UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ALAN LADISLAU CAVALCANTE

ENSINO DA LÓGICA PROPOSICIONAL NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

FORTALEZA – CEARÁ
2019

ALAN LADISLAU CAVALCANTE

ENSINO DA LÓGICA PROPOSICIONAL NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do titulo de de Mestre em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Especialista em Enfermagem Obstétrica.

Orientadora: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda.

FORTALEZA – CEARÁ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Cavalcante, Alan Ladislau.
Ensino da lógica proposicional no ensino médio: uma proposta pedagógica. [recurso eletrônico] / Alan Ladislau Cavalcante. - 2019.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 65 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.
Área de concentração: Ensino de Matematica.
Orientação: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda.

1. Ensino aprendizagem. 2. Lógica matemática. 3. Lógica no Ensino Médio. I. Título.

ALAN LADISLAU CAVALCANTE

ENSINO DA LÓGICA PROPOSICIONAL NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do titulo de de Mestre em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Especialista em Enfermagem Obstétrica.

Aprovada em: 25 de julho de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. João Marques Pereira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. José Robério Rogerio.
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Agradeço primordialmente a Deus que desde o começo, sempre esteve comigo. Obrigado Senhor por me dar condições de lutar e alcançar esse objetivo tão importante para mim e toda a minha família.

AGRADECIMENTOS

À todos os meus professores que me ajudaram a compreender que a matemática pode ser compreendida por qualquer pessoa que se dedique aos estudos da disciplina e goste de desafios.

Ao meu orientador João Montenegro de Miranda que foi muito compreensível, atencioso e com mansidão contagiante.

À todos os meus amigos da Universidade que, nas horas em que mais precisei de auxílio, me ajudaram, apenas por bondade.

À minha mãe que me acalmou nas horas de angústia, me pressionou em momentos de preguiça e me divertiu em tempos de tristeza.

À minha esposa Ana Caroline Nascimento Moreira e seus familiares que contribuíram e apoiaram em minhas decisões corretas e me corrigiram em decisões que, posteriormente poderiam me prejudicar.

A todos que fazem a Universidade Estadual do Ceará pelo compromisso e responsabilidade ao nos darem a possibilidade de tão significativa realização.

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."

(Gauss).

RESUMO

Uma preocupação frequente dos professores de matemática é a dificuldade no processo de ensino aprendizagem de seus alunos. O motivo dessa continuada preocupação é que, apesar da criação de diversos mecanismos de ensino em matemática, há indicadores de baixo rendimento escolar, especialmente no ensino médio. Esta dificuldade dos alunos está ligada à falta da capacidade de elaborar, utilizar e interpretar dados matemáticos inseridos em diferentes contextos. Diante dessa problemática, as indagações que surgiram e direcionaram este trabalho foram: Qual a relevância da lógica matemática no processo de ensino e aprendizagem? Como relacionar a lógica e a matemática no ensino médio? O objetivo principal deste trabalho foi mostrar, através de diversas aplicações de lógica matemática, a relevância dos elementos de lógica dedutiva no Ensino médio como facilitador de aprendizagem em conteúdos de matemática já ministrados nesse segmento. A metodologia escolhida foi a pesquisa bibliográfica realizada em livros de lógica, lógica matemática, documentos oficiais da educação brasileira e publicações científicas envolvendo lógica matemática no ensino médio. Após a análise dessas pesquisas, concluímos que a lógica poderá auxiliar como um agente facilitador no ensino e aprendizagem de matemática, sendo lecionada paralelamente aos conteúdos já ministrados no ensino médio.

Palavras-chave: Ensino aprendizagem. Lógica matemática. Lógica no Ensino Médio.

ABSTRACT

A frequent concern of math teachers is the difficulty in the teaching-learning process of their students. The reason for this continuing concern is that, despite the creation of several mathematics teaching mechanisms, there are indicators of low school performance, especially in high school. This difficulty of students is linked to the lack of ability to elaborate, use and interpret mathematical data inserted in different contexts. Given this problem, the questions that arose and directed this work were: What is the relevance of mathematical logic in the teaching and learning process? How to relate logic and math in high school? The main objective of this work was to show, through various applications of mathematical logic, the relevance of deductive logic elements in high school as a learning facilitator in mathematics contents already taught in this segment. The chosen methodology was the bibliographical research carried out in books of logic, mathematical logic, official documents of Brazilian education and scientific publications involving mathematical logic in high school. After analyzing these researches, we conclude that logic can help as a facilitating agent in the teaching and learning of mathematics, being taught in parallel to the contents already taught in high school.

Keywords: Teaching learning. Mathematical logic. High School Logic.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É notório nas escolas que muitos diretores, coordenadores e professores da área de matemática discutem sobre a melhor metodologia do ensino de matemática, especialmente no Ensino Médio. Essa discussão se dá pela necessidade de tornar esta disciplina um pouco mais “atraente” para os alunos uma vez que, para estes alunos, a matemática não é considerada a disciplina mais simples. A realidade é que o aluno não compreende bem as aplicações da matemática no meio em que vive e não encontra motivos para se interessar o que faz com que o aluno seja apenas um receptor de informações que devem ser memorizadas para se obter uma boa nota em avaliações. Todavia, conforme PASDIORA (2008, p. 4) temos que:

> Ousando mais, espera-se que o estudo da matemática seja uma tarefa prazerosa para o aluno, que ele seja estimulado a participar das aulas, para que saia da postura estática de mero observador e torne-se participante ativo do processo educativo.

O que o autor da citação colocou é que, em matemática, o aluno precisa sair de uma postura passiva de espectador e passe a ser um agente ativo nas aulas. Na realidade, sabemos que nem todos os alunos se interessam pela matemática e precisam ser motivados constantemente por seus professores que, por sua vez, precisam cada vez mais associar os conteúdos ministrados com a realidade dos alunos.

Diante de tantos fatores apresentados que podem levar o aluno à ter dificuldade em matemática, podemos destacar um que chama a atenção: Não associar os conteúdos da grade curricular atual com princípios lógicos, mais precisamente a lógica proposicional.

A lógica proposicional está presente desde as constatações mais simples como “Se não beber água, ficarei com sede” ou matemática simples como a multiplicação de dois números inteiros, até nas deduções mais sofisticadas, como demonstrações de teoremas. Ainda que os Parâmetros Curriculares Nacionais, BRASIL (2006), não tratem a lógica proposicional como um conteúdo que deve ser ministrado isoladamente, é indicado que alguns de seus princípios podem e devem ser incluídos aos conteúdos, desde as séries iniciais, já que ela (a lógica) é está inserida nos conteúdos de matemática. Muitos processos de aprendizagem de matemática, como entender dos processos utilizados, criar argumentos, conjecturas e conclusões, e formalizar argumentos por meio de demonstrações, são realizados através de princípios lógicos.

Não é difícil perceber que na verdade os alunos até conseguem aplicar teoremas ou propriedades matemáticas, mas há uma grande dificuldade de realizar as mesmas aplicações quando são indagados de forma interpretativa, por meio de situações problema. Os alunos possuem grande dificuldade de organizar dados e aplicar um raciocínio lógico dedutivo por meio de uma conexão e conclusão de ideias obtidas a partir destas informações para obter a resolução do problema. Tal dificuldade poderia ser resolvida, ou pelo menos amenizada, com a introdução de princípios lógicos na grade curricular destes alunos, mesmo que indiretamente (conectados com outros conteúdos).

Diante disso, algumas perguntas surgiram e nortearam o presente trabalho: Por qual razão este conteúdo não é ensinado no ensino médio? Qual a importância da lógica proposicional no processo de ensino e aprendizagem de matemática? Como inserir conceitos básicos de lógica proposicional em conteúdos do ensino médio?

Há alguns anos o autor desta pesquisa se inscreveu num concurso para concorrer à vaga de professor do estado do Ceará e, como já trabalhava como professor de matemática em escolas particulares, não se dedicou devidamente ao estudo específico dessa disciplina nem das disciplinas afins, como raciocínio lógico. Próximo à data da prova ele decidiu estudar rapidamente esta parte lógica e,logo no início dos estudos, teve algumas dificuldades de compreender algo que parecia tão simples e óbvio à primeira vista. Diante desses estudos, o autor percebeu que aquele conteúdo nunca tinha sido ensinado em seu ensino médio e nem no seu ensino superior, apesar de lembrar que alguns professores da graduação utilizavam princípios lógicos em algumas demonstrações. Depois de alguns dias estudando, notou que se tratava de um conteúdo simples que exigia apenas uma boa base envolvendo leitura e cálculos simples de proposições.

Depois que passou a prova, o autor continuou os estudos envolvendo lógica, especialmente no que se refere à lógica proposicional e observou suas grandes aplicações, não só em conteúdos mais básicos do ensino fundamental e médio, mas também em demonstrações refinadas de teoremas importantes na matemática. Além disso, contemplou as aplicações da lógica em outros segmentos que nem imaginava, como computação, administração, direito, dentre outros.

Isso nos leva a pensar na dificuldade que um aluno que cursa qualquer graduação na área de exatas (ou até mesmo os que não cursam) tem em lógica matemática, já que o mesmo provavelmente não teve nenhuma instrução que sirva como base para aprendizagem deste conteúdo.

O objetivo principal desta pesquisa é criar uma proposta pedagógica para o ensino dos conceitos de lógica proposicional no Ensino Médio. Para isso, iremos apresentar um estudo histórico sobre lógica proposicional, descrever conceitos básicos de lógica proposicional, resolver problemas sobre o assunto e apontar aplicações da lógica proposicional em conteúdos do Ensino Médio, através de demonstrações e exercícios. Vale ressaltar que o presente trabalho não irá propor uma nova disciplina de lógica que deverá ser inserida no ensino médio, mas visa o ensino desta paralelamente aos conteúdos já ministrados nesse segmento de aprendizagem.

Este trabalho justifica-se pelo fato de que o ensino dos conteúdos do Ensino Médio, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias,

> Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. (BRASIL, 2007, p. 124).

Nesse contexto, percebemos que muitos pesquisadores fazem abordagens relacionadas à lógica dentro da educação matemática. Dentre as pesquisas estudadas podemos destacar as de Martins (2014), Gomes (2015) e Nascimento (2016).

Martins (2014) indica uma sequência de exercícios direcionados ao ensino da lógica para a primeira série do ensino médio com a finalidade de atender às dificuldades relacionadas à construção do pensamento matemático. A expectativa desta autora vai de encontro à citação de Pasdiora (2008, p. 4) feita na introdução do presente trabalho. Ela finaliza apresentando habilidades e competências inseridas nesta sequência de exercícios e mostra como estas poderão contribuir para o ensino aprendizagem em matemática

Gomes (2015) declara que, diante de uma sociedade tão desenvolvida tecnologicamente, é necessário rever o currículo de matemática no ensino médio. Nesse contexto, o autor propõe que seja incluído o ensino da lógica nas três últimas séries do meio escolar. Por fim, ele finaliza concluindo que a introdução de lógica no ensino médio propicia um ambiente que favorece o pensamento crítico matemático.

Nascimento (2016) apresenta, de maneira análoga a Martins(2014) e Gomes (2015), uma proposta para o desenvolvimento de lógica matemática na educação básica, direcionando ainda mais esta proposta para o ensino médio. Por meio de um levantamento bibliográfico, o autor expõe muitos motivos que o levou a propor a inclusão dessa disciplina no ensino médio. O autor desenvolve sua pesquisa apresentando aplicações da lógica matemática relacionada à Álgebra Booleana e algumas questões de concursos públicos.

Concluímos então que há uma grande importância em se obter um estudo, por mais básico que seja, sobre lógica matemática para estudantes do ensino médio. Veremos posteriormente que a lógica matemática de maneira científica baseia-se em lógica proposicional e este será nosso assunto a ser estudado.

O estudo aqui realizado, cujo objeto é o ensino da lógica proposicional no ensino médio, está pautado numa pesquisa bibliográfica e em uma pesquisa qualitativa de cunho descritivo. Para Gil (2015) a pesquisa bibliográfica é uma pesquisa elaborada a partir de um material já publicado, constituído principalmente de livros, artigos de jornais e com material disponibilizado na internet. Para Gil (2015), a pesquisa descritiva é conceituada como àquela que visa descrever as características de uma população ou fenômeno ou estabelecimento de relações entre variáveis. Dessa forma, esta pesquisa será desenvolvimento em três momentos.

No primeiro momento, foram feitas diversas pesquisas bibliográficas em livros e sites que contenham o conteúdo de lógica proposicional, seja a parte histórica ou da parte teórica. Depois disso, em um segundo momento, foi feita uma pesquisa em provas de concursos realizados entre os anos de 2010 e 2018 que apresentavam em seus editais o conteúdo de lógica proposicional com o objetivo de investigar quais os habilidades e competências estão sendo avaliadas na aplicação de lógica proposicional.

No terceiro momento, foi feita uma pesquisa de campo qualitativa. Esta pesquisa é baseada numa entrevista com alguns alunos do Ensino Médio e professores de matemática de uma escola que trouxe a opinião destes sobre a necessidade de introduzir conceitos de lógica proposicional no Ensino Médio. Depois da pesquisa, foi feito um relatório com as informações coletadas e foram analisadas, verificando a preferência e a necessidade dos estudos envolvendo este conteúdo. Conforme Martins (1999) “[...] para ser científica, a hipótese precisa ser verificada e confirmada pelos fatos e validada pela comunidade intelectual”.

Por fim, serão apresentadas sequências didáticas contendo conceitos, exemplos e demonstrações em lógica proposicional. Além disso, serão disponibilizadas algumas atividades que poderão ser aplicadas no Ensino Médio visando aplicações da lógica proposicional em conteúdos que já estão na grade de ensino dos alunos. O trabalho foi finalizado com as considerações finais, mostrando as conclusões obtidas por meio dos objetivos e da problemática da pesquisa.

2 HISTÓRIA DA LÓGICA PROPOSICIONAL

Este capítulo mostra um pouco do desenvolvimento da lógica proposicional ao longo da história desde o século IV a.C. até os dias atuais. Sabemos que não colocamos todos os filósofos e matemáticos que contribuíram com o tema, mas apenas alguns que o fizeram.

2.1 PERÍODO CLÁSSICO (SÉCULO IV A.C. ATÉ O SÉCULO XIX)

Os estudos envolvendo a lógica proposicional foram desenvolvidos por muitos filósofos como Platão e Parmênides, mas foi Aristóteles quem organizou e definiu a lógica como a conhecemos. Apesar das grandes pesquisas realizadas sobre lógica, desde a época de Aristóteles até os dias atuais, sobretudo a partir do século XIX, a lógica aristotélica persiste servindo como base de desenvolvimento para estas pesquisas.

Na história antiga, os gregos se destacavam nos estudos sobre lógica, principalmente no que diz respeito à lógica argumentativa. Entre os estudiosos, antes de Aristóteles, devemos destacar o trabalho dos sofistas, classe de tutores renomados na Grécia antiga.

Foram inúmeras contribuições de Aristóteles para o desenvolvimento da lógica que estudamos atualmente, dentre elas podemos destacar a introdução de incógnitas para caracterizar os termos, o reconhecimento dos conceitos básicos de lógica e a diferenciação do pensamento formal e do discurso da sua verdade material.

A maior parte do trabalho de Aristóteles está registrado no conjunto de trabalhos conhecidos como Organon, mais precisamente nos Analytica Priora e no De Interpretatione.

Aristóteles criou um método científico, que consistia em mostrar o caminho correto para a investigação, o conhecimento e as demonstrações científicas. Esse método científico era dividido em três partes: a análise de fenômenos particulares, a intuição de princípios gerais (universais) a que os mesmos o obedeciam e a dedução das causas de fenômenos particulares. Segundo Aristóteles, se essas fases fossem obedecidas e as deduções a partir delas fossem corretamente bem formuladas então as explicações teriam que ser verdadeiras.

Ao desenvolver seus estudos, Aristóteles criou o silogismo que seria uma regra de inferência que deduz, de maneira lógica, uma proposição categórica – a conclusão – a partir de duas outras, denominadas premissas. Para ter validade, um silogismo deve ter premissas verdadeiras e conclusão verdadeira; premissas falsas e conclusão falsa; premissas falsas e conclusão verdadeira. Sendo assim, não se pode, em um silogismo, ter premissas verdadeiras e obter uma conclusão falsa. A seguir, é colocado um exemplo clássico de um silogismo válido:

1) Todo homem é mortal. (premissa verdadeira).
2) Sócrates é homem. (premissa verdadeira).
3) Logo, Sócrates é mortal. (conclusão verdadeira).

Apresentamos também um exemplo de silogismo facilmente identificado como inválido:

Todos os gatos são mamíferos. (premissa verdadeira).
Todos os cães são mamíferos. (premissa verdadeira).
Logo, todos os gatos são cães. (conclusão falsa).

Mesmo com essas contribuições, a lógica aristotélica apresentava muitas limitações que posteriormente trouxe diversos problemas para o avanço da ciência voltada para a área. Por exemplo, a lógica proposta era baseada no uso da linguagem natural, e por isso, estava envolvida em confusões sobre o sentido das palavras. E mais, a lógica estudada foi desenvolvida com uma enorme contribuição de silogismos e com isso a lógica ficou restringida apenas a esse ramo (silogismo).

Durante os séculos XIII a XV, a lógica de Aristóteles foi desenvolvida de maneira sistemática e progressiva onde se destacam como contribuintes Duns Escoto, Alberto da Saxónia e Raimundo Lúlio que criaram o projeto de mecanização da lógica dedutiva, desenvolvida posteriormente por Leibniz. Foi nesse período que o tratado mais difundido da Europa até o século XVI, "Summulae Logicals”, foi escrito pelo português Pedro Hispano.

A lógica durante a Idade Média foi considerada como “ciência de todas as ciências”. Competia-lhe analisar e verificar a veracidade das proposições da razão humana e isso interessava a diversos campos da ciência. Na época, acreditava-se que o saber científico tinha que obedecer a lógica formal. Partindo de princípios considerados verdadeiros, por um processo dedutivo, procurava-se encontrar a explicação para todos os fenômenos particulares.

A partir do século XVI, a lógica Aristotélica passou a ser questionada por muitos pensadores da época. Os métodos dedutivos que baseava a investigação científica foram colocados à prova na ciência experimental. A partir de algo particular os cientistas procuravam obter algo universal e não reciprocamente, como era feita na lógica aristotélica. Dessa forma, os pensamentos sobre a lógica foram separados e a lógica ganha um descrédito devido às críticas de filósofos como Francis Bacon e René Descartes.

2.2 PERÍODO MODERNO (SÉCULO XIX AO SÉCULO XX)

No período Moderno, a lógica contou com uma grande participação para o seu desenvolvimento. O filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), tentou relacionar a lógica da época com o cálculo algébrico. Em sua obra Dissertação da Arte Combinatória, Leibniz apresenta os próprios princípios propostos por esta nova lógica. Para Leibniz:

> A ordem científica perfeita é aquela em que as proposições estão ordenadas segundo as suas demonstrações mais simples, de maneira que nascem umas das outras, mas esta ordem não é de início conhecida, descobrindo-se cada vez mais à medida que a ciência se aperfeiçoa (Leibniz, ed. Gerhardt, 1960, VII p. 180).

Leibniz entendeu que os estudos sobre lógica deixou de ser uma pesquisa qualquer e decidiu aprofundar seus estudos em busca da criação de uma “matemática universal” criada a partir de suas pesquisas. Para tanto, ele criou um programa que buscava construir uma linguagem universal baseada no que ele chamava de “alfabeto do pensamento”. Depois disso, ele criou a obra Dissertatio de arte combinatória, publicada em 1666, que tratava a repeito da linguagem universal que procurava relacionar os conceitos de lógica com os cálculos de álgebra. Este trabalho, para Leibniz, propiciaria um conhecimento fundamental para todas as coisas. Foi acrescentado ainda, pelo filósofo, o projeto da construção de um calculus ratiocinator, ou cálculo da razão.

Em muitos de seus trabalhos, Leibniz observou a importância do uso de quantificadores e chamou a atenção para a lei da identidade (“X é X”, ou “todo X é X”), uma verdade primitiva da razão, e para a lei da contradição que para o filósofo seria possível demonstrar todos os princípios da matemática.

No entanto, a grande maioria das obras e dos estudos de Leibniz não foram publicados durante sua vida, tendo ficado inexplorados até o início do século passado. Se os seus trabalhos tivessem sido publicados no século XVII, a lógica teria sido desenvolvida muito mais cedo, já que o reviver da lógica ocorreu somente dois séculos depois.

Apesar de tudo isso, o filósofo prussiano Immanuel Kant afirmou em sua obra Kritik der reinen Vernunft, edição de 1787, que a lógica não teria dado nenhum avanço importante depois de Aristóteles e que os estudos sobre lógica já estavam completos. Esta declaração teve uma grande influência, pois apesar das poucas contribuições para a lógica, os estudos de Kant em outras áreas do conhecimento eram de excelente reputação.

No século XIX, destacamos contribuições do matemático e lógico britânico Augustus De Morgan para a álgebra da lógica, do filósofo matemático Charles Sanders Peirce que introduziu a definição de ordem simples, o tratamento do cálculo proposicional e o tratamento dos fundamentos da aritmética, e dos matemáticos Schröder; e McColl que construíram o primeiro cálculo de proposições.

Ainda no século XIX, a lógica foi atribuída em uma forma diferente de pensamento. Ela passou a ser vista como um cálculo algébrico pela maioria dos estudiosos da época e com isso destacaram-se mais pensadores interessados no assunto.

George Boole (1815-1864), em sua obra "Mathematical Analysis of Logic", publicada em 1847, tratou de forma consistente a lógica como um cálculo algébrico.Essa forma de tratar a lógica trouxe grandes contribuições para a construção de circuitos de computadores modernos, bem como contribuições para a teoria dos conjuntos. Além disso, os pensamentos de Boole retiraram as restrições impostas por Aristóteles, quando afirma a existência de infinitos pensamentos válidos e não válidos.

No final do século XIX, surgiram muitos matemáticos e filósofos que contribuíram para o desenvolvimento da lógica. Dentre eles podemos destacar: Gottlob Frege, Peano, B. Russell, Alfred N. Witehead e David Hilbert. Nesse período são criados o cálculo proposicional e o cálculo de predicados.

Frege (1848-1925) foi o primeiro a mostrar o cálculo proposicional na sua forma atual. Ele procurou, em síntese, criar um método de transformar as demonstrações matemáticas em raciocínios dedutivos com o auxílio de funções proposicionais, o uso de quantificadores e a formação de regras de inferência de acordo com os conhecimentos da época. Este estudioso defendia a ideia que seria possível traduzir todas as demonstrações matemáticas em um vocabulário fixo e ainda, que na construção de cada frase, o seu significado e o modo de pensar seriam deduzidos em novas frases a partir da frase anterior, tudo deveria ser devidamente esclarecido.

Frege promoveu um grande avanço na lógica quando foi publicado seu livro Begriffsschrift que continha o cálculo proposicional logístico na forma mais moderna, a noção de função proposicional, o uso de quantificadores e a análise lógica de demonstrações realizadas por indução matemática. A obra Begriffsschrift de Frege foi um avanço tão importante para a lógica que é comparada, na história da lógica, aos Analytica Priora de Aristóteles.

O método proposto por Frege possui as seguintes propriedades:

I. Não exige qualquer tradução numa linguagem natural;
II. Não poderá ser utilizada uma escrita fonética, uma vez que, as idéias são representadas por sinais;
III. A forma lógica substitui a forma gramatical.

A utilização de uma nova maneira de apresentar a quantificação permitiu que Frege formalizasse, de maneira mais rigorosa e mais generalizada, a teoria de inferência da silogística aristotélica na qual, até à época de Kant, era considerada o apogeu da lógica.

Após os estudos de Frege, a lógica formal poderia, pela primeira vez, ser trabalhada com proposições que envolviam o uso de diferentes quantificadores, ou seja, com frases quantificadas em ambos os extremos, tais como “todo político conhece alguns ladrões”, “nenhuma criança deve ser responsável por todos os trabalhos caseiros” ou “algumas mães permitem que todos os seus filhos sejam desobedientes”.

No livro Begriffschrift e em seus outros trabalhos Frege desejava mostrar que a aritmética era um ramo da lógica, no sentido de que poderia ser executada utilizando apenas noção ou axiomas lógicos. Esta tese, conhecida como logicismo, seria provada no primeiro volume de sua obra Grundlagen der Arithmetik.

A obra Grundlagen se inicia com as discussões dos predecessores de Frege, incluindo Kant e o filósofo inglês John Stuart Mill, sobre a natureza dos números e da verdade matemática. Contrariando as ideias de Mill e Kant, Frege acreditava que as verdades na aritmética não eram completamente sintéticas. Assim como a geometria, a aritmética poderia ser considerada como analítica, ou seja, poderia ser definida e demonstrada por conceitos legitimamente lógicos.

No sistema proposto por Frege, a noção de número foi trocada pela noção de “classe”. Para tanto, ele definiu que duas classes teriam o mesmo número de componentes se fosse possível estabelecer uma relação biunívoca entre elas. Essas classes são conhecidas como classes de equivalência.

Na tentativa de mostrar que o seu sistema funcionava, Frege tentou associar cada número à uma classe que deveria ser puramente lógica. Dessa forma, não poderíamos definir o quatro como sendo a classe equivalente à classe dos evangelistas, uma vez que o fato de terem existido quatro evangelistas não faz parte da lógica. Então Frege precisava associar, para cada número, uma classe cuja grandeza fosse, além de apropriada, baseada na lógica.

Ele resolveu começar do pelo número zero. Definiu este numero como sendo a classe de todas as classes equivalentes aos objetos que não são iguais a si mesmos. Sem dúvida essa classe não possui elementos já que todos os objetos são idênticos a si mesmos. Tendo isso em mente, Frege deduziu que existia apenas uma classe sem elementos, a chamada “classe vazia” e com isso definiu o número um como sendo a classe das classes equivalentes às classes vazias. E continuou nesse mesmo raciocínio definindo o numero dois como sendo a classe equivalente às classes cujos elementos são zero e um, três como a classe equivalente às classes cujos elementos são zero, um e dois e assim por diante. Dessa maneira, Frege mostrou que a série de números naturais poderia ser construída a partir de conceitos puramente lógicos de identidades e equivalências de classes.

Este grande projeto de Frege foi muito bem aceito pelos filósofos e parecia estar totalmente bem fundamentado. Foi quando, em 1903, o filósofo inglês Bertrand Russell detectou uma falha no sistema projetado por Frege e lhe comunicou pouco antes que o segundo volume dos Grundgesetze fosse publicado.

Segundo Russell, se o programa de Frege estivesse correto, seria possível criar classes de classes sem nenhuma restrição e ainda, classes de classes de classes, etc. As classes deveriam ser por elas mesmas classificadas e teriam a possibilidade de ser elementos de classes. O problema é que nem toda classe pode ser elemento de si mesma, isto é, existem classes que não são elementos de si mesma (por exemplo, a classe dos gatos não é um gato) e existem classes que podem ser elementos de si mesma (por exemplo, a classe das classes é indiscutivelmente uma classe). Foi concluído que as classes se dividiriam em dois tipos: a classe das classes que é elemento de si mesmas e a classe das classes que não é elemento de si mesmas.

Considere a classe das classes que não é elemento de si mesma. Esta classe teria a propriedade que a qualifica como elemento da classe das classes que não são elementos de si mesmas, e portanto, é elemento de si mesma. O caso contrário também levaria à uma contradição.

Para compreendermos melhor, utilizaremos as notações de conjunto. Seja A o conjunto de todos os conjuntos que não se contém a si próprios como subconjuntos. Formalmente: X é elemento de A se, e somente se, X não é subconjunto de X. No sistema de Frege A é um conjunto bem definido, mas será que A contém A? Em caso positivo, então A não é membro de A, de acordo com a definição. Caso contrário, A não contém A, ou seja A tem de ser membro de A, observando como foi definido o conjunto M. Logo, as afirmações “A contém A” e “A não contém A” nos leva à contradições.

Com isso, Russell, juntamente com A. N. Whitehead, procurou desenvolver a lógica utilizando uma notação diferente da de Frege, procurando derivar a totalidade da aritmética partindo de uma base puramente lógica. Este trabalho foi publicado entre 1910 e 1913 nos gigantescos três volumes que compõem os Principia Mathematica.

Para não cometer o mesmo erro de Frege, Russell formulou um trabalho conhecido como teoria dos tipos. Ele percebeu que classes e indivíduos pertencem a tipos lógicos diferentes e que uma verdade aplicada aos indivíduos pode ser considerada mentira para as classes e vice-versa.

Entretanto, houve o surgimento de um problema ao invés de um paradoxo. Se não seria correta a formação de classes de classes, então como os números naturais poderiam ser construídos? Russell conservou a ideia do zero ser uma classe vazia mas definiu que número um como a classe de todas as classes equivalentes à classe cujos elementos são os elementos da classe vazia e qualquer objeto que não seja dessa classe. O número dois, por sua vez, era tratado como a classe de todas as classes equivalentes à classe cujos elementos são os elementos da classe um e qualquer objeto que não pertença à esta classe, e assim por diante.

Não demorou muito para Russel perceber que a série dos números naturais definida por ele só poderia continuar se existissem infinitos objetos. Se existissem k objetos, então não poderia existir a classe com k + 1 objetos, logo não existiria o número cardinal k + 1, que é absurdo. Então ele teve acrescentar o axioma de que existiriam infinitos objetos, conhecido como o axioma do infinito e isso gerou outra complicação. O problema era que logicamente seria impossível provar o axioma e isso implicaria numa construção que não seria baseada em conceitos puramente lógicos, como estava proposto.

Assim, Russell demonstrou que a teoria de Frege propôs era inconsistente e as soluções que Frege mostrou, não eram eficientes. Depois, o matemático austríaco Kurt Gödel mostrou que os axiomas da aritmética jamais poderiam ser colocados em axiomas puramente lógicos, pelo menos não ao estilo dos Principia Mathematica de Frege.

Apesar de tudo, as ideias e os estudos desenvolvidos por Frege e Russel continuam sendo importantes e o interesse por estes trabalhos não reduziu mesmo com fracasso do programa de Frege.

Giuseppe Peano (1858-1932) desenvolveu uma notação utilizada pelos lógicos e matemáticos até os dias atuais.Em meados de 1885, Giuseppe publicou seu primeiro livro que tratava de lógica matemática, Os Fundamentos da Aritmética. Peano demonstrou que as demonstrações não são obtidas apenas por intuições mas por deduções partindo de premissas. Conforme Leibniz afirma:

> Ao examinar cada ciência, é necessário descobrir os seus princípios de invenção os quais, juntos a uma ciência superior, ou à ciência geral ou à arte de inventar, seriam suficientes para deles se deduzir todo o resto (Leibniz, ed. Gerhardt, 1960,VII, p. 168).

Após muitos conflitos de idéias entre os pensadores de lógica matemática, a respeito sobre os conceitos entre lógica e matemática, resultando no surgimento de três escolas: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo.

O propósito da escola logicista era transformar as leis aritméticas em definições baseadas em termos da lógica. Desse modo, a lógica seria considerada a premissa mais elementar da matemática.

Como foi visto por Frege, o logicismo se mostrou falho já que nem todos os axiomas da aritmética puderam ser escritos na forma de proposições lógicas. Para Machado (1991, p.27), para obter êxito “os logicistas deveriam mostrar concretamente que todas as proposições matemáticas podem ser expressas na terminologia lógica e, que todas as proposições matemáticas verdadeiras são as expressões verdadeiras para a Lógica".

Para Silva (2007, p. 134), o que realmente os logiscistas fizeram, foi uma separação entre os matemáticos. Alguns aprovaram as ideias desta corrente, mas outros compreendiam que a matemática havia se tornado uma ciência formal e tinha, com extrema urgência, ser apoiada em bases seguras, partindo de certezas oriundas de intuições imediatas.

Apesar da corrente logicista não ter conseguido reescrever os axiomas da aritmética com definições lógicas, ela se tornou um importante ponto de partida para o desenvolvimento da lógica atual. Os logicistas, promoveram uma maior preocupação nos estudos de matemáticos que concordavam e que não concordavam com as ideias desta escola. Estes últimos, criaram uma nova escola que procurava sistematizar a matemática partindo sempre de intuições. Esta escola foi chamada de intuicionista.

Os intuicionistas defendiam a ideia de que um indivíduo poderia saber (intuitivamente) o que era o conjunto dos números naturais, por isso eles acreditavam que a matemática poderia ser reelaborada desde o princípio. Isso significa que partindo da intuição, os axiomas, os teoremas, os postulados, toda a matemática poderia ser reconstruídos.

O intuicionismo partia da ideia de que tudo em matemática deveria partir da mente humana, inclusive a parte abstrata e com isso acreditavam que a matemática era falível em alguns pontos. Por exemplo, os paradoxos em matemática não seriam erros cometidos por matemáticos, mas erros da própria disciplina. Dessa maneira, tudo que não partisse da mente humana não era considerada matemática.

Assim como os logicistas, os intuicionistas também não conseguiram provar concretamente suas ideias. Muitos teoremas importantes para matemática eram desprezados pelos intuicionistas, o que gerava muitas discussões entre os estudiosos da época. Na verdade, esta corrente considerava a existência de objetos em matemática apenas quando o mesmo pudesse ser construído. Além disso,algumas teorias falsa para os intuicionistas eram consideradas verdadeiras pelos matemáticos – como por exemplo, os números complexos – e isso promoveu uma grande depreciação e rejeição da corrente pelos matemáticos clássicos.

Com o surgimento da teoria dos conjuntos a matemática desenvolveu muito, mas atrelados a esta teoria vinham alguns paradoxos e surgiu a necessidade de eliminá-los da matemática. A solução foi criar mais axiomas que expressassem suas ideias de maneira clara, de modo a não gerar novos paradoxos. Foi quando uma nova corrente foi criada: o formalismo.

O principal objetivo do formalismo era provar que a matemática não possuía contradições. Se os seus ideais conseguissem provar esta teoria, a matemática estaria livre de paradoxos e contradições e quando fosse formalizada em um sistema, teria que ser admitida como verdade. Segundo Silva (2007, p.195), para Hilbert, as ideias e as conclusões do formalismo estavam garantidas pela veracidade cuja matemática está baseada.

O formalismo defendia a ideia que os objetos da matemática não são conteúdos reais e nem mentais. No formalismo “as deduções são cadeias de transformações de expressões simbólicas segundo regras explícitas de manipulação de símbolos” (SILVA, 2007, p. 184). As conclusões em matemática teriam significado num sistema formal (conjunto de regras) considerado, além de serem passíveis de interpretação. Devemos observar que devido a esse conjunto de regras é que podemos utilizar programas de computadores e calculadoras para efetuarem diferentes tipos de cálculos.

Dos matemáticos que procuravam axiomatizar a matemática. Podemos destacar o matemático alemão David Hilbert que tentou aplicar as ideias do formalismo na geometria euclidiana. Os elementos de Euclides eram baseados numa linguagem do cotidiano, e portanto, na intuição. Hilbert reescreveu toda a geometria euclidiana complementado-a com algumas propriedades, axiomas e teoremas.

Em 1930, o matemático austríaco, naturalizado norte-americano, Kurt Friedrich Gödel demonstrou que seria impossível compatibilizar os axiomas da aritmética dentro de um sistema que utilize a aritmética. Com esta demonstração, o projeto de Hilbert não poderia ser bem sucedido, uma vez que seria impossível provar a consistência da matemática utilizando a própria matemática.

Os três movimentos, o logicismo, o intuicionismo e o formalismo são escolas do pensamento com diferentes visões sobre a matemática e com certeza possuem suas discordâncias. Ainda assim, essas correntes possuem ideias em comum. Segundo Silva (2007, p.235-236), o logicismo nos mostra as interseções da matemática com a lógica. O intuicionismo mostra quais conhecimentos matemáticos podem ser construídos a partir da intuição. E o formalismo define a matemática como sendo a “ciência dos estudos formais”.

2.3 PERÍODO CONTEMPORÂNEO (INÍCIO DO SÉCULO XX ATÉ AOS DIAS DE HOJE)

Durante o século XX houve uma grande expansão e diversas mudanças nos estudos em lógica matemática e com isso, a lógica se formalizou cada vez mais. Nos dias atuais, a lógica tem um conjunto de símbolos completo e um conjunto de regras para a utilização desses símbolos para se obter conclusões válidas. Apesar das aplicações da lógica estar principalmente ligadas à construção de máquinas inteligentes, a lógica nos dias atuais é muito importante para estudantes e professores (como vimos na introdução).

Para a matemática, a lógica proposicional se faz importante na análise de suas definições, axiomas e na comprovação da veracidade de teoremas e com isso, obter novas conclusões.

Em concordância com o que Druk (1998) afirma, a lógica proposicional não deve ser ensinada apenas em um momento específico, mas em todos os momentos em que os conteúdos programáticos permitirem. A autora afirma ainda que a lógica é um assunto interdisciplinar e que se torna mais conhecido quando se percebe que o mesmo está presente em conversas, nas leituras em geral e nas diversas disciplinas do currículo escolar, não sendo um conteúdo exclusivamente da matemática.

Infelizmente os livros didáticos preocupam-se muito mais em ensinar algoritmos e fórmulas que nem sempre são bem compreendidas pelos estudantes, do que construir conteúdos partindo de deduções, esquecendo assim, da importância de demonstrações e deduções que poderiam ser realizadas pelos próprios alunos.

Em geral, os alunos aprendem um grande conjunto de fórmulas e quando se deve aplicá-las, mas ao se deparar com um problema desconhecido, que vai além da simples aplicação do algoritmo, eles têm grande dificuldade de solucioná-lo. Um exemplo disso está evidente no ensino da análise combinatória. Nesse tema, os livros didáticos e os professores tendem a resumir as técnicas de contagem em arranjos, permutações e combinações em fórmulas que por muitas vezes, não são construídas de forma lógica, mas aplicadas em situações do cotidiano. Dessa forma, problemas triviais que seriam resolvidos utilizando apenas o princípio fundamental da contagem e uma simples construção lógica do problema, tornam-se difíceis de serem resolvidos por alunos que desejam colocar informações numa fórmula, não se importando com o que o problema realmente pede.

Em resumo, para a matemática, a lógica proposicional nos dias atuais está em total ligação com uma boa construção de ideias. Conforme Almeida afirma:

> [...] privilegiando o cálculo, a objetividade e a lógica e recusando tudo o que é entendido como ilusório, fantasioso e irreal, o ensino formal opera uma redução em relação às potencialidades cognitivas do sujeito humano. Isso porque somos dois itinerários do pensamento que se parasitam permanentemente: um empírico-lógico-racional, outro mítico-simbólico-mágico. Qualquer redução de um desses polos do espírito ao outro, compromete a amplitude de nossas concepções de mundo, nos faz andar com uma perna só. O ilusório sozinho nos encerra no delírio. A razão sozinha se torna racionalização, se embrutece, fica cega para tudo o que não é cálculo, regra, lógica (ALMEIDA, 2006, p. 12).

Não podemos admitir como verdade, conclusões retiradas apenas de nossa limitada intuição. A lógica nos garante conclusões que podem ser demonstradas e, por isso, são claramente corretas. Veremos, no próximo capítulo, um pouco sobre introdução à lógica proposicional, bem como conclusões a respeito de proposições que certamente um aluno que não tem conhecimento sobre lógica proposicional não conseguiria obtê-las apenas com a intuição.

3 LÓGICA PROPOSICIONAL

3.1 INTRODUÇÃO

Também conhecida como álgebra das proposições, a lógica proposicional pode ser considerada como sendo um conjunto de operações aplicadas em proposições a fim de se obter a estrutura de um argumento, eliminando dúvidas existentes na linguagem natural. Esse conjunto nos permite analisar um argumento de forma precisa e concluir sua veracidade.

A lógica proposicional deve respeitar três princípios básicos fundamentais para a sua construção, são eles:

1. PRINCÍPIO DA IDENTIDADE: Se uma proposição é verdadeira então ela é verdadeira;
2. PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO: Uma proposição só pode ser verdadeira ou falsa, não havendo outra alternativa;
3. PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO: Uma proposição não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa sob uma mesma condição.

Uma proposição é toda oração declarativa que pode ser classificada em verdadeira ou falsa, mas não as duas. Dizer que é uma oração significa que possui sujeito e predicado, e ao afirmar que é declarativa é o mesmo que afirmar que a oração é afirmativa ou negativa. Usaremos V para proposições verdadeiras e F para as falsas e em ambas serão indicadas por letras latinas maiúsculas: (A, B, C, D, ...).

Dessa forma, expressões do tipo: “Que horas são?”, “y é um número natural”, ” $y - 4 = 200$” e “Que gato lindo!”, etc. não são proposições lógicas, pois não poderemos associar a elas um valor lógico definido (verdadeiro ou falso). São exemplos de proposições:

a) A: “Um pentágono possui cinco diagonais” (V)
b) B: “Um triângulo possui dez lados” (F)
c) C: “$2^3 = 8$” (V)
d) D: “$3 + 7 = 9$” (F)
e) E: “Três pontos são sempre colineares” (F).

Todos estes exemplos são proposições simples ou atômicas, mas existem proposições que são formadas pela união, através de conectivos lógicos (2.2), de duas ou mais proposições simples, são as chamadas proposições compostas ou moleculares. Vejamos alguns exemplos de proposições compostas:

1) F: “Alan é estudioso e André é trabalhador”
2) G: “João estuda muito ou Carol se veste mal”
3) H: “Se Patrícia é chorona então Rivelino é carinhoso”
4) I: “Lourdes é pedagoga se e somente se Carol é historiadora”
5) J: ”Carlos pratica ou futebol, ou musculação”

3.2 TABELA VERDADE

A tabela verdade auxilia, de maneira mais organizada, a descobrir o valor lógico de proposições compostas, baseada em todas as possíveis combinações dos valores lógicos para as proposições simples que a formam. Sendo assim, devemos julgar a veracidade (ou não) de uma proposição composta de acordo com todas as combinações V ou F das proposições simples envolvidas.

É importante destacar que o número de linhas da tabela verdade depende da quantidade de proposições envolvidas. Como cada proposição simples pode assumir duas possíveis valorações (V ou F), então o número de linhas da tabela verdade é dado por 2 elevado ao número de proposições simples envolvidas.

3.3 CONECTIVOS LÓGICOS

Os conectivos lógicos, de maneira simples, são palavras que são utilizadas para formar proposições a partir de outras proposições. Um resumo desses conectivos, bem como os símbolos que os representam, em relação a duas proposições P e Q, estão descritos na tabela abaixo:

OPERAÇÃO	CONECTIVO	ESTRUTURA LÓGICA
Negação	$\sim$	Não P
Conjunção	$\wedge$	P e Q
Disjunção inclusiva	$\vee$	P ou Q
Disjunção exclusiva	$\underline{\vee}$	Ou P ou Q
Condicional	$\rightarrow$	Se P então Q
Bicondicional	$\leftrightarrow$	P se e somente se Q

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.1 O Modificador Negação

Seja P uma proposição, indicaremos a sua negação por ~P ou ¬P (Lê-se "não P"). Veja estes exemplos:

a) P: "Um quadrado tem duas diagonais" (V)
b) ~P: "Um quadrado não possui duas diagonais" (F)
c) Q: "Alan é trabalhador"
d) ~Q: "Alan não é trabalhador"
e) ~Q: "Não é verdade que Alan é trabalhador"

Devemos observar que afirmação e negação sempre possuem valores lógicos diferentes, ou seja, se P for verdadeira então ~P é falsa e se P for falsa então ~P é verdadeira. E ainda, duas negações equivalem a uma afirmação, isto é, em linguagem simbólica: ~(~P) = P. Observe o exemplo:

a) P: "Alan come muito"
b) ~P: "Alan não come muito"
c) ~(~P): "Não é verdade que Alan não come muito", ou seja, "Alan come muito"

3.3.2 Conjunção (E)

Uma proposição composta C, formada a partir de duas proposições A e B pela conjunção, será verdadeira apenas no caso em que A é verdadeira e B também, isto é, caso uma delas seja falsa a preposição C torna-se falsa. Vejamos um exemplo:

a) C: "Nesse feriado estudarei matemática e português";
b) A: "Estudar matemática";
c) B: "Estudar português".

Repare que as possíveis combinações de A e de B são respectivamente V e V, V e F, F e V e F e F. Veja que a proposição C afirma que durante o feriado serão estudados matemática e português, isto é, se um deles não for estudado então a C não será verdadeira. Colocando estes dados na tabela verdade temos:

A	B	C = A ∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conclusão: Só existe uma possibilidade para o feriado. Para que a afirmação C seja verdade, deverei estudar matemática e português.

3.3.3 Disjunção Não Excludente (OU)

Premissas não excludentes são aquelas que podem ocorrer simultaneamente. Nesse caso, o OU significa dizer que pelo menos uma das premissas deverá ser verdadeira. Podemos concluir que uma proposição C, formada por duas proposições A e B pela disjunção não excludente, não será verdadeira apenas se as premissas A e B forem falsas. Veja um exemplo:

a) C: “Durante o período natalino irei à praia ou ao parque”.
b) A: “Irei à praia”;
c) B: ”Irei ao parque”.

Repare que a afirmação C declara que ocorre A ou B e que A não exclui B, nem B exclui A. De outra forma, o OU significa que o sujeito irá a ”pelo menos” um desses lugares no período natalino (o período natalino é longo e nada impede de ir aos dois lugares).

A	B	C = A∨ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conclusões:

a) Sabendo que o sujeito foi à praia, conclui-se que ele pode ter ido ou não ao parque.

b) Sabendo que o sujeito não foi à praia, conclui-se que certamente ele foi ao parque.
c) Sabendo que o sujeito foi ao parque, conclui-se que ele pode ter ido ou não à praia.
d) Sabendo que o sujeito não foi ao parque, conclui-se que certamente ele foi à praia.

Caso contrário, C não seria verdadeira.

3.3.4 Disjunção Excludente (OU... OU)

Proposições excludentes são aquelas que não podem ocorrer simultaneamente. Nesse caso, o OU significa dizer que exatamente uma das primícias é verdadeira. Vejamos um exemplo:

a) C: ”Carol nasceu ou no Brasil, ou no Japão”
b) A: “Carol nasceu no Brasil”
c) B: “Carol nasceu no Japão”

Veja que é falso o caso de A e B serem verdade ao mesmo tempo, pois ninguém pode nascer em dois lugares simultaneamente. Então C só será verdadeira se exatamente uma das afirmações A e B forem verdades. Analisando os dados na tabela verdade, temos:

A	**B**	**C = A $\underline{\vee}$ B**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conclusões:

a) Sabendo que ela nasceu no Brasil, conclui-se que não nasceu no Japão.
b) Sabendo que ela não nasceu no Brasil, conclui-se que nasceu no Japão.

c) Sabendo que ela nasceu no Japão, conclui-se que não nasceu no Brasil.
d) Sabendo que ela não nasceu no Japão, conclui-se que ela nasceu no Brasil.

Caso contrário, C seria falsa.

3.3.5 Condicional (SE... ENTÃO)

Essa condição evidencia claramente que se temos uma proposição composta C do tipo “Se uma premissa A, então uma premissa B” concluímos que se A for verdade, então B também será necessariamente verdade para que C seja verdade. Devemos ressaltar que a recíproca (B → A) não é válida, ou seja, mesmo que B seja verdadeira não significa necessariamente que A também seja. Conforme a exemplo abaixo:

a) C: “Se eu sou cearense então eu sou brasileiro”
b) A: “Ser cearense”
c) B: “Ser brasileiro”

Veja que C só será falsa se A for verdadeira e B for falsa, pois se um indivíduo for cearense ele terá que ser brasileiro conforme C. Repare que a recíproca não é necessariamente verdadeira, pois o fato de que um indivíduo ser brasileiro não implica de este ser cearense necessariamente. Veja esta e outras conclusões na tabela:

A	**B**	**C = A → B**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conclusões:

a) Sabendo que eu sou cearense, conclui-se certamente que sou brasileiro.

b) Sabendo que eu não sou cearense, conclui-se que eu sou brasileiro ou não.
c) Sabendo que eu sou brasileiro, conclui-se que eu posso ser cearense ou não.
d) Sabendo que eu não sou brasileiro, conclui-se que certamente não sou cearense.

Caso contrário, C seria falsa.

Observando as conclusões anteriores, é possível comparar o condicional “se... então...” (A→B) com a disjunção “não A ou B” (~A ou B). Tal comparação será feita a posteriormente na parte de equivalências lógica.

3.3.6 Bicondicional (SE E SOMENTE SE)

Uma proposição composta C escrita na forma “ Premissa A, se e somente se a premissa B” só será verdadeira se A e B tiverem o mesmo valor lógico, ou seja, ambas serem verdadeiras ou ambas serem falsas. Repare que se nessas condições, se A for verdade então B também será verdade e a recíproca é verdadeira. Vejamos esta situação num exemplo:

a) C: “Um número é primo se e somente se possuir apenas dois divisores naturais”
b) A: “Um número ser primo”
c) B: “Um número possuir apenas dois divisores naturais”

Perceba que A é verdade somente se B também for será e B é verdade somente se A também for, Uma vez que se um número é primo então ele possui apenas dois divisores naturais e se um número possui dois divisores naturais então ele é primo. Vejamos a tabela:

A	**B**	**C = A ↔ B**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Conclusões:

a) Sabendo que um número é primo, então necessariamente ele possui apenas dois divisores naturais.
b) Sabendo que um número não é primo, então necessariamente ele não possui apenas dois divisores naturais.
c) Sabendo que um número possui apenas dois divisores naturais, então ele é um número primo.
d) Sabendo que um número não possui apenas dois divisores naturais, então ele não é um número primo.

Podemos resumir em uma única tabela verdade todos os conectivos vistos. Dadas as proposições simples A e B, cujos valores lógicos serão representados por F quando falsa e V quando verdadeira, temos a tabela simplificada:

A	**B**	**A ∧ B**	**A ∨ B**	**A $\underline{\vee}$ B**	**A → B**	**A↔B**
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

Da tabela acima, infere-se (deduz-se) que:

a) A conjunção é verdadeira somente quando ambas as proposições são verdadeiras;
b) A disjunção é falsa somente quando ambas as proposições são falsas;
c) A condicional é falsa somente quando a primeira proposição é verdadeira e a segunda falsa;
d) A bicondicional é verdadeira somente quando as proposições possuem valores lógicos iguais.

3.4 CONDIÇÃO NECESSÁRIA E CONDIÇÃO SUFICIENTE

Uma condição é dita suficiente quando a mesma representa a condição máxima que deve ser atendida. Em uma proposição composta por A e por B temos que basta que A ocorra para B ocorrer. Já a condição necessária é a condição mínima que deve ser atendida. No caso de uma proposição composta por A e por B temos que se B não ocorre então A não irá ocorrer.

Para um condicional (A→B), temos:

a) A é condição suficiente para que B ocorra.

b) B é condição necessária para que A ocorra.

Já para um bicondicional (A↔B), sabemos que A implica em B e, ao mesmo, que B implica em A, logo, tanto A quanto B funcionam simultaneamente como condição necessária e suficiente.

Exemplos:

1) "Se Rivelino mentiu então Lourdes é culpada".

2) "10 é maior que 6 se e somente se 6 é menor que 10".

O exemplo 1, poderia ser escrito das seguintes formas:

1) "Rivelino mentir é condição suficiente para que Lourdes seja culpada"

2) "Lourdes ser culpada é condição necessária para Rivelino ter mentido"

O exemplo 2, poderia ser das seguintes formas

a) "10 ser maior que 6 é condição suficiente e necessária para 6 ser menor que 10"

b) "6 ser menor que 10 é condição suficiente e necessária para 10 ser maior que 6"

3.5 EQUIVALÊNCIAS

Duas proposições são equivalentes quando possuem os mesmos valores lógicos na tabela verdade ou quando podem substituir uma à outra sem perda de sentido lógico.

Devemos observar que não podemos confundir implicação com equivalência, já que esta última diz respeito não à condicional, mas à bicondicional. Por exemplo, dizer que A: "Alan é bilionário" implica em dizer que B: "Alan não é pobre", no entanto, dizer que B: "Alan não é pobre" não implica em dizer que A: "Alan é bilionário", logo, A e B não são equivalentes, mas podemos dizer apenas que A implica em B (A → B). Por outro lado, se C: "Pedro é honesto" então implica que D: "Pedro não é desonesto", e de forma recíproca se D: "Pedro não é desonesto", então implica que C: “Pedro é honesto”, portanto, nesse caso, C e D são equivalentes, pois uma proposição implica na outra (C ↔ D).

Utilizaremos o símbolo ⟺ para representar uma equivalência, logo se queremos indicar que uma proposição A é equivalente a uma proposição B utilizamos A ⟺ B. Vejamos alguns exemplos de equivalências utilizadas em lógica e para mostrar que estas são realmente equivalentes, iremos construir uma tabela verdade para cada exemplo e mostrar que as equivalências possuem os mesmos valores lógicos, embasado nas tabelas e conceitos apresentados anteriormente.

3.5.1 “Se A então B” equivale a “Se não B então não A”

Exemplo:

1) “Se Alan é professor então Montenegro é coordenador” ⟺ “Se Montenegro não é coordenador então Alan não é professor”.

Separando este exemplo em proposições simples temos:

A: “Alan é professor”.

~A: “Alan não é professor”.

B: “Montenegro é coordenador”.

~B: “Montenegro não é coordenador”.

A → B: “Se Alan é professor então Montenegro é coordenador”.

~B → ~A: “Se Montenegro não é coordenador então Alan não é professor”.

Colocando estes dados na tabela verdade temos:

A	**B**	**A → B**	**~ B**	**~A**	**~ B → ~A**
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Repare que na terceira e sexta coluna da tabela anterior temos que A → B e ~B → **~**A, respectivamente, possuem os mesmo valores lógicos e portanto são equivalentes (A → B ⟺ ~B → ~A). Veja também que para quaisquer que sejam A e

B podemos aplicar a mesma tabela anterior para a condicional (se ... então), ou seja, nos exemplos a seguir podemos construir proposições equivalentes facilmente, veja:

2) “Se Rodrigo mentiu então ele é culpado”⟺ “Se Rodrigo não é culpado então ele não mentiu”

3) “Se os carros voam então eu estou errado” ⟺ “Se eu não estou errado então os carros não voam”

4) “Se ele estudou lógica então não terá dúvidas” ⟺ “Se ele tiver dúvidas então não estudou lógica”

Observamos que as equivalências obtidas são chamadas de contrapositiva das proposições dadas.

3.5.2 “Se A então B” equivale a “Não A ou B”

Novamente baseando-se nas tabelas anteriores podemos sugerir o seguinte exemplo e construir uma tabela verdade para mostrar que para quaisquer proposições A e B, podemos concluir que $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \vee B$. Veja o exemplo:

- “Se a inflação baixa então a taxa de juros aumenta” ⟺ “A inflação não baixa ou a taxa de juros aumenta”.

Ao separarmos este exemplo em proposições simples, temos:

A: “A inflação baixa”.

~A: “ a inflação não baixa”.

B: “A taxa de juros aumenta”.

A → B: “Se a inflação baixa então a taxa de juros aumenta”.

~A ∨ B: “A inflação não baixa ou a taxa de juros não aumenta”.

Colocando estes dados na tabela verdade e averiguando sua veracidade, temos:

A	**B**	**A → B**	**~A**	**~ A ∨ B**
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Perceba que na terceira e a quinta coluna da tabela anterior temos que A → B e ~A ∨ B, respectivamente, possuem os mesmos valores lógicos e portanto são equivalentes (A → B ⇔ ~A ∨ B). Note que para quaisquer que sejam A e B podemos aplicar a mesma tabela anterior para a condicional (se ... então), ou seja, uma vez provada esta equivalência, podemos obter facilmente uma proposição formada por condicional, observe:

- “Se Rodrigo mentiu então ele é culpado” ⇔ “Rodrigo não mentiu ou ele é culpado”
- “Se os carros voam então eu estou errado” ⇔ “Os carros não voam ou eu estou errado”
- “Se ele estudou lógica então não terá dúvidas” ⇔ “ Ele não estudou lógica ou não terá dúvidas”

3.5.3 “A equivale a B” equivale a “Ou A e B ou não A e não B”

Utilizando as mesmas ideias anteriores, iremos mostrar um exemplo afim de que se obter uma melhor compreensão do que queremos mostrar. Colocaremos os dados na tabela verdade e mostraremos que a bicondicional A ↔ B é equivalente a (A ^ B) $\underline{\vee}$(~A ^ ~B)**.** Veja o exemplo:

- “Irei festejar se e somente se passar em matemática” ⇔ “Ou irei festejar e passar em matemática, ou não irei festejar e não passarei em matemática”

Dividindo o exemplo em proposições simples, temos:

A: “Irei festejar”

B: “Passar em matemática”

A ↔ B: “Irei festejar se e somente se passar em matemática”

A ^ B: “Irei festejar e passarei em matemática”

~A: “Não irei festejar”

~B: “Não passarei em matemática”

~A ^ ~B: “Não irei festejar e não passarei em matemática”

(A ^ B) $\underline{\vee}$ (~A ^ ~B): “Ou irei festejar e passar em matemática, ou não irei festejar e não passarei em matemática”

Colocando estas proposições na tabela verdade obtemos:

A	B	A ↔ B	A ^ B	~A	~B	~A ^ ~B	(A ^ B) v̲ (~A ^ ~B)
V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V

Note que a terceira e a oitava coluna da tabela anterior temos que A ↔ B ⇔ (A ^ B) v̲ (~A ^ ~B), respectivamente, possuem os mesmos valores lógicos logo são equivalentes, ou seja, A ↔ B ⇔ (A ^ B) v̲ (~A ^ ~B) como queríamos mostrar. Repare também que podemos utilizar esta equivalência para qualquer bicondicional. Veja os exemplos:

- "Carlos é cearense se e somente se ele tiver nascido no Ceará" ⇔ "Ou Carlos é cearense e nasceu no Ceará, ou Carlos não é cearense e não nasceu no Ceará"
- "Carol é historiadora se e somente gostar de viajar" ⇔ "Ou Carol é historiadora e gosta de viajar, ou Carol não é historiadora e não gosta de viajar"
- "Um triângulo é equilátero se e somente se possuir lados com medidas iguais" ⇔ "Ou um triângulo é equilátero e possui lados com medidas iguais, ou um triângulo não é equilátero e não possui lados com medidas iguais"

Vale ressaltar que, já que estamos tratando com equivalências lógicas, devemos considerar a "ida" e a "volta" da equivalência. Veja que no segundo exemplo anterior, a partir de uma proposição composta por condicional obtemos uma equivalência com disjunção não excludente isso é o que chamamos de "ida" da equivalência. Por outro lado, a "volta" da equivalência também é verdadeira, ou seja, se tivermos uma proposição composta disjunção não excludente podemos encontrar outra equivalente composta por condicional. O mesmo processo ocorre para todas as equivalências.

3.6 NEGAÇÕES

Como mostrado anteriormente a negação de uma proposição (A) é outra proposição (~A) que possui sempre valor lógico contrário, ou seja, sempre que A for verdadeira então ~A é falsa e quando A for falsa então ~A é verdadeira.

É comum aos alunos menos experientes no assunto confundir negação com antônimo, mas deixemos claro que são conceitos diferentes. Por exemplo, “rico” e “pobre” são antônimos, mas a proposição “João é pobre” não é a negação de “João é rico”, uma vez que o fato de João não ser rico não significa necessariamente que João é pobre, quer dizer apenas que João não é rico. Por outro lado, existem casos em que o antônimo é a negação, tais como: “culpado” e “inocente”, “honesto” e “desonesto”, “vivo” e “morto”, dentre outros. Observe alguns exemplos de negação:

1) A: ”Fábio é alto” ↔ ~A: “Fábio não é alto” (O fato dele não ser alto não significa que “Fábio é baixo”)
2) B: “Francisco é magro” ↔ ~B: “Francisco não é magro” (O fato dele não ser magro não significa que “Francisco é gordo”)
3) C: “Leandro foi aprovado” ↔ ~C: “Leandro foi reprovado” (Nesse caso, “reprovado” funciona como “não aprovado” já que não existe um meio termo)
4) D: “Valéria é culpada” ↔ “Valéria é inocente” (Nesse caso, “inocente” funciona como “não culpado” já que não existe um meio termo)

3.6.1 Leis de Augustus de Morgan

De Morgan mostrou equivalências em negações de proposições compostas por conjunção e proposições compostas por disjunção não excludentes. Todas as equivalências a seguir podem ser verificadas através da tabela verdade.

1) Não “A e B” equivale a Não “A” ou não “B”

A conjunção só é verdade se as duas proposições forem verdadeiras, portanto, se (P ^ Q) não for verdadeira é por que pelo menos uma das proposições é falsa (não é necessário que ambas sejam falsas). Veja os exemplos:

- A: “Carol estuda e aprende” ↔ ~A: “Carol não estuda ou não aprende”
- B: “Charles é professor e contador” ↔ ~B: “Charles não é professor ou não é contador”
- C: “Ele não compreendeu e parou de estudar lógica” ↔ ~C: “Ele compreendeu ou não parou de estudar lógica”

Veja a demonstração pela tabela verdade:

A	B	A ^ B	~(A ^ B)	~A	~B	~A v ~B
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Veja que na quarta e sétima coluna temos que ~(A ^ B) e ~A v ~B, respectivamente, possuem os mesmos valores lógicos logo são equivalentes (~(A ^ B) ⇔ ~A v ~B).

2) Não “A ou B” equivale a Não A e não B

A disjunção não excludente é verdade se pelo menos uma das proposições for verdadeira, portanto, se não é verdade (A v B) é por que as proposições A e B têm que ser falsas. Observe:

- A: “O Chile é um país ou o Ceará é um estado” ↔ ~A: “O Chile não é um país e o Ceará não é um estado”
- B: “Marcos foi à praia ou foi ao cinema” ↔ ~B: “Marcos não foi à praia e não foi ao cinema”
- C: “O número 30 não é primo ou é divisível pelo número 10” ↔ ~C: “O número 30 não é primo e não é divisível por 10”

Veja a construção desta equivalência na tabela verdade:

A	B	A v B	~(A v B)	~A	~B	~A ^ ~B
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Repare que a quarta e a sétima coluna temos que ~(A ∨ B) e ~A ^ ~B possuem os mesmo valores lógicos logo são equivalentes (~(A ∨ B) ↔ ~A ^ ~B).

3) Não "A então B" equivale a A e não B

O condicional (A → B) só é falso se A for verdade e B for falso, portanto, se não é verdade (A → B) é por que as proposições A e ~B têm que ser verdadeiras. Veja alguns exemplos:

- A: "Se Carol é Bonita então casarei com ela" ↔ ~A: "Carol é bonita e não me casarei com ela"
- B: "Se Israel é professor então gostar de resolver exercícios" ↔ ~B: "Israel é professor e não gosta de resolver exercícios"
- C: "Se k é um número divisível por 6 então k é divisível por 2 e por 3" ↔ " o número k é divisível por 6 e não é divisível por 2 ou por 3"

Veja que para se negar a proposição C tivemos que utilizar não só a terceira equivalência de negação, mas também a primeira. Isso é comum acontecer, logo, devemos compreender cada tabela apresentada para que possamos entender as seguintes, uma vez que, em todas as tabela utilizamos conceitos explicados no inicio (por exemplo o fato apresentado na segunda coluna da tabela anterior).

Colocando os dados da terceira equivalência de negação apresentada na tabela verdade, temos:

A	**B**	**A→B**	**~(A→B)**	**~B**	**A ^ ~B**
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Perceba que na quarta e a sexta coluna da tabela anterior temos que $\sim(A \rightarrow B)$ e $A \wedge \sim B$, respectivamente possuem os mesmo valores lógicos e portanto são equivalentes ($\sim(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \sim B$).

Muitas outras equivalências envolvendo negações poderiam ser demonstradas por tabela verdade, mas deixamos como exercício as demonstrações das mesmas.

Por meio destas e outras conclusões em lógica, iremos mostrar que lógica proposicional está muito presente nos conteúdos estudados por alunos do ensino fundamental e médio, alunos universitários em geral e é claro, alunos do curso de matemática, mesmo que muitas vezes não se perceba esta presença.

Devemos observar ainda que o conteúdo escrito neste capítulo está longe de abranger tudo sobre lógica proposicional, mas pode ser entendida apenas como uma base para começar à estudá-la.

4 APLICAÇÕES DA LÓGICA PROPOSICIONAL NO ENSINO MÉDIO

Como já vimos, o estudo da lógica está ligada à uma boa construção de ideias, ou seja, com ela podemos obter conclusões verdadeiras sobre algo que está sendo discutido, sem confiar apenas numa equivocada intuição. Já discutimos também que a lógica não é apenas algo para ser memorizado como fórmulas e tabelas, pelo contrário, ela auxilia o aluno à deduzir mais facilmente algo sobre determinado assunto por si mesmo e à resolver problemas interpretação(como na análise combinatória, por exemplo). Veja o que Cunha afirma:

> (...) aprendizado em matemática só será realizado no momento em que o aluno for capaz de transformar o que lhe é ensinado e de criar a partir do que ele sabe. Caso essa autonomia de transformação e criação não exista, o que se tem é um aluno meramente adestrado, repetindo processos e resoluções criadas por outros (CUNHA, 2003, p. 14).

Com base nisso, podemos compreender que a lógica, de uma maneira geral, além de estimular o raciocínio, atua como uma facilitadora da disciplina de matemática ou qualquer outra que esteja ligada à construção de ideias pelo próprio aluno, promovendo uma autonomia de aprendizagem do mesmo.

Nas escolas em geral, é comum os professores perceberem que os alunos têm grande dificuldade, não só no conteúdo da matéria, mas também na leitura e interpretação da mesma em questões contextualizadas. Com isso, tais professores enfrentam grande dificuldade em ensinar diversos conteúdos (como conjuntos, funções, análise combinatória, equações, etc) tendo como público alvo alunos com sérias dificuldades de assimilação.

Nesse sentido, acreditamos que atividades que envolva lógica podem auxiliar no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem dos alunos. Nesse caso, segundo Tobias (1966, p. 78), a lógica é a ciência que coloca ordem nas operações da razão para se atingir a verdade. A lógica natural é aquela que todo ser humano dotado do uso normal de suas faculdades mentais possui. Afirma ainda Tobias (1966, p. 78), que a lógica artificial é a lógica natural adquirida por meio de livros e experiências e é também chamada de lógica artificial ou simplesmente lógica.

Conforme afirma Copi (1978, p. 19), uma pessoa com conhecimento de lógica tem mais probabilidades de raciocinar corretamente do que aquele que não se aprofundou no estudo do tema. A lógica auxilia no desenvolvimento do raciocínio, da ordem das ideias e dos juízos.

Como vemos, é preciso questionar a maneira como está sendo ensinada a matemática e de outras ciências no ensino fundamental e médio. As escolas devem aderir propostas estratégicas diferentes das que foram ensinadas nos últimos anos a fim de se promover, por meio da educação, o desenvolvimento de indivíduos com capacidade de pensar e atuar de maneira racional e autônoma diante de situações interpretativas.

Acreditamos que a lógica proposicional seja fundamental em todas as áreas de evolução do indivíduo, uma vez que ela baseia a lógica matemática que, uma vez estudada, promove um crescimento no raciocínio lógico dedutivo do mesmo. Por isso, entendemos que o estudo sobre lógica proposicional reforça o entendimento de que atividades que envolvam raciocínio lógico despertam o senso crítico e a criatividade, que são características que levam o aluno a uma maior compreensão dos conteúdos estudados.

Conforme Aristóteles:

> (...) há necessidade de pluralidade de métodos para a aprendizagem: (...) alguns só admitem a linguagem matemática; outros querem alguns exemplos; outros pretendem que se recorra à autoridade de algum poeta; outros, enfim exigem para todas as coisas uma demonstração rigorosa, enquanto outros julgam esse rigor excessivo, seja por incapacidade de seguir a cadeia do raciocínio, seja por terem medo de perder-se nas futilidades. Há, com efeito, algo assim na afetação do rigor. Assim alguns a veem como indigna de um homem livre, tanto no comércio como na discussão filosófica (ARISTOTELES, 1985, p. 19).

O entendimento exposto por Aristóteles não diz respeito à lógica de conteúdo, mas das estruturas lógicas, pois são elas validam um raciocínio correto. Isso quer dizer que, uma vez compreendida as estruturas lógicas, podemos tirar conclusões corretas a respeito de conteúdos que não conhecemos ou até mesmo que não fazem sentido. Por exemplo, na frase “Todo Dleves é Bleves” é o mesmo que dizer que “Se é Dleves então é Bleves” ou ainda, pela contrapositiva, dizer que “Se não é Bleves então não é Dleves”. Veja que obtemos algumas conclusões mesmo não sabendo o que são Dleves ou Bleves, mesmo porque estas palavras não existem.

Um grande problema é que a matemática está sendo apresentada, muitas vezes, por meio de uma série de exercícios artificiais e mecânicos baseados na repetição ou na memorização, não havendo o devido espaço para discussões, análise de dados e criatividade, elementos intrínsecos à lógica proposicional.

Para compreendermos melhor, iremos mostrar duas questões propostas no IX Encontro Nacional de Educação Matemática e o modo como os alunos a solucionaram. As questões fazem parte da pesquisa: “EVIDÊNCIAS DA RUPTURA DO CONTRATO DIDÁTICO EM UM PROCESSO AVALIATIVO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA”. A primeira questão é: "Num navio há 26 carneiros e 10 cabras. Qual é a idade do capitão?", a segunda: "O elevador de um edifício de 10 andares parte do térreo com 4 pessoas: 2 mulheres, 1 homem e 1 criança. Para no 4º andar e aí sai 1 mulher e entram 3 homens. No 7º, saem 2 pessoas. Sabendo-se que houve apenas mais uma parada no 9º onde não desceu nenhuma criança e que o elevador chegou ao 10º andar com 11 pessoas, pergunta-se qual a idade do ascensorista?”.

Assombrosamente, apenas 11 de 100 alunos do ensino médio, notaram que faltavam informações para solucionar o problema. A segunda questão, foi corrigida pelo professor Doutor Silva PUC-SP, autor da questão, que constatou:

> Dos 21 alunos, 10 operaram com os números do problema e apresentaram uma resposta, explicitando a idade do ascensorista; 4 responderam que os dados apresentados não se relacionavam com a pergunta; 3 responderam que o ascensorista era a criança; 2 indicaram, pelas suas respostas, que perceberam a questão (“O elevador não tem ascensorista, porque o condomínio não tem dinheiro para pagar um” e “Não faço a mínima ideia”) e 2 não responderam. (SILVA, 1999, p. 49-50).

É evidente, pelos dados apresentados, a falta de conhecimentos básicos de lógica, uma vez que uma simples leitura crítica do enunciado resolveria a questão. Os conhecimentos matemáticos ensinados através de fórmulas, repetições ou memorizações eram irrelevantes para a questão.

Muitos alunos (e até professores) pensam que a matemática é apenas uma disciplina baseada em operações aritmética e procedimentos algébricos. Desse modo, os conceitos matemáticos ficam limitados apenas a esta definição e, diante de questões de interpretação, torna-se ineficaz. Entretanto, sabemos que a matemática é mais do que um simples conjunto de fórmulas e procedimentos que devemos imitar, é uma disciplina cujo desenvolvimento se dá por meio da investigação.

4.1 LÓGICA PROPOSICIONAL EM DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

A lógica proposicional em matemática pode ser uma grande ferramenta no momento de obter conclusões ou até mesmo demonstrações sobre determinado teorema. Utilizaremos teoremas bem simples de ser demonstrados para facilitar a compreensão do conteúdo, mas as regras utilizadas nas demonstrações seguintes também podem ser aplicadas em qualquer teorema que se queira demonstrar. Existem alguns métodos de demonstração, utilíssimos em matemática, que são baseados em lógica, dentre eles destacamos: Demonstração direta, Demonstração por redução ao absurdo, Demonstração por contrapositiva e o Princípio de indução finita.

4.1.1 Demonstração Direta

Para demonstrar uma proposição do tipo "se *p* então *q*" usando a demonstração direta, deve-se supor que a hipótese *p* é válida e usando um processo lógico dedutivo, chegar diretamente na veracidade da tese *q.* Este tipo de demonstração muitas vezes é baseada em conceitos simples, sem o uso de artifícios engenhosos, mas há problemas envolvendo demonstrações diretas que exigem conhecimentos de procedimentos e argumentos muito bem elaborados. Dessa forma, nesse tipo de demonstração não se pode abrir mão do rigor que a matemática exige, não se utilizando de argumentos duvidosos. A seguir são apresentados alguns exemplos de demonstrações diretas que podem ser realizadas para alunos de ensino médio.

Exemplo 1: Mostre que o quadrado de um número ímpar é ímpar.

Demonstração:

Seja n um número ímpar, então $n = 2k + 1$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Elevando ambos os membros ao quadrado, temos que $n^2 = (2k + 1)^2 \rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Como $p = 2k^2 + 2k$ é um número inteiro, já que k é inteiro, então $n^2 = 2p + 1$, que é um número ímpar.

Exemplo 2: Mostre:

i. que o vazio está contido em todo conjunto.

ii. dados dois conjuntos A e B, que A está contido na união entre esses conjuntos ($A \subset A \cup B$).

iii. dados três conjuntos A, B e C, que a interseção entre A e a união entre B e C é igual a união entre a interseção de A e B e a interseção de A e C, ou seja, temos que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Demonstrações:

i. Devemos mostrar que se x pertence ao conjunto vazio então x pertence A. Ora, em qualquer instância a afirmação “x pertence ao conjunto vazio” é falsa, ou seja, a afirmação “se x pertence ao conjunto vazio então x pertence a A” é verdadeira, de acordo com a tabela verdade do condicional.

ii. Devemos mostrar que se x pertence A então x pertence a $A \cup B$. Veja que, pela definição de conjunto união, temos que a última implicação é o mesmo que dizer que “x pertence a A então x pertence a A ou x pertence a B” que é verdade, segundo a tabela verdade da disjunção não excludente.

iii. Deve-se mostrar que “x pertence a $A \cap (B \cup C)$ equivale a x pertence a $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Ou seja, que “x pertence a A e pertence a B ou C equivale a “x pertence a A e a B ou x pertence A e a C” facilmente demonstrada através da tabela verdade, de acordo com as tabelas apresentadas no capítulo 2 deste trabalho.

4.1.2 Demonstração pela Contrapositiva

Essa é uma técnica de demonstração indireta, uma vez que será utilizado o *modus tollens*, isto é, negar o conseqüente (tese) para concluir-se a negação do antecedente (hipótese). Como já vimos, a equivalência entre proposições $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim B \rightarrow \sim A$ é verdadeira.

Sendo assim, um teorema que pode ser escrito na forma de “Se A Então B” é passível de ser demonstrado pela contrapositiva denotada por “Se não B então não A”. Veja alguns exemplos:

Exemplo 1: Se m e b são números reais com $m \neq 0$, prove que a função $f(x) = mx+b$ é injetora.

Demonstração:

Lembrando que uma função será injetora se e somente se quaisquer que sejam x e y elementos do domínio da função temos que se x for diferente de y implica em f(x) diferente de f(y). Utilizando a contrapositiva, precisa-se provar que: Sejam m e b são números reais com $m \neq 0$, considerando uma função $f(x) = mx + b$,temos que se $f(x) = f(y)$ implicará em $x = y$. De fato, se $f(x) = f(y)$ tem-se que $mx + b = my +b$ (Subtraindo b em ambos os lados) daí, $mx = my$ (dividindo por m em ambos os lados, já que $m \neq 0$) conclui-se que $x = y$.

Exemplo 2: Prove que para todo número natural n, temos que:

Se n! é maior do que n + 1 então n é maior do que 2.

Demonstração: Utilizando a contrapositiva temos que: se n é menor ou igual a 2 então n! é menor ou igual a n + 1, para todo n natural. Repare que se n é um número natural menor ou igual a 2 então só temos três possíveis valores para n: 2, 1 e 0. Observe que:

Se $n = 2$, temos que $n! = 2$ e $n+1 = 3$

Se $n = 1$, temos que $n! = 1$ e $n+1 = 2$

Se $n = 0$, temos que $n! = 1$ e $n + 1 = 1$

Em todos os casos n! é menor ou igual a n+1.

Nesses e em outros exemplos temos que a contrapositiva do teorema, obtida através das equivalências lógicas, auxiliou nas demonstrações tornando-as, pelo menos, um pouco mais simples. O mesmo acontece em demonstrações por contradição ou absurdo.

4.1.3 Demonstração por Contradição

O princípio do terceiro excluído, apresentada na introdução do segundo capítulo, é um princípio que baseia muitas demonstrações em matemática. Como vimos no capítulo anterior, se P for uma proposição então P não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, ou outra opção (excluída) em que P não seria nem verdadeira e nem falsa. Sabemos também que uma implicação $A \rightarrow B$ será falsa se A for verdadeira e B for falsa. Logo temos uma nova maneira de demonstrar teoremas que consiste em negar o que se quer provar, ou seja, numa implicação $A \rightarrow B$ admitimos que $A \rightarrow \sim B$, e construímos um raciocínio sobre essa última implicação até chegar a uma conclusão que contradiz os conceitos matemáticos ou o que foi admitido na hipótese, no caso $A \rightarrow \sim B$. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Por contradição suponha que $\sqrt{2}$ não é irracional, logo ele é racional e por isso pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ em que o mdc(p,q) = 1, ou seja, p e q são primos entre si.Temos que:

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ então $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ ou seja, $p^2 = 2q^2$ Isto é, *p* é um número múltiplo de 2, ou seja, $p = 2k$. Com isso, temos que:

$(2k)^2 = 2q^2$ então $q^2 = 2k^2$ logo *q* também é um numero múltiplo de 2, Contradição! Já que esse fato contraria a hipótese de p e q serem primos entre si, isto é, que o mdc(p,q) = 1. Logo $\sqrt{2}$ terá que ser irracional, já que o fato dele ser racional conduz à uma contradição!

Exemplo 2: Se n é um número inteiro e seu quadrado é ímpar, então n também é ímpar.

Demonstração: Por contradição temos que se n não for ímpar então ele terá que ser par, de modo que n pode ser escrito da forma $2k$, onde k é um número inteiro. Logo, teríamos que $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2.2k^2$ que é par. Assim, n^2 seria ímpar (por hipótese) e par, o que gera uma contradição. Concluímos então que n terá que ser impar.

4.2 QUESTÕES PROPOSTAS ENVOLVENDO CONJUNTOS, FUNÇÕES E CONCEITOS DE LÓGICA PROPOSICIONAL

Nesta seção serão apresentadas questões que o professor de matemática poderá utilizar para fixar, revisar e avaliar conceitos de Conjuntos e Funções juntamente com conceitos de Lógica Proposicional. Alternativamente, o professor poderá comentar a relação da lógica com a disciplina e explicar a diferença da compreensão dos conectivos na linguagem coloquial e na Lógica Matemática. Além disso, introduzir conceitos de Lógica à medida em que as questões vão sendo resolvidas.

Na leitura das questões poderá surgir a pergunta: mas a afirmação também é verdadeira quando a proposição p é falsa? Por exemplo, quando considerar como verdadeira uma proposição composta do tipo “p se e somente se q” ela seria verdadeira quando p e q fossem falsas. Deverá, então, em cada caso, analisar se tal situação (p e q sendo falsas) ajudará na resolução do exercício bem como se p e q sendo falsas não contradizem as demais proposições do exercício.

4.2.1 Questões sobre Conjuntos

Questão 1. Sejam A e B conjuntos distintos, ilustre as sentenças a seguir, utilizando diagramas de Venn:

a) Existe x tal que $x \in A \; e \; x \in B$

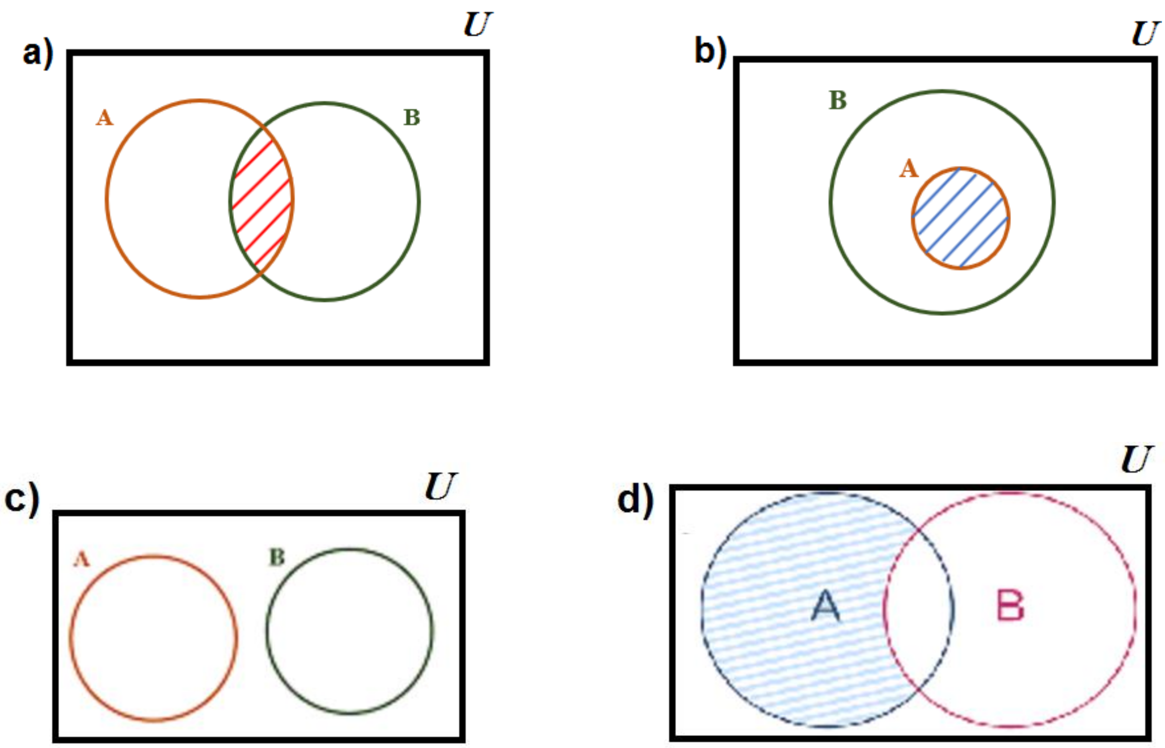
b) Para todo $x \in A$ temos que $x \in B$

c) Não existe x tal que $x \in A$ e $x \in B$

d) Existe x tal que $x \in A$ e $x \notin B$

Neste exercício, o professor aborda os quantificadores universal e existencial e ainda os conectivos lógicos simultaneamente com ideias de pertinência, representação pelo diagrama de Venn, diferença de conjuntos, interseção de conjuntos e conjuntos disjuntos. Na questão 2 a seguir, o aluno deverá dizer qual o conceito de conjunto estudado a sentença representa.

Solução:



Questão 2. Para cada item da questão 1, indique qual o conceito de conjunto a sentença representa.

Solução:

a) Interseção dos conjuntos A e B, denotado por $A \cap B$.

b) A é subconjunto de B, denotada por $A \subset B$.

c) A e B são conjuntos disjuntos.

d) Diferença entre A e B, denotada por $A - B$.

Questão 3. As afirmações I, II e III a seguir são verdadeiras. Relacione as colunas a seguir, indicando o conjunto numérico adequado.

- A ( ) Números Naturais
- B ( ) Números Racionais
- C ( ) Números Reais

I. Ou $\sqrt{2}$ pertence a A ou $\frac{1}{2}$ pertence a A.

II. Ou $\frac{1}{2}$ pertence a B ou $\sqrt{2}$ pertence a C.

III. $\frac{1}{2}$ não pertence a B e $\sqrt{2}$ não pertence a B.

Neste exercício, o professor pode aplicar as definições de conjuntos numéricos, bem como explorar a conjunção e disjunção exclusiva.

Solução:

Pela afirmação III, o conjunto B não pode conter os números Racionais. Assim, como o conjunto dos números Reais e Racionais contém o conjunto dos Racionais, então, dentre as alternativas, B só poderá estar relacionado com os Naturais. Pela afirmação I, o conjunto A não poderá estar relacionado com os números Reais, já que, caso fosse, a disjunção exclusiva do item I seria falsa. Da mesma forma, o conjunto A não poderá estar relacionado com os Naturais, pois a disjunção exclusiva do item I estaria falsa, uma vez que pelo menos uma das partes dessa disjunção é verdadeira. Assim, das alternativas, a única que pode se relacionar com A é o conjunto dos números Racionais. Pelo item II, já considerando que B relaciona-se com os Naturais, pode-se concluir, pelas disjunção exclusiva que $\sqrt{2}$ pertence a C, o que implica que, dentre as alternativas, C só poderá se relacionar com os números Reais.

Questão 4. Sabendo que A∩B = $\{2, 5\}$, B = $\{2, 5, 9\}$ e A∪B = $\{2, 3, 5, 8, 9\}$, classifique as afirmações a seguir em verdadeira ou falsa.

a) $2 \in$ A e $2 \in$ B

b) $8 \in$ A ou $8 \in$ B
c) $3 \in$ A e $3 \in$ B
d) $9 \in$ A ou $3 \in$ B

Aqui o professor poderá explorar os conceitos de União e Interseção de conjuntos e casos em que as afirmações com conectivos “e” e “ou” são verdadeiras.

Solução:

a) Verdadeira, pois $2 \in A \cap B$ e a afirmação está de acordo com a definição de interseção, ou seja, a conjunção é verdadeira.
b) Verdadeira, pois $8 \in A \cup B$ e a definição está de acordo com a definição de União, ou seja, a disjunção é verdadeira.
c) Falsa, como $3 \notin A \cap B$ então uma das duas proposições que formam a conjunção em questão é falsa, logo, ela é falsa.
d) Falsa, já que $9 \notin$ A, pois sabe-se que $9 \notin A \cap B$ e $9 \in$ B. Sabe-se também que $3 \notin$ B, pois os elementos de B estão listados na questão. Assim $9 \in$ A e $3 \in$ B são falsa e, portanto, a disjunção é falsa.

Questão 5. A Escola “Educa Mais” fica em um prédio de três andares e atende turmas do 7º ao 9º ano (ensino fundamental) e do 1º ao 3º ano (Ensino Médio). Esse ano, a diretora da escola distribuiu as turmas da seguinte forma:

- No primeiro andar, apenas 7º ano e 1º ano.
- No segundo andar, apenas 8º ano e 2º ano.
- No terceiro andar, apenas 9º ano e 3º ano.

Sabendo disso, leia as afirmações e classifique-as em verdadeiras ou falsas.

a) Se Cátia estuda no 2º andar, então Cátia não está no 7º ano do Ensino Fundamental.
b) Se Gustavo cursa o 1º ano do Ensino Médio, então ele estuda no 1º andar.
c) Se Rafael estuda no 1º andar, então ele cursa o 7º ano do Ensino Fundamental.
d) Se Verônica estuda no 2º andar, então ela cursa o 9º ano do Ensino Fundamental.
e) Se Gabriela estuda no 3º andar, então ou Gabriela estuda no 3º ano do Ensino Médio ou Gabriela estuda no 9º do Ensino Fundamental.
f) Se Breno estuda no 3º andar, então Breno não cursa o 8º ano do Ensino Fundamental e Breno não cursa o 1º ano do Ensino Médio.

g) Se Julia estuda no 1º andar, então ou Julia não cursa o 7º ano do Ensino Fundamental ou Julia não cursa o 1º ano do Ensino Médio.

Nessa questão, o professor poderá explorar o uso do condicional juntamente com a utilização dos conectivos “e”, “ou... ou” e “ou”.

Solução:

a) Estudam no 2º andar apenas os estudantes das turmas de 8º ano do ensino fundamental e do 2º ano do ensino médio. Assim, Cátia só poderá ser de uma dessas turmas. Portanto, Cátia não está no 7º ano. Logo, a afirmação é verdadeira.
b) A afirmação é verdadeira, pois as turmas do 1º ano do ensino médio estudam no 1º andar.
c) O fato de Rafael estudar no 1º andar não é garantia de que ele curse o 7º ano do Ensino Fundamental, já que nesse andar também estudam alunos do 1º ano do Ensino Médio. Assim, a afirmação é falsa.
d) Estudam no 2º andar estudante do 8º ano do Ensino Fundamental e do 2º ano do Ensino Médio. Assim, a afirmativa é falsa.
e) Estudam no 3º andar estudantes do 3º ano do Ensino Médio e do 9º ano do Ensino Fundamental. Assim, a proposição “Gabriela estuda no 3º andar” garante que Gabriela estuda em um desses níveis. Como não pode haver estudantes que são ao mesmo tempo do 3º ano do Ensino Médio e do 9º ano do Ensino Fundamental, é verdadeira a afirmação.
f) Como no 3º andar só estudam os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio, o fato de Breno estudar no 3º andar garante que ele não pode ser de nenhum outro nível. Portanto, a afirmativa é verdadeira.
g) Não pode haver estudantes que são ao mesmo tempo do 1º ano do Ensino Médio e do 7º ano do Ensino Fundamental, mas o fato de Julia estudar no 1º andar garante que ela cursará um desses anos. Dessa forma, a disjunção será sempre verdadeira, pois as duas proposições não podem ser ambas falsas. Assim, a afirmativa é verdadeira.

Questão 6. Demonstre que, dentre as afirmações a seguir, há apenas uma verdadeira.

a) Se A tem 3 elementos e B tem 4 elementos, então $A \cup B$ tem 7 elementos.
b) Se A tem 2 elementos e B tem 3 elementos, então $A \cap B$ tem 2 elementos.

c) Se A∩B = ∅, A tem 5 elementos e B tem 4 elementos, então A∪B tem 9 elementos.

Essa questão permite que o professor aborde, além dos conceitos de condicional e conjunção, a compreensão das definições de união e intersecção de conjuntos e de que forma se relacionam o número de elementos dos conjuntos e de sua união e interseção. Também é vantajoso para verificar como os estudantes fazem as justificativas nos itens, se estão usando corretamente a linguagem matemática e a língua portuguesa e se conseguem fazer tais justificativas de forma coerentes, logicamente corretas.

Solução:

a) O fato de A ter 3 elementos e B ter 4, não garante que a união deles terá 7 elementos, pois existem outras possibilidades como, por exemplo, o caso de A ∩ B ter um elemento e, então, A ∪ B terá 6 elementos. Assim, diz-se que o item é falso.
b) Não se pode afirmar que A ∩ B tem 2 elementos, pois A e B podem, por exemplo, ser disjuntos. Portanto, o condicional apresentado é falso. Isso ocorreria se A estivesse contido em B.
c) Nesse item, além de saber o número de elementos de A e de B, sabe-se que A e B são disjuntos e, por isso, pode-se garantir que A ∪ B tem 9 elementos (os 5 elementos de A mais os 4 elementos de B). Assim, o item é verdadeiro.

4.2.2 Questões sobre Funções

Questão 1. Considere uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que obedece às afirmações a seguir. Qual a lei de formação desta função?

- Se $x = 0$ então $y = 0$.
- Ou $f(9) = 3$ ou $f(0) = -2$
- $y = 1$ se e somente se $x = 3$.

Pergunta: Para responder esta questão as três afirmações apresentadas anteriormente são necessárias?

Neste exercício, o professor poderá expor, junto com conectivos lógicos, as estratégias que o estudante poderá utilizar para determinar a lei de formação de uma função afim e retomar a definição de função.

Solução:

Como a função f é afim, então ela pode ser escrita na forma $f(x) = ax + b$ para todo x pertencente aos Reais, de modo que para determinar sua lei de formação é necessário encontrar os valores de a e de b.

Analisando a primeira afirmação, temos: O condicional "se p então q" só é falso quando p é verdadeiro e q é falso. Como x é a variável independente, pode-se "escolher", ou seja, supor que seja verdadeira a igualdade x = 0 e, como o condicional é verdadeiro, y = 0 é verdadeiro também. Assim, é possível concluir que $f(0) = a\,.0 + b = 0$ ou seja, $b = 0$.

Analisando a segunda afirmação, temos: A disjunção exclusiva é verdadeira quando uma e apenas uma das proposições que a formam é verdadeira. Como, pela primeira afirmação, f(0) = 0, tem-se que f(9) = 3 é verdadeiro. Assim, $f(9) = a\,.9 + b = 3$ e, como $b = 0$, então $a = \frac{1}{3}$.

Analisando a terceira afirmação, temos: Pode-se utilizar a última afirmação para verificar se os valores encontrados nos itens anteriores estão corretos. Como o bicondicional é verdadeiro quando ambas as proposições que o formam forem verdadeiras e quando ambas as proposições que o formam forem falsas e como x é a variável livre, podemos considerar x = 3 verdadeira e, portanto, y = 1 também é verdadeira. Assim, $f(3) = \frac{1}{3}\,.3 + 0 = 1$.

Sendo assim, a lei de formação da função afim que obedece às afirmações é dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$.

Perceba que são necessárias apenas duas destas afirmações para encontrar a lei de formação solicitada.

Questão 2. Dada a função definida por $f(x) = 200x$, marque V para afirmações verdadeiras e F para as falsas, justificando suas respostas.

( ) Se $x = 3$ então $y = 300$

( ) $y = 1600$ equivale a $x = 8$

( ) Se $y = 600$ então $x = 4$

( ) $y = 1400$ equivale a $x = 8$

Nesta questão o professor poderá explorar a unicidade de valores de y para cada valor de x, a substituição de valores de x ou de y na lei de formação da função e, para a realizar a marcação correta, o professor deverá mostrar aos estudantes em que casos são verdadeiras as afirmações que possuem os conectivos lógicos apresentados.

Solução:

A primeira marcação deverá ser F. Dado que 3 está no domínio, quando $x = 3$ a premissa é verdadeira e tem-se $y = 200\,.3 = 600$. Portanto a tese $y = 300$ é falsa. Logo, o condicional é falso.

A segunda marcação deverá ser V. Aqui pode-se pensar em dois condicionais: se $x = 8$ então $y = 1600$ e se $y = 1600$ então $x = 8$. Para decidirmos o valor lógico de cada condicional, é necessário analisar apenas os casos onde as premissas são verdadeiras. Dado que 8 está no domínio, quando $x = 8$ tem-se $y = 2\,.800 = 1600$, ou seja, o primeiro condicional é verdadeiro. Analisando o segundo condicional: dado que $y = 1600$ está no contradomínio, tem-se que $1600 = 200x$ entao $x = 8$ está univocamente determinado, ou seja, o segundo condicional é verdadeiro. Como os dois condicionais são verdadeiros, o bicondicional é verdadeiro.

A terceira marcação deverá ser F. Dado que 600 está no contradomínio, quando $y = 600$ a premissa é verdadeira e tem-se $600 = 200x$ então $x = 3$. Portanto a tese x = 4 é falsa. Logo, o condicional é falso.

A quarta marcação deverá ser F. Conforme já mencionado, quando $x = 8$ então $y = 1600$. Portanto o bicondicional é falso.

Questão 3. Sejam as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 3x$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = 3x + 3$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $h(x) = 3x - 3$. A partir dos estudos sobre função e considerando as regras da lógica, analise as afirmações:

I. $f(0) = 0\ e\ g(0) = 0$.
II. $g(1) = 6\ ou\ h(1) = -3$.
III. $Ou\ g(1) = 6\ ou\ h(1) = 0$.
IV. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $f(x) \neq g(x)$
V. Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -h(x)$.

São verdadeiras apenas:

a) I, II, III e V
b) I, III e V
c) II, IV e V
d) II e IV
e) II e V

A resolução desse exercício exige domínio sobre os casos em que as proposições compostas são verdadeiras, interpretação correta dos quantificadores e o estudo dos valores das funções nos pontos. Também é possível explorar os gráficos dessas funções e o fato as retas possuem o mesmo coeficiente angular, ou seja, a função possui a mesma taxa de variação.

Solução:

I. Falsa. $f(0) = 3 . 0 = 0$, mas $g(0) = 3 . 0 + 3 = 3$, ou seja, $p : f(0) = 0$ é verdadeira e $q : g(0) = 0$ é falsa. Portanto, a conjunção é falsa.

II. Verdadeira. A afirmação $p : \ g(1) = 6$ é verdadeira, pois $g(1) = 3 \cdot 1 + 3 = 6$. Já a afirmação $q : h(1) = -3$ é falsa, pois $h(1) = 3 \cdot 1 - 3 = 0$. Assim, a disjunção é verdadeira.

III. Falsa. Do item anterior, sabe-se que p: $g(1) = 6$ é verdadeira assim como q: $h(1) = 0$, portanto a disjunção exclusiva é falsa.

IV. Verdadeira. De fato, qualquer que seja $x \ \in \ \mathbb{R}$, tem-se que $3x \neq \ 3x \ + \ 3$, pois $se \ 3x = 3x + 3$, então $0 = 3$, o que não ocorre. Logo, a afirmação é verdadeira.

V. Verdadeira. Tome $0 \ \in \ \mathbb{R}$, tem-se então $g(0) = 3 \cdot 0 + 3 = 3$ e $-h(0) = -(3 \cdot 0 - 3) = 3$, ou seja, $g(0) = -h(0)$. Assim, a afirmação é verdadeira

Desse modo, a alternativa correta é a c)

Questão 4. (FGV-SP) em (DANTE, 2005) - Os gastos de consumo (C) de uma família e sua renda (x) são tais que $C(x) = \ 2000 \ + \ 0,8x$. Podemos então afirmar que:

a) Se a renda aumenta em 500, o consumo aumenta em 500.
b) Se a renda diminui em 500, o consumo diminui em 500.
c) Se a renda aumenta em 1000, o consumo aumenta em 800.
d) Se a renda diminui em 1000, o consumo diminui em 2800.
e) Se a renda aumenta, o consumo aumenta proporcionalmente.

Além do condicional, o professor pode utilizar esse exercício para explorar a ideia de crescimento e decrescimento e os valores de uma função. Aqui, a função afim aparece em um contexto de gastos e renda de uma família e pode ser tomada como exemplo para que o professor adapte outras questões aqui apresentadas para contextos de interesse da turma. Por exemplo, no exercício 2, ao invés de usar a questão da forma como está, o professor pode dizer que x representa a quantidade de tinta spray em ml e y os metros quadrados que são pintados com essa quantidade de tinta, se a turma possuir interesse em arte de rua ou estiver trabalhando com isso em outra disciplina.

Solução:

Sabe-se que o condicional se p então q só é falso quando p é verdadeiro e q é falso. Aqui, a renda é a variável independente e, por isso, pode-se atribuir a ela qualquer valor no domínio (que não está explícito, mas pode-se considerar o Q). Como o exercício fala de aumento e diminuição da renda e do consumo, toma-se como parâmetro o caso em que a renda é 0, ou seja, $C = 2000 + 0,8 \cdot 0 \ = 2000$.

a) Quando a renda aumenta em 500 temos que $C(500) = 2000 + 0,8 \,.\, 500 = 2400$, ou seja, o consumo aumentou em 400.
b) Quando a renda diminui em 500 temos que $C(-500) = 2000 + 0,8 \,.\, (-500) = 1600$, ou seja, o consumo diminuiu em 400.
c) Quando a renda aumenta em 1000 temos que $C(1000) = 2000 + 0,8 \,.1000 = 2800$, ou seja, o consumo aumenta em 800. Portanto, esta é a alternativa correta.
d) Analogamente, Quando a renda diminui em 1000 temos que $C(-1000) = 2000 + 0,8 \,.\, (-1000) = 1200$, ou seja, o consumo diminuiu em 800.
e) Pelos itens anteriores, é fácil perceber que essas duas grandezas não são proporcionais.

Questão 5. [Adaptado de (RIBEIRO, 2016)] Sabendo que $f(x) \ = (3 - 2a)x + 2$ é uma função que tem o conjunto dos números reais como o Domínio e Contradomínio e que a é um número real, analise se são verdadeiras ou se são falsas as afirmações:

- Se f é crescente então $a \geq 3$.
- Se $a < \frac{3}{2}$ então f é crescente.
- Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f é constante.
- Para todo $a > 2$ tem-se que f é decrescente.

Nessa questão, além dos conceitos de função crescente, decrescente e constante, o professor pode explorar o condicional e os quantificadores existencial e universal.

Solução:

Como a questão aborda crescimento e decrescimento da função, começa-se com essa análise. Para a função ser crescente, o coeficiente angular tem que ser positivo, ou seja, $3 - 2a > 0 \rightarrow a < \frac{3}{2}$. Com base nesta informação, é possível concluir que a primeira afirmação é falsa, pois sendo "f é crescente" verdadeiro então $a > 3$ é falso. A segunda afirmação é verdadeira, pois ambas proposições que a compõe são verdadeiras. Sabendo que quando $a = \frac{3}{2}$ o coeficiente angular é igual a zero e, portanto, f é constante e a terceira informação é verdadeira. Por fim, como para $a > \frac{3}{2}$ f é decrescente, então para $a > 2$ a função também será decrescente.

4.3 CONCLUSÃO

Como já abordamos anteriormente, a lógica proposicional não está ligada apenas à resoluções de questões ou demonstrações de teoremas, pois assim seria só mais um conjunto de regras a serem decoradas e aplicadas. Essa lógica é uma parte da matemática que além de auxiliar na resolução de questões, nos dá autonomia de pensamento. Por isso, a lógica das proposições é uma ferramenta que sem dúvida colabora para o crescimento intelectual do aluno. Assim, construímos o que realmente deveríamos chamar de aprender matemática, isto é, o papel da matemática escolar seria cumprido, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio que afirma que a matemática é uma disciplina que:

> contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 1998, p. 40).

Em construções envolvendo lógica proposicional, é fundamental que o aluno seja o principal contribuinte de sua aprendizagem. Para PÓLYA, "o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível" (PÓLYA, 1995, p. XVII), mas o autor defende a importância da contribuição do professor nesse processo quando declara que "O professor deve auxiliar nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho” (PÓLYA, 1995, p. XVII). Ou seja, o professor deve dar o mínimo de informações, mas que também seja suficiente para que ele possa seguir sozinho.

Acreditamos que, se o estudante, desde o início do Ensino Médio, tiver contato com conceitos de Lógica proposicional e suas linguagens, esse estudante terá uma maior facilidade de compreender conceitos e abstrações em Matemática. Analogamente, estamos convictos que estudantes que possuem domínio em Matemática, àqueles que possuem desenvolvimento de competências e habilidades que transformam conteúdos em interpretação de realidade e ações que visam solucionar problemas encontrados nessa realidade, terão maior capacidade de atuar, de forma mais consciente e crítica enquanto cidadãos.

Desse modo, o presente trabalho não deve ser visto como uma proposta finalizada, mas como um início de uma proposta que deve ser inserida no Ensino Básico. Este trabalho contém apenas uma pequena proposta de inserção de lógica proposicional no Ensino Médio, sem sobrecarregar professores que possuem tantos conteúdos para lecionar em tão pouco tempo. Assim, esperamos que as questões aqui apresentadas possam ser utilizadas e servir de inspiração, para os professores que ensinam conjuntos e funções, para a criação de novas questões desses e outros conteúdos, buscando relacioná-los com Lógica proposicional.

Verificamos, assim, como a lógica proposicional é importante para o desenvolvimento racional de um estudante, servindo de base para uma boa construção de raciocínios e conclusões independentes. Portanto fica visível a importância da lógica proposicional, especialmente no Ensino Médio.

A realização deste trabalho nos proporcionou um estudo profundo sobre lógica proposicional, tanto na parte histórica quanto na parte conceitual do assunto. Como nunca tinha estudado este conteúdo como uma disciplina obrigatória no curso de matemática, tive algumas dificuldades para expor o que realmente penso sobre a lógica proposicional.

Sem dúvida este trabalho modificou diretamente no meu modo de pensar sobre diversos assuntos em matemática. Além disso, o estudo realizado me ajudou muito em tornar minhas aulas mais interessantes e expositivas na escola em que leciono. Dessa forma, pensamos que o estudo fornecido por esta obra, pode auxiliar não só a compreender a importância da lógica proposicional para alunos em qualquer nível de escolaridade, mas também na orientação do trabalho do educador visando um melhor aproveitamento do método de ensino. Conforme PÓLYA disciplina:

> O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém. (PÓLYA, 1995, p. 124).

Esse método de ensino pode nos proporcionar uma maneira de conduzir a aula de tal forma que incentiva o aluno a pensar e raciocinar, com a parceria do professor, mas principalmente com seus próprios discernimentos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Maria da Conceição de. Prefácio: um alpendre lilás para a educação. In: Farias, Carlos Aldemir. **Alfabetos de alma:** histórias da tradição na escola. Porto Alegre: Sulina, 2006.

ARISTÓTELES. **Ética a Nicômaco.** Brasília: Universidade de Brasília. 1985.

BENDREGAL, Benjamín René Callejas. **Introdução à lógica clássica para a ciência da computação:** lógica proposicional:Linguagem e Semântica. Disponível em: <http://www.dimap.ufrn.br/~jmarcos/books/BA_Jul07.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília: MEC,SEMT, 2000.

CUNHA, Margarida da Mota. **Escuta sensível e etnomatemática:** caminhos para a compreensão matemática no ensino fundamental. 2003. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade do Estado da Bahia, Salvador, 2003.

FONSECA, Regina Célia Veiga da. **Metodologia do trabalho científico:** o pensamento evolutico: metodologia, raciocínio e conhecimento. Curitiba: Iesde, 2009.

HALPERN, J. Y. and Moses Y., R., Immerman, N., Kolaits, P. G., Vardi, M. and Vianu, V., On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science, Bulletin of . **Symbolic Logic,** [S.l.], v.7, n.2, p.213-236, 2001.

LEIBNIZ, G. W.. **Die philosophischen Schriften von G.W. Leibniz.** Berlin: Gerhardt ,1875. v.7.

PERELMAN, Chaim. **Lógica Jurídica:** nova retórica. Tradução de Verginia K. Pupi. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

PÓLYA, George. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. **Interciência,** Rio de Janeiro, 1995.

MIRANDA, Carla Maria Esteves; SILVA, Sandra Isabel Henriques. **Henri Poincaré.** São Paulo: EDUC, 2013. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/poincare/index.htm>. Acesso em: 20 nov. 2013.

MORTARI, Cezar A.. **Introdução à lógica:** lógica proposicional. São Paulo: Unespe, 2001.

SILVA. B. a. Contrato didático. In: FRANCHI, A. et al. **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: Educ, 1999. p.43-64.

SOARES, Flávia; DORNELAS, Geovani Nunes. **A lógica no cotidiano e a lógica na matemática.** Brasília: SBEM, 2013. Disponível em: <www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/MC03526677700.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2013.