UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUCEMÁRIO DANTAS VIEIRA

Equações Polinomiais

Orientador:

Profº. Dr° Fágner Lemos de Santana

Natal/RN - 2019

LUCEMÁRIO DANTAS VIEIRA

Equações Polinomiais

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Profº. Dr° Fágner Lemos de Santana

Natal/RN - 2019

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Vieira, Lucemário Dantas.
Equações polinomiais / Lucemário Dantas Vieira. - 2019.
60f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Natal, 2019.
Orientador: Fágner Lemos de Santana.

1. Matemática - Dissertação. 2. Corpos - Dissertação. 3. Equações polinomiais - Dissertação. 4. Raízes - Dissertação. 5. Fórmulas de Cardano - Dissertação. I. Santana, Fágner Lemos de. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 51

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LUCEMÁRIO DANTAS VIEIRA

Equações Polinomiais

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Fágner Lemos de Santana - UFRN (Orientador)
Profa. Dra. Viviane Simioli Medeiros Campos - UFRN (Membro Externo)
Profa. Dra. Rainelly Cunha de Medeiros - IFRN (Membro Externo)

Natal-2019

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde e sabedoria. Ao Professor Drº. Fágner Lemos de Santana, orientador deste trabalho, pela competência, dedicação, disponibilidade e pelas sugestões que enriqueceram esse trabalho.

À turma do PROFMAT 2017, pelo companheirismo e amizade, em especial ao meu amigo Pedro pelas orientações no uso do programa Latex. A todos os professores que me deram aula nesse curso pela atenção e dedicação.

E, finalmente, a todos os meus familiares e amigos que me incentivaram e apoiaram antes e durante esta jornada, especialmente aos meus pais José Aldamir Vieira e Lúcia de Fátima Dantas Vieira e a minha esposa Daniely Cristina de Araújo.

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso será abordado o estudo das equações polinomiais, fazendo breves comentários históricos e, principalmente, tratando de suas resoluções. Para isso, é feita uma revisão dos principais conceitos e resultados, do ponto de vista algébrico, a cerca dos números reais e dos números complexos. Um estudo geral dos polinômios (funções polinomiais) será apresentado com o objetivo de tratar das resoluções das equações. Também serão apresentadas as deduções das chamadas fórmulas de Cardano para a resolução da equações polinomiais de grau 3 e um método para resolver as de grau 4.

PALAVRA-CHAVE: Corpos, Equações Polinomiais, Raízes, Fórmulas de Cardano.

Abstract

In this course conclusion work will be approached the study of polynomial equations, doing short historic comments and, mainly, treating of its resolutions. So that, is accomplished a review of the main concepts and results, in the algebraic viewpoint, about the real and complex numbers. A general study of the polynomials (polynomial functions) will be presented with the aim of treating the resolution of the equations. It also will be presented the deductions of the so-called Cardano's formula, for the resolution of the polynomial equations of degree 3 and a method to solve the equations of degree 4.

Sumário

Introdução

A presente dissertação tem por objetivo servir como material didático sobre o tema equações polinomiais, acessível aos alunos do ensino médio e do início da graduação e, principalmente, aos professores do ensino médio que desejem recordar os conteúdos de números complexos, polinômios e equações polinomiais.

No primeiro capítulo deste trabalho fazemos uma revisão dos conceitos e resultados mais importantes sobre o conjunto dos números reais e do conjunto dos números complexos, dando ênfase à parte algébrica. Para isso, falamos, de maneira geral, da estrutura algébrica corpo, dos corpos ordenados, e deixamos claro o que significa o conjunto dos números reais ser um corpo ordenado. Provamos então, que o conjunto dos números complexos é um corpo, o qual não pode ser ordenado. Outro ponto importante tratado neste capítulo é o fato do conjunto dos números reais não ser um corpo algebricamente fechado, ou seja, nem toda equação polinomial tem solução neste conjunto.

No segundo capítulo, fazemos um estudo sobre as equações polinomiais. Para isso, começamos definindo polinômios (funções polinomiais), tratando das operações entre polinômios e mostrando vários resultados que auxiliam na busca de soluções para as equações polinomiais, como o teorema da divisão, critérios sobre raízes racionais de polinômios com coeficientes inteiros e o teorema de D'Alembert, entre outros. Apresentamos ainda, vários exemplos nos quais as raízes de polinômios são encontradas com o auxílio desses resultados.

Finalizando, no terceiro capítulo apresentamos a chamada fórmula de Cardano para a resolução de equações polinomiais de grau 3, além de um método para a resolução das de grau 4. A dedução dessa fórmula e o método são baseados no artigo do Professor Carlos Gustavo Tamn de Araújo Moreira, publicado pela Revista do Professor de Matemática número 25 em 1994.

A seguir faremos um breve resumo histórico sobre equações polinomiais e suas soluções. As referências usadas aqui foram [1, 2, 4, 7, 8, 9].

A solução de algumas equações do 2^o grau já eram conhecidas pelos Babilônios desde o ano 2000 a.c. Naquela época não haviam símbolos para a representação dos objetos matemáticos além dos números, por isso as equações eram enunciadas com palavras. Por exemplo, na porção sobrevivente do tablete $YBC4652$, do antigo período babilônico, o qual se encontra no museu da Universidade de Yale (EUA), aparece o seguinte problema:

Somei a área de um quadrado com $\dfrac{2}{3}$ *do seu lado e encontrei* $\dfrac{35}{60}$. *Quanto mede o lado desse quadrado?*

Esse enunciado é equivalente, em notação moderna, à equação $x^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right) x = \dfrac{35}{60}$, onde x é a medida do lado do quadrado.

A maneira de resolver aparece na forma de instruções sobre os cálculos que devem ser realizados para se encontrar a resposta, neste caso, $x = \dfrac{1}{2}$. Note que a solução encontrada está correta, uma vez que para resolver uma equação do tipo $x^2 + ax = b$ as instruções são equivalentes à fórmula

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}.$$

No primeiro milênio da era cristã a Índia produziu célebres matemáticos, mas o nome de Bhaskara $(1114 - 1185)$ é o que mais facilmente vem a nossa memória, por estar ligado à fórmula geral da solução das equações do segundo grau.

Por volta da metade do século XVI, alguns matemáticos italianos (Tartaglia e Cardano) descobriram um modo para resolver equações do tipo $x^3 + ax + b = 0$. Em sua obra "Ars Magna" (A grande arte), Gerônimo Cardano (1501 – 1576) apresentou pela primeira vez a fórmula

$$x = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

como solução de uma equação do tipo $x^3 + ax + b = 0$, onde $a > 0$ e $b > 0$.

Essa fórmula só se aplicava quando $\sqrt{\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{a^3}{27}} > 0$, pois na época não se extraiam raízes quadradas de números negativos.

Gerônimo Cardano nasceu em Pavia (Lombardia, Itália) a 24 de Setembro de 1501. Cardano era filho ilegítimo de Clara Micheri e do jurista e doutor matemático milanês Fazio, amigo de Leonardo da Vinci. Cresceu no meio de maus tratos, de doenças e de muitas infelicidades; apesar disso, mostrou uma extraordinária precocidade para os estudos: era já célebre como astrólogo e mago, antes de ter dado provas da sua invulgar aptidão para o estudo das ciências naturais e da Matemática. Na mesma época, o matemático Rafael Bombelli, resolvendo a equação $x^3–15x–4 = 0$, também chegou num impasse. Por cálculo direto, ele verificou que 4 era uma raiz da equação, pois $4^3–15.4–4 = 0$, e tentou verificar se encontrava a raiz 4 aplicando a fórmula de Cardano. No entanto, para a equação $x^3–15x–4 = 0$, tem-se que $a = -15$ e $b = -4$, o que resultou em

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2}+\sqrt{\frac{16}{4}-\frac{3375}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{4}{2}-\sqrt{\frac{16}{4}-\frac{3375}{27}}} = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Por causa desse resultado, Bombelli acreditava que a equação não devia ter solução, pois $\sqrt{-121}$ não é um número real. No entanto, ele sabia que $x = 4$ era uma das raízes da equação.

Para superar esse problema, Bombelli tentou encontrar regras para trabalhar com raízes quadradas de números negativos. Resolveu então considerar $\sqrt{-1}$ como um número qualquer e, usando as regras da álgebra elementar, conseguiu mostrar que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ era a raiz da equação que ele estava tentando resolver. Bombelli passou a desenvolver regras para operar com esses novos "números" chamando-os de números "fictícios", "impossíveis" ou "imaginários".

Provavelmente Cardano teria tido mais sucesso se as raízes quadradas dos números negativos não aparecessem com tanta frequência, no entanto ele teve a curiosidade e a coragem de investigar o seguinte problema:

"Divida 10 *em duas partes tais que o produto de uma parte pela outra seja 40"*

Resolvendo o problema, Cardano encontrou as soluções $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$.

A partir daí, os matemáticos passaram a estudar e trabalhar com raízes quadradas de números negativos de forma cada vez mais sistematizada.

- Albert Girad (1629) também enfocou números negativos e imaginários com grande ousadia. Ele usava números negativos para resolver problemas geométricos e sugeriu que, aceitando-se também números imaginários como raízes, seria possível afirmar que uma equação admite tantas raízes quanto é seu grau. Enunciou também as relações entre raízes e coeficientes de uma equação polinomial e sugeriu que as raízes imaginarias são úteis por tornar essas relações gerais. Por exemplo, para a equação $x^4 - 4x + 3 = 0$ ele obteve as raízes $1, 1, (-1 + \sqrt{-2})$ e $(-1 - \sqrt{-2})$.

- Leonhard Euler (1707-1783), foi um importante matemático e cientista suíço, considerado um dos maiores estudiosos da matemática, em sua época. Fez importantes descobertas em várias áreas da matemática como o cálculo e a teoria dos grafos. Leonhard Euler em 1777 denotou a letra i para $\sqrt{-1}$ e determinou várias propriedades dos números introduzidos por Bombelli, sendo dele a representação polar que abordaremos logo mais.

- Augustin-Louis Cauchy (1789 -1857), foi um matemático francês. O primeiro avanço na matemática moderna por ele produzido foi a introdução do rigor na análise matemática. Augustin Louis Cauchy (1821) contribuiu com os termos conjugado e módulo de um número complexo.

- Carl Friedrich Gauss (1787 – 1855), matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, eletroestática, astronomia e óptica. Alguns se referem a ele como “o príncipe da matemática”. Ele considerava a matemática como “a rainha das ciências”. Foi Gauss quem divulgou a representação geométrica dos números complexos.

Capítulo 1

Números Reais e Complexos

O objetivo desse capítulo é explicar o que significa dizer que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado o qual não é algebricamente fechado e, partindo daí, mostrar como surgiu o conceito de números complexos. Provarmos que o conjunto dos números complexos também é um corpo, mas não é ordenado. Como uma demonstração de que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado passa, necessariamente, pela abordagem de alguma construção formal de $\mathbb{R}$, não apresentaremos tal demonstração. Para mais detalhes sobre a teoria de corpos e de corpos ordenados veja [3].

Devemos entender que praticamente todas as propriedades algébricas dos números reais decorrem do fato de $\mathbb{R}$ ser um corpo ordenado.

Um outro fato básico bastante importante sobre $\mathbb{R}$ (o qual não será abordado nesta dissertação) é que além de ser um corpo ordenado, $\mathbb{R}$ também é completo. Graças a essa propriedade, é possível estabelecer vários conceitos e resultados sobre funções reais a valores reais, como por exemplo, continuidade e o teorema do valor intermediário (ver [10]).

1.1 Corpo

Definição 1.1. *Um corpo é uma estrutura algébrica formada por um conjunto não vazio F e duas operações, a primeira chamada adição, que a cada par de elementos $(x, y) \in F \times F$ associa um elemento $x+y \in F$, e a segunda chamada multiplicação, que a cada par de elementos $(x, y) \in F \times F$ associa um elemento $xy \in F$, que satisfazem as seguintes condições:*

A1) Associatividade: $x + (y + z) = (x + y) + z$*, para quaisquer* $x, y, z \in F$*;*

A2) Comutatividade: $x + y = y + x$*, para quaisquer* $x, y \in F$*;*

A3) Existência do elemento neutro da adição: existe um elemento $0 \in F$ *(chamado zero ou elemento neutro da adição) tal que* $x+0 = x$*, qualquer que seja* $x \in F$*;*

A4) Existência do oposto aditivo: para cada $x \in F$ *existe um elemento* $(-x) \in F$ *(chamado oposto aditivo do número* x*), tal que* $x + (-x) = 0$*;*

M1) Associatividade: $x(yz) = (xy)z$*, para quaisquer* $x, y, z \in F$*;*

M2) Comutatividade: $xy = yx$*, para quaisquer* $x, y \in F$*;*

M3) Existência do elemento neutro da multiplicação: existe um elemento $1 \in F - \{0\}$ *(chamado "um" ou elemento neutro da multiplicação), tal que* $1x = x$*, para todo* $x \in F$*;*

M4) Existência do inverso multiplicativo: para cada $x \in F$*, com* $x \neq 0$*, existe um elemento* $x^{-1} \in F$ *tal que* $xx^{-1} = 1$*;*

M5) Distribuitividade: $x(y + z) = xy + xz$*, para quaisquer* $x, y, z \in F$*.*

Observação 1.1. *Dados* x *e* y *em* F*, com* $y \neq 0$*, escrevemos* $\dfrac{x}{y}$ *no lugar de* xy^{-1}*. A operação que a cada par de elementos* (x, y) *em* F *associa o elemento* $\dfrac{x}{y}$ *em* F*, definida para qualquer* x *e* $y \neq 0$ *em* F*, é chamado o quociente de* x *por* y*.*

Proposição 1.1. *Se* $y \neq 0$*, então* $\dfrac{x}{y} = z \Leftrightarrow x = zy$*.*

Demonstração: Suponha $\dfrac{x}{y} = z$, assim:

$$\left(\frac{x}{y}\right) y = zy \Rightarrow xyy^{-1} = zy \Rightarrow x = zy.$$

Agora, suponha $x = yz$. Como $y \neq 0$, então existe y^{-1} logo $xy^{-1} = yzy^{-1} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = z$.

■

Observação 1.2. *Segue-se daí a lei do corte:*

$$\text{Se } xz = yz \text{ e } z \neq 0, \text{ então } x = y.$$

As observações a seguir destacam algumas propriedades que resultam das condições $A1$ até $M5$.

Observação 1.3. *Se $x + y = y + z$, então $x = z$. De fato, como $y \in F$, então existe um elemento $(-y) \in F$ tal que $y + (-y) = 0$, assim, basta somar o elemento $(-y)$ a ambos os membros da equação $x + y = y + z$, ou seja: $x + y + (-y) = y + z + (-y)$. Daí, segue que:*

$$x + y + (-y) = y + z + (-y) \Rightarrow x + 0 = y + (-y) + z \Rightarrow x = 0 + z \Rightarrow x = z.$$

Observação 1.4. *Se $xy = yz$, com $y \neq 0$, então $x = z$. De fato, como $y \in F$ e $y \neq 0$, então existe um elemento $y^{-1} \in F$ tal que $yy^{-1} = 1$, assim, basta multiplicar o elemento y^{-1} em ambos os membros da equação $xy = yz$, ou seja: $xy(y^{-1}) = yz(y^{-1})$. Daí, segue que:*

$$xy(y^{-1}) = yz(y^{-1}) \Rightarrow x(yy^{-1}) = (yy^{-1})z \Rightarrow x = 1z \Rightarrow x = z.$$

Observação 1.5. *Suponha que 0 e θ são elementos neutros da adição em um corpo, assim: $0 + \theta = 0$ e $0 + \theta = \theta$, logo, $0 = \theta$, ou seja, em um corpo, o elemento neutro é único.*

Observação 1.6. *Todo $x \in F$ tem um único oposto aditivo. De fato, para $x \in F$ suponha que existem $y, z \in F$ tais que $x + y = 0$ e $x + z = 0$, assim*

$$z + (x + y) = z + 0 \Rightarrow (z + x) + y = z \Rightarrow (x + z) + y = z \Rightarrow 0 + y = z \Rightarrow y = z.$$

Observação 1.7. *Para todo $x \in F$, $0x = 0$. De fato, como $0x = (0+0)x = 0x + 0x$ temos $0x - 0x = 0x$. Logo, $0 = 0x$.*

Exemplo 1.1. *O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com as operações de adição e de multiplicação é um corpo.*

1.2 Corpo ordenado

Definição 1.2. *Dizemos que um corpo F é ordenado se existe um conjunto não-vazio $P \subset F$ que goza das seguintes propriedades:*

P1) Se $x, y \in P$, então $x + y \in P$ e $xy \in P$;

P2) Dado qualquer $x \in F$, uma, e apenas uma, das alternativas abaixo é satisfeita:

$$i)\, x \in P \quad ii) - x \in P \quad iii)\, x = 0$$

O conjunto P é chamado conjunto dos elementos positivos de F. O conjunto $-P = \{-x;\ \ x \in P\}$ é chamado conjunto dos elementos negativos de F. Segue de P2 que $F = -P \cup P \cup \{0\}$ e que essa união é disjunta.

Exemplo 1.2. *Se considerarmos em $\mathbb{R}$ a ordenação usual de seus elementos, a qual tem forte apelo geométrico quando dispomos os números reais em uma reta, o conjunto P dos números reais maiores do que 0 goza das propriedades P1 e P2 da definição, ou seja, $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado.*

Exemplo 1.3. *Para todo $x \in F, -x = (-1)x$. De fato, $x + (-1)x = 1x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0x = 0$. Daí segue que $(-1)(-1) = -(-1) = 1$.*

Proposição 1.2. *Se F é um corpo ordenado e $P \subset F$ é um subconjunto que satisfaz as propriedades P1 e P2 da definição, então o elemento neutro da multiplicação, denotado por 1, pertence a P.*

Demonstração: Como F é um corpo tem-se que os elementos neutros da adição e da multiplicação são distintos, ou seja, $1 \neq 0$. Suponha, por absurdo, que $1 \notin P$. Então, da propriedade P2 segue que $-1 \in P$. Assim, da propriedade P1 decorre que $(-1)(-1) = 1 \in P$, o que é uma contradição. Portanto, $1 \in P$.

■

Definição 1.3. *Sejam a e b elementos de um corpo ordenado F e $P \subset F$ um subconjunto que satisfaz as Propriedades P1 e P2 da Definição 1.2. Diz-se que "a é menor do que b", o que é denotado por $a < b$, quando $b - a \in P$. Diz-se que "a é maior do que b", o que é denotado por $a > b$, quando $a - b \in P$.*

Proposição 1.3. *Em um corpo ordenado F, temos:*

01) *Transitividade: Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.*

02) *Tricotomia: Dados $a, b \in F$, tem-se que exatamente uma das três alternativas ocorre: ou $a = b$ ou $a < b$ ou $b < a$.*

03) *Monotonicidade da adição: Se $a < b$, então $a + c < b + c$, para todo $c \in F$.*

04) *Monotonicidade da multiplicação: Se $a < b$ e $c \in P$, então $ac < bc$.*

05) *Monotonicidade da multiplicação: Se $a < b$ e $c \in -P$, então $ac > bc$.*

06) *Se $a \in F$ e $a \neq 0$, então $a^2 > 0$.*

Demonstração:

01) Se $a < b$ e $b < c$, então $(b-a) \in P$ e $(c-b) \in P$, logo $(b-a)+(c-b) \in P$. Como $(b-a)+(c-b) = (c-a)$, decorre daí que $(c-a) \in P$, ou seja, $a < c$.

02) Como $a - b \in F$, sendo F um corpo ordenado, então ocorre um, e somente um, dos três casos abaixo:

(i) $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$;

(ii) $a - b \in P \Leftrightarrow b < a$;

(iii) $-(a-b) \in P \Leftrightarrow (b-a) \in P \Leftrightarrow a < b$.

03) Sendo $a < b$, então $b - a \in P$. Como 0 é o elemento neutro da adição e $0 = c + (-c)$ tem-se que:

$(b+0-a) \in P \Rightarrow b+c+(-c)+a \in P \Rightarrow b+c-(a+c) \in P \Rightarrow a+c < b+c$.

04) Se $a < b$, então $b - a \in P$. Como $c \in P$, temos

$$(b-a)c \in P \Leftrightarrow bc - ac \in P \Leftrightarrow ac < bc.$$

05) Se $c < 0$, então $-c \in P$, logo $(b-a)(-c) \in P \Leftrightarrow ac - bc \in P \Leftrightarrow bc < ac$.

06) Como $a \in F$ e $a \neq 0$, temos que $a > 0$ ou $a < 0$. Se $a > 0$, então $a^2 = a \times a > 0$ e se $a < 0$, então $-a > 0$, logo $(a)^2 = 1 \times a^2 = -(-1)a^2 = (-1)(-1)a^2 = (-1)(a)(-1)(a) = (-a)(-a) > 0$.

■

1.3 Os números complexos

Quando estudamos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, percebemos a necessidade de novos números ao tentar efetuarmos subtrações do tipo $3 - 5$. Para superar esse tipo de situação, o conjunto dos números naturais foi ampliado e criou-se um novo conjunto, o conjunto dos números inteiros, representado por $\mathbb{Z}$. Da mesma maneira esse conjunto mostrou-se insuficiente, pois nele não é possível efetuar divisões do tipo $\frac{3}{2}$. A partir dessa necessidade foi construído um novo conjunto, o conjunto dos números racionais. Mas em $\mathbb{Q}$ o problema de se medir a diagonal do quadrado de lado 1, não tem solução. Desse modo, construiu-se o conjunto dos números reais, representado por $\mathbb{R}$.

Se tivéssemos que resolver a equação $x^2 + 1 = 0$ no conjunto dos números reais, quais seriam as raízes dessa equação? Resolvendo, obtemos:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

Estamos mais uma vez em um ponto crítico. O conjunto dos números reais não é suficiente para efetuarmos a operação de radiciação, pois o corpo $\mathbb{R}$ não é algebricamente fechado (a equação $x^2 + 1 = 0$, por exemplo, não possui solução em $\mathbb{R}$). Para contornar isso, mais uma vez foi preciso ampliar o conceito de número.

Consideremos a equação $x^2 - 2x + 3 = 0$, a qual não tem solução real. De fato, usando a conhecida fórmula para resolver equações do 2^o grau, temos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}.$$

Se ignorarmos o fato de que $\sqrt{-8}$ não é um número real e usarmos as propriedades das raízes, teremos $\sqrt{-8} = \sqrt{8\,(-1)} = \sqrt{8}\sqrt{-1} = 2\sqrt{2}\sqrt{-1}$ e assim, poderíamos dizer que $1 + \sqrt{2}\sqrt{-1}$ e $1 - \sqrt{2}\sqrt{-1}$ são as soluções da equação $x^2 – 2x + 3 = 0$.

Os números complexos nascem da impossibilidade de se calcular raízes quadradas de números negativos. Sendo assim, estamos querendo dispor de um conjunto de objetos, que chamaremos de números complexos, no qual seja possível extrair a raiz quadrada de um número negativo, que contenha os números reais e que as operações de adição e multiplicação definidas nesse conjunto, quando restritas aos reais, coincidam com as operações que já conhecemos.

Definição 1.4. *Uma expressão do tipo $a + bi$, na qual a e b são números reais e i é um símbolo (até aqui sem significado), é chamada número complexo. O conjunto dos números complexos será denotado por $\mathbb{C}$. Dizemos que dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são iguais quando $a = c$ e $b = d$.*

Observação 1.8. *Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, utilizaremos a notação $a = R_e(z)$ e $b = I_m(z)$, em que $R_e(z)$ é chamada parte real e $I_m(z)$ parte imaginária de z.*

1.4 Operações com complexos

Agora que já temos uma definição formal dos números complexos podemos introduzir as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$. Ao introduzir tais operações a expressão $a + bi$ e, principalmente, o símbolo i passarão a ter significado.

Definição 1.5. *Dados $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di \in \mathbb{C}$, definimos a soma $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ como sendo o número complexo $(a + c) + (b + d)i$.*

Exemplo 1.4. *Para $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 3 + 4i$, tem-se $z_1 + z_2 = (2 + 3) + (3 + 4)i = 5 + 7i$.*

Observação 1.9. *Note que a soma de números complexos com parte imaginária nula se reduz a soma de números reais.*

Observação 1.10. *Considerando i como sendo a unidade imaginária e usando as propriedades de $\mathbb{R}$ (enquanto corpo) podemos facilmente sair de $a + bi + c + di$ e chegarmos em $z_1 + z_2$.*

Definição 1.6. *Dados $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di \in \mathbb{C}$, definimos o produto $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ como sendo o número complexo $(ac - bd) + (ad + bc)i$.*

Exemplo 1.5. *Para $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 3 + i$, temos $z_1 z_2 = (3 - 2) + (1 + 6)i = 1 + 7i$*

Observação 1.11. *No início desta seção ao tentarmos resolver a equação*

$$x^2 - 2x + 3 = 0,$$

a qual não possui solução real, encontramos os "números" $1 + 2\sqrt{2}\sqrt{-1}$ *e* $1 - 2\sqrt{2}\sqrt{-1}$ *como "solução". Se denotarmos* $\sqrt{-1}$ *por* i*, o número complexo* $i = 0+1i$ *é tal que* $i^2 = ii = -1+0i = -1$. *Esse é o significado do símbolo* i *que aparece nos números complexos. Além disso, se efetuarmos o produto* $(a + bi)(c + di)$ *usando as propriedades dos números reais e a interpretação de* i *como* $\sqrt{-1}$ *(ou* $i^2 = -1$*), temos:*

$$(a+bi)(c+di) = (ac+adi+bci+bdi^2) = ac+(ad+bc)i-bd = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Isso justifica a definição da multiplicação de complexos.

Teorema 1.1. *O conjunto* $\mathbb{C}$ *com as operações de adição e multiplicação definidas acima é um corpo.*

Certamente, a validade das propriedades de corpo em $\mathbb{C}$ não é surpreendente, pois as definições das operações de soma e produto em $\mathbb{C}$ foram construídas imaginando que elas valessem, além de se apoiarem nas operações de $\mathbb{R}$, onde valem tais propriedades. Devido a isso, a demonstração de que $\mathbb{C}$ de fato é um corpo não traz grandes dificuldades. Por exemplo, a comutatividade da adição é demonstrada assim: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Temos que:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = w + z.$$

A única propriedade de corpo que é um pouco mais difícil de ser demonstrada é a que todo número complexo $z = a + bi$ não nulo tem um inverso multiplicativo. De fato, queremos achar $z^{'} = a' + b'i$ tal que $zz^{'} = 1$. Escrevendo essa condição explicitamente, temos:

$$1 = zz^{'} = (aa' - bb') + (ab' + ba')\, i,$$

segue da definição de igualdade de números complexos que:

$$\begin{cases} aa' - bb' & = 1 \\ ab' + ba' & = 0 \end{cases}$$

ou seja, caímos em um sistema de equações lineares nas variáveis $a' \;\; e \;\; b'$, cuja solução é

$$a' = \frac{a}{a^2 + b^2} \;\; e \;\; b' = \frac{-b}{a^2 + b^2},$$

o que faz sentido, já que $a^2 + b^2 \neq 0$, pois assumimos $z = a + bi \neq 0$.

O inverso multiplicativo de um número complexo não nulo z será denotado por z^{-1} ou por $\frac{1}{z}$. Portanto, temos que se $z = a + bi \neq 0$, então

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Proposição 1.4. *O conjunto dos números complexos, com as operações usuais de adição e multiplicação não é um corpo ordenado.*

Demonstração: Suponha que $\mathbb{C}$ é um corpo ordenado. Nesse caso existe $P \subset \mathbb{C}$ satisfazendo as propriedades P1 e P2 da definição e assim, como $i \in \mathbb{C}$ e $i \neq 0$, então $i \in P$ ou $-i \in P$. Se $i \in P$, então $ii = i^2 = -1 \in P$ o que contradiz a proposição 1.2 Por outro lado, se $-i \in P$, então $(-i)(-i) = i^2 = -1 \in P$, e novamente a mesma contradição.

■

1.5 A representação geométrica

A representação geométrica dos números complexos, que hoje conhecemos, foi introduzida pelo matemático Jean-Robert Argand,$(1768-1822)$ em uma monografia publicada de forma anônima em Paris em 1806 (ver [7]).

O conjunto dos números complexos pode ser representado num plano, denominado plano complexo ou plano de Argand-Gauss, onde fixamos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. O número complexo $a + bi$ é representado no ponto P de coordenadas (a, b). Dizemos que P é o afixo de z. Cada ponto do plano é o afixo de um único número complexo.

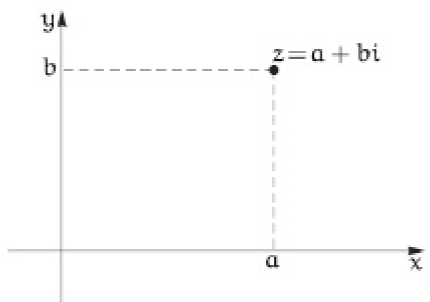

Figura 1.1: Representação de números complexos por pontos do plano. Figura extraída de [5].

Os números reais ficam representados no eixo das abscissas, aqui denominado eixo real. Os imaginários puros ficam representados no eixo das ordenadas, aqui chamado eixo imaginário.

Definição 1.7. *Dado um número complexo $z = a + bi$, denominamos módulo de z, indicamos por $|z|$, o número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Observe que se $z = 0$, então temos que $|z| = 0$. Por outro lado, se $z \neq 0$, então temos que $|z| > 0$. Geometricamente, o módulo de $z = a + bi$ é igual à distância entre a origem $(0, 0)$ e o afixo de z, ou seja,

$$|z| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = d(O, P)$$

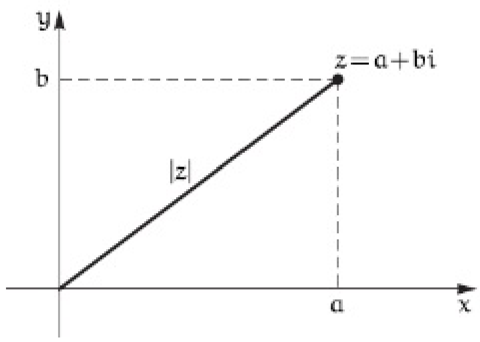

Figura 1.2: Representação do módulo de z. Figura extraída de [5].

Acima, fica clara a similaridade entre números complexos e pares ordenados, o que mostra uma maneira natural de representar geometricamente os números complexos.

Abaixo, listamos algumas propriedades imediatas do módulo de um número complexo.

i) $|z| \geq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

iii) $|zw| = |z|\,|w|$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

iv) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$ e $w \neq 0$.

Definição 1.8. *Dado o número complexo $z = a + bi$, denominamos conjugado de z, e indicamos por $\overline{z}$, o número complexo cuja parte real é igual a de z e cuja parte imaginaria é o oposto da de z.*

$$\overline{z} = a - bi$$

Geometricamente, o conjugado de z corresponde ao simétrico de z em relação ao eixo x.

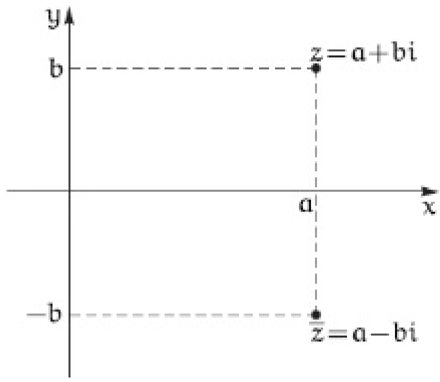

Figura 1.3: Representação de z e do seu conjugado $\overline{z}$. Figura extraída de [5].

A seguir, listamos algumas propriedades imediatas do conjugado (ver [6]).

i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

ii) $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

iii) $\overline{\overline{z}} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

iv) $\overline{z} = 0$ se, e somente se, $z = 0$.

v) $\overline{z} = z$ se, e somente se, $z \in \mathbb{R}$.

vi) Se $z \neq 0$, então $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

Observação 1.12. *Quando multiplicamos um complexo z pelo seu conjugado $\overline{z}$, o resultado é um numero real. De fato,*

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

1.6 Potências de i

Como vimos anteriormente, a unidade imaginaria i tem a propriedade $i^2 = -1$. As potências de um número complexo z com expoentes inteiros são definidas de modo equivalente ao caso das potências de base real.

$$z^0 = 1$$
$$z^1 = z$$
$$z^n = z \cdot z \cdot z \cdots z \cdots z, n \in \mathbb{N} \quad e \quad n \geq 2$$

Tomando $z = i$ obtemos:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = (-1)$
- $i^3 = i^2(i) = (-1)(i) = -i$
- $i^4 = i^3 i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1$
- $i^5 = i^4 i = 1i = i$
- $i^6 = i^5 i = ii = i^2 = -1$
- $i^7 = i^6 i = (-1)i = -i$
- $i^8 = i^7 i = -ii = -i^2 = -(-1) = 1$

Através da definição de potência e das propriedades da multiplicação, demonstra-se que dados os complexos w e v e quaisquer m, n inteiros tem-se que:

(1) $w^m w^n = w^{m+n}$

(2) $\frac{w^m}{w^n} = w^{m-n}$

(3) $(w^m)^n = w^{mn}$

(4) $(wv)^m = w^m v^m$

(5) $\left(\frac{w}{v}\right)^m = \frac{w^m}{v^m}$

Voltando as potências de i observamos que os resultados encontrados são sempre $1, i, -1 \ e \ -i$, mesmo para expoentes negativos:

- $i^{-1} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{1(-i)}{i(-i)} = \dfrac{-i}{-i^2} = \dfrac{-i}{-(-1)} = \dfrac{-i}{1} = -i$
- $i^{-2} = \dfrac{1}{i^2} = \dfrac{1}{-1} = -1$
- $i^{-3} = \dfrac{1}{i^3} = \dfrac{1}{-i} = \dfrac{1(i)}{(-i)(i)} = \dfrac{i}{-i^2} = \dfrac{i}{-(-1)} = i$
- $i^{-4} = \dfrac{1}{i^4} = \dfrac{1}{1} = 1$

De fato, calculemos as potências i^n, com n inteiro ≥ 4. Dividindo n por 4, obtemos um quociente inteiro q e um resto r, r inteiro e $0 \leq r < 4$, isto é, $n = 4q+r$. Assim, temos que

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} i^r = 1 \times i^r = i^r$$

Como r é inteiro e $0 \leq r < 4$, temos que i^n é um dos quatro valores $1, i, -1 \ e \ -i$.

Por outro lado, se $n < 0$, temos que $i^n = (-i)^{-n} = (-1)^{-n} i^{-n}$. Como $n < 0$, temos que $-n > 0$; logo, é um dos quatro valores $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e, portanto $(-1)^{-n} i^{-n}$ também assume esses quatro valores.

1.7 Forma trigonométrica

Nesta seção vamos apresentar uma outra representação dos números complexos não nulos, chamada forma polar ou forma trigonométrica, a qual tornará mais simples algumas operações com complexos.

Definição 1.9. *Dado um número complexo não nulo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, denominamos argumento de z, o número θ (teta) do intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ que verifica as* *seguintes igualdades:*

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad e \quad sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Indicamos $arg\,(z) = \theta$ (leia: argumento de zê igual a teta).

Geometricamente, sendo P o afixo de z no plano complexo, o argumento de z é a medida em radianos do ângulo que devemos girar o semi-eixo positivo Ox, no sentido anti-horário, até coincidir com o segmento OP.

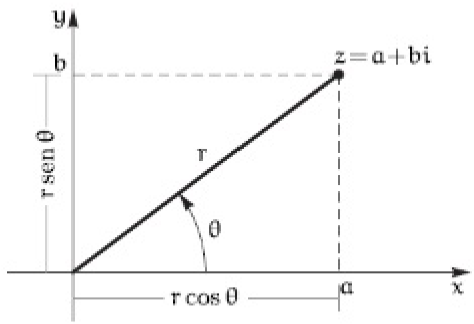

Figura 1.4: Representação do argumento de z. Figura extraída de [5].

Definição 1.10. *Dado um número complexo não nulo $z = a + bi$, com módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e argumento $arg\,(z) = \theta$, define-se a forma trigonométrica de z como sendo a expressão $z = |z|\,(cos\,(\theta) + isen\,(\theta))$.*

Proposição 1.5. *Dois números complexos são iguais se, e somente se, seus módulos são iguais e seus argumentos são congruentes.*

Exemplo 1.6. *Escrevendo o número complexo $z = 1 + i$ na forma trigonométrica, temos que $a = 1$ e $b = 1$, assim $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e*

$$\begin{cases} cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sen(\theta) = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ ou seja, } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, $z = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$.

Teorema 1.2. *Dados os números complexos $z_1 = |z_1|\,(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|\,(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, temos que:*

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left[cos\,(\theta_1 + \theta_2) + isen\,(\theta_1 + \theta_2)\right].$$

Demonstração:

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,(cos\theta_1 + isen\theta_1)(cos\theta_2 + isen\theta_2)$$

$$= |z_1|\,|z_2|\,(cos\theta_1 cos\theta_2 + icos\theta_1 sen\theta_2 + isen\theta_1 cos\theta_2 + i^2 sen\theta_1 sen\theta_2)$$

$$= |z_1|\,|z_2|\,[(cos\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2) + i(sen\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sen\theta_2)]$$

$$= |z_1||z_2|\left[cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + isen\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right].$$

■

Exemplo 1.7. *Dados os números complexos* $z_1 = 3(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3})$ *e* $z_2 = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6})$*, calculemos* $z_1 z_2$*.*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 3\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= 3\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3\sqrt{2}(0 + i) \\ &= 3\sqrt{2}i \end{aligned}$$

1.8 Radiciação

Dado um número complexo z e um número natural n, $n > 1$, definimos em $\mathbb{C}$ a raiz enésima de z como sendo o complexo w tal que $w^n = z$.

Exemplo 1.8. 2*,* -2*,* $2i$ *e* $-2i$ *são as raízes quartas do número complexo 16, pois*

- $2^4 = 16$*;*
- $(-2)^4 = 16$ *;*
- $(2i)^4 = 2^4 i^4 = 16(i^2)(i^2) = 16(-1)(-1) = 16$*;*
- $(-2i)^4 = (-2)^4 i^4 = 16(-1)(-1) = 16.$

Veremos agora como podemos determinar quantas e quais são as raízes enésimas de um número complexo $z \neq 0$.

Consideremos o número complexo $z \neq 0$ escrito na sua forma trigonométrica $z = |z|\,(cos\theta + isen\theta)$. Encontrar as raízes enésimas de z significa determinar todos os números complexos distintos

$$w = |w|\,(cos\alpha + isen\alpha)$$

de modo que $w^n = z$, para $n > 1$, ou seja, procurar números complexos w tais que:

$$[|w|\,(cos\alpha + isen\alpha)]^n = |z|\,(cos\theta + isen\theta),$$

ou ainda,

$$|w|^n\,(cos(n\alpha) + isen(n\alpha)) = |z|\,(cos\theta + isen\theta).$$

Da igualdade acima, temos $|w|^n = |z|$, $cos(n\alpha) = cos(\theta)$ e $sen(n\alpha) = sen(\theta)$, assim:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

Mas, é necessário que $0 \leq k \leq n - 1$.

Assim, concluímos que:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \text{para } k = 0, 1, \cdots, n - 1,$$

pois após $k = n - 1$, os valores começam a se repetir. Então, de 0 a $n - 1$, temos n raízes distintas.

Exemplo 1.9. *Vamos encontrar as raízes cúbicas de -8 em $\mathbb{C}$.*

Fazendo $z = -8$, temos que $|z| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8$ e

$$\begin{cases} cos(\theta) = \dfrac{-8}{|8|} = -1 \\ sen(\theta) = \dfrac{0}{|8|} = 0 \end{cases}, \text{ ou seja, } \theta = \pi$$

logo, $z = 8(cos\pi + isen\pi)$*. Aplicando a fórmula acima, vem:*

$$z_k = \sqrt[3]{8}\left(cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + isen\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2.$$

$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left(cos\pi + isen\pi\right) = -2$

$k = 2 \Rightarrow z_2 = 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + isen\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

Portanto, as raízes cúbicas de -8 *são* $1 + i\sqrt{3}$*,* -2 *e* $1 - i\sqrt{3}$*.*

Capítulo 2

Polinômios e Equações Algébricas

2.1 Introdução

Quando estamos resolvendo problemas na matemática, é comum nos depararmos com situações em que a leitura e a interpretação dos enunciados nos levam a pensar em expressões que permitem a resolução do problema através de uma equação. Apenas para dar um exemplo, considere um paralelepípedo em que as dimensões sejam representadas em função de x, conforme figura abaixo.

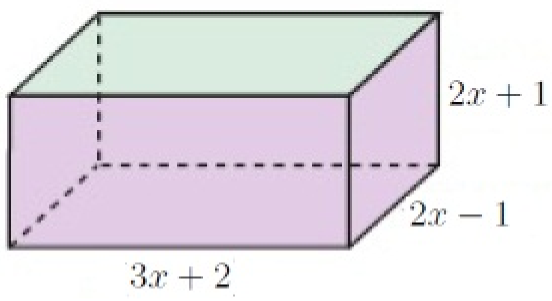

Figura 2.1: Paralelepípedo. Figura extraída de [7].

Lembrando que o volume de um paralelepípedo reto é determinado pelo produto das três dimensões, podemos representar tal volume em função de x, ou seja:

$$\begin{aligned} V &= (3x+2)(2x-1)(2x+1) = (3x+2)(4x^2-1) \\ V &= 3x(4x^2-1) + 2(4x^2-1) = 12x^3 - 3x + 8x^2 - 2 \end{aligned}$$

Expressões como essa que fornece o volume do paralelepípedo em função de x

são chamadas expressões polinomiais ou polinômios. Os polinômios não são novidade, casos mais simples são estudados no Ensino Fundamental II, onde são estudados os conceitos de monômio, binômio, polinômio e também algumas operações com eles. No 1^o ano do Ensino Médio polinômios são usados para definir as funções afins e quadráticas.

Neste capítulo, apresentamos os principais conceitos e resultados sobre polinômios que serão utilizados na resolução de equações algébricas, que é o objetivo desse trabalho.

Definição 2.1. *Um polinômio na variável complexa x é uma expressão dada por*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

em que:

• a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 *são os coeficientes do polinômio;* a_0 *é o coeficiente independente do polinômio;*

• *todos os expoentes de x são números naturais.*

O grau do polinômio é o número natural igual ao maior expoente de x, cujo termo apresenta coeficiente não nulo. Usamos a notação gr(p).

O polinômio que tem todos os seus coeficientes nulos é chamado polinômio nulo.

Exemplo 2.1.

1) $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 7$ *é um polinômio e gr(p)* = 3.

2) $q(x) = 6x^2 – 4x + 3$ *é um polinômio e gr(q)* = 2.

3) $h(x) = 2x^5 + 9x^4 – x^2 + 10$ *é um polinômio e gr(h)* = 5.

4) A expressão $2x + 3x^{-1} + x^{-1}$ *não é um polinômio, pois os expoentes de x não podem ser números negativos.*

5) A expressão $3x^2 - 5x^{\frac{1}{2}} + 3$ *também não é um polinômio, pois o expoente de x não pode ser fracionário.*

Definição 2.2. *Um polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *define uma função* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, a qual é chamada função polinomial. Sendo assim, o valor numérico de $p(x)$ em $z \in \mathbb{C}$ é o número complexo* $p(z) =$

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, *ou seja, o valor da função* p *em* z.

Exemplo 2.2. *Vamos calcular o valor numérico que o polinômio* $p(x) = 2x^3 – 3x^2 + 10x – 6$ *assume para* $x = 3$*, isto é, vamos calcular* $p(3)$*:*

$$
\begin{aligned}
p(3) &= 2(3^3) - 3(3^2) + 10 \times 3 - 6 \\
p(3) &= 2(27) - 3(9) + 30 - 6 \\
p(3) &= 54 - 27 + 30 - 6 \\
p(3) &= 51
\end{aligned}
$$

Definição 2.3. *Quando* $p(\alpha) = 0$*, dizemos que* α *é uma raiz (ou zero) do polinômio* p*, ou seja, satisfaz a equação polinomial* $p(x) = 0$.

Definição 2.4. *Dizemos que um polinômio* p *é nulo quando* p *assume o valor numérico zero para todo* $x \in \mathbb{C}$*, ou seja,* $p(x) = 0$*, para todo* $x \in \mathbb{C}$*, e escrevemos* $p = 0$*. Sendo assim, se existir* $x \in \mathbb{C}$ *tal que* $p(x) \neq 0$*, então* p *não é o polinômio nulo.*

Definição 2.5. *Dizemos que dois polinômios* p *e* q *são iguais (ou idênticos) quando as funções polinomiais que eles definem são iguais, ou seja,* $p(\alpha) = q(\alpha) \;\; \forall \alpha \in \mathbb{C}$ *e escrevemos* $p = q$.

É imediato que se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ e $q(x) = b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$ são tais que $a_i = b_i \;, \;\; \forall \;\; i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$, então $p = q$. Mais adiante, mostraremos que vale a recíproca.

2.2 Operações com polinômios

Definição 2.6. *Dados dois polinômios,* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ *e* $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$*, definimos o polinômio* $s(x) = p(x) + q(x)$ *por:*

$$s\left(x\right) = \left(a_n + b_n\right) x^n + \left(a_{n-1} + b_{n-1}\right) x^{n-1} + \cdots + \left(a_1 + b_1\right) x + \left(a_0 + b_0\right).$$

Exemplo 2.3. *Sejam* $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$*,* $q(x) = x^2 – 7x + 2$ *e* $r(x) = –2x^3 + 4x^2 – x + 2$*. Então:*

$p(x) + q(x) = (1 + 0)x^3 + (3 + 1)x^2 + (2–7)x + (1 + 2) = x^3 + 4x^2–5x + 3$
$p(x) + r(x) = (1–2)x^3 + (0 + 4)x^2 + (2–1)x + (1 + 2) = –x^3 + 7x^2 + x + 3$

Quaisquer que sejam os polinômios p, q e r, temos:

1) $p + q = q + p$ (Propriedade comutativa)

2) $(p + q) + r = p + (q + r)$ (Propriedade associativa)

3) $p + 0 = 0 + p$ (existência do elemento neutro)

4) $p + (–p) = 0$ (existência do inverso aditivo)

As duas primeiras propriedades seguem diretamente das propriedades da adição de números complexos. O polinômio nulo, $p = 0$, é o elemento neutro e dado $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, temos que -$p(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - ... - a_2x^2 - a_1x - a_0$ é seu inverso aditivo. Usamos a notação $p - q$ para representar $p + (-q)$.

Observação 2.1. *Se p e q são polinômios não nulos, então segue diretamente da definição que $gr\,(p + q) \leq \max\{gr\,(p)\,, gr\,(q)\}$.*

Exemplo 2.4. *Considerando $p(x) = 2x^3 - x + 4$ e $q(x) = 7x + 1$, temos que $p + q = 2x^3 + 6x + 5$, $gr(p) = 3$, $gr(q) = 1$ e $gr(p + q) = 3$. Se $p(x) = x^3 - x^2$ e $q(x) = -x^3$, então $(p + q)(x) = -x^2$, logo $gr(p + q) = 2 < max\,\{gr(p), gr(q)\}$.*

Definição 2.7. *Dados os polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0 = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, definimos a multiplicação desses polinômios como sendo o polinômio*

$$p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i,$$

tal que,

$$
\begin{aligned}
c_0 &= a_0b_0 \\
c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 \\
&\vdots \\
c_i &= a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_ib_0 = \sum_{i=\lambda+\mu} a_\lambda b_\mu \\
&\vdots \\
c_{n+m} &= a_nb_m.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.5. *Sejam* $p(x) = 7x^3 - 4x^2 + 9x - 1$ *e* $q(x) = 2x^3 + 1$*, então*

$p(x)q(x) = (7x^3 - 4x^2 + 9x - 1)(2x^3 + 1) = 14x^6 + 7x^3 - 8x^5 - 4x^2 + 18x^4 + 9x - 2x^3 - 1 = 14x^6 - 8x^5 + 18x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 9x - 1.$

A multiplicação de polinômios é feita observando as propriedades da multiplicação dos números complexos, ou seja, multiplicamos termo a termo, como no exemplo acima.

Quaisquer que sejam os polinômios p, q e r, vale:

1) $p(qr) = (pq)r$ (Propriedade associativa)

2) $p(q + r) = pq + pr$ (Propriedade distributiva)

3) $pq = qp$ (Propriedade comutativa)

Essas propriedades seguem diretamente das propriedades das operações em $\mathbb{C}$.

Observação 2.2. *Se* p *e* q *são dois polinômios não nulos, então segue diretamente da definição que* $gr(pq) = gr(p) + gr(q)$*.*

2.3 Divisão de polinômios

O teorema abaixo é o mais importante deste capítulo. Trata-se da versão para polinômios do teorema da divisão de números inteiros.

Teorema 2.1. *Dados os polinômios* $f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *e* $g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$*, com* $a_m \neq 0$ *e* $b_n \neq 0$*, existe um único polinômio* q *e um único polinômio* r *tais que* $f = qg + r$ *e* $gr\,(r) < gr\,(g)$ *ou* $r = 0$.

Demonstração: Vamos considerar $m \geq n$ e o monômio $\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$. Definindo o polinômio r_1 pondo $r_1(x) = f(x) - \left(\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}\right) g(x)$, temos que:

$$\begin{aligned} r_1(x) &= (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \\ &- \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= (a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \\ &- \frac{a_m x^{m-n}}{b_n}(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) + a_m x^m - \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}b_n x^n \\ &= a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &- \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0). \end{aligned}$$

Acima, notamos que $gr(r_1) < m$, já que o termo x^m foi "cortado". Vamos usar a notação $r_1(x) = c_{n_1}x^{n_1} + \cdots + c_1 x + c_0$, onde $n_1 = gr(r_1)$ e assim, estamos considerando $c_{n_1} \neq 0$.

Se $n_1 < gr(g)$ ou $r_1 = 0$, então paramos. Se não, definimos o polinômio r_2 pondo $r_2(x) = r_1(x) - \left(\frac{c_{n_1}}{b_n}x^{n_1-n}\right) g(x)$. Do mesmo modo que ocorreu com $r_1(x)$, x^{n_1} também é "cortado", logo $gr(r_2) < gr(r_1)$. Escrevemos então $r_2(x) = d_{n_2}x^{n_2} + \cdots + d_1 x + d_0$, onde $n_2 = gr(r_2)$ e, assim, $d_{n_2} \neq 0$.

Se $gr(r_2) < gr(g)$ ou $g = 0$, então paramos. Caso contrário, definimos $r_3(x) = r_2(x) - \left(\frac{d_{n_2}}{b_n}x^{n_2-n}\right) g(x)$ e repetimos o mesmo procedimento realizado acima com r_1 e r_2. Seguindo assim, iremos construir uma sucessão de polinômios $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_k$ tais que $gr(r_{k+1}) < gr(r_k)$.

Dessa forma, depois de uma quantidade finita de passos, acaberemos construindo um polinômio r_k tal que $gr(r_k) < gr(g)$ ou $r_k = 0$. Denotando por $q_0, q_1, q_2, \cdots, q_{k-1}$ os números $\frac{a_m}{b_n}, \frac{c_{n_1}}{b_n}, \frac{d_{n_2}}{b_n}, \cdots$, temos:

$$
\begin{aligned}
r_1(x) &= f(x) - (q_0x^{m-n})g(x)\\
r_2(x) &= r_1(x) - (q_1x^{n_1-n})g(x)\\
r_3(x) &= r_2(x) - (q_2x^{n_2-n})g(x)\\
&\vdots\\
r_k(x) &= r_{k-1}(x) - (q_{k-1}x^{n_k-n})g(x)
\end{aligned}
$$

Somando membro a membro cada uma das k equações acima, após os cancelamentos, obtemos:

$$\underbrace{r_k(x)}_{r(x)} = f(x) - (\underbrace{q_0x^{m-n} + q_1^{n_1-n} + q_2x^{n_2-n} + \cdots + q_{k-1}x^{k-n}}_{q(x)})g(x),$$

o que garante a existência dos polinômios q e r, com $gr(r) < gr(g)$ ou $r = 0$, tais que $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, para todo $x \in \mathbb{C}$.

Para provar as unicidades de q e r, suponha que existem polinômios q_1, q_2, r_1 e r_2, com $gr(r_1) < gr(g)$ ou $r_1 = 0$ e $gr(r_2) < gr(g)$ ou $r_2 = 0$ tais que $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$ e $f(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$.

Suponha $q_1 \neq q_2$, assim $q_1 - q_2$ não é o polinômio nulo, logo $(q_1 - q_2)g$ também não é nulo e assim:

$$gr\left[(q_1 - q_2)\, g\right] = gr\,(q_1 - q_2) + gr(g) \geqslant gr(g).$$

Como $q_1g + r_1 = q_2g + r_2$, temos $(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$, sendo assim $r_2 - r_1$ não é nulo, logo existe $gr(r_2 - r_1)$ e sabemos que $gr(r_2 - r_1) \leq max\,\{gr(r_2), gr(r_1)\} < gr(g)$, mas por outro lado, $gr\,[(q_1 - q_2)g] \geq gr(g)$, logo $gr(g) > gr(g)$, o que é um absurdo. Dessa forma, devemos ter $q_1 = q_2$ e consequentemente, $r_1 = r_2$.

■

Observação 2.3. *Quando $r = 0$, dizemos que f é divisível por g, ou que a divisão é exata.*

Observação 2.4. *Os polinômios q e r são chamados quociente e resto da divisão de f por g.*

2.4 Divisão por $x - a$

Para saber o que ocorre ao dividirmos um polinômio $p(x)$ por um binômio do tipo $x - a$, $a \in \mathbb{R}$, vamos examinar, inicialmente, um caso particular, dividindo $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ pelo binômio $x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + \ \ x - 5 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x^2 \qquad\ & x^2 - x \\ \hline - x^2 + x - 5 & \\ x^2 - x & \\ \hline -5 & \end{array}$$

Notamos nesta divisão que o resto r é -5 e que $p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 1 - 5 = -5$. Será que ao dividirmos um polinômio qualquer $p(x)$ por um binômio do tipo $x - a$ sempre ocorrerá $r = p(a)$?

De fato, como $gr(x - a) = 1$, então $r = 0$ ou $gr(r) = 0$, ou seja, r é um polinômio constante. Desse modo, se $q(x)$ e r são tais que $f(x) = (x - a)q(x) + r$, então $f(a) = (a - a)q(a) + r = r$. Com isso, fica demonstrado o seguinte:

Teorema 2.2. *O resto r da divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio do tipo $x - a$ é o valor numérico de $p(x)$ para $x = a$.*

Por exemplo, o resto da divisão de $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ por $x - 2$ é $p(2) = 2 \times 2^4 - 5 \times 2^3 + 2^2 - 3 \times 2 + 4 = -6$.

Uma consequência imediata do teorema acima (o qual é conhecido como teorema do resto) é o teorema de D'Alembert (Jean Le Rond D'Alembert, matemático francês, $1717 - 1783$), que diz:

Teorema 2.3. *Um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $p(a) = 0$.*

Por exemplo, o polinômio $p(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 4$ é divisível por $x-1$, pois $p(1) = (1)^5 + 3 \times (1)^4 + 2 \times (1)^3 - (1)^2 - 1 - 4 = 1 + 3 + 2 - 1 - 1 - 4 = 0$.

Observação 2.5. *Considere $p(x)$ um polinômio de grau $n \geq 1$ e suponha que a_1, a_2, ..., a_s são as raízes de p, duas a duas distintas. Segue do teorema de D'Alembert* *que existe $q_1(x)$ tal que $p(x) = (x - a_1)q_1(x)$. Como a_2 também é raiz temos $0 = p(a_2) = (a_2 - a_1)q_1(a_2)$. Como $a_2 \neq a_1$, existe $q_2(x)$ tal que $q_1(x) = (x - a_2)q_2(x)$, logo, $p(x) = (x - a_1)(x - a_2)q_2(x)$.*

Seguindo desta forma, podemos encontrar um polinômio $q_s(x)$ tal que $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_r)q_s(x)$. Note que

$$\begin{aligned} gr\left[(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_r)q_s(x)\right] &= \\ gr(x - a_1) + \cdots + gr(x - a_r) + gr(q_s(x)) &= r + gr(q_s(x)), \end{aligned}$$

logo $n = r + gr(q_s(x))$, portanto $r \leq n$, ou seja, se $p(x)$ é de grau n, então $p(x)$ tem, no máximo, n raízes.

Observação 2.6. *Um polinômio constante $p(x) = c$, com $c \neq 0$, tem grau 0 e o mesmo não possui raiz. Sejam p e q dois polinômios tais que $p(\alpha) = q(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, ou seja, $p = q$. Sendo $a_n, ..., a_1, a_0$ e $b_n, ..., b_1, b_0$ os coeficientes de p e q respectivamente, os coeficientes do polinômio $p - q$ são $a_n - b_n, ..., a_1 - b_1$ e $a_0 - b_0$. Se $a_k - b_k \neq 0$ para algum $k \in \{0, 1, ..., n\}$, então o grau de $p - q$ existe e é algum número s no conjunto $\{0, 1, 2, ..., n\}$, logo $p - q$ tem no máximo s raízes. Por outro lado, como $p(\alpha) = q(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$, temos que $p - q$ possui infinitas raízes. A partir dessa contradição, podemos concluir que se $p = q$, então seus coeficientes são ordenadamente iguais.*

2.5 Encontrando raízes

Já vimos que se a é uma raiz de $p(x)$, então existe um polinômio $q(x)$ tal que $p(x) = (x - a)q(x)$. Assim, $gr(q(x)) = gr(p) - gr(x - a) = gr(p) - 1$. As demais raízes de $p(x)$ são as raízes de $q(x)$.

Exemplo 2.6. *Vamos resolver a equação $x^3 + x^2 - 2 = 0$. Notemos que a soma dos coeficientes da equação é igual a zero: $1 + 1 - 2 = 0$. Isso significa que uma das soluções da equação $x^3 + x^2 - 2 = 0$ é 1. Então, dividindo $x^3 + x^2 - 2$ por $x - 1$,* *obtemos quociente* $x^2 + 2x + 2$ *e resto zero:*

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + x^2 - 2 & \quad\quad x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 + x^2 & x^2 + 2x + 2 \\ \cline{1-1}
2x^2 - 2 & \\
-2x^2 + 2x & \\ \cline{1-1}
2x - 2 & \\
-2x + 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

As demais raízes são as soluções da equação $x^2 + 2x + 2 = 0$. *Usando a fórmula resolutiva da equação do* 2^o *grau,*

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

Portanto, as raízes do polinômio $x^3 + x^2 - 2$ *são* 1, $(-1 + i)$ *e* $(-1 - i)$.

Pode ocorrer de a também ser raiz de $q(x)$. Neste caso, temos que existe $q_1(x)$ tal que $p(x) = (x - a)^2 q_1(x)$. Motivado por isso, define-se a multiplicidade de uma raiz a de $p(x)$ como sendo o maior número natural k tal que $(x - a)^k$ divide $p(x)$.

Exemplo 2.7. *Vamos resolver a equação* $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$, *sabendo que* 3 *é uma de suas raízes.*

Dividindo $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$ *por* $x - 3$, *obtemos:*

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 - 3x + 18 & \quad\quad x - 3 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 3x^2 & x^2 - x - 6 \\ \cline{1-1}
-x^2 - 3x + 18 & \\
x^2 - 3x & \\ \cline{1-1}
-6x + 18 & \\
6x - 18 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

As demais raízes são as soluções da equação $x^2 - x - 6 = 0$. *Usando a fórmula resolutiva da equação do* 2^o *grau, obtemos:*

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Portanto, as raízes do polinômio $x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ são 3, -2 e 3. Isso mostra que 3 é raiz de multiplicidade 2.

Diferente do que ocorre em $\mathbb{R}$, todo polinômio em $\mathbb{C}$ possui raiz em $\mathbb{C}$, ou seja, o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos é algebricamente fechado. Isso é exatamente o que diz o famoso teorema fundamental da álgebra, cuja primeira demonstração é devida a Gauss (veja [11, 13]).

Existem várias demonstrações desse teorema, porém todas usam algum resultado que não é considerado da área de álgebra. Segue dele que se $p(x)$ é um polinômio de grau n em $\mathbb{C}$, então $p(x)$ tem exatamente n raízes (contadas suas multiplicidades) e pode ser decomposto como $p(x) = \alpha(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, onde $a_1, a_2, \cdots$, a_n são suas raízes (não necessariamente duas a duas distintas) e α é uma constante.

Exemplo 2.8. *Vamos resolver a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, sabendo que 1 é uma de suas soluções.*

Pelo fato de 1 ser raiz, o polinômio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ é divisível por $x - 1$. Efetuando a divisão de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ por $x - 1$, obtemos quociente $q(x) = x^2 - 5x + 6$ e resto 0. A equação dada pode, então, ser escrita como $(x^2 - 5x + 6)(x - 1) = 0$ e as outras raízes podem ser calculadas resolvendo-se a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Usando a fórmula resolutiva da equação do 2^o grau, encontramos 2 e 3. Portanto, as soluções do polinômio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ são 1, 2 e 3 e assim $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Exemplo 2.9. *Vamos construir um polinômio de 3^o grau cujas raízes são 1, 3 e 4. Seja $p(x)$ o polinômio procurado. Pelo que vimos acima a polinômio $p(x) = a_n(x-1)(x-3)(x-4)$, onde $a_n \neq 0$, é de grau 3 e tem as raízes 1, 3 e 4. Escolhendo, por exemplo, $a_n = 1$, temos que $p(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)$, donde segue $p(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$.*

Visto isso, já sabemos que todo polinômio possui raiz em $\mathbb{C}$ e já sabemos até quantas raízes possui, porém, com excessão dos polinômios de grau 2 para os quais dispomos da famosa fórmula de Bhaskara, não temos um método muito eficiente para encontrarmos as raízes. Mesmo no exemplo 2.7, usamos um método que dependia do conhecimento prévio de pelo menos uma das raízes, pois a partir dela, para encontrar as raízes de $p(x)$ tivemos que encontrar as raízes de um outro polinômio $(q(x))$ que tem grau menor do que o grau de $p(x)$.

No que segue, vamos ver alguns resultados sobre raízes de polinômios.

Teorema 2.4. *Se um número complexo $z = a + bi$ é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz desse polinômio.*

Demonstração: Considere o polinômio $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, com $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $z = a + bi$ uma de suas raízes, ou seja,

$$p(z) = 0 \;\Rightarrow\; a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Como a igualdade é verdadeira, permanecerá verdadeira, considerando membro a membro o conjugado:

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{0} = 0$$

Pelo que já foi visto, o conjugado de uma soma é a soma dos conjugados, logo:

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$$

e como o conjugado de um produto é o produto dos conjugados, então

$$\overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$$

e finalmente, como o conjugado de um número real é o próprio número, então

$$\underbrace{a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0}_{p(\overline{z})} = 0$$

Ou seja, $p(\overline{z}) = 0$, o que mostra que $\overline{z}$ é raiz de $p(x) = 0$.

■

Segue desse teorema que número de raízes complexas (com parte imaginária não nula) de um polinômio com coeficientes reais é sempre par, logo, todo polinômio com coeficientes reais e grau ímpar admite ao menos uma raiz real.

Exemplo 2.10. *Se um polinômio com coeficientes reais tem como raízes* $3, -2i$ *e* $1+i$*, então, necessariamente, tem duas outras raízes* $2i$ *e* $1-i$*. Assim, o menor grau que esse polinômio pode ter é* 5*.*

Exemplo 2.11. *Vamos obter o conjunto solução da equação* $x^3-7x^2+17x-15=0$*, sabendo que* $2+i$ *é uma das raízes do polinômio* $x^3-7x^2+17x-15$*.*

Como $2+i$ *é raiz, então pelo teorema anterior,* $2-i$ *também é raiz, e o polinômio dado é divisível por* $[x-(2+i)][x-(2-i)] = (x-2)^2 - i^2 = x^2-4x+5$*.*

Efetuando a divisão, temos:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 7x^2 + \ \ 17x - 15 & x^2-4x+5 \\ \cline{2-2} -x^3+4x^2-5x & \qquad\quad x-3 \\ \cline{1-1} -3x^2+12x-15 & \\ 3x^2-12x+15 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

A outra raiz é a solução da equação $x-3=0$*, ou seja,* $x=3$*. Portanto,* $S=\{2+i, 2-i, 3\}$*.*

O teorema a seguir apresenta candidatos a raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros.

Teorema 2.5. *Considere a equação polinomial com coeficientes inteiros*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

$a_n \neq 0$*. Se o racional* $\dfrac{p}{q}$*,* $p \in \mathbb{Z}$ *e* $q \neq 0$ *(*p *e* q *primos entre si) é solução dessa equação, então* p *é divisor de* a_0 *e* q *é divisor de* a_n*.*

Demonstração: Como $\dfrac{p}{q}$ é raiz da equação, então:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros por q^n, vem:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \quad (2)$$

Isolando $a_n p^n$ e colocando q em evidência em (2), vem:

$$a_n p^n = -q \left(\underbrace{a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}}_{\alpha} \right) \qquad (3)$$

Isolando $a_0 q^n$ e colocando p em evidência em (2), vem:

$$a_0 q^n = -p \left(\underbrace{a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}}_{\beta} \right) \qquad (4)$$

Como $a_0, a_1, \cdots, a_n$, p e q são todos inteiros, segue que α e β também são, logo $a_n p^n = -q\alpha$ e $a_0 q^n = -p\beta$, ou seja, q divide $a_n p^n$ e p divide $a_0 q^n$, portanto, como p^n e q (assim como q^n e p) são primos entre si, podemos concluir que q divide a_n e p divide a_0.

■

Observação 2.7. *Segue do teorema acima que se um polinômio com coeficientes inteiros tiver um número inteiro z como raiz, então z deve dividir o a_0.*

O teorema acima não nos garante a existência de raízes racionais de uma equação de coeficientes inteiros. Apenas, em caso de existirem raízes racionais, ele nos exibe todas as possibilidades para tais raízes.

Exemplo 2.12. *Vamos resolver a equação $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x - 6 = 0$, sabendo que pelo menos uma de suas soluções é racional.*

A equação tem coeficientes inteiros com $a_4 = 2$ e $a_0 = -6$. As possíveis raízes racionais são do tipo $\frac{p}{q}$, sendo p divisor de -6 e q divisor de 2. Logo, $p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$ e $q \in \{1, 2, \}$. Então, as soluções racionais da equação dada pertencem ao conjunto $\left\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$. Testando cada um dos 12 elementos do conjunto obtido, concluímos que as soluções racionais são $-\frac{3}{2}$ e 1.

Primeiramente dividimos $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x - 6$ *por* $x + \frac{3}{2}$.

$$
\begin{array}{r|r}
2x^4 - 3x^3 - x^2 + \ \ 8x - 6 & x + \frac{3}{2} \\ \cline{2-2}
-2x^4 - 3x^3 & 2x^3 - 6x^2 + 8x - 4 \\ \cline{1-1}
- 6x^3 - x^2 + 8x - 6 & \\
6x^3 + 9x^2 & \\ \cline{1-1}
8x^2 + 8x - 6 & \\
-8x^2 - 12x & \\ \cline{1-1}
- 4x - 6 & \\
4x + 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

obtendo um quociente $2x^3 - 6x^2 + 8x - 4$ *e um resto* 0.

Em seguida, dividimos $2x^3 - 6x^2 + 8x - 4$ *por* $x - 1$.

$$
\begin{array}{r|r}
2x^3 - 6x^2 + \ \ 8x - 4 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 2x^2 & 2x^2 - 4x + 4 \\ \cline{1-1}
- 4x^2 + 8x - 4 & \\
4x^2 - 4x & \\ \cline{1-1}
4x - 4 & \\
-4x + 4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

As demais raízes do polinômio são as soluções da equação $2x^2 - 4x + 4 = 0$. *Então, aplicando a fórmula resolutiva da equação do* 2^o *grau obtemos as raízes* $1+i$ *e* $1-i$.

Portanto, as raízes da equação $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x - 6 = 0$ *são* $-\frac{3}{2}, 1, 1+i, 1-i$.

Observação 2.8. *Segue imediatamente do teorema acima que se* z *é uma raiz inteira de um polinômio com coeficientes inteiros, então* z *divide* a_0.

Exemplo 2.13. *Ache as raízes inteiras de* $x^3 - 15x^2 + 54x - 54 = 0$.

Temos que os coeficientes são inteiros, logo as possíveis raízes inteiras da equação, são os divisores de -54*, ou seja, pertencem ao conjunto*

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18, 27, -27, 54, -54.$$

Testando esses valores em $p(x) = x^3 - 15x^2 + 54x - 54$ *encontramos:* $p(1) \neq 0$*,* $p(-1) \neq 0$*,* $p(2) \neq 0$*,* $p(-2) \neq 0$*, porém,* $p(3) = 0$*. Isso significa que* 3 *é uma das raízes da equação. Para encontrar as outras, basta dividir* $x^3 - 15^2 + 54x - 54 = 0$ *por* $x - 3$*.*

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 15x^2 + \ \ 54x - 54 & \qquad\quad x - 3 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 3x^2 & x^2 - 12x + 18 \\ \hline
-\ 12x^2 + 54x - 54 & \\
12x^2 - 36x & \\ \hline
18x - 54 & \\
-18x + 54 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

As demais raízes do polinômio $x^3 - 15x^2 + 54x - 54$ *são as raízes da equação* $x^2 - 12x + 18 = 0$*. Então, aplicando a fórmula resolutiva da equação do* 2^o *grau obtemos as raízes* $6 + 3\sqrt{2}$ *e* $6 - 3\sqrt{2}$*, que não são inteiras. Portanto, a única raiz inteira é o número* 3*.*

Observação 2.9. *Como falado anteriormente, se já conhecemos uma raiz de um polinômio* f *podemos, por meio da divisão, encontrar um polinômio* q *com grau menor do que o de* f *cujas raízes são as outras raízes de* f*. Isso nos dá um método interessante, embora não aplicável a todas as situações, para encontrar as raízes de um polinômio.*

Capítulo 3

Fórmulas de Cardano-Tartaglia

Começamos este capítulo lembrando alguns fatos sobre as equações do 2^o grau.

Definição 3.1. *Uma equação do segundo grau é uma equação redutível a forma* $ax^2 + bx + c = 0$*, na qual* a*,* b *e* c *são constantes conhecidas* ($a \neq 0$) *e* x *é a incógnita.*

A conhecida fórmula de Bhaskara para resolver esse tipo de equação, a qual é estudada no 9^o ano do ensino fundamental pode ser deduzida utilizando-se técnicas simples, como o completamento de quadrados:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \;&\Rightarrow\; a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c = 0 \\
\Rightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = 0 \;&\Rightarrow\; a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \\
\Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \;&\Rightarrow\; a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \;&\Rightarrow\; x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
\Rightarrow x \;&=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Dessa maneira, a equação dada possui as soluções

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Note que:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Essas relações acima são conhecidas como as relações de Girard.

Considere uma equação do 2^o grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ e sejam x_1 e x_2 suas soluções. Assim:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Com isso, vemos que ao dividir os dois membros da equação por a obtemos a soma S e o produto P das duas raízes .

Observação 3.1. Quando os coeficientes da equação do 2^o grau são números simples, fica fácil encontrar dois números conhecendo sua soma e seu produto. Só para dar um exemplo, considere a equação $3x^2 - 8x + 5 = 0$. Se fossemos aplicar as relações de Girard na equação dada, vemos que não é tão simples encontrarmos dois números cuja soma seja $\frac{8}{3}$ e cujo produto seja $\frac{5}{3}$.

Resolvemos assim: Primeiro passei o coeficiente $a = 3$ multiplicando o coeficiente c, transformando a equação inicial em outra equação, veja:

$$3x^2 - 8x + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 8x + 15 = 0$$

Depois apliquei as relações de Girard, $x_1 + x_2 = -\frac{(-8)}{1} = 8$ e $x_1 x_2 = \frac{15}{1} = 15$, que nos dá como raízes 3 e 5.

Por fim, dividi cada uma das raízes encontradas por 3, obtendo $\frac{3}{3} = 1$ e $\frac{5}{3}$, que são as soluções da equação $3x^2 - 8x + 5 = 0$.

A justificativa desse procedimento é que toda equação do 2^o grau $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$, pode ser escrita na forma $x^2 - Sx + P = 0$, onde $S = \frac{-b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$.

Assim, para a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ e cujas raízes são r_1 e r_2, tem-se que $r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a}$ e $r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}$.

Para a equação com a multiplicando o coeficiente c, $x^2 + bx + ac = 0$, e que tem raízes m e n, tem-se que $m + n = -b$ e $mn = ac$.

Comparando esses dois resultados, temos que $r_1 + r_2 = \dfrac{m+n}{a}$ e $r_1 r_2 = \dfrac{mn}{a^2}$.

Fazendo $\dfrac{m}{a} = x$ e $\dfrac{n}{a} = y$, obtemos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 &= x + y \\ r_1 r_2 &= xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = r_1 + r_2 - x \\ r_1 r_2 = xy \end{cases}$$

substituindo y na segunda equação, obtemos:

$$r_1 r_2 = x\left(r_1 + r_2 - x\right) \Rightarrow r_1 r_2 = x r_1 + x r_2 - x^2 \Rightarrow x^2 - \left(r_1 + r_2\right) x + r_1 r_2 = 0.$$

Resolvendo essa equação do 2^o grau, obtemos:

$$x = \frac{\left(r_1 + r_2\right) \pm \sqrt{\left(r_1 - r_2\right)^2}}{2}$$

ou seja,

$$x_1 = \frac{r_1 + r_2 + r_1 - r_2}{2} = \frac{2r_1}{2} = r_1 \text{ e } x_2 = \frac{r_1 + r_2 - r_1 + r_2}{2} = \frac{2r_2}{2} = r_2.$$

Segue daí que se $x = r_1$, então $y = r_2$ e se $x = r_2$, então $y = r_1$. Ou seja, as raízes da equação original são $\dfrac{m}{a}$ e $\dfrac{n}{a}$.

3.1 A equação do 3^o grau

Nesta seção apresentaremos um método para resolver equações polinomiais de grau 3 introduzido em [12], com o qual também, podemos dedizir a fórmula de Cardano-Tartaglia para essas equações.

No início deste capítulo vimos que uma equação do 2^o grau $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ é equivalente a equação $x^2 - Sx + P = 0$, na qual S é a soma e P é o produto das duas raízes da equação original. Sendo x_1 e x_2 tais raízes, defina $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$.

Assim:

$$
\begin{aligned}
y^3 &= (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})^3 \\
y^3 &= x_1 + 3\sqrt[3]{x_1^2}\sqrt[3]{x_2} + 3\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2^2} + x_2 \\
y^3 &= x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1^2 x_2} + 3\sqrt[3]{x_1 x_2^2} \\
y^3 &= x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1 x_2}\,(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \\
y^3 &= 3\sqrt[3]{P}y + S \\
y^3 &- 3\sqrt[3]{P}y - S = 0
\end{aligned}
$$

Ou seja, se x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 - Sx + P = 0$, então $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ é solução da equação $y^3 - 3\sqrt[3]{P}y - S = 0$.

Exemplo 3.1. *Considere a equação $y^3 - 6y - 9 = 0$. Note que esta equação pode ser reescrita como $y^3 - 3\sqrt[3]{8}y - 9 = 0$. Para $P = 8$ e $S = 9$, temos que $x^2 - Sx + P = 0$ se transforma em $x^2 - 9x + 8 = 0$.*

Esta última equação tem por raízes os números $x_1 = 8$ e $x_2 = 1$. Como já vimos, cada um desses números possui 3 raízes cúbicas complexas que são: 2, $-1+\sqrt{3}i$ e $-1-\sqrt{3}i$, para $x_1 = 8$, e 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, para $x_2 = 1$.

Note que $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{P} = \sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}$ e na equação estamos considerando $\sqrt[3]{8} = 2$, dessa forma, se pegarmos um valor z para raiz cúbica de 8 e um valor t para raiz cúbica de 1 tais que $zt = 2$, então $z + t$ é raiz de $y^3 - 6y - 9 = 0$. Note que:

- $2 \times 1 = 2$
- $2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i \neq 2$
- $2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i \neq 2$
- $\left(-1 + \sqrt{3}i\right)(1) = \left(-1 + \sqrt{3}i\right) \neq 2$
- $\left(-1 + \sqrt{3}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-1 - \sqrt{3}i\right) \neq 2$
- $\left(-1 + \sqrt{3}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2$
- $\left(-1 - \sqrt{3}i\right)(1) = \left(-1 - \sqrt{3}i\right) \neq 2$

- $\left(-1-\sqrt{3}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2$
- $\left(-1-\sqrt{3}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i\neq 2$

Dessa forma, as raízes são:

$2+1=3$, $\left(-1+\sqrt{3}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ *e* $\left(-1-\sqrt{3}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Consideremos a equação geral do 3^o grau, a qual, sem perda de generalidade, podemos supor que seja da forma $x^3+ax^2+bx+c=0$.

Acima, vimos como resolver uma equação de 3^o grau na qual o termo de grau 2 não aparece. Vamos então fazer uma substituição, mudança de variável, na equação $x^3+ax^2+bx+c=0$ que faça esse termo ser anulado. Primeiro, vamos tentar uma mudança do tipo $x=y+d$:

$$\begin{aligned}
(y+d)^3+a\,(y+d)^2+b\,(y+d)+c=0 &\Rightarrow\\
y^3+3y^2d+3yd^2+d^3+a\left(y^2+2yd+d^2\right)+by+bd+c=0 &\Rightarrow\\
y^3+3y^2d+3yd^2+d^3+ay^2+2ady+ad^2+by+bd+c=0 &\Rightarrow\\
y^3+(3d+a)\,y^2+\left(3d^2+2ad+b\right)y+d^3+ad^2+bd+c=0&.
\end{aligned}$$

Para que não figure o termo em y^2, basta termos $3d+a=0$, ou seja, $d=-\dfrac{a}{3}$.
Dessa maneira, substituindo o valor de d na equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
y^3+\left[3\left(-\frac{a}{3}\right)^2+2a\left(-\frac{a}{3}\right)+b\right]y \;+\; \left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c=0\\
\Rightarrow y^3+\left(\frac{a^2}{3}-\frac{2a^2}{3}+b\right)y \;+\; \left(-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{ab}{3}+c\right)=0\\
\Rightarrow y^3+\left(-\frac{a^2}{3}+b\right)y \;+\; \left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)=0\\
\Rightarrow y^3+py+q \;=\; 0
\end{aligned}$$

onde $p=-\dfrac{a^2}{3}+b$ e $q=\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c$.

Então para encontrar as raízes da equação $x^3+ax^2+bx+c=0$, basta determinar as raízes da equação $y^3+py+q=0$ e somá-las com $-\dfrac{a}{3}$.

Comparando as equações $y^3-3\sqrt[3]{P}y-S=0$ e $y^3+py+q=0$, obtemos:

$$\begin{cases} -3\sqrt[3]{P}=p \Rightarrow \sqrt[3]{P}=-\dfrac{p}{3} \Rightarrow P=-\dfrac{p^3}{27} \\ q=-S \end{cases}$$

Dessa maneira, se x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2-Sx+P=0$, ou seja, de $x^2+qx-\dfrac{p^3}{27}=0$ então $y=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$ é raiz de $y^3+py+q=0$. As raízes da equação $x^2+qx-\dfrac{p^3}{27}=0$ são $x_1=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$ e $x_2=-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$, logo:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Essa foi a solução de Cardano para encontrar uma das raízes de uma equação cúbica da forma $y^3+py+q=0$.

Observação 3.2. *Dados x_1 e x_2 raízes de $x^2+qx-\dfrac{p^3}{27}=0$, existem 3 valores possíveis para $\sqrt[3]{x_1}$ e 3 para $\sqrt[3]{x_2}$, porém, nem sempre o produto de um valor de $\sqrt[3]{x_1}$ por um de $\sqrt[3]{x_2}$ será igual ao valor de $\sqrt[3]{x_1x_2}=\sqrt[3]{P}$ que aparece na equação $y^3-3\sqrt[3]{P}y-S=0$, ou seja, devemos ter $\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}=-\dfrac{p}{3}$.*

No exemplo 3.1, tivemos 3 valores para $\sqrt[3]{x_1}$ e 3 para $\sqrt[3]{x_2}$, porém apenas 3 pares (dentre os 9 possíveis) foram tais que o produto $\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}$ era igual ao valor de $\sqrt[3]{P}$ que aparecia na equação (no caso, esse valor era 2), cada um desses 3 pares nos dava uma das raízes de $y^3-3\sqrt[3]{P}y-S=0$. Dessa forma, a solução encontrada por Cardano, a qual ficou conhecida como fórmula de Cardano, nos fornece todas as raízes de $y^3-3\sqrt[3]{P}y-S=0$.

Exemplo 3.2. *Vamos resolver a equação $x^3-6x-40=0$.*

Segundo o método descrito acima, temos que $p=-6$ e $q=-40$. Então apli-

cando a fórmula, obtemos:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{40}{2}+\sqrt{\frac{(-40)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{40}{2}-\sqrt{\frac{(-40)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}} \\ &= \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Note que um dos valores de $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$ *é* $2+\sqrt{2}$, *pois* $\left(2+\sqrt{2}\right)^3 = 20+14\sqrt{2}$ *e um dos valores de* $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ *é* $2-\sqrt{2}$, *pois* $\left(2-\sqrt{2}\right)^3 = 20-14\sqrt{2}$.

Como o produto desses dois valores é $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right) = 4-2 = 2 = -\left(-\frac{6}{3}\right) = -\dfrac{p}{3}$, *temos que* $x = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$ *é uma das raízes de* $x^3-6x-40=0$.

Para encontrar as outras, podemos calcular todos os valores de $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}$ *e* $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ *e ver para quais pares o produto seria igual a* 2 *ou podemos usar o método descrito no capítulo 2 e efetuarmos a divisão de* $x^3-6x-40=0$ *por* $x-4$:

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x\ \ -40 & x-4 \\ \cline{2-2} -x^3+4x^2 & x^2+4x+10 \\ \hline 4x^2-6x-40 & \\ -4x^2+16x & \\ \hline 10x-40 & \\ -10x+40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Resolvendo a equação $x^2+4x+10=0$, *obtemos* $x = \dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times10}}{2\times1} = \dfrac{-4\pm\sqrt{16-40}}{2} = \dfrac{-4\pm\sqrt{-24}}{2} = \dfrac{-4\pm2\sqrt{6}i}{2} = -2\pm i\sqrt{6}$.

Dessa maneira, as três raízes são 4, $-2+\sqrt{6}i$ *e* $-2-\sqrt{6}i$.

Exemplo 3.3. *Vamos encontrar as raízes da equação* $x^3-6x^2+6x-5=0$.

Essa equação não está na forma $x^3+px+q=0$, *então não podemos aplicar diretamente a fórmula de Cardano. Na equação* $x^3-6x^2+6x-5=0$, *temos que* *os coeficientes são* $a = -6$, $b = 6$, $c = -5$. *Com isso, temos que:*

$$p = -\frac{a^2}{3} + b = -\frac{(-6)^2}{3} + 6 = -12 + 6 = -6$$
$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \frac{2(-6)^3}{27} - \frac{(-6)6}{3} - 5 = -16 + 12 - 5 = -9$$

Agora vamos encontrar as raízes da equação $y^3 - 6y - 9 = 0$, *aplicando a fórmula de Cardano, obtemos:*

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - 8}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - 8}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} \\ &= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Dessa maneira, 3 *é uma das raízes e para encontrar as outras duas, basta dividir* $y^3 - 6y - 9 = 0$ *por* $y - 3$.

$$\begin{array}{r|l} y^3 - 6y \quad - 9 & \qquad y - 3 \\ \cline{2-2} -y^3 + 3y^2 & y^2 + 3y + 3 \\ \hline 3y^2 - 6y - 9 & \\ -3y^2 + 9y & \\ \hline 3y - 9 & \\ -3y + 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

As outras raízes de $y^3 - 6y - 9 = 0$ são as raízes de $y^2 + 3y + 3 = 0$, ou seja, $\dfrac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

Assim, as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$ são do tipo $x = y - \dfrac{a}{3}$, em que

para $y = 3$, temos $x = 3 - (\dfrac{-6}{3}) = 3 + 2 = 5$.

para $y = \dfrac{-3+\sqrt{3}i}{2}$, temos $x = \dfrac{-3+\sqrt{3}i}{2} + 2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

para $y = \dfrac{-3-\sqrt{3}i}{2}$, temos $x = \dfrac{-3-\sqrt{3}i}{2} + 2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$ são:

$$5, \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

3.2 A equação do 4^o grau

3.2.1 As relações de Girard para equações do 3^o grau

Considere a equação do 3^o grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, e seja x_1, x_2 e x_3 suas raízes. Pelo que foi visto no capítulo 2, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
ax^3 + bx^2 + cx + d &= a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right) \\
x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} &= \left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right) \\
x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} &= x^3 - \left(x_1 + x_2 + x_3\right)x^2 + \left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right)x - x_1x_2x_3
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{cases}
-\left(x_1 + x_2 + x_3\right) = \dfrac{b}{a} \\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\
-x_1x_2x_3 = \dfrac{d}{a}
\end{cases}$$

Temos, então, que as raízes x_1, x_2 e x_3 da equação 3^o grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, são tais que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Exemplo 3.4. *Vamos resolver a equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$, sabendo que uma das raízes é igual à soma das outras duas.*

Das relações de Girard, podemos escrever:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{(-4)}{1} = 4 \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{-6}{1} = -6 \end{cases}$$

Como uma das raízes é igual à soma das outras duas, então temos $x_1 = x_2 + x_3$. Substituindo esse valor nas equações acima, obtemos:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_2 + x_3 = 4 \\ (x_2 + x_3)\, x_2x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ (x_2 + x_3)\, x_2x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ (x_2 + x_3)\, x_2x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2x_3 = -3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $x_2 = -1$ e $x_3 = 3$. Voltando para $x_1 = x_2 + x_3$, temos $x_1 = -1 + 3 = 2$.

Portanto, as raízes da equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ são -1, 2 e 3.

3.2.2 Resolvendo a equação do 4^o grau

Para encontrarmos as soluções da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, vamos considerar uma equação auxiliar do 3^o grau $x^3 - Sx^2 + S_dx - P = 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3 e que satisfazem $x_1 + x_2 + x_3 = S$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = S_d$ e $x_1x_2x_3 = P$. Defina $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3},\ ou\ seja, \\ y^2 &= (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2\left(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}\right) \end{aligned}$$

e assim:

$$\frac{y^2 - S}{2} = \sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}$$

elevando ao quadrado ambos os lados dessa igualdade obtemos:

$$\frac{y^4 - 2Sy^2 + S^2}{4} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}\right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} y^4 - 2Sy^2 + S^2 &= 4\left[x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}\right)\right] \\ &= 4\left(S_d + 2\sqrt{P}y\right) \\ &= 4S_d + 8\sqrt{P}y \end{aligned}$$

E, finalmente:

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + S^2 - 4S_d = 0. \quad (1)$$

Dada a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, façamos uma substituição $x = y + t$ de modo que a nova equação em y não tenha o termo em y^3.

$$\begin{aligned} (y+t)^4 + a(y+t)^3 + b(y+t)^2 + c(y+t) + d &= 0 \Rightarrow \\ y^4 + 3y^3t + 3y^2t^2 + yt^3 + y^3t + 3y^2t^2 + \\ t^4 + ay^3 + 3aty^2 + 3at^2y + at^3 + by^2 + 2bty + bt^2 + cy + ct + d &= 0 \Rightarrow \\ y^4 + (4t + a)y^3 + (6t^2 + 3at + b)y^2 + \\ (4t^3 + 3at^2 + 2bt + c)y + (t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d) &= 0 \end{aligned}$$

Para que a equação acima não tenha o termo em y^3, devemos ter $t = -\frac{a}{4}$. Assim, a equação fica

$$y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0, \quad (2)$$

onde $k_1 = 6t^2 + 3at + b$, $k_2 = 4t^3 + 3at^2 + 2bt + c$ e $k_3 = t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d$.

Assim, comparando as equações (1) e (2), obtemos:

$-2S = k_1$, ou seja, $S = -\frac{k_1}{2}$ (3)

$-8\sqrt{P} = k_2$, ou seja, $\sqrt{P} = -\frac{k_2}{8}$ o que implica em $P = \frac{(k_2)^2}{64}$ (4)

e $S^2 - 4S_d = k_3$, ou seja, $S_d = \frac{(k_1)^2 - 4k_3}{16}$. (5)

Assim, substituindo (3), (4) e (5) na equação $x^3 - Sx^2 + S_dx - P = 0$, obtemos

$$x^3 + \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{(k_1)^2 - 4k_3}{16}x - \frac{(k_2)^2}{64} = 0.$$

Resolvendo essa equação obtemos raízes x_1, x_2 e x_3 tais que $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$ e que satisfaz a equação $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

Desse modo, para obter as raízes da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, basta diminuir $\frac{a}{4}$ das raízes de $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

Existem dois valores para $\sqrt{x_1}$, dois para $\sqrt{x_2}$ e dois para $\sqrt{x_3}$, assim existem 8 valores possíveis para $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$, porém apenas para os valores de $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$ e $\sqrt{x_3}$ tais que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -\frac{k_2}{8}$ teremos que $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$ é raiz da equação de 4^o grau.

Exemplo 3.5. *Vamos encontrar as raízes de $x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$. Fazendo a substituição $x = y - 1$, obtemos $y^4 + 2y^2 - 16y + 17 = 0$. Seguindo o método descrito acima, temos $k_1 = 2$, $k_2 = -16$ e $k_3 = 17$. A equação auxiliar é $x^3 + \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{(k_1)^2 - 4k_3}{16}x - \frac{(k_2)^2}{64} = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$, cujas raízes são $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 2$.*

As raízes quadradas de -1 são i e $-i$, as de -2 são $\sqrt{2}i$ e $-\sqrt{2}i$ e as de 2 são $\sqrt{2}$ e -$\sqrt{2}$ (sabemos que na caso real a raiz de quadrada de x é um número real positivo que elevado ao quadrado resulta em x, mas no caso complexo considera-se a raiz quadrada de x como todas as soluções em r de $r^2 = x$) temos que $-\frac{k_2}{8} = 2$.

Vamos testar os valores de $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$ e $\sqrt{x_3}$ para os quais $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = 2$:

- *para* i, $\sqrt{2}i$ *e* $\sqrt{2}$, *temos:* $i(\sqrt{2}i)(\sqrt{2}) = -2$
- *para* i, $\sqrt{2}i$ *e* $-\sqrt{2}$, *temos:* $i(\sqrt{2}i)(-\sqrt{2}) = 2$
- *para* i, $-\sqrt{2}i$ *e* $\sqrt{2}$, *temos:* $i(-\sqrt{2}i)(\sqrt{2}) = 2$
- *para* i, $-\sqrt{2}i$ *e* $-\sqrt{2}$, *temos:* $i(-\sqrt{2}i)(-\sqrt{2}) = -2$
- *para* $-i$, $\sqrt{2}i$ *e* $\sqrt{2}$, *temos:* $i(\sqrt{2}i)(\sqrt{2}) = 2$
- *para* $-i$, $\sqrt{2}i$ *e* $-\sqrt{2}$, *temos:* $-i(\sqrt{2}i)(-\sqrt{2}) = -2$
- *para* $-i$, $-\sqrt{2}i$ *e* $\sqrt{2}$, *temos:* $-i(-\sqrt{2}i)(\sqrt{2}) = -2$
- *para* $-i$, $-\sqrt{2}i$ *e* $-\sqrt{2}$, *temos:* $-i(-\sqrt{2}i)(-\sqrt{2}) = 2$

Dessa forma, as raízes da equação $y^4+2y^2-16y+17 = 0$ *são* $-\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})i$, $\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})i$, $\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)i$ *e* $-\sqrt{2} + (-1 - \sqrt{2})i$ *e assim, as raízes de* $x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$ *são* $-1 - \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})i$, $-1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})i$, $-1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)i$ *e* $-1 - \sqrt{2} + (-1 - \sqrt{2})i$.

Observação 3.3. *Para polinômios de grau maior do que ou igual a* 5 *não existe método ou fórmulas algébricas para encontrar suas raízes. Isso é o que garante o teorema de Abel-Ruffini, para o qual existem várias demonstrações, todas usando matemática bastante avançada. (Para mais detalhes ver [14]).*

Referências Bibliográficas

[1] Boyer, Carl B., História da Matemática, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1996.

[2] Kátia, Stocco Smole, Maria Ignez Diniz, Matemática do Ensino Médio, Terceira edição, Editora Saraiva, São Paulo, 2003.

[3] Domingues, Hygino H., Iezzi, Gelson, Álgebra Moderna, Segunda edição, Atual Editora, São Paulo, 1982.

[4] Garbi, Gilberto G., O romance das equações algébricas , Editora livraria da Física, 2ª Edição, São Paulo, Ano.

[5] Hefez, Abramo, Villela, Maria Lúcia Torre, Polinômios e Equações Algébricas, Segunda edição, Coleção PROFMAT, SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de janeiro, 2018.

[6] Iezzi, Gelson, Fundamentos de Matemática Elementar, Vol 6, Atual Editora, Segunda Edição, São Paulo, 1977.

[7] Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David; Périgo, Roberto; Nilze de Almeida, Matemática Ciência e Aplicação, Atual Editora, 2ª Edição, 2004.

[8] Luiz Roberto Dante, Matemática Contexto e aplicações, Terceira edição, Editora ática, São Paulo, 2016.

[9] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César, A Matemática do Ensino Médio, Vol 3, SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de janeiro, 1998.

[10] Lima, Elon lajes, Curso de Análise, vol. 1, Décima Edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[11] Lins Neto, Alcides, Funções de uma Variável Complexa, Segunda Edição, IMPA, Rio de janeiro, 1996.

[12] Moreira, Carlos Gustavo Tamn de Araújo, Uma solução das equações do 3º e do 4º graus, Revista do professor de Matemática, número 25, pp. 23-28. 1994.

[13] Oliveira, Oswaldo R. B., The Fundamental Theorem of Algebra: From the Four Basic Operations, American Mathematical Monthly, N. 119, pp. 753-758, 2012.

[14] Zoladek, Henryk, The Topological Proof of the Abel-Ruffini Theorem, Topological Methods in Nonlinear Algebra, Journal of the Juliusz Schauder Center, Volume 16, pp. 253-265, 2000.