Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

TEOREMA DE PITÁGORAS E OS TERNOS PITAGÓRICOS

Carlos Augusto Corrêa

Brasília, 2019

Carlos Augusto Corrêa

TEOREMA DE PITÁGORAS E OS TERNOS PITAGÓRICOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matematica da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de mestre

Dissertação de Mestrado

Orientador: Prof. Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli

Brasília
2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

CC824t

CORRÊA, CARLOS AUGUSTO
Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos / CARLOS AUGUSTO CORRÊA; orientador VINICIUS de CARVALHO RISPOLI. -- Brasília, 2019.
54 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2019.

1. Teorema de Pitágoras. 2. Ternos Pitagóricos. I. de CARVALHO RISPOLI, VINICIUS, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos

por

CARLOS AUGUSTO CORRÊA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 12 de agosto de 2019.

Comissão Examinadora:

Prof. Vinícius de Carvalho Rispoli (Orientador)

Prof. Eudes Antônio da Costa - UFT/Arraias

Prof. Rui Seimetz - MAT/UnB

Dedicatória

Dedico esse trabalho a duas pessoas muito importantes na minha vida, primeiramente ao saudoso Sr. José Batista de Oliveira, que infelizmente nos deixou e não pode comemorar conosco essa conquista, mas que com certeza, lá no céu, esta com o coração cheio de alegria neste momento. Dedico também ao meu pai, José Lourenço Corrêa, que não mediu esforços para que eu pudesse trilhar com o sucesso a carreira acadêmica, sei que esse título de mestre tão almejado e só agora conquistado é resultado do suor que correu em seu rosto naquelas tantas tardes quentes ao volante de um ônibus lotado, muito obrigado meu pai.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que iluminou o meu caminho durante esta jornada, aos meus familiares que com muito carinho e apoio, foram fundamentais em mais essa conquista e por último, mas não menos importantes, aos meus professores que possibilitaram alcançar esse objetivo.

Resumo

A Base Nacional Comum Curricular indica que o Teorema de Pitágoras seja trazido aos alunos no 9° ano do ensino fundamental. No entanto, é comum que os professores lecionem sobre o Teorema de Pitágoras de forma disassociada dos ternos Pitagóricos. A proposta deste trabalho é demostrar que a relação íntima existente entre estes temas pode ser utilizada para propor uma metodologia capaz de trabalhar de forma paralela esses dois conceitos no ensino fundamental. Neste sentido, foi proposta uma nova fórmula geradora de ternos Pitagóricos. Diferentemente das fórmulas conhecidas de Euclides e Platão, a fórmula proposta possui uma característica interessante para o contexto do ensino fundamental. Nesta fórmula, dado um número $p \geq 3$ qualquer, é possível construir um terno Pitagórico na forma $(p, n, n+1)$ ou $(p, n, n+2)$, dependendo da paridade do número p. Isto é, sempre se gera ternos que contém o número escolhido e um par de números consecutivos. A abordagem, utilizando a fórmula apresentada, foi aplicada em uma turma do 9° no Centro de Ensino Fundamental 201 em Santa Maria, no Distrito Federal. Com o intuito de avaliar a eficiência da abordagem o Portal da OBMEP foi utilizado, tanto na forma de aproximar o estudante das tecnologias na aprendizagem da matemática, quanto na forma de avaliar os estudantes. Finalmente, verificou-se que a abordagem produziu ótimos resultados tanto em avaliações quantitativas quanto em avaliações subjetivas dos alunos participantes.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Ternos Pitagóricos; Ensino Fundamental.

Abstract

The Common National Curriculum Base indicates that the Pythagorean Theorem is brought to students in the 9th grade. However, it is common for elementary school teachers to teach about the Pythagorean Theorem disassociated from the Pythagorean triplets. The purpose of this dissertation is to demonstrate that the intimate relationship between these themes can be used to propose a methodology in which these two concepts can be worked in parallel in elementary school. In this sense, a new generating formula for Pythagorean triplets was proposed. Unlike the already known formulas of Euclid and Plato, the proposed formula has an interesting feature for the elementary school context. For, given any number $p \geq 3$, it is possible to construct a Pythagorean triplet of the form $(p, n, n+1)$ or $(p, n, n+2)$, depending on the parity of the number p. The approach, using the presented formula, was applied to a class of 9th grade at the Centro de Ensino 201 in Santa Maria, Distrito Federal. In order to evaluate the efficiency of the approach, the OBMEP Portal was used both to bring students closer to technologies in mathematics learning and also to evaluate students. Finally, it was found that the approach produced excellent results in both quantitative and subjective evaluations of the participating students.

Keywords: Pythagorean Theorem; Pitageric Triplets; Elementary School.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

A carência na qual o ensino Brasileiro se encontra, alto índice de evasão escolar, desinteresse em sala de aula, e ambiente desfavorável para o despertar do aluno, provocam para os gestores das escolas necessidades de ações atraentes e divertidas, sem deixar o conhecimento em segundo plano, através deste estudo poderemos entender que isso é possível.

> No Brasil, os jovens estão cada vez menos interessados nos estudos. Segundo a pesquisa da Fundação Victor Civita, a maioria dos alunos entrevistados não entende a utilidade da maioria dos assuntos ensinados no colégio. Acreditam que matérias como Matemática e Português são importantes, mas que todas as outras são dispensáveis. (EDUCABRAS, 2016)

Segundo a pesquisa realizada pelo Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) o índice de evasão escolar é elevado na educação básica.

> O Ensino Médio lidera com 11,2% de alunos fora da escola, sendo que o Pará é o estado que apresenta a maior taxa de evasão escolar do Brasil. Nesse estado, 16% dos alunos do ensino médio estavam em situação de evasão na altura da pesquisa. (INEP, 2015)

O ambiente lúdico e criações de espaços mais atraentes, proporcionam no ambiente escolar um laço afetivo, provocam resultados significativos, uma vez que o elo entre aluno, professor e gestores da educação estará mais presente e ciente das necessidades e reais dúvidas e dificuldades envolvendo a educação.

Entender que há necessidade de mudanças, tanto em meio organizacional tanto em meio a formação do professor, proporcionar novos conceitos e metodologias mais interativas e criativas que possam promover diretamente o desenvolvimento mais adequado e satisfatório em comparação aos níveis da educação atual no Brasil.

Devido à má remuneração do profissional da educação, a profissão, dita desde os primórdios da civilização como uma das mais importantes e necessárias, pois é a base para outros dissentimentos profissionais, está cada dia mais afastada do interesse de novos professores, além de não estimular e nem tão pouco incentivar a formação continuada daqueles que já exercem a função.

> Segundo a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) "O Brasil paga os piores salários para professores do ensino fundamental e médio entre os 40 paises membros."(O GLOBO, 2018)

Assuntos abordados em sala, devido ao currículo pré-estabelecido, podem ser vistos pelos alunos como desinteressante ou até mesmo incompreendidos, principalmente no Ensino Fundamental, uma vez que, em alguns casos, é uma fase que contém mais dificuldades para conquistar a atenção do aluno.

Desta forma, com o desenvolvimento desta pesquisa será possível analisar a importância em trazer novos métodos e metodologias para o ambiente escolar, uma vez que sejam desenvolvidas atividades que o foco seja o aprendizado e a melhor compressão do aluno. Familiarizar o conteúdo contribuem para a fixação do aprendizado, já que o aluno coloca em prática o que está aprendendo de forma em que consegue visualizar isso em seu cotidiano.

E meio a tantas oportunidades que é proporcionada, pode-se compreender uma melhor maneira para que o lecionar não se torne chato, monótono e obrigatório, no qual não é notado a necessidade de sua aplicação no dia a dia, assim se faz com a matemática, uma vez que muitos alunos acabam criando resistências por essa disciplina, pelo fato de ser aplicada uma metodologia atrasada que não desperta o interesse do aluno.

Observar e valorizar a experiência acumulada pelo aluno dentro e fora da escola é um fator de suma importância, para compreender suas dificuldades, aplicando assim, atividades adequadas para sua compreensão.

Através da pesquisa será possível compreender novos conceitos e entender melhor a funcionalidade de metodologias, nas quais estimulem o aluno para que raciocine, descubra e tenha autonomia de pensamento, através desafios, jogos interatividade, problemas curiosos dentro outras possibilidades. Analisar e enxergar o Teorema de Pitágoras com práticas, podendo assim despertar o interesse nesta áreas, até mesmo, para um futuro profissional.

O Teorema de Pitágoras, assunto abordado em geral no 9º ano do Ensino Fundamental, constituem de um amplo conteúdo histórico matemática, o conceito: "em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos"é um resultado por traz de possibilidades e conhecimento.

Este trabalho visa propor uma nova abordagem para o assunto, trabalhando os Ternos Pitagóricos lada a lado com o Teorema de Pitágoras no 9º ano do Ensino Fundamental, possibilitando ao educando uma maior compreensão do assunto, além de possibilitar uma exploração mais profunda das relações métricas existentes no triângulo retângulo.

O estudo dos ternos pitagóricos paralelamente ao teorema de Pitágoras no ensino fundamental, visa facilitar o entendimento do aluno e proporcionar um maior aprofundamento do tema nesta fase da educação básica, expandindo esse conhecimento e aumentando as possibilidades de aprendizagem e aplicações do teorema de Pitágoras.

A metodologia usada neste estudo será a pesquisa bibliográfica, a escolha desta abordagem é devido a esta se adequar aos objetivos desta pesquisa. Para a pesquisa bibliográfica serão feitas leituras sobre os mecanismos do poder de transformação do ensino metódico da matemática, levando-o a ser algo mais agradável e interessante, utilizando-se de livros, artigos, autores renomados e aprendizado recebido. Lakatos e Marconi conceituam esse processo com as seguintes palavras:

> A pesquisa bibliográfica trata-se do levantamento, seleção e documentação de [...] bibliografia já publicada sobre o assunto que está sendo pesquisado, em livros, revistas, jornais, boletins, monografias, teses, dissertações, material cartográfico, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo o material já escrito sobre o mesmo. (LAKATOS; MARCONI, 1987, p. 66)

Para a execução da pesquisa bibliográfica serão observadas algumas etapas. A investigação das soluções para o problema terá como fase prioritária a coleta da documentação para se conseguir duas ações interdependentes e complementares: levantamento da bibliografia e das informações contidas na bibliografia e das informações contidas na bibliografia (LIMA e MIOTO, 2007). Neste momento, ocorrerá a análise detalhada das informações presentes no material consultado.

Conforme Salvador (1986), as etapas de leitura são: (1) leitura de reconhecimento do material bibliográfico; (2) leitura exploratória; (3) leitura seletiva; (4) leitura reflexiva ou critica; (5) leitura interpretativa.

Assim será feita leitura objetiva das obras que tratam do tema. Em seguida o levantamento da relevância das informações para a pesquisa. Enquanto que na leitura seletiva será selecionado a delimitação do material relacionando ao problema. Na leitura reflexiva foi desenvolvida uma análise crítica do material com o objetivo de selecionar e ordenar as informações.

Finalmente, a leitura interpretativa em que também será feita a correlação das ideias destacadas nas obras pesquisadas e as questões a serem resolvidas para direcionar o estudo. E a partir da leitura reflexiva e interpretativa será produzido o texto final do trabalho.

Capítulo 1

A Inovação Metodológica no Olhar Docente

Atualmente, perante tantos desafios e novas formas de ingressar em um ambiente de ensino superior, nos deparamos com as qualificações devidas destes futuros profissionais, uma vez que, a partir dali, será remetida uma nova visão e busca de um futuro mais promissor e que esteja dentro das suas expectativas de exercer uma função com alegria e capacitação adequada.

Assim, profissionais capacitados e melhor envolvidos no grupo docente de uma instituição proporcionam a qualidade e melhor desenvolvimento para o estudante. Ter uma preparação adequada e uma constante busca pela aprendizagem torna mais prazeroso o ato de ensinar, lecionar e educar. O reconhecimento da formação advém principalmente da natureza complexa da docência que requer para sua efetivação uma prática educativa comprometida com os processos de ensino e aprendizagem exigindo do professor o acionar de uma multiplicidade de saberes. (CUNHA, 2009)

Valorizar a formação do docente é um fator de suma importância para que, dentro da insegurança e desvalorização atual do professor, sejam atribuídos novos conceitos para restabelecer os valores que estão se perdendo. Neste contexto, o PROFMAT, tem colaborado muito, formando profissionais competentes e com práticas inovadoras no ensino da matemática. Como Assis e Castanho acrescentam, que além de dar aulas também é um trabalho, ou seja, que sua valorização tenha o mérito reconhecido e valorizado, como acontece em todas as profissões. (ASSIS; CASTANHO, 2009) Antunes acrescenta sobre a importância da valorização da profissão:

> Um professor que adora o que faz que se empolga com o que ensina, que se mostra sedutor em relação aos saberes de sua disciplina, que apresenta seu tema sempre em situações de desafios, estimulantes, intrigantes, sempre possui chances maiores de obter reciprocidade do que quem a desenvolve com inevitável tédio

> da vida, da profissão, das relações humanas, da turma (ANTUNES, 2003, p. 55)

Os desafios cotidianos em um ambiente educacional geram a reflexão da base escolar que contribuíram para o crescimento de aprendizagem desses estudantes onde em muitos casos, por não ter essa base escolar bem desenvolvida, acaba acarretando um mal desempenho em seu futuro acadêmico, resultando em um alto número de reprovação e evasão escolar. Nesta pesquisa, verificamos que as situações familiares, financeiras ou falta de aptidão, avaliando também, à docência, contribui de forma significativa para o desempenho deste estudante, dando o devido auxilio para que seja positivamente bem desenvolvido e concluído.

Compreender a individualidade de cada um é importante, porém com grande volume de estudantes pode se tornar difícil, o que impossibilita esse desenvolvimento mais afetivo. Assim proporcionar uma abordagem das disciplinas, onde essa base escolar do ensino fundamental e médio, não é tão bem estruturada, acaba remetendo ao grupo docente necessidade de intervir para sanar as dúvidas e motivá-los a conclusão do curso.

> O modo de relação que o professor estabelece com seus alunos, tanto no que se refere à gestão da matéria quanto no plano interpessoal, é decorrente da sua concepção de educação. Assim, questões morais acerca do tipo de sujeito que ele deseja formar pela sua atuação profissional não podem ser evitadas. A inclusão do aluno no interior do processo de ensino-aprendizagem enquanto sujeito ativo depende, notadamente, da postura do docente frente a essas questões. (THERRIEN; MAMEDE; LOIOLA, 2004, p.53)

Desta forma podemos completar ainda que além da importância de detectar certas dificuldades que provém de uma metodologia inadequada para o estudante, que apresenta baixo desenvolvimento para uma determinada atividade ou disciplina, entendemos também a importância do vínculo para o processo da formação de um profissional capacitado.

1.1 A matemática inserida em uma nova realidade

Como dito anteriormente o peso de uma formação no ensino fundamental e médio acarretam grandes dificuldades nas aplicações de certas disciplinas no ensino superior. A falta de base na Matemática e falta de articulação entre teoria e prática implicam em uma certa resistência a disciplina.

Nos deparamos com um grande problema dentro das escolas, onde professores que lecionam já estão saturados da má remuneração e com metodologias que já não são interessantes para despertar o interesse dos aluno, outro ponto a ser observado é a questão de professores que não são formado na área conhecimento, tudo isso vem acompanhando a vida estudantil, e esse aluno chega na universidade com essa bagagem desestruturada.

Assim, cabe ao aluno correr atrás do "tempo perdido"e o educador provocar seu interesse, utilizando de outras práticas metodológicas para um desenvolvimento mais prazeroso e progressivo.

> Estudos mais recentes, partindo do pressuposto que os professores produzem, na prática, saberes práticos sobre matemática escolar, currículo, atividade, ensino, aprendizagem, mostram que esses saberes práticos se transformam continuamente, sobretudo quando os professores realizam uma prática reflexiva e/ou investigativa. (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 47)

Aplicar a matemática de modo investigativo com ambiente mais familiar ao seu domínio, passa a ser um instrumento imprescindível para dar significado à aprendizagem a disciplina, uma vez que o ensino fica mais claro quando o aluno enxerga sua aplicação, ou seja, quando se incorpora vivências concretas ao que se vai aprender, incorporando o aprendizado a novas vivências.

> O conhecimento da Matemática da forma pela qual é trabalhado, desenvolvido nas salas de aula, não é considerado como instrumento para a tomada da consciência crítica da realidade social, e nem fundamento para o real exercício da cidadania, à medida que sua mera transmissão reduzida a informações genéricas, abstratas, não contextualizadas, distantes da vida dos alunos, tendem a fortalecer a formação de indivíduos moldados, disciplinados e acomodados, incapazes de perceber a sua importância para o desenvolvimento da sociedade em sua totalidade (OLIVEIRA; MALUSÁ, 2004, p. 34).

A matemática esta envolvida diretamente em vários fatores e em vários cursos, o saber e se interessar e adequando em seu cotidiano pode transforma a forma em que é vista, levando em consideração que temos melhores desenvolvimentos e habilidades em contato com conteúdos que nos transmite prazer e compreender que a matemática não está distante ou até mesmo oposta e que pode trazer respostas a serem bem observadas para resolver grandes problemas, dentro das disciplinas e também em meio a sociedade.

A ligação do professor para com o aluno e a importância do desenvolvimento da afetividade assume a importância de compreender o cotidiano, entende as causas de um baixo desempenho, proporcionando assim uma melhor fonte investigativa para elaborar melhores formas metodológicas para que seja aplicada a matemática dentro dos conceitos que os estudantes esperam, como se percebe em outras disciplinas.

> Se o indivíduo não tiver suas funções emocionais ativadas junto com as racionais, o aprendizado não acontece de forma plena, faltando-lhe componentes que ajustem os significados do cérebro. Daí as recentes prática didáticas de situações simuladas, vivenciais e comunitárias, ou de interpretação personalizada, utilizando ainda alterações de humor e outras emoções para facilitar o entendimento, a memorização e a aplicação prática de conteúdos teóricos. (MALUSÁ; MONTALVO, 2005, p. 264).

Tendo a visão ampliada da individualidade de cada estudante, promove ao corpo docente a entender a melhor aplicação ou o desenvolvimento de metodologias aplicadas favorecendo o desempenho de suas habilidades e aprendizado dentro da disciplina. Oliveira (2004) diz que as fases do desenvolvimento humano não são fixas, pois cada pessoa, de cada contexto social, econômico e familiar terá um momento diferente de desenvolvimento.

Descobrir com esse novo conceito de individualidade pode acarretar novas formas de lecionar e também de avaliar. Trabalhos de campo também agregam muitos valores e conhecimento e esses não devem se prender a área de humanas. Podemos exemplificar um cálculo em uma obra, por exemplo, aplicando um conteúdo que possa ser um tabu entre os alunos e na prática, vendo esse cálculo ser desenvolvido, proporciona afinidades que não seriam praticadas e nem descobertas em sala de aula.

O não entendimento do professor de que ele pode escolher, além da prova, outras estratégias para identificar o nível de aprendizagem dos estudantes, deixa entrever que sua prática avaliativa está associada a uma concepção metodológica tradicional, que considera o ensino de Cálculo como mera transmissão e memorização de informações prontas, e o estudante visto como um ser passivo e receptivo. Nesse sentido, "avaliar é julgar ou fazer apreciação de alguém ou alguma coisa, tendo como base uma escala de valores ou interpretar dados quantitativos e qualitativos para obter um parecer ou julgamento de valor, tendo por base padrões ou critérios"(HAYDT, 1998, p.10).

Considerando a importância da metodologia aplicada pelo professor uma ferramenta estimulante, Libâneo conceitua que "[...] se caracteriza como mediação entre as bases teórico-científicas da educação escolar e a prática docente, ou seja, ela articula os objetivos, conteúdos e métodos das matérias de ensino."(LIBÂNEO,1994, p. 27)

Nessa perspectiva, há aspectos relevantes que precisam ser observados pelos professores no seu exercício profissional os quais contribuem para a aprendizagem dos estudantes, como realizar o diagnóstico inicial da turma, articular o conteúdo à prática social, valorizar as potencialidades dos estudantes, dentre outros aspectos. Dessa maneira, o "bom professor", não é uma conquista perene, duradora e transferível para qualquer circunstância, contexto ou época. É uma identidade em construção que está relacionada com as situações históricas, sociais, culturais e políticas, manifestadas na sua forma de ser, como pessoa e como profissional. (PIMENTA, 1997).

Alves (2005) diz que os alunos não precisam gostar do que estão vendo, a partir das orientações do professor, mas precisam ser apresentados para o máximo de possibilidades de visões para que possam fazer suas próprias escolhas no futuro. Pois ensinar é proporcionar ao aluno o conhecimento da existência e do manuseio do máximo de ferramentas possíveis e levá-lo a construir seu conhecimento, tendo em vista que o professor não pode transferir-lhe os seus próprios conhecimentos, mas pode e deve ser o mediador entre o conhecimento e o aluno.

Deste modo a desenvolver a mente criativa, abrir possibilidades, criar interatividade em meio as metodologias de ensino, proporciona um ambiente mais convidativo para o estudante assimilar seus conhecimentos a sua rotina diária e até mesmo visionar situações futuras.

> [...] no âmbito do conhecimento, o ensino superior percebe a necessidade de se abrir para o diálogo com outras fontes de produção de conhecimento e de pesquisa, e os professores já se reconhecem como não mais os únicos detentores do saber a ser transmitido, mas como um dos parceiros a quem compete compartilhar seus conhecimentos com outros e mesmo aprender com outros, inclusive com seus próprios alunos. É um novo mundo, uma nova atitude, um nova perspectiva na relação entre o professor e o aluno do ensino superior. (MASETTO, 2003, p. 14).

Atualizar a metodologia e utilizar de tecnologia não quer dizer que o método já desenvolvido esteja errado, mas que é de suma importância nos adequarmos com a evolução da sociedade, assim entende-se que as instituições devem tomar a devida cautela na adoção das novas tecnologias e conteúdo que surgem com elas, entendendo que o ensino deve se adequar ao novo sem se desocupar do antigo, pois o estudo dos clássicos ajuda a enxergar o ser humano dentro da cadeia histórica e social ao longo da história da humanidade e a aprender com o que traz de contribuição os ensinamentos mais antigos.

Morin (2003) destaca que a missão do didatismo deve ser encorajar o autodidatismo, despertando, provocando e favorecendo a autonomia de espírito. Então ensinar não é transmitir um mero saber, mas apresentar uma cultura que permita compreender a condição humana e auxilie na formação de um pensamento autônomo e livre.

1.2 A visão do docente em matemática

Segundo Klein e Soares Gil (2012) O processo de ensino aprendizagem em matemática tem como objetivo levar os alunos a alcançarem o sentido dos números e operações como instrumentos na resolução de situações problemas apresentadas no seu cotidiano. Como bem nos assegura Lucchesi (2009), O processo de ensino aprendizagem em matemática é uma constante construção do conhecimento, no processo de interação social com o mundo, reelaborando, complementando e sistematizando esses conhecimentos. Um dos aspectos essenciais a considerar na situação de ensino, refere-se a ideia da matemática como sendo uma área do conhecimento pronta, acabada, exata e perfeita, baseada no mundo das ideias e que a sua estrutura de sistematização é modelo para as outras ciências.. Para Sánchez Huete e Fernández Bravo (2006, p. 23) O processo de ensino aprendizagem em matemática acontece de forma progressiva, partindo da intuição e aproximando-se da dedução. Desta forma a construção do conhecimento matemático é fundamentado no nível de cognição dos alunos.

> O processo de ensino aprendizagem em matemática é meramente cognitivo. Mesmo compartilhando as teses de Popkewitz sobre o caráter mediatizador de algumas operações, assim como a seleção de conteúdos, que indicam a direção da aprendizagem, acreditamos que o ensino da matemática parte das características lógicas de seu conteúdo cientifico.(HUETE, 2006, p. 23)

Na relação professor/aluno, o principal objetivo da educação matemática é possibilitar a constante construção do conhecimento, propiciando as ferramentas necessárias na resolução das diversas situações problemas que a sociedade vive em seu dia-a-dia. Cita-se, como exemplo, um tema corriqueiro do ensino fundamental: "Teorema de Pitágoras"que será trabalhado com uma nova abordagem, estudando de forma paralela com o "Ternos Pitagóricos", utilizando as novas tecnologias para alcançar melhores resultados neste processo de ensino aprendizagem.

> Não há dúvida que a didática matemática não se reduz a um bom conhecimento dela, mas incluem-se fatores que determinam como ensiná-la. Por exemplo, em relação a teoria de aprendizagem mais adequada, à demanda social do momento, à adequação da metodológica conforme os alunos, etc. Nesse sentido, O processo de ensino aprendizagem em matemática permite construir o conhecimento de forma significativa, possibilitando a formação de um cidadão crítico e produtivo para a sociedade contemporânea.(HUETE, 2006, p. 27)

Logo, é importante compreender que o ensino matemático no Brasil, principalmente na educação básica, passa por grandes dificuldades, desde a falta de formação adequada dos docentes, passando pela falta de estrutura das escolas e baixa remuneração dos profissionais até a falta de motivação dos alunos, por esses e outros motivos, faz-se necessário a busca por novas metodologias e abordagens de cada tema matemático estudado nesta fase do ensino. Nesse sentido, vamos exemplificar o processo de ensino aprendizagem em matemática de forma inovadora, procurando diferentes métodos de aprender e ensinar, essa nova visão do ensino matemático é fundamental para atingir os objetivos desejados.

Capítulo 2

O Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos em Seus Contextos Históricos

Segundo Roque (2012), A matemática antiga, em particular a mesopotâmica e a egípcia, sempre foram tratadas como parte da tradição ocidental. Além disso, também nos assegura Roque (2012), que já haviam registros dos ternos pitagóricos na obra de Euclides, denominada "Os Elementos". Para Kahn (2007, p. 09), Os ternos pitagóricos já estavam presentes nos antigos escritos babilônicos, e ainda usado até hoje, por carpinteiros na construção de cantos quadrados na obtenção de ângulos retos. Portanto, o conteúdo prático do teorema como dispositivo para construção de ângulos retos, era conhecida bem antes de Pitágoras. Embora seja concebível que Pitágoras tenha sido a pessoa responsável pela introdução da técnica na Grécia, não se tem nenhum iníicio disto. E certamente nenhuma razão para acreditar que Pitágoras ou qualquer outro pitagórico possa ter fornecido uma prova dedutiva do teorema, tal como encontramos em Euclides. (KAHN, 2007, p. 52)

Embora atribuído a Pitágoras, há várias evidências de que o famoso teorema já era conhecido muito antes de Pitágoras ou da escola Pitagórica.

Cercado de rumores e conceitos fantasiosos, a vida de Pitágoras tem, por sua vez, poucos relatos. Matemático e filósofo grego, nascido na Grécia em 570 a.c., foi um pioneiro no conceito astronômico, no qual se colocava em afirmações que concretizava que a Terra era em formato esférico e suspenso no espaço.

> A maior parte do trabalho de pesquisa acadêmica contemporânea foi dedicada a Pitágoras e à história inicial da escola. É particularmente difícil obter um retrato confiável do pensamento pitagórico no período anterior a Platão. O próprio Pitágoras tornou-se uma figura lendária ainda em vida.(KAHN, 2007, p. 09)

Pitágoras estudou filosofia por um discípulo de Tales, e posteriormente foi aluno do próprio Tales em Mileto. Tales foi um filósofo e matemático grego que viveu entre o final do século VII a.C. e a primeira metade do século VI a.C. Parte de seus trabalhos se encontram no estudo da proporcionalidade entre figuras geométricas.

Motivado por Tales, Pitágoras viajou para o Egito, Babilônia e Caldéia, em busca de conhecimentos matemáticos e compreensão do conceito matemático, uma vez que foi estimulado pela curiosidade e conhecimento desses povos pelas construções de prédios e seus cálculos, junto aos ensinamentos de Tales.

Desde a antiguidade até os tempos atuais, os triângulos retângulos são muito utilizados, tanto em atividades de medição quanto em cálculos realizados por matemáticos e cientistas de outras áreas.

Importantes relações entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo e entre outros de seus elementos, incluindo o famoso teorema, resultam da aplicação dos conhecimentos adquiridos sobre a semelhança entre triângulos.

Assim, Pitágoras e seus seguidores tiveram o mérito de difundir o teorema de Pitágoras, contribuindo com o desenvolvimento matemático pelo mundo, logo é importante compreender e exaltar essa imensa contribuição na construção do pensamento matemático. O teorema de Pitágoras é até hoje, uma das temáticas mais lembradas no período escolar.

2.1 A Escola Pitagórica

Segundo Kahn (2007), a tradição pitagórica tem início no século IV a.C., estende-se até o século XVII d.C. proporcionando importante desenvolvimento na religião, ciência e filosófia.

Figura 2.1: Rafael Sanzio, A Escola de Atenas

Fonte: http://historiadasartes.com. Acesso em 13 de fevereiro de 2019

A Escola Pitagórica, representada na obra, Escola de Atenas de Rafael Sanzio, (Figura 2.1) foi uma influente corrente da filosofia grega. A escola teve como ponto de partida a cidade de Crotona, Itália, e difundiu-se rapidamente por toda região. Trata-se da escola filosófica grega mais influenciada por religiões orientais, e que por isso mesmo, mais aproximou-se das filosofias dogmáticas regidas pela ideia de autoridade.

> Com os pitagóricos o universo da matemática se ampliou. Eles introduziram a música e a mecânica. Sua visão mística dos números não os impediu de fundar a aritmética como a ciência dos números. É a eles que devemos as primeiras demonstrações verdadeiras da História. Além da demonstração da irracionalidade da raiz de 2, demonstraram por exemplo que todos os triângulos têm em comum o fato da soma de seus ângulos ser igual a 180 graus (GUEDJ, 1999, p.111)

O símbolo da Escola Pitagórica era o pentagrama (Figura 2.2), uma estrela de cinco pontas. Os pitagóricos tinha o pentagrama como emblema sagrado da Irmandade Pitagórica e a maneira como reconheciam os seus membros. A Sociedade de Pitágoras era uma seita constituída de homens e mulheres que viviam em comunidade e se abstinham de todo os confortos, dedicando-se apenas a uma vida de moderação e à prática da cura. Eles consideram o pentagrama como um símbolo de boa saúde (PENNICK, 1980).

Figura 2.2: Símbolo da Escola Pitagórica

Fonte: http://historiadasartes.com. Acesso em 13 de fevereiro de 2019

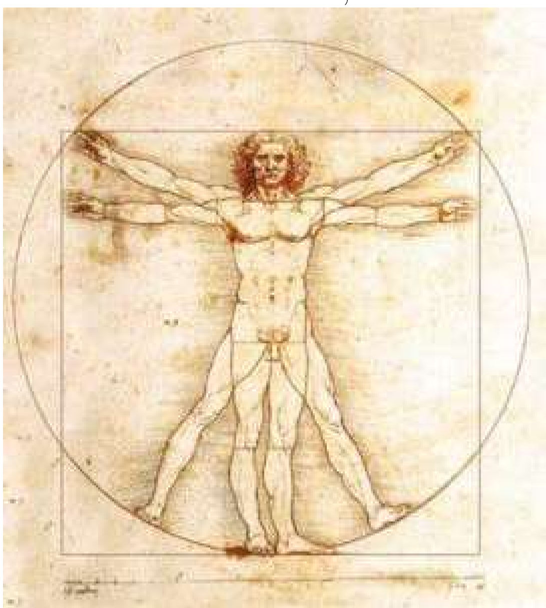
A geometria do pentagrama e suas associações metafísicas foram exploradas pelos pitagóricos e ficou conhecida como A Proporção Divina, que ao longo da arte pós-helênica, pode se observada nos templos, pois é rica em razões áureas (LIVIO, 2006).

A divisão áurea é conhecida desde os pitagóricos de cinco séculos a.C. ao que tudo indica, essa divisão foi descoberta no pentágono regular, que exibe uma surpreendente profusão de segmentos na razão áurea. O pentagrama é rico em razões áureas.

Outro símbolo importante da Escola Pitagórica é a imagem do Homem de Pitágoras, representado na obra de Leonardo da Vinci, O Homem Vitruviano (Figura 2.3). A parte mística do pentagrama. Esta mesma figura simboliza a representação do Macrocosmo, o homem universal, um símbolo que representa ordem e perfeição, e também a verdade divina.

Pitágoras descobriu que este símbolo possuía algumas propriedades interessantes. Um pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular; pelas intersecções dos segmentos desta diagonal, é obtido um novo pentágono regular, que é proporcional ao original exatamente pela razão áurea.

Figura 2.3: Leonardo da Vinci, Homem Vitruviano



Fonte: https://significados.com.br. Acesso em 13 de fevereiro de 2019

Todas essas curiosidades e simbologia que envolvem a Escola Pitagórica e seus integrantes, fazem dela uma das mais importantes e influentes escolas filosóficas da Grécia antiga.

Capítulo 3

Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indica que o Teorema de Pitágoras seja trazido aos alunos no 9° ano do ensino fundamental. No entanto, é comum que os professores do ensino fundamental lecionem sobre Teorema de Pitágoras de forma dissassociada dos ternos Pitagóricos. A proposta deste trabalho, e também deste capítulo, é demostrar a relação íntima existente entre estes temas e propor uma metodologia que possa trabalhar de forma paralela esses dois conceitos.

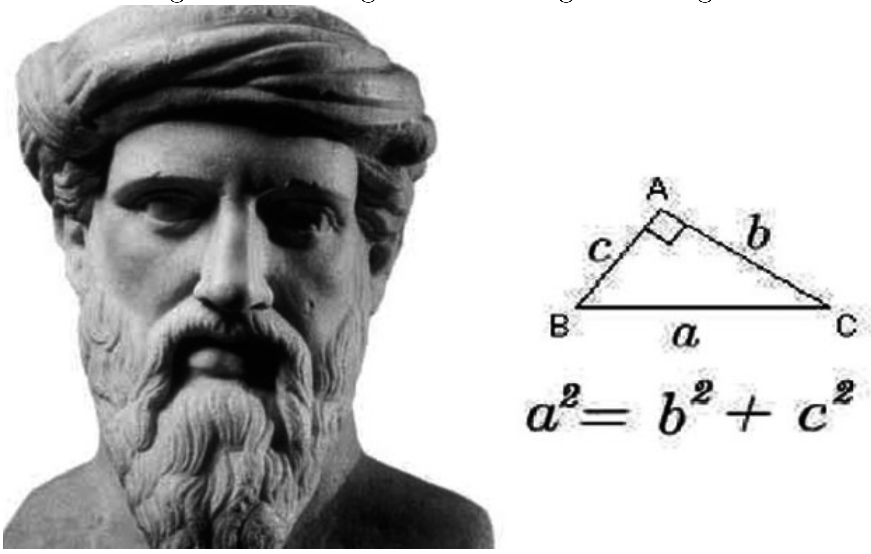
3.1 O Teorema de Pitágoras e suas aplicações.

O Teorema de Pitágoras tem abrangência em diversas áreas, sendo assim uma ferramenta fundamental para o desempenho, compressão e desenvolvimento para diversas funções. Em aplicações cotidianas, ele pode estar presente em medições de distâncias entre cidade, largura de rios, levantamentos topográficos, para cálculos em rotas de aviões, por exemplo. No processo educacional e desenvolvimento para aplicações em outras matérias está presente na Trigonometria e na Geometria.

Para esclarecer e compreender essas aplicações e seus conceitos, é de suma importância compreender todas as relações métricas existentes no triângulo retângulo, o teorema de Pitágoras é fundamental para a Geometria básica, fórmulando extratégias importantes na resolução de problemas da vida cotidiana.

O triângulo retângulo tem como característica um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90°, os lados do triângulo retângulo possuem um nome especial que são denominados em função da posição em relação ao ângulo reto (Figura 3.1). O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa, assim ele é o lado maior do triângulo retângulo, já os outros dois lados, que formam o ângulo reto, são chamados de catetos.

Figura 3.1: Pitágoras e o triângulo retângulo.



Fonte: https://timetoast.com Acesso em 18 de fevereiro de 2019

O Teorema de Pitágoras possui muitas demonstrações diferentes. No livro “The Pythagorean Proposition”(A Proposição de Pitágoras) publicado em 1940, Elisha Scott Loomis, um professor de matemática dos Estados Unidos, reuniu 357 demonstrações desse teorema, classificando basicamente em dois tipos: Algébricas e geométricas.

Elisha Scott classificou as demonstrações baseadas nas relações métricas do triângulo retângulo como algébricas enquanto classificou como geométricas aquelas que são baseadas em comparações de áreas.

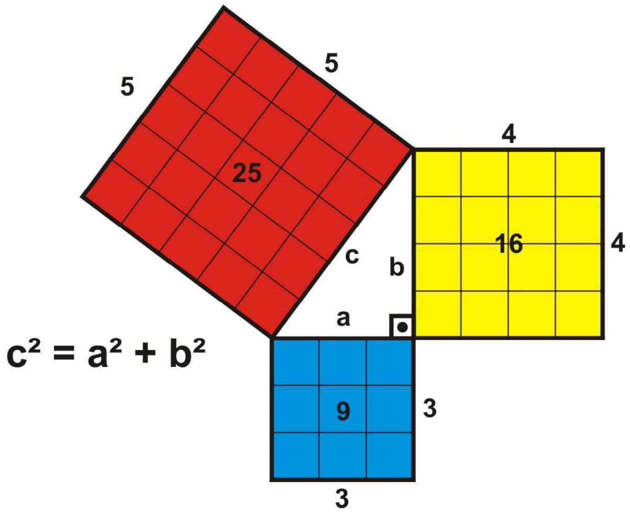
3.2 Ternos Pitagóricos

Rothbart e Paulsell (1985) afirma que o terno (a, b, c) é um terno Pitagórico se, e somente se, os números a, b e c forem números inteiros positivos tal que $a^2 + b^2 = c^2$. Um terno Pitagórico (a, b, c) será chamado de terno primitivo se este satisfizer $\text{mdc}(a, b, c) = 1$. Ou seja, se, e somente se, os números a, b e c forem primos entre si (ROTHBART, PAULSELL, 1985, p. 50). Claramente os ternos Pitagóricos satisfazem a relação métrica dos lados de um triângulo retângulo, dado pelo Teorema de Pitágoras, como é possível observar também na Figura 3.2.

> O termo Terno Pitagórico é uma homenegem ao filosofo e matemático grego Pitágoras nascido em Samos entre cerca de 570 a.C. e falecido em Metaponto por volta de 496 a.C. Pitágoras foi o fundador de uma escola de pensamento grega denominada em sua homenagem de Pitagórica e seu legado para a humanidade são os números figurados, números perfeitos, teorema de Pitágoras (CAVALCANTE, BARROS, ALMEIDA, 2010, p. 3).

Relacionar o Teorema de Pitágoras aos ternos Pitagóricos é uma importante estratégia para a construção e aprimoramento do conhecimento sobre tema, possibilitando ao estudante a percepção da possibilidade de construir infinitos triângulos retângulos com lados de medidas inteiras.

Figura 3.2: Teorema de Pitágoras e os ternos Pitagóricos.



Fonte: https://studokids.com.br. Acesso em 18 de fevereiro de 2019

Para promover a percepção desta relação íntima entre o Teorema de Pitágoras e os ternos Pitagóricos, propõe-se, além da busca desses ternos através das fórmulas de Platão, Euclides ou de qualquer outro algoritmo, a verificação desses resultados no Teorema de Pitágoras e a conseqüente construção do triângulo retângulo resultante, conforme Figura 3.3. Atenta-se que neste trabalho será proposto também um algoritmo novo capaz de determinar ternos Pitagóricos que trazem números consecutivos na sua composição.

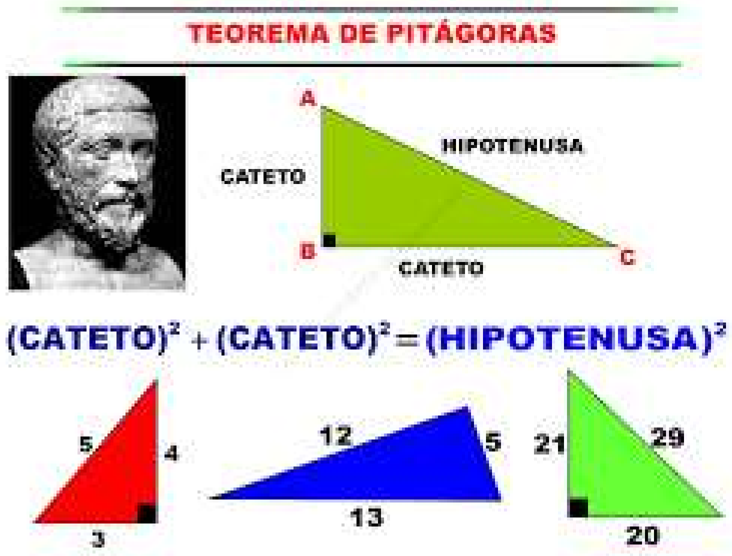
Como um exemplo, é possível observar que o terno Pitagórico $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ satisfaz a relação $a^2 + b^2 = c^2$, pois $3^2 + 4^2 = 5^2$. Também se observa este resultado geometricamente com o auxílio da Figura 3.2. Assim, de forma análoga, os ternos $(5, 12, 13)$ e $(20, 21, 29)$ também satisfazem o Teorema de Pitágoras, possibilitando a construção de triângulos retângulos com essas respectivas medidas em seus lados, sendo a maior delas a hipotenusa.

Verificando os Exemplos:

- Considerando o terno $(a, b, c) = (5, 12, 13)$, observa-se que $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$. Como $25 + 144 = 169$, tem-se que o terno $(5, 12, 13)$ é de fato Pitagórico.

- Por outro lado, verifica-se que o terno $(e, f, g) = (20, 21, 29)$ também é Pitagórico, pois $e^2 + f^2 = g^2 \Rightarrow 20^2 + 21^2 = 29^2$. Sabendo que $400 + 441 = 841$ tem-se o resultado.

Figura 3.3: Triângulos Pitagóricos



Fonte: https://studokids.com.br. Acesso em 18 de fevereiro de 2019

3.2.1 Ternos Pitagóricos de Platão

Uma importante contribuição na geração de ternos pitagóricos foi atribuída à Platão. Conhecido desde a antiguidade, o terno de números $(2n, n^2 + 1, n^2 - 1)$ com $n \in \mathbb{N}$, observardo que $n > 1$, é um terno Pitagórico (FOSSA, MOREY, ERICKSON, BATARCE, BARONE, 2009, p. 95). Por exemplo, escolhendo $n = 4$ tem-se o seguinte terno de números

$$\begin{aligned} (2n, n^2 + 1, n^2 - 1) &= (2 \cdot 4, 4^2 + 1, 4^2 - 1) \\ &= (8, 17, 15). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Este é, de fato, um terno Pitagórico, pois $17^2 = 15^2 + 8^2 = 289$. Na Tabela 3.1 são apresentados alguns exemplos de ternos Pitagóricos de Platão.

Observa-se que $n > 1$ é necessário para garantir a existência do triângulo retângulo formado pelo terno Pitagórco obtido, caso contrário obteremos ternos de números que satisfazem a fórmula de Platão, no entanto não satisfazem as condições de existência dos triângulos.

Tabela 3.1: Exemplos de Ternos Pitagóricos de Platão para diferentes valores de n

n	$2n$	$n^2 - 1$	$n^2 + 1$	$(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$
2	$2 \cdot 2 = 4$	$2^2 - 1 = 3$	$2^2 + 1 = 5$	$(4, 3, 5)$
3	$2 \cdot 3 = 6$	$3^2 - 1 = 8$	$3^2 + 1 = 10$	$(6, 8, 10)$
4	$2 \cdot 4 = 8$	$4^2 - 1 = 15$	$4^2 + 1 = 17$	$(8, 15, 17)$
5	$2 \cdot 5 = 10$	$5^2 - 1 = 24$	$5^2 + 1 = 26$	$(10, 24, 26)$
6	$2 \cdot 6 = 12$	$6^2 - 1 = 35$	$6^2 + 1 = 37$	$(12, 35, 37)$
7	$2 \cdot 7 = 14$	$7^2 - 1 = 48$	$7^2 + 1 = 50$	$(14, 48, 50)$
8	$2 \cdot 8 = 16$	$8^2 - 1 = 63$	$8^2 + 1 = 65$	$(16, 63, 65)$
9	$2 \cdot 9 = 18$	$9^2 - 1 = 80$	$9^2 + 1 = 82$	$(18, 80, 82)$
10	$2 \cdot 10 = 20$	$10^2 - 1 = 99$	$10^2 + 1 = 101$	$(10, 99, 101)$

É de verificação imediata que ternos na forma $(2n, n^2 + 1, n^2 - 1)$ fornecem ternos Pitagóricos, pois

$$\begin{aligned} (n^2 + 1)^2 &= n^4 + 2n^2 + 1 \\ &= n^4 - 2n^2 + 1 + 4n^2 \\ &= (n^2 - 1)^2 + (2n)^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Além disso, observa-se facilmente que existe uma quantidade infinita de ternos Pitagóricos primitivos na forma de Platão. Com efeito, dados os ternos da forma $(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$, com $n \geq 2$, então escolhendo $n = 2k$, em que k é um número primo qualquer, tem-se que $2n = 4k$ só possui dois divisores primos: os números 2 e k. Porém, os números $n^2 - 1$ e $n^2 + 1$ são ímpares, logo 2 não divide $n^2 - 1$ e também não divide $n^2 + 1$. É imediato notar que k também não divide nenhum dos números $n^2 - 1$ e $n^2 + 1$. Pois, $n^2 - 1 = (2k + 1)(2k - 1)$ e $n^2 + 1 = 4k^2 + 1 \equiv 1 (\operatorname{mod} k)$. Portanto $2n$, $n^2 - 1$ e $n^2 + 1$ são relativamente primos. Como o conjunto dos números primos é infinito, pode-se concluir que existem infinitos ternos Pitagóricos primitivos da forma $(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$.

Nota-se que apesar de determinar infinitos ternos Pitagóricos primitivos, a fórmula de Platão não é capaz de construir todos os ternos primitivos. Por exemplo, os ternos $(5, 12, 13)$ e $(7, 24, 25)$ não são ternos de Platão. Isto acontece pelo fato de que excetuando-se o terno $(3, 4, 5)$, que é um terno de Platão para $n = 2$, todos os demais ternos obtidos pela fórmula possui como menor cateto um número par, o que exclui muitos dos ternos primitivos.

3.2.2 Ternos Pitagóricos de Euclides

Euclides demonstrou em seu livro "Os Elementos"(c. 300 a. C.) duas proposições relacionadas com o Teorema de Pitágoras. A primeira é a preposição 47, que está escrita da seguinte forma: Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto. Já a segunda é a preposição 48 e nela esta escrita que: Se o quadrado feito sobre um lado de um triângulo for igual a soma dos quadrados dos outros dois lados, o ângulo compreendido por estes dois lados será reto. Além disso, nesta mesma obra, Euclides mostrou também que existem infinitos ternos Pitagóricos e apresentou uma forma simples de construí-los.

Considerando dois números naturais $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, os ternos a seguir, construídos a partir de m e n:

$$a = m^2 + n^2 \tag{3.3}$$
$$b = m^2 - n^2 \tag{3.4}$$
$$c = 2mn \tag{3.5}$$

fornecem um terno Pitagórico (a, b, c), que será chamado de Terno Pitagórico de Euclides.

A título de exemplo, considerando os números $m = 4$ e $n = 3$, tem-se que $a = m^2 + n^2$, i.e., $a = 4^2 + 3^2$ e, consequentemente, $a = 25$. Além disso, b é dado por $b = m^2 - n^2$ e, portanto, $b = 16 - 9 = 7$. Finalmente, o número c, que complementa o terno desejado, é $c = 2mn$, ou seja, $c = 2\cdot3\cdot4 = 24$. Observe que $25^2 = 7^2+24^2 = 625$ e, como esperado, o terno $(25, 7, 24)$ é, de fato, Pitagórico. Na Tabela 3.2 são apresentados alguns exemplos de ternos Pitagóricos de Euclides considerando m e n como sendo números naturais consecutivos.

A verificação de que os números a, b e c dados pelas Eqs.(3.3)–(3.5) formam um terno Pitagórico é imediata, pois

$$a^2 = (m^2 + n^2)^2 \tag{3.6}$$
$$= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \tag{3.7}$$

e

$$
\begin{aligned}
b^2 + c^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 && (3.8)\\
&= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 && (3.9)\\
&= m^4 + 2m^2n^2 + n^4, && (3.10)
\end{aligned}
$$

satisfazendo, assim, $a^2 = b^2 + c^2$.

É importante observar que a condição $m > n$ é necessária para garantir a existência de um triângulo retângulo formado pelo terno Pitagórico calculado, pois caso contrário serão obtidos ternos de números que satisfazem a fórmula de Euclides, no entanto não satisfazem as condições de existência dos triângulos. É possível verificar esse fato diretamente. Supondo $m = n$, então $b = m^2 - n^2 = 0$, logo existirá um terno Pitagórico de Euclides, mas o triângulo será degenerado, pelo fato de um de seus lados ser nulo. Além disso, se $m < n$ então o número $b = m^2 - n^2$ será negativo, impossibilitando também a construção de um triângulo.

Observa-se que as fórmulas de Euclides e a de Platão são complementares, afinal a fórmula geradora de ternos Pitagóricos de Platão é um caso particular da fórmula de Euclides. Nenhuma das duas fórmulas é capaz de gerar todos os ternos Pitagóricos. Porém, todos os ternos Pitagóricos primitivos são gerados a partir dos ternos de Euclides. Para tal basta considerar que $(m, n) = 1$ e que as paridades entre m e n sejam distintas (COSTA, 2018). Além disso, outra propriedade interessante dos números Pitagóricos primitivos é que os números $3, 4$ e 5 estão presentes em todos os ternos primitivos. Pode-se provar que dado um terno primitivo (a, b, c), então os números $3, 4$ e 5 são divisores de a, b ou c (COSTA, 2018). Por exemplo, o terno primitivo $(8, 15, 17)$ tem que $3|15$, $4|8$ e $5|15$.

Tabela 3.2: Exemplos de Ternos Pitagóricos de Euclides, considerando m e n como inteiros consecutivos.

(m,n)	$a = m^2 - n^2$	$b = 2mn$	$c = m^2 + n^2$	(a,b,c)
$(2,1)$	$2^2 - 1^2 = 3$	$2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$	$2^2 + 1^2 = 4$	$(3,4,5)$
$(3,2)$	$3^2 - 2^2 = 5$	$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$	$3^2 + 2^2 = 13$	$(5,12,13)$
$(4,3)$	$4^2 - 3^2 = 7$	$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$	$4^2 + 3^2 = 25$	$(7,24,25)$
$(5,4)$	$5^2 - 4^2 = 9$	$2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$	$5^2 + 4^2 = 41$	$(9,40,41)$
$(6,5)$	$6^2 - 5^2 = 11$	$2 \cdot 6 \cdot 5 = 30$	$6^2 + 5^2 = 61$	$(11,60,61)$
$(7,6)$	$7^2 - 6^2 = 13$	$2 \cdot 7 \cdot 6 = 84$	$7^2 + 6^2 = 85$	$(13,84,85)$
$(8,7)$	$8^2 - 7^2 = 15$	$2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$	$8^2 + 7^2 = 113$	$(15,112,113)$
$(9,8)$	$9^2 - 8^2 = 17$	$2 \cdot 9 \cdot 8 = 144$	$9^2 + 8^2 = 145$	$(17,144,145)$
$(10,9)$	$10^2 - 9^2 = 19$	$2 \cdot 10 \cdot 9 = 180$	$10^2 + 9^2 = 181$	$(10,180,181)$

Quanto as fórmulas de Euclides para a obtenção de ternos Pitagóricos pode-se, no contexto da sala de aula, observar aos alunos que m e n escolhidos não aparecem diretamente no terno Pitagórico (a, b, c), pois os valores a, b e c são calculados a partir da Eqs. (3.3)–(3.5).

3.3 Outros Fórmulas Geradoras de Ternos Pitagóricos

Com o objetivo de buscar outras formas de se encontrar ternos Pitagóricos e, consequentemente, produzir novos triângulos retângulos a partir destes ternos, uma pesquisa se iniciou a partir das disciplinas que compõe a grade curricular do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT.

Essa busca se iniciou pelo fomento à curiosidade dos participantes do curso, podendo-se afirmar que o curso de mestrado contribui de forma significativa na construção de um novo pensamento docente, discutindo e possibilitando novas abordagens da prática docente nos diversos assuntos inerentes ao ensino fundamental e médio.

Dentro desta tentativa de nova perspectiva de ensino, procurou-se focar em um assunto corriqueiro do ensino fundamental, o Teorema de Pitágoras, de forma a levar para sala de aula, como docente, as contribuições que são consequência do referido curso mestrado. Iniciando, assim, a pesquisa que resultou este trabalho.

Com o intuito de oferecer aos alunos do ensino fundamental uma nova abordagem sobre o teorema de Pitágoras, o desenvolvimento do tema desta dissertação recebeu contribuições de diversas disciplinas do curso do mestrado profissional. Em especial, destaca-se o trabalho desenvolvido em duas delas, Tópicos em Teoria dos Números e Recursos Computacionais no Ensino de Matemática.

Neste contexto, trabalhando em assuntos referentes à disciplina de Tópicos em Teoria dos Números, observou-se a necessidade de verificar a existência de padrões no aparecimento dos termos Pitagóricos e posteriormente a busca por outras fórmulas geradoras de ternos Pitagóricos.

Observando o Tabela 3.3, que contém alguns ternos Pitagóricos primitivos, não é possível notar, de imediato, a existência de um padrão capaz de formar todos os ternos Pitagóricos. No entanto, percebe-se claramente a possibilidade de se definir diferentes padrões capazes de gerarem diferentes tipos de ternos Pitagóricos. Como foi possível observar com as fórmulas geradoras os ternos Pitagóricos de Platão e de Euclides.

Nesta perspectiva, realizou-se um intenso processo investigativo utilizando ferramentas trabalhadas na disciplina Recursos Computacionais no Ensino de Matemática, visando encontrar algum desses diferentes padrões. O objetivo, então, seria utilizar-se dos padrões encontrados para o desenvolvimento de algoritmos capazes de resolver a situação problema: encontrar ternos Pitagóricos, se possível primitivos, diferentes daqueles propostos por Platão e Euclides, a partir de um dado número p qualquer, com $p \geq 3$ e $p \in \mathbb{N}$.

Tabela 3.3: Exemplo de ternos Pitagóricos primitivos

a	b	c	$a^2 + b^2 = c^2$	(a, b, c)
3	4	5	$9 + 16 = 25$	$(4, 3, 5)$
5	12	13	$25 + 144 = 169$	$(5, 12, 13)$
7	24	25	$49 + 576 = 625$	$(7, 24, 25)$
8	15	17	$64 + 225 = 289$	$(8, 15, 17)$
9	40	41	$81 + 1600 = 1681$	$(9, 40, 41)$
12	35	37	$144 + 1225 = 1369$	$(12, 35, 37)$
13	84	85	$169 + 7056 = 7225$	$(13, 84, 85)$
15	112	113	$225 + 12544 = 12769$	$(15, 112, 113)$
16	63	65	$256 + 3969 = 4225$	$(16, 63, 65)$
17	144	145	$289 + 20736 = 21025$	$(17, 144, 145)$
19	180	181	$361 + 32400 = 32761$	$(19, 180, 181)$
20	21	29	$400 + 441 = 841$	$(20, 21, 29)$

Do estudo destes padrões encontrados, conjecturou-se o seguinte: **Dado um número $p \in \mathbb{N}$ ímpar, com $p \geq 3$, então existe um número natural n tal que $(p, n, n+1)$ é um terno Pitagórico.**

Pode-se notar que esse fato ocorre, pelo menos eventualmente. Por exemplo, dado $p = 7$ existem dois números consecutivos $n = 24$ e $n + 1 = 25$ tais que $25^2 = 24^2 + 7^2$. Formando assim um terno Pitagórico $(7, 24, 25)$ que é primitivo. É possível ver outros exemplos de ternos Pitagóricos construídos a partir de um número p ímpar e com dois números consecutivos na Tabela 3.4.

O fato conjecturado é, na verdade, uma proposição de fácil demonstração. Pois, sendo p um número ímpar, com $p \geq 3$, então existe um número $k \in \mathbb{N}$, tal que $p = 2k + 1$. Desta forma, o quadrado do número p fornece

$$\begin{aligned} p^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1. \end{aligned}$$

Como o número $4k^2 + 4k + 1$ é ímpar, então pode-se escrever

$$p^2 = 2n + 1, \tag{3.11}$$

em que $n = 2k^2 + 2k$. Finalmente, completando quadrados na Eq. (3.11) obtem-se

$$\begin{aligned} p^2 &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= (n+1)^2 - n^2. \end{aligned}$$

Portanto, $p^2 + n^2 = (n+1)^2$ e o terno $(p, n, n+1)$ é Pitagórico.

Tabela 3.4: Exemplos de ternos Pitagóricos gerados a partir de um número p ímpar.

p	$p^2 = 2n + 1$	n	$n + 1$	$(p, n, n + 1)$
3	$3^2 = 2n + 1$	4	$4 + 1 = 5$	$(3, 4, 5)$
5	$5^2 = 2n + 1$	12	$12 + 1 = 13$	$(5, 12, 13)$
7	$7^2 = 2n + 1$	24	$24 + 1 = 25$	$(7, 24, 25)$
9	$9^2 = 2n + 1$	40	$40 + 1 = 41$	$(9, 40, 41)$
11	$11^2 = 2n + 1$	60	$60 + 1 = 61$	$(11, 60, 61)$
13	$13^2 = 2n + 1$	84	$84 + 1 = 85$	$(13, 84, 85)$
15	$15^2 = 2n + 1$	112	$112 + 1 = 113$	$(15, 112, 113)$
17	$17^2 = 2n + 1$	144	$144 + 1 = 145$	$(17, 144, 145)$
19	$19^2 = 2n + 1$	180	$180 + 1 = 181$	$(19, 180, 181)$

Com o fato de se poder encontrar um terno Pitagórico contendo dois números consecutivos a partir de um número ímpar dado, observou-se que fato semelhante ocorria quando o número escolhido era par. Desta forma, conjecturou-se também que: **Dado um número $p \in \mathbb{N}$ par, com $p \geq 4$, então existe um número $n \in \mathbb{N}$ tal que $(p, n, n+2)$ é um terno Pitagórico.**

Novamente, nota-se que esse fato ocorre pelo menos em alguns casos. Dado, $p = 10$, por exemplo, tem-se que para $n = 24$ e $n + 2 = 26$ a relação $p^2 + n^2 = (n+2)^2$, pois $10^2 + 24^2 = 26^2 = 676$. Outros exemplos podem ser analisados na Tabela 3.5.

Assim como no caso anterior, essa pequena conjectura provou-se ser uma proposição. A demonstração segue os mesmos passos daquela feita para o caso de p ser um número ímpar. Logo, sendo p um número par, com $p \geq 4$, então sabe-se que existe $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 1$ tal que $p = 2k + 2$. Logo, tem-se que

$$\begin{aligned} p^2 &= (2k+2)^2 \\ &= 4k^2 + 8k + 4. \end{aligned}$$

Fazendo $n = k^2 + 2k$, então

$$\begin{aligned} p^2 &= 4n + 4 \\ &= n^2 + 4n + 4 - n^2 \\ &= (n+2)^2 - n^2. \end{aligned}$$

Portanto, $p^2 + n^2 = (n+2)^2$ e o terno $(p, n, n+2)$ é Pitagórico. Neste caso, produz-se um terno Pitagórico em que existem dois pares ou dois ímpares consecutivos.

Tabela 3.5: Exemplo de ternos Pitagóricos obtido a partir de um número p par.

p	$p^2 = 4n + 4$	n	$n + 2$	$(p, n, n+2)$
4	$4^2 = 4n + 4$	3	$3 + 2 = 5$	$(4, 3, 5)$
6	$6^2 = 4n + 4$	8	$8 + 2 = 10$	$(6, 8, 10)$
8	$8^2 = 4n + 4$	15	$15 + 2 = 17$	$(8, 15, 17)$
10	$10^2 = 4n + 4$	24	$24 + 2 = 26$	$(10, 24, 26)$
12	$12^2 = 4n + 4$	35	$35 + 2 = 37$	$(12, 35, 37)$
14	$14^2 = 4n + 4$	48	$48 + 2 = 50$	$(14, 48, 50)$
16	$16^2 = 4n + 4$	63	$63 + 2 = 65$	$(16, 63, 65)$
18	$18^2 = 4n + 4$	80	$80 + 2 = 82$	$(18, 80, 82)$
20	$20^2 = 4n + 4$	99	$99 + 2 = 101$	$(20, 99, 101)$
22	$22^2 = 4n + 4$	120	$120 + 2 = 122$	$(22, 120, 122)$
24	$24^2 = 4n + 4$	143	$143 + 2 = 145$	$(24, 143, 145)$

É possível fazer algumas considerações sobre a fórmula geradora de ternos Pitagóricos proposta neste trabalho. Primeiramente, observa-se que é necessário que o número p escolhido seja $p \geq 2$ para que a construção do triângulo retângulo seja possível. Pois, se $p = 2$, então $k = 0$ e, consequentemente, $n = 0$. Levando no seguinte terno $(2, 0, 2)$ que não é Pitagórico, por definição, e também não é capaz de produzir um triângulo retângulo.

Em segundo lugar, pode-se observar que com o algoritmo apresentado nesta seção é possível calcular um terno Pitagórico para qualquer número inteiro $p \geq 3$. Isto é, produz-se uma infinidade de ternos que podem ser utilizados para a construção de triângulos retângulos. Nota-se ainda que diferentemente dos ternos de Platão e Euclides, o algoritmo aqui proposto produz ternos Pitagóricos em que um dos números é de fato o número escolhido, isto é, dependendo da paridade do número p escolhido tem-se $(p, n, n+1)$ ou $(p, n, n+2)$.

Além disso, essa fórmula geradora é suficientemente simples para ser utilizada já no início do Ensino Fundamental II. Pois, ela demanda conhecimento básico sobre potenciação e o cálculo de apenas um parâmetro, o qual é produzido a partir de operações de soma, subtração e divisão. Neste contexto, ela se faz mais intuitiva que as fórmulas geradoras de Platão e Euclides por sempre incluir na sua terna um número qualquer escolhido pelo próprio aluno.

Finalmente, é também importante notar que apesar de ser possível determinar infinitos ternos Pitagóricos, primitivos ou não, com a fórmula geradora proposta. Ainda assim, é possível afirmar que o método proposto não é capaz de construir todos os ternos Pitagóricos. De fato, tem-se que alguns ternos não seguem o padrão estabelecido pelo algoritmo proposto nesta seção, como por exemplo o caso do terno pitagórico $(20, 21, 29)$.

Capítulo 4

Aplicação Prática e Análise dos Resultados

O local escolhido para desenvolvimento desta experiência foi o Centro de Ensino Fundamental 201 de Santa Maria - DF, que faz parte da Rede de Ensino Público do Distrito Federal, que há muitos anos vem oferecendo ensino público de qualidade em sintonia com as demandas do mercado. Além disso, possui uma excelente infraestrutura, professores qualificados e profissionais administrativos capacitados para atender aos alunos, pois investe constantemente no desenvolvimento de novos métodos pedagógicos, no treinamento de professores e em infraestrutura de apoio. A instituição é ideal para o teste sendo uma boa amostra da população estudantil local, garantindo assim um resultado mais próximo da realidade da região e posteriormente base para novos estudos em outras localidades.

O trabalho a ser apresentado, consiste basicamente no estudo das diversas formas de construção dos ternos Pitagóricos. O domínio deste tema, poucas vezes abordado no ensino fundamental, visa contribuir na construção do conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras e suas aplicações.

Além de apresentar e construir diferentes formas de obtenção dos ternos pitagóricos, essa pesquisa procura ainda, propor novas abordagens e metodológias no ensino da matemática, principalmente com a utilização das novas tecnológias aplicadas no processo de ensino aprendizagem.

Essa nova forma de apresentar o tema objetiva aprofundar as discussões e debates sobre os conceitos e aplicações do Teorema de Pitágoras, visando alcançar melhores resultados em relação ao aprendizado do educando.

4.1 A abordagem e o desenvolvimento no estudo de campo

A pesquisa foi desenvolvida em uma única turma do 9º ano do ensino fundamental do C.E.F. 201 de Santa Maria, composta por 38 alunos regularmente matriculados no turno matutino.

Inicialmente foi apresentado aos alunos os conceitos e aplicações do Teorema de Pitágoras, como comumente é feito no ensino fundamental. Em seguida foi introduzido os estudos sobre os ternos Pitagóricos, apresentadas as fórmulas de Euclides e de Platão, trazendo assim ao conhecimento do aluno um conteúdo poucas vezes abordado no ensino fundamental. Após o domínio dessas fases do programa, foi proposto a construção de uma nova fórmula para obtenção dos ternos Pitagóricos, de forma rápida e prática.

De posse da tabela de ternos primitivos, iniciou-se um amplo debate e discussões sobre novas fórmulas para obtenção desses ternos, observando o padrão matemático existente na maioria deles, chegamos a um dispositivo prático capaz de determinar infinitos ternos primitivos, a partir de um determinado número p, desde que p seja ímpar e $p \geq 3$. Utilizando-se do fato que um terno Pitagórico deve-se possuir a forma $a^2 + b^2 = c^2$, buscou-se com os alunos encontrar ternos gerados pelo número p de forma que dois números dentro dos ternos fossem consecutivos. Assim, utilizando os resultados propostos no Capítulo 3, mostrou-se aos alunos que

$$\begin{gathered} p^2 + n^2 = (n+1)^2 \\ \Rightarrow p^2 = (n+1)^2 - n^2 \\ \Rightarrow p^2 = 2n + 1. \end{gathered}$$

Desta forma, seria possível calcular um novo terno Pitagórico a partir de p em que os demais números fossem consecutivos.

No laboratório de informática, utilizando os softwares de matemática computacional geogebra e geometria, foram realizados vários testes que comprovaram a validade do dispositivo prático na obtenção e construção dos ternos pitagóricos.

Neste momento passamos a analisar os ternos não primitivos, com objetivo de obter uma fórmula para ternos pitagóricos, quando o valor de p seja um número par.

De forma análoga, chegou-se a outra fórmula capaz de determinar infinitos ternos pitagóricos, a partir de um determinado número p, agora com o número p sendo par e $p \geq 4$. Novamente, através dos resultados observados no Capítulo 3, mostrou-se aos alunos

$$\begin{gathered} p^2 + n^2 = (n+2)^2 \\ \Rightarrow p^2 = (n+2)^2 - n^2 \end{gathered}$$

$$\Rightarrow p^2 = 4n + 4.$$

O que permite gerar ternos Pitagóricos que incluem o número p e também dois números pares ou ímpares consecutivos.

Para finalizar o estudo, foram realizadas três avaliações: A primeira foi uma pesquisa de satisfação, realizada através de um questionário aplicado aos alunos, objetivando aferir as impreenssões e opiniões dos alunos quanto ao trabalho realizado; a segunda foi uma avaliação interna da aprendizagem adquirida, realizada através de um teste elaborado pelo professor; a terceira foi uma avaliação externa, realizada através do site Portal da OBMEP dado pelo endereço: `http://www.portaldosaber.obmep.org.br`.

Ao analisar os resultados obtidos nas avaliações e no desempenho acadêmico dos alunos, concluímos que a metodológia e abordagem proposta, além de inovar e motivar os alunos na construção do conhecimento sobre o tema, trouxe-nos muitos ganhos em relação a abordagem tradicional, proporcionando um conhecimento mais fundamentado e duradouro, além de devolver ao alunado o prazer pelo ato de estudar.

4.2 Utilização das novas tecnológias na avaliação

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (1998) as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) são uma tendência no ensino da matemática moderna. Como bem nos assegura Brand (2003, p. 259), as TICs na Matemática interferem no processo de ensino aprendizagem em várias dimensões, destacando-se a que se refere ao professor, já que ele é o fator central desta integração.

> “Um professor nunca define sozinho, em si mesmo, o seu próprio saber”e “[...] o saber não é uma substância ou um conteúdo fechado em si mesmo; ele se manifesta através das relações complexas entre ver no próprio cerne do saber dos professores a relação com o outro, e principalmente, com este outro coletivo representado por uma turma de alunos”(TARDIF, 2002, p. 13)

Ainda de acordo com os PCNs (1998, p. 44) as TICs na matemática auxiliam no desenvolvimento cognitivo dos alunos, possibilitam novas abordagens dos conteúdos e sobretudo sistematizam o processo ensino aprendizagem da disciplina.

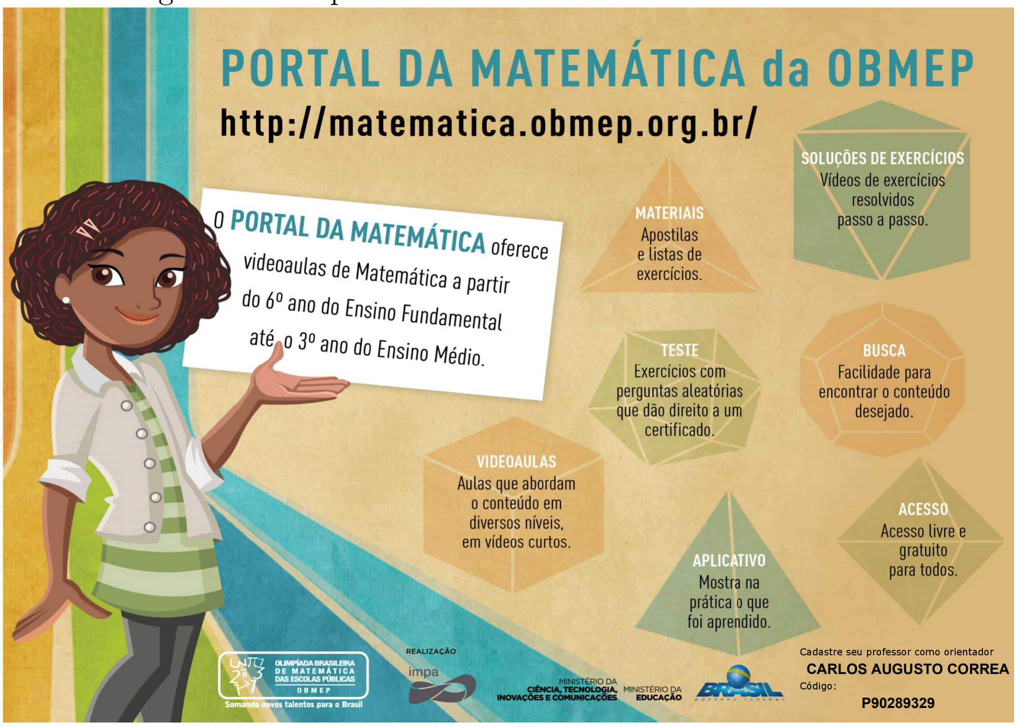
Inserir as TICs na educação matemática possibilita realizar atividades mais atrativas, prazerosas e mais eficazes, construindo a aprendizagem através da relação existente entre teória e prática, nesta perspectiva, o educador faz o papel de mediador e incentivador para maior compreensão dos conteúdos.

O uso das novas tecnológias aplicadas na educação matemática, evidentemente ocorrem por meio de computadores, celulares, aplicativos, calculadoras e muitas outras ferramentas tecnológicas que são utilizadas com a finalidade de facilitar a compreensão do aluno, aproximar os conhecimentos teóricos da prática, além de tornar o aprendizado mais agradável e atraente para o educando, sendo assim, as TICs fazem parte de um processo de mudança na forma e metodológia exigida na matemática moderna.

As novas tecnológias estão presentes em todas as fases do processo de ensino aprendizagem, planejamento, desenvolvimento e avaliação. Cita-se, como exemplo, os vários tipos de softwares e aplicativos comumente utilizados em sala de aula.

Em nosso trabalho, utilizamos as TICs no desenvolvimento dos estudos sobre os ternos Pitagóricos, verificando computacionalmente, através dos softwares geogebra e geometria, a existência de cada terno construído, elas também foram utilizadas na fase de avaliação e apuração dos resultados, quando realizamos os testes contidos no site Portal da OBMEP[1] para aferir os resultados e desempenho dos alunos.

Figura 4.1: Capa do Portal da Matemática da OBMEP



Fonte: https://matematica.obmep.org.br. Acesso em 25 de maio de 2019

O Portal da OBMEP[1] (Figura 4.1) além de proporcionar um material complementar de estudo e promover o contato dos alunos com as novas tecnológias, atualmente utilizadas no ensino da matemática, possibilitou ainda, a realização da avaliação externa proposta no programa.

[1] http://www.portaldosaber.obmep.org.br

No decorrer do trabalho, os alunos assistiram as vídeo aulas, discutiram e debateram as diversas possibilidades apresentadas sobre o tema, realizaram as lista de exercícios e testes disponibilizadas como material complementar pelo Portal da OBMEP[1], e ainda com com auxílio do portal, outra atividade realizada foi a Avaliação Externa. (Figura 4.3)

Avaliação Externa

Para validar a metodologia empregada neste trabalho, os alunos foram avaliados tanto utilizando uma avaliação de conhecimentos desenvolvida pelo professor assim como como uma avaliação externa. Esta avaliação externa, realizada através do portal da OBMEP, é composta por 12 questões de diferentes níveis, selecionadas de forma aleatória e independente do usuário (Figura 4.3), onde exige-se um aproveitamento mínimo de 70% para obtenção do certificado de aprovação no referido módulo (Figura 4.2). A avaliação externa, tem como objetivo principal, proporcionar ao aluno a oportunidade de colocar em prática os conhecimentos adquiridos, verificar a sua aprendizagem sobre o tema e perceber quais são competencias e habilidades esperadas, não só no âmbito da sala de aula, mas também em nível de expectativa geral.

> “A avaliação externa é um recurso técnico empregado para a reconstrução da qualidade do ensino. Nesse processo, a liberdade individual de ensinar se confronta e se concilia com o interesse coletivo”e “[...] A avaliação externa pode contribuir, no campo da educação, para eqüidade que, por direito, deve abranger a todos“ (BORGES, 2008, p. 62)

Após a realização da avaliação externa, os alunos obtiveram os resultados que podem ser observados na Tabela 4.1. É possível verificar que a turma no qual foi aplicada a metodologia obteve excelentes resultados. Conforme registrado, tem-se que 18 alunos atingiram nota máxima e 35 alunos, dentre um total de 38, conseguiram aprovação. Do total que não teve êxito na avaliação, tem-se que 1 aluno não participou e apenas 2 alunos não foram aprovados. Neste caso, a avaliação externa teve um aproveitamento aproximado de 92% de aprovação, sugerindo que a metodologia apresentada é efetiva no ensino do conteúdo referente ao Teorema de Pitágoras.

Tabela 4.1: Resultados da Avaliação Externa

AVALIAÇÃO FINAL PORTAL DA MATEMÁTICA - OBMEP							
ALUNO	ACERTOS	APROVEITAMENTO	RESULTADO	ALUNO	ACERTOS	APROVEITAMENTO	RESULTADO
1	11	92%	APROVADO	21	12	100%	APROVADO
2	11	92%	APROVADO	22	12	100%	APROVADO
3	12	100%	APROVADO	23	9	75%	APROVADO
4	10	83%	APROVADO	24	11	92%	APROVADO
5	12	100%	APROVADO	25	12	100%	APROVADO
6	12	100%	APROVADO	26	9	75%	APROVADO
7	11	92%	APROVADO	27	FALTOU	FALTOU	REFAZER
8	8	66%	REFAZER	28	11	92%	APROVADO
9	6	50%	REFAZER	29	12	100%	APROVADO
10	12	100%	APROVADO	30	12	100%	APROVADO
11	12	100%	APROVADO	31	11	92%	APROVADO
12	11	92%	APROVADO	32	12	100%	APROVADO
13	10	83%	APROVADO	33	9	75%	APROVADO
14	12	100%	APROVADO	34	10	83%	APROVADO
15	12	100%	APROVADO	35	12	100%	APROVADO
16	12	100%	APROVADO	36	12	100%	APROVADO
17	11	92%	APROVADO	37	11	92%	APROVADO
18	12	100%	APROVADO	38	12	100%	APROVADO
19	11	92%	APROVADO				
20	10	83%	APROVADO				

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.2: Modelo do certificado do Portal da OBMEP referente à avaliação externa

Fonte: https://matematica.obmep.org.br. Acesso em 25 de maio de 2019

Figura 4.3: Modelo da Avaliação do Portal da OBMEP

□ Avaliação Geral - Modulo Teorema de Pitágoras e Aplicações

□ Questão 1

□ Pergunta

Determine o valor de x, inteiro positivo, de modo que $x^2 + (x+35)^2 = 65^2$

□ Questão 2

□ Pergunta

Determine c, positivo, de modo que $30^2 + 72^2 = c^2$

□ Questão 3

□ Pergunta

Determine o valor de x, inteiro positivo, de modo que $x^2 + (x+7)^2 = (x+9)^2$.

□ Questão 4

□ Pergunta

Determine o valor de x, inteiro positivo, de modo que $x^2 + (x+1)^2 = 5^2$.

□ Questão 5

□ Pergunta

Determine o valor de x, inteiro positivo, de modo que $x^2 + (x+28)^2 = 52^2$

□ Questão 6

□ Pergunta

Determine o valor de x, inteiro positivo, de modo que $x^2 + (x+34)^2 = (x+36)^2$.

□ Questão 7

□ Pergunta

Determine o comprimento do lado do losango $ABCD$ sabendo que suas diagonais AC e BD medem 20 e 48, respectivamente.

□ Questão 8

□ Pergunta

O trapézio $ABCD$, de bases AB e CD, satisfaz $\angle DAB = \angle ADC = 90^\circ$. Se $AB = 7$, $BC = 52$ e $CD = 55$, determine o comprimento de AD.

□ Questão 9

□ Pergunta

Determine o comprimento do lado do losango $ABCD$ sabendo que suas diagonais AC e BD medem 42 e 144, respectivamente.

□ Questão 10

□ Pergunta

Determine o comprimento do lado do losango $ABCD$ sabendo que suas diagonais AC e BD medem 30 e 72, respectivamente.

□ Questão 11

□ Pergunta

O ponto E está na altura AD relativa ao lado BC do triângulo ABC. Conhecendo os comprimentos $AC = 13$, $AB = 77$ e $BE = 76$, determine o comprimento de CE.

□ Questão 12

□ Pergunta

O ponto E está na altura AD relativa ao lado BC do triângulo ABC. Conhecendo os comprimentos $AC = 12$, $AB = 68$ e $BE = 67$, determine o comprimento de CE.

Fonte: https://matematica.obmep.org.br. Acesso em 25 de maio de 2019

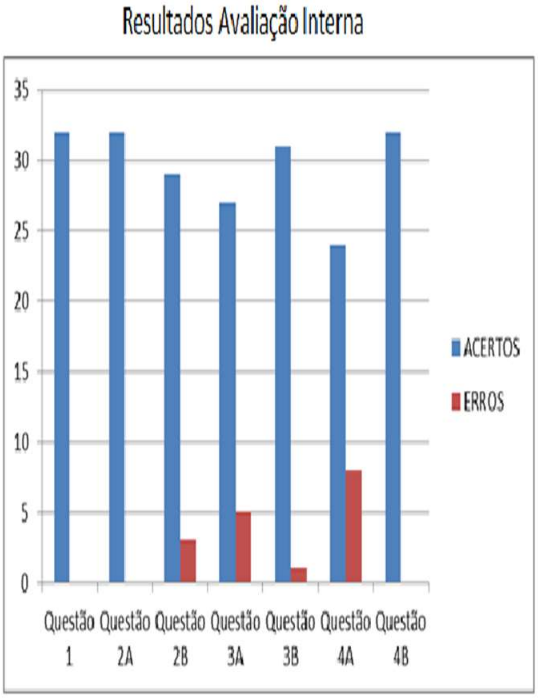
Avaliação Interna

A avaliação interna elaborado pelo professor foi composta por quatro questões de diferentes níveis (Figura 4.6), objetivando mediar a construção do conhecimento sobre o tema, potencializando a aprendizagem e desempenho dos alunos no âmbito do programa, além disso, a avaliação visa fornecer dados concretos para tomada de decisões importantes no decorrer da pesquisa.

> "A avaliação faz parte da prática docente e é importante que esteja nas reflexões, análises, estudos, debates, contribuindo para construção de alternativas com vistas a qualificar o processo de ensino e aprendizagem"e "[...] A finalidade primeira da avaliação é sempre promover a melhoria da realidade educacional e não descrevê-la ou classificá-la. Estudos avaliativos destinam-se a construir o futuro e não a descrever ou explicar o presente"(BORGES, 2008, p. 61)

O resultado obtido na avaliação interna foi muito positivo, alcançando todos os objetivos almejados.

Figura 4.4: Resultado da Avaliação Interna



Fonte: Elaborada pelo autor

Os alunos demostraram domínio do tema e compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. É possível observar na Figura 4.4, referente aos resultados da avaliação interna, que em todas as questões da avaliação o número de acertos é superior à 24. Além disso, verifica-se que em 3 das 7 questões da avaliação houve um aproveitamento de 100% de acertos. Indicando um bom aproveitamento geral de todos os alunos. A relação entre os ternos pitagóricos e o teorema de Pitagóras contribuiu de forma satisfatória no aprofundamento do assunto e para o melhor compreensão do referido teorema.

Avaliação de Satisfação

Finalmente, foi realizada através de um questionário aplicado aos alunos no final do processo, visando aferir as impreenssões e opiniões de cada um sobre o trabalho realizado, tal avaliação possibilitou perceber a importância em utilizar diferentes recursos e metodológias pedagógicas no ensino da matemática, assim como nos outros dois tipos de avaliações aplicadas. O modelo da pesquisa de satisfação é apresentado na Figura 4.7.

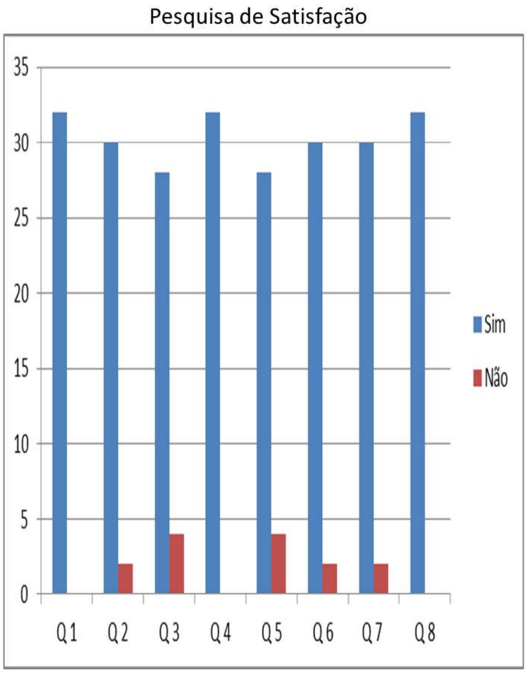
A satisfação na realização das tarefas é de fundamental importância para obtenção de bons resultados no desenvolvimento do trabalho.

> “Ao ter no aluno seu objeto fundamental de análise, na avaliação ora é o espaço pedagógico que será o foco, ora será o profissional, ora será o da cidadania, no qual estão inseridos professores e alunos.”(CARVALHO, 2004, p. 102)

Verificar o nível de aprendizagem e o conseqüente grau de satisfação dos alunos é uma etapa de fundamental importância na realização de qualquer atividade pedagógica, permitindo repensar a prática e direcionar adequadamente as estratégias de ensino e aprendizagem.

Observa-se que os resultados da pesquisa de satisfação são muito positivos, pois registrou uma grande saisfação dos alunos com a metodologia aplicada. O gráfico dado pela Figura 4.5 apresenta os dados quantitativos coletados quanto as impreenssões e opiniões dos alunos em relação ao trabalho realizado, o grau de satisfação e interesse demonstrado na realização das atividades propostas. Os resultados apresentados na pesquisa de satisfação fornecem a certeza dos objetivos alcançados e a motivação necessária para continuar na implementação de diferentes metodologias no ensino da matemática na educação básica.

Figura 4.5: Resultado da Pesquisa de Satisfação



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.6: Modelo da Avaliação Interna

SEDF
Centro de Ensino Fundamental 201
SANTA MARIA

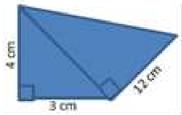
GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
COORDENAÇÃO REGIONAL DE ENSINO DE SANTA MARIA
CENTRO DE ENSINO FUNDAMENTAL 201 DE SANTA MARIA

GOVERNO DE BRASÍLIA

AVALIAÇÃO: TEOREMA DE PITÁGORAS E OS TERNOS PITAGÓRICOS

DISCIPLINA: MATEMÁTICA		PROFESSOR: CARLOS AUGUSTO		RESULTADO:
NOME:			Nº:	
SERIE: 9º ANO	TURMA: A	DATA: 16/04/2019		

01 – Utilizando o Teorema de Pitágoras, determine o valor de x na figura abaixo:



02 – Utilizando as relações $P^2 = 2n + 1$ e $P^2 = 4n + 4$, encontre ternos pitagóricos para os seguintes valores de P.

a) P = 7
b) P = 20

03 – Verifique se os ternos abaixo são pitagóricos e classifique-os em primitivo ou secundário.

a) (20, 21, 29)
b) (7, 24, 25)

04 – Verifique se os ternos abaixo satisfazem a relação: $P^2 = 2n + 1$ (caso P ímpar) ou $P^2 = 4n + 4$ (caso P par), em caso contrário, justifique.

a) (20, 21, 29)
b) (7, 24, 25)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.7: Modelo da Avaliação de Satisfação

-SEDF-
Centro de Ensino Fundamental 201
-SANTA MARIA-

GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
COORDENAÇÃO REGIONAL DE ENSINO DE SANTA MARIA
CENTRO DE ENSINO FUNDAMENTAL 201 DE SANTA MARIA

GOVERNO DE BRASÍLIA

Questionário de Satisfação:
Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos

DISCIPLINA: MATEMÁTICA	PROFESSOR: CARLOS AUGUSTO		RESULTADO:
NOME:		Nº:	
SÉRIE: 9º ANO	TURMA: A	DATA: 29/04/2019	

01 – Você percebeu alguma diferença na metodologia aplicada neste conteúdo?
( ) Sim ( ) Não

02 – Você acredita que a metodologia adotada facilitou a aprendizagem ?
( ) Sim ( ) Não

03 – A metodologia adotada permitiu e incentivou a criatividade matemática?
( ) Sim ( ) Não

04 – O uso das novas tecnologias (celular, computador, etc) facilita a aprendizagem?
( ) Sim ( ) Não

06 – Você acredita que a matemática pode ser mais facilmente entendida se estudada desta forma?
( ) Sim ( ) Não

06 – Você acredita que essa metodologia possibilita uma maior interação entre os alunos?
( ) Sim ( ) Não

07 – Você acredita que sua aprendizagem neste conteúdo foi satisfatória?
( ) Sim ( ) Não

08 – Você gostaria que outros conteúdos matemáticos fossem abordados com a mesma metodologia?
( ) Sim ( ) Não

Fonte: Elaborada pelo autor

Capítulo 5

Considerações Finais

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma análise de como o conteúdo sobre o Teorema de Pitágoras está sendo ministrado nas escolas, propor uma nova abordagem metodológica e permitir uma reflexão acerca dos benefícios dos recursos didáticos e dificuldades encontradas ao trabalhar esse conteúdo, além disso, também permitiu utilizar diferentes recursos didáticos e avaliar como esses recursos auxiliam na aprendizagem do conteúdo.

De um modo geral, os alunos demonstraram interesse em trabalhar o tema em sala de aula e buscaram meios para alcançar os objetivos de aprendizagem definidos, mas ainda possuem algumas dificuldades, como a falta de acesso aos recursos tecnológicos necessários disponíveis na própria escola. A maioria dos alunos utiliza seu próprio celular como recurso tecnológico em sala aula, mas como esse não um recurso acessível a todos, a utilização do laboratório de informática da escola foi extremamente importante, e neste caso a pouco estrutura oferecida acabou sendo mais uma dificuldade apresentada.

Mesmo com algumas dificuldades os alunos demonstraram muito interesse pelo tema e buscam se informar sobre o conteúdo, principalmente pela internet. Diante, das falas dos alunos ficou evidente que os objetivos de cada etapa do processo didático foram realmente alcançados.

As discussões e debates promovidas no primeiro momento conseguiram criar um ambiente onde os alunos puderam argumentar e através da troca de ideias coletivas tirarem suas dúvidas e curiosidades sobre o tema. Já as vídeos aulas exibidas possibilitaram reforçar o conteúdo que era transmitido pelo professor em sala de aula e com a discussão ao final de cada vídeo, os alunos tiravam dúvidas e debatiam sobre o tema. Os vídeos permitiram os alunos entender e memorizar melhor a matéria, por apresentarem uma linguagem fácil e aproximar o aluno ao cotidiano.

O trabalho em grupo na observação dos padrões matemáticos e na construção de uma nova fórmula para obter os ternos Pitagóricos permitiu aos alunos usarem a criatividade para colocar suas ideias em prática e, assim, construir de forma significativa o conhecimento sobre o tema.

As atividades didáticas utilizando as novas tecnologias forneceram aos estudantes um ambiente enriquecedor e motivador que além de divertir, passou a ser visto como um promotor de aprendizagem, permitindo os alunos entender melhor alguns conceitos que antes não foram assimilados, tirar dúvidas, revisar e reforçar o que foi visto dentro da sala de aula.

Dada à importância do tema, torna se necessário o desenvolvimento de projetos que visem à formação continuada dos professores, que possam desencadear competências e habilidades para garantir um ensino de maior qualidade, que atendam as diferentes necessidades dos alunos e, assim, efetivar uma prática pedagógica diferenciada.

Nesse sentido, a utilização de recursos tecnológicos na escola permitem os professores mediarem o processo ensino/aprendizagem de uma forma mais enriquecedora, motivando o aluno a ter mais vontade de aprender e contribuir para que a aprendizagem seja realmente significativa.

Referências Bibliográficas

[1] EDUCABRAS *O Desinteresse dos Alunos no Brasil.* Disponível em http://educabras.com/ Acessado em 06 de jul. de 2019.

[2] INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) Indicadores Educacionais. Disponível em http://inep.gov.br/indicadores-educacionais Acessado em 06 de nov. de 2018.

[3] O GLOBO; *Salário mínimo pago ao professor no Brasil é um dos piores do mundo.* Disponível em: //https: oglobo.globo.com/sociedade/educação/23056381/ Atualizado em 30/10/2018.

[4] LAKATOS E. M. ; MARCONI M. A. *Fundamentos da Metodologia Científica.* São Paulo: Editora Atlas, 2017.

[5] LIMA T. C. S.; MIOTO R. C. T. *Procedimentos Metodológicos na Construção do Conhecimento.* Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, Revista Katálysis, 2007.

[6] SALVADOR, A. D. *Métodos e Técnicas de Pesquisa* bibliográfica. Porto Alegre: Editora Sulina, 1986.

[7] CUNHA, M. I. *O Lugar da Formação do Professor Universitário: o espaço da pós-graduação em educação em questão.* Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 9, n. 26, p. 81-90, jan./abr.2009.

[8] ASSIS, A. E. S. Q.; CASTANHO, M. E. L. M. *Educação, Inovação e o Professor Universitário.* Revista E-Curriculum, São Paulo (SP), v. 2, n. 3, S.P., dez. 2006. Disponível EM: HTTP://WWW.PUCSP.BR/ECURRICULUM . ACESSADO EM 16 DE MAIO DE 2018.

[9] ANTUNES, C. *O Jogo e a Educação Infantil.* São Paulo: Vozes, 2003.

[10] THERRIEN, J.; MAMEDE, M.A.; LOIOLA, F.A. *Gestão Moral da Matéria e Autonomia do Trabalho Docente.* In. ROMANOWSKI, J.P.; MARTINS, P.L.O.; JUNQUEIRA, S.R.A. (Orgs.). *Conhecimento Local e Conhecimento Universal: a aula, aulas nas ciências naturais e exatas, aulas nas letras e artes.* Curitiba: Editora Champagnat, 2004.

[11] FIORENTINI, D. LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.* 2. Ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

[12] OLIVEIRA, G. S.; MALUSÁ, S.*Profissão docente na Educação Superior.* Jundiaí - SP: Editora Atlas, 2004.

[13] MALUSÁ, S.; MONTALVO, M. R. *Saberes Contemporâneos e Docência Universitária.* Revista Educação e Filosofia 19 nº 37, jan/jun. 2005. p. 253-272.

[14] HAYDT, R. C. C. *Avaliação do Processo Ensino-aprendizagem.* São Paulo, Editora Ática, 1998.

[15] LIBÂNEO, J. C. *Didática.* São Paulo, Editora Cortez, 1994.

[16] PIMENTA, S.G. *A Didática como Mediação na Construção da Identidade do Professor: uma experiência de ensino e pesquisa na Licenciatura.* ANDRÉ, M.E.D.A. e outros. *Alternativas do Ensino da Didática.* Campinas: Papirus, 1997, p.37-69.

[17] ALVES, R. K. *A Escola com que Sempre Sonhei sem Imaginar que Pudesse Existir.* São Paulo: Editora Papirus, 2005.

[18] MASETTO, M. T. *Competência Pedagógica do Professor Universitário.* São Paulo:Editora Summus, 2003

[19] MORIN, E. *A Cabeça bem-Feita: pensar a reforma, reformar o pensamento.* Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2003.

[20] KLEIN, A. M.; SOARES GIL, M. C. *O Ensino da Matemática* Curitiba - PR: Editora IESDE, 2012.

[21] LUCCHESI, D. C.; MIGUEL A. *História da Matemática em Atividades Didáticas.* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[22] HUERTE, J. C. S.; BRAVO J. A. F. *O Ensino da Matemática.* Porto Alegre: Editora Artmed, 2006.

[23] ROQUE T. *História da Matemática: uma visão crítica.* Rio de Janeiro: Editora Zahar , 2012.

[24] KANH C. H. *Pitágoras e os Pitagóricos: uma breve história.* São Paulo: Editora Loyola, 2007

[25] GUEDJ, D. *O Teorema do Papagaio.* São Paulo: Editora Companhia das Letras, 1999.

[26] PENNICK N. *Geometria Sagrada: simbolismo e intenção nas estruturas religiosas.* São Paulo: Editora Pensamento, 1980

[27] LIVIO M. *Razão Áurea: a história de Fi.* Rio de Janeiro: Editora Record, 2006

[28] BRASIL; *Base Nacional Comum Curricular. Educação é a Base.* Brasília, Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br

[29] SCOTT, E. l. ; *The Pythagorean Proposition.* The National Counsil of Theachers of Mathematics, Washington, D.C., 1940.

[30] ROTHBART, A.; PAULSELL, B.; *The Pythagorean Tlipes: A New, Easy-to-Derive Formula with some Geometric Applications.* The Mathematics Theachers 67, Washington, D.C., 1985.

[31] CAVALCANTE, J. A.; BARROS, J. S.; ALMEIDA, J. D.; *Ternos Pitagóricos: aprofundamento de um conceito aplicado na educação básica.* Minicurso, Anais do VI EPBEM - Monteiro, PB, 2010.

[32] FOSSA, J. A.; MOREY, B. B.; ERICKSON, G. N.; BARONI, R. L. S.; *História da Matemática para professores.* São Paulo: Editora Livraria da Física/SBHMAT, 2009.

[33] EUCLIDES; *Os Elementos.* Traduzido por: BICUDO, I.; São Paulo: Editora UNESP, 2009.

[34] COSTA, E. A. S.; *Triângulos Pitagóricos, Ternos Pitagóricos e Suas Propriedades.* Universidade Federal do Pará, Abaetuba, 2018.

[35] BRAND, C. F.; MORETTI, N. T. *Ensinar e Aprender Matemática.* Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016.

[36] TARDIF, M. *Saberes Docentes e Formação Profissional.* Petropolis RJ: Editora Vozes, 2002.

[37] BORGES, R. M. R.; *Avaliação e Interatividade na Educação Básica em Ciências e Matemática.* Porto Alegre: Editora EdiPUCRS, 2008.

[38] CARVALHO, F. R.; *Da Cultura das Provas para a Cultura de Avalição.* São Paulo: Editora Arte e Ciências, 2004.