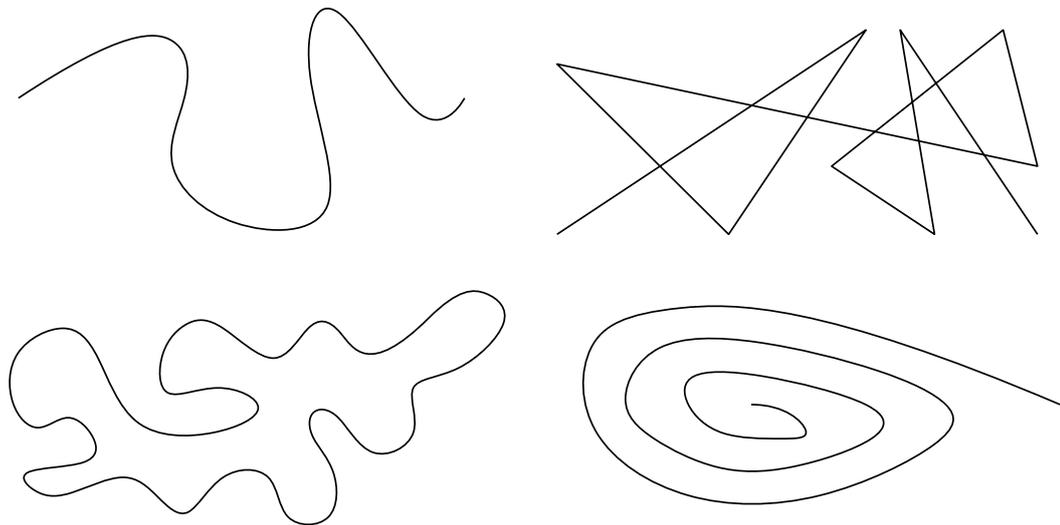


Figura 2.11: Curvas traçadas sem tirar o lápis do papel

Para tornar essas ideias um pouco mais precisas, podemos nos recorrer a geometria analítica, considerando uma curva em \mathbb{R}^2 de acordo com a definição a seguir segundo (Alencar e Santos, 2002, p.12-13).

Definição 2.1 (Curva algébrica plana): *Uma curva algébrica plana é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem uma equação do tipo*

$$F(x, y) = 0,$$

onde $F(x, y)$ é um polinômio em duas variáveis não constante.

A Figura 2.12 mostra alguns exemplos de curvas que satisfazem a Definição 2.1.

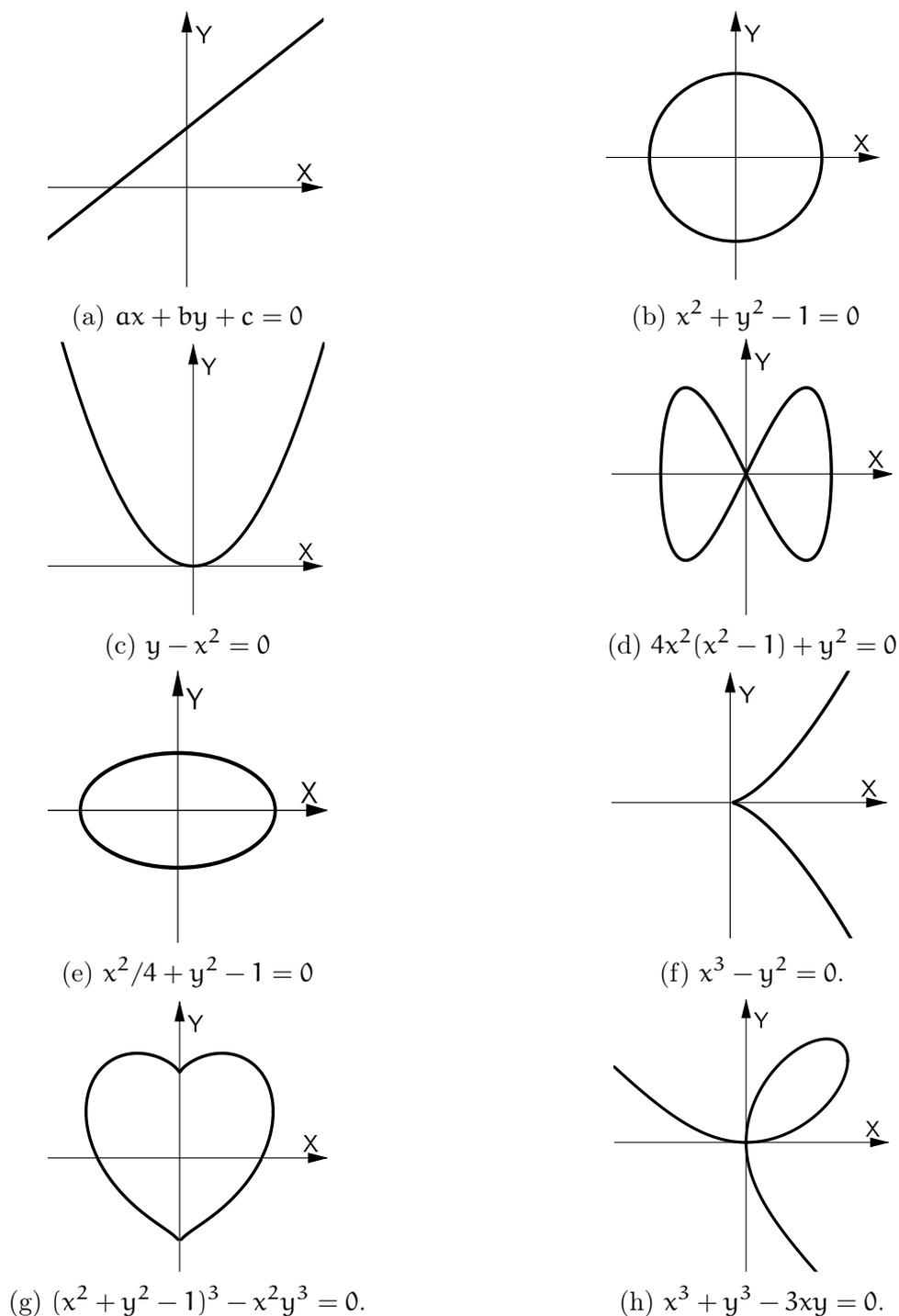


Figura 2.12: Exemplos de curvas algébricas planas

A Definição 2.1 não expressa totalmente a ideia do que gostaríamos de considerar como uma curva. Por exemplo, para a função definida por $F(x, y) = xy$, a equação $F(x, y) = 0$ descreve o conjunto formado pelos eixos OX e OY do sistema OXY , o que não está de acordo com a ideia apresentada no início, ou seja, de uma figura “traçada” sem tirarmos o lápis do papel, além disso há certos conjuntos que gostaríamos de considerar como curvas e que não podem ser descritos conforme a Definição 2.1

Para superar essa dificuldade, ao invés de considerarmos curvas definidas por equações algébricas, podemos recorrer à geometria diferencial e considerarmos uma curva plana como sendo a trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano. A formalização dessa ideia está na subseção a seguir.

2.2.2 Curvas parametrizadas

Definição 2.2 (Curva plana parametrizada): Consideremos um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e funções contínuas $x(t)$ e $y(t)$ definidas em I , onde denominamos a variável real t de **parâmetro**.

Dizemos que a aplicação

$$\alpha: \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$$

é uma **curva plana parametrizada**.

O conjunto

$$C = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

é a **curva** e representa o conjunto imagem da aplicação α e é chamado de **traço** de α .

As equações

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}; \text{ para todo } t \in I$$

são as **equações paramétricas** da curva C . Dizemos também que essas equações **parametrizam** a curva C .

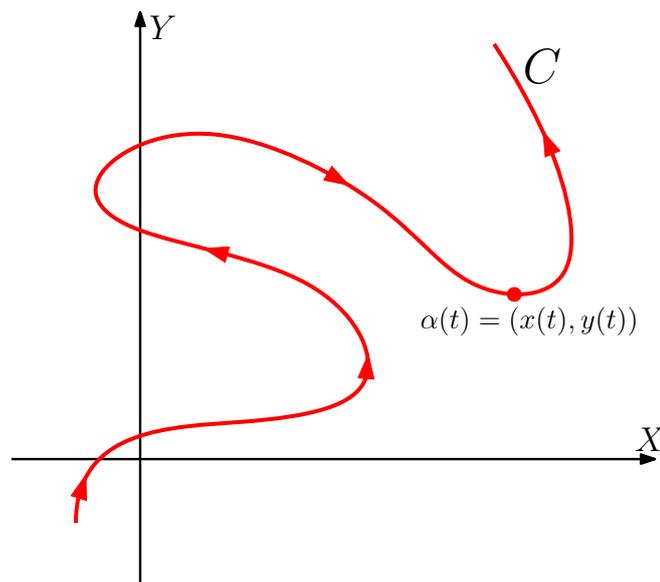


Figura 2.13: Parametrização de uma curva

De acordo com a Definição 2.2, cada valor de $t \in I$ determina um ponto $(x(t), y(t))$ no qual podemos marcar no sistema OXY . A medida que t varia, o ponto $(x(t), y(t))$ também varia e traça a curva C , assim como mostra a Figura 2.13.

Em muitas aplicações o parâmetro t representa o tempo, então podemos interpretar $(x(t), y(t))$ como a posição de uma partícula no instante t .

Exemplo 2.5: Esboce e identifique a curva definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = t + 1 \end{cases} ; \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Solução: Para fazermos o esboço da curva, atribuímos diversos valores para t , fornecendo um conjunto de pontos $(x(t), y(t))$ conforme a tabela abaixo. Em seguida marcamos esses pontos no sistema OXY e os unimos para produzir a curva em questão, veja a Figura 2.14.

t	$x(t)$	$y(t)$
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

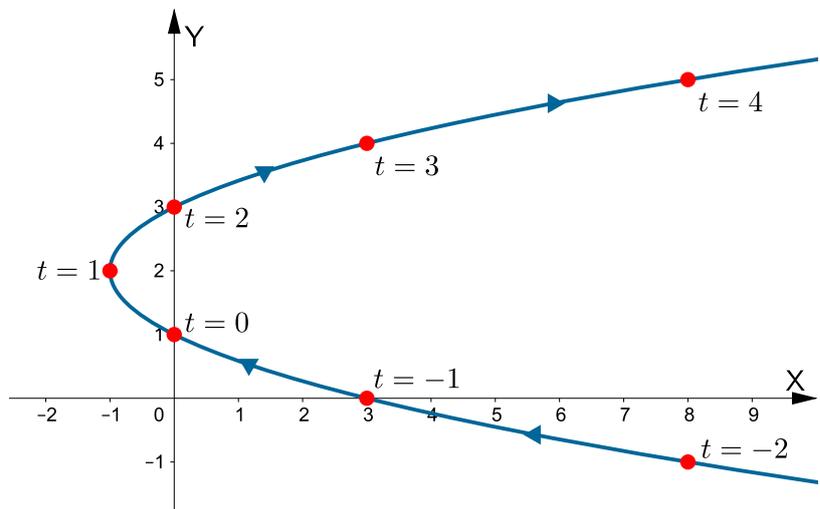


Figura 2.14: Esboço da curva paramétrica definida pelas equações $x(t) = t^2 - 2t$ e $y(t) = t + 1$ com $t \in \mathbb{R}$.

Agora para identificarmos corretamente que curva foi traçada, devemos eliminar o parâmetro t das equações $x(t) = t^2 - 2t$ e $y(t) = t + 1$ para gerarmos uma única equação nas variáveis x e y . Com efeito, considerando $y = t + 1$, temos que $t = y - 1$. Substituindo $t = y - 1$ na equação $x = t^2 - 2t$, obtemos

$$x = (y - 1)^2 - 2(y - 1)$$

$$x = y^2 - 2y + 1 - 2y + 2$$

$$x = y^2 - 4y + 3$$

Isto mostra que a curva representada pelas equações paramétricas $x(t)$ e $y(t)$ é a parábola $x = y^2 - 4y + 3$.

Observe que parâmetro t do Exemplo 2.5, está definido para todo valor real. No entanto, algumas vezes é necessário restringir t a um intervalo fechado e, neste caso a curva terá *ponto inicial* e *ponto final*, conforme a definição a seguir.

Definição 2.3 (Ponto inicial e ponto final de α): Se a curva plana parametrizada α está definida num intervalo $I = [a, b]$, os pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ são chamados de **ponto inicial** de α e **ponto final** de α , respectivamente.

Exemplo 2.6: Diga qual é a curva representada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solução: Para sabermos qual curva é representada pelas equações paramétricas dadas, precisamos eliminar o parâmetro t das duas equações e escrever uma única equação em termos de x e y . Com efeito, elevando ao quadrado as equações $x = \cos t$ e $y = \sin t$ e somando as equações membro a membro, obtemos

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t,$$

da relação trigonométrica fundamental, segue que $x^2 + y^2 = 1$. Isto mostra que o ponto $(x(t), y(t))$ se move na circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$.

Neste exemplo, o parâmetro t representa o ângulo em radianos, pois quando t aumenta de 0 até 2π , o ponto $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ se move uma vez em torno da circunferência unitária, no sentido anti-horário, partindo do ponto $(1, 0)$, conforme a Figura 2.15.

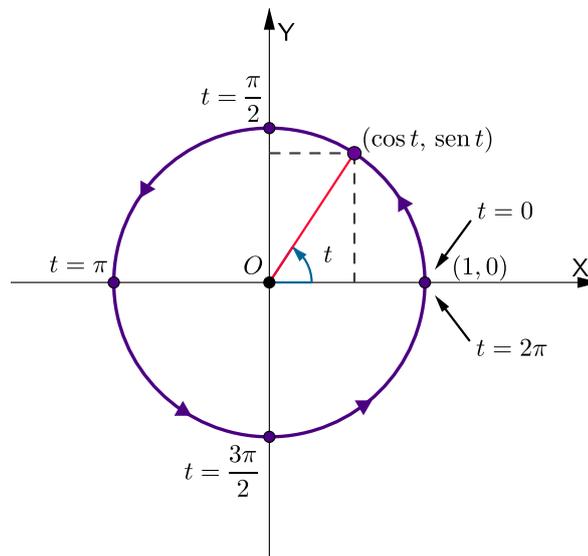


Figura 2.15: Uma parametrização da circunferência unitária.

É importante observar que podemos descrever a trajetória do ponto $(x(t), y(t))$ sobre uma curva C de várias maneiras (podemos fazer o ponto ir mais rápido, mais devagar, num sentido ou no outro, etc), logo uma curva pode ser parametrizada de diversos modos. Por isso, fazemos a distinção entre uma *curva*, que é um conjunto de pontos, e uma *curva parametrizada*, onde os pontos são percorridos de um modo particular, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 2.7: Mostre que a curva representada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = \text{sen}(2t) \\ y(t) = \text{cos}(2t) \end{cases} ; 0 \leq t \leq 2\pi .$$

é a circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Elevando ao quadrado ambos os membros das equações $x = \text{sen}(2t)$ e $y = \text{cos}(2t)$ e somando membro a membro as equações obtidas, tem-se

$$x^2 + y^2 = \text{sen}^2(2t) + \text{cos}^2(2t),$$

segue que $x^2 + y^2 = 1$, mostrando assim que o ponto $(x(t), y(t))$ se move sobre a circunferência unitária.

Note que neste exemplo quando t aumenta de 0 até 2π , o ponto $(x(t), y(t)) = (\text{sen}(2t), \text{cos}(2t))$ começa em $(0, 1)$ e se move *duas vezes* em torno da circunferência no sentido horário, conforme a Figura 2.16.

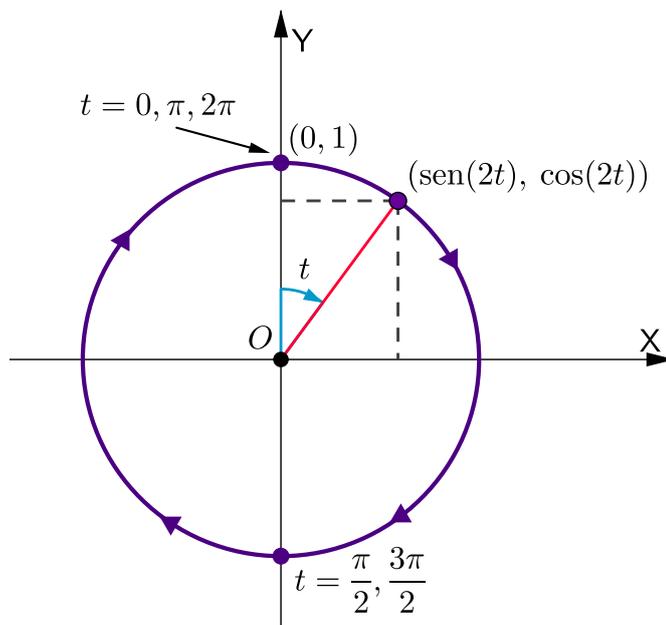


Figura 2.16: Outra parametrização da circunferência unitária.

Definição 2.4 (Curva fechada): Se α está definida num intervalo $I = [a, b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$, dizemos que α é uma curva fechada.

Exemplo 2.8: A curva

$$C = \{\alpha(t) = (4 \cos t, 3 \sin t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

é uma curva fechada, pois

$$\alpha(0) = (4, 0) = \alpha(2\pi).$$

Definição 2.5 (Curva periódica): Uma curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita periódica se existe um número real $T > 0$, tal que

$$\alpha(t + T) = \alpha(t) \tag{2.3}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Note que se a curva parametrizada α é periódica de período T , então para qualquer n inteiro positivo temos

$$\alpha(t + nT) = \alpha(t),$$

ou seja, qualquer múltiplo inteiro positivo nT de T também é um período da curva parametrizada α . O menor $T > 0$, se existir, satisfazendo (2.3) para todo $t \in \mathbb{R}$ é denominado **período fundamental** de α .

Exemplo 2.9: Mostre que a curva

$$C = \{\alpha(t) = (\sin t \cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

é periódica.

Solução: Para mostrar que a curva α é periódica, basta exibir um valor $T > 0$, tal que $\alpha(t + T) = \alpha(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere $T = 2\pi$, então

$$\begin{aligned} \alpha(t + 2\pi) &= (\sin(t + 2\pi) \cos(t + 2\pi), \sin(t + 2\pi)) \\ &= (\sin t \cos t, \sin t) \\ &= \alpha(t) \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto mostra que a curva parametrizada α é periódica.

Para encerrarmos essa subseção, frisamos que o gráfico de qualquer função pode ser tratado como uma curva parametrizada, pois dada uma função $y = f(x)$, o gráfico de f

são os pontos $(x, f(x))$ onde x percorre os valores do domínio de f . Então se definirmos

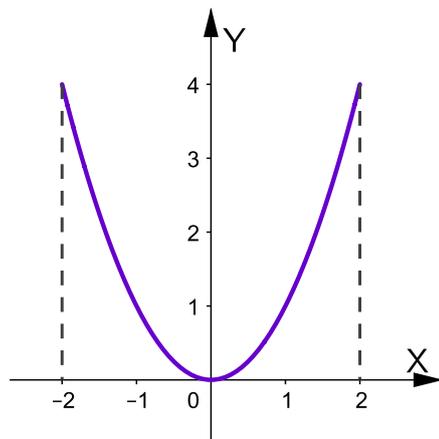
$$\begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = f(t) \end{cases},$$

ao marcar os pontos $P(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t))$, o resultado será o gráfico de f .

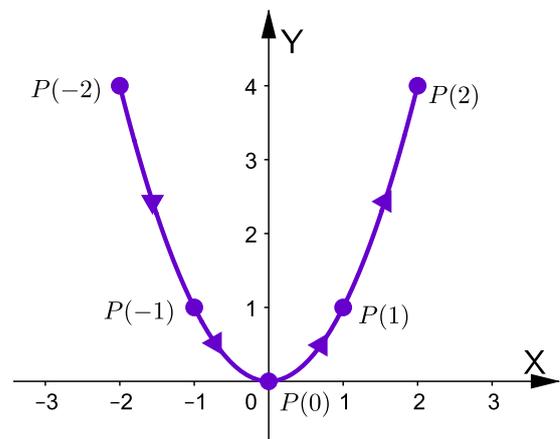
Exemplo 2.10: Considere a função f definida por $y = x^2$ com $x \in [-2, 2]$. O gráfico de f como uma curva parametrizada é dada por

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}; -2 \leq t \leq 2.$$

Se $P(t) = (t, t^2)$, então $P(-2) = (-2, 4)$, $P(-1) = (-1, 1)$, $P(0) = (0, 0)$ e assim por diante, conforme a Figura 2.17.



(a) Gráfico estático de $y = x^2$



(b) Movimento do ponto $P(t)$ ao longo da curva.

Figura 2.17: O gráfico da função $y = x^2$ tratado como uma curva parametrizada.

2.2.3 Parametrização da cicloide

Definição 2.6 (Cicloide): *Sejam λ uma circunferência de raio r , s uma reta e P um ponto pertencente a λ . Chamamos de **cicloide** a curva descrita pelo ponto P quando λ rola sobre a reta s sem deslizar.*

A Figura 2.18 mostra a trajetória do ponto P descrevendo o gráfico da cicloide.

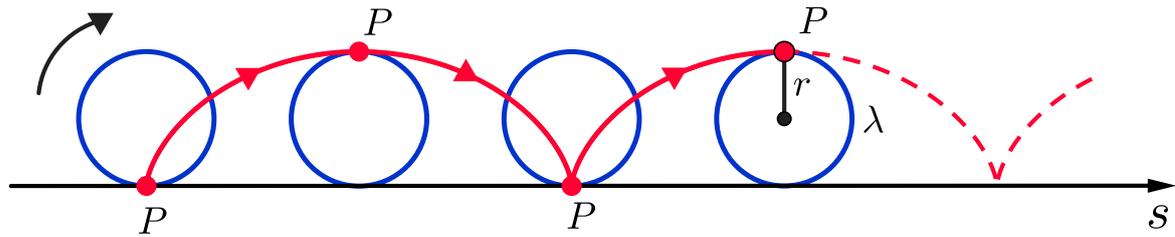


Figura 2.18: A cicloide.

Segundo (Stewart, 2013, p.579-580) uma das primeiras pessoas a estudar a cicloide foi Galileu Galilei, propondo que pontes poderiam ser construídas com o formato de cicloides e tentou determinar a área sob um arco de uma cicloide. Mais tarde, o matemático John Bernoulli e o físico Christiaan Huygens estudaram a cicloide para resolver os problemas da **braquistócrona** e da **tautócrona**.

Nosso foco com a cicloide será fazer a sua parametrização que servirá como base para parametrizar as curvas hipotrocoides e epitrocoides no próximo capítulo.

Para obtermos as equações paramétricas da cicloide, considere que a reta s é o eixo OX e suponha que circunferência λ inicia o seu movimento com centro C no ponto $(0, r)$ de tal forma que o ponto P coincida com a origem O do sistema OXY , conforme a Figura 2.19.

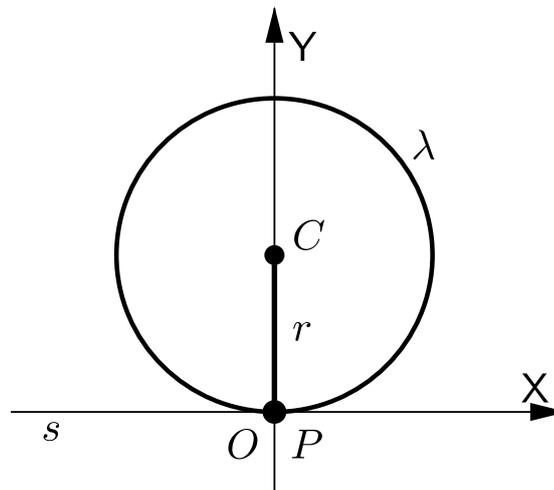


Figura 2.19: Posição inicial da circunferência λ .

Imaginemos agora que a circunferência λ vá girando sobre o eixo OX no sentido horário e sem deslizar, descrevendo assim, a trajetória do ponto P .

Sejam A e B as projeções ortogonais dos pontos C e P sobre o eixo OX , respectivamente. A medida que a circunferência rola, ela vai formando o ângulo \widehat{ACP} , cuja medida em radianos será igual a t , conforme a Figura 2.20.

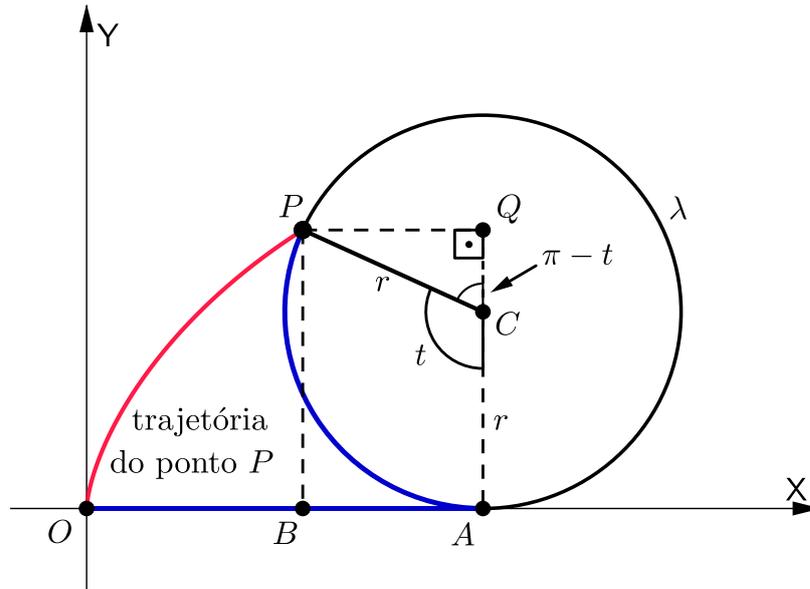


Figura 2.20: Parametrização da cicloide.

Nosso trabalho agora é determinar as coordenadas de P em função de t , denotadas por $x(t)$ e $y(t)$ e que representam as equações paramétricas da trajetória do ponto P .

Considerando o esquema da Figura 2.20, tem-se $x(t) = OA - BA$ e $y(t) = BP = AQ$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x(t) = OA - PQ \\ y(t) = AC + CQ. \end{cases} \quad (2.4)$$

Veja que o $\triangle CPQ$ é retângulo em Q e, como o ângulo \widehat{PCQ} é igual a $\pi - t$, temos que

$$\text{sen}(\pi - t) = \frac{PQ}{r} \quad \text{e} \quad \text{cos}(\pi - t) = \frac{CQ}{r}$$

se, e somente se,

$$PQ = r \text{sen } t \quad \text{e} \quad CQ = -r \text{cos } t. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.5) em (2.4) e como $AC = r$, temos que

$$\begin{cases} x(t) = OA - r \text{sen } t \\ y(t) = r - r \text{cos } t. \end{cases}$$

Agora só precisamos encontrar o valor de OA . Da geometria plana, temos que o comprimento do arco \widehat{AP} é igual a tr e como a circunferência λ gira sem deslizar sobre o eixo OX , então OA também é igual a tr .

Portanto,

$$\begin{cases} x(t) = tr - r \operatorname{sen} t \\ y(t) = r - r \cos t \end{cases}; t \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

são as equações paramétricas da cicloide descrita pela trajetória do ponto P no sistema OXY .

Utilizando as equações paramétricas (2.6) da cicloide, observe que

- para $t = 0$, o ponto P está na sua posição inicial;
- para $t = \pi$, P dista $2r$ do eixo OX ;
- para $t = 2\pi$, o círculo deu um giro completo e o ponto P volta a tocar o eixo OX .

Veja na Figura 2.21 a construção da cicloide para certos valores de t .

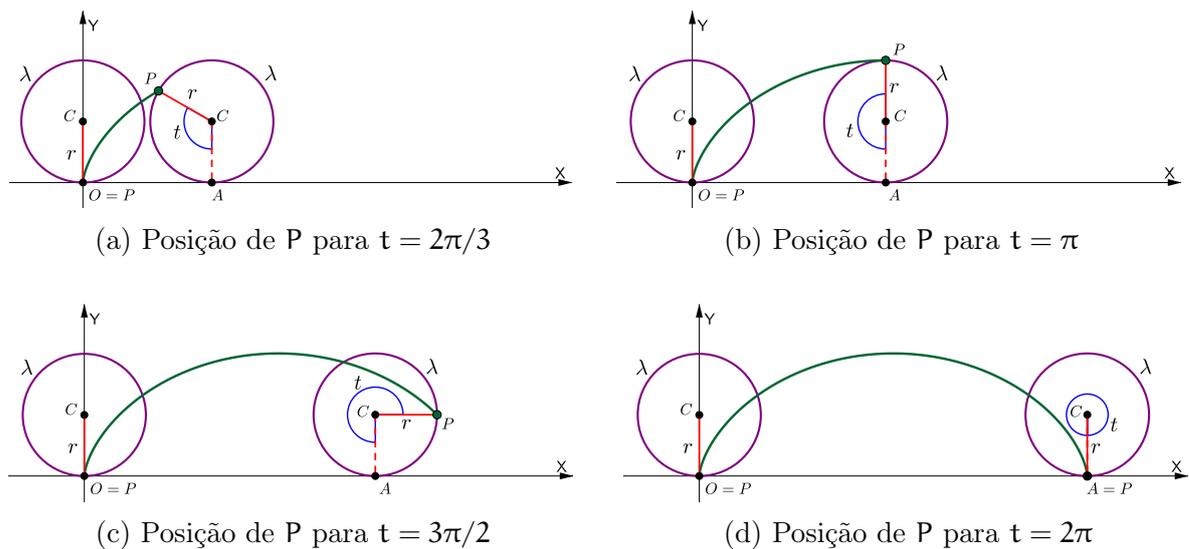


Figura 2.21: Construção da cicloide

Até agora estudamos as curvas planas utilizando o sistema de eixos ortogonais OXY . No entanto, há certos tipos de curvas que são melhores representadas utilizando o sistema de coordenadas polares. Na subseção a seguir estudaremos algumas dessas curvas e como fazer a transformação de um sistema para o outro.

2.2.4 Curvas polares

Definição 2.7 (Curva polar): Uma curva polar é o conjunto de todos os pontos $P = (\rho, \theta)$ do plano cujas coordenadas polares satisfazem uma equação polar do tipo

$$F(\rho, \theta) = 0. \quad (2.7)$$

Geralmente a equação (2.7) pode ser resolvida para ρ e sendo expressada de **forma explícita** como $\rho = f(\theta)$.

É importante observarmos que como o ponto P tem muitos pares diferentes de coordenadas, é necessário estabelecer explicitamente que P pertence ao gráfico de uma curva polar se *qualquer uma* de suas diferentes representações satisfizer a equação. Isto é, mesmo que um par de coordenadas polares de um ponto P não satisfaça a uma equação polar de uma curva, isto não garante que este ponto não pertença a esta curva.

Exemplo 2.11: Mostre que ambos os pontos $(1, \pi/2)$ e $(0, \pi/2)$ pertencem ao gráfico da curva de equação $\rho = \sin^2 \theta$.

Solução: O ponto $(1, \pi/2)$ está no gráfico de $\rho = \sin^2 \theta$, pois $1 = \sin^2(\pi/2)$. Por outro lado, o ponto $(0, \pi/2)$ também está no gráfico de $\rho = \sin^2 \theta$, pois embora $0 \neq \sin^2(\pi/2)$ o ponto $(0, 0)$ pertence, já que $0 = \sin^2(0)$ e $(0, 0)$ é uma das representação do ponto $(0, \pi/2)$.

Exemplo 2.12: Que curva é representada pela equação polar $\rho = 2$?

Solução: A curva consiste de todos os pontos (ρ, θ) com $\rho = 2$. Como ρ representa a distância do ponto ao polo, então a curva $\rho = 2$ representa o círculo com centro em O e raio 2, conforme a Figura 2.22.

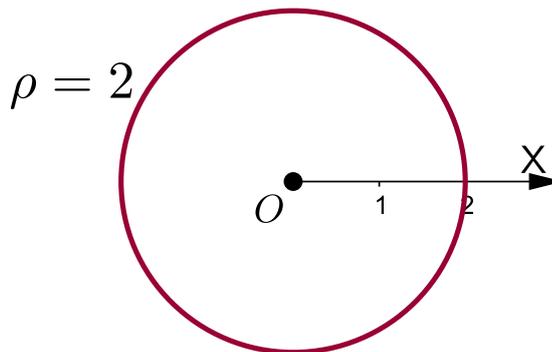


Figura 2.22: Gráfico da curva polar $\rho = 2$.

Em geral, a equação $\rho = a$ representa um círculo com centro O e raio $|a|$. De fato, utilizando as equações de transformação (2.1), temos que $x = a \cos \theta$ e $y = a \sin \theta$. Elevando ao quadrado ambos os membros de cada equação e, em seguida, somando as equações membro a membro, obtemos $x^2 + y^2 = a^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$, isto implica que $x^2 + y^2 = a^2$, provando assim a afirmação.

Exemplo 2.13: A curva de equação polar

$$\rho = a\theta, \tag{2.8}$$

com $a, \theta \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, é chamada de **Espiral de Arquimedes**.

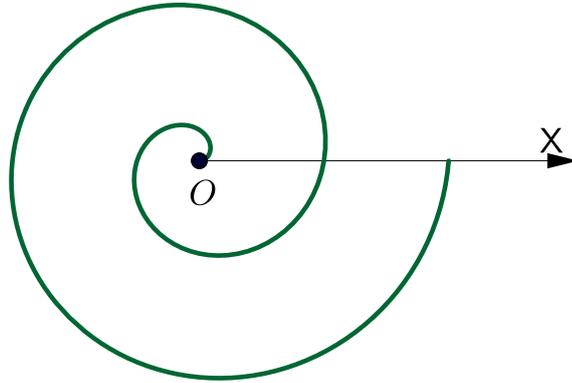


Figura 2.23: A espiral de Arquimedes para $0 \leq \theta \leq 4\pi$.

Mostre que a curva de equações paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = kt \cos t \\ y(t) = kt \sin t \end{cases}; t, k \in \mathbb{R} \text{ e } k > 0,$$

representa a espiral de Arquimedes.

Solução: Para mostrarmos que a curva é a espiral de Arquimedes, precisamos transformar as equações paramétricas $x(t) = kt \cos t$ e $y(t) = kt \sin t$ para a forma (2.23). Para tanto, utilizando a equação de transformação $\rho^2 = x^2 + y^2$, temos que

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (kt \cos t)^2 + (kt \sin t)^2 \\ \rho^2 &= (kt)^2 \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ \rho^2 &= (kt)^2 \end{aligned}$$

se, e somente se,

$$\rho = kt.$$

Fazendo $a = k$ e $t = \theta$, obtemos $\rho = a\theta$, mostrando assim que a curva de equações paramétricas $x(t) = kt \cos t$ e $y(t) = kt \sin t$ é a espiral de Arquimedes.

O Exemplo 2.13 serve para mostrar que podemos representar uma mesma curva em coordenadas cartesianas ou em coordenadas polares e ao utilizarmos as equações de transformação (2.1) e/ou (2.2) podemos verificar se as equações dadas representam a mesma curva transformando uma equação na outra. Esse método será bastante utilizado

no próximo capítulo.

Acreditamos que os conceitos e as discussões apresentadas neste capítulo são essenciais para o estudo das hipotrocoides e epitrocoides, que veremos no capítulo a seguir.

Capítulo 3

Hipotrocoides e epitrocoides

Neste capítulo, estudamos as hipotrocoides e epitrocoides. Começamos definindo-as e, em seguida, obtemos as suas equações paramétricas. Além disso, discutimos sobre periodicidade, gráficos e sobre os teoremas da dupla geração. Para tanto, nos fundamentamos em Andrade (2014), Delgado et al. (2017), Hall (1992), Mózer e Bortolossi (2016) e Phan-Yamada e Gwin (2014).

3.1 Definição e parametrização

Definição 3.1 (Hipotrocoide): *Uma hipotrocoide é uma curva plana descrita pela trajetória de um ponto P fixado no interior de uma circunferência λ_2 de raio $r > 0$ e centro C que gira tangencialmente e sem deslizar por dentro de outra circunferência λ_1 fixa de raio $R > 0$ e centro O .*

Se d é a distância de P até C e adotando $O = (0, 0)$, suponhamos que a posição inicial de λ_2 , seja de tal forma que o seu centro C esteja sobre o eixo Ox e tangencie interiormente λ_1 no ponto E , conforme mostra a Figura 3.1.

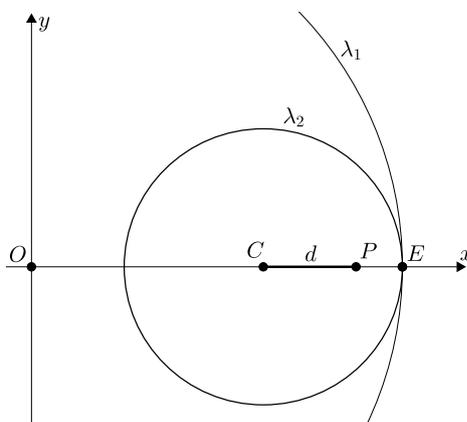


Figura 3.1: Posição inicial de λ_1 e λ_2 .

Imaginemos agora que λ_2 vá girando tangencialmente λ_1 sem deslizar, descrevendo a trajetória do ponto P e formando o ângulo $\widehat{Q\hat{O}E}$, cuja a medida em radianos será igual a t , veja Figura 3.2.

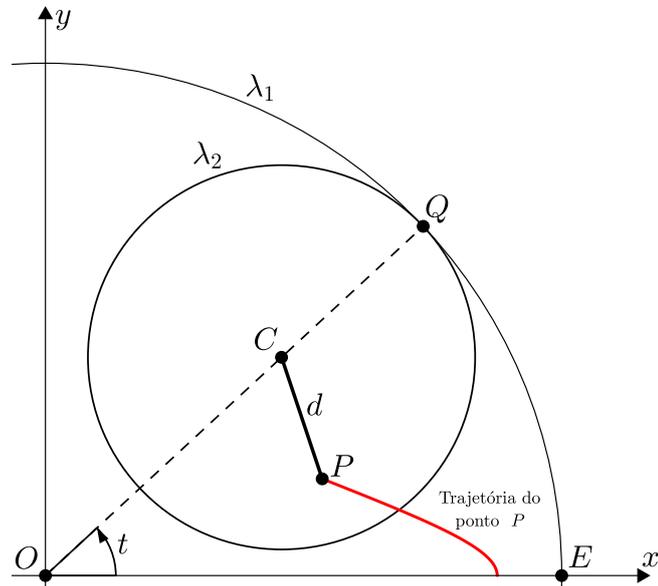


Figura 3.2: P descrevendo uma hipotrocoide.

Escolhidos os valores das constantes R , r e d , o nosso objetivo agora é determinar as coordenadas de P em função de t , denotadas por $x(t)$ e $y(t)$ e que representam as equações paramétricas da trajetória do ponto P . Para tanto, considere $CS = r$, A e D as respectivas projeções ortogonais dos pontos C e P , e o segmento BP paralelo ao segmento AD , conforme a Figura 3.3.

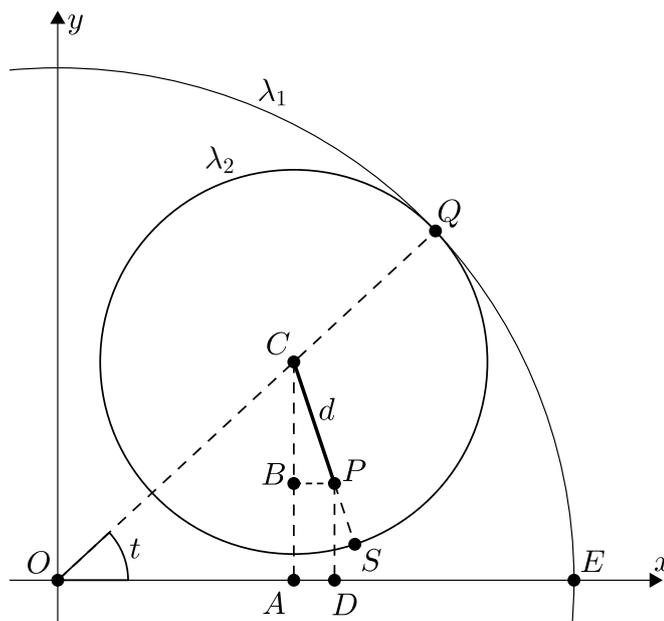


Figura 3.3: Determinando as coordenadas de P .

Observe que $x(t) = OA + AD$ e $y(t) = DP = AB$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x(t) = OA + BP \\ y(t) = AC - BC. \end{cases} \quad (3.1)$$

Veja que $OC = OQ - QC$, logo $OC = R - r$ e, como o $\triangle OAC$ é retângulo em A , então

$$OA = (R - r) \cos t \quad \text{e} \quad AC = (R - r) \sin t,$$

substituindo em (3.1), obtemos

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + BP \\ y(t) = (R - r) \sin t - BC. \end{cases} \quad (3.2)$$

Considerando θ a medida em radianos do ângulo \widehat{BCP} e, como $CP = d$, então

$$BP = d \sin \theta \quad \text{e} \quad BC = d \cos \theta,$$

substituindo em (3.2), temos

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + d \sin \theta \\ y(t) = (R - r) \sin t - d \cos \theta. \end{cases} \quad (3.3)$$

Agora, precisamos encontrar uma relação entre t e θ . Veja que a medida do arco \widehat{QE} é igual a tR que é a mesma medida do arco \widehat{QS} , pois λ_2 gira tangencialmente e sem deslizar sobre λ_1 . Logo, a medida do ângulo \widehat{QCS} é

$$\widehat{QCS} = \frac{tR}{r} \text{ rad.}$$

Do $\triangle OAC$, temos que:

$$\widehat{OCA} = \frac{\pi}{2} - t \text{ rad.}$$

Como o ângulo \widehat{QCO} é raso e é igual a soma das medidas dos ângulos \widehat{QCS} , \widehat{BCP} e \widehat{OCA} , então

$$\pi = \frac{tR}{r} + \theta + \frac{\pi}{2} - t,$$

isolando θ , obtemos

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{2} + t - \frac{tR}{r}$$

se, e somente se,

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{R}{r}\right) t.$$

Substituindo o valor de θ em (3.3), temos

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + d \sin \left(\frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{R}{r}\right) t \right) \\ y(t) = (R - r) \sin t - d \cos \left(\frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{R}{r}\right) t \right) \end{cases},$$

usando as fórmulas $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$ e $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha$, obtemos

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + d \cos \left(\left(1 - \frac{R}{r}\right) t \right) \\ y(t) = (R - r) \sin t + d \sin \left(\left(1 - \frac{R}{r}\right) t \right) \end{cases}.$$

Utilizando as fórmulas $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ e $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, tem-se

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + d \cos \left(\left(\frac{R}{r} - 1\right) t \right) \\ y(t) = (R - r) \sin t - d \sin \left(\left(\frac{R}{r} - 1\right) t \right) \end{cases},$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + d \cos \left(\frac{R - r}{r} t \right) \\ y(t) = (R - r) \sin t - d \sin \left(\frac{R - r}{r} t \right) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (3.4)$$

que são as equações paramétricas da hipotrocoide descrita pela trajetória do ponto P.

Para nos referir às equações paramétricas da hipotrocoide descritas por (3.4), utilizaremos a notação

$$\mathcal{H}[t; R, r, d],$$

representando os três parâmetros fixos R , r , d e o variável, t .

Exemplo 3.1: A notação $\mathcal{H}[t; 7, 4, 2]$ representa a hipotrocoide, cuja as equações paramétricas são

$$\begin{cases} x(t) = (7 - 4) \cos t + 2 \cos \left(\frac{7 - 4}{4} t \right) \\ y(t) = (7 - 4) \sin t - 2 \sin \left(\frac{7 - 4}{4} t \right) \end{cases} = \begin{cases} x(t) = 3 \cos t + 2 \cos \left(\frac{3}{4} t \right) \\ y(t) = 3 \sin t - 2 \sin \left(\frac{3}{4} t \right) \end{cases}.$$

Definição 3.2 (Epitrocoide): Uma epitrocoide é uma curva plana descrita pela trajetória de um ponto P fixado no interior de uma circunferência λ_2 de raio $r > 0$ e centro C que gira tangencialmente e sem deslizar por fora de outra circunferência λ_1 fixa de raio $R > 0$ e centro O .

Se d é a distância de P até C e adotando $O = (0,0)$, suponhamos que a posição inicial de λ_2 , seja de tal forma que o seu centro C esteja sobre o eixo Ox e tangencie exteriormente λ_1 no ponto E , conforme mostra a Figura 3.4.

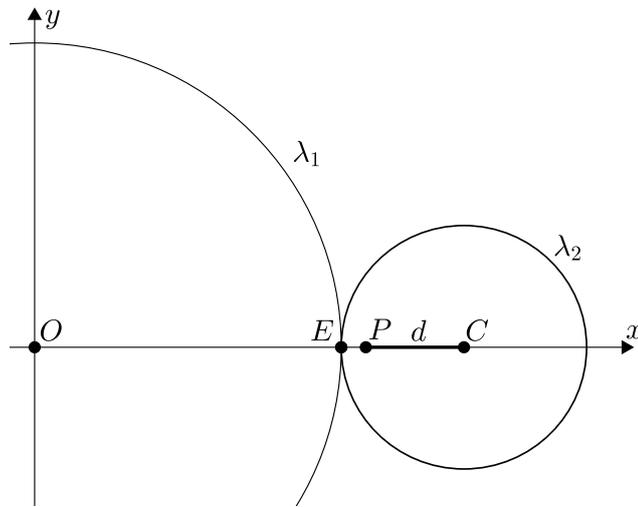


Figura 3.4: Posição inicial de λ_1 e λ_2 .

Imaginemos agora que λ_2 vá girando tangencialmente λ_1 sem deslizar, descrevendo a trajetória do ponto P e formando o ângulo $\widehat{Q\hat{O}E}$, cuja a medida em radianos será igual a t , veja a Figura 3.5.

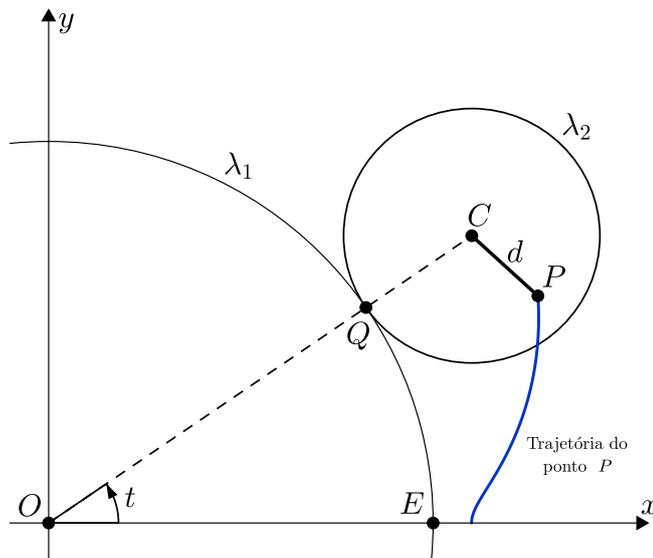


Figura 3.5: P descrevendo uma epitrocoide.

Escolhidos os valores das constantes R , r e d , o nosso objetivo agora é determinar as coordenadas de P em função de t , denotadas por $x(t)$ e $y(t)$ e que representam as equações paramétricas da trajetória do ponto P . Para tanto, considere $CS = r$, A e D as respectivas projeções ortogonais dos pontos C e P , e o segmento BP paralelo ao segmento AD , conforme a Figura 3.6.

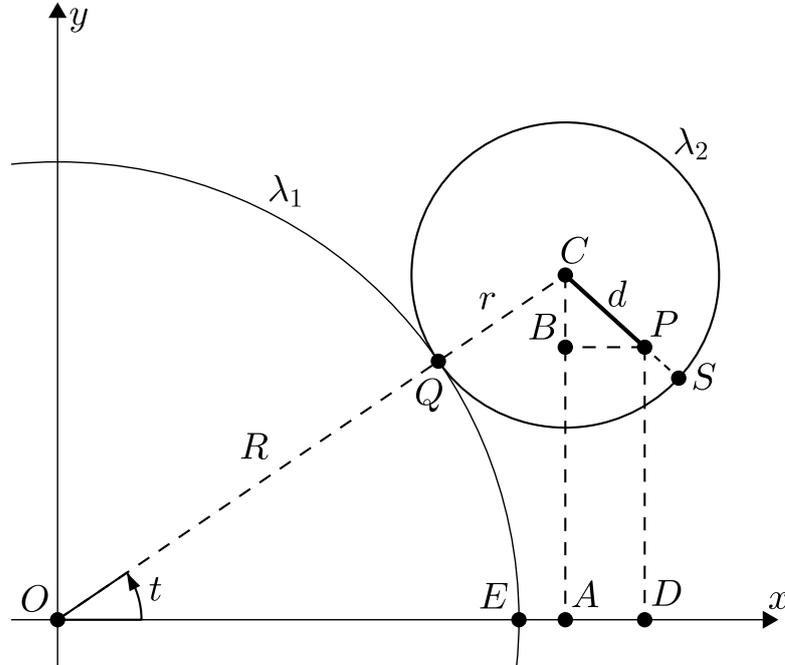


Figura 3.6: Determinando as coordenadas de P .

Observe que $x(t) = OA + AD$ e $y(t) = DP = AB$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x(t) = OA + BP \\ y(t) = AC - BC. \end{cases} \quad (3.5)$$

Veja que $OC = OQ + QC$, logo $OC = R + r$ e como o $\triangle OAC$ é retângulo em A , então

$$OA = (R + r) \cos t \quad \text{e} \quad AC = (R + r) \sin t,$$

substituindo em (3.5), obtemos

$$\begin{cases} x(t) = (R + r) \cos t + BP \\ y(t) = (R + r) \sin t - BC. \end{cases} \quad (3.6)$$

Considerando θ a medida em radianos do ângulo \widehat{BCP} e, como $CP = d$, então

$$BP = d \sin \theta \quad \text{e} \quad BC = d \cos \theta,$$

substituindo em (3.6), temos

$$\begin{cases} x(t) = (R + r) \cos t + d \operatorname{sen} \theta \\ y(t) = (R + r) \operatorname{sen} t - d \cos \theta \end{cases} \quad (3.7)$$

Da geometria plana, temos que a medida do arco \widehat{QE} é igual a tR , que é a mesma medida do arco \widehat{QS} , pois λ_2 gira tangencialmente e sem deslizar sobre λ_1 . Logo, a medida do ângulo $Q\widehat{CS}$ é

$$Q\widehat{CS} = \frac{tR}{r} \text{ rad.}$$

Do $\triangle OAC$, temos que:

$$O\widehat{CA} = \frac{\pi}{2} - t \text{ rad.}$$

Sendo assim, temos que o ângulo $B\widehat{CP} = Q\widehat{CS} - O\widehat{CA}$, ou seja

$$\theta = \frac{tR}{r} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

se, e somente se,

$$\theta = \left(\frac{R}{r} + 1\right)t - \frac{\pi}{2}.$$

Substituindo o valor de θ em (3.7), temos

$$\begin{cases} x(t) = (R + r) \cos t + d \operatorname{sen} \left(\left(\frac{R}{r} + 1\right)t - \frac{\pi}{2} \right) \\ y(t) = (R + r) \operatorname{sen} t - d \cos \left(\left(\frac{R}{r} + 1\right)t - \frac{\pi}{2} \right) \end{cases},$$

usando as fórmulas $\operatorname{sen} \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$ e $\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \alpha$, obtemos

$$\begin{cases} x(t) = (R + r) \cos t - d \cos \left(\left(\frac{R}{r} + 1\right)t \right) \\ y(t) = (R + r) \operatorname{sen} t - d \operatorname{sen} \left(\left(\frac{R}{r} + 1\right)t \right) \end{cases}$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} x(t) = (R + r) \cos t - d \cos \left(\frac{R + r}{r} t \right) \\ y(t) = (R + r) \operatorname{sen} t - d \operatorname{sen} \left(\frac{R + r}{r} t \right) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (3.8)$$

que são as equações paramétricas da epitrocoide descrita pela trajetória do ponto P.

Para nos referir as equações paramétricas da epitrocoide descritas por (3.8), utilizaremos a notação

$$\mathcal{E}[t; R, r, d],$$

representando os três parâmetros fixos R , r , d e o variável, t .

Exemplo 3.2: A notação $\mathcal{E}[t; 9, 7, 5]$ representa a epitrocoide cuja as equações paramétricas são

$$\begin{cases} x(t) = (9 + 7) \cos t - 5 \cos \left(\frac{9+7}{7}t \right) \\ y(t) = (9 + 7) \sin t - 5 \sin \left(\frac{9+7}{7}t \right) \end{cases} = \begin{cases} x(t) = 16 \cos t - 5 \cos \left(\frac{16}{7}t \right) \\ y(t) = 16 \sin t - 5 \sin \left(\frac{16}{7}t \right) \end{cases}.$$

Observação 3.1: O ponto P das definições 3.1 e 3.2 é chamado de **ponto gerador** e as circunferências λ_1 e λ_2 são denominadas de **circunferência fixa** e **circunferência rolante**, respectivamente.

3.2 O período fundamental

Hipotrocoides e epitrocoides só serão curvas fechadas se as funções $x(t)$ e $y(t)$ forem periódicas. O Teorema 3.1 mostra que isso só ocorre quando a razão R/r entre os raios das circunferências é um número racional. Em seguida, o Teorema 3.2 mostra como determinar o período fundamental de uma hipotrocoide ou uma epitrocoide dada.

Teorema 3.1 (razão racional): *Hipotrocoides e epitrocoides são curvas periódicas se, e somente se, a razão R/r entre os raios das circunferências é um número racional.*

Demonstração: Seja $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ a hipotrocoide descrita pelas equações em (3.4). Considere $A = R - r$ e $B = \frac{R - r}{r}$, então as equações (3.4) ficam assim

$$\begin{cases} x(t) = A \cos t + d \cos (Bt) \\ y(t) = A \sin t - d \sin (Bt) \end{cases}. \quad (3.9)$$

Suponhamos que a trajetória de uma hipotrocoide descrita pelas equações 3.9 seja periódica, então existe $T > 0$, tal que

$$x(T + t) = x(t) \quad \text{e} \quad y(T + t) = y(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $B = 0$, nada há para se fazer. Suponhamos então que $B \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que

$$x(T) = x(0) \quad \text{e} \quad y(T) = y(0),$$

isto é,

$$A \cos T + d \cos(BT) = A + d \quad \text{e} \quad A \sin T - d \sin(BT) = 0, \quad (3.10)$$

logo,

$$\cos T = \frac{A + d - d \cos(BT)}{A} \quad \text{e} \quad A \sin T = d \sin(BT). \quad (3.11)$$

Desta última equação, segue que

$$A^2 \sin^2 T = d^2 \sin^2(BT),$$

isto é,

$$A^2(1 - \cos^2 T) = d^2(1 - \cos^2(BT)) \quad (3.12)$$

Escrevendo $K = \cos(BT)$ e substituindo a primeira equação de (3.11) em (3.12), obtemos

$$A^2 \left[1 - \left(\frac{A + d - dK}{A} \right)^2 \right] = d^2(1 - k^2),$$

então

$$\begin{aligned} A^2 - (A + d - dK)^2 &= d^2 - K^2 d^2 \\ A^2 - (A^2 + 2Ad - 2AKd + d^2 - 2Kd^2 + K^2 d^2) &= d^2 - K^2 d^2 \\ A^2 - A^2 - 2Ad + 2AKd - d^2 + 2Kd^2 - K^2 d^2 &= d^2 - K^2 d^2 \\ \cancel{A^2} - \cancel{A^2} - 2Ad + 2AKd - d^2 + 2Kd^2 - \cancel{K^2 d^2} &= d^2 - \cancel{K^2 d^2} \\ -2Ad + 2AKd - d^2 + 2Kd^2 &= d^2 \\ -2Ad + 2AKd + 2Kd^2 &= 2d^2. \end{aligned}$$

Como $d > 0$, dividindo-se ambos membros da última equação por $2d$, tem-se

$$-A + AK + Kd = d,$$

ou ainda

$$A \cdot (K - 1) = -d \cdot (K - 1).$$

Daí, temos que $A = -d$ ou $K - 1 = 0$. Como d e A são positivos ($R > r$), segue que $A \neq -d$ então, obrigatoriamente, $K - 1 = 0$. Como $K = \cos(BT)$, então $\cos(BT) - 1 = 0$,

ou seja, $\cos(BT) = 1$. Sendo assim,

$$BT = 2\pi m \quad (3.13)$$

para algum m inteiro diferente de zero. Substituindo (3.13) na segunda equação em (3.10), tem-se

$$A \operatorname{sen} T - d \operatorname{sen}(2m\pi) = 0$$

mas, $\operatorname{sen}(2m\pi) = 0$, então

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen} T &= 0 \\ \operatorname{sen} T &= 0 \end{aligned}$$

isto implica que,

$$T = \pi n \quad (3.14)$$

para algum n inteiro.

De (3.13), (3.14) e como $B = \frac{R-r}{r}$, temos que

$$\frac{R-r}{r} = B = \frac{BT}{T} = \frac{2\pi m}{\pi n}$$

isto é,

$$\frac{R-r}{r} = \frac{2m}{n} \Leftrightarrow \frac{R}{r} - 1 = \frac{2m}{n} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{2m}{n} + 1 \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{2m+n}{n} \in \mathbb{Q},$$

pois, m e n , são inteiros.

Reciprocamente, se $B = 0$, então $x(t) = A \cos t + d$ e $y(t) = A \operatorname{sen} t$, então tomando $T = 2\pi$, tem-se

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x(t+2\pi) \\ &= A \cos(t+2\pi) + d \\ &= A \cos t + d \quad (\text{pois, } \cos(w+2\pi) = \cos w, \forall w \in \mathbb{R}) \\ &= x(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y(t+T) &= y(t+2\pi) \\ &= A \operatorname{sen}(t+2\pi) \\ &= A \operatorname{sen} t \quad (\text{pois, } \operatorname{sen}(w+2\pi) = \operatorname{sen} w, \forall w \in \mathbb{R}) \\ &= y(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sendo assim, a hipotrocoide é periódica. Isto encerra o caso para $B = 0$.

Suponhamos agora que $B \neq 0$ e R/r seja um número racional, digamos que $\frac{R}{r} = \frac{m}{n}$ com m, n inteiros e n com o mesmo sinal de B . Se $\frac{R}{r} = \frac{m}{n}$, então $B = \frac{R-r}{r} = \frac{m-n}{n} \in \mathbb{Q}$, além disso, $m-n$ é um inteiro positivo, pois $R > r$. Seja $T = \frac{2\pi(m-n)}{B}$, note que $T > 0$, logo

$$\begin{aligned}
 x(t+T) &= A \cos(t+T) + d \cos(Bt+BT) \\
 &= A [\cos t \cdot \cos T - \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen} T] + d [\cos(Bt) \cdot \cos(BT) + \\
 &\quad - \operatorname{sen}(Bt) \cdot \operatorname{sen}(BT)] \\
 &= A \left[\cos t \cdot \cos \left(\frac{2\pi(m-n)}{B} \right) - \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(m-n)}{B} \right) \right] + \\
 &\quad + d \left[\cos(Bt) \cdot \cos \left(B \frac{2\pi(m-n)}{B} \right) - \operatorname{sen}(Bt) \cdot \operatorname{sen} \left(B \frac{2\pi(m-n)}{B} \right) \right] \\
 &= A [\cos t \cdot \cos(2\pi n) - \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen}(2\pi n)] + \\
 &\quad + d [\cos(Bt) \cdot \cos(2\pi(m-n)) - \operatorname{sen}(Bt) \cdot \operatorname{sen}(2\pi(m-n))] \\
 &= A \cos t + d \cos(Bt) \\
 &= x(t)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 y(t+T) &= A \operatorname{sen}(t+T) - d \operatorname{sen}(Bt+BT) \\
 &= A [\operatorname{sen} t \cdot \cos T + \operatorname{sen} T \cdot \cos t] - d [\operatorname{sen}(Bt) \cdot \cos(BT) + \\
 &\quad + \operatorname{sen}(BT) \cdot \operatorname{sen}(Bt)] \\
 &= A \left[\operatorname{sen} t \cdot \cos \left(\frac{2\pi(m-n)}{B} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(m-n)}{B} \right) \cdot \cos t \right] + \\
 &\quad - d \left[\operatorname{sen}(Bt) \cdot \cos \left(B \frac{2\pi(m-n)}{B} \right) + \operatorname{sen} \left(B \frac{2\pi(m-n)}{B} \right) \cdot \cos(Bt) \right] \\
 &= A [\operatorname{sen} t \cdot \cos(2\pi n) + \operatorname{sen}(2\pi n) \cdot \cos t] + \\
 &\quad - d [\operatorname{sen}(Bt) \cdot \cos(2\pi(m-n)) + \operatorname{sen}(2\pi(m-n)) \cdot \cos(Bt)] \\
 &= A \operatorname{sen} t - d \operatorname{sen}(Bt) \\
 &= y(t)
 \end{aligned}$$

Mostramos então que existe $T = \frac{2\pi(m-n)}{B} > 0$, tal que $x(t+T) = x(t)$ e $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, a trajetória da hipotrocoide é periódica.

Para a epitrocoide $\mathcal{E}[t; R, r, d]$ descrita pelas equações em (3.8) a demonstração é análoga. ■

Se a razão R/r entre os raios das circunferências for irracional, então as funções $x(t)$ e $y(t)$ não serão periódicas e as curvas hipotrocoide e epitrocoide não serão fechadas e seu gráfico vai formando uma coroa circular à medida que for sendo construído. Neste trabalho, estamos interessados apenas em hipotrocoides e epitrocoides periódicas e fechadas.

Teorema 3.2 (O período fundamental): *Se $\frac{R}{r} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{R}{r} = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, então a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ (ou a epitrocoide $\mathcal{E}[t; R, r, d]$) têm como período fundamental*

$$T = 2\pi q. \quad (3.15)$$

Em particular, se $\text{mdc}(R, r) = 1$, então o período fundamental é dado por

$$2\pi r. \quad (3.16)$$

Demonstração: Seja $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ a hipotrocoide descrita pelas equações em (3.4). Sabemos que as funções $\cos t$ e $\sin t$ são periódicas de período $T_1 = 2\pi$ e, também, são periódicas as funções $\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)$ e $\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)$ de período $T_2 = \frac{2\pi}{\left(\frac{R-r}{r}\right)}$. No entanto, as funções componentes $x(t)$ e $y(t)$ serão periódicas se existirem inteiros positivos m e n tais que

$$T_1 m = T_2 n. \quad (3.17)$$

Agora, precisamos encontrar o menor valor de $T_1 m = 2\pi m$ que satisfaça (3.17), ou seja, o período fundamental da hipotrocoide $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ é o número T , tal que

$$T = \min\{2\pi m\}. \quad (3.18)$$

De (3.17), temos que $2\pi m = \frac{2\pi}{\frac{R}{r} - 1} n$, isto implica que $\frac{R}{r} = \frac{m+n}{m}$. Como $\frac{R}{r} = \frac{p}{q}$,

segue que $\frac{p}{q} = \frac{m+n}{m}$, ou seja, $pm = q(m+n)$. Por hipótese, $\text{mdc}(p, q) = 1$, então

$$m = q \quad \text{e} \quad m + n = p.$$

De (3.18) e $m = q$, obtemos que o período fundamental é $T = 2\pi q$.

Em particular, se $\text{mdc}(R, r) = 1$ de (3.17), obtemos

$$m = r \quad \text{e} \quad m + n = R.$$

De (3.18) e $m = r$, obtemos que o período fundamental é $T = 2\pi r$.

Para a epitrocoide $\mathcal{E}[t; R, r, d]$ a demonstração é análoga. ■

Senso assim, (3.15) é o período fundamental para a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ e, também, para a epitrocoide $\mathcal{E}[t; R, r, d]$, onde q é o denominador da fração irredutível a partir da razão $\frac{R}{r}$. Além disso, q tem um outro significado importante. O número q expressa exatamente a quantidade de voltas que a circunferência rolante faz na circunferência fixa para que o ponto gerador P volte a sua posição inicial.

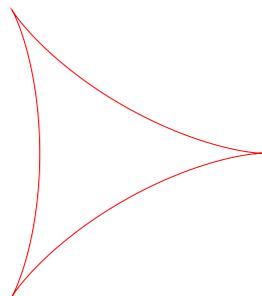
Exemplo 3.3: Se tomarmos a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 9, 6, 5]$, temos que $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, então por (3.15) o período fundamental é $2\pi \cdot 2 = 4\pi$, isto é, t precisa percorrer todo o intervalo fechado $[0, 4\pi]$ para que a curva feche. E como $q = 2$, então geometricamente, isso quer dizer que a circunferência rolante precisa dar 2 voltas completas na circunferência fixa para fechar a curva.

3.3 Gráficos de hipotrocoides e epitrocoides

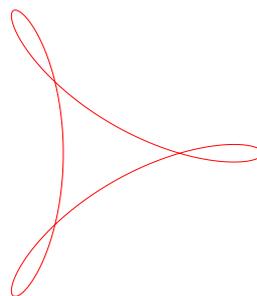
Na Definição 3.1 de hipotrocoide e na Definição 3.2 de epitrocoide, está implícito que $d < r$, pois P está fixado no interior de λ_2 . Embora esta restrição esteja fisicamente de acordo para que o espirógrafo seja possível, matematicamente e computacionalmente ela não é necessária, o ponto P pode estar no *interior*, no *exterior* ou *pertencer* a λ_2 , isto é,

- se $d < r$ o ponto P está fixado no interior de λ_2 como já explicamos;
- se $d > r$ o ponto P está fixado no exterior de λ_2 e
- se $d = r$ o ponto P pertence a circunferência λ_2 .

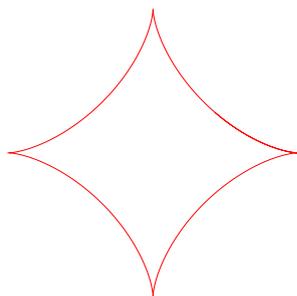
Atribuindo valores para os parâmetros R , r e d vejamos como ficam os gráficos das hipotrocoides (Figura 3.7) e epitrocoides (Figura 3.8).



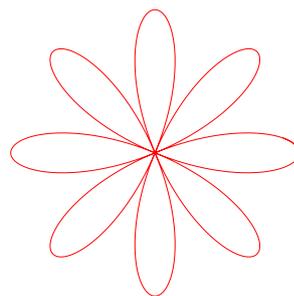
(a) $\mathcal{H}[t; 6, 4, 4]$ com $0 \leq t \leq 4\pi$.



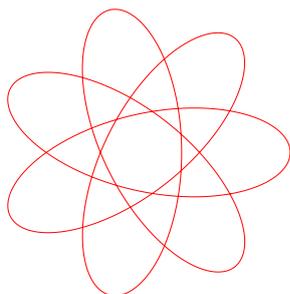
(b) $\mathcal{H}[t; 9, 6, 9/2]$ com $0 \leq t \leq 4\pi$.



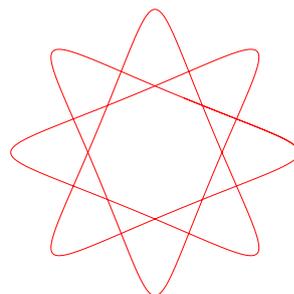
(c) $\mathcal{H}[t; 10, 5/2, 5/2]$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.



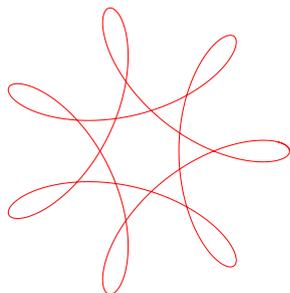
(d) $\mathcal{H}[t; 8, 5, 3]$ com $0 \leq t \leq 10\pi$.



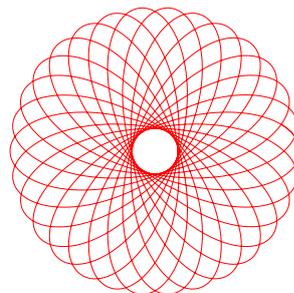
(e) $\mathcal{H}[t; 14, 8, 7/2]$ com $0 \leq t \leq 8\pi$.



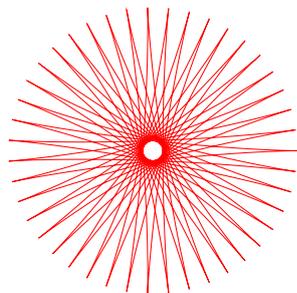
(f) $\mathcal{H}[t; 8, 3, 2]$ com $0 \leq t \leq 6\pi$.



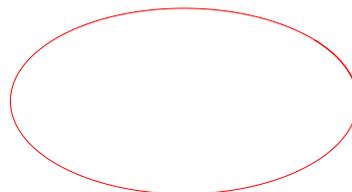
(g) $\mathcal{H}[t; 21/5, 3, 2]$ com $0 \leq t \leq 10\pi$.



(h) $\mathcal{H}[t; 30, 19, 8]$ com $0 \leq t \leq 38\pi$.

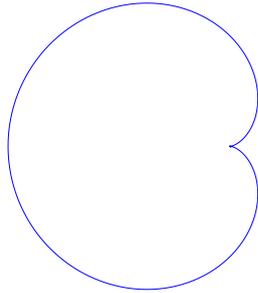


(i) $\mathcal{H}[t; 43/2, 10, 10]$ com $0 \leq t \leq 40\pi$.

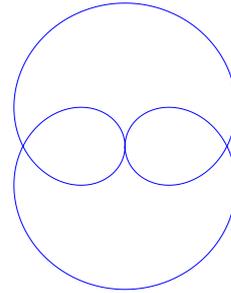


(j) $\mathcal{H}[t; 10, 5, 3/2]$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.

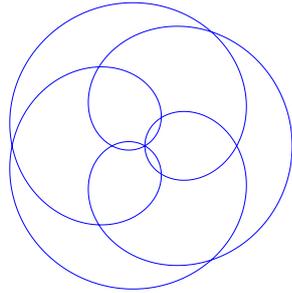
Figura 3.7: Hipotrocoides diversas



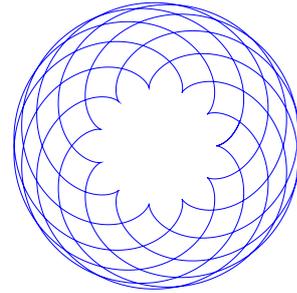
(a) $\mathcal{E}[t; 3, 3, 3]$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.



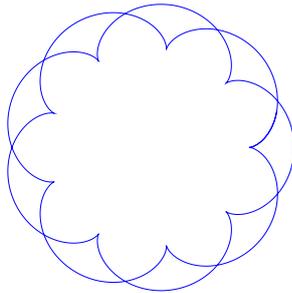
(b) $\mathcal{E}[t; 4, 2, 6]$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.



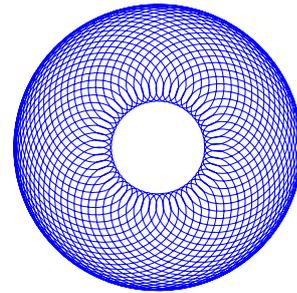
(c) $\mathcal{E}[t; 6, 4, 10]$ com $0 \leq t \leq 4\pi$.



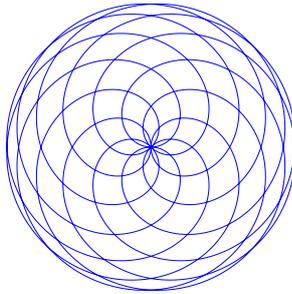
(d) $\mathcal{E}[t; 11/2, 4, 4]$ com $0 \leq t \leq 16\pi$.



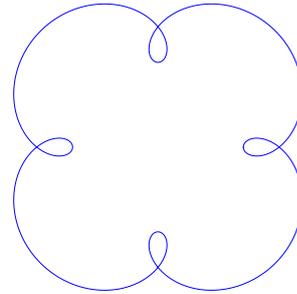
(e) $\mathcal{E}[t; 27/2, 3, 3]$ com $0 \leq t \leq 4\pi$.



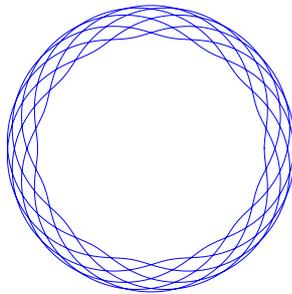
(f) $\mathcal{E}[t; 53/10, 5/2, 4]$ com $0 \leq t \leq 50\pi$.



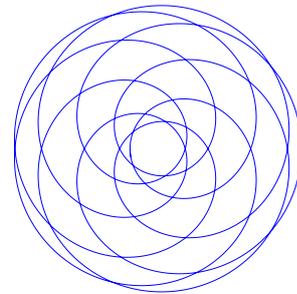
(g) $\mathcal{E}[t; 8, 7, 15]$ com $0 \leq t \leq 14\pi$.



(h) $\mathcal{E}[t; 10, 5/2, 4]$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.



(i) $\mathcal{E}[t; 9, 7/2, 3/2]$ com $0 \leq t \leq 14\pi$.



(j) $\mathcal{E}[t; 1, 4/5, 13/5]$ com $0 \leq t \leq 8\pi$.

Figura 3.8: Epi-trocoïdes diversas

Um detalhe que podemos perceber facilmente é que dada uma hipotrocoide (ou epitrocoide) o seu gráfico obedece a um *fator de escala*, ou seja, se multiplicarmos os seus parâmetros fixos pelo mesmo número real positivo, então o gráfico aumenta ou diminui conforme este número, veja a proposição a seguir.

Proposição 3.1: *Seja $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ a hipotrocoide (ou epitrocoide) descrita pelas equações em (3.4). Seja α um número real positivo, então*

$$\mathcal{H}[t; \alpha R, \alpha r, \alpha d] = \alpha \cdot \mathcal{H}[t; R, r, d].$$

Demonstração: Se α é um número real positivo, então as equações paramétricas da hipotrocoide $\mathcal{H}[t; \alpha R, \alpha r, \alpha d]$ são

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (\alpha R - \alpha r) \cos t + \alpha d \cos \left(\frac{\alpha R - \alpha r}{\alpha r} t \right) \\ &= \alpha(R - r) \cos t + \alpha d \cos \left(\frac{\alpha}{\alpha} \cdot \frac{(R - r)}{r} t \right) \\ &= \alpha \left[(R - r) \cos t + d \cos \left(\frac{R - r}{r} t \right) \right] \\ &= \alpha x(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (\alpha R - \alpha r) \sin t - \alpha d \sin \left(\frac{\alpha R - \alpha r}{\alpha r} t \right) \\ &= \alpha(R - r) \sin t - \alpha d \sin \left(\frac{\alpha}{\alpha} \cdot \frac{(R - r)}{r} t \right) \\ &= \alpha \left[(R - r) \sin t - d \sin \left(\frac{R - r}{r} t \right) \right] \\ &= \alpha y(t) \end{aligned}$$

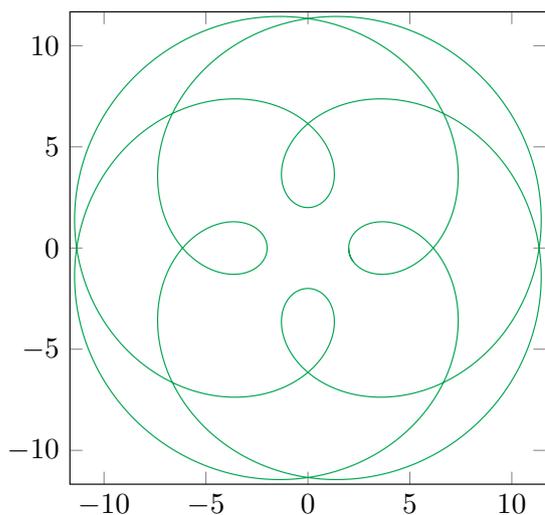
Portanto, as equações $x_1(t)$ e $y_1(t)$ obtidas são as equações paramétricas da hipotrocoide $\alpha \cdot \mathcal{H}[t; R, r, d]$, mostrando assim que $\mathcal{H}[t; \alpha R, \alpha r, \alpha d] = \alpha \cdot \mathcal{H}[t; R, r, d]$.

A demonstração é análoga para as equações paramétricas da epitrocoide. ■

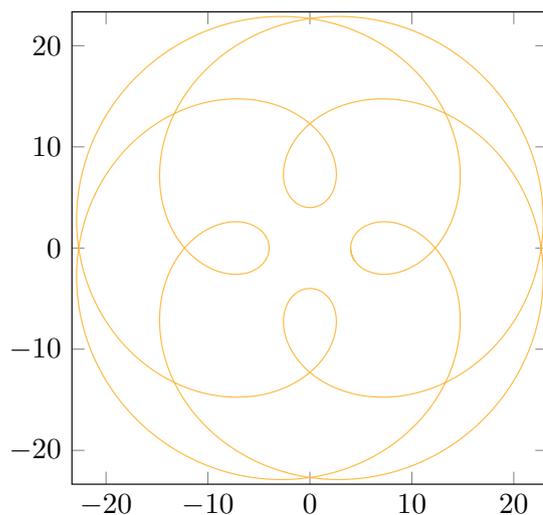
Exemplo 3.4: Considere a epitrocoide $\mathcal{E}[t; 8, 6, 10]$. Pela Proposição 3.1, tem-se

$$\mathcal{E}[t; 8, 6, 10] = \mathcal{E}[t; 2 \cdot 4, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5] = 2 \cdot \mathcal{E}[t; 4, 3, 5],$$

ou seja, a epitrocoide $\mathcal{E}[t; 8, 6, 10]$ tem o mesmo traço da epitrocoide $\mathcal{E}[t; 4, 3, 5]$, porém com o dobro do tamanho, veja a Figura 3.9.



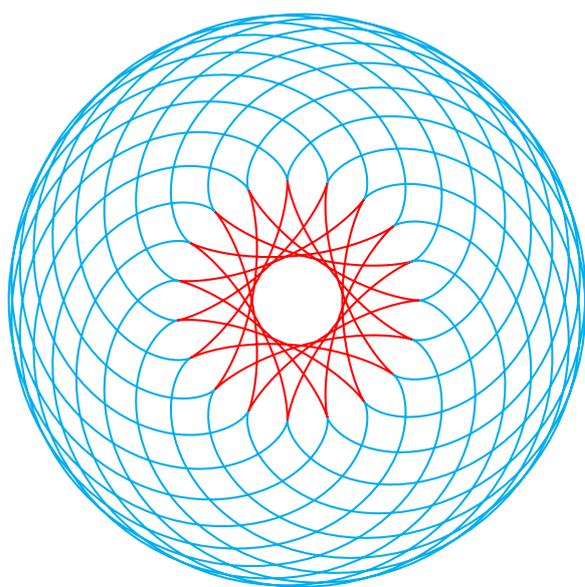
(a) $\mathcal{E}[t; 4, 3, 5]$ com $0 \leq t \leq 6\pi$.



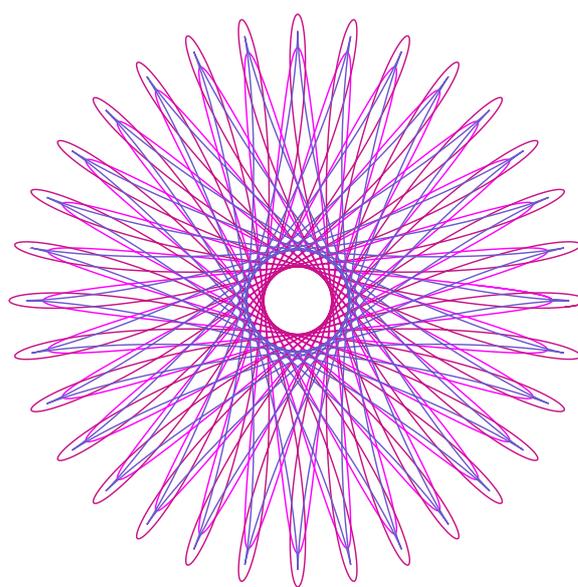
(b) $\mathcal{E}[t; 8, 6, 10]$ com $0 \leq t \leq 6\pi$.

Figura 3.9: Epitrocoides de mesmo traço, porém de tamanhos diferentes

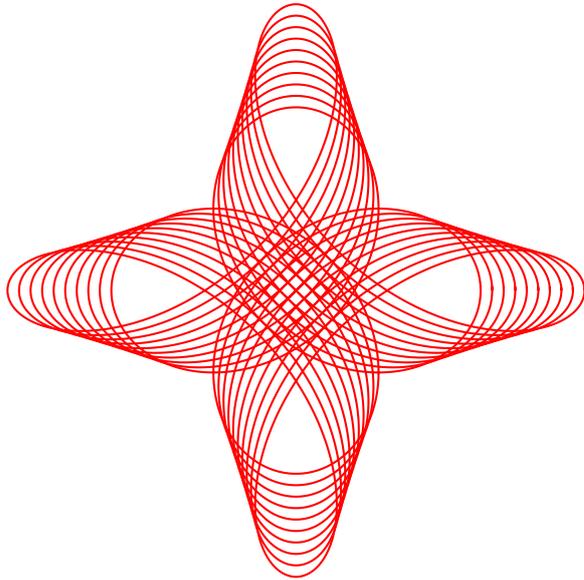
Um grande atrativo do espirógrafo é poder sobrepor diferentes curvas formando novos desenhos mais complexos e muito interessantes, podemos fazer algo similar utilizando as equações paramétricas da hipotrocoide e epitrocoide, veja a Figura 3.10.



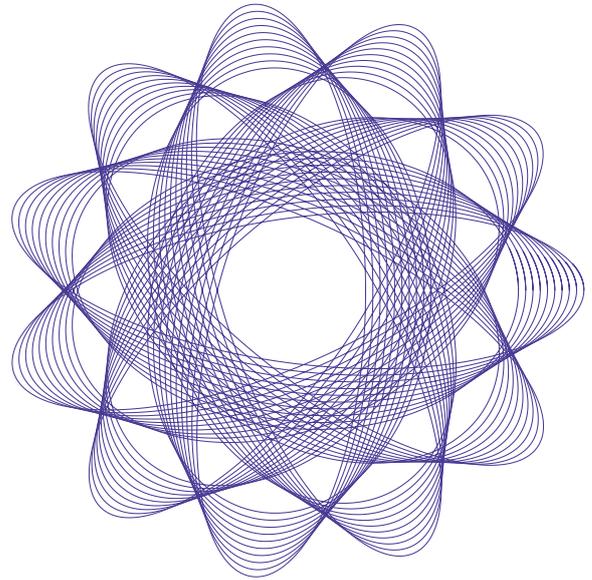
(a) $\mathcal{H}[t; 3.8, 2.6, 2.6]$
 $\mathcal{E}[t; 3.8, 2.6, 2.6]$



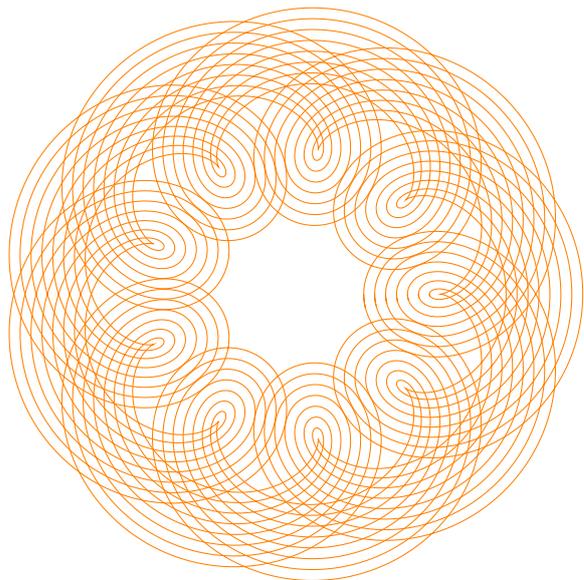
(b) $\mathcal{H}[t; 3.2, 1.5, 1.3]$
 $\mathcal{H}[t; 3.2, 1.3, 1.5]$
 $\mathcal{H}[t; 3.2, 1.3, 1.3]$



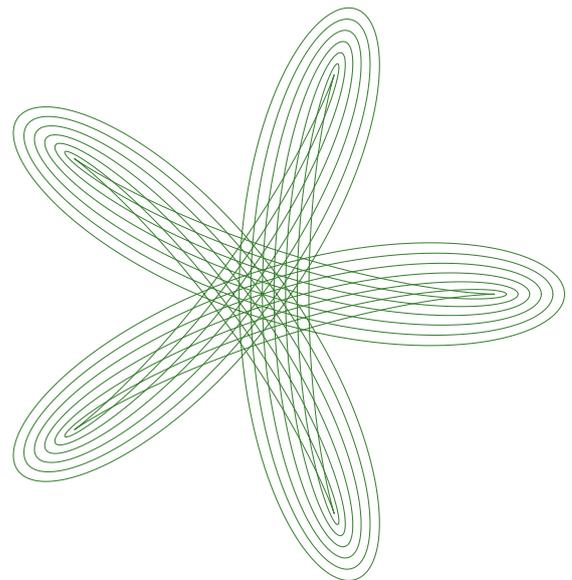
(c) $\mathcal{H} \left[t; 8, 6, 1 + \frac{k}{5} \right]$,
onde $k = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.



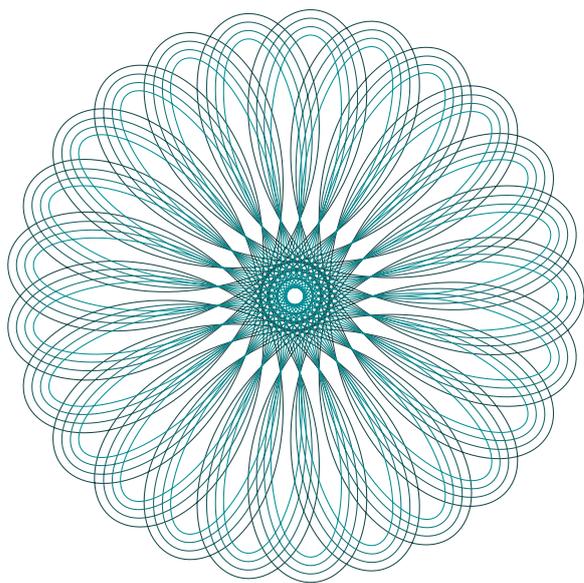
(d) $\mathcal{H} \left[t; 11, 6, 1 + \frac{k}{5} \right]$,
onde $k = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.



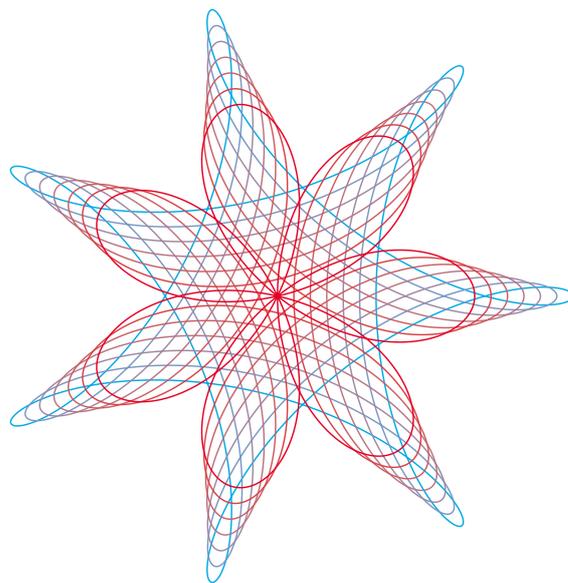
(e) $\mathcal{E} \left[t; \frac{27}{2}, 3, k \right]$,
onde $k = \{3, 4, 5, \dots, 10\}$.



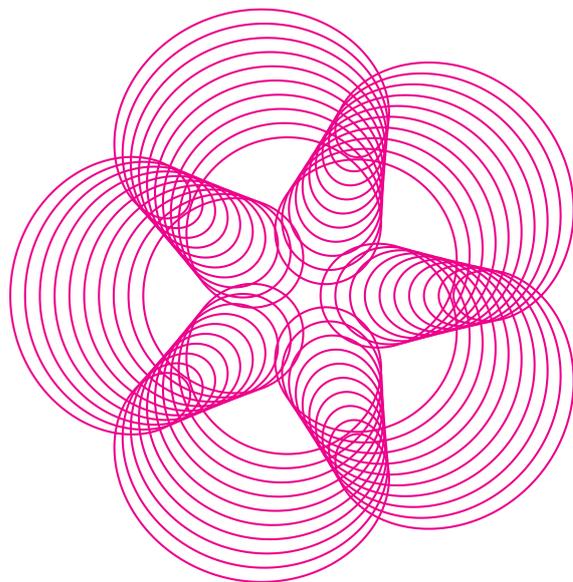
(f) $\mathcal{H} \left[t; 10, 4, 4 + \frac{k}{2} \right]$,
onde $k = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$.



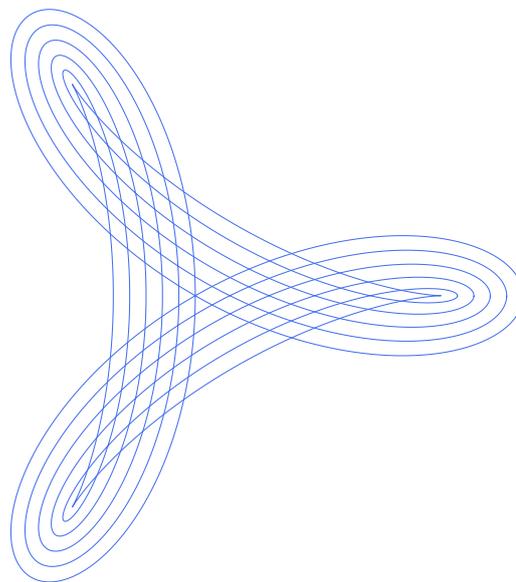
(g) $\mathcal{H} \left[t; 5, 1 + \frac{k}{5}, 3 \right],$
 onde $k = \{1, 2, 3, 4\}.$



(h) $\mathcal{H} \left[t; 4.2, 3, 1 + \frac{k}{5} \right],$
 onde $k = \{1, 2, \dots, 7\}.$



(i) $\mathcal{H} \left[t; 5, 6, 1 + \frac{k}{5} \right],$
 onde $k = \{1, 2, \dots, 10\}.$



(j) $\mathcal{H} \left[t; 3, 1, 1 + \frac{k}{5} \right],$
 onde $k = \{0, 1, 2, \dots, 5\}.$

Figura 3.10: Curvas diversas sobrepostas

Nas subseções a seguir, nosso objetivo será classificar as hipotrocoides e epitrocoides impondo condições sobre R , r e d . Ao fazermos isto ficará claro que dependendo dos valores que os parâmetros fixos assumem, o gráfico gerado corresponde à algumas curvas clássicas, tais como: *circunferência*, *elipse*, *cardioide*, *deltoide*, *nefroide*, *astroide*, *limaçons* e *rosáceas*.

Para tanto, precisaremos recorrer às equações dessas curvas clássicas, ora utilizando equações cartesianas ora utilizando equações polares, pois algumas são mais conhecidas pelas suas equações cartesianas, enquanto outras são mais conhecidas por suas equações polares. Além disso, discutiremos algumas propriedades das hipotrocoides e epitrocoides.

3.3.1 Circunferência

Definição 3.3 (Circunferência): A curva, em coordenadas cartesianas, $x^2 + y^2 = a^2$ é uma circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio a .

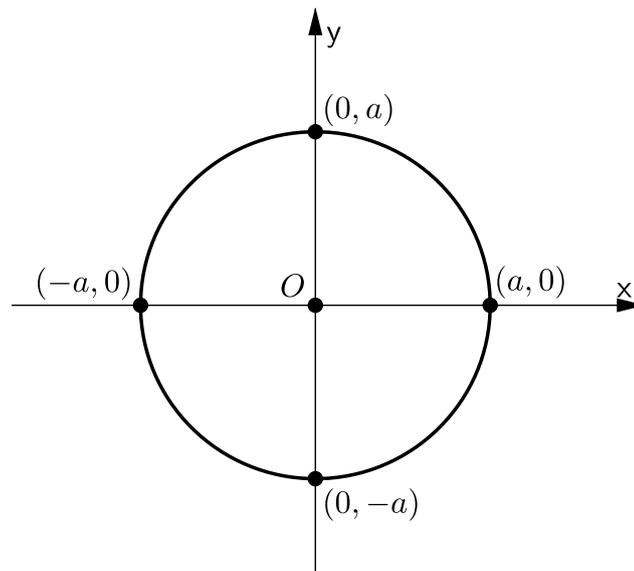


Figura 3.11: A circunferência

Proposição 3.2: Sejam R e r ($R > r$) os raios das circunferências λ_1 (fixa) e λ_2 (rolante), respectivamente. Se $R \neq r$ e $d = 0$, então a hipotrocoide $\mathcal{H}[t, R, r, d]$ descrita pelas equações em (3.4) é uma circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio $R - r$.

Demonstração: Seja $\mathcal{H}[t, R, r, d]$ a hipotrocoide descrita pelas equações em (3.4). Se $d = 0$, então as equações ficam assim

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos t \\ y = (R - r) \sin t. \end{cases} \quad (3.19)$$

Por hipótese $R \neq r$, então $R - r \neq 0$, sendo assim de (3.19), tem-se

$$\begin{cases} \frac{x}{R-r} = \cos t \\ \frac{y}{R-r} = \sin t \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\frac{x}{R-r}\right)^2 = \cos^2 t \\ \left(\frac{y}{R-r}\right)^2 = \sin^2 t \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{(R-r)^2} = \cos^2 t \\ \frac{y^2}{(R-r)^2} = \sin^2 t \end{cases} .$$

Somando membro a membro as últimas equações obtidas, tem-se

$$\frac{x^2}{(R-r)^2} + \frac{y^2}{(R-r)^2} = \sin^2 t + \cos^2 t \iff \frac{x^2}{(R-r)^2} + \frac{y^2}{(R-r)^2} = 1,$$

pois $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ para todo t real. Por fim, multiplicando ambos os membros por $(R-r)^2$, obtemos

$$x^2 + y^2 = (R-r)^2.$$

Isto mostra que a hipotrocoide obtida é uma circunferência de centro $O = (0,0)$ e raio $R-r$.

■

Exemplo 3.5: Pela Proposição 3.2, temos que a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 3, 1, 0]$ é uma circunferência centrada em $O = (0,0)$ e raio 2. A Figura 3.12 mostra o ponto P descrevendo a circunferência.

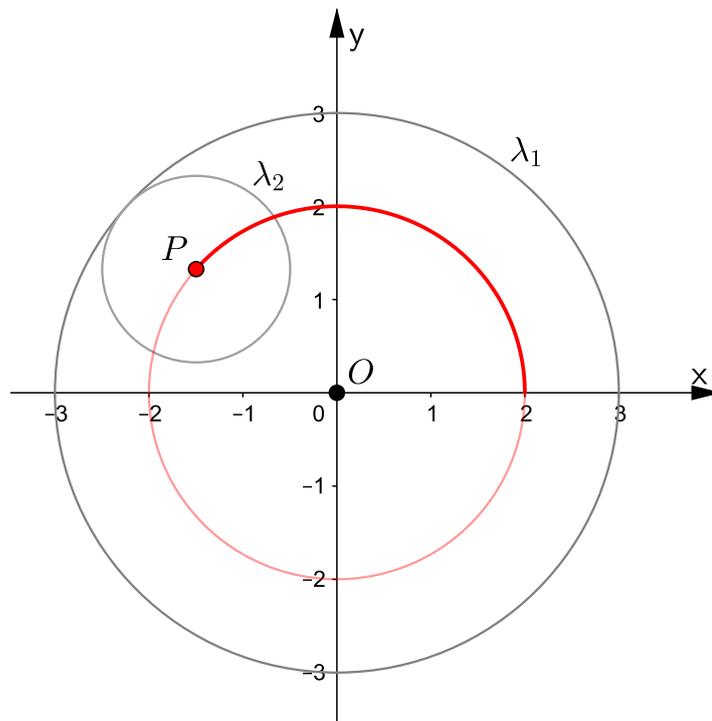


Figura 3.12: Traçado da hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 3, 1, 0]$

Proposição 3.3: *Sejam R e r ($R > r$) os raios das circunferências fixa e rolante, respectivamente. Se $d = 0$, então a epitrocoide $\mathcal{E}[t, R, r, d]$ descrita pelas equações em (3.8) é uma circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio $R + r$.*

A demonstração da Proposição 3.3 é análoga a Proposição 3.2, basta substituir $R - r$ por $R + r$.

Exemplo 3.6: Pela Proposição 3.3 a epitrocoide $\mathcal{E}[t; 2, 1, 0]$ é uma circunferência centrada em $O = (0, 0)$ e raio 3. A Figura 3.13 mostra o ponto P descrevendo a circunferência.

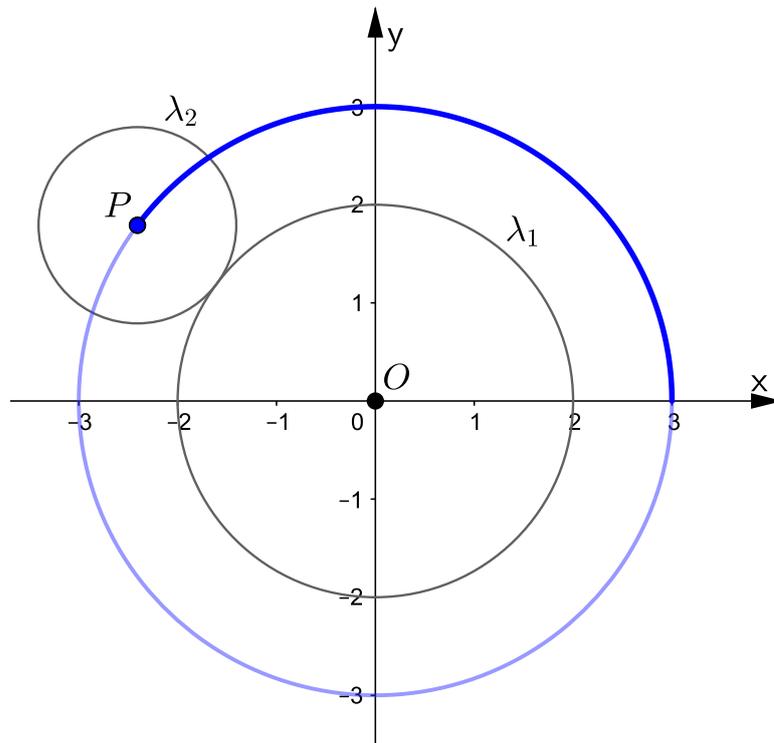


Figura 3.13: Traçado da epitrocoide $\mathcal{E}[t; 2, 1, 0]$.

3.3.2 Elipse

Definição 3.4 (Elipse): *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > b$. A curva, em coordenadas cartesianas,*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é uma elipse de centro $O = (0, 0)$, eixo maior igual $2a$ e eixo menor igual $2b$.

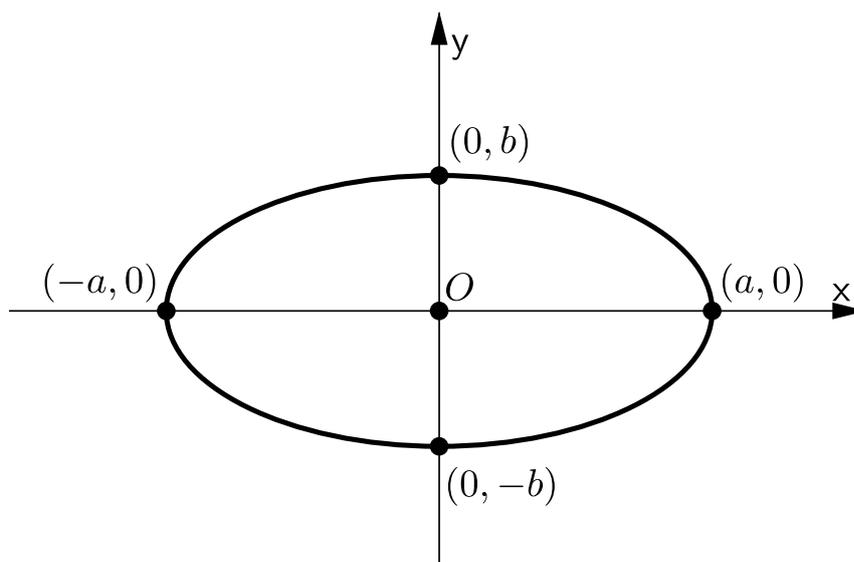


Figura 3.14: A elipse

Proposição 3.4: *Sejam R e r ($R > r$) os raios das circunferências fixa e rolante, respectivamente. Se $R = 2r$, $r \neq d$ e $d > 0$, então a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ descrita pelas equações em (3.4) é uma elipse centrada na origem, eixo maior igual a $2(r + d)$ e eixo menor igual a $2|r - d|$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{H}[t, R, r, d]$ a hipotrocoide descrita pelas equações em (3.4). Se $R = 2r$, então as equações paramétricas ficam assim

$$\begin{cases} x = r \cos t + d \cos t \\ y = r \sin t - d \sin t \end{cases} \iff \begin{cases} x = (r + d) \cos t \\ y = (r - d) \sin t. \end{cases}$$

Como $r \neq d$ por hipótese, então $r - d \neq 0$, logo podemos escrever as últimas equações obtidas, assim

$$\begin{cases} \frac{x}{r + d} = \cos t \\ \frac{y}{r - d} = \sin t \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\frac{x}{r + d}\right)^2 = \cos^2 t \\ \left(\frac{y}{r - d}\right)^2 = \sin^2 t \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{(r + d)^2} = \cos^2 t \\ \frac{y^2}{(r - d)^2} = \sin^2 t. \end{cases}$$

Somando membro a membro as últimas equações obtidas, tem-se

$$\frac{x^2}{(r + d)^2} + \frac{y^2}{(r - d)^2} = \sin^2 t + \cos^2 t,$$

como $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ para todo t real, então

$$\frac{x^2}{(r+d)^2} + \frac{y^2}{(r-d)^2} = 1.$$

Isto mostra que a hipotrocoide obtida é uma elipse de centro $O = (0, 0)$, eixo maior igual a $2(r+d)$ e eixo menor igual a $2|r-d|$. ■

Exemplo 3.7: Pela Proposição 3.4, temos que a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 4, 2, 1]$ é uma elipse de centro $O = (0, 0)$, eixo maior igual a $2(2+1) = 6$ e eixo menor igual a $2|2-1| = 2$, veja a Figura 3.15.

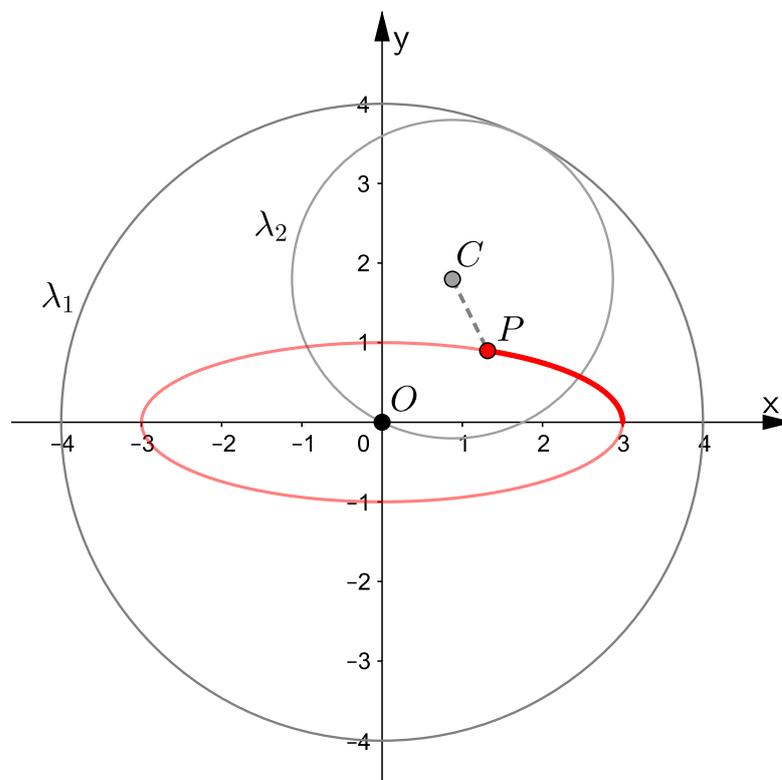


Figura 3.15: Traçado da hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 4, 2, 1]$

3.3.3 Hipocicloides e epicloides

Definição 3.5 (Hipocicloides e epicloides): *Uma hipocicloide é uma hipotrocoide quando o ponto gerador P pertence a circunferência rolante, ou seja, quando $d = r$. Utilizaremos a notação $\mathcal{H}[t; R, r]$ para representar uma hipocicloide, cujas as equações*

paramétricas são:

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + r \cos \left(\frac{R - r}{r} t \right) \\ y(t) = (R - r) \sin t - r \sin \left(\frac{R - r}{r} t \right) \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad (3.20)$$

Analogamente, uma epicloide é uma epitrocoide quando o ponto gerador P pertence a circunferência rolante, ou seja, quando $d = r$. Utilizaremos a notação $\mathcal{E}[t; R, r]$ para representar uma epicloide, cujas as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x(t) = (R + r) \cos t - r \cos \left(\frac{R + r}{r} t \right) \\ y(t) = (R + r) \sin t - r \sin \left(\frac{R + r}{r} t \right) \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

As Figuras 3.7a, 3.7c e 3.7i são exemplos de hipocicloides, já as Figuras 3.8a, 3.8d e 3.8e são exemplos de epicloides. Observe que essas figuras tem em comum uma aparência “pontaguda”, essas “pontas” são chamadas de **cúspides** e elas ocorrem toda vez que o ponto gerador P toca na circunferência fixa. O teorema, a seguir, nos permitirá determinar a quantidade de cúspides em uma hipocicloide ou em uma epicloide.

Teorema 3.3 (Número de cúspides): *Seja $\mathcal{H}[t; R, r]$ a hipocicloide descrita pelas equações (3.20) e que é traçada por um ponto fixo P pertencente a circunferência λ_2 rolando internamente na circunferência fixa λ_1 .*

*Se $\frac{R}{r} = \frac{p}{q}$ e o $\text{mdc}(p, q) = 1$, então a hipocicloide (ou epicloide) intersecta a circunferência fixa λ_1 exatamente p vezes. Essas interseções são chamadas de **cúspides** da hipocicloide.*

Demonstração: Para determinar o conjunto das coordenadas de P que seja a interseção da hipocicloide $\mathcal{H}[t; R, r]$ com a circunferência fixa λ_1 , temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos t + r \cos \left(\frac{R - r}{r} t \right) \\ y = (R - r) \sin t - r \sin \left(\frac{R - r}{r} t \right) \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \quad (3.22)$$

Substituindo as duas primeiras equações na terceira obtemos

$$\begin{aligned} & \left[(R-r) \cos t + r \cos \left(\frac{R-r}{r} t \right) \right]^2 + \left[(R-r) \sin t - r \sin \left(\frac{R-r}{r} t \right) \right]^2 = R^2 \\ & (R-r)^2 \cos^2 t + 2 \cdot (R-r) \cos t \cdot r \cos \left(\frac{R-r}{r} t \right) + r^2 \cos^2 \left(\frac{R-r}{r} t \right) + \\ & + (R-r)^2 \sin^2 t - 2 \cdot (R-r) \sin t \cdot r \sin \left(\frac{R-r}{r} t \right) + r^2 \sin^2 \left(\frac{R-r}{r} t \right) = R^2 \\ & (R-r)^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + 2r(R-r) \left[\cos t \cdot \cos \left(\frac{R-r}{r} t \right) - \sin t \cdot \sin \left(\frac{R-r}{r} t \right) \right] + \\ & + r^2 \left[\sin^2 \left(\frac{R-r}{r} t \right) + \cos^2 \left(\frac{R-r}{r} t \right) \right] = R^2, \end{aligned}$$

como $\sin^2(w) + \cos^2(w) = 1$ para todo $w \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} & (R-r)^2 + 2r(R-r) \left[\cos t \cdot \cos \left(\frac{R-r}{r} t \right) - \sin t \cdot \sin \left(\frac{R-r}{r} t \right) \right] + r^2 = R^2 \\ & (R-r)^2 + 2r(R-r) \left[\cos t \cdot \cos \left(\frac{R-r}{r} t \right) - \sin t \cdot \sin \left(\frac{R-r}{r} t \right) \right] = R^2 - r^2 \\ & (R-r)^2 + 2r(R-r) \left[\cos t \cdot \cos \left(\frac{R-r}{r} t \right) - \sin t \cdot \sin \left(\frac{R-r}{r} t \right) \right] = (R-r) \cdot (R+r) \end{aligned}$$

Como $R-r > 0$, então dividindo a última equação por $R-r$, tem-se

$$\begin{aligned} & R-r + 2r \left[\cos t \cdot \cos \left(\frac{R-r}{r} t \right) - \sin t \cdot \sin \left(\frac{R-r}{r} t \right) \right] = R+r \\ & 2r \left[\cos t \cdot \cos \left(\frac{R-r}{r} t \right) - \sin t \cdot \sin \left(\frac{R-r}{r} t \right) \right] = 2r \\ & \cos t \cdot \cos \left(\frac{R-r}{r} t \right) - \sin t \cdot \sin \left(\frac{R-r}{r} t \right) = 1 \end{aligned}$$

Usando a fórmula do cosseno da soma, temos que

$$\cos \left(t + \frac{R-r}{r} t \right) = 1$$

Sendo assim,

$$t + \frac{R-r}{r} t = 2\pi n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Da última equação, temos ainda,

$$t \left(1 + \frac{R-r}{r} \right) = 2\pi n$$

$$t \left(1 + \frac{R}{r} - 1 \right) = 2\pi n$$

$$t \frac{R}{r} = 2\pi n$$

$$t = \frac{r}{R} \cdot 2\pi n.$$

Por hipótese $\frac{R}{r} = \frac{p}{q}$, logo

$$t = \frac{q}{p} \cdot 2\pi n.$$

Agora, substituindo o valor t nas duas primeiras equações do sistema (3.22) e, como $\frac{R}{r} = \frac{p}{q}$, com o $\text{mdc}(p, q) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= (R-r) \cos \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right) + r \cos \left(\frac{p-q}{q} \cdot \frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right) \\ &= (R-r) \cos \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right) + r \cos \left(\frac{p-q}{p} \cdot 2\pi n \right) \\ &= (R-r) \cos \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right) + r \cos \left(- \left(-\frac{p}{p} + \frac{q}{p} \right) \cdot 2\pi n \right) \\ &= (R-r) \cos \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right) + r \cos \left(\left(-1 + \frac{q}{p} \right) \cdot 2\pi n \right) \\ &= (R-r) \cos \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right) + r \cos \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n - 2\pi n \right) \\ &= R \cos \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right) - r \cos \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right) + r \cos \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right) \\ &= R \cos \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right) \end{aligned}$$

Analogamente, podemos mostrar que $y = R \operatorname{sen} \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right)$.

Portanto, os pontos de interseção são da forma

$$P = \left(R \cos \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right), R \operatorname{sen} \left(\frac{q}{p} \cdot 2\pi n \right) \right) \quad (3.23)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, e ficam distribuídos em p espaços uniformes em torno da circunferência

fixa λ_1 , mostrando assim, que a hipocicloide possui p cúspides. ■

Exemplo 3.8: Considere a hipocicloide $\mathcal{H}[t; 6, 5]$, então pelo Teorema 3.3 o número de cúspides é igual a 6, e por (3.23) suas coordenadas são da forma

$$P = \left(6 \cos \left(\frac{5}{6} \cdot 2\pi n \right), 6 \sin \left(\frac{5}{6} \cdot 2\pi n \right) \right) = \left(6 \cos \left(\frac{5\pi}{3} \cdot n \right), 6 \sin \left(\frac{5\pi}{3} \cdot n \right) \right),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. A Figura 3.16 mostra a hipocicloide $\mathcal{H}[t; 6, 5]$ formando os pontos de cúspides (pontos em azul), enquanto está sendo traçada pelo ponto fixo P pertencente a circunferência rolante λ_2 que gira interiormente na circunferência fixa λ_1 .

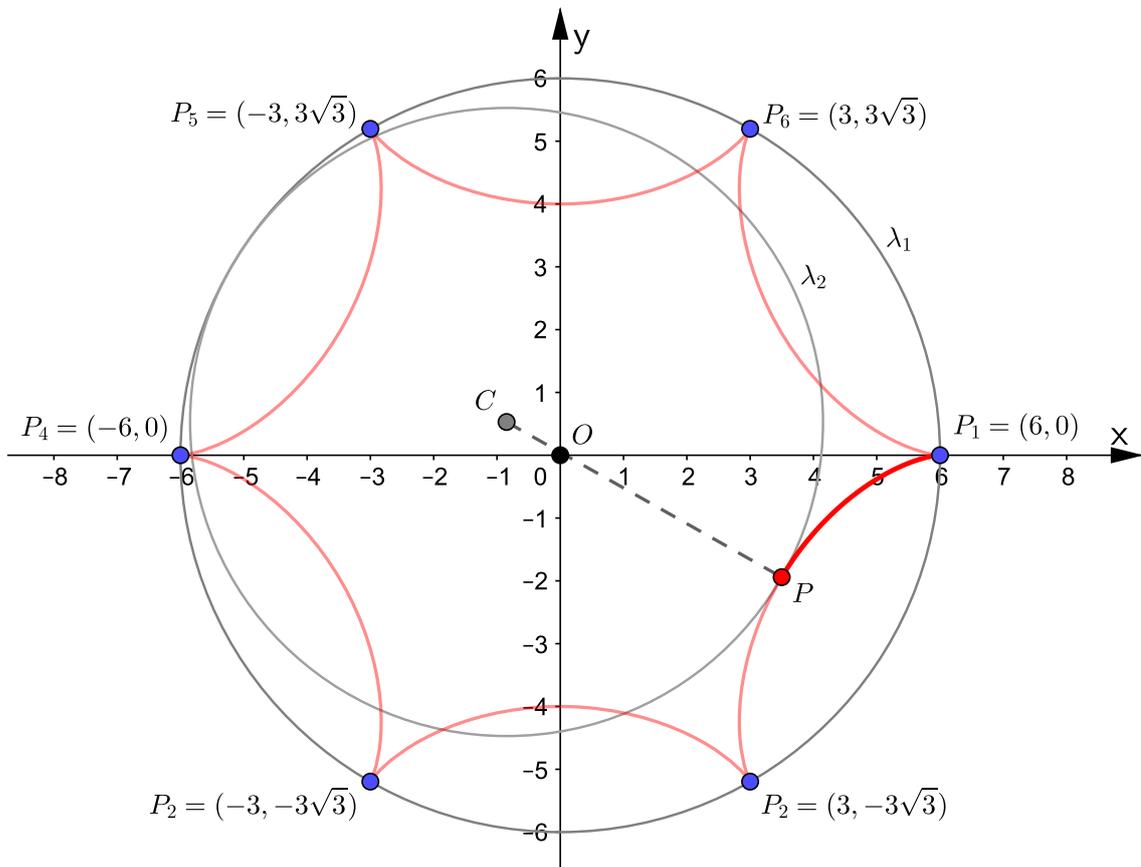


Figura 3.16: Cúspides da hipocicloide $\mathcal{H}[t; 6, 5]$

Hipocicloides degeneradas

Não existem hipocicloides de 1 ou 2 cúspides. Se $R = 2r$, significando que $\frac{R}{r} = \frac{2}{1}$, então $R - r = r$. Sendo assim, por (3.20) as equações paramétricas da hipocicloide são

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t + r \cos\left(\frac{r}{r}t\right) = r \cos t + r \cos t = 2r \cos t \\ y(t) = r \sin t - r \sin\left(\frac{r}{r}t\right) = r \sin t - r \sin t = 0. \end{cases}$$

Isto significa que o ponto P traça ao longo do eixo x um **segmento de reta** de extremidades $(-2r, 0) = (-R, 0)$ e $(2r, 0) = (R, 0)$, pois o valor mínimo de $\cos t$ é -1 e o valor máximo é 1 , para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.9: Considere a hipocicloide $\mathcal{H}[t; 4, 2]$, como $4 = R = 2r = 2 \cdot 2$, então pelo que acabamos de descrever o seu traço é um segmento de reta sobre o eixo x de extremidades $(-4, 0)$ e $(4, 0)$, veja a Figura 3.17 que ilustra essa situação.

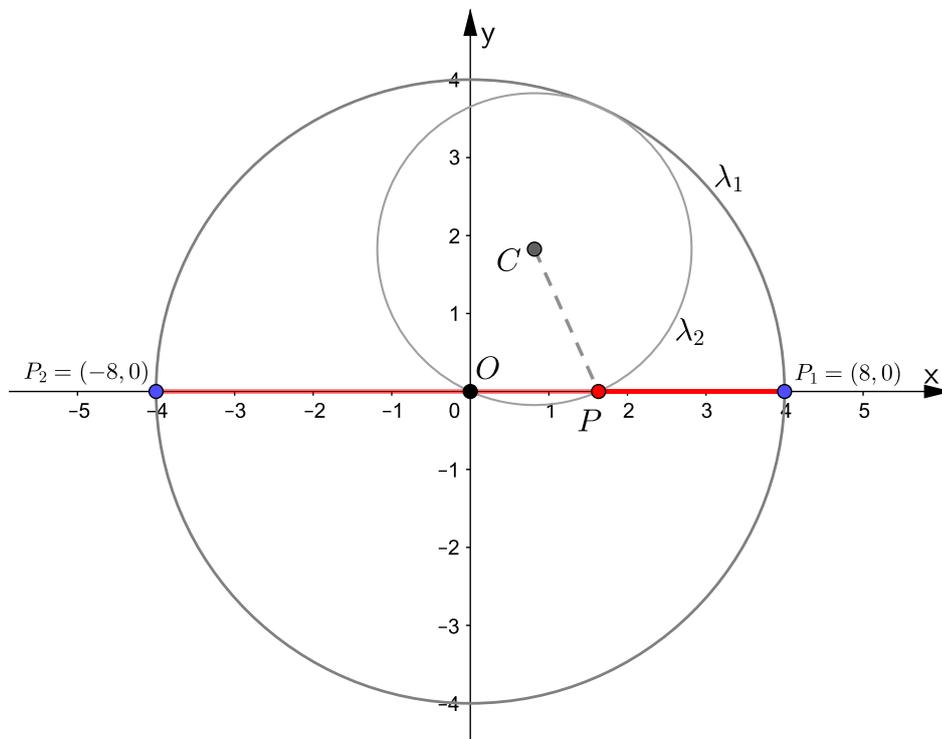


Figura 3.17: Traçado da hipocicloide $\mathcal{H}[t; 4, 2]$

Por outro lado, se $R = r$ significando que $\frac{R}{r} = 1$, então $R - r = 0$. Sendo assim, por (3.20) as equações paramétricas da hipocicloide são

$$\begin{cases} x(t) = 0 \cos t + r \cos\left(\frac{0}{r}t\right) = r \cos 0 = r \\ y(t) = 0 \sin t - r \sin\left(\frac{0}{r}t\right) = -r \sin 0 = 0. \end{cases}$$

Isto significa que o traço da hipocicloide é um **ponto** de coordenadas $P = (r, 0)$.

Exemplo 3.10: Considere a hipocicloide $\mathcal{H}[t; 1, 1]$, como $R = r = 1$, então o seu traço é um ponto cuja coordenada é $P(1, 0)$.

Estes dois últimos casos de hipocicloides que acabamos de ver são chamadas de **hipocicloides degeneradas**.

3.3.4 Deltoide

Definição 3.6: A curva, em coordenadas cartesianas,

$$(x^2 + y^2)^2 + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 8a(x^3 - 3xy^2)$$

com $a > 0$ é uma deltoide.

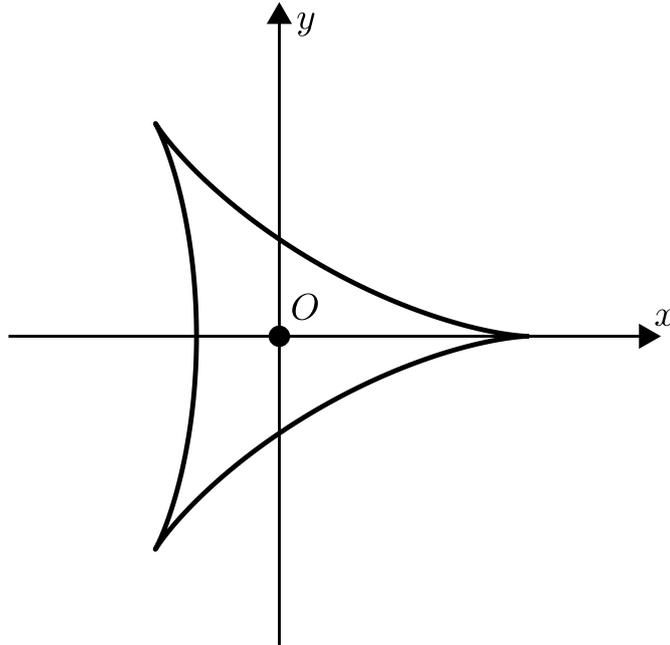


Figura 3.18: A deltoide

Proposição 3.5: Sejam R e r ($R > r$) os raios das circunferências fixa e rolante, respectivamente. Se $R = 3r$, então a hipocicloide $\mathcal{H}[t; R, r]$ descrita pelas equações em (3.20) é uma deltoide.

Demonstração: Seja $\mathcal{H}[t; R, r]$ a hipocicloide descrita pelas equações (3.20). Se $R = 3r$, então as equações paramétricas ficam assim:

$$\begin{cases} x = 2r \cos t + r \cos(2t) \\ y = 2r \sin t - r \sin(2t). \end{cases} \quad (3.24)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de cada função componente e somando-as membro a membro, temos

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= (2r \cos t + r \cos(2t))^2 + (2r \sin t - r \sin(2t))^2 \\
 &= 4r^2 \cos^2 t + 4r^2 \cos t \cos(2t) + r^2 \cos^2(2t) + 4r^2 \sin^2 t - 4r^2 \sin t \sin(2t) + \\
 &\quad + r^2 \sin^2(2t) \\
 &= 4r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + r^2(\sin^2(2t) + \cos^2(2t)) + 4r^2(\cos t \cos(2t) + \\
 &\quad - \sin t \sin(2t)) \\
 &= 4r^2 + r^2 + 4r^2 \cos(3t) \\
 &= 5r^2 + 4r^2 \cos(3t),
 \end{aligned}$$

daí, segue que

$$x^2 + y^2 - 5r^2 = 4r^2 \cos(3t). \quad (3.25)$$

Agora usando o cosseno da soma e do arco duplo, temos

$$\begin{aligned}
 \cos(3t) &= \cos(t + 2t) \\
 &= \cos t \cos(2t) - \sin t \sin(2t) \\
 &= \cos t(2 \cos^2 t - 1) - \sin t(2 \sin t \cos t) \\
 &= 2 \cos^3 t - \cos t - 2 \sin^2 t \cos t \\
 &= 2 \cos^3 t - \cos t - 2 \cos t(1 - \cos^2 t) \\
 &= 2 \cos^3 t - \cos t - 2 \cos t + 2 \cos^3 t \\
 &= 4 \cos^3 t - 3 \cos t,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos(3t) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.26) em (3.25), tem-se

$$x^2 + y^2 - 5r^2 = 4r^2 (4 \cos^3 t - 3 \cos t)$$

se, e somente se,

$$x^2 + y^2 - 5r^2 = 16r^2 \cos^3 t - 12r^2 \cos t. \quad (3.27)$$

Agora de $x = 2r \cos t + r \cos(2t)$, temos que

$$\begin{aligned}
 x &= 2r \cos t + r(2 \cos^2 t - 1) \\
 x &= r(2 \cos^2 t + 2 \cos t - 1) \\
 \frac{x}{r} &= 2 \cos^2 t + 2 \cos t - 1 \\
 \frac{x}{r} + 1 &= 2 \cos^2 t + 2 \cos t \\
 \frac{x}{2r} + \frac{1}{2} &= \cos^2 t + \cos t \\
 \frac{x}{2r} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \cos^2 t + \cos t + \frac{1}{4} \\
 \frac{x}{2r} + \frac{3}{4} &= \left(\cos t + \frac{1}{2} \right)^2 \\
 \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} &= \sqrt{\left(\cos t + \frac{1}{2} \right)^2} \\
 \pm \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} &= \cos t + \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos t = \pm \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \quad (3.28)$$

Vamos agora substituir (3.28) em (3.27), no entanto faremos a conta utilizando a raiz positiva, para a raiz negativa é análogo, logo

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 5r^2 &= 16r^2 \left(\sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \right)^3 - 12r^2 \left(\sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \right) \\
 x^2 + y^2 - 5r^2 &= 16r^2 \left[\left(\sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} \right)^3 + 3 \left(\sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} \right)^2 \left(-\frac{1}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 3 \left(\sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right] + \\
 &\quad -12r^2 \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} + 6r^2
 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - 5r^2 - 6r^2 = 16r^2 \left[\left(\frac{x}{2r} + \frac{3}{4} \right) \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{2r} + \frac{3}{4} \right) + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} + \frac{1}{8} \right] + -12r^2 \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}}$$

$$x^2 + y^2 - 11r^2 = 16r^2 \left(\frac{x}{2r} + \frac{3}{4} \right) \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} - 24r^2 \left(\frac{x}{2r} + \frac{3}{4} \right) + 12r^2 \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} - 2r^2 - 12r^2 \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}}$$

$$x^2 + y^2 - 11r^2 + 2r^2 = 16r^2 \left(\frac{x}{2r} + \frac{3}{4} \right) \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} - 12rx - 18r^2$$

$$x^2 + y^2 - 9r^2 + 12rx + 18r^2 = (8rx + 12r^2) \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}}$$

$$x^2 + 12rx + y^2 + 9r^2 = (8rx + 12r^2) \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}}$$

elevando ao quadrado ambos os membros da última equação obtida, segue que

$$(x^2 + 12rx + y^2 + 9r^2)^2 = \left((8rx + 12r^2) \sqrt{\frac{x}{2r} + \frac{3}{4}} \right)^2$$

$$81r^4 + 216r^3x + 162r^2x^2 + 18r^2y^2 + 24rx^3 + 24rxy^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (8rx + 12r^2)^2 \left(\frac{x}{2r} + \frac{3}{4} \right)$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 18r^2y^2 + 18r^2x^2 + 144r^2x^2 + 81r^4 + 216r^3x + 24rx^3 + 24rxy^2 = (144r^4 + 192r^3x + 64r^2x^2) \left(\frac{x}{2r} + \frac{3}{4} \right)$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 18r^2(x^2 + y^2) + 81r^4 + 144r^2x^2 + 216r^3x + 24rx^3 + 24rxy^2 = + 72r^3x + 108r^4 + 96r^2x^2 + 144r^3x + 32rx^3 + 48r^2x^2$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 18r^2(x^2 + y^2) + 81r^4 - 108r^4 = -144r^2x^2 + 144r^2x^2 + -216r^3x + 216r^3x - 24rx^3 + 32rx^3 - 24rxy^2$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 18r^2(x^2 + y^2) - 27r^4 = 8rx^3 - 24rxy^2$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 18r^2(x^2 + y^2) - 27r^4 = 8r(x^3 - 3xy^2)$$

Fazendo $r = a$, segue que

$$(x^2 + y^2)^2 + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 8a(x^3 - 3xy^2).$$

Isto mostra que a equação cartesiana da hipocicloide obtida é uma deltoide. ■

Exemplo 3.11: Pela Proposição 3.5 a hipocicloide $\mathcal{H}[t; 3, 1]$ é uma deltoide e o Teorema 3.3 garante que qualquer deltoide terá 3 cúspides, pois $\frac{R}{r} = \frac{3r}{r} = 3$. Por (3.23) os pontos de cúspides da hipocicloide $\mathcal{H}[t; 3, 1]$ serão $P_1 = (3, 0)$, $P_2 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ e $P_3 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, veja a Figura 3.19.

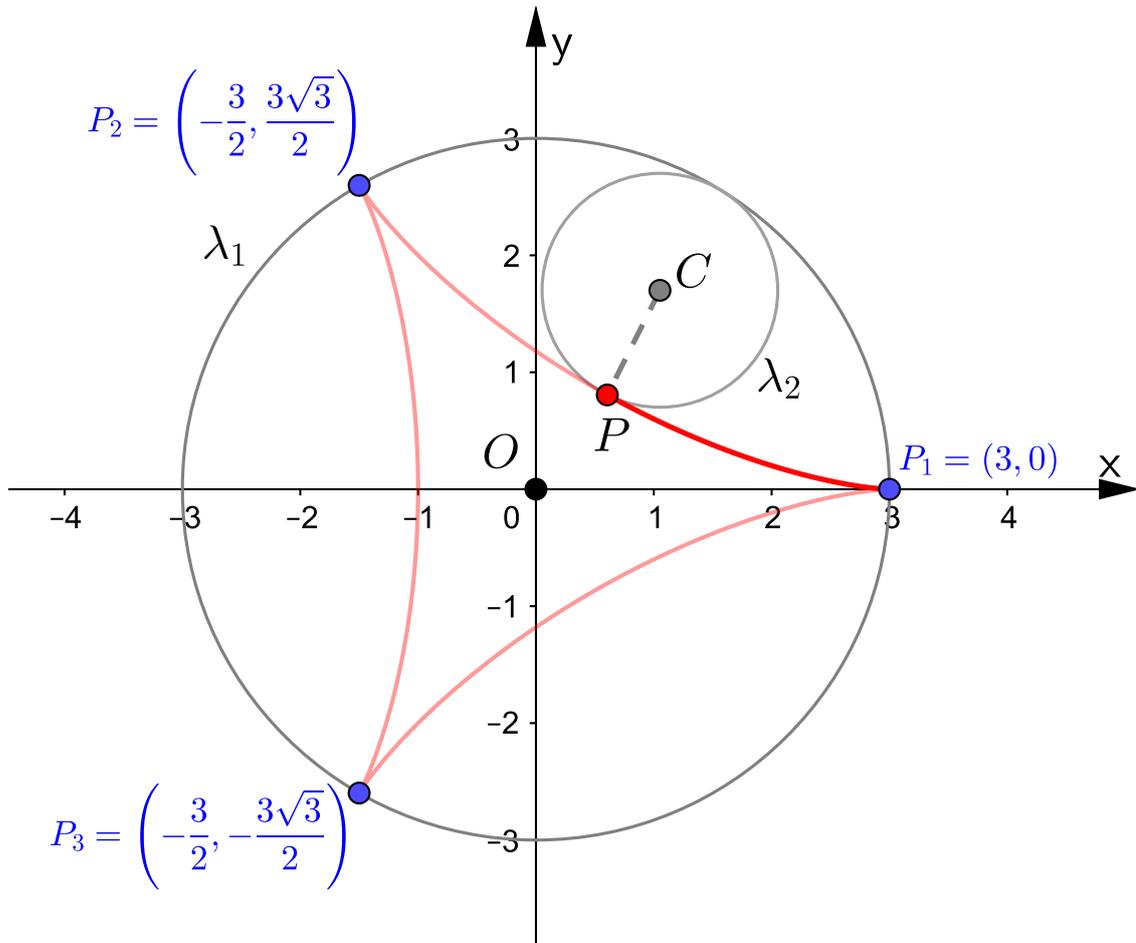


Figura 3.19: Traçado da hipocicloide $\mathcal{H}[t; 3, 1]$.

3.3.5 Astroide

Definição 3.7 (Astroide): A curva, em coordenadas cartesianas, $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ com $a > 0$ é uma astroide.

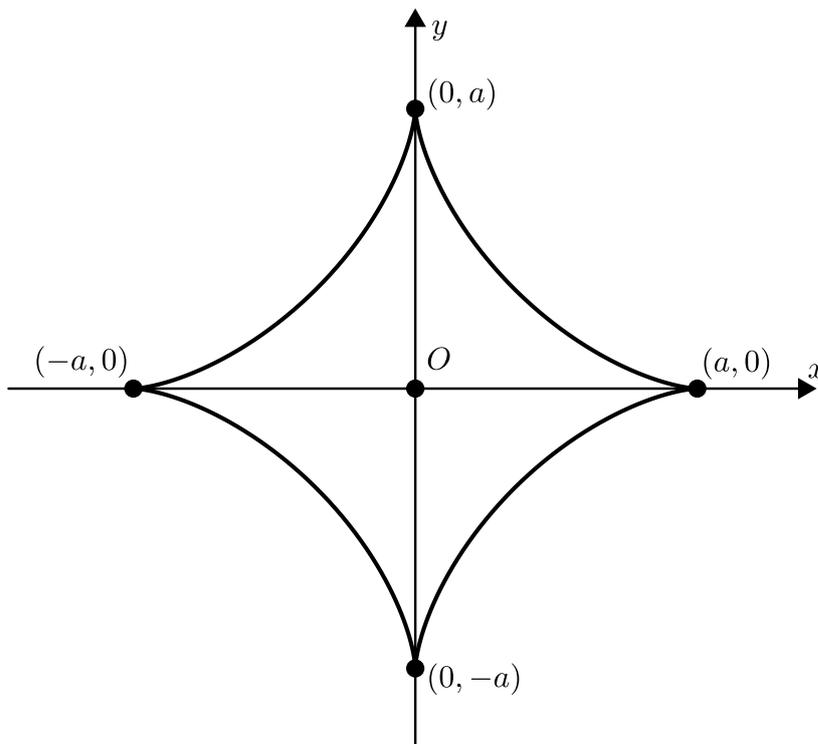


Figura 3.20: A astroide

Proposição 3.6: Sejam R e r ($R > r$) os raios das circunferências fixa e rolante, respectivamente. Se $R = 4r$, então a hipocicloide $\mathcal{H}[t; R, r]$ descrita pelas equações em (3.20) é uma astroide.

Demonstração: Seja $\mathcal{H}[t; R, r]$ a hipocicloide descrita pelas equações (3.20). Se $R = 4r$, então as equações paramétricas ficam assim:

$$\begin{cases} x = 3r \cos t + r \cos(3t) \\ y = 3r \sin t - r \sin(3t). \end{cases} \quad (3.29)$$

De (3.26), sabemos que

$$\cos(3t) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Agora, utilizando as fórmulas da trigonometria *seno da soma e seno do arco duplo*, tem-se

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(3t) &= \operatorname{sen}(t + 2t) \\
 &= \operatorname{sen} t \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) \cos t \\
 &= \operatorname{sen} t(1 - 2\operatorname{sen}^2 t) + (2\operatorname{sen} t \cos t) \cos t \\
 &= \operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen}^3 t + 2\operatorname{sen} t \cos^2 t \\
 &= \operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen}^3 t + 2\operatorname{sen} t(1 - \operatorname{sen}^2 t) \\
 &= \operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen}^3 t + 2\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen}^3 t \\
 &= 3\operatorname{sen} t - 4\operatorname{sen}^3 t,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}(3t) = 3\operatorname{sen} t - 4\operatorname{sen}^3 t \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (3.30)$$

Substituindo os valores de $\cos(3t)$ e $\operatorname{sen}(3t)$ em 3.29, temos que

$$\begin{cases} x = 3r \cos t + r(4\cos^3 t - 3\cos t) \\ y = 3r \operatorname{sen} t - r(3\operatorname{sen} t - 4\operatorname{sen}^3 t) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4r \cos^3 t \\ y = 4r \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x}{4r} = \cos^3 t \\ \frac{y}{4r} = \operatorname{sen}^3 t \end{cases}.$$

Elevando ambos os membros a $2/3$ e somando as últimas equações obtidas membro a membro, temos

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x}{4r}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{4r}\right)^{2/3} &= (\operatorname{sen}^3 t)^{2/3} + (\cos^3 t)^{2/3} \\
 \frac{x^{2/3}}{(4r)^{2/3}} + \frac{y^{2/3}}{(4r)^{2/3}} &= \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t \\
 \frac{x^{2/3}}{(4r)^{2/3}} + \frac{y^{2/3}}{(4r)^{2/3}} &= 1 \\
 x^{2/3} + y^{2/3} &= (4r)^{2/3},
 \end{aligned}$$

como $R = 4r$, segue que

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}. \quad (3.31)$$

Mostrando assim que a equação cartesiana da hipocicloide obtida é uma astroide. ■

Pelo Teorema 3.3 sabemos que a astroide terá 4 pontos de cúspides, pois $\frac{R}{r} = \frac{4r}{r} = 4$ e fazendo uma comparação com a definição dada de astroide com a equação obtida em (3.31), então os pontos de cúspides serão $(R, 0)$, $(-R, 0)$, $(0, R)$ e $(0, -R)$.

Exemplo 3.12: Pela Proposição 3.6 a hipocicloide $\mathcal{H}[t; 4, 1]$ é uma astroide, cujo os pontos de cúspides são $P_1 = (4, 0)$, $P_2 = (0, 4)$, $P_3 = (-4, 0)$ e $P_4 = (0, -4)$, veja a Figura 3.21.

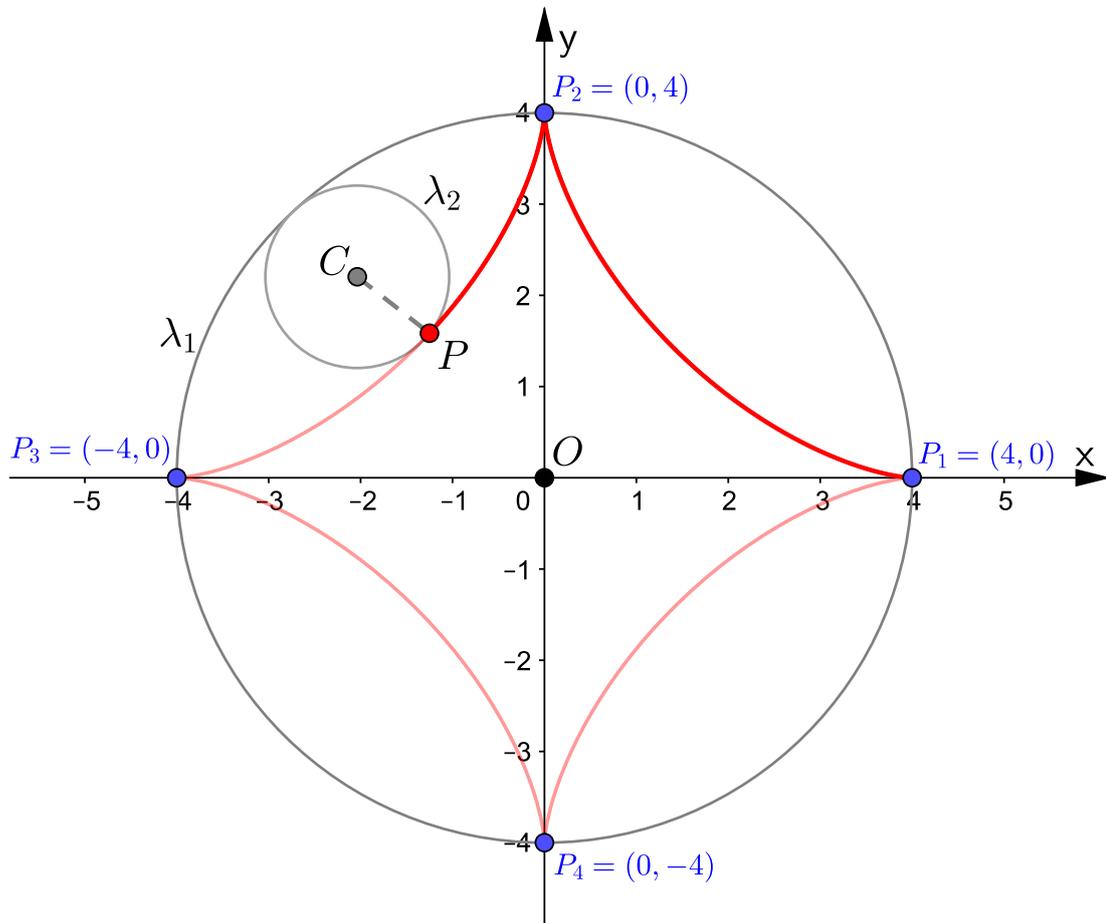


Figura 3.21: Traçado da hipocicloide $\mathcal{H}[t; 4, 1]$

Apesar de não existirem hipocicloides de 1 ou 2 cúspides, existem epicicloides de 1 ou 2 cúspides vejamos-as a seguir.

3.3.6 Cardioide

Definição 3.8 (Cardioide): A curva, em coordenadas polares, $\rho = a(1 - \cos \theta)$ com $a > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, chama-se cardioide.

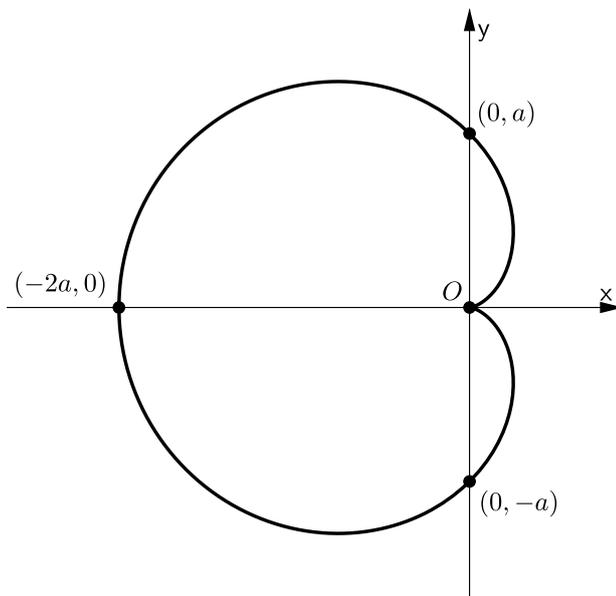


Figura 3.22: A cardioide

Proposição 3.7: Sejam R e r os raios das circunferências fixa e rolante, respectivamente. Se $R = r$, então a epicicloide $\mathcal{E}[t; R, r]$ descrita pelas equações em (3.21) é uma cardioide.

Demonstração: Seja $\mathcal{E}[t; R, r]$ a epicicloide descrita pelas equações (3.21). Se $R = r$, então as equações paramétricas ficam assim:

$$\begin{cases} x = 2r \cos t - r \cos(2t) \\ y = 2r \sin t - r \sin(2t) \end{cases} \quad (3.32)$$

Antes de prosseguirmos, observe que na definição de cardioide o ponto de cúspide é $O = (0, 0)$. Por outro lado, considerando a epicicloide $\mathcal{E}[t; R, r]$ com $R = r$ o seu ponto de cúspide segundo (3.23) é dado por

$$P = (r \cos(2\pi n), r \sin(2\pi n)) = (r, 0)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, sendo assim, para mostrarmos que a equação da epicicloide $\mathcal{E}[t; R, r]$ com $R = r$ é igual a equação polar da cardioide dada na definição, precisaremos efetuar uma translação horizontal do gráfico da epicicloide para que seu ponto de cúspide seja $O = (0, 0)$, para fazermos isso basta subtrair r no segundo membro da função componente x em (3.32), isto é,

$$\begin{cases} x = 2r \cos t - r \cos(2t) - r \\ y = 2r \sin t - r \sin(2t) \end{cases}.$$

Agora, utilizando as fórmulas trigonométricas do arco duplo, segue que

$$\begin{cases} x = 2r \cos t - r(2 \cos^2 t - 1) - r \\ y = 2r \sin t - r(2 \sin t \cos t) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2r(1 - \cos t) \cos t \\ y = 2r(1 - \cos t) \sin t \end{cases}.$$

Usando a equação de transformação $\rho^2 = x^2 + y^2$, temos

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (2r(1 - \cos t) \cos t)^2 + (2r(1 - \cos t) \sin t)^2 \\ \rho^2 &= (2r(1 - \cos t))^2 \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ \rho^2 &= (2r(1 - \cos t) \cos t)^2 \\ \rho &= 2r(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Por fim, fazendo $a = 2r$ e $t = \theta$, segue que $\rho = a(1 - \cos \theta)$, mostrando assim, que a equação polar da epicloide obtida é uma cardioide. ■

Exemplo 3.13: Pela Proposição 3.7 a epicloide $\mathcal{E}[t; 1, 1]$ é uma cardioide com cúspide em $P_1 = (1, 0)$, veja a Figura 3.23.

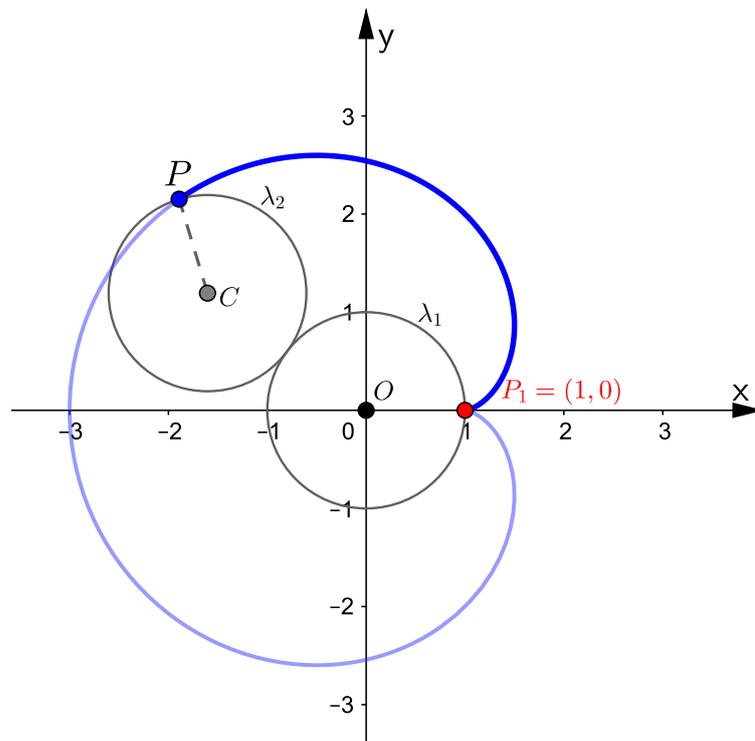


Figura 3.23: Traçado da epicloide $\mathcal{E}[t; 1, 1]$

3.3.7 Nefroide

Definição 3.9 (Nefroide): A curva, em coordenadas cartesianas,

$$(x^2 + y^2 - 4a^2)^3 = 108a^4y^2$$

com $a \in \mathbb{R}$ é uma nefroide.

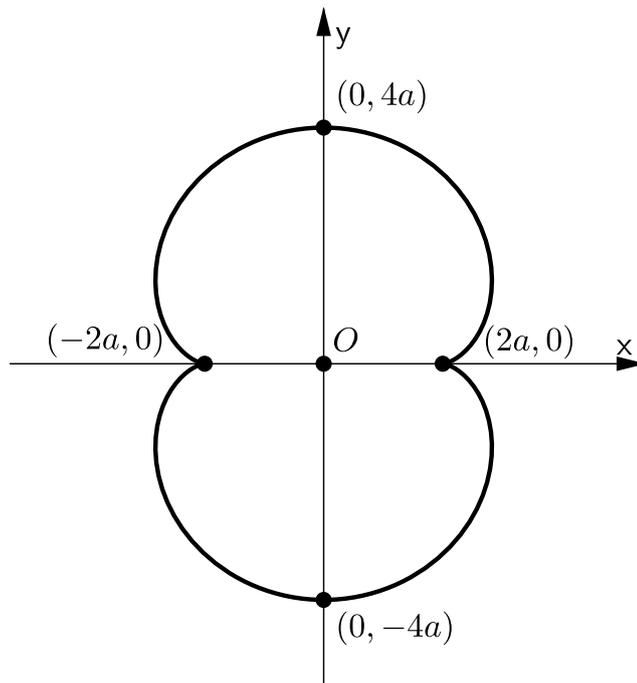


Figura 3.24: A nefroide

Proposição 3.8: Sejam R e r os raios das circunferências fixa e rolante, respectivamente. Se $R = 2r$, então a epicicloide $\mathcal{E}[t; R, r]$ descrita pelas equações paramétricas (3.21) é uma nefroide.

Demonstração: Seja $\mathcal{E}[t; R, r]$ a epicicloide descrita pelas equações paramétricas (3.21). Se $R = 2r$, então as equações paramétricas ficam assim:

$$\begin{cases} x = 3r \cos t - r \cos(3t) \\ y = 3r \sin t - r \sin(3t) \end{cases}$$

da subseção anterior, sabemos que $\cos(3t) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$ e $\sin(3t) = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$, logo

$$\begin{cases} x = 3r \cos t - r(4 \cos^3 t - 3 \cos t) \\ y = 3r \sin t - r(3 \sin t - 4 \sin^3 t) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 6r \cos t - 4r \cos^3 t \\ y = 4r \sin^3 t \end{cases}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de cada função componente e somando-as

membro a membro, temos

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (6r \cos t - 4r \cos^3 t)^2 + (4r \sin^3 t)^2 \\ &= 36r^2 \cos^2 t - 48r^2 \cos^4 t + 16r^2 \cos^6 t + 16r^2 \sin^6 t \\ &= 36r^2 \cos^2 t - 48r^2 \cos^4 t + 16r^2(\sin^6 t + \cos^6 t),\end{aligned}$$

isto é,

$$x^2 + y^2 = 36r^2 \cos^2 t - 48r^2 \cos^4 t + 16r^2(\sin^6 t + \cos^6 t). \quad (3.33)$$

Mostremos agora que

$$\sin^6 t + \cos^6 t = 1 - 3 \sin^2 t \cos^2 t. \quad (3.34)$$

De fato, usando a relação fundamental da trigonometria e a fórmula do cubo da soma de dois termos, tem-se

$$\begin{aligned}\sin^2 t + \cos^2 t = 1 &\Leftrightarrow (\sin^2 t + \cos^2 t)^3 = 1^3 \\ &\Leftrightarrow (\sin^2 t)^3 + 3(\sin^2 t)^2 \cos^2 t + 3 \sin^2 t (\cos^2 t)^2 + (\cos^2 t)^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin^6 t + 3 \sin^4 t \cos^2 t + 3 \sin^2 t \cos^4 t + \cos^6 t = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin^6 t + \cos^6 t + 3 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin^6 t + \cos^6 t + 3 \sin^2 t \cos^2 t = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin^6 t + \cos^6 t = 1 - 3 \sin^2 t \cos^2 t.\end{aligned}$$

Isto prova a identidade. Assim, substituindo (3.34) em (3.33), segue que

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 36r^2 \cos^2 t - 48r^2 \cos^4 t + 16r^2 (1 - 3 \sin^2 t \cos^2 t) \\ x^2 + y^2 &= 36r^2 \cos^2 t - 48r^2 \cos^4 t + 16r^2 - 48r^2 \sin^2 t \cos^2 t \\ x^2 + y^4 - 16r^2 &= 36r^2 \cos^2 t - 48r^2 \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ x^2 + y^2 - 16r^2 &= 36r^2 \cos^2 t - 48r^2 \cos^2 t \\ x^2 + y^2 - 16r^2 &= -12r^2 \cos^2 t \\ x^2 + y^2 - 16r^2 &= -12r^2 (1 - \sin^2 t) \\ x^2 + y^2 - 16r^2 &= -12r^2 + 12r^2 \sin^2 t \\ x^2 + y^2 - 16r^2 + 12r^2 &= 12r^2 \sin^2 t \\ x^2 + y^2 - 4r^2 &= 12r^2 \sin^2 t,\end{aligned}$$

elevando ambos os membros ao cubo, tem-se

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 &= (12r^2 \sin^2 t)^3 \\ (x^2 + y^2 - 4r^2)^3 &= 1728r^6 \sin^6 t,\end{aligned}$$

como $y = 4r \operatorname{sen}^3 t$, então $y^2 = 16r^2 \operatorname{sen}^6 t$, daí segue que

$$(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 = 108r^4 (16r^2 \operatorname{sen}^6 t)$$

$$(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 = 108r^4 y^2 \quad (3.35)$$

Portanto, isto mostra que a epicicloide $\mathcal{E}[t; R, r]$ com $R = 2r$ é uma nefroide. ■

Pelo Teorema 3.3 a nefroide terá 2 pontos de cúspides, pois $\frac{R}{r} = \frac{2r}{r} = 2$ e fazendo uma comparação com a definição dada de nefroide com a equação obtida em (3.35), então os pontos de cúspides serão $(-2r, 0) = (-R, 0)$ e $(2r, 0) = (R, 0)$ e os pontos aonde a curva intercepta o eixo das ordenadas são $(0, -4r) = (0, -2R)$ e $(0, 4r) = (0, 2R)$.

Exemplo 3.14: Pela Proposição 3.8 a epitrocoide $\mathcal{E}[t; 2, 1]$ é uma nefroide cujos pontos de cúspides são $P_1 = (-2, 0)$ e $P_2 = (2, 0)$ e os pontos aonde a nefroide intercepta o eixo das ordenadas são $A = (0, 4)$ e $B = (0, -4)$, veja a Figura 3.25.

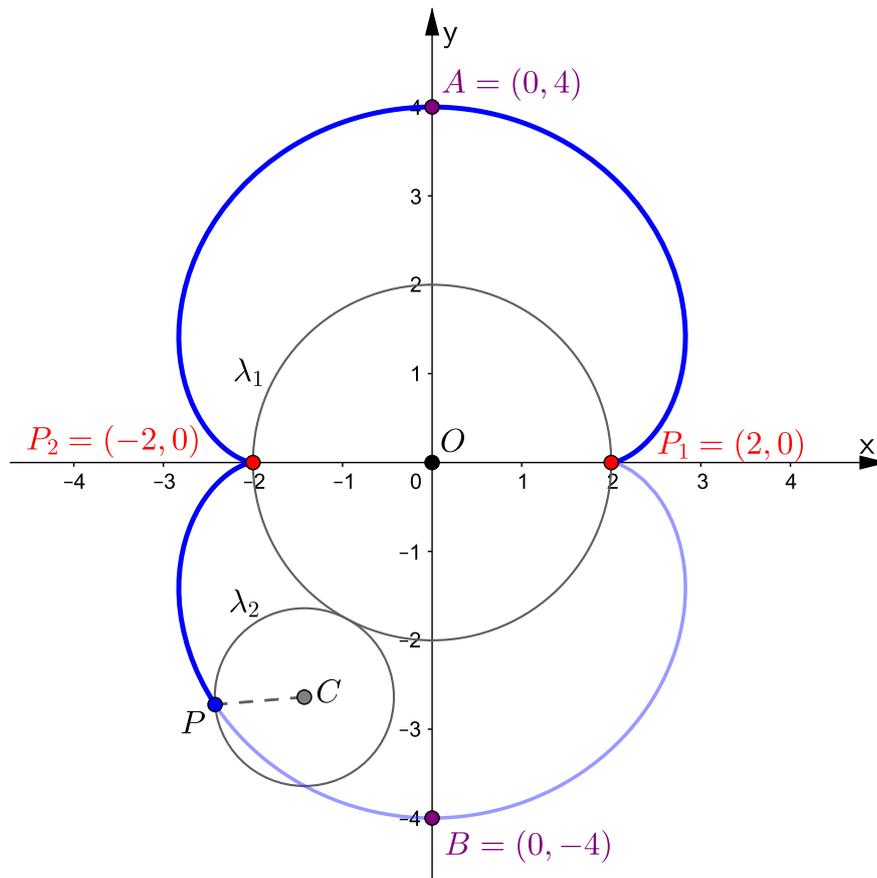


Figura 3.25: Traçado da epicicloide $\mathcal{E}[t; 2, 1]$

3.3.8 Hipocicloides encurtadas e alongadas

A hipocicloide descrita pelas equações paramétricas (3.20) estão representadas em sua **forma ordinária**, ou seja, é uma hipotrocoide cuja a trajetória do ponto gerador P pertence a circunferência rolante significando que $d = r$.

No entanto, quando o ponto P , está localizado no interior da circunferência rolante, significando que $d < r$, a hipotrocoide obtida denomina-se de **hipocicloide encurtada**. Por outro lado, quando o ponto P , é externo em relação a circunferência rolante, significando que $d > r$, a hipotrocoide obtida é denominada de **hipocicloide alongada**.

Exemplo 3.15: Considerando a hipocicloide $\mathcal{H}[t;5,1]$, então a hipotrocoide $\mathcal{H}[t;5,1,0.5]$ é uma hipocicloide encurtada e a hipotrocoide $\mathcal{H}[t;5,1,1.5]$ é uma hipocicloide alongada, veja a Figura 3.26.

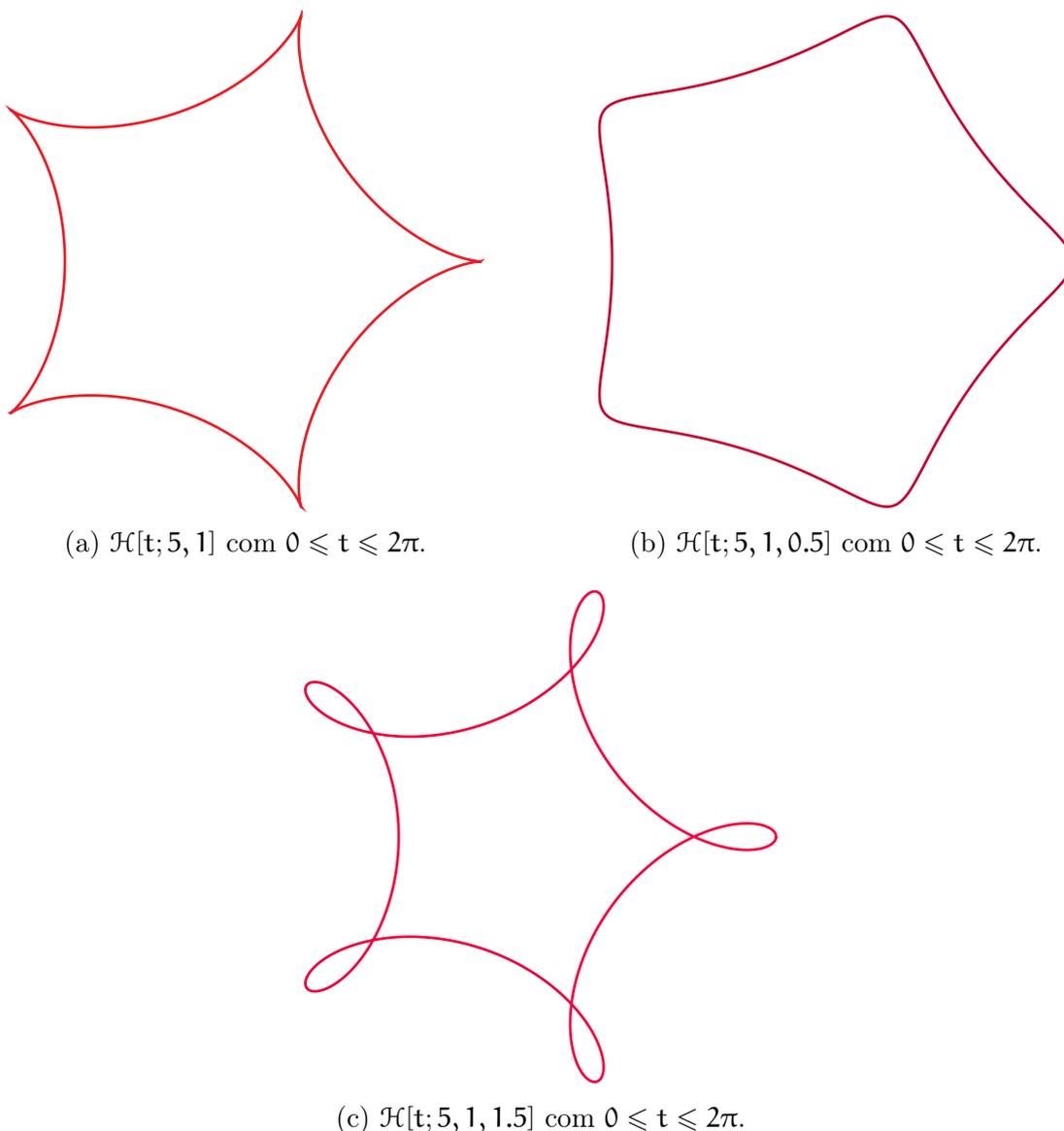


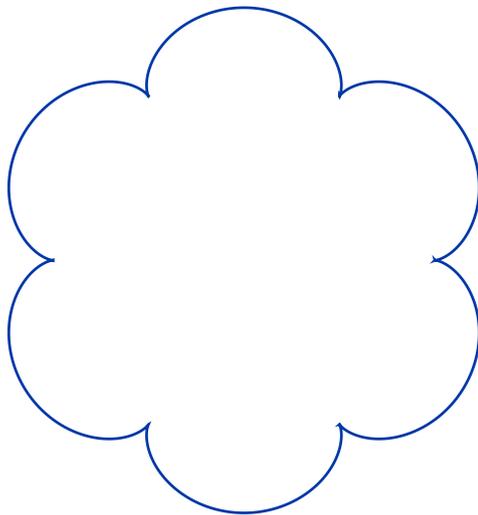
Figura 3.26: A hipocicloide $\mathcal{H}[t;5,1]$ em sua forma ordinária, encurtada e alongada.

3.3.9 Epicicloides encurtadas e alongadas

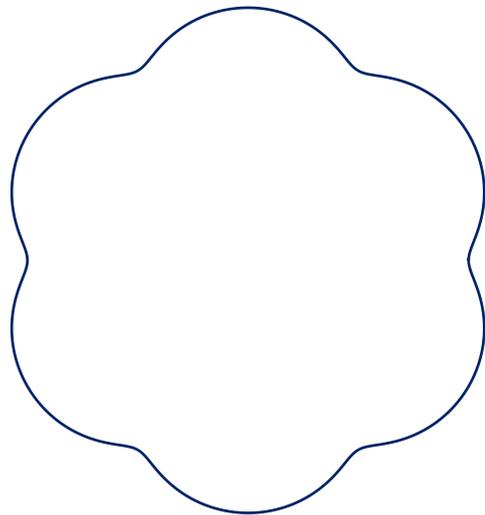
A epicicloide descrita pelas equações paramétricas (3.21) estão representadas em sua **forma ordinária**, ou seja, é uma epitrocoide cuja a trajetória do ponto gerador P pertence a circunferência rolante significando que $d = r$.

No entanto, quando o ponto P , está localizado no interior da circunferência rolante, significando que $d < r$, a epitrocoide obtida denomina-se de **epicicloide encurtada**. Por outro lado, quando o ponto P , é externo em relação a circunferência rolante, significando que $d > r$, a epitrocoide obtida é denominada de **epicicloide alongada**.

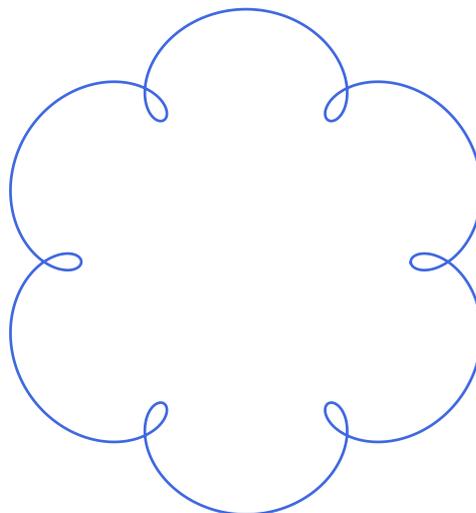
Exemplo 3.16: Considerando a epicicloide $\mathcal{E}[t; 6, 1]$, então a epitrocoide $\mathcal{H}[t; 6, 1, 0.5]$ é uma epicicloide encurtada e a epitrocoide $\mathcal{E}[t; 6, 1, 1.5]$ é uma epicicloide alongada, veja a Figura 3.27.



(a) $\mathcal{E}[t; 6, 1]$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.



(b) $\mathcal{E}[t; 6, 1, 0.5]$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.

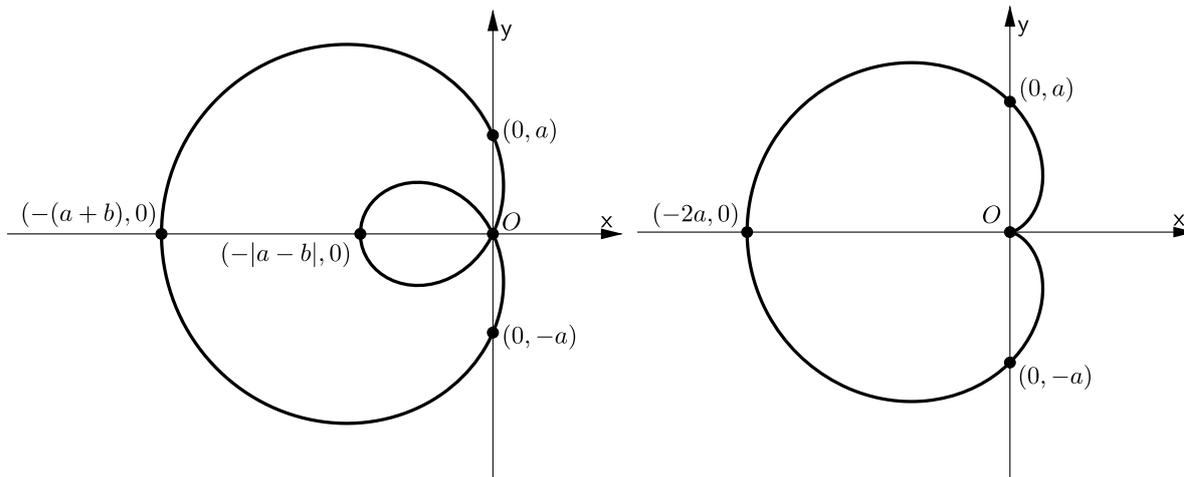


(c) $\mathcal{E}[t; 6, 1, 1.5]$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Figura 3.27: A Epicicloide $\mathcal{E}[t; 6, 1]$ em sua forma ordinária, encurtada e alongada.

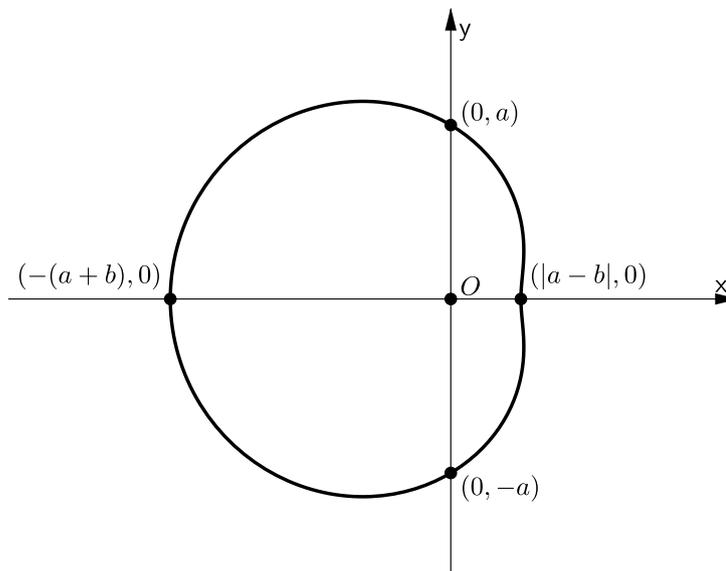
3.3.10 Limações

Definição 3.10 (Limações): A curva, em coordenadas polares, $\rho = b - a \cos \theta$ com $a > 0$ e $b > 0$ chama-se limaçon (palavra francesa que significa caracol). Existem três tipos de limações dependendo dos valores que a e b assumem conforme a Figura 3.28.



(a) Se $a > b$ a limaçon possui um laço.

(b) Se $a = b$ temos a cardioide.



(c) Se $a < b$ a limaçon não possui laço.

Figura 3.28: As limações

Observe que a cardioide é um caso particular de *limaçon*.

Proposição 3.9: Sejam R e r os raios das circunferências fixa e rolante, respectivamente. Se $R = r$ e $d > 0$, então a epitrocoide $\mathcal{E}[t; R, r, d]$ descrita pelas equações (3.8) é uma *limaçon*.

Demonstração: Seja $\mathcal{E}[t; R, r, d]$ a epitrocoide descrita pelas equações (3.8). Se $R = r$ as equações paramétricas ficam assim:

$$\begin{cases} x = 2r \cos t - d \cos(2t) \\ y = 2r \sin t - d \sin(2t). \end{cases} \quad (3.36)$$

Assim como fizemos com a cardioide na subseção 3.3.6, precisaremos efetuar uma translação horizontal do gráfico da epitrocoide para que o ponto aonde a epitrocoide faz o laço da *limaçon* (Figura 3.28a) ou aonde forma o ponto de cúspide (Figura 3.28b) seja no ponto $O = (0, 0)$. Para fazermos isso basta subtrair d no segundo membro da função componente x (3.36), isto é

$$\begin{cases} x = 2r \cos t - d \cos(2t) - d \\ y = 2r \sin t - d \sin(2t). \end{cases}$$

Agora, utilizando as fórmulas trigonométricas do arco duplo, segue que

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2r \cos t - d(2 \cos^2 t - 1) - d \\ y = 2r \sin t - d(2 \sin t \cos t) \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 2r \cos t - 2d \cos^2 t + d - d \\ y = 2r \sin t - 2d \sin t \cos t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = (2r - 2d \cos t) \cos t \\ y = (2r - 2d \cos t) \sin t. \end{cases} \end{aligned}$$

Usando a equação de transformação $\rho^2 = x^2 + y^2$, temos:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= [(2r - 2d \cos t) \cos t]^2 + [(2r - 2d \cos t) \sin t]^2 \\ \rho^2 &= (2r - 2d \cos t)^2 \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ \rho^2 &= (2r - 2d \cos t)^2 \\ \rho &= 2r - 2d \cos t. \end{aligned}$$

Por fim, fazendo $a = 2d$, $b = 2r$ e $t = \theta$, segue que $\rho = b - a \cos \theta$, mostrando assim, que a epitrocoide $\mathcal{E}[t; R, r, d]$ com $R = r$ é uma *limaçon*. ■

Exemplo 3.17: Pela Proposição 3.9 a epitrocoide $\mathcal{E}[t; 1, 1, 3]$ é uma *limaçon* e como $d > r$, então a *limaçon* possui um laço, veja a Figura 3.29.

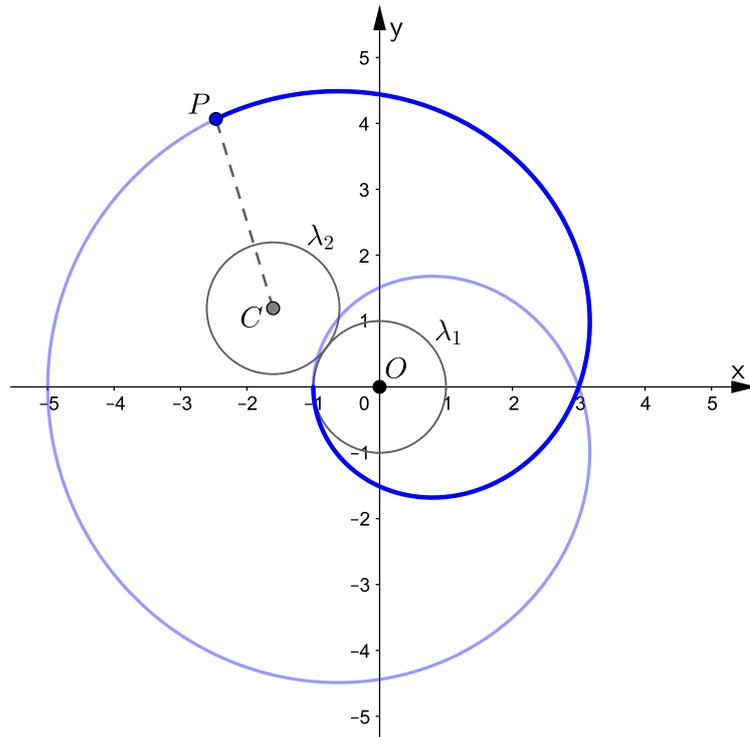


Figura 3.29: Traçado da epitrocoide $\mathcal{E}[t; 1, 1, 3]$

3.3.11 Rosáceas

Definição 3.11: A curva, em coordenadas polares, $\rho = a \cos(b\theta)$ com $a, b > 0$ e $b \neq 1$, é uma rosácea.

a) Quando $b \in \mathbb{N}$, então

i) se b é par a rosácea tem $2b$ pétalas, veja a Figura 3.30.

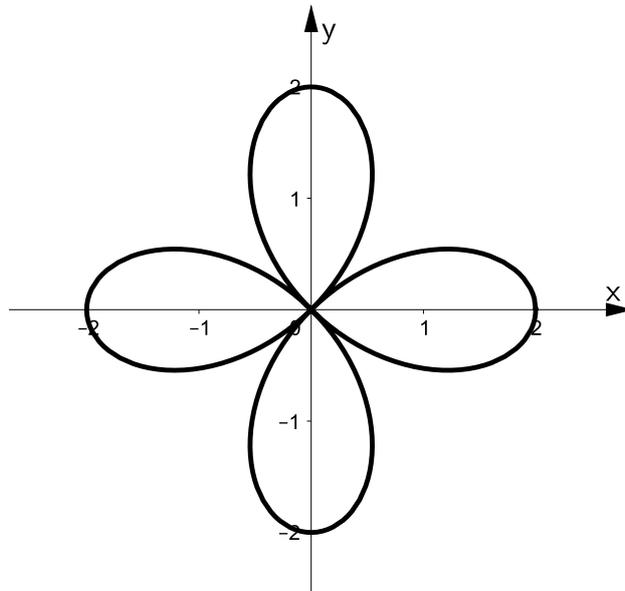


Figura 3.30: A rosácea $\rho = 2 \cos(2\theta)$

ii) se b é ímpar a rosácea tem b pétalas, veja a Figura 3.31.

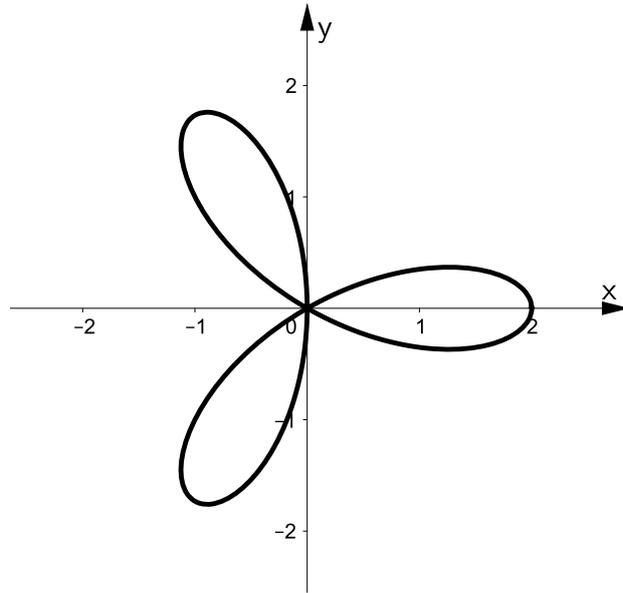


Figura 3.31: A rosácea $\rho = 2 \cos(3\theta)$

b) Quando $b \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$ então as pétalas da rosácea se interceptam. Fazendo $b = \frac{m}{n} \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$, então todas as interseções se encontram em círculos concêntricos de centro $O = (0, 0)$ e raio R_i , onde $R_i = a \cos\left(\frac{\pi}{2n}i\right)$ com $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

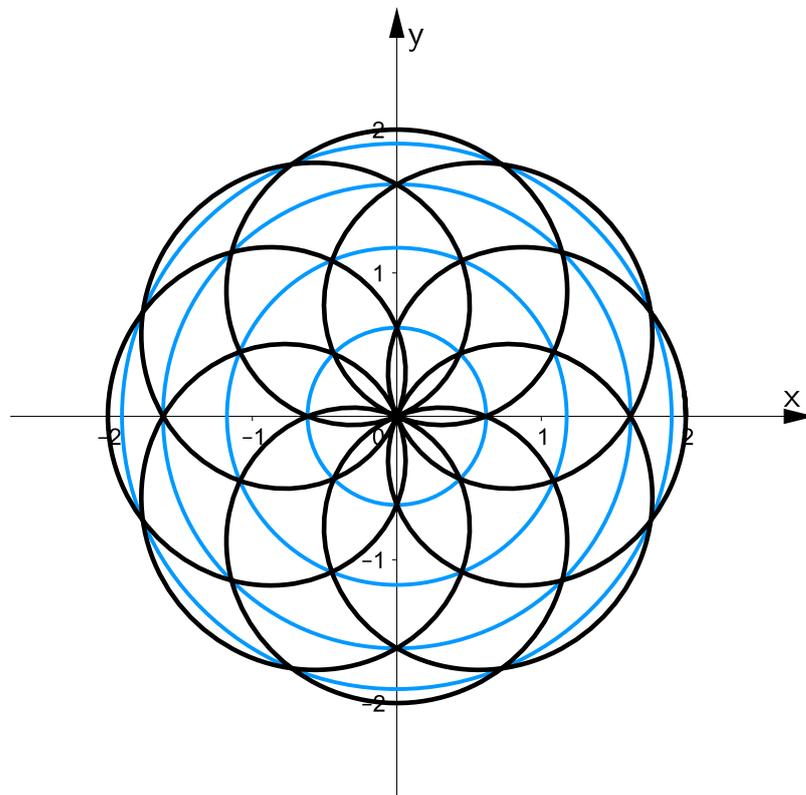


Figura 3.32: A rosácea $\rho = 2 \cos\left(\frac{4}{5}\theta\right)$.

Proposição 3.10: *Sejam R e r ($R > r$) os raios das circunferência fixa e rolante, respectivamente. Se $d = R - r$ e $R \neq 2r$, então a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ descrita pelas equações (3.4) é uma rosácea.*

Demonstração: Seja $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ a hipotrocoide descrita pelas equações (3.4). Se $d = R - r$, então as equações paramétricas ficam assim:

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos t + (R - r) \cos \left(\frac{R - r}{r} t \right) \\ y = (R - r) \sin t - (R - r) \sin \left(\frac{R - r}{r} t \right) \end{cases} \iff \begin{cases} x = (R - r) \left[\cos t + \cos \left(\frac{R - r}{r} t \right) \right] \\ y = (R - r) \left[\sin t - \sin \left(\frac{R - r}{r} t \right) \right] \end{cases}$$

usando as fórmulas trigonométricas de transformação em produto

$$\begin{aligned} \cos(u) + \cos(v) &= 2 \cos \left(\frac{u + v}{2} \right) \cos \left(\frac{u - v}{2} \right) \\ &\text{e} \\ \sin(u) - \sin(v) &= 2 \sin \left(\frac{u - v}{2} \right) \cos \left(\frac{u + v}{2} \right) \end{aligned}$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{cases} x = (R - r) \left[2 \cos \left(\frac{t + \frac{R - r}{r} t}{2} \right) \cos \left(\frac{t - \frac{R - r}{r} t}{2} \right) \right] \\ y = (R - r) \left[2 \sin \left(\frac{t - \frac{R - r}{r} t}{2} \right) \cos \left(\frac{t + \frac{R - r}{r} t}{2} \right) \right] \end{cases}$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} x = 2(R - r) \cos \left(\frac{R}{2r} t \right) \cos \left(\frac{2r - R}{2r} t \right) \\ y = 2(R - r) \cos \left(\frac{R}{2r} t \right) \sin \left(\frac{2r - R}{2r} t \right) \end{cases}$$

Por hipótese $R \neq 2r$, isto é $2r - R \neq 0$, então considere $\theta = \frac{2r - R}{2r} t$, logo $t = \frac{2r}{2r - R} \theta$. Isto implica que

$$\begin{cases} x = 2(R - r) \cos \left(\frac{R}{2r - R} \theta \right) \cos \theta \\ y = 2(R - r) \cos \left(\frac{R}{2r - R} \theta \right) \sin \theta \end{cases} \quad (3.37)$$

Usando a equação de transformação $\rho^2 = x^2 + y^2$, temos:

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \left[2(R-r) \cos\left(\frac{R}{2r-R}\theta\right) \cos\theta \right]^2 + \left[2(R-r) \cos\left(\frac{R}{2r-R}\theta\right) \sin\theta \right]^2 \\ \rho^2 &= \left[2(R-r) \cos\left(\frac{R}{2r-R}\theta\right) \right]^2 \cdot (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ \rho^2 &= \left[2(R-r) \cos\left(\frac{R}{2r-R}\theta\right) \right]^2 \\ \rho &= 2(R-r) \cos\left(\frac{R}{2r-R}\theta\right)\end{aligned}$$

Fazendo $a = 2(R-r)$ e $b = \frac{R}{2r-R}$, temos que $\rho = a \cos(b\theta)$. Para finalizar a demonstração, temos que mostrar que $b = \frac{R}{2r-R} \neq 1$. Veja que,

$$\frac{R}{2r-R} = 1 \iff R = 2r - R \iff 2R = 2r \iff R = r.$$

Mas $R > r$, logo $R \neq r$ implicando que $\frac{R}{2r-R} \neq 1$. Isto mostra que a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ com $d = R - r$ e $R \neq 2r$ é uma rosácea. ■

Exemplo 3.18: Pela Proposição 3.10 a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 6, 7/2, 5/2]$ é uma rosácea, veja a Figura 3.33.

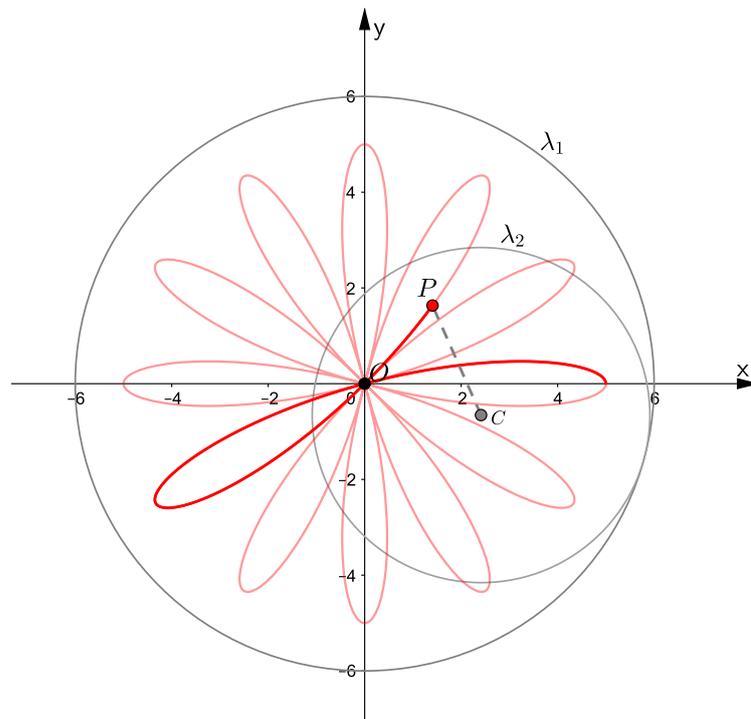


Figura 3.33: Traçado da hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 6, 7/2, 5/2]$

Se considerarmos a hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.37), então estas sempre produziram rosáceas e fazendo uma analogia com Definição 3.11, poderemos representar as mesmas características dadas. Isto é, seja $k \in \mathbb{N}$ e $k \neq 1$, tal que $\frac{R}{2r - R} = k$, daí

$$R = 2kr - Rk \iff R + Rk = 2kr \iff R(k + 1) = 2kr \iff \frac{R}{r} = \frac{2k}{k + 1}.$$

Assim, considerando $\frac{R}{r} = \frac{2k}{k + 1}$, temos:

- a) Se k for par, então a hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.37) é uma rosácea de $2k$ pétalas.

Exemplo 3.19: Seja $k = 8$, então $\frac{R}{r} = \frac{2 \cdot 8}{8 + 1} = \frac{16}{9}$. Considerando $R = 16$ e $r = 9$, então a hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.37) dada por

$$\begin{cases} x = 2(16 - 9) \cos\left(\frac{16}{2 \cdot 9 - 16}\theta\right) \cos \theta \\ y = 2(16 - 9) \cos\left(\frac{16}{2 \cdot 9 - 16}\theta\right) \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} x = 14 \cos(8\theta) \cos \theta \\ y = 14 \cos(8\theta) \sin \theta \end{cases},$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma rosácea com 16 pétalas, veja a Figura 3.34.

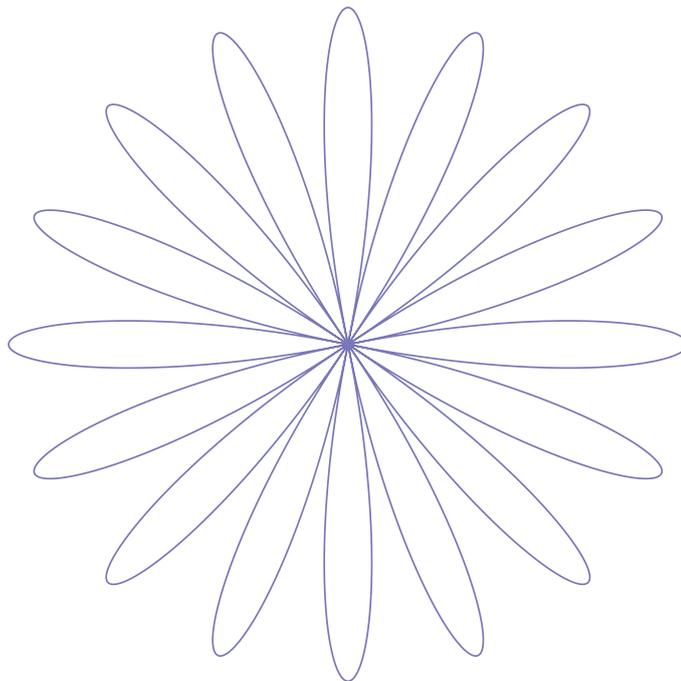


Figura 3.34: A hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.37) com $R = 16$ e $r = 9$ é uma rosácea de 16 pétalas

b) Se k for ímpar, então a hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.37) é uma rosácea de k pétalas.

Exemplo 3.20: Seja $k = 7$, então $\frac{R}{r} = \frac{2 \cdot 7}{7 + 1} = \frac{7}{4}$. Considerando $R = 7$ e $r = 4$, então a hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.37) dada por

$$\begin{cases} x = 2(7 - 4) \cos\left(\frac{7}{2 \cdot 4 - 7}\theta\right) \cos \theta \\ y = 2(7 - 4) \cos\left(\frac{7}{2 \cdot 4 - 7}\theta\right) \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} x = 6 \cos(7\theta) \cos \theta \\ y = 6 \cos(7\theta) \sin \theta \end{cases},$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é uma rosácea com 7 pétalas, veja a Figura 3.35.

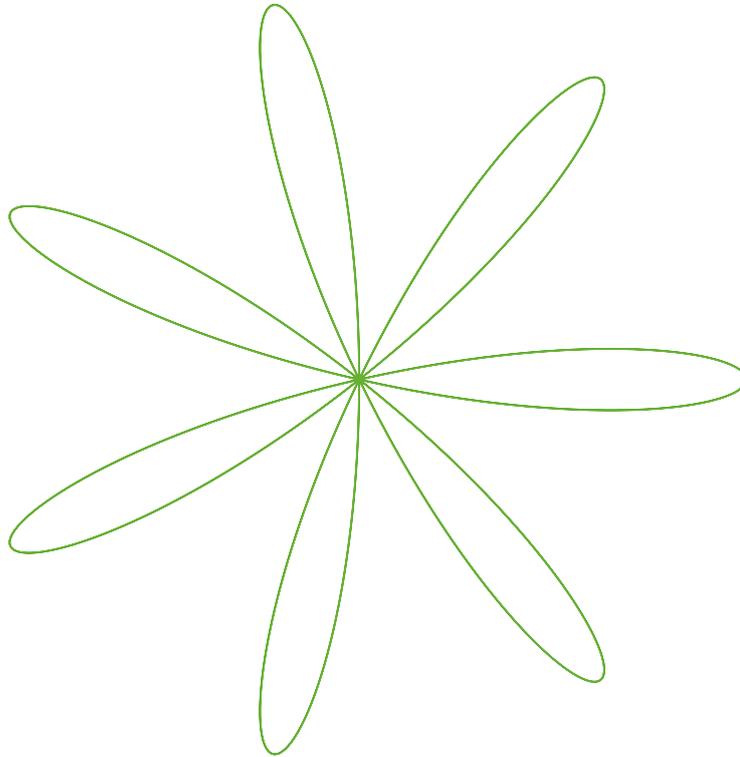


Figura 3.35: A hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.37) com $R = 7$ e $r = 4$ é uma rosácea de 7 pétalas

Agora seja $\frac{R}{2r - R} = \frac{m}{n} \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$, daí

$$Rn = 2mr - Rm \iff Rn + Rm = 2mr \iff R(m + n) = 2mr \iff \frac{R}{r} = \frac{2m}{m + n}.$$

Assim, considerando $\frac{R}{r} = \frac{2m}{m + n}$ e com base na Definição 3.11, teremos rosáceas cujas pétalas se interceptam e todas as interseções se encontram em círculos concêntricos de centro $O = (0, 0)$ e raio $R_i = 2(R - r) \cos\left(\frac{\pi}{2n}i\right)$ com $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Exemplo 3.21: Sejam $m = 9$ e $n = 8$, então $\frac{R}{r} = \frac{2 \cdot 9}{9 + 8} = \frac{18}{17}$. Considerando $R = 18$ e $r = 17$, então a hipotrocoide

$$\begin{cases} x = 2(18 - 17) \cos \left(\frac{18}{2 \cdot 17 - 18} \theta \right) \cos \theta \\ y = 2(18 - 17) \cos \left(\frac{18}{2 \cdot 17 - 18} \theta \right) \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \cos \left(\frac{9}{8} \theta \right) \cos \theta \\ y = 2 \cos \left(\frac{9}{8} \theta \right) \sin \theta \end{cases},$$

para $0 \leq \theta \leq 16\pi$, é uma rosácea onde as pétalas se interceptam e todas as interseções estão contidas em círculos concêntricos da forma $x^2 + y^2 = \left(2 \cos \left(\frac{\pi}{16}i\right)\right)^2$ com $i = 1, 2, \dots, 7$, veja a Figura 3.36.

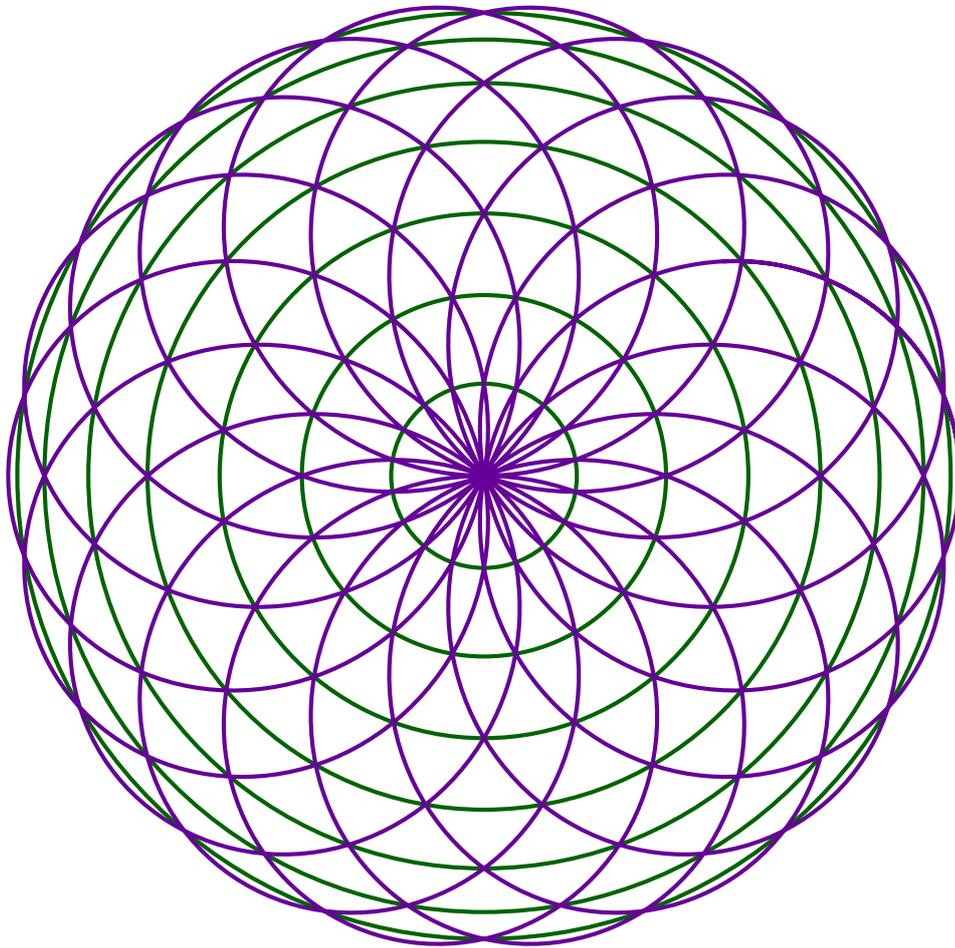


Figura 3.36: A hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.37) com $R = 18$ e $r = 17$ é uma rosácea com todas as suas interseções contidas em círculos concêntricos

3.4 Os teoremas da dupla geração

Nesta seção apresentaremos três teoremas que juntos são conhecidos como os **teoremas da dupla geração**. Estes teoremas representam um resultado clássico envolvendo as hipotrocoides e epitrocoides. Antes de apresentá-los e prová-los, precisamos “afrouxar” as restrições sobre r impostas nas Definições 3.1 e 3.2, permitindo que r seja maior que R ou negativo.

O primeiro teorema da dupla geração garante que qualquer hipotrocoide pode ser gerada de duas maneiras distintas.

Teorema 3.4 (Teorema da dupla geração I): *Seja $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ a hipotrocoide descrita pela equações paramétricas (3.4). Se $R > r$ então*

$$\mathcal{H}[t; R, r, d] = \mathcal{H} \left[-\frac{R-r}{r}t; d\frac{R}{r}, d\frac{R-r}{r}, R-r \right].$$

Demonstração: Se $R > r$, então $R - r > 0$ e as equações paramétricas de $\mathcal{H} \left[-\frac{R-r}{r}t; d\frac{R}{r}, d\frac{R-r}{r}, R-r \right]$ são

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(d\frac{R}{r} - d\frac{R-r}{r} \right) \cos \left(-\frac{R-r}{r}t \right) + (R-r) \cos \left(\frac{d\frac{R}{r} - d\frac{R-r}{r}}{d\frac{R-r}{r}} \cdot \left(-\frac{R-r}{r} \right) t \right) \\ &= \left(d\frac{R}{r} - d\frac{R}{r} + d\frac{r}{r} \right) \cos \left(-\frac{R-r}{r}t \right) + (R-r) \cos \left(\frac{\frac{d}{r}(R-R+r)}{\frac{d}{r}(R-r)} \cdot \left(\frac{R-r}{r} \right) \cdot (-t) \right) \\ &= d \cos \left(-\frac{R-r}{r}t \right) + (R-r) \cos \left(\frac{r}{R-r} \cdot \frac{R-r}{r} \cdot (-t) \right) \\ &= d \cos \left(-\frac{R-r}{r}t \right) + (R-r) \cos(-t) \\ &= (R-r) \cos(-t) + d \cos \left(-\frac{R-r}{r}t \right) \\ &= (R-r) \cos t + d \cos \left(\frac{R-r}{r}t \right) \quad (\text{pois, } \cos(-w) = \cos w \text{ para todo } w \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$y(t) = \left(d\frac{R}{r} - d\frac{R-r}{r} \right) \text{sen} \left(-\frac{R-r}{r}t \right) - (R-r) \text{sen} \left(\frac{d\frac{R}{r} - d\frac{R-r}{r}}{d\frac{R-r}{r}} \cdot \left(-\frac{R-r}{r} \right) t \right)$$

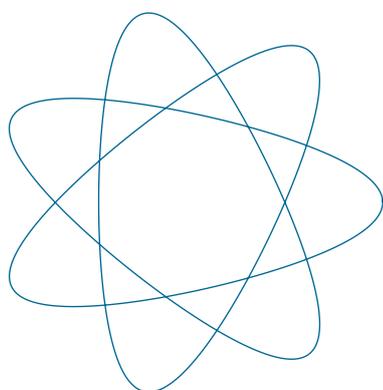
$$\begin{aligned}
&= \left(d \frac{R}{r} - d \frac{R}{r} + d \frac{r}{r} \right) \operatorname{sen} \left(-\frac{R-r}{r} t \right) - (R-r) \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{d}{r}(R-R+r)}{\frac{d}{r}(R-r)} \cdot \left(\frac{R-r}{r} \right) \cdot (-t) \right) \\
&= d \operatorname{sen} \left(-\frac{R-r}{r} t \right) - (R-r) \operatorname{sen} \left(\frac{r}{R-r} \cdot \frac{R-r}{r} \cdot (-t) \right) \\
&= d \operatorname{sen} \left(-\frac{R-r}{r} t \right) - (R-r) \operatorname{sen}(-t) \\
&= -(R-r) \operatorname{sen}(-t) + d \operatorname{sen} \left(-\frac{R-r}{r} t \right) \\
&= (R-r) \operatorname{sen} t - d \operatorname{sen} \left(\frac{R-r}{r} t \right) \quad (\text{pois, } \operatorname{sen}(-w) = -\operatorname{sen} w \text{ para todo } w \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

As equações $x(t)$ e $y(t)$ obtidas são as equações paramétricas da hipotrocoide $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ descritas por (3.4), o que prova o teorema. ■

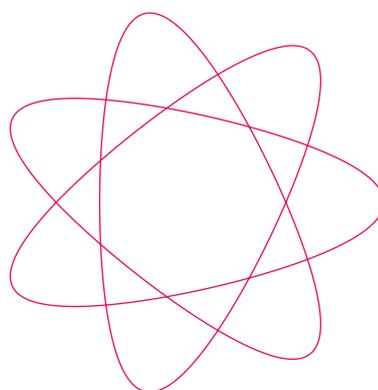
Exemplo 3.22: Se considerarmos a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 14, 6, 3]$, então pelo Teorema 3.4 o seu traço é o mesmo da hipotrocoide

$$\mathcal{H} = \left[-\frac{14-6}{6}t; 3\frac{14}{6}, 3\frac{14-6}{6}, 14-6 \right] = \mathcal{H} \left[-\frac{4}{3}t; 7, 4, 8 \right].$$

O sinal de menos em $-\frac{4}{3}$, significa que a curva é traçada no sentido oposto da hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 14, 6, 3]$. Se o sentido em que a curva é traçada não for relevante e sendo t uma variável real podemos escrever simplesmente que $\mathcal{H}[t; 14, 6, 3] = \mathcal{H}[t; 7, 4, 8]$, veja a Figura 3.37.



(a) $\mathcal{H}[t; 14, 6, 3]$ com $0 \leq t \leq 6\pi$.



(b) $\mathcal{H}[t; 7, 4, 8]$ com $0 \leq t \leq 8\pi$.

Figura 3.37: O primeiro teorema da dupla geração

O segundo teorema da dupla geração garante que qualquer hipotrocoide com $r > R$ pode ser representada como uma epitrocoide.

Teorema 3.5 (Teorema da dupla geração II): *Seja $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ a hipotrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.4). Se $r > R$ então*

$$\mathcal{H}[t; R, r, d] = \mathcal{E} \left[\frac{r-R}{r}t; d\frac{R}{r}, d\frac{r-R}{r}, r-R \right].$$

Demonstração: Se $r > R$, então $r - R > 0$ e as equações paramétricas de $\mathcal{E} \left[\frac{r-R}{r}t; d\frac{R}{r}, d\frac{r-R}{r}, R-r \right]$ são

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(d\frac{R}{r} + d\frac{r-R}{r} \right) \cos \left(\frac{r-R}{r}t \right) - (r-R) \cos \left(\frac{d\frac{R}{r} + d\frac{r-R}{r}}{d\frac{r-R}{r}} \cdot \frac{r-R}{r}t \right) \\ &= \left(d\frac{R}{r} - d\frac{R}{r} + d\frac{r}{r} \right) \cos \left(\frac{r-R}{r}t \right) - (r-R) \cos \left(\frac{\frac{d}{r}(R-R+r)}{\frac{d}{r}(r-R)} \cdot \frac{r-R}{r}t \right) \\ &= d \cos \left(\frac{r-R}{r}t \right) - (r-R) \cos \left(\frac{r}{r-R} \cdot \frac{r-R}{r}t \right) \\ &= d \cos \left(\frac{r-R}{r}t \right) - (r-R) \cos t \\ &= -(-(R-r)) \cos t + d \cos \left(-\frac{R-r}{r}t \right) \\ &= (R-r) \cos t + d \cos \left(\frac{R-r}{r}t \right) \quad (\text{pois, } \cos(-w) = \cos w \text{ para todo } w \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(d\frac{R}{r} + d\frac{r-R}{r} \right) \sen \left(\frac{r-R}{r}t \right) - (r-R) \sen \left(\frac{d\frac{R}{r} + d\frac{r-R}{r}}{d\frac{r-R}{r}} \cdot \frac{r-R}{r}t \right) \\ &= \left(d\frac{R}{r} - d\frac{R}{r} + d\frac{r}{r} \right) \sen \left(\frac{r-R}{r}t \right) - (r-R) \sen \left(\frac{\frac{d}{r}(R-R+r)}{\frac{d}{r}(r-R)} \cdot \frac{r-R}{r}t \right) \\ &= d \sen \left(\frac{r-R}{r}t \right) - (r-R) \sen \left(\frac{r}{r-R} \cdot \frac{r-R}{r}t \right) \end{aligned}$$

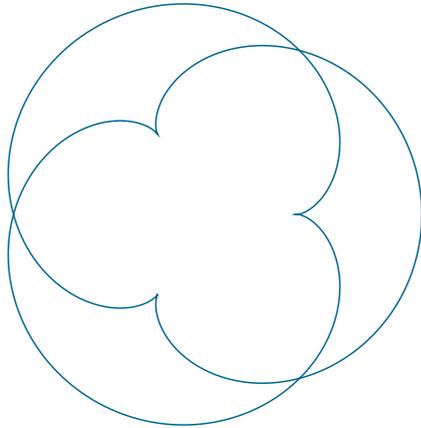
$$\begin{aligned}
&= d \operatorname{sen} \left(\frac{r-R}{r} t \right) - (r-R) \operatorname{sen} t \\
&= -(-(\mathbf{R}-r)) \operatorname{sen} t + d \operatorname{sen} \left(-\frac{\mathbf{R}-r}{r} t \right) \\
&= (\mathbf{R}-r) \operatorname{sen} t - d \operatorname{sen} \left(\frac{\mathbf{R}-r}{r} t \right) \quad (\text{pois, } \operatorname{sen}(-w) = -\operatorname{sen} w \text{ para todo } w \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

As equações $x(t)$ e $y(t)$ obtidas são as equações paramétricas da hipotrocoide $\mathcal{H}[t; \mathbf{R}, r, \mathbf{d}]$ descritas por (3.4), o que prova o teorema. ■

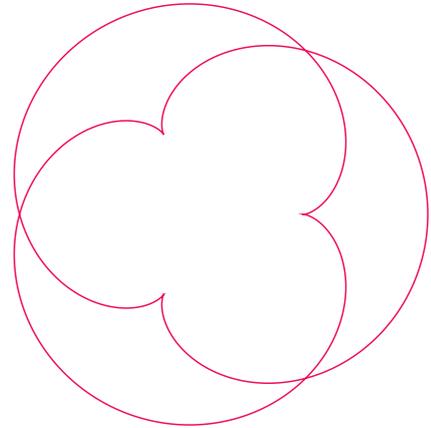
Exemplo 3.23: Se considerarmos a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 3, 5, 5]$ (que também é uma hipocicloide), então o pelo Teorema 3.5 o seu traço é o mesmo da epitrocoide

$$\mathcal{E} \left[\frac{5-3}{5} t; \frac{3}{5}, 5 \frac{5-3}{5}, 5-3 \right] = \mathcal{E} \left[\frac{2}{5} t; 3, 2, 2 \right] = \mathcal{E}[t; 3, 2, 2].$$

A Figura 3.38, faz o comparativo entre os traços das duas curvas.



(a) $\mathcal{H}[t; 3, 5, 5]$ com $0 \leq t \leq 10\pi$.



(b) $\mathcal{E}[t; 3, 2, 2]$ com $0 \leq t \leq 4\pi$.

Figura 3.38: O segundo teorema da dupla geração

Por fim, o terceiro teorema da dupla geração afirma que qualquer epitrocoide pode ser descrita como uma hipotrocoide.

Teorema 3.6 (Teorema da dupla geração III): *Seja $\mathcal{E}[t; \mathbf{R}, r, \mathbf{d}]$ a epitrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.8). Então,*

$$\mathcal{E}[t; \mathbf{R}, r, \mathbf{d}] = \mathcal{H} \left[\frac{\mathbf{R}+r}{r} t; \frac{\mathbf{R}}{r}, \mathbf{d} \frac{\mathbf{R}+r}{r}, \mathbf{R}+r \right].$$

Demonstração: As equações paramétricas de $\mathcal{H} \left[\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t}; d \frac{\mathbf{R}}{r}, d \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r}, \mathbf{R} + \mathbf{r} \right]$ são:

$$\begin{aligned}
x(\mathbf{t}) &= \left(d \frac{\mathbf{R}}{r} - d \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \right) \cos \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) + (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \cos \left(\frac{d \frac{\mathbf{R}}{r} - d \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r}}{d \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r}} \cdot \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) \\
&= \left(d \frac{\mathbf{R}}{r} - d \frac{\mathbf{R}}{r} - d \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \cos \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) + (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \cos \left(\frac{\frac{d}{r}(\mathbf{R} - \mathbf{R} - \mathbf{r})}{\frac{d}{r}(\mathbf{R} + \mathbf{r})} \cdot \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) \\
&= -d \cos \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) + (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \cos \left(-\frac{r}{\mathbf{R} + \mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{t} \right) \\
&= -d \cos \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) + (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \cos(-\mathbf{t}) \\
&= (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \cos(-\mathbf{t}) - d \cos \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) \\
&= (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \cos \mathbf{t} - d \cos \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) \quad (\text{pois, } \cos(-w) = \cos w \text{ para todo } w \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
y(\mathbf{t}) &= \left(d \frac{\mathbf{R}}{r} - d \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \right) \sin \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) - (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \sin \left(\frac{d \frac{\mathbf{R}}{r} - d \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r}}{d \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r}} \cdot \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) \\
&= \left(d \frac{\mathbf{R}}{r} - d \frac{\mathbf{R}}{r} - d \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \sin \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) - (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \sin \left(\frac{\frac{d}{r}(\mathbf{R} - \mathbf{R} - \mathbf{r})}{\frac{d}{r}(\mathbf{R} + \mathbf{r})} \cdot \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) \\
&= -d \sin \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) - (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \sin \left(-\frac{r}{\mathbf{R} + \mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{t} \right) \\
&= -d \sin \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) - (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \sin(-\mathbf{t}) \\
&= -(\mathbf{R} + \mathbf{r}) \sin(-\mathbf{t}) - d \sin \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) \\
&= (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \sin \mathbf{t} - d \sin \left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{r} \mathbf{t} \right) \quad (\text{pois, } \sin(-w) = -\sin w \text{ para todo } w \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Portanto, as equações $x(\mathbf{t})$ e $y(\mathbf{t})$ obtidas são as equações paramétricas da epitrocoide $\mathcal{E}[\mathbf{t}; \mathbf{R}, r, d]$ descritas por (3.8), o que prova o teorema. ■

Exemplo 3.24: Pelo Teorema 3.6 a epitrocoide $\mathcal{E}[t; 7, 2, 8]$ pode ser gerada como sendo a hipotrocoide

$$\mathcal{H}\left[\frac{7+2}{2}t; 8\frac{7}{2}, 8\frac{7+2}{2}, 7+2\right] = \mathcal{H}\left[\frac{9}{2}t; 28, 36, 9\right] = \mathcal{H}[t; 28, 36, 9].$$

A Figura 3.39 mostra o comparativo entre as duas curvas.

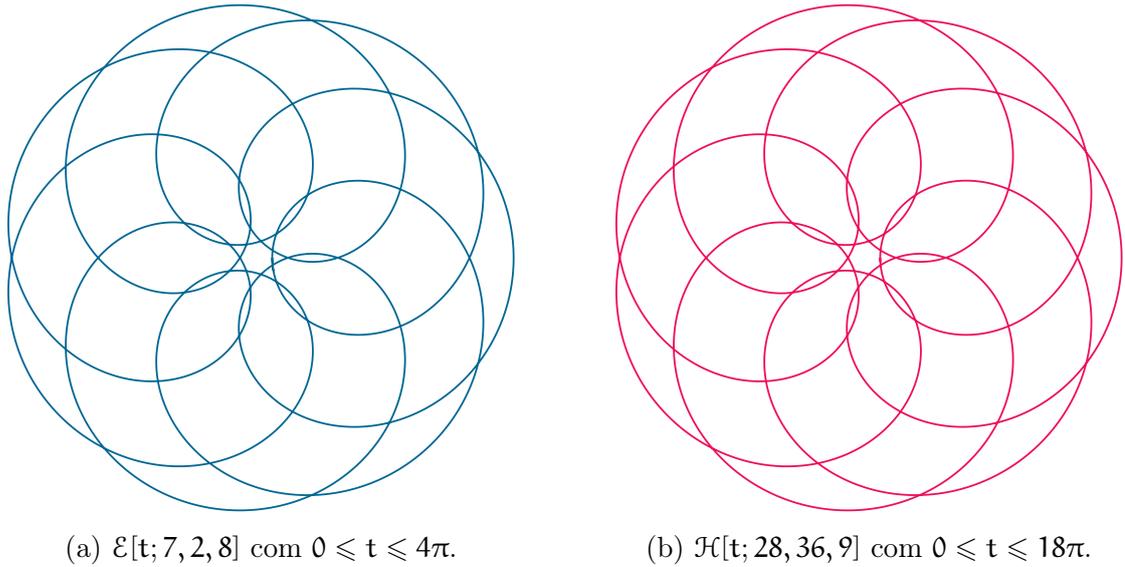


Figura 3.39: O terceiro teorema da dupla geração

O teorema da dupla geração II juntamente com o teorema da dupla geração III garantem que qualquer hipotrocoide pode ser gerada como uma epitrocoide e vice-versa. Logo, as curvas herdam todas as propriedades uma da outra.

Cabe observar que os teoremas da dupla geração garantem que hipotrocoides e epitrocoides podem ser geradas de duas maneiras distintas às quais correspondem equações paramétricas distintas e cujas representações produzem o mesmo traço, no entanto o período fundamental de cada uma é diferente, como pode se ver nas Figuras 3.37, 3.38 e 3.39. Logo, os teoremas da dupla geração nos dá a oportunidade de escolher a representação da curva que possui o menor período fundamental poupando assim tempo computacional para gerá-la.

Exemplo 3.25: Considerando o teorema da dupla geração I, se $\frac{R}{r} = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, então pela equação 3.15 do Teorema 3.2 o período fundamental de $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ é $2\pi q$. Como

$$\frac{d\frac{R}{r}}{d\frac{R-r}{r}} = \frac{R}{R-r} = \frac{p}{p-q}$$

e dado que $\text{mdc}(p, q) = 1$, então o $\text{mdc}(p, p - q) = 1$. Logo, o período fundamental de $\mathcal{H} \left[-\frac{R-r}{r}t; d\frac{R}{r}, d\frac{R-r}{r}, R-r \right]$ é $2\pi(p - q)$. Portanto, para representar graficamente a hipotrocoide, se não for relevante o sentido em que a curva é traçada, usando o menor dos valores q ou $p - q$ podemos poupar tempo computacional para representá-la.

Exemplo 3.26: Considerando o teorema da dupla geração II, se $\frac{R}{r} = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, então pela equação 3.15 do Teorema 3.2 o período fundamental de $\mathcal{H}[t; R, r, d]$ é $2\pi q$. Como

$$\frac{d\frac{R}{r}}{d\frac{r-R}{r}} = \frac{R}{r-R} = \frac{p}{q-p}$$

e dado que $\text{mdc}(p, q) = 1$, então o $\text{mdc}(p, q - p) = 1$. Logo, o período fundamental de $\mathcal{E} \left[\frac{r-R}{r}t; d\frac{R}{r}, d\frac{r-R}{r}, r-R \right]$ é $2\pi(q - p)$. Portanto, usando o menor dos valores q ou $q - p$ podemos poupar tempo computacional para gerar alguma das curvas.

Exemplo 3.27: Considerando o teorema da dupla geração III, se $\frac{R}{r} = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, então pela equação 3.15 do Teorema 3.2 o período fundamental de $\mathcal{E}[t; R, r, d]$ é $2\pi q$. Como

$$\frac{d\frac{R}{r}}{d\frac{R+r}{r}} = \frac{R}{R+r} = \frac{p}{p+q}$$

e dado que $\text{mdc}(p, q) = 1$, então o $\text{mdc}(p, p + q) = 1$. Logo, o período fundamental de $\mathcal{H} \left[\frac{R+r}{r}t; d\frac{R}{r}, d\frac{R+r}{r}, R+r \right]$ é $2\pi(p + q)$. Portanto, usando o menor valor que é q podemos poupar tempo computacional para gerar alguma epitrocoide.

Para finalizar essa seção vamos mostrar mais uma conexão entre as hipotrocoides e epitrocoides, que provaremos utilizando os teoremas da dupla geração I e III.

Proposição 3.11: *Seja $\mathcal{E}[t; R, r, d]$ a epitrocoide descrita pelas equações paramétricas (3.8). Então,*

$$\mathcal{E}[t; R, r, d] = \mathcal{H}[t; R, -r, -d].$$

Demonstração: Pelo teorema da dupla geração I, temos que

$$\mathcal{H}[t; R, -r, -d] = \mathcal{H} \left[-\frac{R-(-r)}{-r}t; -d\frac{R}{-r}, -d\frac{R-(-r)}{-r}, R-(-r) \right],$$

ou seja,

$$\mathcal{H}[t; R, -r, -d] = \mathcal{H} \left[\frac{R+r}{r}t; d\frac{R}{r}, d\frac{R+r}{r}, R+r \right].$$

Mas, do teorema da dupla geração III, tem-se

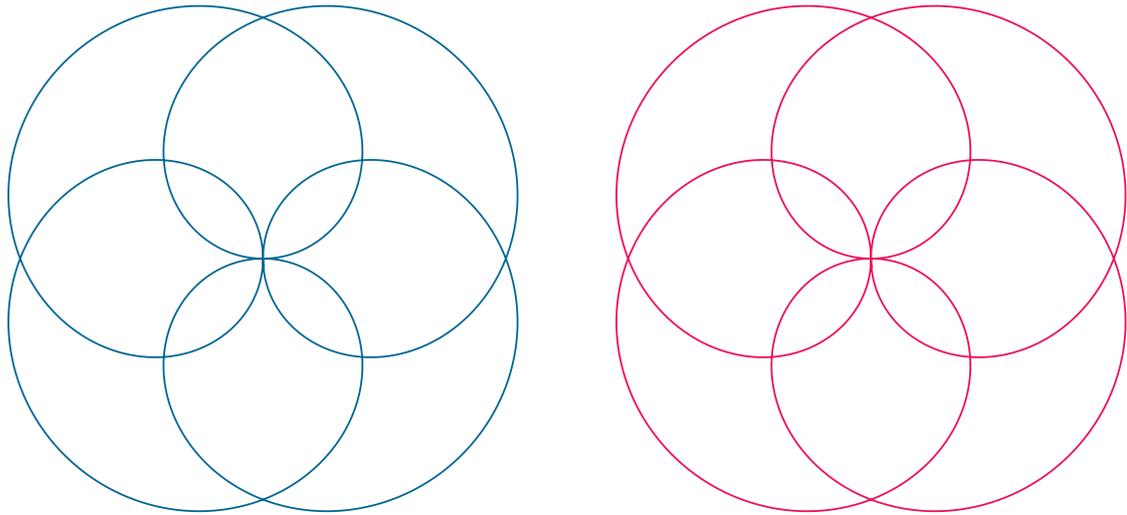
$$\mathcal{E}[t; R, r, d] = \mathcal{H} \left[\frac{R+r}{r}t; d\frac{R}{r}, d\frac{R+r}{r}, R+r \right],$$

então, destas duas últimas equações concluímos que

$$\mathcal{E}[t; R, r, d] = \mathcal{H}[t; R, -r, -d].$$

■

Exemplo 3.28: Pela Proposição 3.11 a epitrocoide $\mathcal{E}[t; 4, 1, 5]$ pode ser gerada como sendo a hipotrocoide $\mathcal{H}[t; 4, -1, -5]$. A Figura 3.40 mostra o comparativo entre as duas curvas.



(a) $\mathcal{E}[t; 4, 1, 5]$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $\mathcal{H}[t; 4, -1, -5]$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Figura 3.40: Outra conexão entre hipotrocoides e epitrocoides

Diferentemente dos teoremas da dupla geração, a Proposição 3.11 produz hipotrocoides e epitrocoides com as mesmas equações paramétricas, cujas representações produzem o mesmo traço e apresentam o mesmo período fundamental.

Capítulo 4

Aplicações para o ensino médio

Neste capítulo vamos sugerir algumas ideias e atividades nas quais o professor de matemática da educação básica, em especial do ensino médio, poderá utilizar para que o estudante entenda que as curvas geradas pelo espirógrafo podem ser descritas através de expressões matemáticas e podem ser modeladas por meio de recursos computacionais, sensibilizando-o para que o mesmo perceba que a matemática está presente em vários aspectos do nosso cotidiano.

Sugerimos que o tema do espirógrafo seja abordado como uma forma de relacionar e contextualizar os conteúdos de funções trigonométricas e geometria analítica.

Para que o aluno perceba como esses conteúdos da matemática podem ser empregados no estudo do espirógrafo, o professor poderá argumentar que as funções trigonométricas servem para modelar e estudar fenômenos periódicos e que a geometria analítica permite estabelecer uma correspondência entre equações algébricas e curvas geométricas.

Após os estudos dos conceitos principais das funções trigonométricas, tais como domínio, imagem, período, amplitude, paridade e gráfico, o professor poderá abordar o tema do espirógrafo apresentando as equações paramétricas (3.4) da hipotrocoide e as equações paramétricas (3.8) da epitrocoide e, em seguida, trabalhar algumas ideias contidas no capítulo 2 e 3, tais como a noção de parametrização, a relação entre os raios das circunferências para o fechamento da curva e o cálculo para obter o período fundamental das hipotrocoides e epitrocoides.

Para que o aluno veja como funciona o espirógrafo e possa visualizar de maneira dinâmica as diversas curvas que o mesmo gera sugerimos algumas atividades a seguir usando o *software* GeoGebra¹.

¹Neste trabalho utilizamos a versão *Geogebra Classic 5.0*

4.1 Atividade 1: modelando o espirógrafo

Descrição

- Por meio dessa atividade os estudantes poderão modelar as curvas geradas pelo espirógrafo utilizando o *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

Objetivo

- Construir animações por meio do *software* GeoGebra para modelar e compreender o funcionamento do espirógrafo.

Público alvo

- Alunos do ensino médio.

Pré-requisitos

- Conhecimentos básicos de informática, familiaridade com o *software* GeoGebra e computadores com o GeoGebra instalado.

Desenvolvimento da atividade

1. Inicialize o GeoGebra.
2. Clique no ícone Controle Deslizante  e crie os seguintes controles deslizantes:
 - R: intervalo (min: 0, max: 50);
 - r: intervalo (min: 0, max: 50);
 - d: intervalo (min: 0, max: 100);
 - t: intervalo (min: 0, max: 200, Incremento: 0.01); Animação (Velocidade: 0.1, Repetir: Crescente).
3. No campo Entrada digite $O=(0,0)$ criando assim o ponto O na origem do sistema cartesiano.
4. No campo Entrada digite $\text{Círculo}(O, R)$ e dê ENTER para criar o círculo de centro O e raio R.
5. No campo Entrada digite $f(x)=(R-r)*\cos(x)+d*\cos(((R-r)/r)*x)$ e dê ENTER para criar a função trigonométrica $f(x)$.
6. No campo Entrada digite $g(x)=(R-r)*\text{sen}(x)-d*\text{sen}(((R-r)/r)*x)$ e dê ENTER para criar a função trigonométrica $g(x)$.

7. Na Janela de Álgebra clique com o botão direito do mouse sobre as funções $f(x)$ e $g(x)$ e clique no ícone Exibir Objeto  para esconder as funções $f(x)$ e $g(x)$.
8. No campo Entrada digite $a: \text{Curva}(f(s), g(s), s, 0, t)$ para criar a curva hipotrocoide.
9. No campo Entrada digite $P=a(t)$ para mostrar o ponto P descrevendo uma hipotrocoide.
10. No campo Entrada digite $C=((R-r)*\cos(t), (R-r)*\text{sen}(t))$ para criar o centro C da circunferência que gira tangencialmente por dentro da circunferência fixa criada no passo 4.
11. No campo Entrada digite $\text{Círculo}(C, r)$ para criar a circunferência de que gira tangencialmente por dentro da circunferência fixa criada no passo 4.
12. No campo Entrada digite $\text{Segmento}(C, P)$ para mostrar o segmento de reta de C até P , cujo comprimento é representado pelo parâmetro d .
13. Atribua diferentes valores para os parâmetros R, r e d .
14. Clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante t e clique em **Animar**, para mostrar a animação do círculo girando tangencialmente por dentro da circunferência fixa e com o ponto P descrevendo uma hipotrocoide.

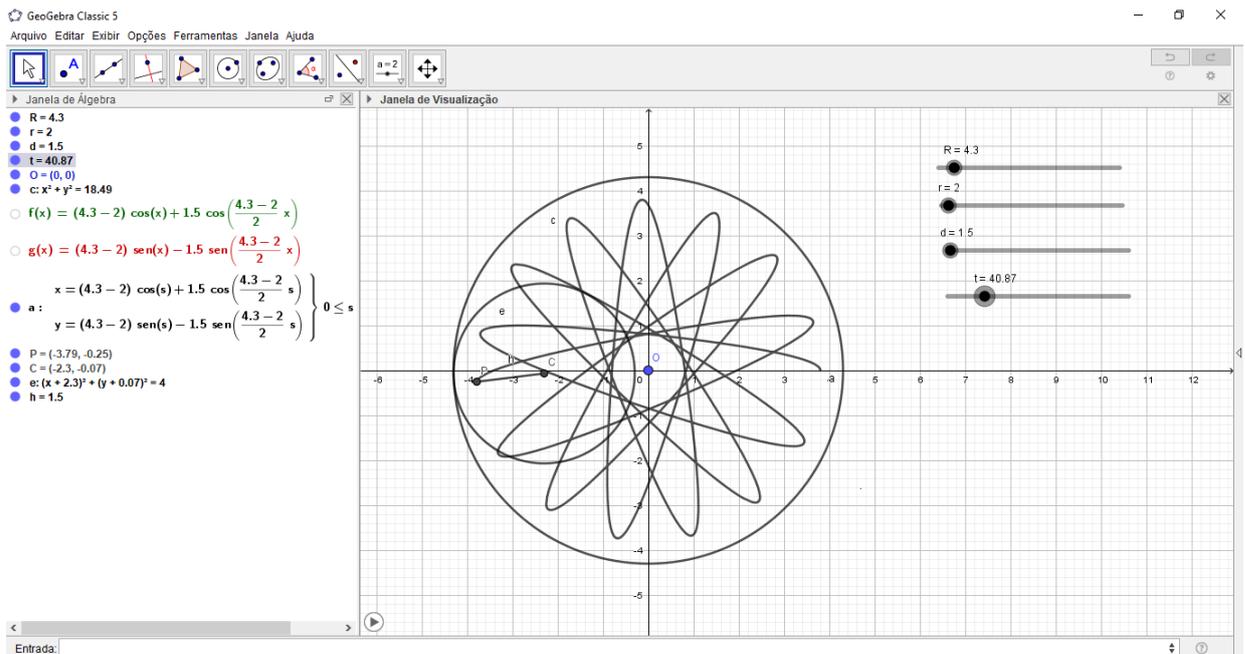


Figura 4.1: Resultado após a aplicação dos 14 passos.

15. Para melhorar a visualização das curvas, sugerimos mexer nas configurações do GeoGebra para retirar os eixos, a malha e alterar a cor da curva.
16. Para descrever as epitrocoides, abra outra janela do GeoGebra e siga os mesmos passos, porém alterando a função $f(x)$ do passo 5 por $f(x)=(R+r)\cos(x)-d\cos((R+r)/r)x$ e a função $g(x)$ do passo 6 por $g(x)=(R+r)\sin(x)-d\sin((R+r)/r)x$ e altere o centro C da circunferência no passo 10 por $C=((R+r)\cos(t), (R+r)\sin(t))$.

Dê um tempo aos estudantes para que atribuam diferentes valores para os parâmetros R , r e d e se deleitem com as curvas geradas e, em seguida, peça para que salvem os arquivos construídos.

4.2 Atividade 2: conhecendo algumas curvas clássicas

Descrição

- Nesta atividade os alunos serão levados a fazer investigações para identificar certos padrões das hipotrocoides e epitrocoides e conhecer as curvas clássicas.

Objetivo

- Conhecer as curvas clássicas (circunferência, elipse, deltoide, astroide, cardioide, nefroide, *limaçons* e rosáceas) utilizando o GeoGebra.

Público alvo

- Alunos do ensino médio.

Pré-requisitos

- Conhecimentos básicos de informática, familiaridade com o *software* GeoGebra, computadores com o GeoGebra instalado e os arquivos gerados pela Atividade 1.

Desenvolvimento da atividade

1. Inicialize o GeoGebra e abra o arquivo das hipotrocoides gerado pela atividade 1.
2. Atribua valores para R , r e d de tal forma que $R \neq r$ e $d = 0$. Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre o parâmetro t e escolha a opção **Animar**, isto irá gerar uma *circunferência*, veja a Figura 4.2.

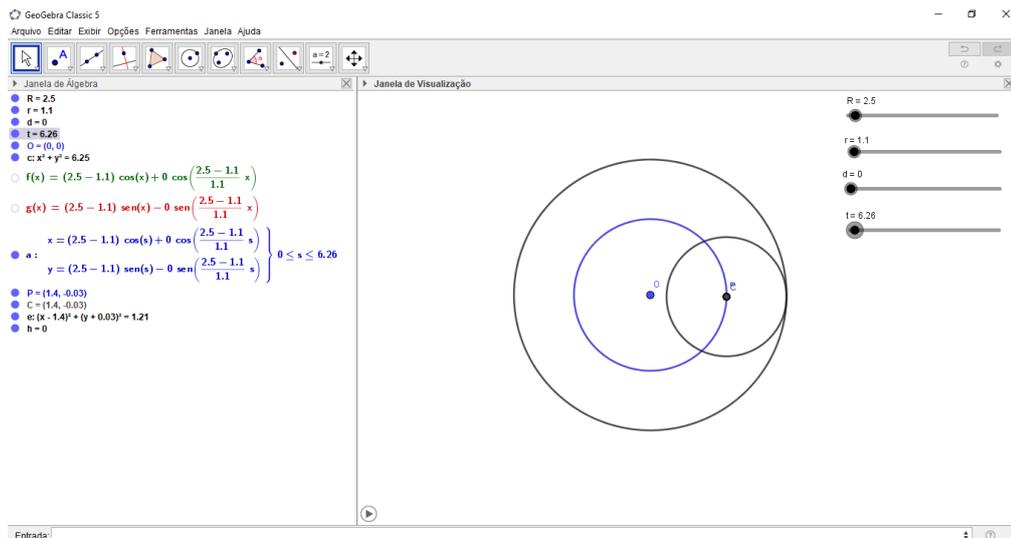


Figura 4.2: Resultado após aplicar o 2º passo da atividade 2.

- Atribua valores para R , r e d de tal forma que $R = 2r$, $r \neq d$ e $d \neq 0$, por exemplo $R = 4$, $r = 2$ e $d = 1$. Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre o parâmetro t e escolha a opção **Animar**, isto irá gerar uma *elipse*, veja a Figura 4.3.

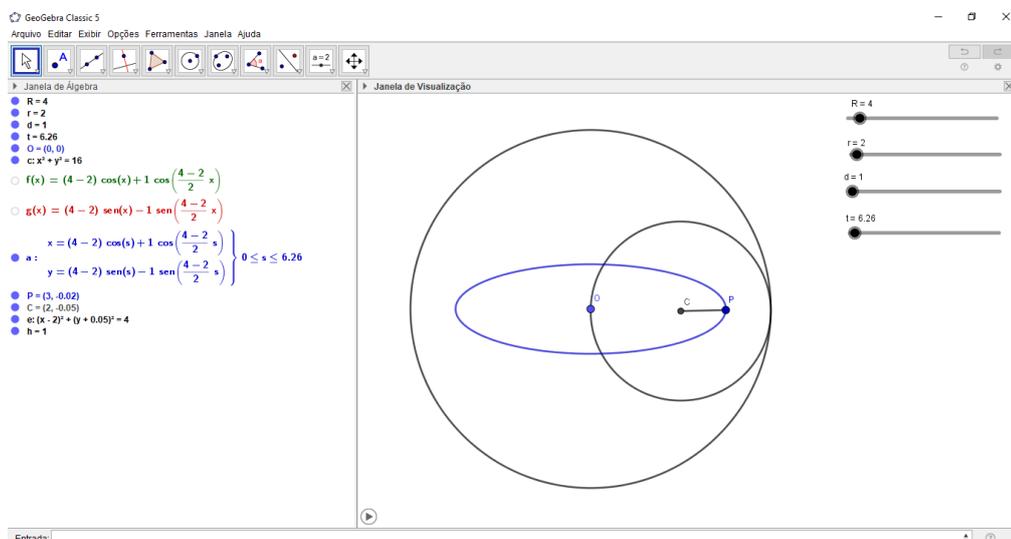


Figura 4.3: Resultado após aplicar o 3º passo da atividade 2.

Questão 1: Mantendo os valores de R e r , o que acontece com a elipse quando variamos o valor de d ?

- Atribua valores para R , r e d de tal forma que $R = 3r$ e $d = r$, por exemplo $R = 3$, $r = 1$ e $d = 1$. Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre o parâmetro t e escolha a opção **Animar**, isto irá gerar uma *deltoide*, veja a Figura 4.4.

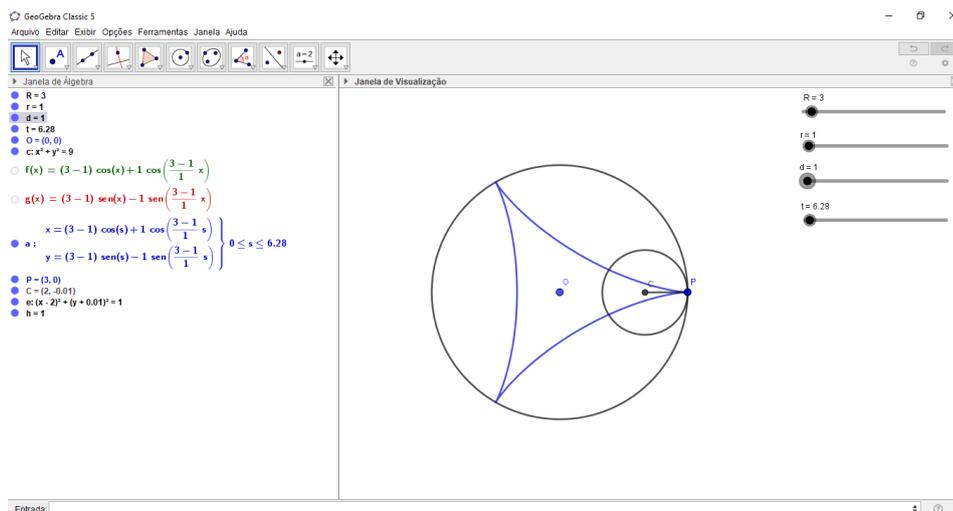


Figura 4.4: Resultado após aplicar o 4º passo da atividade 2.

Questão 2: Mantendo os valores de R e r , o que acontece com a deltoide quando variamos o valor de d ?

Questão 3: O que acontece com o gráfico se duplicarmos os valores iniciais de R , r e d ? E se triplicarmos? E se reduzirmos pela metade?

- Atribua valores para R , r e d de tal forma que $R = 4r$ e $d = r$, por exemplo, $R = 4$, $r = 1$ e $d = 1$. Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre o parâmetro t e escolha a opção **Animar**, isto irá gerar uma *astroide*, veja a Figura 4.5.

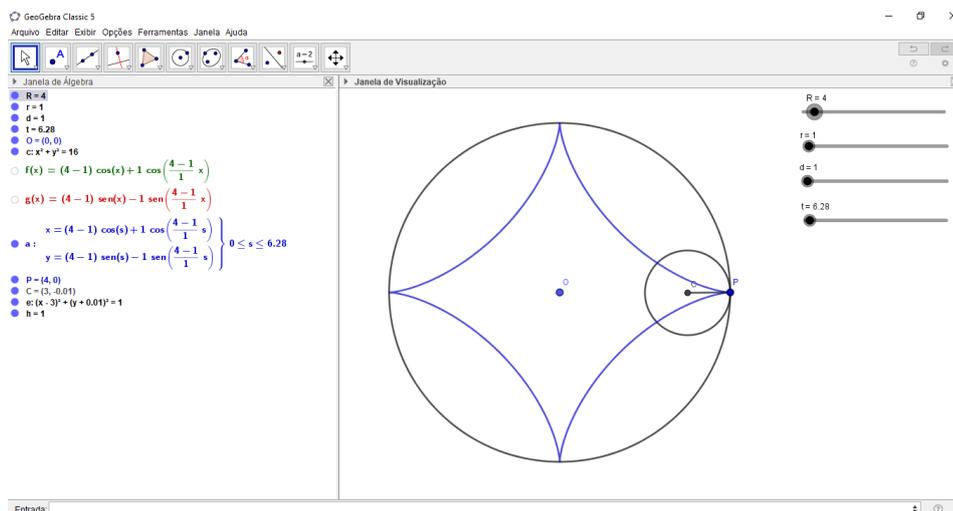


Figura 4.5: Resultado após aplicar o 5º passo da atividade 2.

Questão 4: Mantendo os valores de R e r o que acontece com a astroide quando variamos o valor de d ?

Questão 5: O que acontece com o gráfico se fizermos $R = 5r$ e $d = r$? E se fizermos $R = 6r$ e $d = r$?

6. Atribua valores para R , r e d de tal forma que $d = R - r$, por exemplo $R = 4$, $r = 1.5$ e $d = 2.5$. Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre o parâmetro t e escolha a opção **Animar**, isto irá gerar uma *rosácea*, veja a Figura 4.6.

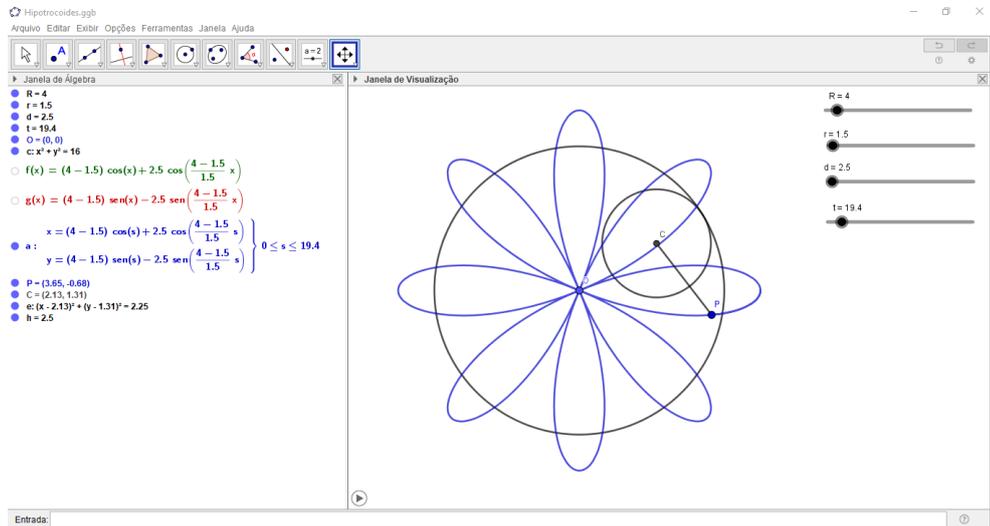


Figura 4.6: Resultado após aplicar o 6º passo da atividade 2.

7. Vá em **Arquivo** e clique em **Nova Janela**, em seguida, abra o arquivo das epitrocoides gerado pela atividade 1.
8. Atribua valores para R , r e d de tal forma que $R = r$ e $d = r$, por exemplo, $R = 1$, $r = 1$ e $d = 1$. Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre o parâmetro t e escolha a opção **Animar**, isto irá gerar uma *cardioide*, veja a Figura 4.7.

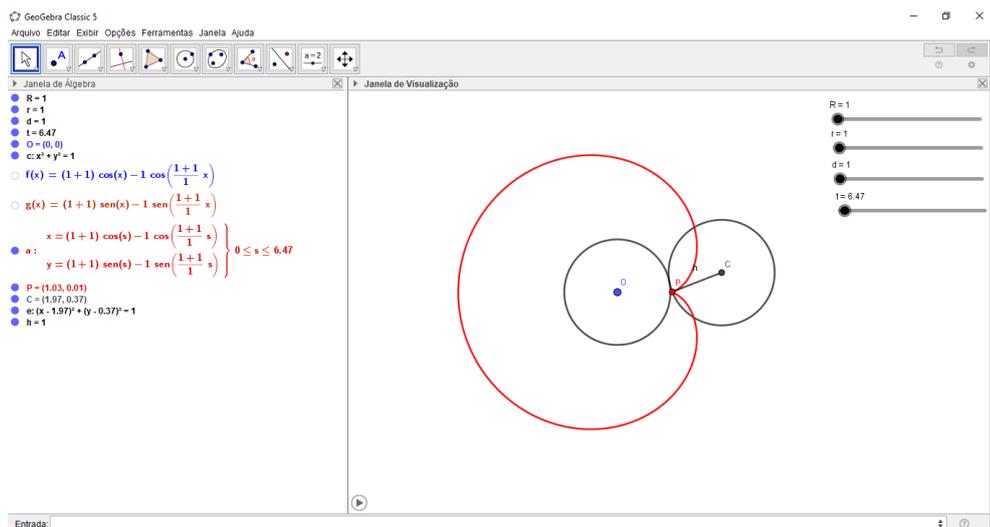


Figura 4.7: Resultado após aplicar o 8º passo da atividade 2.

9. Atribua valores para R , r e d de tal forma que $R = r$ e $d \neq r$, por exemplo, $R = 1$, $r = 1$ e $d = 3$. Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre o parâmetro t e escolha a opção **Animar**, isto irá gerar uma *limaçon*, veja a Figura 4.8.

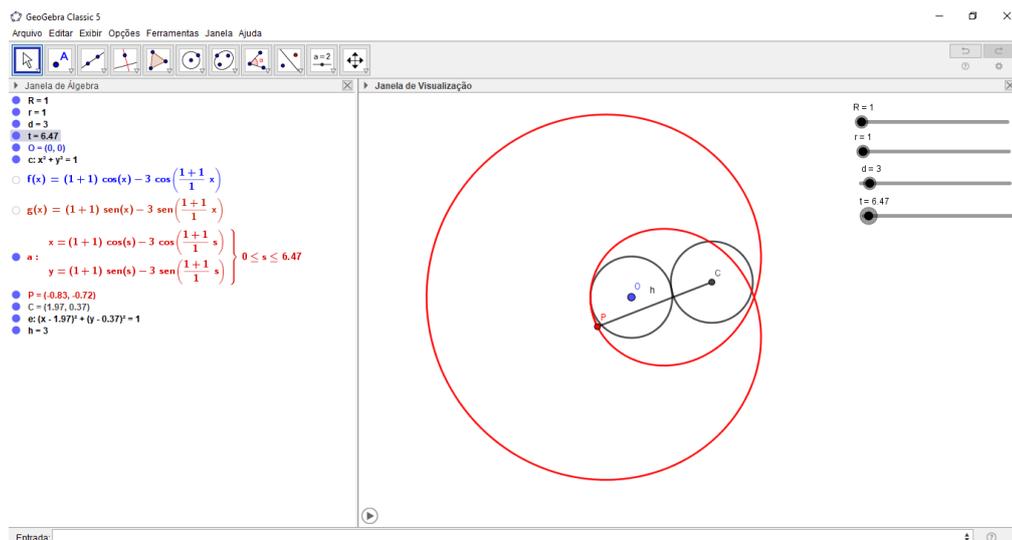


Figura 4.8: Resultado após aplicar o 9º passo da atividade 2.

10. Atribua valores para R , r e d de tal forma que $R = 2r$ e $d = r$, por exemplo, $R = 2$, $r = 1$ e $d = 1$. Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre o parâmetro t e escolha a opção *Animar*, isto irá gerar uma *nefroide*, veja a Figura 4.9.

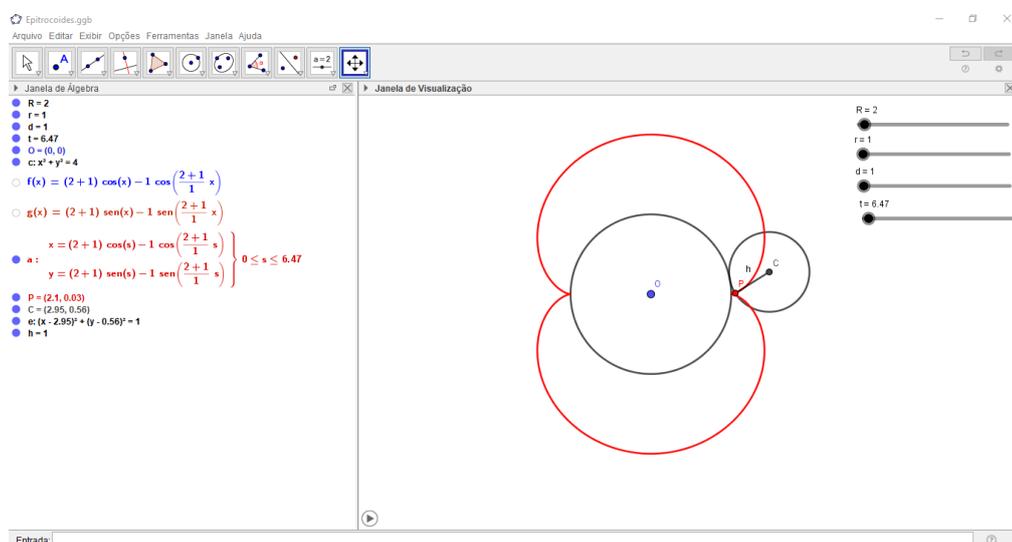


Figura 4.9: Resultado após aplicar o 10º passo da atividade 2.

Questão 6: Mantendo os valores de R e r o que acontece com a nefroide quando variamos o valor de d ?

Questão 7: O que acontece com o gráfico se fizermos $R = 3r$ e $d = r$? E se fizermos $R = 4r$ e $d = r$?

4.3 Atividade 3: Construção de figuras para colorir

Descrição

- Nesta atividade os alunos poderão criar figuras para colorir por meio da sobreposição das curvas hipotrocoides e epitrocoides utilizando o GeoGebra.

Objetivo

- Criar figuras para colorir utilizando o GeoGebra.

Público alvo

- Alunos do ensino médio.

Pré-requisitos

- Conhecimentos básicos de informática, familiaridade com o *software* GeoGebra e computadores com o GeoGebra instalado.

Desenvolvimento da atividade

1. Inicialize o GeoGebra.

2. Clique no ícone Controle Deslizante  e crie os seguintes controles deslizantes:

- R_1 : intervalo (min: 0, max: 50) e Controle Deslizante (vertical);
- r_1 : intervalo (min: 0, max: 50) e Controle Deslizante (vertical);
- d_1 : intervalo (min: 0, max: 50) e Controle Deslizante (vertical).

3. Clique com o botão direito do mouse em cima de cada controle deslizante e clique em Propriedades. Na aba Controle Deslizante vá em Estilo e troque a Largura de 200 px para 100 px.

4. Repita os passos 2 e 3 criando os controles deslizantes R_2 , r_2 , d_2 , R_3 , r_3 e d_3 .

5. Ajuste todos os controles deslizantes na tela de modo que achar melhor.

6. Mexa nas configurações do GeoGebra retirando a malha e os eixos OX e OY.

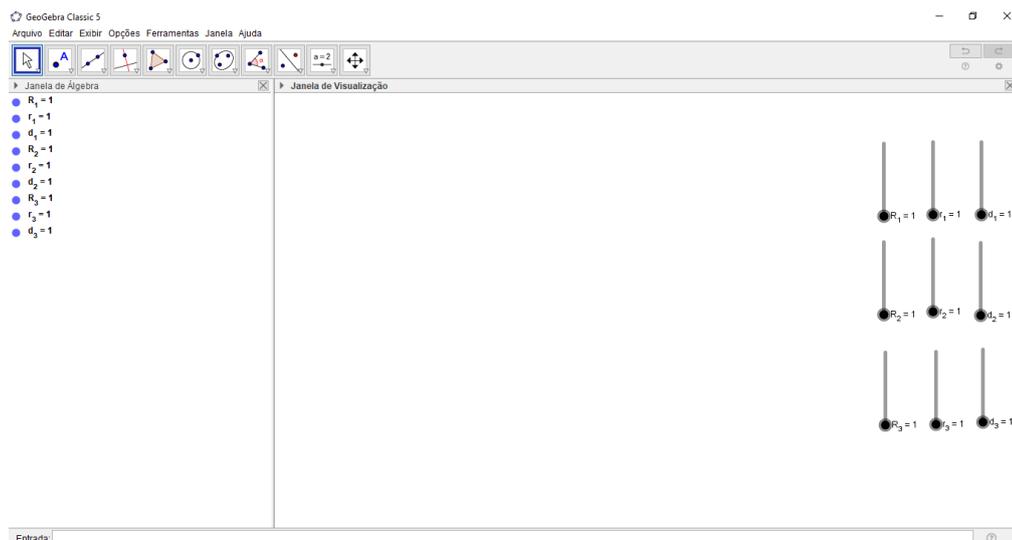


Figura 4.10: Resultado após aplicar o 6^o passo da atividade 3.

7. No campo **Entrada** digite $f_1(x) = (R_1 - r_1) \cdot \cos(x) + d_1 \cdot \cos\left(\frac{(R_1 - r_1)}{r_1} \cdot x\right)$ e dê ENTER para criar a função trigonométrica $f_1(x)$.
8. No campo **Entrada** digite $g_1(x) = (R_1 - r_1) \cdot \sin(x) - d_1 \cdot \sin\left(\frac{(R_1 - r_1)}{r_1} \cdot x\right)$ e dê ENTER para criar a função trigonométrica $g_1(x)$.
9. Na **Janela de Álgebra** clique com o botão direito do mouse sobre as funções $f_1(x)$ e $g_1(x)$ e clique no ícone **Exibir Objeto**  para esconder as funções $f_1(x)$ e $g_1(x)$.
10. Repita os passos 7 e 8 para criar as funções $f_2(x)$ e $g_2(x)$ utilizando os parâmetros R_2 , r_2 e d_2 e para criar as funções $f_3(x)$ e $g_3(x)$ utilizando os parâmetros R_3 , r_3 e d_3 .
11. Repita o passo 9 para esconder as funções $f_2(x)$, $g_2(x)$, $f_3(x)$ e $g_3(x)$.
12. Agora vamos criar três números em função dos parâmetros definidos. No campo **Entrada** digite $a_1: 2 \cdot \pi \cdot \text{Denominador}(R_1/r_1)$ criando o número a_1 . Repita o processo para criar o número a_2 utilizando os parâmetros R_2 e r_2 e para o criar o número a_3 utilizando os parâmetros R_3 e r_3 , veja a Figura 4.11.

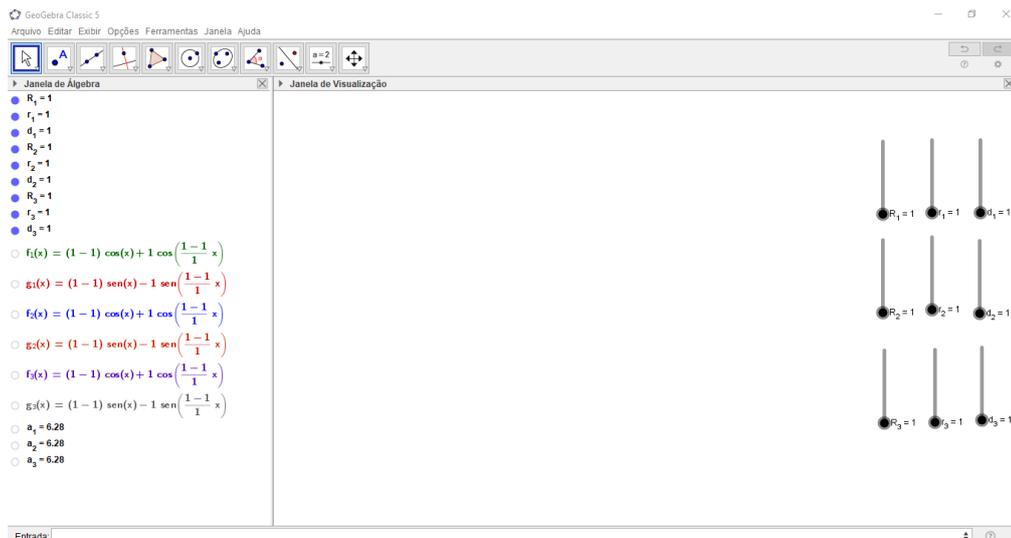


Figura 4.11: Resultado após aplicar o 12^o passo da atividade 3.

13. No campo Entrada digite a:Curva(f_1(s), g_1(s), s, 0, a_1) para criar a curva a.
14. No campo Entrada digite b:Curva(f_2(u), g_2(u), u, 0, a_2) para criar a curva b.
15. No campo Entrada digite c:Curva(f_3(v), g_3(v), v, 0, a_3) para criar a curva c.
16. Modifique os parâmetros para ver as três curvas se sobrepondo, veja a Figura 4.12.

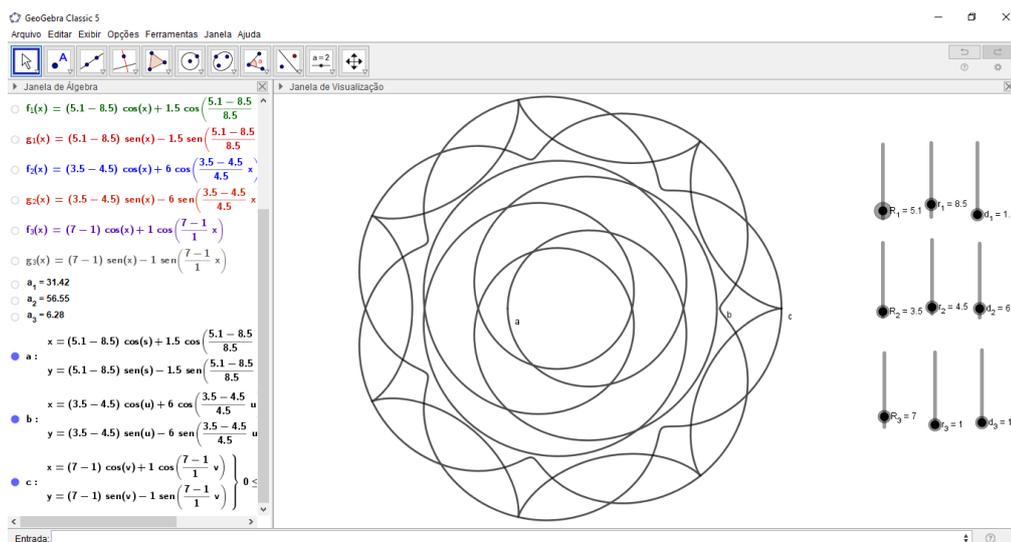


Figura 4.12: Resultado após aplicar o 16^o passo da atividade 3.

17. Na Janela de Álgebra clique com o botão direito do mouse sobre as curvas a, b e c e clique em Exibir Rótulo para esconder os rótulos das curvas.

18. Modifique os parâmetros para criar diversas figuras, em seguida exporte as figuras para um programa de impressão para que você possa colorir. A Figura 4.13 mostra algumas imagens que foram criadas aplicando os passos da atividade 3.

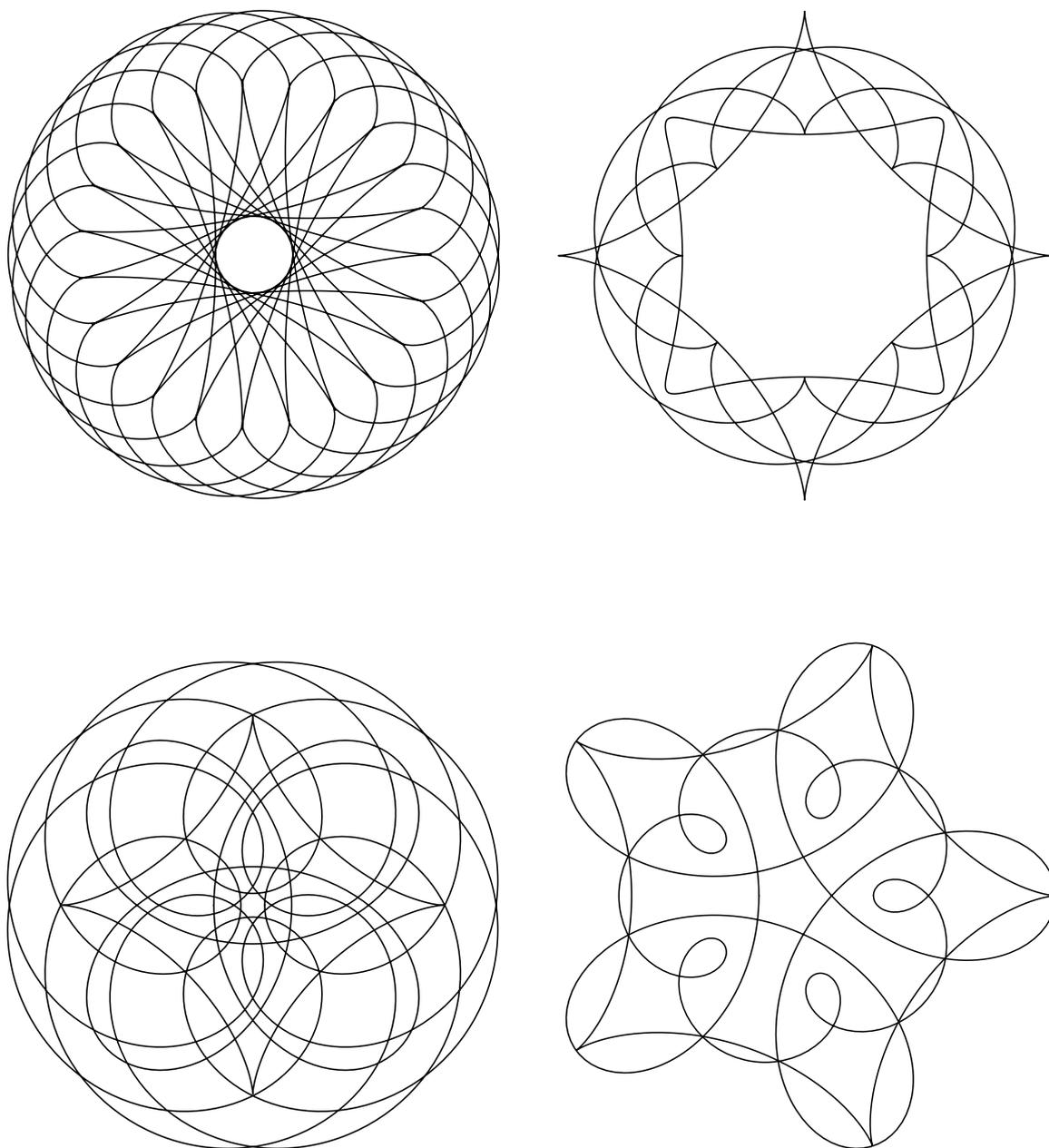


Figura 4.13: Figuras criadas utilizando os passos da atividade 3.

4.4 Comentários gerais sobre as atividades 1, 2 e 3

Além das orientações contidas no início do capítulo sugerimos outros momentos que podem complementar as atividades 1, 2 e 3 propostas, tornando a experiência ainda mais rica.

Como motivação inicial para a atividade 1, sugerimos que o professor reproduza o episódio 04, da 5ª temporada do programa “Isto é Matemática”, promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática e apresentado pelo matemático Rogério Martins. O episódio (ver SPM), intitulado “O Espirógrafo” começa informando sobre a curva cicloide para introduzir o espirógrafo e suas aplicações, a Figura 4.14 mostra um *screenshot* do episódio.



Figura 4.14: *Screenshot* do episódio 04 da 5ª temporada do programa “Isto é Matemática”.

Fonte: SPM

Ao final da atividade 1 os estudantes do ensino médio poderão compreender que a matemática juntamente com o computador nos permite estudar e descrever diversos fenômenos e situações do cotidiano, em particular, o espirógrafo.

Para complementar a atividade 2, sugerimos que o professor prepare uma apresentação com o contexto histórico e algumas aplicações das curvas clássicas.

Por fim, para a atividade 3 sugerimos que, após os alunos pintarem as figuras que eles criaram, seja feita uma exposição para que todos possam ver o quão bela e interessante é a matemática.

Considerações finais

Este trabalho teve como um de seus principais objetivos sugerir ideias e atividades utilizando o software GeoGebra para explicar e modelar o funcionamento do brinquedo espirógrafo como uma forma de promover a contextualização de conteúdos da matemática que são tratados no ensino médio.

Utilizar essas metodologias de ensino para trabalhar a matemática em sala de aula está, como justificamos no decorrer do trabalho, em perfeita concordância com os documentos nacionais que regulamentam o ensino no Brasil e com as teorias educacionais modernas.

O ensino de matemática não pode ficar pautado apenas na memorização excessiva de fórmulas e procedimentos para resolver expressões matemáticas, como geralmente acontece, é necessário criar ações didático-pedagógicas que permitam os estudantes a realizar atividades de manipulação, experimentação, exploração, visualização, modelação e representação, e essas ações são a essência das atividades propostas.

É claro que as atividades propostas do capítulo 4 não são a única forma de abordar o espirógrafo em sala de aula. Por exemplo, o trabalho de Martini et al. (2016) propõe, por meio da modelagem matemática, uma investigação para ver qual a influência que cada furo das engrenagens do espirógrafo tem na construção das figuras geradas pelo brinquedo. Por meio desta abordagem podem ser explorados conceitos da aritmética modular (máximo divisor comum, divisão euclidiana, etc.), conceitos estes que, também, são trabalhados na educação básica.

Logo, para que os professores possam promover aprendizagens significativas e conectadas com o cotidiano dos alunos é necessário uma busca constante de atividades, métodos e especializações. Espera-se que este trabalho tenha contribuído nesse sentido.

Outra importante parte desse trabalho foi fazer um estudo inicial sobre as curvas hipotrocoides e epitrocoides. Como já foi mencionado na introdução desta dissertação, o enfoque dado a essas curvas é um tanto diferente do enfoque dado, geralmente, nos livros de cálculo diferencial e integral e geometria das curvas planas.

O estudo se concentrou em mostrar, com as devidas demonstrações, que algumas curvas clássicas (circunferência, elipse, deltoide, astroide, cardioide, nefroide, *limaçons* e rosáceas) são casos particulares de epitrocoides e hipotrocoides. Verdade seja dita, os livros e as referências consultadas até mencionam esse fato, mas não apresentam a prova.

Então este trabalho teve como uma de suas metas específicas fechar essas lacunas.

Outros resultados que as referências consultadas apresentam como triviais ou óbvios é o cálculo para obter o período fundamental das hipotrocoides e epitrocoides e o número de cúspides das hipocicloides e epicicloides. Em contrapartida, neste trabalho tratamos esses dois assuntos com o devido rigor necessário.

Os teoremas da dupla geração, que representam um resultado clássico das hipotrocoides e epitrocoides, é outro destaque do trabalho que foi abordado com as suas respectivas demonstrações.

Pode parecer que as demonstrações e o rigor apresentado no trabalho dificultem a compreensão das propriedades das hipotrocoides e epitrocoides, mas se o leitor tiver domínio sobre as noções fundamentais apresentadas no capítulo 2 e sobre trigonometria, então o trabalho pode ser desfrutado com bastante facilidade.

Além de tudo isso, há no decorrer de todo o trabalho várias ilustrações que foram criadas por meio do *software* de editoração de textos técnicos e científicos L^AT_EX. Através de pacotes específicos deste sistema, foram criados para este trabalho belas ilustrações que ajudam o leitor a compreender tudo o que está sendo abordado e discutido. Outros *softwares* também foram usados na criação das ilustrações. Para saber mais sobre isso, o leitor poderá consultar o **apêndice A** deste trabalho.

Como escrito anteriormente, este trabalho apresenta apenas um estudo inicial das hipotrocoides e epitrocoides. Logo, é possível por meio de outras abordagens aumentar o conhecimento que aqui foi exposto. Por exemplo, por meio do cálculo diferencial e integral podemos obter retas tangentes, determinar o comprimento de arco, calcular a área sobre essas curvas, como já foi mencionado na introdução. E por meio da geometria das curvas planas, pode-se abordar temas como vetor velocidade, vetor aceleração, reparametrização, evolutas e involutas. O assunto, é de fato, bastante amplo e fecundo.

Portanto, espera-se que este trabalho tenha contribuído de forma significativa para o conhecimento das hipotrocoides e epitrocoides e colaborado para o ensino da matemática na educação básica, permitindo que o professor relacione a matemática como o cotidiano dos alunos.

Referências Bibliográficas

- Alencar, H. e Santos, W. (2002). *Geometria das curvas planas*. UFG, Goiânia.
- Andrade, L. N. (2014). *Um brinquedo chamado espirografo*. Disponível em: <<http://www.mat.ufpb.br/lenimar/textos/espirografo.pdf>>. Acesso em: 12 Set. 2018.
- Braggs, S. (s.d.). *Spirograph*. Disponível em: <https://www.retrowow.co.uk/retro_collectibles/60s/spirograph.php>. Acesso em: 12 Set. 2018.
- Brasil (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretária de Educação Média e Tecnológica. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 12 Set. 2018.
- Brasil (2006). *Orientações curriculares para o ensino médio*. Vol. 2: Ciência da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretária de Educação Básica. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 12 Set. 2018.
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação/Secretária de Educação Básica. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 20 Abr. 2019.
- Coopee, T. (2015). *Spirograph from Kenner (1965)*. Disponível em: <<https://toytales.ca/spirograph/>>. Acesso em: 18 Abr. 2019.
- Delgado, J., Frensel, K., e Crissaff, L. (2017). *Geometria Analítica*. Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro.
- Hall, L. M. (1992). *Trochoids, roses, and thorns—beyond the spirograph*. The College Mathematics Journal, v. 23, n. 1, p.20–35, Taylor & Francis. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2686194>>. Acesso em: 31 Jan. 2019.
- History, N. M. o. A. (s.d.). *Toy, Spirograph*. Smithsonian Institution. Disponível em: <https://americanhistory.si.edu/collections/search/object/nmah_1292825>. Acesso em: 14 Abr. 2019.

- Kahootz, T. (2014). *Spirograph design tin instruction guide*. Disponível em: <<https://www.kahootztoys.com/spirograph-tin.html>>. Acesso em: 18 Abr. 2019.
- Madison, A. (2017). *The History of the Spirograph*. Disponível em: <<https://howtoadult.com/history-spirograph-5376057.html>>. Acesso em: 18 Abr. 2019.
- Martini, G., Chang, P., Michelson, L. L., Mendonça, S. C., e Vertuan, R. E. (2016). *Modelagem matemática com os desenhos construídos pela régua mágica*. IV ENDICT - Encontro de Iniciação Científica, Toledo. Disponível em: <<http://www.utfpr.edu.br/toledo/estrutura-universitaria/diretorias/dirppg/encontro-de-iniciacao-cientifica-do-campus-toledo/GuilhermedeMartiniartigoCompleto.pdf>>. Acesso em: 21 Abr. 2019.
- Mózer, G. S. e Bortolossi, H. J. (2016). *Para que servem os números irracionais? Além das fórmulas de perímetros, áreas e volumes*. 2^o Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste. 1^a ed. SBM, Rio de Janeiro. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/07/Simposio_Nordeste_-Para-que-servem-os-numeros-irracionais.pdf>. Acesso em: 12 Set. 2018.
- Phan-Yamada, T. e Gwin, E. (2014). *Hypocycloids and hypotrochoids*. MathAMATYC Educator J. v. 6, n. 1, p.5–17. Disponível em: <https://c.ymcdn.com/sites/www.amatyc.org/resource/resmgr/Summer_Reading_2015/Hypocycloids-Sept2014.pdf>. Acesso em: 12 Set. 2018.
- SPM (s.d.). *Isto é Matemática: o espirógrafo*. Direção de Produção: Pedro Miguel Paiva. Apresentador: Rogério Martins. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=ieVefMuW2jA>>. Acesso em: 16 Abr. 2019.
- Stewart, J. (2013). *Cálculo*. Tradução da 7^a edição norte-americana. Cengage Learning, São Paulo. v. 2. ISBN 978-85-221-1463-4.
- Vainsencher, I. (2009). *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. Coleção Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro.

Apêndice A

Plotando gráficos de hipotrocoides e epitrocoides utilizando o L^AT_EX

As figuras deste trabalho foram construídas utilizando-se de três ferramentas computacionais de código aberto e gratuitos:

- o editor de gráficos vetoriais `ipe`²;
- o *software* de geometria dinâmica `GeoGebra`³ e
- o sistema de editoração de textos técnicos e científicos L^AT_EX⁴.

Por meio do `ipe`, por exemplo, foram construídas as Figuras 2.11 e 2.13.

Com o `GeoGebra` construímos uma grande parte das figuras que estão presentes neste trabalho. Basicamente todas as figuras que apresentam o sistema de eixos ortogonais e o sistema de coordenadas polares foram produzidas utilizando o `GeoGebra`.

Já o restante das figuras foram produzidas com o pacote `pgfplots` do L^AT_EX que permite plotar gráficos utilizando equações paramétricas, por exemplo, as hipotrocoides da Figura 3.7 e as epitrocoides da Figura 3.8 foram produzidas utilizando o `pgfplots`.

Este apêndice é dedicado ao leitor curioso que quer estudar e plotar gráficos de hipotrocoides e epitrocoides sem precisar sair do L^AT_EX. Para tanto, disponibilizamos a seguir as instruções computacionais que utilizamos para plotar essas curvas.

²Pode ser baixado acessando o link <https://ipe.otfried.org/>

³Pode ser baixado acessando o link <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>

⁴Para a distribuição de sistemas windows acesse o link <https://miktex.org/>

Plotando gráficos de hipotrocoides

Utilize um editor de textos L^AT_EX de sua preferência e escreva o código a seguir que criamos para plotar gráficos de hipotrocoides.

```
1 \documentclass{standalone}
2 \usepackage{pgfplots}
3 \newcommand{\Hfuncx}[3]{(#1-#2)*(cos(deg(t)))+#3*(cos(deg(((#1)/(#2))-1*t)))}
4 \newcommand{\Hfuncy}[3]{(#1-#2)*(sin(deg(t)))-#3*(sin(deg(((#1)/(#2))-1*t)))}
5
6 \begin{document}
7 \begin{tikzpicture}[scale=2]
8 \begin{axis}[hide axis, enlarge x limits=0.01, enlarge y limits=0.01,%
9 axis equal image]
10 \addplot[color=COR,domain=a:b,samples=2000,variable=\t](%
11 {\Hfuncx{R}{r}{d}},%
12 {\Hfuncy{R}{r}{d}}%
13 );
14 \end{axis}
15 \end{tikzpicture}
16 \end{document}
```

As instruções da linha 3 e 4, é uma *macro* que nos permite escrever as equações paramétricas da hipotrocoide de forma mais rápida digitando apenas os valores dos parâmetros fixos R, r e d. Logo, não se deve alterar essas instruções.

A instrução da linha 10, deve ser alterada de acordo com as características do gráfico que se queira fazer:

- em `color=COR` deve-se substituir COR pelo nome da cor em inglês (*blue*, *red*, *yellow*, *cyan*, etc.) para gerar a curva com a cor que lhe foi atribuída;
- em `domain=a:b`, devemos substituir a e b pelos valores dos extremos do intervalo no qual a curva está definida, onde a representa o valor inicial e b representa o valor final.

Nas instruções da linha 11 e 12 temos que, R, r e d representam os parâmetros fixos da hipotrocoide e devem ser substituídos por números de acordo com o gráfico que se deseja plotar.

Por exemplo, para plotar o gráfico da rosácea da Figura 3.7d, utilizamos o seguinte código:

```

1 \documentclass{standalone}
2 \usepackage{pgfplots}
3 \newcommand{\Hfuncx}[3]{(#1-#2)*(cos(deg(t)))+#3*(cos(deg(((#1)/(#2))-1)*t))}
4 \newcommand{\Hfuncy}[3]{(#1-#2)*(sin(deg(t)))-#3*(sin(deg(((#1)/(#2))-1)*t))}
5
6 \begin{document}
7 \begin{tikzpicture}[scale=2]
8 \begin{axis}[hide axis, enlarge x limits=0.01, enlarge y limits=0.01,%
9 axis equal image]
10 \addplot[color=red,domain=0:2*pi*5,samples=2000,variable=\t](%
11 {\Hfuncx{8}{5}{3}},%
12 {\Hfuncy{8}{5}{3}}%
13 );
14 \end{axis}
15 \end{tikzpicture}
16 \end{document}

```

Portanto, utilizando o código fornecido é possível plotar o gráfico de qualquer hipotrocoide sem precisar sair do L^AT_EX.

Plotando gráficos de epitrocoides

Seguindo as mesmas orientações da seção anterior e utilizando o código a seguir, podemos plotar o gráfico de qualquer epitrocoide sem precisar sair do L^AT_EX.

```

1 \documentclass{standalone}
2 \usepackage{pgfplots}
3 \newcommand{\Efuncx}[3]{(#1+#2)*(cos(deg(t)))-#3*(cos(deg(((#1)/(#2))+1)*t))}
4 \newcommand{\Efuncy}[3]{(#1+#2)*(sin(deg(t)))-#3*(sin(deg(((#1)/(#2))+1)*t))}
5
6 \begin{document}
7 \begin{tikzpicture}[scale=2]
8 \begin{axis}[hide axis, enlarge x limits=0.01, enlarge y limits=0.01,%
9 axis equal image]
10 \addplot[color=COR,domain=a:b,samples=2000,variable=\t](%
11 {\Efuncx{R}{r}{d}},%
12 {\Efuncy{R}{r}{d}}%
13 );
14 \end{axis}
15 \end{tikzpicture}
16 \end{document}

```

Por exemplo, para plotar o gráfico da epitrocoide da Figura 3.8g utilizamos o seguinte código:

```

1 \documentclass{standalone}
2 \usepackage{pgfplots}
3 \newcommand{\Efuncx}[3]{(#1+#2)*(cos(deg(t)))-#3*(cos(deg(((#1)/(#2))+1)*t))}
4 \newcommand{\Efuncy}[3]{(#1+#2)*(sin(deg(t)))-#3*(sin(deg(((#1)/(#2))+1)*t))}
5
6 \begin{document}
7 \begin{tikzpicture}[scale=2]
8 \begin{axis}[hide axis, enlarge x limits=0.01, enlarge y limits=0.01,%
9 axis equal image]
10 \addplot[color=blue,domain=0:2*pi*7,samples=2000,variable=\t](%
11 {\Efuncx{8}{7}{15}},%
12 {\Efuncy{8}{7}{15}}%
13 );
14 \end{axis}
15 \end{tikzpicture}
16 \end{document}

```

Sobreposição de curvas

Para plotar os gráficos das Figuras 3.10c e 3.10d que são constituídos de dez curvas que foram sobrepostas, utilizamos o comando de repetição `\foreach` do pacote TikZ. Para usá-lo seguimos basicamente a seguinte sintaxe

$$\text{\foreach <variavel> in \{<sequencia>\}{<comandos>},}$$

onde:

- `<variavel>` é o nome da variável que receberá os valores para que seja feita a repetição. A variável não pode conter caracteres numéricos e deve iniciar com `\`, por exemplo, `\d`, `\k`, etc.
- `<sequencia>` é a sequência numérica finita cujos valores serão atribuídos na variável que foi definida, por exemplo, o comando `\foreach` interpreta a sequência $(0, 2, \dots, 10)$ como uma progressão aritmética de razão 2 e cada valor dessa sequência será atribuído na variável que foi definida. Caso a sequência não tenha um padrão, basta escrever todos os elementos da sequência. Os elementos da sequência devem ser separados por vírgula e o decimal por ponto.
- `<comandos>` é aonde colocamos os demais comandos necessários para gerar o gráfico desejado.

Portanto, para plotar o gráfico da Figura 3.10d por exemplo, utilizamos o seguinte código:

```

1 \documentclass{standalone}
2 \usepackage[dvipsnames]{xcolor}
3 \usepackage{pgfplots}
4 \newcommand{\Hfuncx}[3]{(#1-#2)*(cos(deg(t)))+#3*(cos(deg(((#1)/(#2))-1*t)))}
5 \newcommand{\Hfuncy}[3]{(#1-#2)*(sin(deg(t)))-#3*(sin(deg(((#1)/(#2))-1*t)))}
6
7 \begin{document}
8 \begin{tikzpicture}[scale=2]
9 \begin{axis}[hide axis, enlarge x limits=0.01, enlarge y limits=0.01,%
10 axis equal image]
11 \foreach \d in {1.2, 1.4,...,3}{%
12 \addplot[color=BlueViolet,domain=0:2*pi*6,samples=1500,variable=\t](%
13 {\Hfuncx{11}{6}{\d}},%
14 {\Hfuncy{11}{6}{\d}}%
15 );}
16 \end{axis}
17 \end{tikzpicture}
18 \end{document}

```

Deve-se ter uma certa cautela com a quantidade de elementos da sequência do comando `\foreach`, pois quanto mais elementos forem maior será a exigência de recursos computacionais para gerar o gráfico. Por isso, não devemos compilar esses códigos no próprio documento aonde se encontra o texto em que se está digitando, uma vez que a cada compilação o L^AT_EX terá que processar todo o documento exigindo ainda mais poder de processamento do computador. O recomendável é compilar o código em outra janela e importar o arquivo gerado para o documento no qual está sendo redigido.

Acessando o link <http://pgfplots.sourceforge.net/gallery.html> temos a disposição vários outros exemplos de códigos usando o pacote `pgfplots` do L^AT_EX para plotar os mais diversos tipos de gráficos.

Anexo A

Identidades e transformações trigonométricas

Neste trabalho há um uso intenso de identidades e transformações trigonométricas. Portanto, reunimos neste anexo com base em (Stewart, 2013, p.A21-A27) as identidades e transformações que consideramos essenciais no desenvolvendo das propriedades abordadas no estudo das hipotrocoides e epitrocoides ou que são necessárias para deduzir outras fórmulas trigonométricas.

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

1. Relação fundamental da trigonometria

$$\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$$

2. Seno da soma de dois arcos

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen}(x) \text{cos}(y) + \text{sen}(y) \text{cos}(x)$$

3. Seno da diferença de dois arcos

$$\text{sen}(x - y) = \text{sen}(x) \text{cos}(y) - \text{sen}(y) \text{cos}(x)$$

4. Cosseno da soma de dois arcos

$$\text{cos}(x + y) = \text{cos}(x) \text{cos}(y) - \text{sen}(x) \text{sen}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Cosseno da diferença de dois arcos

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

6. Seno do arco duplo

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

7. Cosseno do arco duplo

a) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

b) $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$

c) $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$

8. Seno do arco metade

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

9. Cosseno do arco metade

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

10. Fórmulas de transformação em produto

a) $\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

b) $\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

c) $\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

d) $\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

11. Identidades de sinal

a) $\sin(-x) = -\sin(x)$

b) $\cos(-x) = \cos(x)$

12. Identidades do complemento

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

- d) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}(x)$
 e) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(x)$
 f) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}(x)$

13. Identidades do suplemento

- a) $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}(x)$
 b) $\text{sen}(x - \pi) = -\text{sen}(x)$
 c) $\text{sen}(\pi + x) = \text{sen}(x + \pi) = -\text{sen}(x)$
 d) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
 e) $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$
 f) $\cos(\pi + x) = \cos(x + \pi) = -\cos(x)$

14. Período da função seno

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x)$$

15. Período da função cosseno

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

16. Imagem da função seno

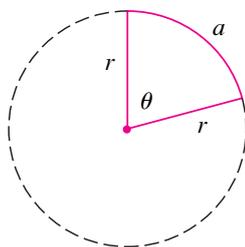
$$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$$

17. Imagem da função cosseno

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

Na parametrização das hipotrocoides e epitrocoides precisamos recorrer a alguns resultados da geometria que estão a seguir.

A figura abaixo mostra um setor de um círculo com ângulo central θ e raio r subtendendo um arco com comprimento a .



Como o comprimento do arco é proporcional ao tamanho do ângulo, e como todo o círculo tem circunferência $2\pi r$ e ângulo central 2π , temos:

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}.$$

Isolando θ e a nessa equação, obtemos

$$\theta = \frac{a}{r} \quad \text{e} \quad a = r\theta.$$

Lembrando que essas equações são válidas somente quando θ é medido em radianos.