Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

Luiz Fernando Athayde Souza Júnior

Análise da apresentação de áreas de figuras planas nos livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Orientador: Lhaylla dos Santos Crissaff

NITERÓI
Abril/2013

Luiz Fernando Athayde Souza Júnior

Análise da apresentação de áreas de algumas figuras planas nos livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental

Niterói – RJ

2013

Luiz Fernando Athayde Souza Júnior

Análise da apresentação de áreas de algumas figuras planas nos livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:
Lhaylla dos Santos Crissaff

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Niterói – RJ

2013

Dissertação de Mestrado *"Análise da apresentação de áreas de algumas figuras planas nos livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental"*, defendida por Luiz Fernando Athayde Souza Júnior em 15 de abril de 2013, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Lhaylla dos Santos Crissaff
Doutora em Matemática pela PUC-Rio
Orientadora

Ana Maria Martensen Roland Kaleff
Doutora em Educação pela UFF

Solimá Gomes Pimentel
Doutora em Matemática pela UFRJ

Pedro Carlos Pereira
Doutor em Educação Matemática pela PUC-SP

Dedico a Deus, meus pais, minha esposa e meus filhos, sem os quais não seria possível esse trabalho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela capacidade que me concedeu de realizar este estudo.

Agradeço a minha orientadora Professora Doutora Lhaylla dos Santos Crissaff pela dedicação, paciência e labor em busca da perfeição.

Agradeço à Universidade Federal Fluminense (UFF), aos professores do PROFMAT pelos ensinamentos que muito enriqueceram o meu estudo.

Agradeço aos meus pais, Luiz Fernando Athayde Souza e Maria Elisa Cardoso Souza pela estrutura familiar que me proporcionaram e da qual desfruto até hoje.

Agradeço a minha dileta e dedicada esposa, Rita de Cássia Freitas Santana Souza, o apoio e a compreensão pelas muitas ausências, meus filhos, Ana Luíza Santana Souza e Luiz Fernando Athayde Souza Neto, pelo carinho e amor que me dedicam.

Agradeço ao meu amigo e Professor Assistente II da UFF, Fabiano Santos Souza.

Agradeço aos meus colegas do PROFMAT.

Agradeço ainda aos que me apoiaram e que por lapso de memória não citei, peço-lhes perdão.

“Mas os que esperam no Senhor renovarão as suas forças, subirão com asas como águias; correrão, e não se cansarão; caminharão, e não se fatigarão.(Isaías, 40, vs 31)”

Resumo

Neste estudo, faremos uma análise da apresentação do conceito de área de uma região plana, assim como das áreas do retângulo, paralelogramo, quadrado, trapézio, em alguns livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, comumente adotados no Brasil. Esta análise considerará os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), e serão considerados os seguintes aspectos: motivação, pré requisitos e prova. Também apresentaremos o resultado de uma pesquisa feita com professores e alunos sobre a importância da apresentação de demonstrações de Geometria na Educação Básica.

Palavras-chave: livros didáticos, área.

Abstract

In this study, we present an analysis of the concept of area of a flat region, as well as the areas of the rectangle, parallelogram, square, trapezoid, in some textbooks of the ninth year of elementary school, commonly adopted in Brazil. This analysis will consider the National Curriculum Parameters (PCN), and will be considered the following aspects: motivation, prerequisites and mathematical demonstration. We also present the results of a survey of teachers and students about the importance of presentation of consolidated Geometry in Basic Education.

Keywords: textbooks, area.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Introdução

A Matemática sempre me encantou desde das séries iniciais. No Curso Riachuelo, aos 17 anos tive a oportunidade de ser monitor de matemática, e portanto, tendo o meu primeiro contato com a docência. Essa formação inicial como monitor, fez com que tomasse a decisão de prestar o vestibular para o curso de Licenciatura em Matemática na Faculdade de Formação de Professores da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Nesse período de formação na UERJ já lecionava no Colégio Riachuelo e aos 23 anos tive a oportunidade de passar no concurso público para professor substituto da UERJ-FFP. O contato com o Ensino Superior foi muito gratificante e teve um caráter formador muito importante. Ao longo dos anos, pude criar minha prática profissional que é a proposta por Tardif (2002) trazendo significativa contribuição para o nosso objetivo de pesquisa. Segundo Tardif,

> "A finalidade de uma Epistemologia da Prática Profissional é revelar esses saberes, compreender como são integrados concretamente nas tarefas dos profissionais e como estes os incorporam, produzem, utilizam, aplicam e transformam em função dos limites e dos recursos inerentes às suas atividades de trabalho". (Tardif, 2002, p.256).

Nesse sentido, cabe ressaltar que a proposta de Maurice Tardif vai ao encontro de uma formação que compreende como os saberes são integrados pelos profissionais na prática docente.

Este estudo tem por objetivo analisar a apresentação do assunto áreas em três livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, observando os seguintes aspectos: motivação, pré-requisitos, provas, consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais, exercícios e trazer uma breve fundamentação sobre alguns aspectos das teorias de Balacheff e Van Hiele, as quais identificam níveis de evolução dos alunos em provas e demonstrações.

Mostraremos a seguir a estrutura do trabalho:

Primeiramente, são apresentadas algumas considerações sobre o ensino de Matemática no Brasil a partir do século XX.

No capítulo 2, baseado em [18], analisaremos a importância do livro didático para o ensino da Matemática, assim como as considerações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) a este respeito. Apresentaremos um breve histórico do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e seu papel na Educação Básica no Brasil. Também discutiremos brevemente alguns aspectos da teoria de Van Hiele [25] e Balacheff [4] sobre provas e demonstrações.

O capítulo 3 é dedicado à análise da apresentação do assunto áreas em três livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental. Em seguida, iniciaremos pela análise do livro *A Conquista da Matemática*, seguido do livro *Tudo é Matemática* e finalizando pelo livro *Manual do Educador*.

Já no capítulo 4 serão apresentados os resultados de uma pesquisa realizada com 41 alunos que cursam os primeiros períodos do curso de Matemática na Universidade Federal Fluminense (UFF) e 20 docentes que atuam na rede pública de ensino. Essa pesquisa foi realizada através do preenchimento de um questionário que, segundo Lorenzato [22], "é um dos instrumentos mais tradicionais na coleta de informações"e é através dele que justificamos nossa pesquisa com dados advindos da empiria. Esse questionário versava sobre questões, principalmente concernentes a demonstrações. Em seguida, finalizaremos fazendo algumas comparações entre as respostas apresentadas pelos docentes e discentes.

As considerações finais deste trabalho serão feitas no capítulo 5, reconhecendo que o estudo nos proporcionou um melhor entendimento da necessidade de qualificação do professor e dos critérios de escolha de um livro didático, objetivando benefícios à aprendizagem dos alunos.

1.1 O Ensino de Matemática no Brasil a partir do século XX: algumas considerações

Para termos uma visão atual do ensino de Matemática no Brasil precisamos nos remeter ao passado, para buscarmos os fundamentos da situação vigente.

No início do século passado, de acordo com Pavanello [26], o Brasil era um país agrícola essencialmente, a maioria de sua população era analfabeta e sem acesso à educação formal. O Ensino Secundário, atual Ensino Médio, era pago e destinado às elites e à preparação aos cursos superiores.

Após a crise financeira de 1929 deflagrada em todo o mundo, cujo reflexo foi o processo de industrialização lenta do nosso país, foi criado o Ministério da Educação e Saúde que foi primordial para uma reestruturação da educação no Brasil. Ao longo da década de 1930, dentre outros importantes acontecimentos, destacamos a criação da Universidade de São Paulo (1934) e da Universidade do Rio de Janeiro (1935), sendo instalados nessas universidades os primeiros cursos de formação de professores, segundo Pavanello [26].

Após a Segunda Guerra Mundial $(1939 - 1945)$, no ano de 1951, o então Ministro da Educação Simões Filho, em decorrência do descontentamento em relação ao ensino ministrado nos cursos secundários, incumbiu a congregação do Colégio Pedro II na elaboração de novos programas.

Em decorrência da Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º graus, lei $5692/71$, segundo Pavanello [26], cada professor foi instruído a montar o programa de sua disciplina e, com isso, os professores deixaram de ensinar Geometria em favorecimento à Aritmética e Álgebra. Após a lei citada anteriormente, foi verificado uma perda gradual da qualidade do ensino de Matemática, principalmente do ensino de Geometria, em decorrência da piora nas condições de trabalho, baixa remuneração e fragilidade nos critérios de aprovação.

Atualmente, algumas secretarias de ensino têm buscado alternativas para melhoria do ensino, inclusive o da Matemática. O aumento da carga horária nas escolas conforme a que tem sido implementada pela Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro através do projeto Ginásio Carioca, aulas de reforço no contra-turno conforme tem ocorrido em algumas escolas estaduais do Estado do Rio de Janeiro, oficinas e incentivos financeiros aos alunos com bom desempenho são algumas das medidas que visam à melhoria do ensino, principalmente o de Matemática. Contudo, segundo Facci [13], a remuneração dos profissionais do magistério ainda tem ficado em segundo plano, dificultando a elevação do nível de educação no Brasil. O professor motivado é parte fundamental do processo de ensino e aprendizagem.

Para aprender bem, os alunos devem, também, ter estrutura e atendimentos adequados para alcançarem níveis satisfatórios de interesse. Existem fatores principais que devemos atentar para convidar o aluno para estudar o tema, são eles: atratividade, motivação, empatia pelo professor, livro estimulativo e atual, consonância com objetivos da sociedade e dos alunos daquela região.

Sendo assim, acreditamos que a retomada do ensino de Geometria, de forma mais geral a retomada do ensino de Matemática, é o caminho que precisamos trilhar para fazer com que os nossos alunos tenham uma educação em Matemática de qualidade.

2 *Livro didático*

Atualmente fala-se muito em aula interativa e estímulo ao uso do computador, mas no dia a dia a prática docente tem encontrado muita dificuldade. Primeiro, as escolas e diretores se orgulham de ter um laboratório de informática, mas nem sempre eles estão à disposição dos professores. O projetor, muitas vezes, é um só para muitas turmas. Com isso, o bom e não tão caro livro didático ainda continua sendo uma grande ferramenta para a aprendizagem dos alunos. Segundo Gravina e Santa Rosa [15], no contexto da Matemática, a aprendizagem depende de ações que caracterizam o "fazer Matemática": experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar.

Neste estudo iremos analisar o livro didático que o aluno utiliza no 9º ano do Ensino Fundamental tendo como tema central o assunto *áreas*.

Portanto, cabe a pergunta: o que é livro didático? Uma resposta esclarecedora foi dada por Lajolo [18]:

> "Didático, então, é o livro que vai ser utilizado em aulas e cursos, que provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática. Sua importância aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina". (Lajolo, 1996, p.4)

Ainda, segundo Lajolo [18]: "para ser considerado *didático*, um livro precisa ser usado, de forma sistemática, no ensino-aprendizagem de um determinado objeto do conhecimento humano, geralmente já consolidado como disciplina escolar". Nesse sentido, o livro é um instrumento que ajuda o aluno, com a cooperação do professor a chegar ao conhecimento. É importante perceber que o processo ensino-aprendizagem é contínuo, isto é, é reiniciado continuamente. Diz, também, Lajolo [18] que "é só na interação entre o saber que se traz do mundo e o saber trazido pelos livros que o conhecimento avança". E é claro que não há livro à prova de professor, ou seja, um bom professor transforma qualquer livro ruim e um mau professor pode desandar o melhor livro, pois o melhor livro é apenas um livro, e deve ser instrumento auxiliar de aprendizagem. Um livro constitui uma ferramenta valiosa, porém o professor também é parte fundamental na formação dos alunos. Uma boa formação, conhecimento matemático e didático, comporão elementos cruciais no dia a dia da sala de aula. Todo professor deveria se examinar no tocante a suas práticas pedagógicas e se sua metodologia de ensinar está atingindo o objetivo, que é fazer o aluno aprender.

Para ensinar bem, os professores devem ter condições de trabalho, uma boa formação, fácil acesso aos meios que facilitem um melhor processo de aprendizagem e justa remuneração. Vale ressaltar que os interesses, objetivos e esperanças de alunos e pais variam de região para região e até de país para país, sendo estes influenciados por sua cultura, costumes e história. Portanto, a sensibilidade do professor e das escolas se faz muito necessário nesse processo, aliados à família e à comunidade.

O conhecimento lógico-matemático dos alunos, segundo Piaget [16], é uma construção que resulta da ação mental da criança sobre o mundo, construído a partir de relações que a criança elabora na sua atividade de pensar o mundo, e também das ações sobre os objetos e acreditamos que o contato com pequenas demonstrações no Ensino Fundamental e mais tarde no Ensino Médio podem contribuir para isso. Dentro desse contexto lógico-matemático, vale ressaltar que uma abordagem sobre prova e demonstração nos foi dada segundo Pietropaolo[28],

> "Entretanto, no âmbito exclusivo da Matemática, *prova* e *demonstração* são, em geral, sinônimas e não precisam de adjetivações:"(Pietropaolo, 2005, p.49)

No entanto, vale ressaltar que segundo Abbagnano [1], prova é um procedimento próprio para estabelecer um saber, isto é um conhecimento válido, mais extenso do que demonstrações. Diz também Abbagnano [1], "as demonstrações são provas, mas nem todas as provas são demonstrações".

Consideraremos neste estudo provas e demonstrações como sinônimas.

Veremos a seguir como o pesquisador francês Balacheff [4], classifica as provas realizadas por alunos:

Empirismo ingênuo (*Empirism Naif*): a demonstração é trocada pela exemplificação de forma inocente. Ou seja, para validar uma propriedade, tomam-se alguns poucos casos, sem questionar à particularidade.

Experiência Crucial (*Expérience Cruciale*): o indivíduo tenta, explicitamente, generalizar um problema. Ele procura verificar uma propriedade em caso particular, mas sem considerá-lo tão particular.

Exemplo Genérico (*Exemple Genérique*): consiste na explicitação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade, mesmo que se faça uso de uma particularização do objeto estudado.

Experiência Mental (*Expérience Mentale*): momento em que a argumentação flui através de pensamentos mais gerais, e não mais através de situações particulares. É a fase que o aluno inicia o uso da linguagem matemática de forma natural.

Segundo Balacheff [4], as provas são divididas em duas categorias: prova pragmática e prova intelectual. As pragmáticas usam conhecimentos práticos e ações, como por exemplo, desenhos, observação de figuras com o objetivo de verificar a validade de determinada afirmação. Em contrapartida, as provas intelectuais englobam formulações e relações entre algumas propriedades em pauta. A passagem das provas pragmáticas para as provas intelectuais é marcada por uma evolução da linguagem matemática.

Vamos exemplificar cada etapa com a seguinte situação: o professor pede aos alunos para verificarem se o número de diagonais de um polígono de n lados é dado pela fórmula $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$.

Empirismo ingênuo: o aluno escolhe desenhar um polígono de 4 lados e traça suas diagonais, encontrando 2 diagonais. Em seguida, aplica a fórmula constatando que $\dfrac{4\cdot(4-3)}{2}=2$, e conclui que a fórmula é válida para qualquer polígono.

Experimento crucial: o aluno constrói um polígono com um número de lados maior, por exemplo, 10 lados, e traça todas as suas diagonais, encontrando 35. Depois do desenho, verifica testando na fórmula e percebe que o resultado é o mesmo, ou seja, $\dfrac{10\cdot(10-3)}{2}=35$. Daí ele conclui que a fórmula é válida para qualquer polígono. Vale ressaltar que o aluno procurou encontrar uma generalização empírica.

Exemplo genérico: o aluno usa o caso particular do pentágono, percebendo que de cada vértice partem 2 diagonais, obtendo um total de 10 diagonais. Todavia, observa que cada diagonal é contada duas vezes, então divide o valor encontrado por 2(ou seja, 10 por 2), encontrando 5 diagonais. O aluno constata também que o mesmo ocorre para outros polígonos, variando apenas o número de diagonais que sai de cada vértice.

Experimento mental: o aluno percebe que para encontrar o número de diagonais de um polígono, basta considerar o número de diagonais que partem de cada vértice. Para tal, é necessário tomar o número de vértices e subtrair seus dois vizinhos e ele próprio (ou seja, 3), multiplicar o resultado pelo número de vértices e depois dividir por 2, pois cada diagonal foi contada duas vezes. Assim, considerando n como sendo o número de vértices do polígono, ele obteria $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$.

Uma outra corrente teórica, conhecida como teoria de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico classifica em níveis a compreensão de um determinado conteúdo pelos alunos enquanto aprendem Geometria.

Segundo Nasser [25], o modelo de Van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em geometria foi criado por Pierre Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele, tendo por base as dificuldades apresentadas por seus alunos do curso secundário na Holanda.

De acordo com os 5 níveis de Van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em geometria, os alunos só atingem determinado nível de raciocínio após dominar os níveis anteriores. Em seguida, apresentaremos uma tabela com os níveis que trata do conteúdo figuras geométricas.

Nível de Van Hiele	Características	Exemplo
1º nível-Reconhecimento	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
2º nível - Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
3º nível - Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa e de que uma propriedade pode decorrer de outra; argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
4º nível - Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
5º nível - Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais. Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos	Estabelecimento e demonstração de teoremas.

Tabela 2.1: Níveis de Van Hiele para o conteúdo figuras geométricas.

Podemos perceber através deste estudo que os níveis de Van Hiele são mais precisos do que as validações de Balacheff para a caracterização do nível em que se encontra o aluno acerca de um determinado assunto de geometria.

2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais

Os PCNs são diretrizes voltadas para estruturação e restruturação dos currículos escolares de todo o país, elaborados pelo governo federal em 1996, para as redes pública e na rede privada de ensino. Seu objetivo principal é a padronização do ensino no Brasil.

Seguindo as orientações dos PCNs, os conteúdos ministrados na educação básica devem ser contextualizados e incluir os temas correlatos: ética, saúde, meio-ambiente, pluralidade cultural e orientação sexual. No entanto, não podemos deixar de lado o pensamento matemático e, principalmente, a sua escrita para a formação e a continuidade no entendimento desta disciplina pelos alunos. Com base nisto, destacamos a importância das demonstrações no Ensino Fundamental e Médio. Vejamos o que dizem os PCNs a respeito das demonstrações no ensino de Geometria na Educação Básica:

> "[...] é desejável que no 3º ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de resposta a afirmações, mas assumam a atividade de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no 4º ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática compreendendo provas de alguns teoremas". (Brasil, 1998, p.71)

Podemos perceber, atualmente, que os alunos têm tido pouco contato ou talvez nenhum contato com as demonstrações. Para ajudar a melhorar esta situação, é necessário introduzir no 9º ano do Ensino Fundamental um pouco do formalismo que, gradativamente, ao longo do Ensino Médio passará a ser interiorizado pelos alunos de forma mais natural. Segundo Terra[34], Piaget dividiu as etapas da aprendizagem em 4 fases (sensório-motor, pré- operatório, operatório concreto e operatório formal) na quarta fase, operatório formal, cuja as idades começam a partir dos 13 anos, os alunos passam a ter uma visão mais abstrata. Com isso, temos uma convergência entre a proposta apresentada pelo autor desse estudo e a capacidade dos alunos a entenderem , pois aos 14 anos os alunos já estão cursando o 9º ano do Ensino Fundamental.

2.2 Programa Nacional do Livro Didático

A Constituição estabelece que o dever do Estado com a educação será efetivado mediante a garantia de, entre outras, atendimento ao educando no Ensino Fundamental, através de programas suplementares de material didático-escolar. Portanto, o PNLD serve para prover as escolas públicas de Ensino Fundamental e Médio com livros didáticos e acervos de obras literárias,

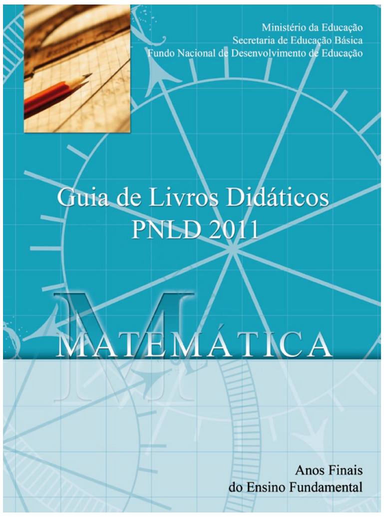


Figura 2.1: Capa do PNLD 2011.

obras complementares e dicionários.

O PNLD foi criado em 1985, como consta em [17]:

> "A partir de agosto de 1985, por meio do Decreto-Lei $n^{\underline{o}}$ 91542, o programa recebeu a denominação de Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), tendo como seus objetivos substancialmente ampliados. Estabeleceu-se como meta o atendimento de todos os alunos de primeira a oitava série do primeiro grau das escolas públicas federais, estaduais, territoriais, municipais e comunitárias do país, com prioridade para os componentes básicos Comunicação e Expressão e Matemática". (Hofling, 1998, p.164)

Este programa foi instituído "como uma estratégia de apoio à política educacional implementada pelo Estado brasileiro com a perspectiva de suprir uma demanda que adquire caráter obrigatório com a Constituição de 1988". (Hofling, 1998, p.159)

O PNLD é executado em ciclos trienais alternados. Assim, a cada ano, adquire e distribui livros para todos os alunos de determinada etapa de ensino e repõe e complementa os livros reutilizáveis das seguintes disciplinas: Matemática, Língua Portuguesa, História, Geografia, Ciências, Física, Química e Biologia.

É importante destacar que um edital especifica todos os critérios para inscrição das obras. Os títulos inscritos pelas editoras são avaliados pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), que elabora o Guia do Livro Didático, composto das resenhas de cada obra aprovada, que é disponibilizado às escolas participantes.

Levando em consideração seu planejamento pedagógico, cada escola escolhe, democraticamente, dentre os livros constantes no referido guia, aqueles que deseja utilizar.

3 Análise de alguns livros didáticos

O livro didático, conforme Lajolo [18], é um instrumento pedagógico de grande importância, pois é um guia para a vida acadêmica dos estudantes, principalmente aqueles que possuem pouco acesso a outras fontes de informação. Com isso, devemos nos preocupar com a qualidade e como cada livro apresenta os conteúdos aos alunos e possíveis leitores, pois, caso contrário, muitos poderão perder o rumo do saber.

Neste contexto, iremos fazer uma análise de três livros didáticos recomendados ou não pelo MEC através do PNLD. Esta análise versará sobre pré-requisitos necessários para o entendimento do conteúdo e, como foco principal, analisaremos como algumas áreas de figuras planas (retângulo, quadrado, paralelogramo, trapézio, losango e triângulo) são apresentadas em alguns livros didáticos. É importante também destacar que iremos observar se o conteúdo apresentado está em consonância com os PCNs e se há contextualização do mesmo.

Com relação a esta análise, contemplaremos os seguintes livros:

1. *A Conquista da Matemática*, autores: José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci, 1ª edição, São Paulo: FTD, 2009;

2. *Tudo é Matemática*, autor Luiz Roberto Dante, 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2011;

3. *Manual do Educador*, autores: Judson Santos e Annelise Maymone, 3ª edição, Recife: Editora Construir, 2012.

Dos livros listados acima, apenas o *Manual do Educador* não consta no PNLD de 2011.

A escolha destes livros foi feita em virtude de termos autores renomados cujos livros são adotados em diversas escolas por muito tempo no Brasil. Dentre os livros analisados, o *Manual do Educador* é o mais recente e surge no cenário nacional como mais uma opção para o Ensino Fundamental.

O pré-requisito mínimo para a abordagem do assunto é o conhecimento de figuras planas, suas definições, propriedades e teoremas. Isto incluí, por exemplo, *teorema de Pitágoras* e *semelhança de triângulos*. Em todos os livros verificaremos se os pré-requisitos são atendidos, como detalharemos a seguir.

Neste trabalho, utilizaremos expressões do tipo “área de um triângulo” no lugar de “área da região poligonal cuja fronteira é um triângulo”, para facilitar a escrita.

3.1 Breve Histórico

Segundo Lima [19], os primeiros conhecimentos geométricos surgiram da necessidade do homem em compreender o meio em que se encontrava. No sentido etimológico, a palavra geometria deriva do grego geometrein, que quer dizer medição da terra (geo = terra, metrein= medir). O cálculo de áreas e volumes data de muitos séculos. Segundo Heródoto (século V a.C.), foram os egípcios que deram origem à Geometria.

Proprietários de terras, no Egito, pagavam impostos de acordo com a área dos lotes que possuíam. Os cobradores de impostos, devido às enchentes do rio Nilo, eram obrigados a recalcular a área dos lotes de terra. Nessa época, os egípcios possuíam conhecimentos de áreas geométricas, que os habilitavam a solucionar problemas práticos, mas ainda não existia a Geometria como ciência. Sendo assim, o cálculo de áreas e volumes, revelou- se desde muito cedo uma ferramenta valiosa na solução de problemas para as civilizações antigas.

Já os conhecimentos matemáticos dos babilônios, por volta do século V a.C., eram mais extensos e avançados em relação aos estudos matemáticos, maiormente, Álgebra e cálculos numéricos, sem, contudo desprezar o estudo da Geometria.

Tanto no Egito quanto na Babilônia, as noções geométricas despertavam o interesse do homem. Convém salientar que esses povos não tinham seus estudos organizados como os atuais, pois a ideia de demonstrar ainda não existia. Nesta época, havia apenas enunciados de problemas e regras apresentadas como receitas para solução dos mesmos.

3.2 Ladrilhamento

Segundo Sallum [31],

> “A arte do ladrilhamento consiste no preenchimento do plano, por moldes, sem superposição ou buracos. Ela existe desde que o homem começou a usar pedras para cobrir o chão e as paredes de sua casa e continuou com a aplicação de cores, desenhos ou figuras para deixar os ladrilhos mais agradáveis. As mais antigas peças de ladrilhos conhecidas datam de 5000 anos a.C. e foram encontradas no Egito. Romanos e outros povos mediterrâneos retratavam pessoas e cenas naturais; mouros e árabes usavam figuras geométricas complexas e entrelaçadas, como se constata na Alhambra, um complexo de palácios de

> Granada (Espanha) construído, por mouros e cristãos, entre os séculos 13 e 15 e declarado, pela UNESCO, patrimônio da humanidade"(Sallum, 2007, p.1)

A técnica de ladrilhamento é utilizada em grande variedade de aplicações: papel de parede, pisos, malharia, crochês, etc. Até na natureza, a técnica de ladrilhamento é encontrada como nas escamas de peixe, de cristais e colmeias.

Podemos escolher um quadrado de lado 1 cm e área $1cm^2$ como unidade padrão para ladrilhar retângulos. Dessa forma é possível introduzir o conceito de **área**.

Para fazer, por exemplo, o ladrilhamento de um retângulo, pode-se prosseguir como na figura abaixo.

Exemplo abaixo de utilização:

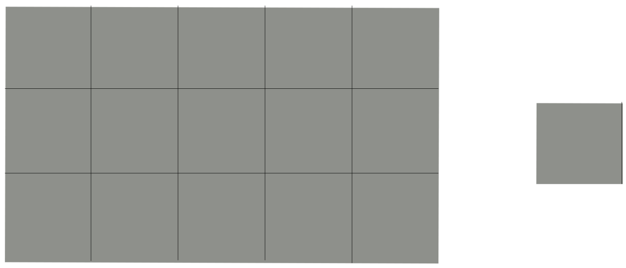


Figura 3.1: *Ladrilhamento.*

Supondo que o retângulo da figura 3.1 tenha área **F**, iríamos procurar quantos quadrados de área $1cm^2$ cabem em **F**. Neste caso, a resposta seria $15cm^2$.

3.3 Análise do livro *A conquista da Matemática*

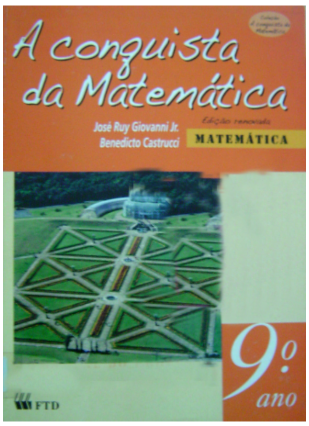


Figura 3.2: Capa do livro *A conquista da Matemática.*

O livro *A Conquista da Matemática*, de José Ruy Giovanni Jr. e Benedito Castrucci, segundo pesquisa realizada na internet é adotado ou foi adotado em diversas escolas do Brasil, entre elas:

1. Instituto Cultural Amendoeira, São Gonçalo - RJ;
2. Colégio Mackenzie, São Paulo - SP (www.mackenzie.br);
3. Colégio dos Santos Anjos, Varginha - MG (www.colegiosantosanjos.com.br);
4. Escola Santo Inácio, Vila Mariana - SP;
5. Colégios Maristas, Rio grande do Sul - RS (colegiomarista.org.br).

O livro *A conquista da Matemática* é dividido em 12 unidades. O livro tem 5 unidades de Álgebra, 6 unidades de Geometria e 1 unidade de Estatística. O desenvolvimento dos capítulos se dá introduzindo o tópico a ser estudado com uma motivação, uma seção chamada *Explorando*, teoria, exercícios propostos e seções estimulativas chamadas *Brasil Real*, *Desafios* e *Retomando o que aprendeu*. Na seção chamada *Explorando*, o autor busca incluir algum jogo ou história interessante, tal como o Tangram no capítulo de *áreas*. Na seção *Brasil Real* são trabalhadas questões que misturam a Matemática com outras disciplinas para resolver questões do dia a dia dos alunos. Em *Desafios*, o aluno é convidado a resolver questões mais difíceis do que os exercícios propostos. E em *Retomando o que aprendeu*, é feita uma revisão com um número razoável de exercícios abordando todo o conteúdo do capítulo, incluindo questões contextualizadas e de vestibulares.

O capítulo 53, chamado *Calculando as áreas de algumas figuras geométricas* da unidade *Estudando as áreas das figuras geométricas planas*, tem uma motivação que enriquece a cultura do aluno, pois utiliza uma parte da história. O livro nos remete a história do Egito antigo fazendo menção à necessidade da Matemática para calcular impostos pagos ao Faraó por pedaço de terra utilizado, mostrando a necessidade do conhecimento de área (ver figura 3.3). É inovador, pois os autores comentam que atualmente fazemos o mesmo ao pagarmos o IPTU (Imposto Territorial Urbano ou Rural). Na sequência, o livro apresenta o conhecido quebra-cabeça Chinês chamado Tangram para “brincar” com a disposição das figuras geométricas, concluindo que todas possuem a mesma área por serem compostas pelas mesmas figuras. Desta forma, podemos notar uma preocupação dos autores em seguir as orientações dos PCNs, já que utiliza jogos, envolve o aluno no conteúdo de forma lúdica e o conduz a estabeler relações naturalmente.

Alguns pré-requisitos teóricos estão nos livros das edições anteriores dos mesmos autores e outros são apresentados neste mesmo livro ao longo de capítulos anteriores, entre eles: seg-

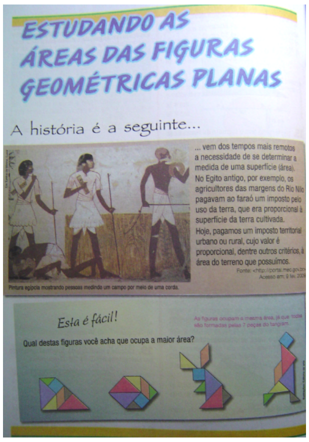


Figura 3.3: Página 292 do livro *A conquista da Matemática*

mentos proporcionais, semelhança de figuras planas, relações métricas no triângulo retângulo e relações trigonométricas nos triângulos.

O conceito de área deste livro e a apresentação da área do retângulo, apresentados na página 294, são reproduzidos a seguir:

"No jardim de sua casa, Zildo quer fazer um gramado retangular de 6m *por* 4m*. De quantas placas quadradas de grama, com lados de 1m, ele vai precisar? Zildo desenhou um esquema do gramado e pensou: cabem* 6 *fileiras, cada uma com* 4 *placas quadradas de grama.*

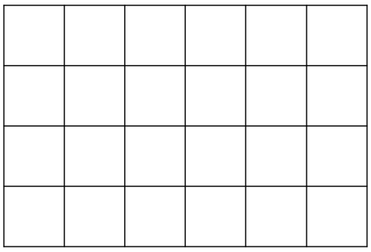


Figura 3.4: Página 294 do livro *A conquista da Matemática*

Então, ao todo cabem 24 (6×4) *placas*".

Em um retângulo, é costume chamar um dos lados de ***comprimento*** *(ou base) e o outro de* ***largura*** *(ou altura). No retângulo, indicamos por:*

- **b** *o comprimento ou medida da base.*
- **h** *a largura ou medida da altura.*

$$\textit{Temos: área do retângulo} = b \cdot h$$

Concluímos que a forma de apresentar o conceito de áreas é muito interessante pelo fato de atrair a atenção do aluno, porém o livro não define o que é área. Por outro lado, a história

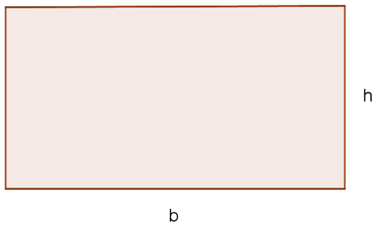


Figura 3.5: Página 294 do livro *A conquista da Matemática*

utilizada para contextualizar está em consonância com os PCNs e o método do ladrilhamento foi, adequamente, usado para apresentar o assunto de área. Podemos perceber que o livro não demonstra a fórmula da área de um retângulo.

Na sequência, é apresentada a área do quadrado, como descrita abaixo:

*Sendo **l** a medida do lado de um quadrado,temos:*

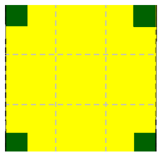


Figura 3.6: Página 295 do livro *A conquista da Matemática.*

$$\textit{Assim, área do quadrado} = l^2$$

Em seguida, o livro apresenta a área do triângulo, como descrito abaixo:

Observe as figuras:

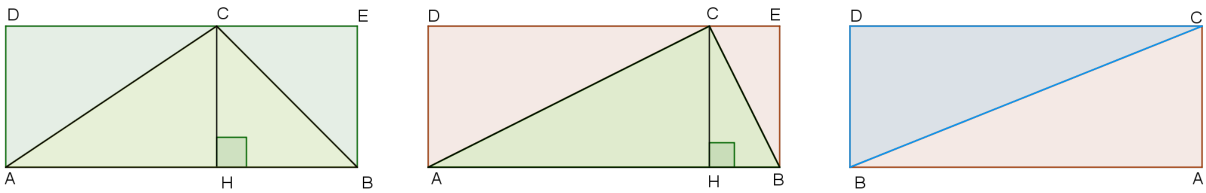


Figura 3.7: Página 299 do livro *A conquista da Matemática.*

Você pode notar que, em qualquer uma das figuras, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do retângulo.

Assim, de modo geral:

- *b = medida da base AB.*
- *h = medida da altura relativa ao lado AB.*

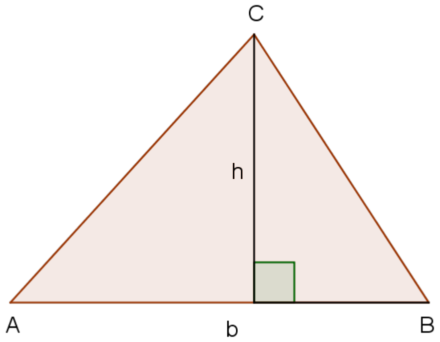


Figura 3.8: Página 299 do livro *A conquista da Matemática.*

$$\textbf{\textit{área do triângulo}} = \frac{bh}{2}$$

A demonstração da fórmula da área do triângulo foi feita de uma maneira interessante, já que o aluno teve que trabalhar em relacionar figuras, exercitar propriedades dos dois polígonos, e poder intuir o conceito de equivalência de áreas de figuras planas.

Na sequência o livro apresenta a área do paralelogramo, como descrito a seguir:

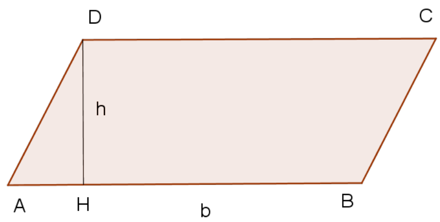


Figura 3.9: Página 301 do livro *A conquista da Matemática.*

Nesse paralelogramo:

- ***b*** *é a medida da base.*
- ***h****é a medida da altura.*

Observe:

Os lados AD e BC são congruentes; logo, podemos destacar o triângulo ADH e rearranjar a figura na forma de um retângulo. Veja:

Note que a área do paralelogramo é igual a área do retângulo formado. Assim:

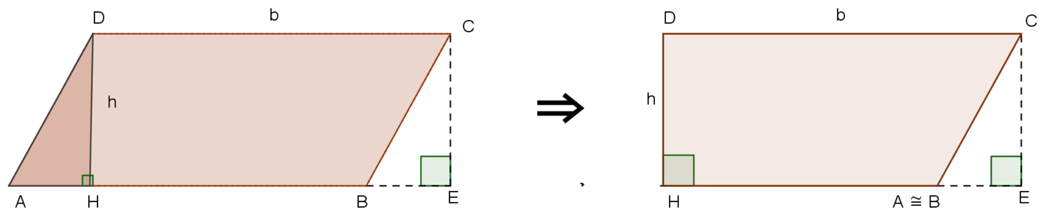


Figura 3.10: Página 302 do livro *A conquista da Matemática.*

$$\textbf{\textit{área do paralelogramo}} = b \cdot h$$

Mais uma vez, a equivalência de figuras planas foi utilizada para mostrar como calcular a área de um paralelogramo. Desta forma, o aluno foi levado a raciocinar e não apenas a memorizar uma fórmula.

A apresentação da área do losango, pelo livro, é feita abaixo:

A figura a seguir representa um losango MNPQ.

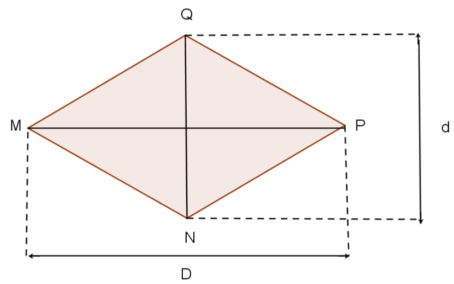


Figura 3.11: Página 302 do livro *A conquista da Matemática.*

Nesse losango:

- *MP é a diagonal maior, cuja medida indicaremos por* ***D****.*
- *NQ é a diagonal menor, cuja medida indicaremos por* ***d****.*

Observe: a área do losango MNPQ é a metade da área do retângulo cujas dimensões são as medidas das diagonais do losango.

Então:

$$\textbf{\textit{área do losango}} = \frac{D.d}{2}$$

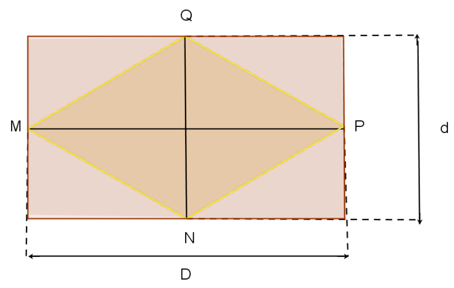


Figura 3.12: Página 303 do livro *A conquista da Matemática.*

A forma apresentada no livro para encontrar a fórmula da área do losango é muito interessante, pois o aluno poderá assimilar o conhecimento sem somente memorizar fórmulas.

O livro finaliza com a apresentação da área do trapézio, como descrito abaixo:

Observe o trapézio EFGH:

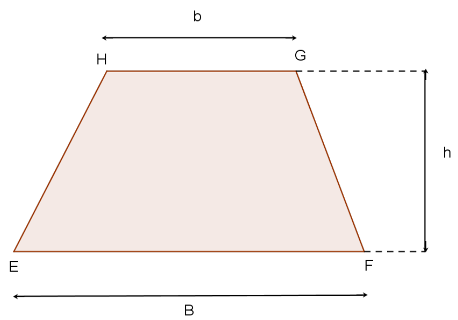


Figura 3.13: Página 304 do livro *A conquista da Matemática.*

Nesse trapézio:

- *EF é a base maior, cuja medida indicaremos por B.*
- *GH é a base menor, cuja medida indicaremos por b.*
- *A distância entre as bases é a altura do trapézio, cuja medida indicamos por h.*

Se traçarmos a diagonal EG, obteremos dois triângulos, EFG e EGH, que têm a mesma altura h. Assim:

$$\acute{a}rea\ do\ trap\acute{e}zio = \acute{a}rea\ do\ \Delta EFG + \acute{a}rea\ do\ \Delta EGH$$

$$\acute{a}rea\ do\ trap\acute{e}zio = \frac{B.h}{2} + \frac{b.h}{2}$$

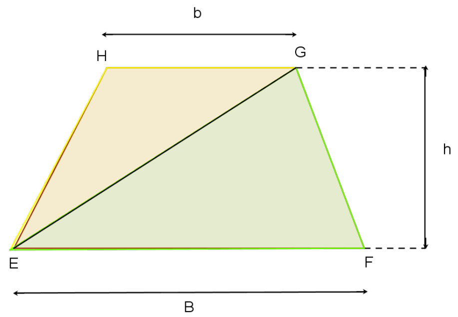


Figura 3.14: Página 304 do livro *A conquista da Matemática.*

$$\textit{área do trapézio} = \frac{Bh+bh}{2}$$

Então:

$$\textbf{área do trapézio} = \frac{h.(B+b)}{2}$$

A apresentação da prova da área do trapézio pode ser considerada interessante, pois deriva de uma área conhecida pelo aluno, que é a do triângulo, e, portanto, pode ficar mais adequada e objetiva para a compreensão do aluno.

3.4 Análise do livro *Tudo é Matemática*

Figura 3.15: Capa do livro *Tudo é Matemática.*

O livro *Tudo é Matemática*, do autor Luiz Roberto Dante, segundo pesquisa realizada na internet é adotado ou foi adotado em diversos escolas do Brasil, entre elas:

1. Escola Municipal Pereira Passos, SME - RJ;
2. SME - Duque de Caxias, Rio de Janeiro - RJ;
3. Colégio Stella Maris, Santos - SP (www.colstellamaris.com.br);
4. Escola Esfera, São José dos Campos - SP (www.escolaesfera.com.br);
5. Colégio Stockler, Brooklin- SP (www.colegiostockler.com.br).

O livro *Tudo é Matemática*, é composto de 10 unidades, sendo 3 de Álgebra, 5 de Geometria, 1 de Estatística e 1 de revisão. Vale ressaltar que, o primeiro capítulo, intitulado *Revendo o que aprendemos*, é iniciado com uma revisão. Os capítulos se desenvolvem com motivação inicial, teoria, exercícios e algumas seções interessantes, tais como: *Curiosidade matemática*, *Desafio*, *Leitura*, *Você sabia?*, *Revisão Cumulativa* e *Para ler, pensar e divertir-se*. Na seção *Curiosidade matemática*, o autor fornece trechos de livros com curiosidades matemáticas, e na seção *Desafio*, o aluno é provocado com algum exercício mais difícil. Na seção *Leitura* encontramos textos com leituras complementares, como "A quadratura do círculo" do capítulo 9. Na seção *Para ler, pensar e divertir-se*, o autor busca estimular o aprendizado dos conceitos matemáticos através de jogos, sequências ou charadas atrativas. A seção *Revisão Cumulativa* oferece uma quantidade razoável de exercícios que contemplam todos os tópicos do capítulo.

O livro apresenta de forma concomitante os tópicos perímetros, áreas e volumes no capítulo 9, chamado *Perímetros, áreas e volumes*. O autor inicia o capítulo com 3 motivações diferentes, uma para cada tema que será abordado. A motivação para o assunto **áreas** foi uma questão retirada do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) de 2001, na qual é pedida para calcular a área de uma cidade em metros quadrados. Possivelmente o autor está tentando mostrar que, apesar da questão ser do ENEM, exame feito após o Ensino Médio, ela pode ser resolvida com um assunto estudado no 9º ano do Ensino Fundamental. Este fato, certamente, pode ser um incentivo para o aluno estudar o tema, já que todos terão que enfrentar o ENEM para ingresso no Ensino Superior.

A seção 2, chamada *Retomando e aprofundando o cálculo de áreas*, é iniciada mostrando a importância de saber calcular a área de uma superfície e citando alguns exemplos, como a pintura de uma casa ou a colocação de pisos nos cômodos. Em seguida é dito que : "Para medir uma região do plano ocupada por uma figura **F** qualquer, comparamos **F** com uma unidade de área. O resultado dessa comparação - a área de **F** - indicará quantas vezes **F** contém a unidade de área". A seguir é apresentada a definição de área mostrada na figura 3.16.

É com essa idéia de contagem do número de quadrados, unidade de área, que cabem na superfície da região, que o autor introduz a definição de áreas. A idéia do uso do ladrilhamento

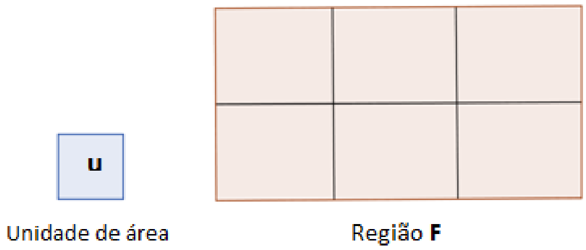


Figura 3.16: *A medida da superfície da região **F** é 6 unidades de área ou 6 u.*

é bastante interessante, e provavelmente, pode ser entendida por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Na sequência, para encontrar uma fórmula para o cálculo da área do quadrado, é utilizado $1cm^2$ como unidade de área, ou seja, um quadrado de lado 1cm. E assim, é calculada a área de uma região quadrangular **Q** formada por 9 quadrados de lado 1, observando que bastava multiplicar a medida do lado de **Q** por ela mesma.

Como o método funciona para números inteiros, e não se fala da possibilidade de números não inteiros, o seguinte comentário, citado anteriormente, é feito pelo autor: "Os matemáticos provaram que, mesmo que a medida do lado (l) de uma região quadrada seja um número real (racional ou irracional) não inteiro, essa fórmula é válida: $A = l$ ou $A = l^2$ ".

Da mesma forma que o ladrilhamento foi feito para o quadrado, também foi feito para o retângulo. Ou seja, através de um exemplo, os autores contam quantos quadrados de lado 1cm cabem dentro de um retângulo e assim determinam que a fórmula para o cálculo da área do retângulo é dada pelo produto da base pela altura. Mais uma vez, um comentário, com "os matemáticos demonstraram" é utilizado para dizer que a fórmula vale quando base e altura são números inteiros e não inteiros.

O livro apresenta o conceito de área de forma análoga ao livro *A conquista da Matemática*. A fórmula da área do quadrado é apresentada sem demonstração. Pela fórmula da área do quadrado o livro prova a área do retângulo como descreveremos abaixo:

Como podemos demonstrar essa fórmula?

Considere uma região retangular R de comprimento (c) e largura (l) (ou base c e altura l), em que c e l são números reais. Vamos demonstrar que sua área é dada por c, ou seja, área de $R = c \times l$.

*Construímos uma região quadrada, cuja medida do lado é $c+l$, a qual contém duas cópias de **R** e mais duas regiões quadradas $Q1$ e $Q2$, uma cujo lado mede **c** e outra cujo lado mede l.*

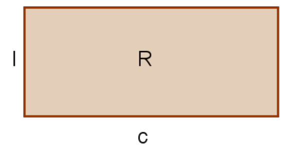


Figura 3.17: *Região retangular R*

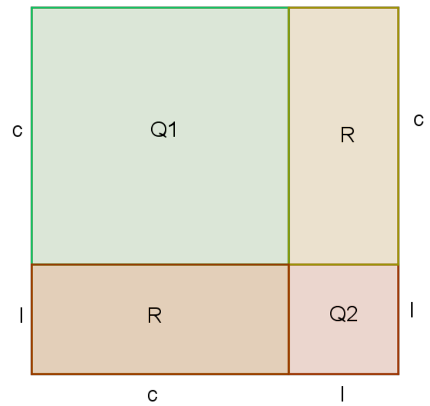


Figura 3.18: *Região quadrangular*

*A área dessa região quadrada (**Q**) é dada pelo quadrado de uma soma:*

(I) *Área de **Q*** $=(c+l)^2 = c^2+2cl+l^2$

Como as regiões quadradas $Q1$ *e* $Q2$ *têm áreas iguais a* c^2 *e* l^2*, respectivamente, concluímos que:*

(II) *Área de **Q*** $=c^2+l^2+2\times($*área de **R***$)$

Comparando (I) *e* (II)*, chegamos a:*

Área de R **=** $c \times l$

O livro apresenta a demonstração da fórmula da área do paralelogramo de forma análoga ao livro *A conquista da Matemática*, assim como a demonstração da fórmula da área do trapézio. Não demonstra a fórmula da área do losango e usa a fórmula da área do paralelogramo para provar a fórmula da área do triângulo. Além dessas, o livro apresenta outras fórmulas para o cálculo da área de uma região triangular, por exemplo, sem demonstrar, em uma pequena seção chamada *Leitura*. Dentre tais fórmulas, destacamos a fórmula de Heron, usada para calcular a área de um triângulo conhecidos apenas seus lados.

O capítulo também mostra como fazer cálculo de áreas de regiões que não são limitadas pelos polígonos trabalhados anteriormente. É sugerido inserir a figura da região numa malha quadriculada e faz-se o cálculo aproximado usando a média aritmética das áreas por falta ou por excesso. Também foi feito no livro A conquista da Matemática no capítulo 54.

Alguns exemplos são feitos para mostrar a aplicação das fórmulas, mas não para todos os casos. Em relação aos exercícios, observamos uma preocupação do autor em inserir uma pequena lista de exercícios após cada fórmula ser apresentada. No final do capítulo também encontramos uma lista de exercícios que envolvem todos os conceitos do capítulo em uma seção chamada *Revisão Cumulativa*, em sua maioria do tipo "Calcule" ou "Resolva", o que não é recomendado pois não faz o aluno pensar e sim reproduzir uma fórmula ou relação.

O livro motiva e atrai o aluno com as seções: *Você sabia?*, com textos de enfoque interdisciplinar despertando a curiosidade, e *Desafios* podendo gerar expectativa ao desafiar. As leituras complementares sobre *Quadratura do Círculo* e *Pirâmides* também agregam e acrescentam muito ao aluno tanto pelo lado matemático, quanto pelo lado histórico e interdisciplinar.

Podemos perceber que o livro apresenta consonância com os PCNs, pois o autor se preocupa em colocar figuras ilustrativas e exemplos do cotidiano valorizando a realidade do aluno. O livro explora isso com uma boa diagramação, e a escolha das cores, das charges e das figuras são estratégicas e bem apropriadas. O vocabulário parece claro e compreensível para a idade dos alunos. Porém, o livro possui alguns problemas do ponto de vista matemático, quando não demonstra algumas fórmulas. A falta de algumas demonstrações, como por exemplo a do losango, resulta em um problema que será a obrigação do aluno memorizar a fórmula do cálculo da área do losango sem compreender.

3.5 Análise do livro *Manual do Educador*

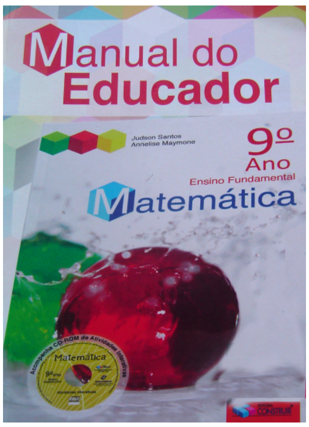


Figura 3.19: Capa do livro *Manual do Educador*.

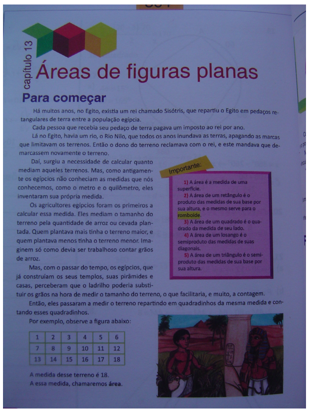


Figura 3.20: Motivação do capítulo 13 do livro *Manual do Educador*

O livro foi escolhido para análise por ser novo no mercado e, por isso, ainda não conhecemos quais escolas já estão trabalhando com este livro.

O livro se divide em 14 capítulos, dos quais 8 destinados a *Álgebra* , 5 a *Geometria* e 1 para *Estatística*. Além disso, possui ainda uma seção chamada *Banco de questões* e uma outra chamada *Autoavaliação*. O *Banco de questões* funciona como uma revisão dos capítulos e a seção *Autoavaliação* possui 10 questões de vestibulares e concursos, para verificar se todo o conteúdo daquele capítulo foi assimilado.

O capítulo 13 da 3ª edição do livro *Manual do Educador*, chamado *Áreas de figuras planas*, é iniciado com uma motivação que associa a história e o meio em que viviam os egípcios com as medidas. Primeiro é apresentada a forma de cobrança de impostos baseada no "pedaço" da terra, depois o problema que o povo enfrentava por não ter algo que determinasse como o tamanho do terreno é descrito. Por fim, é contado que após muitos anos começaram a utilizar os ladrilhos para medir o tamanho do lote de terra. Esse texto introdutório pode chamar a atenção do aluno porque é um pequeno trecho, objetivo, interessante pela cultura e relaciona a história com a matemática, ou seja, é interdisciplinar, como recomenda inclusive os PCNs.

Em relação aos pré-requisitos teóricos para se trabalhar áreas, alguns estão em volumes de anos anteriores dos mesmos autores e outros no próprio livro em unidades anteriores. Antes de apresentar o conceito áreas, há a apresentação das figuras geométricas planas, descrição de cada uma e, ainda, para cada uma das seções existentes no capítulo 13, de áreas de figuras planas, exercícios mecanizados. Faltam exercícios contextualizados na sequência que, provavelmente, poderiam melhorar a absorção do conteúdo e induzir o aluno a pensar.

A primeira fórmula de área abordada neste livro é a do retângulo, mas sem nenhuma explicação ou prova, ou seja, o aluno provavelmente só irá memorizar a fórmula. Após a área do retângulo, encontramos a fórmula da área do quadrado, que foi construída lembrando que o quadrado é um retângulo particular e aplicando a fórmula da área do retângulo. Para finalizar esta parte são apresentados alguns exercícios, todos da forma “Calcule”, o que faz com que os alunos apenas apliquem fórmulas e não sejam estimulados a construir o conhecimento, não acostumam-se a fazer conexões com os conteúdos ensinados e o mundo ao seu redor, não contextualizam e podem sentir dificuldade de abstrair.

A descrição de como o livro apresenta mostraremos a seguir.

Retângulo

A área A de um retângulo cujos lados medem a e b é igual ao produto das medidas dos lados.

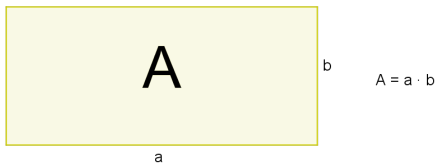


Figura 3.21: Página 365 do livro *Manual do Educador.*

Quadrado

Dado um quadrado de lado a, sua área A é igual ao produto das medidas dos lados, pois o quadrado é um retângulo particular.

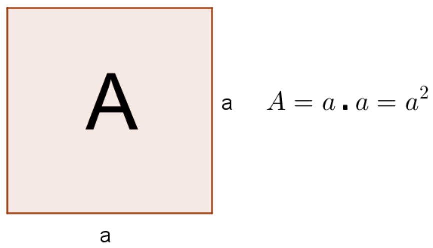


Figura 3.22: Página 365 do livro *Manual do Educador.*

O próximo passo escolhido pelos autores é encontrar a fórmula da área do paralelogramo. Isso é feito utilizando o fato de que um paralelogramo é equivalente a um retângulo, e concluindo que suas áreas são iguais. Mais uma vez temos uma seção com exercícios para aplicar as fórmulas.

A seguir a maneira como o livro apresenta a demonstração da fórmula da área do paralelogramo.

Paralelogramo

Dado um paralelogramo de base b e altura h, a área dele é equivalente à de um retângulo cuja base mede b e a altura mede h.

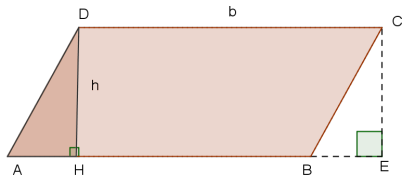


Figura 3.23: Página 368 do livro *Manual do Educador.*

Veja que os triângulos ADH e BCE são congruentes, logo: $A_{ADCB} = b.h.$

A partir da área do paralelogramo, é demonstrada a área do triângulo, descrito a seguir como no livro.

Triângulo

Dado um triângulo ABC de base b e altura relativa à base h, temos que:

$A_{ABC} = \frac{b.h}{2}$

Considere o paralelogramo ABDC abaixo:

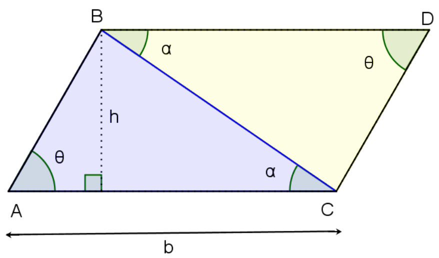


Figura 3.24: Página 370 do livro *Manual do Educador.*

Traçando $\overline{BC}$*, obtemos dois triângulos congruentes:*

Δ *BCD* $\cong\Delta$ *ABC (caso ALA), logo:*

$A_{ABDC} = 2\ .\ A_{ABC} \rightarrow b.h = 2\ .\ A_{ABC} \rightarrow A_{ABC} = \frac{b.h}{2}$

Também são apresentadas fórmulas alternativas de calcular a área do triângulo, como a fórmula de Heron, uma fórmula trigonométrica (utilizando o seno de um dos ângulos internos do triângulo), uma fórmula do triângulo inscrito numa circunferência (utilizando o raio da circunferência circunscrita ao triângulo) e uma fórmula do triângulo circunscrito à uma circunferência (utilizando o raio da circunferência inscrita ao triângulo). Dentre estas fórmulas, apenas a de Heron não é demonstrada.

As demonstrações do trapézio e do losango são análogas as encontradas no livro *A conquista da Matemática*.

Na sequência, os 61 exercícios escolhidos também seguem a mesma diretriz de reprodução, ou seja, exercícios para resolver com a simples e pura aplicação de fórmulas. Dentre esses 61 exercícios, são propostos alguns exercícios de vestibulares, também mecanizados. A revisão final é composta de 17 exercícios e é intitulada *Matemática* +. Destes, apenas 4 são contextualizados.

Vale destacar que o livro inova na diferente apresentação, buscando uma diagramação mais atrativa, pois ele trabalha muito as cores e isso fica muito claro ao manusear as páginas do livro, o que torna mais agradável e prazerosa a leitura. Assim, o livro apresenta boa diagramação e pode ser atrativo para alunos e professores, cujo objetivo seja manusear um livro resumido com fórmulas e muitos exercícios de vestibulares. Porém, o livro não define área, não demonstra a fórmula da área do quadrado e não demonstra a fórmula da área do retângulo.

3.6 Conclusão

Pela vivência em sala de aula, temos visto que, alunos que aprendem fórmulas mecanicamente costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo respostas sobre as quais não têm nenhum tipo de crítica ou controle, além de as esquecerem rapidamente. Assim, o estudo de áreas deve se pautar em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já conhecem. Tal metodologia poderá ajudar o aluno na construção do significado do conceito de áreas de figuras planas, através da composição e decomposição de figuras. Dessa forma esperamos que os alunos consigam entender o conceito de área como uma medida de comparação entre superfícies. Os livros usam Van Hiele quando fazem o ladrilhamento. Porém, eles ficam entre os níveis 1 e 3. As vezes, fazem uma demonstração seguindo uma axiomática e chegam ao nível 4.

3.6.1 Sugestão de demonstração para áreas

Sugerimos, para ser colocado talvez como uma leitura complementar, demonstrações sobre as fórmulas das áreas do quadrado e do retângulo que abordam o caso dos lados incomensuráveis, obtidas no livro citado a seguir.

Segundo Lima [19]: “uma ideia básica sobre área, é medir a porção do plano ocupada por uma figura plana F. Para isso, comparamos F com a unidade de área”. O resultado dessa comparação será um número, que deverá exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade de área. Apresentaremos aqui um significado matemático para essa ideia. Um estudo criterioso sobre áreas das figuras planas, exige um conjunto de axiomas próprios, e partir dos mesmos, a dedução das fórmulas.

Definição: A área de uma região R delimitada por uma ou várias curvas é um número real positivo A(R) satisfazendo às seguintes condições:

1. Duas regiões congruentes possuem a mesma área A.
2. Se duas regiões R_1 e R_2 se intersectarem no máximo por pontos em sua fronteira, isto é, sua intersecção não possui pontos interiores, então $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$.
3. A área A de um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento é igual a uma unidade de área.

Teorema 1: A área de um quadrado de lado a é igual a a^2.

Demonstração: Iniciaremos com um quadrado de lado inteiro n. Se subdividirmos seus lados em n segmentos de comprimento unitário, teremos ao todo n^2 quadrados de lado unitário decompondo o quadrado original, conforme exemplificado na figura 3.25. Todos esses qua-

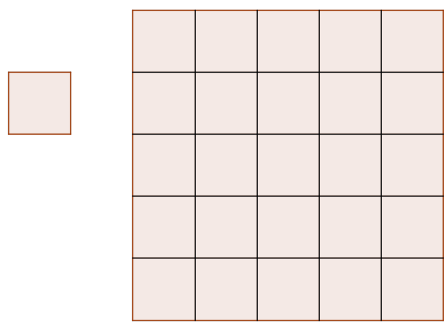


Figura 3.25: *Quadrado de lado 5, decomposto em* $5^2 = 25$ *quadrados unitários.*

drados de lado unitário se intersectam no máximo por uma aresta e portanto, pelo item 2 da definição de área, a área do quadrado é igual à soma das áreas dos quadrados de lado 1. Segue-se que o quadrado Q deve ter área $(n^2) \times (1)$, que é igual a n^2.

Ainda segundo Lima [19], se o lado de um quadrado Q tem por medida o número racional $\frac{m}{n}$, então podemos decompor cada lado de Q em m segmentos, cada um dos quais tem comprimento $\frac{1}{n}$. Traçando paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, obtemos uma decomposição de Q em m^2 quadrados, cada um dos quais tem lado $\frac{1}{n}$. Portanto, a área de cada um desses quadrados menores é $\frac{1}{n^2}$. Segue-se que a área de Q deve ser $m^2.\frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2}$, ou seja, a área de $Q = (\frac{m}{n})^2$.

Podemos então concluir que a área de um quadrado Q cujo lado tem para medida um número racional $a = \frac{m}{n}$ é dada pela expressão: área de Q = a^2.

Resta-nos mostrar que o resultado continua válido para quadrados de lado com medida irracional. Para tanto, utilizaremos alguns fatos a respeito das propriedades dos números reais:

1. Dados dois números reais positivos a e b, temos que $a < b$, se e se somente se, $a^2 < b^2$.

2. Dados dois números reais quaisquer a e b, sempre existe um número racional entre eles.

3. Dado um número real positivo a, existe um único número real positivo b tal que $b^2 = a$.

Como consequência da segunda condição, podemos concluir que arbitrariamente próximos a qualquer número irracional a, podemos encontrar números racionais r e s tais que $r < a < s$. Assim um quadrado de área R e lado a, ficará sempre no interior de um quadrado de lado racional s, cuja área é igual a s^2, e terá em seu interior um quadrado de lado r, e portanto com área r^2, conforme mostra a figura 3.26.

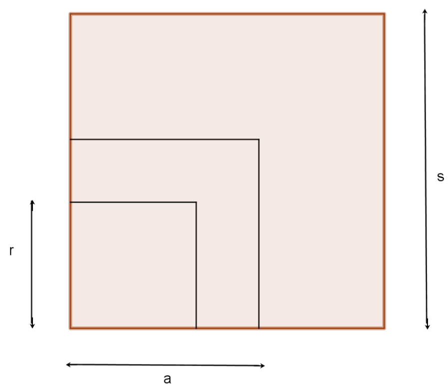


Figura 3.26: *Aproximação de um quadrado de lado irracional por quadrados de lado racional, por excesso e por falta.*

Assim, teremos $r^2 < A(R) < S^2$. Por outro lado, temos pela primeira propriedade que $r^2 < a < S^2$, para quaisquer racionais r e s tais que $r < a < s$. Supondo, então, que a área $A(R)$ seja igual a um número $b < a^2$. Pela terceira propriedade existirá a raiz quadrada de b, que será denotada por $\sqrt{b}$, que será um número menor que a. E pela segunda propriedade existirá um número racional r entre $\sqrt{b}$ e a. Assim devido a todas as informações expostas anteriormente, $b < r^2 < A(R)$, o que é uma contradição, pois supusemos que $A(R) = b$. Da mesma forma, podemos verificar a área do quadrado de lado a, não pode ser um número maior que a^2. Portanto $A(R)$= a^2.

Com isto, exaurimos todas as possibilidades para medida do lado de um quadrado. Em todos os casos temos que a área do quadrado é numericamente igual ao quadrado da medida do lado.

A maneira de provar uma fórmula mostrando que a desigualdade é impossível é devido a Eudóxio e é conhecido como o método da exaustão.

A partir deste teorema fundamental, podemos calcular as áreas de outras figuras planas fundamentais.

Teorema 2: A área de um retângulo é o produto de sua base pela sua altura.

Demonstração: Consideremos Q, a área de um retângulo de medidas lados b e h, construiremos um quadrado de lado $(b+h)$, cuja área pelo teorema 1 é igual a $(b+h)^2$. Por outro lado, o quadrado de lado $(b+h)$ é constituído de um quadrado de lado b, portanto de área igual a b^2, um quadrado de lado h, portanto de área igual a h^2, e dois retângulos Q de lados b e h, conforme ilustrado na figura abaixo.

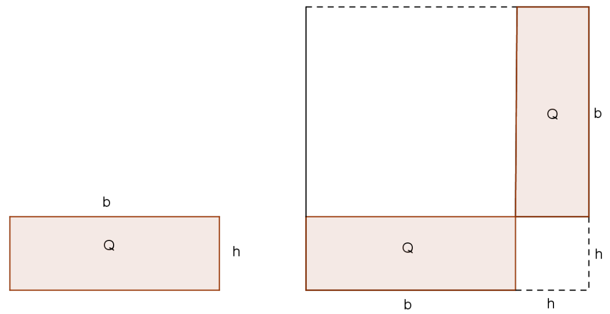


Figura 3.27: *Cálculo da área de um retângulo*

Logo, podemos concluir que a área do quadrado de área $(b+h)$, ou seja,

$(b+h)^2 = b^2 + 2bh + h^2$

$(b+h)^2 = b^2 + 2\ Q + h^2$

$2Q = 2bh$

$Q = bh$

Logo, fica demonstrado que a área de um retângulo é o produto de sua base pela sua altura.

Sabemos que as demonstrações anteriores talvez não estejam ao nível de compreensão da maioria dos alunos do 9º Ensino Fundamental, por isso sugerimos que sejam textos complementares. As demonstrações requerem conhecimentos de números irracionais, proporção, desigualdades e frações e por isso, só poderia ser apresentada do 9º Ensino Fundamental em diante.

Provavelmente o aluno compreenderá melhor, estabelecerá relações e não somente irá memorizar fórmulas se for apresentado ao assunto áreas aprendendo o conceito de áreas. Ao demonstrar a fórmula da área do quadrado, podemos provar as demais. Sendo a demonstração da fórmula da área do quadrado de difícil compreensão, os livros poderiam apenas usar o resultado, sugerir uma demonstração como leitura complementar e usar a fórmula da área do quadrado para provar as demais. Uma forma de contribuir na melhoria do processo ensino aprendizagem seria propor atividades com resolução de problemas, uso de jogos e utilização de softwares como, por exemplo, o Geogebra.

4 Pesquisa realizada com alunos e professores sobre a presença de demonstrações de Geometria nos Ensinos Fundamental e Médio

A transição da Matemática do dia-a-dia para uma Matemática mais formal, segundo Lorenzato [23], é um caminho difícil de ser percorrido e gera insegurança até mesmo nos professores, que muitas vezes tiveram pouco contato com a parte mais abstrata da Matemática. Apesar de toda esta dificuldade, sabemos que o contato com este mundo abstrato pode colaborar muito para o desenvolvimento do raciocínio do aluno. A importância de saber tirar conclusões e fazer argumentações estão expostas nos PCNs de Matemática:

> "Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional."(Brasil, 2013, p.40).

Essa pesquisa de campo é uma complementação deste estudo e visa a obter informações se alunos estão tendo contato com as provas em Geometria na Educação Básica e se professores consideram este contato importante. Essa pesquisa é uma amostra da realidade do ensino das demonstrações de Geometria na Educação Básica de nosso país.

A pesquisa de campo foi feita através de um questionário simples e objetivo versando perguntas sobre a formação acadêmica dos professores e alunos e as demonstrações na Educação Básica.

Essa pesquisa, como já mencionado, foi realizada com um grupo de docentes e outro de discentes. O grupo de discentes foi composto por 41 alunos dos períodos iniciais do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense. Com relação aos docentes, o grupo foi composto por 20 professores de Matemática da rede pública, principalmente, e da rede particular de ensino do Estado do Rio de janeiro, entre eles, alguns professores que cursam o

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal Fluminense.

Os questionários utilizados nesta pesquisa podem ser encontrados no final deste trabalho.

Em seguida, iremos fazer a análise dos questionários aplicados aos discentes e docentes.

4.1 Análise do questionário aplicado aos discentes

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos com a aplicação dos questionários aos discentes. Mostraremos tabelas com as informações apresentadas pelos alunos.

1ª pergunta: Onde você cursou a Educação Básica? (Nesta questão, marque mais de um item, se for necessário).

Rede pública (municipal e estadual)	18
Rede particular	22
Rede pública e particular	1
Total de alunos	41

Tabela 4.1: Resposta da pergunta 1 feita aos discentes.

2ª pergunta: Na Educação Básica (Ensinos Fundamental e Médio) você aprendeu a demonstrar algum resultado matemático?

Sim	17
Não	21
Não responderam ou não lembram	3
Total de alunos	41

Tabela 4.2: Resposta da pergunta 2 feita aos discentes.

3ª pergunta: Você considera importante saber demonstrar resultados matemáticos (teoremas, propriedades, corolários, etc.) ?

4ª pergunta: Você considera que as demonstrações contribuem para a formação do pensamento lógico matemático dos estudantes ?

Sim	35
Não	0
Concordam parcialmente	6
Total de alunos	41

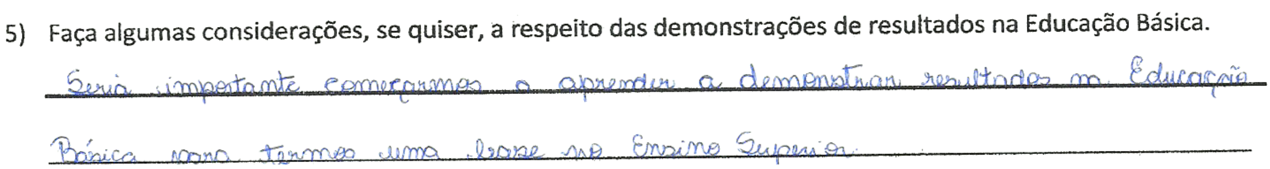
Tabela 4.3: Resposta da pergunta 3 feita aos discentes.

Sim	39
Não	0
Concordam parcialmente	2
Total de alunos	41

Tabela 4.4: Resposta da pergunta 4 feita aos discentes.

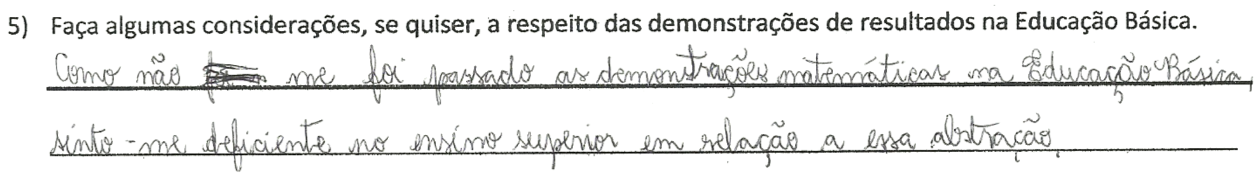
5ª pergunta: Faça algumas considerações, se quiser, a respeito das demonstrações de resultados na Educação Básica.

Grande parte dos alunos deixou esta pergunta em branco. No entanto, os alunos que responderam, na maioria, destacaram ser importante aprender a demonstrar na Educação Básica para ter base no Ensino Superior, como veremos a seguir:


5) Faça algumas considerações, se quiser, a respeito das demonstrações de resultados na Educação Básica.

Seria importante começarmos a aprender a demonstrar resultados na Educação Básica como termos uma base no Ensino Superior.

Figura 4.1: Resposta do aluno A.


5) Faça algumas considerações, se quiser, a respeito das demonstrações de resultados na Educação Básica.

Como não me foi passado as demonstrações matemáticas na Educação Básica sinto-me deficiente no ensino superior em relação a essa abstração.

Figura 4.2: Resposta do aluno B.

6ª pergunta: Durante o Ensino Fundamental ou Médio, seu professor de Matemática demonstrou algum teorema sobre áreas, tais como: área do triângulo, área do trapézio, etc.?

Sim	15
Não	22
Não responderam	4
Total de alunos	41

Tabela 4.5: Resposta da pergunta 6 feita aos discentes.

Analisando as tabelas podemos perceber que a maioria dos alunos da graduação em Matemática da UFF pesquisados são oriundos da rede particular de ensino. Em seguida, quando perguntados se já tinham demonstrado algum resultado, o grupo ficou dividido. Praticamente todos consideraram importante saber demonstrar resultados na Educação Básica e mais da metade dos alunos apontou que seu professor de Matemática não demonstrou nenhum dos resultados perguntados na pesquisa.

4.2 Análise do questionário aplicado aos docentes

Nesta seção também apresentaremos os resultados obtidos com a aplicação dos questionários aos docentes. Mostraremos tabelas com as informações apresentadas pelos professores.

1ª pergunta: Quando aluno, você aprendeu a demonstrar algum resultado de Matemática? Em que série(s)?

Sim	9
Não	10
Não responderam	1
Total de professores	20

Tabela 4.6: Resposta da pergunta 1 feita aos docentes.

Com relação às séries, a maior parte dos docentes que responderam disseram que demonstraram resultados no Ensino Médio.

2ª pergunta: Você considera importante saber demonstrar resultados matemáticos (teoremas, propriedades, corolários, etc.)?

Sim	15
Não	0
Concordaram parcialmente	5
Total de professores	20

Tabela 4.7: Resposta da pergunta 2 feita aos docentes.

3ª pergunta: Você considera importante que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental tenham contato com as demonstrações?

Sim	17
Não	0
Concordaram parcialmente	3
Total de professores	20

Tabela 4.8: Resposta da pergunta 3 feita aos docentes.

4ª pergunta: Você considera importante que os alunos do Ensino Médio tenham contato com as demonstrações?

Sim	18
Não	0
Concordaram parcialmente	2
Total de professores	20

Tabela 4.9: Resposta da pergunta 4 feita aos docentes.

5ª pergunta: As demonstrações contribuem para a formação do pensamento lógico matemático dos jovens?

Sim	17
Não	0
Concordaram parcialmente	3
Total de professores	20

Tabela 4.10: Resposta da pergunta 5 feita aos docentes.

6ª pergunta: Quais demonstrações, quando for o caso, você considera mais importante que os alunos aprendam?

As demonstrações de teoremas que mais apareceram nas respostas foram do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Tales.

7ª pergunta: Faça algumas considerações, se quiser, a respeito das demonstrações de resultados da Educação Básica.

Os professores que responderam esta questão relataram a importância das demonstrações para o raciocínio do aluno, como veremos nos trechos a seguir:

Faça algumas considerações, se quiser, a respeito das demonstrações de resultados na Educação Básica ?

O aluno que aprende através de demonstração pode até esquecer a fórmula, mas acaba lembrando através da demonstração.

Figura 4.3: Resposta do professor A.

7) Faça algumas considerações, se quiser, a respeito das demonstrações de resultados na Educação Básica ?

Acredito, que as demonstrações levam o aluno a perceber o porquê da matemática. Leva-o, assim, a querer desenvolver o raciocínio.

Figura 4.4: Resposta do professor B.

Após analisar as tabelas apresentadas anteriormente, podemos afirmar que os professores ficaram divididos com relação à 1ª pergunta: "Quando aluno, você aprendeu a demonstrar alguns resultados? Em que série(s)?". 75% dos professores consideraram importante saber demonstrar teoremas e quase todos consideram importante que os alunos do 9º ano saibam demonstrar resultados matemáticos. Quando a mesma pergunta é feita com relação aos alunos do Ensino Médio, 90% dos professores indicaram ser importante que esses alunos tenham contato com demonstração. Com relação à 5ª pergunta, 85% dos professores responderam que as demonstrações são importantes para a formação do pensamento lógico matemático dos estudantes. Vale ressaltar também que tanto os professores, quanto os alunos, num grande percentual, responderam que é importante saber demonstrar algum resultado matemático.

4.3 Conclusão

Analisando os questionários, concluímos que tanto docentes quanto discentes, que participaram da pesquisa, ficaram divididos quando perguntados se tinham aprendido a demonstrar algum resultado matemático da Educação Básica. Os dois grupos também responderam de forma parecida quando perguntados sobre considerar importante saber demonstrar resultados matemáticos, ou seja, responderam "sim"na maioria das perguntas. Finalmente, os dois grupos quando perguntados para fazer algumas considerações a respeito de demonstrações de resultados na Educação Básica responderam da seguinte maneira: os discentes disseram ser importante demonstrar para ter base no Ensino Superior, já os docentes disseram que as demonstrações são importantes para o raciocínio dos alunos. Com isso, podemos perceber que a pesquisa com os docentes e discentes revela a importância das demonstrações para o conhecimento matemático e, sendo assim, as análises dos livros didáticos tendo com tema central o áreas se faz necessário.

O objetivo da pesquisa foi alcançado, pois a partir das respostas dos discentes e docentes procuramos observar, com uma visão diferente, como os livros didáticos tratam a demonstração de áreas. Na nossa prática docente procuraremos atentar melhor para a importância das demonstrações no contexto da aprendizagem dos alunos.

5 Considerações Finais

Neste estudo procuramos, no primeiro capítulo, trazer um breve relato sobre como ingressamos no magistério e algumas considerações sobre o ensino de Matemática no Brasil a partir do século XX. Já no segundo capítulo, foi apresentado um suporte teórico falando sobre os tipos de validação de provas de Balacheff e os níveis de desenvolvimento do raciocínio em Geometria de Van Hiele. No capítulo seguinte, analisamos três livros didáticos e como o assunto áreas é apresentado nesses livros. Mais adiante, através de uma pesquisa de campo realizada por meio de um questionário preenchido por alunos e professores da rede pública, fizemos uma breve análise sobre demonstrações de Matemática na Educação Básica.

Podemos constatar com esta pesquisa que o ensino de Matemática pode ser mais abrangente no que tange à formação do pensamento lógico-matemático dos alunos, pois estes, provavelmente, tendo os questionários como base, tem tido pouco contato com demonstrações de resultados matemáticos, sejam eles teoremas ou propriedades, contrariando assim as próprias diretrizes dos PCNs, que dizem que devemos desenvolver habilidades de argumentação e raciocínio.

Para darmos novos rumos ao ensino da Matemática, um dos aspectos que devemos considerar é o contato dos alunos com atividades de argumentações. No entanto, é preciso termos o cuidado para não gerarmos desinteresse pelo universo abstrato.

Neste momento, podemos relatar que a nossa visão a respeito das demonstrações, em particular do assunto áreas, mudou substancialmente, principalmente no que diz respeito a como os alunos enxergam as demonstrações e a pouca importância que dão à Matemática mais formal.

Finalmente, podemos destacar que a consolidação de uma aprendizagem satisfatória carece de ações conjuntas tais como: o uso de materiais concretos, foco na resolução de problemas, uso de jogos e Geometria dinâmica. Esses instrumentos facilitarão o aluno a estabelecer relações que posteriormente poderão ser utilizadas em demonstrações matemáticas.

Referências Bibliográficas

[1] ABBAGNANO, N. ; *Dicionário de filosofia.* Editora São Paulo: Mestre Jou, 1982.

[2] BALACHEFF, N., *Processus de preuve et situations de validation* Educational Studies in Mathematics, pp. $147-176$, 1987.

[3] BALACHEFF, N., *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics in Pimms D.(Eds). Mathematics, Teachers and Children: A Reader, Hodder Stoughton* London, 1988.

[4] BALACHEFF, N., *Une étude des processus de preuve in mathématique chez des élèves de collège(tesis doctoral)* França: Univ. J.Fourier-Grenoble, 1988.

[5] BRASIL(2008), *Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) - Guia de livros Didáticos*. Ministério da Educação - Secretaria de Educação Básica, 2008.

[6] BRASIL(2011), *Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) - Guia de livros Didáticos*. Ministério da Educação - Secretaria de Educação Básica, 2011.

[7] BRASIL(2013), *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)*. Ministério da Educação - Secretaria de Educação Fundamental, 2013.

[8] CAJORI, F., *Uma História da Matemática.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, pp. $44-46$, 2007.

[9] D'AMBRÓSIO, U., *Da realidade à açao: reflexões sobre educação e matemática.* Campinas, São Paulo: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

[10] *DANTE, L. R., Tudo é Matemática.* $9^{\underline{o}}$ *ano,* $3^{\underline{a}}$ *edição, São Paulo: Editora Ática,* 2011.

[11] *FACCI, M. G. D., Valorização ou esvaziamento do trabalho do professor? Campinas-SP: Editora Autores Associados, p.*30, 2004.

[12] *GIOVANNI JR., J. R.; CASTRUCCI, B, A Conquista da Matemática.* $9^{\underline{o}}$ *ano,* $1^{\underline{a}}$ *edição, São Paulo: Editora FTD,* 2009.

[13] *GRAVINA, M.A., SANTAROSA, L. M.; A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. Acta do IV Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, Brasília,* 1998*, Campinas,* 2003.

[14] *GRÉCO, P.; Aprendizagem e conhecimento em Piaget. Rio de Janeiro: Editora Freitas Bastos,* 1974.

[15] *HOFLING, E. M., Notas para discussão quanto à implementação de programas de governo: Em foco o Programa Nacional do Livro Didático. Educação e & Sociedade, n.*70*, pp.* $159-170$*,* 1998.

[16] *LAJOLO, M., Livro Didático: um (quase) manual de usuário. Em Aberto, n.69, pp.* $3-9$, 1996.

[17] *LIMA, E. L., Medida e forma em Geometria. Rio de Janeiro: SBM,* 1ª *edição, 1991.*

[18] *LORENZATO, S., Um (Re)encontro com Malba Tahan Revista Zetetiké, n.4, pp.* $41-49$, 1993.

[19] *LORENZATO, S. ; VILA, M. C. , Século XXI: qual Matemática é remcomendável? Revista Zetetiké, n.1, pp.* $95-102$, 1995.

[20] *LORENZATO, S.; FIORENTINI, D., Investigação em educação matemática - percursos teóricos e metodológicos. Campinas-SP: Editora Autores Associados, p.*116, 2006.

[21] *LORENZATO, S.; Para Aprender Matemática. Campinas-SP: Editora Autores Associados, p.*20, 2008.

[22] *MENDES, L. J., Uma Análise da abordagem sobre argumentações e provas numa coleção do Ensino Médio. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - São Paulo,* 2007.

[23] *NASSER, L.; Geometria segundo a teoria de Van Hiele. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática- UFRJ -Projeto Fundão-SPEC-PADCT-CAPES, pp.* $4-5$, 2000.

[24] *PAVANELLO, R. M., O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências. Revista Zetetiké, v.1, pp.* $7-17$, 1993.

[25] *PESCO, D. U.; ARNAUT, R. G. T. , Geometria Básica. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj- Consórcio Cederj, pp.* $144-146$, 2012.

[26] *PIETROPAOLO, R. C.; (RE)Significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática Tese de Doutorado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - São Paulo, p.* 49, 2005.

[27] *SANTOS, J. B. S.; Argumentação e prova: Análise de Argumentos Algébricos de alunos da Educação Básica Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - São Paulo,* 2007.

[28] *SANTOS; J.; Maymone A., Manual do Educador Recife:Editora Construir,* 3ª *edição, 2012.*

[29] *SALUM, E. M., Ladrilhamentos. www.ime.usp.br/matemateca/textos/ladrilhamentos/pdfacesso em:* 06 *de maio* 2013, 03 : 15.

[30] *SOUZA, J. C. M.; Matemática Divertida e Curiosa. Rio de Janeiro: Editora Record, p.* 14, 1994.

[31] *TARDIF, M.; Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários Petrópolis, RJ:Vozes,* 2002.

[32] *TERRA, M. R., O desenvolvimento humano na teoria de Piaget. www.unicamp.br/iel/site/alunos/publicacoes/textos/d00005.htm acesso em:* 06 *de maio* 2013, 02 : 32 : 10.

Apêndice

Universidade Federal Fluminense
PROFMAT- Mestrado Profissional em Rede Nacional
Trabalho de conclusão de Curso- TCC
Professora Orientadora: Profª Dra. Lhaylla Crissaff
Mestrandos: Nilberti A. D. de Almeida e Luiz Fernando A. Jr.

Questionário de trabalho de Campo (aluno)

Nome do aluno(a):____ Data:___/___/_____

Nome da Instituição em que estuda atualmente:____

Questões:

1) Onde você cursou ou cursa a Educação Básica? (Nesta questão,marque mais de um item, se for necessário)

   (A) Rede pública municipal (B) Rede pública estadual (C) Rede pública federal (D) Rede particular

2) Na Educação Básica (ensinos fundamental e médio) você aprendeu a demonstrar alguns resultados matemáticos? Em que série(s) ? Lembra quais demonstrações ?

   ____

3) Você considera importante saber demonstrar os resultados matemáticos (teoremas , propriedades, corolários e etc. ?

   (B) Sim (B) Não (C) Concordo parcialmente.

4) Você considera que as demonstrações contribuem para a formação do pensamento lógico matemático dos estudantes ?

   (A) Sim (B) Não (C) Concordo parcialmente.

5) Faça algumas considerações, se quiser, a respeito das demonstrações de resultados na Educação Básica.

6) Durante o Ensino Fundamental ou médio, seu professor de Matemática demonstrou algum **teorema sobre áreas,** tais como: área do triângulo, área do trapézio, etc. ?

(A) Sim (B) Não

Figura 5.1: Questionario aplicado aos alunos.

Apêndice

Universidade Federal Fluminense
PROFMAT- Mestrado Profissional em Rede Nacional
Trabalho de conclusão de Curso- TCC
Professora Orientadora: Prof[a] Dra. Lhaylla Crissaff
Mestrandos: Nilberti A. D. de Almeida e Luiz Fernando A. Jr.

Questionário de trabalho de Campo (professor)

Nome do professor:____

Nome da(s) escola(s) onde leciona:____

Tempo em que trabalha no magistério:____

Séries/ anos em que já lecionou ou
leciona:____
____

Questões:

1) Quando aluno, você aprendeu a demonstrar alguns resultados ? Em que série(s) ?

   ____

2) Você considera importante saber demonstrar os resultados matemáticos (teoremas , propriedades, corolários, ...) ?

   (A) Sim (B) Não (C) Concordo parcialmente.

3) Você considera importante que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental tenham contato com as demonstrações ?

   (A) Sim (B) Não (C) Concordo parcialmente.

4) Você considera importante que os alunos do Ensino Médio tenham contato com as demonstrações ?

   (A) Sim (B) Não (C) Concordo parcialmente.

5) As demonstrações contribuem para a formação do pensamento lógico matemático dos jovens ?

   (A) Sim (B) Não (C) Concordo parcialmente.

6) Quais demonstrações, quando for o caso, você considera mais importantes que os alunos aprendam ?

   ____

7) Faça algumas considerações, se quiser, a respeito das demonstrações de resultados na Educação Básica.

   ____

   ____

Figura 5.2: Questionario aplicado aos professores.