UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CRISTIANO HOLANDA ARAUJO GOMES

ATIVIDADES DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DA BALHESTILHA

FORTALEZA - CEARÁ
2019

CRISTIANO HOLANDA ARAUJO GOMES

ATIVIDADES DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DA BALHESTILHA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Ana Carolina Costa Pereira

FORTALEZA - CEARÁ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Gomes, Cristiano Holanda Araujo.
Atividades didáticas para o ensino de razões trigonométricas com o auxílio da balhestilha [recurso eletrônico] / Cristiano Holanda Araujo Gomes. - 2019.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 87 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.
Área de concentração: Matemática.
Orientação: Prof.ª Dra. Ana Carolina Costa Pereira.

1. Ensino de Trigonometria. 2. Balhestilha. 3. Sequência didática. I. Título.

CRISTIANO HOLANDA ARAÚJO GOMES

ATIVIDADES DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DA BALHESTILHA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 20 de agosto de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Costa Pereira (Orientadora)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Wanderley de Oliveira Pereira

Prof. Dr. Wanderley de Oliveira Pereira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Ana Cláudia Mendonça Pinheiro

Prof.ª Dr.ª Ana Cláudia Mendonça Pinheiro
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

A minha família, em especial a minha esposa, Ana Paula Paz Araujo Gomes pelo apoio, dedicação e palavras de incentivo, e ao meu filho, Pedro de Holanda Gomes Neto por estar presente nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

À Deus Poderoso e Onipotente, por tornar possível a realização desse sonho e por permitir mais uma importante etapa da minha vida profissional.

À Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Costa Pereira, do Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual do Ceará, pela competência, dedicação, paciência, exemplo de profissionalismo e pela brilhante orientação na elaboração do meu trabalho de final de curso.

Aos membros da Banca Examinadora, Prof. Dr. Wanderley de Oliveira Pereira e Prof.ª Dr.ª Ana Cláudia Mendonça Pinheiro, pelo espírito de colaboração, ensinamentos e especial apoio.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual do Ceará pelo prazer de ensinar e pela aprendizagem, respeito e dedicação que demonstraram sempre durante as aulas.

Aos meus colegas do Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual do Ceará pelo companheirismo e troca de conhecimentos.

A todos, o meu amor, carinho e gratidão por tudo.

RESUMO

A trigonometria encontra-se agregada à astronomia, pois, ao longo dos tempos, esse campo da ciência foi exigindo instrumentos de cálculo mais complexos, que implicavam no estabelecimento de relações entre os lados e ângulos de triângulos. Ainda hoje, pode-se perceber que o estudo da trigonometria não tem sido explorado dentro do cotidiano dos alunos, sendo apresentada de forma técnica e desvinculada das aplicações. O ensino da trigonometria baseada em alguns critérios é fundamental no sentido de oferecer uma melhor aprendizagem para os alunos, como por exemplo, aspectos históricos, metodologia, exercícios e atividades com algum instrumento matemático e tecnologia. Dentro desse contexto, a problemática a ser desenvolvida encontra-se baseada na seguinte questão: como utilizar o instrumento matemático balhestilha para apresentar as razões trigonométricas do triângulo retângulo? Portanto, o objetivo deste estudo busca analisar o uso da balhestilha através de atividades para o ensino das razões trigonométricas. Dessa forma, foi realizada uma pesquisa exploratória, na qual foram levantadas concepções sobre a trigonometria no triângulo retângulo e os conhecimentos históricos e matemáticos da balhestilha; que envolve o estudo de razões trigonométricas aplicada no nono ano do ensino fundamental. Assim, o aluno pode adquirir a prática de calcular distâncias dentro do ambiente escolar, tornando o aprendizado mais significativo e interessante. Os resultados encontrados apontam para a necessidade de o aluno trabalhar o conteúdo de trigonometria de forma mais contextualizada de modo que possa atribuir mais significado ao seu estudo, e que, em contrapartida, seja valorizado os conhecimentos que os alunos já trazem consigo, além de incentivar o uso de instrumentos matemáticos como forma de facilitar o ensino e a aprendizagem de razões trigonométricas.

Palavras-chave: Ensino de Trigonometria. Balhestilha. Sequência didática.

ABSTRACT

Trigonometry is added to astronomy because, over time, this field of science has been demanding more complex calculation tools, which implied the establishment of relationships between sides and angles of triangles. Even today, it can be seen that the study of trigonometry has not been explored within the students' daily life, being presented in a technical way and detached from the applications. Teaching trigonometry based on some criteria is fundamental in order to provide better learning for students, such as historical aspects, methodology, exercises and activities with some mathematical instrument and technology. Within this context, the problem to be developed is based on the following question: how to use the mathematical instrument to show the trigonometric ratios of the right triangle? Therefore, the aim of this study is to analyze the use of the raft through activities to teach trigonometric ratios. Thus, an exploratory research was carried out, in which conceptions about trigonometry in the right triangle and the historical and mathematical knowledge of the raft were raised; which involves the study of trigonometric ratios applied in the ninth grade of elementary school. Thus, the student can acquire the practice of calculating distances within the school environment, making learning more meaningful and interesting. The results point to the need for students to work on trigonometry content in a more contextualized way so that it can give more meaning to their study, and that, in return, the knowledge that students already bring with them is valued, besides encouraging the use of mathematical instruments as a way to facilitate the teaching and learning of trigonometric ratios.

Keywords: Teaching Trigonometry. Bumblebee. Following teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No presente momento, a matemática, encontra-se dividida em várias áreas do conhecimento, tais como, álgebra, geometria, aritmética e em particular a trigonometria. Essa área estuda as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos. A trigonometria, assim como outros campos da matemática, não foi obra de uma única civilização, pois recebeu contribuições de outros povos como: gregos, árabes, hindus e babilônios. A trigonometria, um dos ramos da matemática, surgiu e se desenvolveu como ferramenta, cuja finalidade era auxiliar a astronomia, em diversos campos de conhecimento. Portanto, torna-se importante apresentar ao aluno o universo de possibilidades de aplicação desse conceito para que se possa compreender sua utilidade, aliando a abstração à aplicação prática.

Desde a antiguidade até os dias atuais, o homem sempre mostrou a necessidade de avaliar distâncias inacessíveis. Praticamente tudo que se torna importante saber a respeito de distâncias no mundo em que vivemos é calculado com o auxílio da trigonometria. Alicerçado aos Parâmetros Curriculares Nacionais, percebe-se a importância que deve ser dada a contextualização, pois através dela a matemática tem mais significado e o aluno observa sua utilidade na vida cotidiana. Através de uma sequência didática os alunos poderão construir o conhecimento com expressividade, estabelecendo relações dos conteúdos de trigonometria obtidos na sala de aula. Desse modo, torna-se necessário que o professor trabalhe a trigonometria de forma menos técnica e mais contextualizada.

Em particular, o ensinamento de trigonometria apresenta como ponto de partida, estudos relacionados com a semelhança de triângulos, para desenvolver um raciocínio cognitivo preparado visando compreender os conceitos das razões trigonométricas, entretanto, esse objetivo não é alcançado. Portanto, as razões trigonométricas precisam ser explicadas de tal forma que tenham uma conexão com outras disciplinas, nas quais estão sendo aplicada no seu cotidiano favorecendo o ensino da matemática, especialmente a trigonometria.

Todavia, os alunos não conseguem entender os conceitos das razões trigonométricas e muito menos aplicá-los no dia a dia, seja devido à falta do conhecimento que deveriam apresentar, ou devido a problemas na exposição do contexto, no qual não houve exemplos didáticos que estimulasse o pensamento de maneira concreta para a resolução de tais problemas. Muitas vezes a apresentação é feita pela construção das relações no triângulo, sem nenhum enquadramento. Desta forma, para os alunos, o conteúdo não tem sentido com o meio externo, consequentemente, ele não consegue obter uma compreensão favorável e assim, torna-se mais difícil uma aceitação. Também, na maioria das vezes não entendem o porquê das fórmulas das razões trigonométricas e nem sequer sabem aplicar em exercícios que possuem situações problemas, por não conseguirem desenvolver a compreensão para tal questão.

Geralmente, a falta de tempo para explicar determinado conteúdo leva o docente a transmitir rapidamente a parte teórica para assim desenvolver com os alunos situações problemas e questões diretas, tão somente aplicações abstratas dos conceitos trigonométricos, gerando problemas cognitivos, que acarreta uma falta de compreensão nas possíveis resoluções das situações problemas encontrada no cotidiano.

Portanto, para a construção do conhecimento, o autor do estudo propõe vivenciar o ensino das relações métricas com o apoio da balhestilha, com base na sua experiência em sala de aula e com o tema em questão. Neste sentido, destaca vários estudos dentro da mesma linha de pesquisa, como Ramos (2018) que trabalha a trigonometria e o teodolito; Victorio (2018) que apresenta a trigonometria e dobraduras; Batista (2018) que estuda o ensino da trigonometria com o apoio do instrumento métrico da balhestilha; Catharina (2017) que enfatiza o estudo da trigonometria com a história da matemática e o geogebra; Teixeira (2014) que apresenta uma revisão dos conceitos de trigonometria com o apoio do instrumento náutico, o quadrante e finalmente Melo (2013), que mostra um estudo das razões trigonométricas com o apoio do geogebra.

Por meio de uma explicação mais concreta, Ramos (2018) enfatiza o aprendizado da trigonometria, no qual elaborou uma atividade didática para trabalhar a parte teórica da trigonometria e a parte histórica de um instrumento matemático denominado teodolito; com o intuito de desenvolver situações pertinentes da trigonometria juntamente com a topografia, buscando contextualizar a matemática apresentada, e, assim, mostrar que a trigonometria pode ser uma matéria interessante. A utilização desse material para construção do conhecimento de forma prática, com vistas ao uso do teodolito para fundamentar a trigonometria, torna-se viável, além desse propósito, formar uma aula prática do conteúdo tendo assim uma abordagem diferente da convencional, que é a exposição teórica e resoluções de exercícios repetitivos dos conceitos das razões trigonométricas. Os resultados apontam que a geometria e trigonometria, às vezes desinteressantes e sem sentido para os alunos, podem resolver problemas em situações reais, que são úteis e importantes. Paralelamente ao trabalho foi desenvolvido um teodolito didático para impressão 3D, disponível gratuitamente na internet, além de um manual de uso do teodolito nas aulas de matemática.

Em seguida, a pesquisa de Victório (2018) procura desenvolver situações na geometria utilizando o origami para mostrar as formas geométricas através das aulas de construção do conhecimento utilizando papel. Dessa forma, procurou fazer com que as dobraduras deixassem de ser apenas um instrumento de arte, para proporcionar atividades de geometria em sala de aula ou mesmo em casa, para que os estudantes juntamente com os pais pudessem desenvolver essa atividade. Neste sentido, foi possível observar que esse material é bastante acessível, mas precisa da atenção dos discentes para a realização do problema exposto, pois geralmente as salas são numerosas e bastante heterogêneas, tornando assim um trabalho sem uma aceitação total por parte dos alunos. De acordo com os resultados, o referido estudo deu ênfase à matemática, a geometria e a trigonometria apresentada nos triângulos e retângulos e triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulos, dentre outros, evidenciando particularidades nas dobraduras, dependendo dos lados dos triângulos escolhidos para a construção das dobras do origami.

A pesquisa de Batista (2018) desenvolveu um estudo baseado em instrumentos náuticos, em particular a balhestilha, quando percebeu que vem crescendo o número de estudos sobre esse tema. A pesquisa partiu do fato de investigar o conhecimento histórico, a forma de construir e utilizar na prática, para posteriormente a balhestilha ser utilizada como material didático. Todavia, ao mesmo tempo em que contempla o estudo da balhestilha no curso de extensão universitária, deixa de obter o resultado, pois não é garantia que os alunos do nono ano do ensino fundamental possam adquirir esse material utilizado em sala de aula.

Dentre as possibilidades de recursos capazes de minimizar essas dificuldades em trigonometria estão os instrumentos matemáticos usados para medir ângulos e distâncias com a finalidade de ajudar na resolução de problemas matemáticos observacionais e experimentais. Esses instrumentos começaram a serem fabricados a partir do século XIII no qual foram muito utilizados por filósofos naturais. Os instrumentos matemáticos são manuseados de diferentes formas, especificamente na mobilização do conhecimento, tendo assim uma grande importância para o processo de aprendizado (BATISTA, 2018).

Catharina (2017) escolheu fazer uma interatividade com a história da matemática e o geogebra como recurso didático para ser utilizado nos conceitos trigonométricos no triângulo retângulo. Devido à falta de conhecimento por parte de alguns discentes, foi observada uma pequena resistência, mesmo assim, os alunos procuraram resolver os problemas e participar das atividades propostas. Dentro desse viés, pode-se constatar que o uso da história da matemática e do geogebra beneficiaram o desenvolvimento de várias habilidades com relação à trigonometria, possibilitando uma aula mais dinâmica, em todo o processo de construção do conhecimento.

Teixeira (2014) aborda as grandes navegações e os instrumentos utilizados para fazer essas viagens e propõe a construção de um instrumento da época das grandes navegações, o quadrante. Em seguida, apresenta medidas de distâncias em uma aula de campo aplicando a trigonometria, com a finalidade de revisar esses conceitos em um laboratório de educação matemática. O quadrante é um instrumento muito antigo usado por astrônomos e navegadores. O quadrante astronômico, mais sofisticado, surgiu antes do quadrante náutico com a finalidade de medir a altura de astros e a distância angular entre os astros. O quadrante náutico, utilizado desde o século XV, pelos navegadores portugueses permitia ao navegador saber a latitude do lugar a partir da medição da altura angular dos astros. Nesse caso os alunos participaram ativamente das atividades de investigação com resultado favorável, todavia, não depende apenas da atividade, mais também do professor construir junto com os alunos o conhecimento.

Melo (2013) deu prioridade à exposição das razões trigonométricas em situações do cotidiano não deixando de lado a parte conceitual, portanto, foram trabalhados conceitos das razões trigonométricas de forma técnica e depois utilizados recursos de software dinâmico como o geogebra nas resoluções de situações problemas para tornar a aula mais interessante. Diante do exposto, percebeu-se que os alunos tinham dificuldades de entender a trigonometria por falta de conhecimentos prévios, ficando assim, desestimulados do assunto e até da aula prática proposta pelo docente. No entanto, o recurso proposto foi bem aceito pelos discentes que quiseram realmente participar, apesar das suas limitações. De acordo com os resultados, o grau de entendimento dos alunos em cada etapa do aprendizado das razões trigonométricas, incluindo seu emprego em situações contextualizadas foi bastante satisfatório no desenvolvimento da abstração dos conceitos trabalhados.

Os autores citados apontam o estudo da trigonometria em contextos semelhantes. Entretanto, para o ensino de trigonometria existe um, em particular, que pode ser estudado, que é a balhestilha. Não se tem registro com precisão a época que ela surgiu, mas foi um instrumento utilizado na astronomia e na navegação para fazer medições. É um objeto de fácil fabricação, manipulação e composto por material bastante acessível, podendo ser utilizado facilmente no meio escolar.

Portanto, a relevância do tema visa organizar um estudo histórico e de conceitos trigonométricos encontrados nesse instrumento e posteriormente fazer sua construção para depois preparar atividades lúdicas para serem utilizadas no ambiente escolar.

A justificativa deste estudo abrange a aquisição do conhecimento científico por meio da história da trigonometria que possibilita o uso de diferentes recursos, fazendo um elo, sempre que possível, com outras disciplinas. Sob este aspecto, incentiva-se ao discente o gosto pela matemática e oportuniza-se a quebra de tabus sobre a matemática, que muitas vezes é considerada isolada e acessível apenas a uma elite e raramente é considerada como uma atividade humana em construção.

Além disso, o desejo do autor desse estudo, como professor de matemática é incentivar e estimular, principalmente no nono ano do ensino fundamental, a aprendizagem e a compreensão das razões trigonométricas, a partir de situações problemas utilizando a balhestilha, como um instrumento matemático.

Dentro desse contexto, a problemática a ser desenvolvida nesta pesquisa encontra-se baseada na seguinte questão: como utilizar o instrumento matemático balhestilha para apresentar as razões trigonométricas do triângulo retângulo?

Assim sendo, esse trabalho possui como objetivo geral analisar o uso da balhestilha através de atividades para o ensino das razões trigonométricas.

Dentro deste viés, os objetivos específicos encontram-se assim expostos:

- Identificar conhecimentos ou conceitos matemáticos das relações métricas no triângulo retângulo, do instrumento náutico conhecido como balhestilha;

- Conhecer o uso do instrumento náutico, a balhestilha, no ensino do conceito das relações métricas no triângulo retângulo;

- Apresentar atividades didáticas para o ensino de razões trigonométricas utilizando a balhestilha.

Para o alcance dos objetivos propostos, a estrutura do trabalho encontra-se organizada em capítulos. Neste contexto, a introdução está reservada ao marco introdutório com enfoque do tema, justificativa, problemática, objetivo geral, objetivos específicos, metodologia e estrutura do trabalho.

O segundo capítulo engloba, todos os conceitos de triângulo, suas classificações quanto aos lados e ângulos, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, a definição de semelhança de triângulos e seus casos de semelhança. Definiu-se triângulo retângulo para mostrar os conceitos trigonométricos do seno, cosseno e tangente com exemplos contextualizados das razões trigonométricas.

No terceiro capítulo foi destaque o conceito da balhestilha e seus componentes, os outros tipos de nomenclatura que foi lhe dada, a função e seu uso na navegação e de agrimensores para a determinação de distância. Destaca-se também a utilização e montagem para posterior graduação do virote com uso das razões trigonométricas. O quarto capítulo, apresenta atividades para calcular distâncias usando a balhestilha com as razões trigonométricas e semelhança de triângulos voltados para discentes do nono ano do ensino fundamental.

Portanto, o que se pode observar são questões de ordem geométrica na qual foi possível trabalhar os conceitos que envolvem triângulos, em especial, o triângulo retângulo de razões trigonométricas, que permitiu utilizar a balhestilha, de maneira correta para tornar o estudo mais significativo e prazeroso. A conclusão evidencia a importância do tema em estudo, os resultados obtidos e as referências, onde se encontram todos os autores consultados para a elaboração dessa dissertação.

Na sequência, destaca-se a trigonometria no triângulo retângulo e os tipos de triângulo além da definição de seno, cosseno e tangente.

2 A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

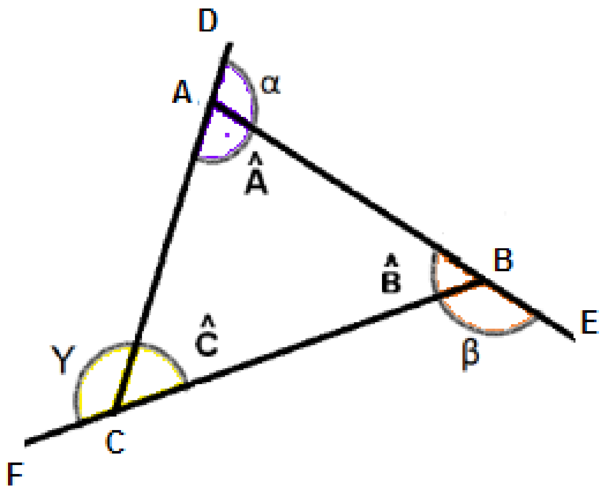
Nesse capítulo, o enfoque são as propriedades da semelhança de triângulos que é a base teórica da trigonometria, com a finalidade de demonstrar os conceitos das razões trigonométricas e por fim, desenvolver exercícios teóricos e práticos.

2.1 DEFINIÇÃO E TIPOS DE TRIÂNGULO

Antes de abordar o conteúdo propriamente dito, sobre semelhança, é importante conceituar alguns entes que são estudados na geometria, tais como, o conceito de triângulo e sua classificação com relação aos lados e ângulos.

Dolce e Pompeo (2013) define um triângulo a partir de três pontos diferentes que formam três lados e três ângulos internos. Dados três pontos não colineares A, B e C tem-se a união desses pontos formando os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, um triângulo cujos vértices são representados pelos A, B e C e os respectivos ângulos internos por $C\hat{A}B = \hat{A}$, $A\hat{B}C = \hat{B}$, $B\hat{C}A = \hat{C}$ e os ângulos externos $D\hat{A}B = \alpha$, $E\hat{B}C = \beta$ e $F\hat{C}A, = \gamma$ como mostra a Figura 1.

Figura 1 - Triângulo



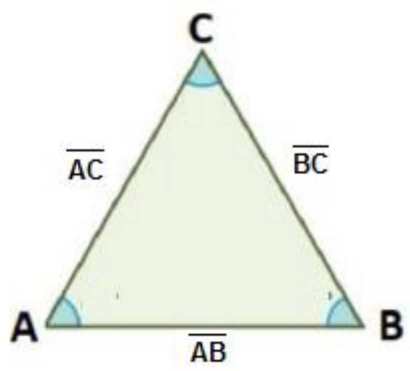
Fonte: Elaborado pelo autor.

Partindo desses conceitos, podemos classificar os triângulos com relação à medida dos lados e a medida dos ângulos.

Quanto à medida dos lados, o triângulo pode classificar-se em equiláteros, isósceles ou escalenos.

Um triângulo equilátero possui todos os seus lados congruentes como mostra a Figura 2, ou seja, os lados $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$.

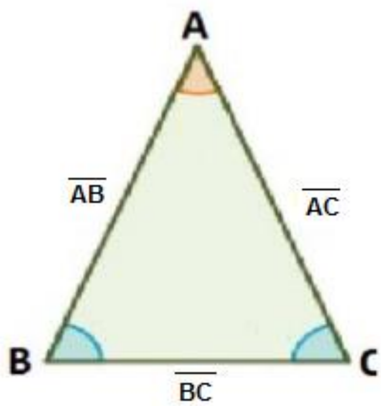
Figura 2 - Triângulo equilátero



Fonte: Elaborado pelo autor.

Um triângulo é isóscele quando possui dois de seus lados congruentes e um diferente como mostra a Figura 3, ou seja, os lados $\overline{AB}=\overline{AC}\neq\overline{BC}$.

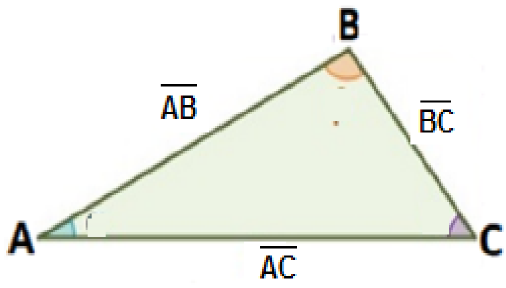
Figura 3 - Triângulo isósceles



Fonte: Elaborado pelo autor.

Um triângulo é escaleno quando possui todos os seus lados de medidas diferentes como mostra a Figura 4, ou seja, os lados $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$.

Figura 4 - Triângulo escaleno

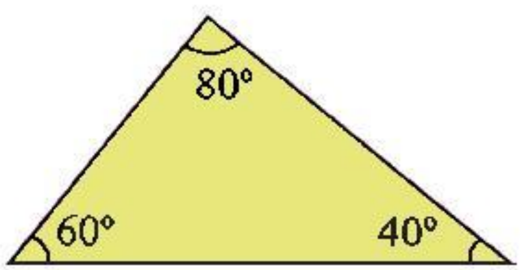


Fonte: Elaborado pelo autor.

Com relação às medidas dos ângulos, os triângulos podem ser classificados em acutângulo, retângulo e obtusângulo.

No que se refere ao triângulo acutângulo ele possui todos seus ângulos internos agudos, ou seja, as medidas angulares desses ângulos estão no intervalo entre 0º e 90º, como mostra Figura 5.

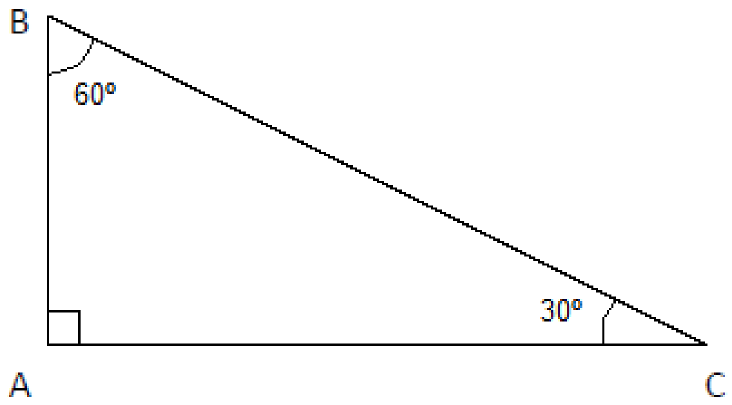
Figura 5 - Triângulo acutângulo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, um equilátero é também um triângulo acutângulo porque ele se opõe ao ângulo de 90°. Um triângulo ABC, conforme a Figura 6 é classificada como retângulo, onde um dos seus ângulos internos é reto. Nesse caso, torna-se importante apresentar algumas nomenclaturas: o lado BC, oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa e os outros dois lados, AB e AC, são chamados de catetos do triângulo retângulo.

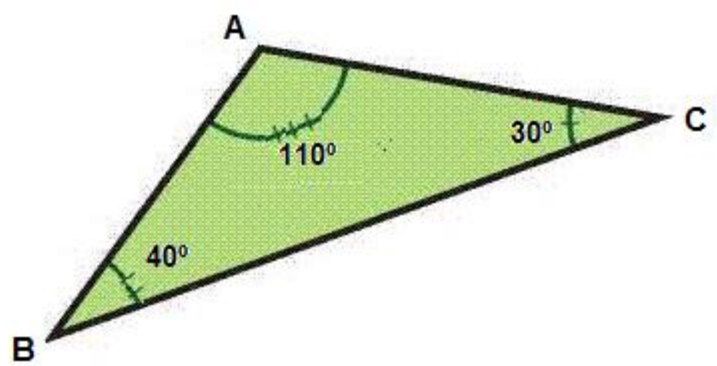
Figura 6 - Triângulo retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para um triângulo ser obtusângulo ele deve possuir um ângulo interno obtuso, ou seja, uma medida angular entre 90º e 180º, conforme o exemplo da Figura 7.

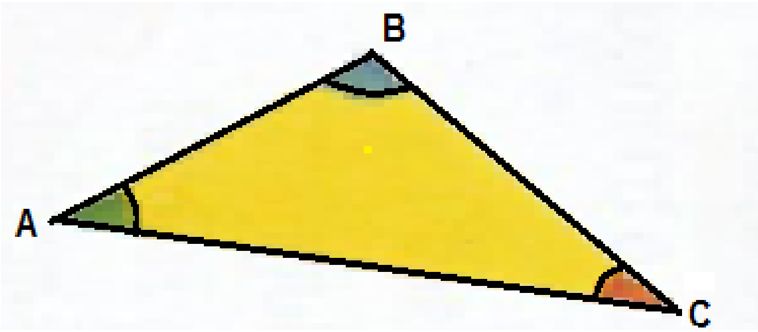
Figura 7 - Triângulo obtusângulo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Outro ponto que é importante ressaltar é a soma dos ângulos internos de um triângulo. Essa medida deve ser igual a 180º. Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, de lados, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, com ângulos internos iguais a $A\hat{B}C$ = β, $B\hat{C}A$ = ή e $C\hat{A}B$ = α aponta que, α + β + ή = 180º, conforme Figura 8.

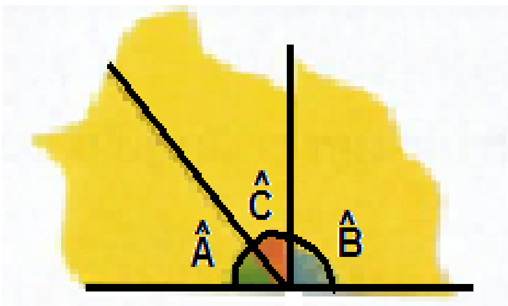
Figura 8 - Triângulo qualquer



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como na Figura 8, uma demonstração que é bastante utilizada em livro didático é cortar um triângulo ABC qualquer, em três partes e unir os ângulos, como mostra a Figura 9.

Figura 9 - Triângulo qualquer



Fonte: Elaborado pelo autor.

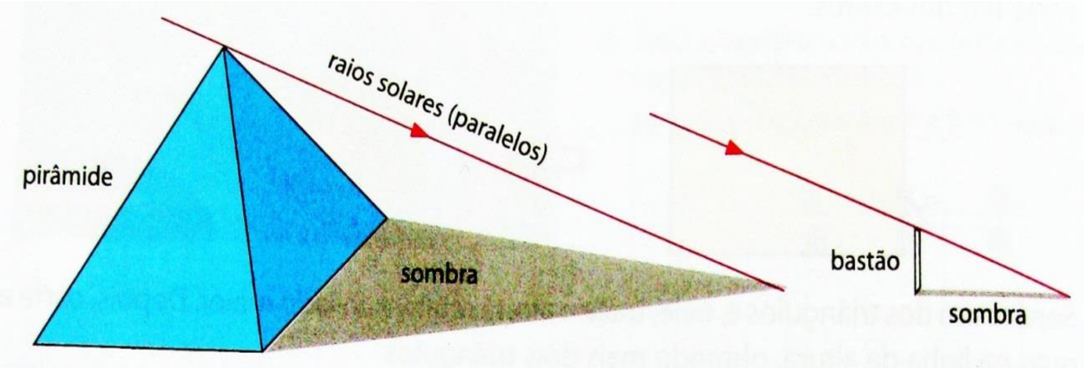
Assim, é possível perceber na Figura 9, que a união dos três ângulos do triângulo qualquer forma um ângulo raso, isto é, igual a 180º.

De acordo com a semelhança de triângulo podemos formar algumas razões especiais que serão chamadas de razões trigonométricas para serem aplicadas no triângulo retângulo.

2.2 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULO

Por volta de seiscentos anos antes de Cristo, no Egito, aconteceu a primeira aplicação da semelhança de triângulos. Através do desejo de um mensageiro do Faraó, Tales de Mileto, considerado um dos sete sábios da antiguidade clássica calculou a altura da pirâmide de Quéops. Para desenvolver tal cálculo, Tales fincou uma vara verticalmente no chão e aguardou até o momento em que a sombra e a própria vara tivessem a mesma medida. Quando o esperado aconteceu, Tales ordenou: *"Vá, mede depressa a sombra: o seu comprimento é igual à altura da pirâmide",* como mostra a Figura 10.

Figura 10 - Aplicação da semelhança de triângulos segundo Mileto



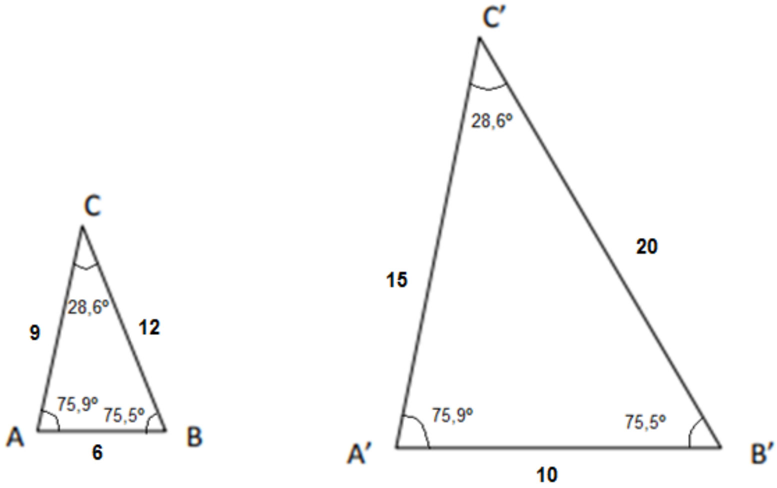
Fonte: FAZZIONI, 2012, p.2.

Através dessa teoria matemática, Tales ganhou grande apreciação em sua época e ainda hoje, pelo mesmo motivo somado a outras tantas contribuições, Tales é considerado um dos grandes nomes da matemática.

A semelhança de triângulo é um conteúdo bastante estudado na geometria, e tem sua importância porque se encontra relacionado com várias teorias da matemática, seja na geometria, na álgebra ou na topologia.

Dizemos, pois, que dois ou mais triângulos são semelhantes se existe uma correspondência biunívoca entre os ângulos e os lados dos triângulos tal que os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes (chamados de homólogos) são proporcionais, de acordo com a Figura 11.

Figura 11 - Triângulos semelhantes



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como mostra a Figura 11 os respectivos triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, pois a relação entre seus ângulos $C\hat{A}B \rightarrow C'\hat{A}'B'$, $A\hat{B}C \rightarrow A'\hat{B}'C'$ e $A\hat{C}B \rightarrow A'\hat{C}'B'$ é a correspondência que estabelece essa semelhança, então, contam conjuntamente as seguintes igualdades:

$$C\hat{A}B = C'\hat{A}'B' = 75{,}9^{\circ},\ A\hat{B}C = A'\hat{B}'C' = 75{,}5^{\circ},\ A\hat{C}B = A'\hat{C}'B' = 28{,}6^{\circ}.$$

$$\text{e}\quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'},\ \text{pois}\ \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$$

o quociente comum encontrado nas razões das medidas dos lados homólogos dos triângulos ABC e A'B'C' é denominado **razão de semelhança.**

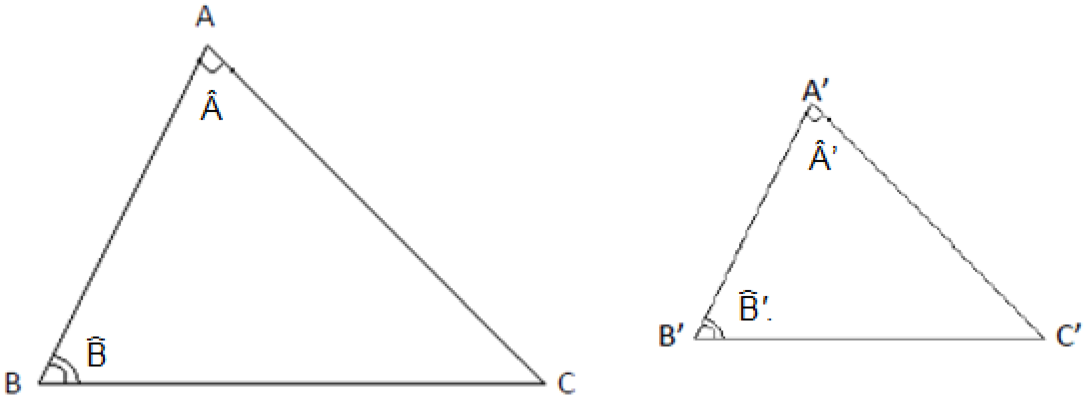
Nota-se que para certificar que dois ou mais ângulos são congruentes é preciso observar a sondagem de todas as medidas, pois segundo Barroso (2010) se confirmar uma das condições em destaque, imediatamente a outra ocorre, ou seja, para que dois triângulos sejam semelhantes basta que os lados correspondentes sejam proporcionais ou dois ângulos internos correspondentes sejam congruentes.

2.2.1 Casos de Semelhança

Podemos reconhecer a semelhança de dois triângulos quando são conhecidos apenas três de seus elementos. Isso é realizado por meio de casos de semelhança. Dizemos que esses triângulos são semelhantes, quando os respectivos ângulos, nessa sequência, são congruentes, ou seja, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$.

Esse caso estabelece que, o primeiro caso de semelhança se refere ao caso AA (ângulo – ângulo). Dados o triângulo ABC com respectivos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e o triângulo A’B’C’ com os respectivos ângulos $\hat{A}'$ e $\widehat{B'}$, como mostra a Figura 12.

Figura 12 - Caso de semelhança A.A



Fonte: Elaborado pelo autor.

Segundo Gouveia (2018), dois triângulos são semelhantes quando possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais. Usamos o símbolo ~ para indicar que dois triângulos são semelhantes. Para saber quais são os lados proporcionais, primeiro devemos identificar os ângulos de mesma medida. Os lados homólogos (correspondentes) serão os lados opostos a esses ângulos. Para identificar se dois triângulos são semelhantes, basta verificar alguns elementos.

1º Caso: Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois do outro. Critério AA (Ângulo, Ângulo).

2º Caso: Dois triângulos são semelhantes se os três lados de um são proporcionais aos três lados do outro. Critério LLL (Lado, Lado, Lado).

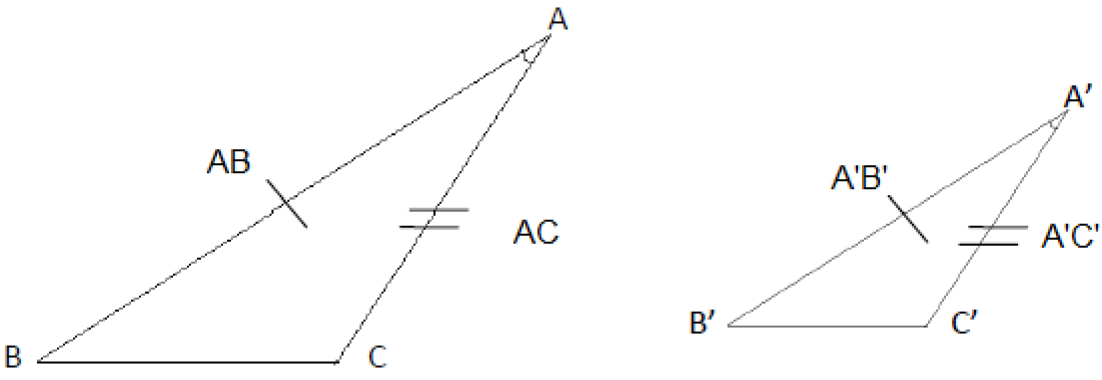
3º Caso: Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais. Critério LAL (Lado, Ângulo, Lado).

O triângulo ABC de lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ de ângulo $\hat{A}$ e o triângulo A’B’C’ de lados $\overline{A'B'}$, $\overline{A'C'}$ de ângulo $\hat{A}'$.

Essa figura ilustra o segundo caso de semelhança, chamado de L.A.L. Ele estabelece que se os lados $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$ são proporcionais e Â = Â', então os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.

Temos então, a semelhança pelo caso L.A.L ilustrado na Figura 13.

Figura 13 - Caso de semelhança L.A.L



Fonte: Elaborado pelo autor.

A razão entre dois lados homólogos ou entre dois triângulos semelhantes (k) é chamada de razão de semelhança.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

Conforme Silva (2015), da definição de triângulos semelhantes decorre as seguintes propriedades:

1. reflexiva: um triângulo é semelhante a ele mesmo.

$$\triangle ABC \sim \triangle ABC$$

2. simétrica: se $\triangle ABC$ o é semelhante ao $\triangle DEF$, então o $\triangle DEF$ é semelhante ao $\triangle ABC$.

$$\triangle ABC \sim \triangle ABC \Leftrightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

3. transitiva: se o $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle DEF$, e $\triangle DEF$ é semelhante a outro $\triangle JKL$, então o $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle JKL$.

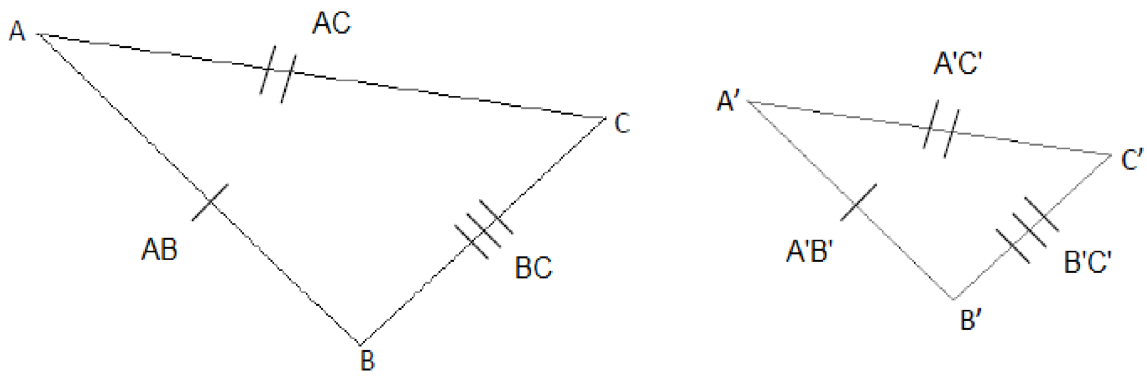
$$\{\triangle ABC \sim \triangle DEF \triangle DEF \sim \triangle JKL \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle JKL$$

Se o triângulo ABC tem as medidas dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ proporcionais, as medidas dos lados do triângulo A'B'C', A'B', A'C' e B'C', respectivamente, isto é,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'},$$

então, os triângulos A B C e A'B' C' são semelhantes, de acordo com a Figura 14.

Figura 14 - Caso de semelhança L.L.L



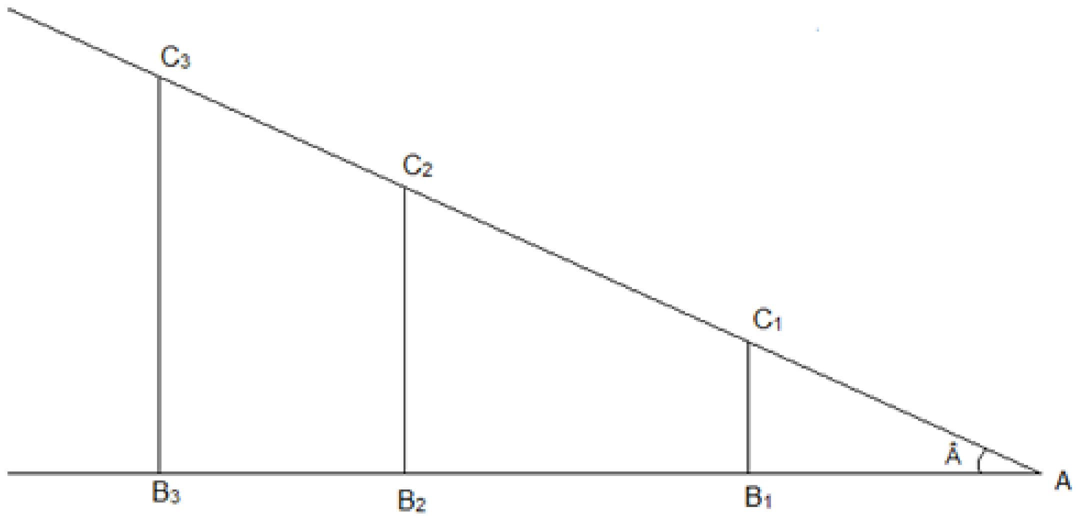
Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Dentre os conteúdos que se utiliza nos conceitos de semelhança de triângulo, temos as razões trigonométricas que se trata de uma definição apropriada para relacionar os ângulos de um triângulo e a medida de seus lados (IEZZI, 2007).

Considerando um ângulo BÂC= Â, podemos marcar em um de seus lados os pontos B_1, B_2, B_3,..... e gerar sobre esses pontos as perpendiculares $\overline{B_1C_1}$, $\overline{B_2C_2}$, $\overline{B_3C_3}$,...... em que C^1, C^2 e C^3 são as interseções das perpendiculares com o outro lado do ângulo, como mostra a Figura 15.

Figura 15 - Razão trigonométrica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme a Figura 15 observa-se que os triângulos AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3 são semelhantes entre si, pois os ângulos $C_1\widehat{B_1}A$, $C_2\widehat{B_2}A$, $C_3\widehat{B_3}A$ são todos de medida igual a 90° e os ângulos $C_1\hat{A}B_2$, $C_2\hat{A}B_2$, $C_3\hat{A}B_3$ são congruentes e têm medida igual a Â.

Desta forma, os lados homólogos são proporcionais. Assim, temos as seguintes proporções dadas pelos os lados homólogos desses triângulos:

1ª relação: $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}}$

2ª relação: $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{AB_3}}{\overline{AC_3}}$

3ª relação: $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}}$.

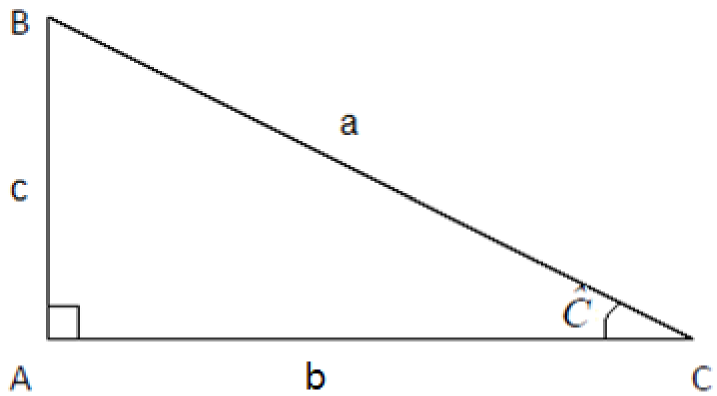
Verificamos assim, que as razões encontradas nas respectivas relações 1, 2 e 3 são constantes, logo essas razões independem dos triângulos AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3, mas depende apenas da medida do ângulo Â. Com tal característica somos capazes de desenvolver o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo do triângulo retângulo.

2.3.1 Seno, Cosseno e Tangente

Conforme Sonza (2018), das funções trigonométricas, a primeira a aparecer no decorrer da história foi o seno, estando intimamente interligado com o estudo da circunferência e dos ângulos (reunião de dois segmentos de reta orientados, ou duas semirretas orientadas, a partir de um ponto comum).

Portanto, dado um triângulo ABC retângulo em Â, chamamos de seno de um ângulo $B\widehat{C}A$ de medida $\widehat{C}$, a razão formada pelo cateto oposto "lado que está à frente do ângulo $B\widehat{C}A$' representado pelo segmento $\overline{BA}$ de medida **c** e a hipotenusa, maior lado do triângulo retângulo" representado pelo segmento $\overline{BC}$, de medida **a** como mostra a Figura 16.

Figura 16 - Seno, Cosseno e Tangente

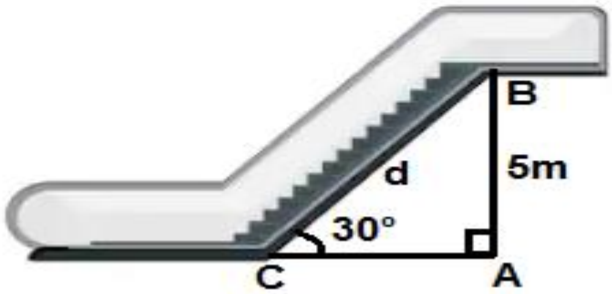


Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, temos Sen $\hat{C}$ = $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$ que pode ser representado por Sen $\hat{C}$ = $\frac{c}{a}$. Esse conceito permite resolver várias situações práticas, como na situação problema apresentada a seguir.

Vejamos um triângulo retângulo ABC produzido por uma escada rolante, que liga o piso térreo ao 1º andar de um aeroporto como mostra a Figura 17, formando um ângulo de 30° com o piso térreo. Vamos calcular o comprimento visível dessa escada sabendo que a altura do 1º andar mede 5m.

Figura 17 - Comprimento da escada



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como o seno do ângulo de 30° é a razão entre o cateto oposto $\overline{BA}$ de medida 5m e a hipotenusa $\overline{BC}$ representado pelo segmento $\overline{BC}$ = d temos então:

Sen 30º = $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{5}{d}$

Substituindo a medida do sen 30° por $\frac{1}{2}$ temos a igualdade de duas frações na qual podemos aplicar a propriedade fundamental da proporção que é o produto dos meios igual ao produto dos extremos chegando assim o resultado do comprimento da escada dada pelo segmento BC como mostra o cálculo a seguir.

$\frac{1}{2} = \frac{5}{d} \rightarrow d = 2 . 5 \rightarrow d = 10m$

Assim a escada tem 10m de comprimento.

O termo cosseno surgiu apenas no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados devido aos problemas relativos à astronomia, enquanto que o conceito de tangente surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias. As definições de seno, cosseno e tangente estão relacionadas com o estudo do triângulo retângulo, para isto se estabelece razões entre as medidas de seus lados: catetos (que formam o ângulo reto) e hipotenusa (que se opõe ao ângulo reto) (SONZA, 2018).

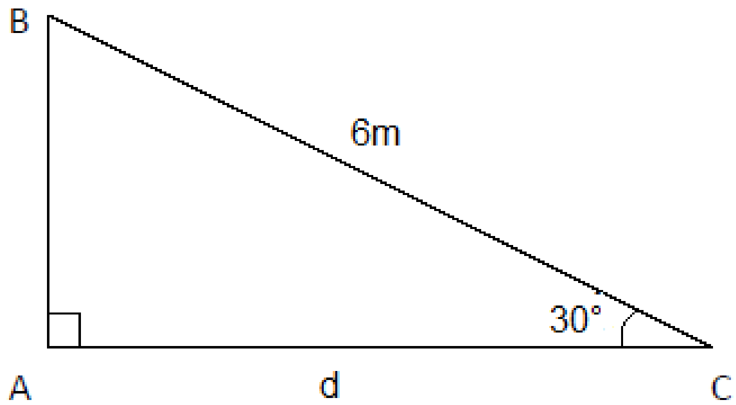
Chamamos de cosseno de um ângulo $B\hat{C}A$ de medida $\hat{C}$ a razão formada pelo cateto adjacente “lado que está do lado ângulo que não seja a hipotenusa”, representado pelo segmento $\overline{AC}$ de medida **b** e a hipotenusa “maior lado do triângulo retângulo”, representada pelo segmento $\overline{BC}$ de medida **a** como mostra a Figura 17.

Veja que temos Cos $\hat{C}$ = $\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}$ que pode ser representado por Cos $\hat{C}$ = $\frac{b}{a}$. Para melhor compreensão do conceito de seno podemos exemplificá-lo a partir de uma situação problema.

No caso de um triângulo retângulo ABC com a medida do ângulo B$\hat{A}$C igual a 90° produzido por uma escada de 6m de medida que está apoiada em uma parede como mostra a Figura 18, formando um ângulo B$\widehat{C}$A de medida 30° com o solo. Vamos calcular a distância do seu ponto de apoio no solo até a parede representada pelo segmento $\overline{CA}$ de medida **d.**

Portanto, utilizando a razão trigonométrica cosseno, observa-se que o ângulo B$\widehat{C}$A de medida 30° encontrado no triângulo ABC tem a hipotenusa $\overline{BC}$ de medida representada por 6m e então se calcula o cateto oposto do ângulo B$\widehat{C}$A representado pelo lado $\overline{CA}$ de medida **d,** sendo a distância do seu ponto de apoio no solo até a parede. Aplicando o conceito de cosseno tem-se:

Figura 18 - Distância do ponto A ao ponto C



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\text{Cos } 30° = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{d}{6}$$

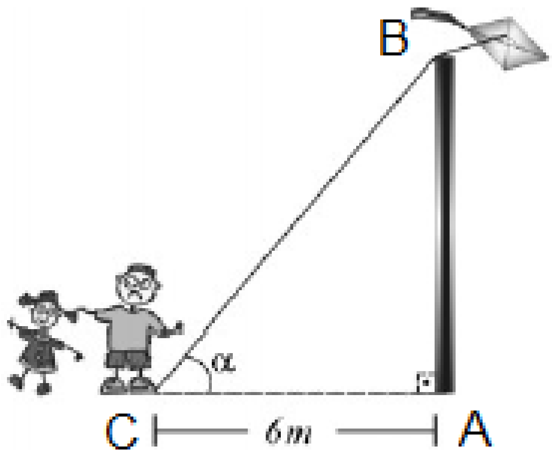
$$\text{Cos } 30º = \frac{d}{6} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{6} \rightarrow 2d = 6\sqrt{3} \rightarrow d = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

Pode-se denominar tangente de um ângulo B$\widehat{C}$A de medida $\widehat{C}$ a razão formada pelo cateto oposto, "lado que está à frente do ângulo B$\widehat{C}$A representado pelo segmento $\overline{BA}$ de medida **c** e o cateto adjacente", "lado que está do lado do ângulo B$\widehat{C}$A que não seja a hipotenusa" representada pelo segmento $\overline{AC}$ de medida **b.**

Veja que temos Tg $\hat{C}$ = $\frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$ que pode ser representada por Tg $\hat{C}$ = $\frac{c}{b}$. Para melhor assimilação da definição de tangente podemos exemplificá-lo a partir de uma situação problema retirado da prova de vestibular da Universidade Federal da Paraíba (UFPb) em 2003, questão 27 (PARAÍBA, 2003, p.3), conforme Figura 19.

Na solução desse problema que descreve uma situação da utilização da tangente dada (UFPB, 2003, questão 27): ao empinar uma pipa, João percebeu que estava a uma distância de 6m do poste onde a pipa encalhou. Maria notou que a tangente do ângulo α formado entre a linha da pipa e a rua era $\frac{3}{4}$, como mostra a Figura 19, referente à altura do poste.

Figura 19 - Altura do poste



Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando a razão trigonométrica tangente, observa-se que o ângulo B$\widehat{C}$A de medida representada por α encontrado no triângulo ABC tem o cateto oposto $\overline{AB}$ de medida representada por **d** e vamos calcular cateto adjacente do ângulo B$\widehat{C}$A representado pelo lado $\overline{CA}$ de medida 6m, sendo assim **d** é a altura $\overline{AB}$ do poste. Aplicando o conceito de tangente temos:

$$\text{Tg } \alpha = \frac{x}{6} \rightarrow \frac{x}{6} = \frac{3}{4} \rightarrow 4.x=6.3 \rightarrow 4x=18 \rightarrow X= 4,5$$

Então, a altura do poste é 4,5m.

2.3.2 Ensino da Trigonometria

Os primeiros indicadores dos fundamentos de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado no Papiro Ahmes, conhecido como Papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.C. O Papiro Ahmes é o mais extenso documento egípcio em matemática que chegou aos nossos dias. Ele é uma cópia de um antigo papiro do século XIX a.C. que esteve em poder do escriba Ahmes. Foi adquirido no Egito por Henri Rhind e por isso é usualmente conhecido como Papiro Rhind. (COSTA, 2008).

Os babilônios tinham grande interesse pela astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. É impossível estudar as fases da lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala. A utilização da trigonometria para efeito de medida é muito antiga, e acompanha a geometria ao longo de sua história, cerca de 600 a.C, porém, os principais estudos com relação as relações entre seus lados e ângulos deve-se a um astrônomo grego chamado Hiparco de Nicéia (190-125 a.C), considerado o pai da trigonometria (MARQUES, 2008).

Segundo Boyer (1974), os primeiros indícios de relações entre medidas, da era moderna, datam aproximadamente de 600 a.C., e apesar de poucos documentos que provem isso, traz evidências que foram Tales e depois Pitágoras os primeiros a usarem essas relações nas resoluções de problemas do cotidiano. Afirmações como a história de que Tales conseguiu medir o cumprimento de um navio no mar apenas utilizando a proporcionalidade de lados nos triângulos semelhantes, levou a referenciar de uma forma ousada que ele foi o criador da geometria, mesmo que os indícios da história não conseguem provar tal fato.

A trigonometria exige uma diversidade de conhecimentos básicos. Dentre esses se destaca: o ensino da matemática, o ensino da geometria, a resolução de problemas e a trigonometria. O estudo da geometria no ensino fundamental é extremamente importante, em função de contribuir para a construção e abstração de diversos conceitos. Para tornar mais significativo seu estudo, um dos recursos que podemos utilizar é a história (BOYER, 1974).

A aplicação da trigonometria nas diversas áreas das ciências exatas é um fato indiscutível. Conhecer essa verdade é de fundamental importância para os alunos do ensino médio, sendo dever do professor de matemática expor o assunto da melhor maneira possível, estabelecendo um vínculo necessário em relação às futuras escolhas profissionais. Atualmente, a trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. “Sua aplicação se estende a outros campos da matemática, como a análise em outros campos da atividade humana como a eletricidade, a mecânica, a acústica, a música, a topografia, a engenharia civil, dentre outros.” (PAIVA, 2003 p. 113).

Todavia, percebe-se, que uma das maiores dificuldades encontradas por alunos do ensino médio no que diz respeito à trigonometria é quanto ao fato da memorização de fórmulas. Entretanto, a não memorização levaria a perda de tempo para deduzi-las durante as provas, o que tornaria a situação impraticável (PAIVA, 2003).

Na sequência, o terceiro capítulo engloba os conhecimentos históricos e matemáticos da balhestilha em que destaca os instrumentos semelhantes a balhestilha, como o bastão de Levi, o bastão de Jacob e o rádio astronômico, além da sua fabricação, decadência e entes matemáticos.

3 OS CONHECIMENTOS HISTÓRICOS E MATEMÁTICOS DA BALHESTILHA

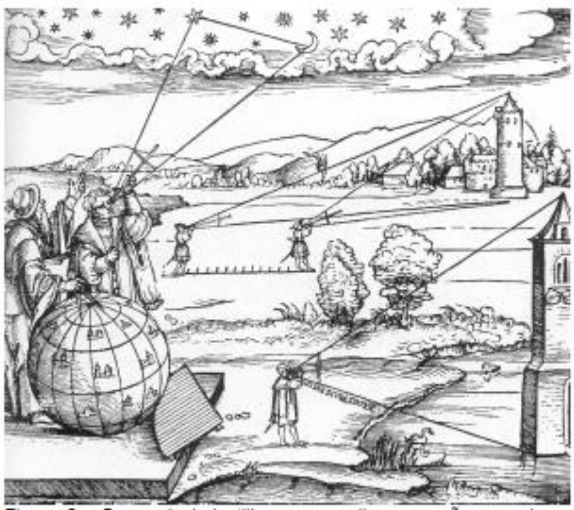
Dentre as inúmeras possibilidades de agregar a teoria à prática para explicar a matemática, o uso de instrumentos históricos, como a balhestilha, encontra-se inserida no contexto, para ajudar o aluno, de tal forma que, uma aula não seja baseada apenas em conceitos e cálculos.

Assim, neste capítulo aborda-se o conceito da balhestilha, os tipos de nomenclaturas encontradas em instrumentos muitos semelhantes a ela, a história do surgimento da balhestilha e a sua utilização nas grandes navegações nos séculos XV e XVI, até sua decadência. Destaca-se também, a construção e graduação de uma de suas peças, o virote, para posteriormente determinar os entes matemáticos encontrados nesse instrumento de medida, como referência do estudo realizado por Batista (2016, 2018).

3.1 O QUE É A BALHESTILHA

A origem da palavra balhestilha vem de natureza castelhana do vocábulo *ballesta* que representa (besta), ou do árabe *balisti* que significa altura (BATISTA, 2018). Portanto, podemos falar que a balhestilha era um instrumento para medir a altura através da determinação dos ângulos como mostra a Figura 20.

Figura 20 - O uso da balhestilha para medir separações angulares



Fonte: Corrêa (2012, p. 4)

Esse instrumento também foi muito utilizado para as navegações, pois os marinheiros faziam uso para obter a localização em alto-mar. Mesmo sabendo sobre seu uso, sua origem é desconhecida, assim como o início de sua utilização pelos navegadores.

3.1.1 O surgimento da balhestilha, sua nomenclatura e função

Até hoje, não sabemos sobre o surgimento exato da balhestilha, todavia, existem alguns relatos que foram utilizados nas grandes navegações do século XVI e encontram-se descrições dela em meados de 1529. Os cosmógrafos, pilotos e construtores de instrumentos portugueses, no qual poderiam estar mais interessados na balhestilha, não deram a devida importância. Todavia, há indícios que em janeiro de 1529 foi assaltado um navio pesqueiro de João Gomes no qual houve relatos de subtração, entre outros objetos, o Astrolábio e a Balhestilha que eram utilizados pelos corsários franceses Dumenille e Belleville na costa da Guiné (SANTOS, 2013).

Alguns historiadores legitimam sua existência no aperfeiçoamento do báculo de Jacob, instrumento medieval utilizado na agrimensura. Outros acreditam ser de concepção portuguesa. A primeira citação dela foi encontrada no livro da marinharia de João Lisboa onde se encontra algumas informações associadas a sua utilização para análise solar durante as viagens marítimas (LISBOA, 1903 *apud* SANTOS, 2013).

É muito comum que por volta do século XV até o XVII, a balhestilha aparecesse com diferentes tipos de terminologias, uma vez que, existiram diversas nomenclaturas desse instrumento; a mais conhecida é *Baculus Jacob*, em latim, mas há quem diga que esse instrumento era confundido com a própria Balhestilha.

A balhestilha assumiu diferentes nomenclaturas em diferentes períodos:

> [...] dependendo da dimensão na qual estava sendo empregada, desde *baculus geometricus* ou *baculus Jacob*, para medições realizadas na geodesia, e *radius astronomicus*, quando aplicada na astronomia. Seu termo primitivo balhestilha, se originou do termo português *balhesta*, que por sua vez decorreu do latim *balista* (NUNES, 2005 *apud* BATISTA, 2017, p. 110).

A partir dessa termologia surgiram outras, como entre os ingleses foi chamada de *Ballastella*, vara de Jacob *(jacob's staff)* ou *(Fore-staf),* entre os italianos foi chamada de escada de Jacob (*scala di Jacob*) e os franceses o tratavam por bastão de Jacob (*baton de Jacob*), entre os espanhóis intitulavam de Balhestilla; os holandeses cognominavam de *Staf Baculus*; os alemães o autodenominavam de rádio astronômico (*radius astronomicus*) e por fim, entre os portugueses batizavam de balhestilha (BRUYNS, 1994 *apud* BATISTA, 2018).

A balhestilha chegou a possuir dupla função, a primeira era para medir a distância angular, ou seja, a altura de uma estrela em relação à linha do horizonte e uma segunda utilidade seria para medir a distância entre dois astros. Por possuir essas duas funções ela se destacava em relação a outros instrumentos da época, como o quadrante e o astrolábio, que surgiram depois dela, mas só serviam para determinar a altura dos astros (BATISTA, 2018).

A balhestilha apresenta uma estrutura composta por duas réguas de madeira, a maior e horizontal que tinha cerca 80 centímetros de comprimento que era geralmente graduada, com quatro escalas, uma em cada aresta da vara, com o nome de virote. A régua menor e vertical chamava-se soalha, havendo três ou quatro destas com dimensões diferentes dependendo da altura do astro a medir. Nela estava encaixado o virote, podendo assim deslizar ao longo dele. Para medir a altura de um astro, com exceção do sol, coloca-se o olho numa das extremidades do virote, através de uma pínula, e ajusta-se a soalha de modo que a aresta superior coincida com a estrela, e a aresta inferior com o horizonte do mar (ALBUQUERQUE, 1988).

Para visualizar o horizonte durante a noite, os marinheiros mandavam colocar a alguns passos do local de observação um suporte de madeira com uma luz situada à altura dos olhos do observador. Para medir a altura do sol, a operação era realizada de costas para o astro, e espreitava-se pela tangente do virote até que fosse possível visualizar a sombra da extremidade da soalha coincidir com a linha do horizonte. Isto para que a vista não fosse danificada pela intensidade da luz do sol, o que limitava o seu uso em terra ou quando o sol se encontrava perto do horizonte. Depois, a leitura do ponto onde se encontrava o astro era feita no ponto da escala gravada no virote onde a soalha se encontrava. Esse instrumento por apresentar duas funções foi muito utilizado pelos navegantes portugueses para se orientarem no mar e possivelmente foi o primeiro a empregar o horizonte com o objetivo de determinar a localização do navio e também foi instrumento de trabalho de agrimensor e topógrafo para estabelecer a altura de torres e a largura e o comprimento de rios (ALBUQUERQUE, 1988).

3.1.2 Instrumentos semelhantes a balhestilha já construídos

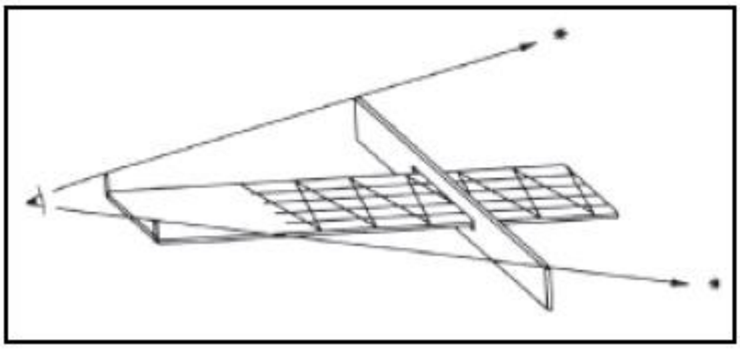
Durante os séculos XIV e o século XVIII foram construídos vários tipos de balhestilhas por estudiosos diferentes, mas tinham algumas características comuns, no qual consideramos o mesmo instrumento. No caso o bastão de Levi, o bastão de Jacob e o rádio astronômico. A seguir, apresentamos características gerais de cada um desses instrumentos.

3.1.2.1 O bastão de Levi

No século XIV, o filósofo Levi Ben Gerson (1288-1344) construiu um instrumento matemático no qual era chamado de bastão ou revelador de profundidade e tinha a função de medir a distância angular entre dois astros.

Segundo Roche (1981, p. 6) o bastão de Levi “foi subdividido em oito ‘graus’ [de comprimento, não de arco], e cada um desses ‘graus’ foi dividido em sessenta ‘minutos’ por meio de subdivisões e transversais”. Esse instrumento era usado na horizontal para que as extremidades da transversal, ou seja, vara menor fosse localizada em cada astro de tal forma que a graduação inserida de maneira transversal facilitava a leitura em graus e frações de graus e minutos como mostra a Figura 21.

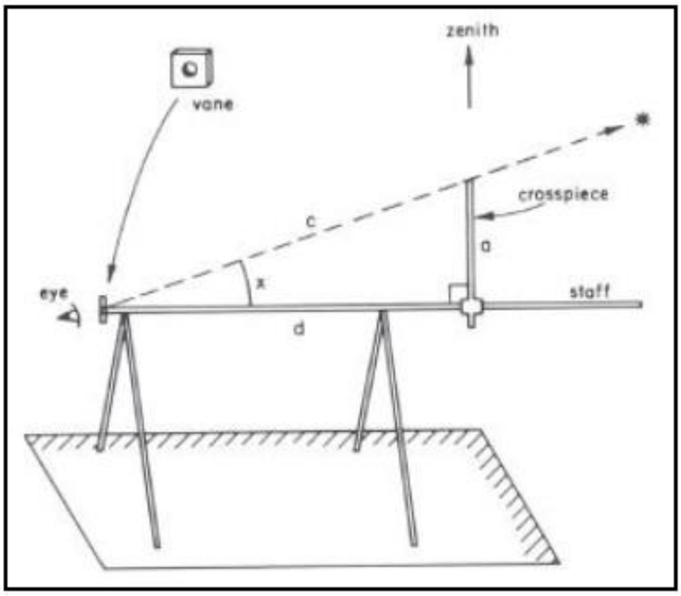
Figura 21 - Bastão de Levi



Fonte: Goldstein (2011, p. 367).

Levi relatou também outra versão desse instrumento, que consistia na observação da altitude e o diâmetro do sol, da lua e ou das estrelas. Esse instrumento possuía algumas diferenças em relação ao primeiro, pois sua utilização acontecia de maneira vertical e apoiada em um suporte de quatro pés, fixo no solo, no qual se observava através de uma pínula colocada no bastão maior com manejo meio transversal e movimentando, de maneira que a parte superior ficasse rente com o astro, como mostra a Figura 22.

Figura 22 - Bastão de Levi para medições de altitude



Fonte: Goldstein (2011, p. 368).

3.1.2.2 O bastão de Jacob

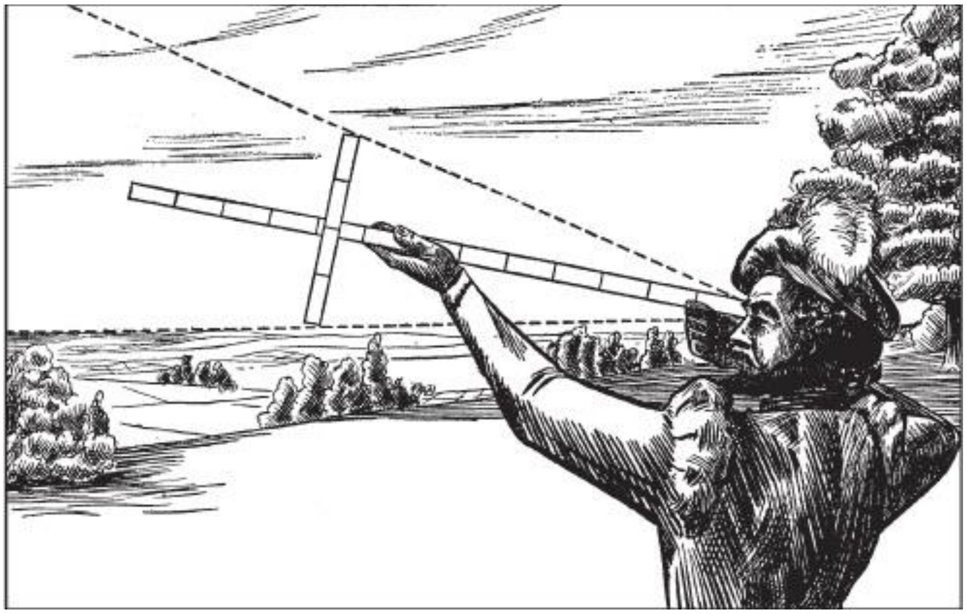
No século XV, surgem relatos da utilização por agrimensores de um bastão denominado bastão de Jacob (*Jacob's staff*) ou bastão geométrico (*Jacob's geometrical*) (ROCHE, 1981). A forma como ele era usado é bastante semelhante ao bastão de Levi, mas os meios matemáticos eram diferentes.

Segundo Roche (1981) era versátil, econômico em sua fabricação, fácil de construir, desmontar e transportar. Sua forma de uso também era de fácil assimilação, recorria a conhecimentos matemáticos muito difundidos na época como a proporcionalidade e a semelhança de triângulos. Mas havia aqueles que diziam que não era um instrumento preciso na determinação de medidas e alegavam também que para que fosse possível utilizá-lo, era necessário saber construí-lo respeitando as especificações de seus componentes e o posicionamento dos mesmos, e na época eram poucos os que tinham acesso a esses saberes.

Esse material é composto por uma vara e uma única peça transversal que teria o mesmo tamanho das divisões dessa vara fazendo com que não tirasse as medições diretamente nela, obrigando assim a utilização de uma escala linear para posteriormente fazer alguns cálculos de semelhança de triângulos, proporção e outros para determinar o resultado esperado.

O bastão de Jacob também foi chamado de báculo e segundo Santos (2013), o báculo servia para os propósitos mais importantes do agrimensor que era a mensuração de terrenos e propriedades de terra. Ou seja, seria para determinar medidas para calcular a área de algumas superfícies, conforme Figura 23.

Figura 23 - Bastão de Jacob



Fonte: Santos (2013, p.45).

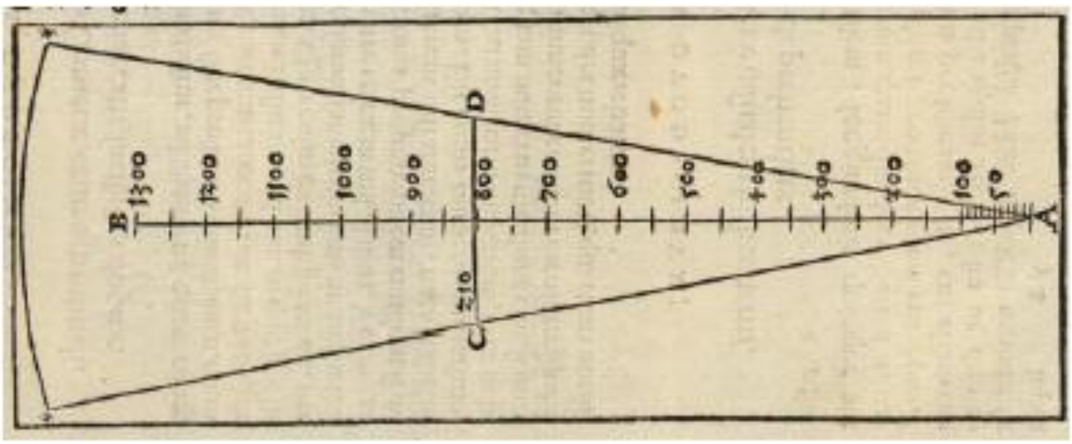
3.1.2.3 O radio astronômico

O radio astronômico recebeu esse nome dado pelo alemão *Regiomontanus,* no qual foi encontrado em um registro confeccionado por ele mesmo intitulado, *Hec oper um remberga fient em oppido Nu Germanie ductu Ioannis de monteregio,* impresso em 1475, mas não chegou a ser publicado.

De acordo com o autor, esse instrumento originou-se em Portugal, e sua aplicação foi na astronomia para determinar as coordenadas geográficas utilizando os astros.

Segundo Roche (1891) *apud* Batista (2018, p. 37), o citado instrumento tinha uma vara de 6 côvados de comprimento, em torno de 9 pés, que era dividido em 1300 partes, sendo apresentada de 100 em 100 como mostra a Figura 24 e a transversal foi dividida em 210 partes e sua principal finalidade era determinar a distância entre duas estrelas. Entretanto, a medida não era encontrada diretamente no instrumento, pois como se tratava de uma medida linear, devia utilizar uma tabela trigonométrica e cálculos para determinar a medida angular.

Figura 24 - Divisões do radio astronômico

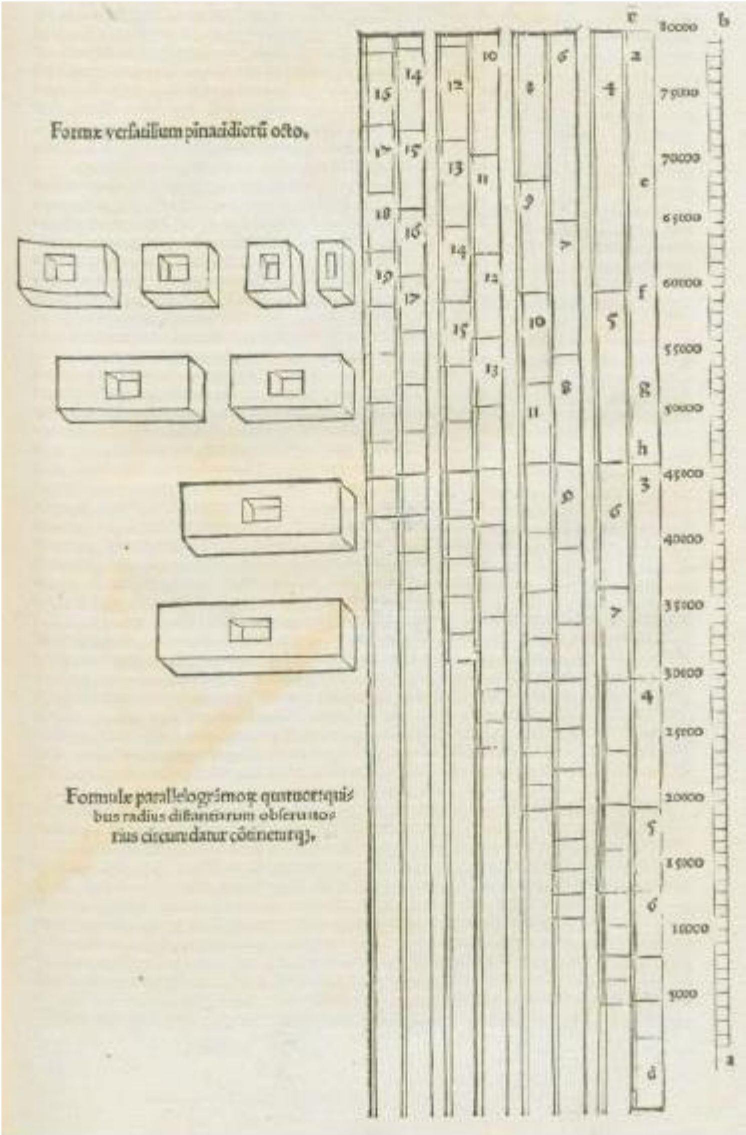


Fonte - Schöner (1544, p. 35 *apud* BATISTA, 2018).

No século XVI João Werner (1514) aperfeiçoou o rádio astronômico graduando no próprio instrumento a medida angular para determinar a distância entre duas estrelas sendo, portanto desnecessário o uso da tabela e de cálculos para determinar tal distância.

A Figura 25 mostra a suposta graduação feita por Werner que era formada por oito pinacídios, que representavam peças transversais, e oito rádios, chamados de bastões que deveriam ser utilizados em pares, ou seja, cada bastão formaria um par com a peça transversal para assim nortear seu processo de graduação.

Figura 25 - Escala contida no radio astronômico



Fonte: Werner (1514, p. 21).

Roche (1981, *apud* BATISTA, 2018, p 39), observa que a partir da publicação da obra *Cosmographicus líber* (1524) de Pedro Apiano (1495, 1552), o rádio astronômico passou a ser bastante divulgado, por essa razão ficou reconhecido na Europa.

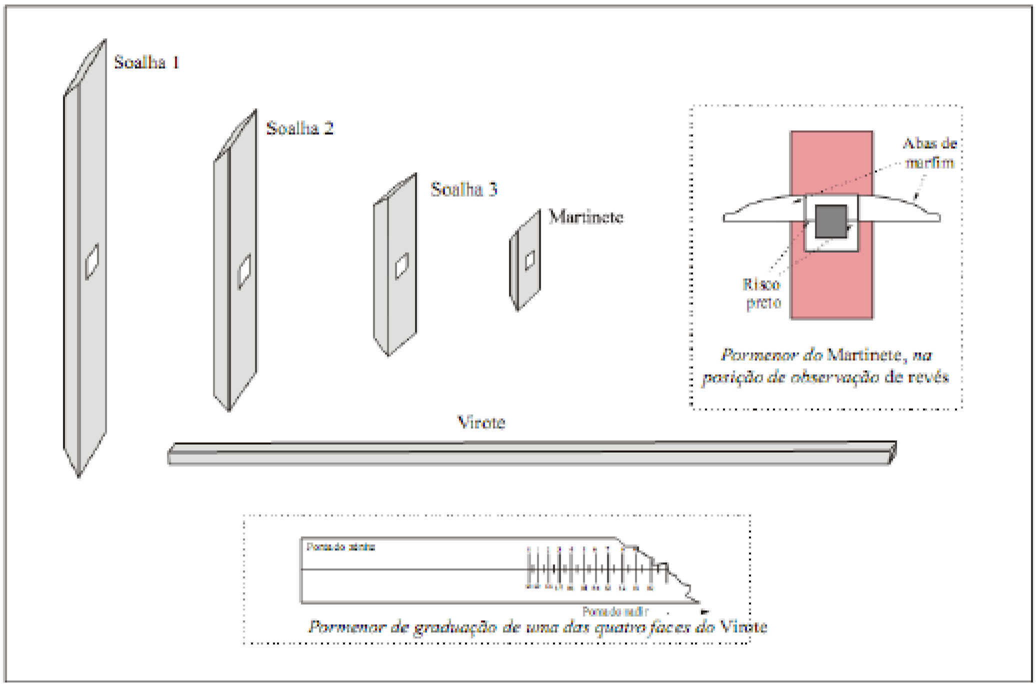
3.1.3 A fabricação da balhestilha

No sentido de mostrar as fases da fabricação e construção da balhestilha, destacam-se os autores Batista; Pereira (2017). Para fabricar a balhestilha utiliza-se o meio trigonométrico e não o geométrico, uma vez que apresenta uma elaboração mais acessível. Portanto, primeiramente, trata-se da fabricação do virote e da soalha.

> O instrumento é formado por uma vara de madeira de secção quadrada denominada virote, com tamanho arbitrário, pois, um virote com mais de quatro palmos de comprimento mostraria certa desvantagem com relação a outro com pouco menos ou exatamente quatro palmos, pois durante as navegações surgiam ventanias intensas que tornava impossível visualizar a linha do horizonte. Outro componente utilizado são as soalhas, ou seja, pedaços de madeira menores que o virote e com um orifício no centro, onde ele seria introduzido (PIMENTEL, 1762 *apud* BATISTA; PEREIRA, 2015, p.4).

A soalha é formada por quatro peças de madeira com largura maior que a do virote e de espessuras maiores, segundo Figura 26, pois o virote é introduzido em um orifício cujo formato é quadrado, para que essas peças deslizem perpendicularmente no virote. As referidas peças possuem medidas de tal forma que a maior será a $1/_2$ da medida do virote, a segunda terá a $1/_4$, a terceira terá $1/_8$ do virote e a quarta $1/_{16}$ do mesmo, no caso as respectivas medidas serão 50 cm, 25cm, 12,5cm e 6,25cm (PIMENTEL, 1762 *apud* PEREIRA; BATISTA, 2017).

Figura 26 - Componentes da Balhestilha



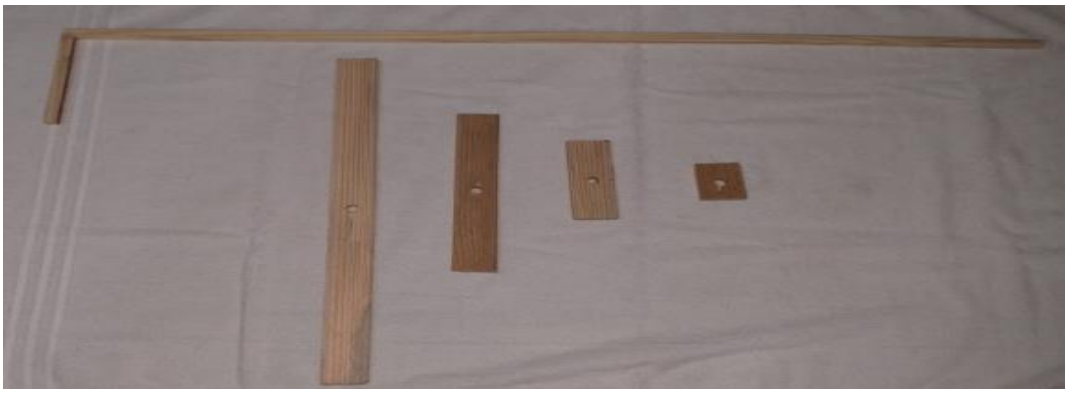
Fonte: Pereira (2000, p.19)

O virote é fabricado com uma madeira de 100cm de secção quadrada na qual serão realizadas as devidas marcações.

A proposta é que o professor possa construir a sua balhestilha de madeira, por ser mais resistente e leve para a escola, pronta para ser utilizada pelos alunos e docentes no ambiente escolar, porém, na época que era muito utilizada chegou a ser fabricada também de outro material, o marfim.

Confecciona-se então, o virote com o tamanho de 100 centímetros e posiciona-se em uma de suas extremidades um suporte ou cabo, no qual se utiliza para segurar o instrumento, como se observa na Figura 27.

Figura 27 - Virote com cabo



Fonte: Elaborado pelo autor.

A próxima etapa é a confecção da soalha, que consiste em cortar uma madeira com estrutura mais larga que o virote, pois existe um furo para introduzi-lo, de tal forma que ele possa deslizar tranquilamente dentro desse orifício.

Depois de ter confeccionado a maior soalha DC com medida de 50 centímetros, como mostra a Figura 28, sendo essa a metade da medida do virote.

Figura 28 - Soalha de medida de 50cm

Fonte: Adaptado Batista e Pereira (2015).

Podemos agora dividir a soalha DC ao meio no qual cada metade é chamada de meia-soalha e posteriormente subdividi-la em dez partes iguais, para fins didáticos, e não em 1000 partes iguais como eram mostradas na época, mas sem perda das características para a utilização de uma régua, que também pode ser denominada *petipé,* pois foi o nome que Pimentel (1762) a batizou.

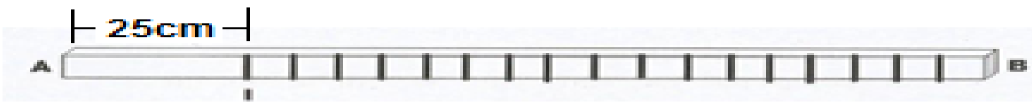
Observa-se que cada divisão da soalha tem 2,5cm de comprimento, pois a meia-soalha de 25cm foi dividida em dez partes iguais como mostra a Figura 29 e através das localizações dessas distâncias determina-se a posição de cada ângulo no virote.

Figura 29 - Demarcação da soalha

Fonte: Adaptado Batista e Pereira (2015)

Tendo em mãos o virote AB representado na Figura 30 e a meia-soalha DC já dividida anteriormente, utilizamos essas separações de 2,5cm para demarcar o virote a partir do ponto I, pois ele é o início da graduação, cuja distância dele ao cós, que é o local onde o observador coloca o olho para realizar a observação e assim encontrar a distância angular, representado pelo ponto A.

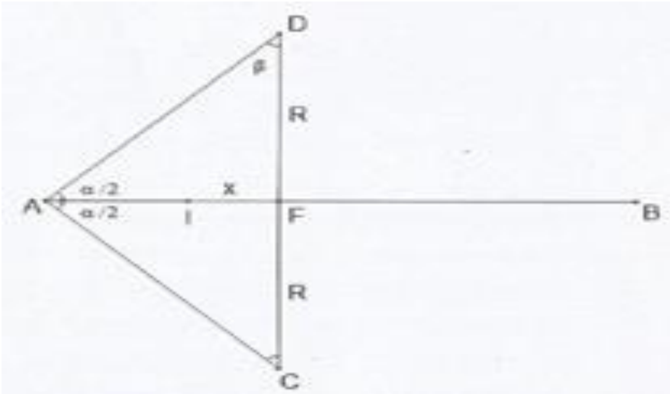
Figura 30- Demarcação do virote



Fonte: Batista e Pereira (2015).

Após todos esses procedimentos, vamos agora calcular o ângulo α entre as duas extremidades D e C da soalha utilizando a trigonometria no triângulo retângulo, dada à distância ‘x’ encontrada no virote como mostra a Figura 31 e em seguida marcamos a posição F do ângulo α determinada por esse cálculo. Essa medida é variável, pois depende da posição em que a soalha DC está no virote AB.

Figura 31 - Cálculo da primeira medida angular



Fonte: Batista e Pereira (2015).

Observe na Figura 32 o ângulo DÂF= $\frac{\alpha}{2}$ do triângulo retângulo DAF, pois ele representa a metade do ângulo DÂC= α do triângulo DAC e 'x' à distância IF da soalha no virote em relação à origem da marcação dela no ponto I e AI = 25 cm, pois é meia-soalha. Dessa forma AI + X representa o lado AF do triângulo DAF variando de acordo com a posição da soalha.

Aplicando a razão trigonométrica tangente do ângulo $\frac{\alpha}{2}$ no triângulo retângulo DAF, que é a metade do ângulo α encontrado na balhestilha, podemos determinar através dela a graduação no virote como observamos a seguir:

$$\text{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)= \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$$

$$\text{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)= \frac{\text{R}}{\text{AI+x}}$$

$$\text{Arctg}\left(\frac{R}{AI+x}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

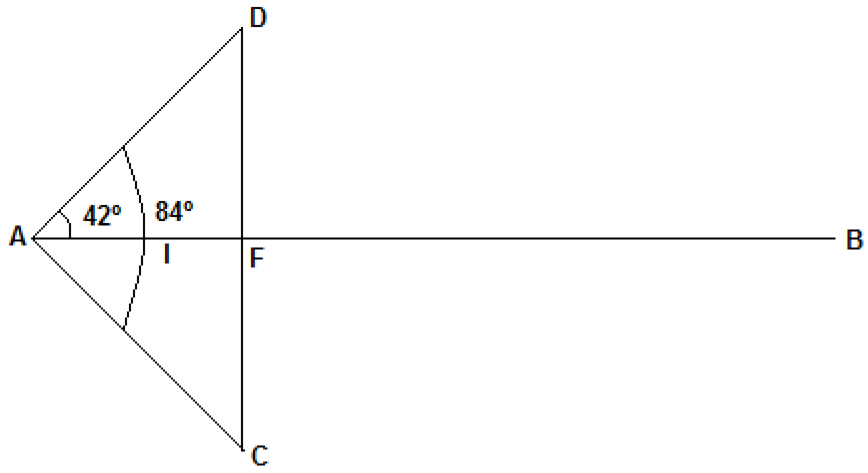
$$\alpha = 2.\ \text{Arctg}\left(\frac{R}{AI+x}\right)$$

Substituindo os respectivos valores de AI=25cm, visto que é a representação de meia-soalha no virote e x=2,5cm, que representa a primeira demarcação após o ponto I, temos o ângulo α na expressão seguinte.

$$\alpha = 2.\ \text{Arctg}\left(\frac{25}{25+2,5}\right) = 2\ .\ \text{Arctg}\left(\frac{25}{27,5}\right) \cong 2.\ 41,9^{\circ} \cong 83,8^{\circ} \cong 84^{\circ}.$$

Utilizando uma calculadora científica temos que o α ≅ 83,8º que vamos aproximar para 84º e por sua vez, esse ângulo é o dobro do ângulo DÂF, portanto, o ângulo DÂF, tem medida angular aproximada de 42º, segundo a Figura 32.

Figura 32 - Representação dos ângulos DÂF e DÂC



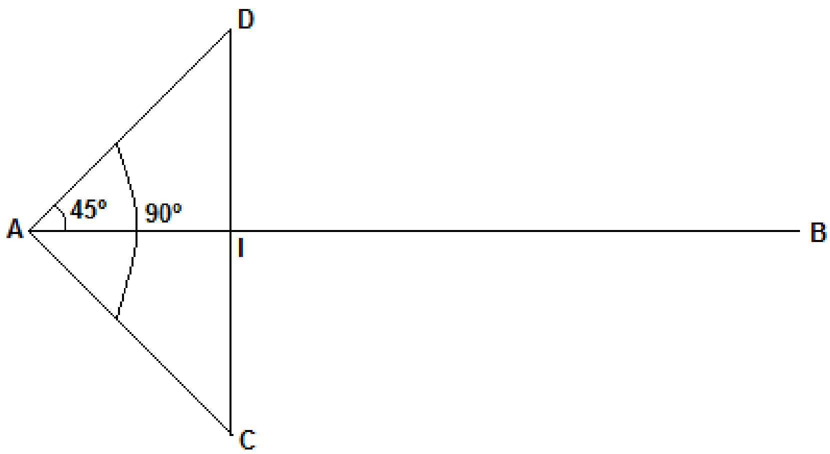
Fonte: Elaborado pelo autor.

Colocando a soalha no ponto I e fazendo os cálculos da mesma forma no triângulo ADI da Figura 34 temos:

$$\alpha = 2.\ \text{Arctg}\left(\frac{25}{25}\right) = 2.\ \text{Arctg}(1) = 2.\ 45^{o} = 90°.$$

Obtém-se o maior ângulo α formado pelo virote AB e a soalha DC que é o ângulo DÂC=90º, mas observa-se que esse ângulo é o dobro de DÂI, ou seja, o ângulo DÂI tem medida angular de 45º, como mostra a Figura 33, e isso só acontece por causa da posição da soalha no ponto I, pois o lado AI é igual ao lado ID e assim tendo a tg (45°) = 1.

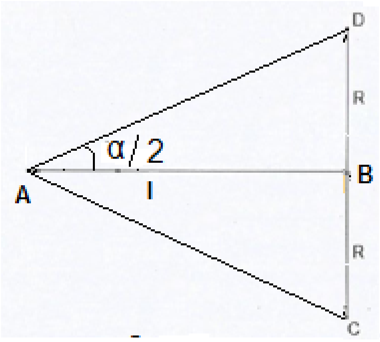
Figura 33 - Representação do maior ângulo α.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Depois de ter encontrado o maior ângulo da balhestilha, que é 90°, vamos calcular o menor ângulo que acontece quando a soalha estiver na extremidade B do virote AB, como mostra a Figura 34.

Figura 34 - Ângulo menor da balhestilha



Fonte: Adaptada Batista e Pereira (2015).

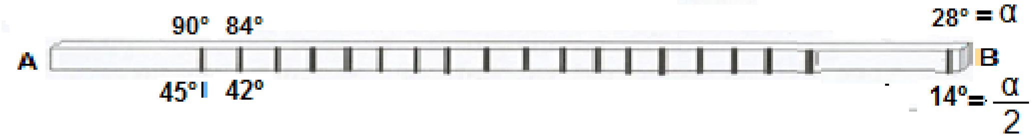
Observando o triângulo ADB e aplicando a respectiva relação α = 2. Arctg $\left(\frac{R}{AI+x}\right)$ onde AI= 25cm e IB= 75cm, podemos então obter o seguinte cálculo:

α = 2. Arctg$\left(\frac{25}{25+75}\right)$= 2. Arctg$\left(\frac{25}{100}\right)$ = 2. Arctg$\left(\frac{1}{4}\right)$= 2. Arctg$(0{,}25)$= 2. 14,03º $\cong$ 28,06º $\cong$ 28º.

Usando novamente a calculadora científica temos o ângulo α $\cong$ 28,06º sendo aproximado para 28° e representado na balhestilha pelo DÂC.

Agora estamos preparados para graduar o virote e consequentemente estabelecer uma tabela que mostra o ângulo conforme a distância ‘x’ encontrada no virote; segundo a Figura 35, visto que facilita as resoluções de problemas trabalhados com esse instrumento.

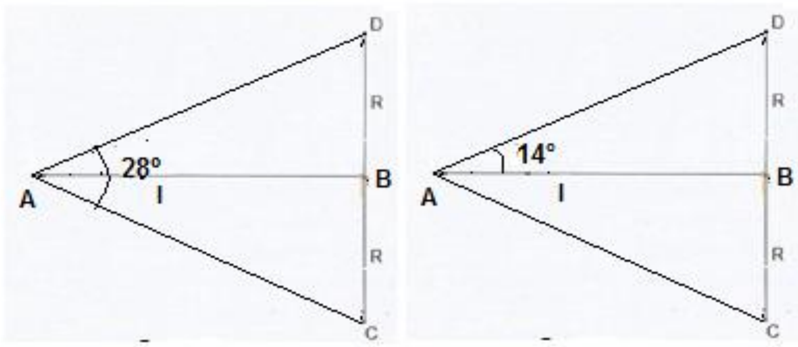
Figura 35 - Virote graduado



Fonte: Adaptada Batista e Pereira (2015).

Observe que foi colocado na parte superior do virote as medidas angulares de α que representa as medidas angulares da balhestilha, como mostra o ângulo DÂC de medida angular de 28° representada pelo triângulo DAC e na parte inferior as medidas angulares de $\frac{\alpha}{2}$ que representa a metade da balhestilha, dado pelo ângulo DÂB de medida angular 14º representado no triângulo DAB conforme a Figura 36 na representação desses dois ângulos.

Figura 36 - Representação dos ângulos na balhestilha



Fonte: Adaptada Batista e Pereira (2015).

Depois de demarcar o virote com as medidas encontradas vamos agora montar a Tabela 1 com os 30 ângulos que servem para realizar os cálculos das questões propostas em sala de aula utilizando esse instrumento, pois podemos colocá-los em uma balhestilha com as dimensões trabalhadas.

Tabela 1 - Tabela dos ângulos dada a distância da extremidade A

Distância: AI + X (em cm)	**Ângulo α: (em graus)**	**Distância: AI + X (em cm)**	**Ângulo α: (em graus)**
25+2,5= 27,5	83,8º ≅ 84º	25+40= 65	41,6º ≅ 42º
25+5= 30	79,2º ≅ 79°	25+42,5= 67,5	40,6º ≅ 41º
25+7,5= 32,5	74,4º ≅ 74º	25+45= 70	38,4º ≅ 38º
25+10= 35	70,6º ≅ 71º	25+47,5= 72,5	37,4º ≅ 37º
25+12,5= 37,5	66,8º ≅ 67º	25+50= 75	36,4º ≅ 36º
25+15= 40	63,4º ≅ 63º	25+52,5= 77,5	35,4º ≅ 35º
25+17,5= 42,5	60,2º ≅ 60º	25+55= 80	34,4º ≅ 34º
25+20= 45	57,6º ≅ 58º	25+57,5= 82,5	33,2º=33º
25+22,5= 47,5	54,8° ≅ 55º	25+60= 85	32,2º ≅ 32º

25+25= 50	53º	25+62,5= 87,5	31,2º ≅ 31º
25+27,5=52,5	50,2º ≅ 50º	25+65= 90	30,2º ≅ 30º
25+30= 55	48,4º ≅ 48º	25+67,5= 92,5	30,2º ≅ 30º
25+32,5= 57,5	46,4º ≅ 46°	25+70= 95	29º
25+35= 60	44,4º ≅ 44º	25+72,5=97,5	28º
25+37,5= 62,5	43,6º ≅ 44º	25+75=100	28,06º ≅ 28º

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se verificar que quando se calcula os respectivos ângulos, de acordo com as distâncias, observa-se que certos pontos têm a mesma medida angular devido a aproximação de duas casas decimais nos cálculos do ângulo e ainda em relação à divisão da meia-soalha que apresentou somente dez partes iguais e não a utilizada na época que era de mil partes iguais.

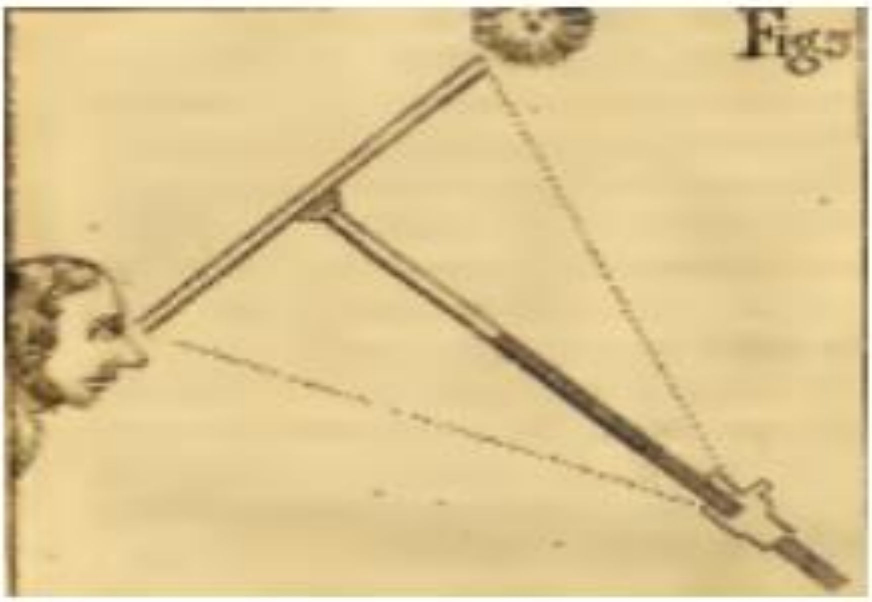
Assim, utilizamos a Tabela 1, especificada acima, para identificar o ângulo na balhestilha e assim encontrar a medida procurada nos problemas didáticos propostos para os alunos no ambiente escolar.

3.1.4 A decadência da balhestilha

No decurso do século XVII começou a decadência desse instrumento para a náutica, pois alguns navegadores não gostavam dele. Tiveram alguns motivos que levaram os navegadores da época deixar de utilizar a balhestilha: o primeiro trata-se da dificuldade da dupla mirada que seu uso exigia e o segundo porque durante a noite ficava difícil distinguir o horizonte para trabalhar com a balhestilha. Outros argumentavam que ela tinha erros expressivos para a navegação na hora de utilizá-la.

Já alguns navegantes usavam a balhestilha para calcular a altura do sol em relação à linha do horizonte, no qual era utilizada de revés de acordo com a Figura 37, pois havia dificuldade de mirar devido à luz do sol, consequentemente poderia trazer problemas oculares na visão dos navegantes.

Figura 37 - A balhestilha sendo utilizada de revés



Fonte: Pimentel, (1712, s/p).

Os cosmógrafos acreditavam que a balhestilha não conduzia as informações corretas devido ao balanço das ondas, ao movimento do barco e as constantes neblinas que cobriam o mar dificultando a visualização da linha do horizonte. Dessa forma, ele não conseguia fazer com perfeição as duas miradas dirigidas aos extremos da soalha.

Já em 1964, Manuel Figueiredo argumentou que um dos motivos de deixar de utilizar a balhestilha era pelo fato dela ser construída de madeira, pois esse material não levava a escrever no virote graduações rigorosas.

Além de Manuel Figueiredo não recomendar o seu uso, também tivemos Pedro Nunes que influenciou os cosmógrafos portugueses a não trabalhar com a balhestilha tendo assim uma grande repercussão na marinha portuguesa. Já na Espanha era recomendada a fabricação e sua utilização.

3.2 ENTES MATEMÁTICOS NA BALHESTILHA

A balhestilha pode oferecer uma importante contribuição para a aprendizagem da matemática, nela podemos trabalhar os fatores históricos e os conceitos de seno, cosseno e tangente, sendo um recurso muito importante para resolver situações problemas de determinar a altura do prédio da escola, de um poste, árvore ou uma parede encontrada no pátio.

De acordo com a Base Nacional Curricular (BRASIL, 2017, p.297):

> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos.

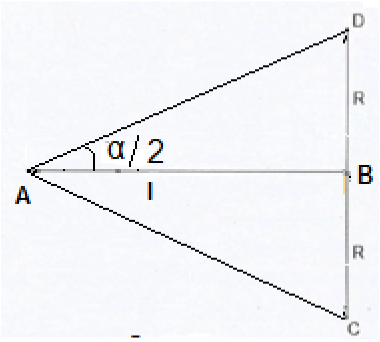
Para uma melhor compreensão do conteúdo procuramos a aplicação de um instrumento utilizado para medir a distância entre duas estrelas a fim de desenvolver uma aula contextualizada de razões trigonométricas. Estas são utilizadas para determinar as medidas solicitadas na situação problema usando tangente, seno ou cosseno e tornar o conteúdo abstrato em algo concreto para fazer com que o aluno consiga além de entender a matéria na prática também desenvolver a capacidade de abstrair e raciocinar o tema proposto.

No desenvolvimento desse conteúdo podemos aproveitar para revisar razões e proporções e estimular o discente a resolver problemas com uma calculadora científica, pois os valores encontrados nesses problemas são reais e consequentemente os resultados serão aproximados.

Para determinar as medidas angulares da balhestilha usamos a inversa da tangente, pois é dado o valor da tangente e dessa forma a calculadora científica pode determinar o ângulo desejado para representá-lo no virote.

Outros componentes encontrados no desenvolvimento da balhestilha é a formação dos triângulos retângulos ABD e ABC que juntos formam o triângulo isósceles ACD de base CD, segundo a Figura 38 e que o ângulo DÂC é o dobro do ângulo DÂB dado que os triângulos ABD e ABC são congruentes.

Figura 38 - Triângulos retângulos ABD e ABC



Fonte: Adaptada Batista e Pereira (2015, p. 57).

Outro componente potencialmente didático que aparece na fabricação do instrumento é uma ideia de unidade de medida para demarcar os ângulos no virote e também a aproximação decimal nos cálculos de divisão e multiplicação. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2017, p. 77):

> Nas situações práticas, frequentemente, não se dispõe de lápis e papel, tampouco é necessário, pois a maioria das respostas não precisa ser exata, basta uma aproximação. Existem ainda as balanças e as calculadoras que informam resultados com precisão. Por essas razões, uma das finalidades atuais do ensino do cálculo consiste em fazer com que os alunos desenvolvam e sistematizem procedimentos de cálculo por estimativa e estratégias de verificação e controle de resultados.

Quando utilizamos essa régua de cálculo precisamos trabalhar com medidas reais, portanto, não valores inteiros e assim obrigando a usarmos calculadoras, além de resolvê-los com métodos tradicionais utilizando apenas o raciocínio cognitivo, pois o objetivo é mostrar que podemos encontrar as razões trigonométricas ao redor do aluno.

Com o objetivo de tornar o ensino da trigonometria mais prazeroso e envolvente utilizamos a balhestilha para resolver atividades de razões trigonométricas e semelhança de triângulos com situações encontradas no ambiente escolar no qual se observa no próximo capítulo.

4 ALGUMAS ATIVIDADES UTILIZANDO A BALHESTILHA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresenta-se a metodologia e os caminhos metodológicos da pesquisa, além das atividades utilizando a balhestilha para o ensino da trigonometria e quatro atividades que engloba o conhecimento da balhestilha; a posição do ângulo da balhestilha; a altura do prédio utilizando a balhestilha e o comprimento da janela.

Nos capítulos anteriores foi comentado o uso da balhestilha como instrumento náutico, de agrimensor e topógrafo utilizados entre os séculos XVI e XVIII, dando destaque a história, a fabricação e aplicação. Posteriormente, planejamos desenvolver exercícios visando utilizar essa ferramenta como um recurso didático, visto que, ela pode proporcionar a aplicação dos conteúdos da trigonometria mostrando assim uma aplicabilidade imediata do conteúdo e em vista disso, tendo uma compreensão e assimilação mais agradável do assunto consequentemente tornando a aula mais interessante e receptiva.

Esse apetrecho, como um auxílio didático nas aulas de matemática pode ser utilizado não só para apresentar conceitos matemáticos, mas também para proceder a diversas aplicações com o objetivo de obter determinadas medidas.

Por conseguinte podemos trabalhar conteúdos geométricos e as razões trigonométricas de tal forma que precisaremos além desse aparelho, uma calculadora cientifica. Por isso, apresentamos a seguir, algumas atividades que podem ser inseridas pelo docente nas suas aulas de matemática, tendo esse instrumento em mãos.

4.1 A METODOLOGIA E O CAMINHO METODOLÓGICO DA PESQUISA

A metodologia utilizada nesse trabalho é qualitativa e documental, de caráter descritivo, visto que foi realizada uma pesquisa em livros, artigos, dissertações e revistas, dentre outros.

Segundo Gil (2015), a pesquisa é uma atividade que visa à solução de problemas teóricos ou práticos, sempre empregando processos científicos. Seus elementos são divididos a partir de uma dúvida ou problema, utilizando-se de um método científico e buscar uma solução ou resposta.

Para Lakatos e Marconi (2011), a metodologia qualitativa analisa e interpreta aspectos profundos e fornece maiores detalhes sobre as investigações, atitudes, hábitos, etc. Vergara (2014) discorre desta maneira quanto ao fim descritivo:

> A pesquisa descritiva expõe características de determinada população ou de determinado fenômeno. Pode também estabelecer correlações entre variáveis e definir sua natureza. Não tem compromisso de explicar os fenômenos que descreve, embora sirva de base para tal explicação (VERGARA, 2014, p. 42).

No primeiro momento o estudo dos assuntos da geometria e das razões trigonométricas foi essencial para a fundamentação dessa pesquisa. Já no segundo momento realizou-se uma pesquisa bibliográfica para determinar a parte histórica, os instrumentos semelhantes à balhestilha já fabricados e respectivamente a utilização deles. Procurou-se também explicar a própria confecção da balhestilha e em seguida a montagem desse instrumento, apontando as devidas partes que a compõem para assim desenvolver o método matemático na marcação do virote e na fabricação da soalha, pois existem medidas que precisam ser seguidas com perfeição para que o instrumento não apresente uma margem de erro muito alto.

A balhestilha é um instrumento matemático utilizado para determinar a latitude. Foi bastante utilizado pelos portugueses na época dos descobrimentos. Era usada para ajudar a determinar a latitude do navio através de observações da altura do sol. É basicamente constituída por uma régua de madeira e pelo virote na qual se coloca a soalha que corre na perpendicular em relação ao virote. A leitura do ponto onde se encontrava o astro era feita no ponto da escala gravada no virote onde a soalha permanecia. Para saber a altura do sol, a ação não decorria virada de frente para o astro, mas sim de costas para este, para que a vista não fosse danificada pela intensidade da luz do sol. Nesse instante, as razões trigonométricas mostram as possíveis posições dos ângulos no virote para usá-la no cálculo de medidas.

No terceiro momento, destacam-se quatro atividades com o auxilio da balhestilha, sendo necessário dividir a turma de alunos em equipes para que cada grupo possa realizar as medições necessárias, aplicando dessa forma, as razões trigonométricas para resolvê-los, uma vez que o objetivo desse estudo é analisar o uso da balhestilha através de atividades para o ensino das razões trigonométricas.

4.2 ATIVIDADES UTILIZANDO A BALHESTILHA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Antes de definir a atividade realizada, primeiro mostra-se a balhestilha, a história e sua tabela de ângulos elaborada para auxiliar na hora da graduação, dispensando esses cálculos preliminares, pois torna importante que os alunos recebam todas as informações para trabalhar com esse instrumento sendo orientados para executar as marcações devidas para assim calcular o solicitado.

A seguir, são apresentadas quatro atividades direcionadas a turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, em que nos Parâmetros Curriculares Nacionais está relacionado no eixo “espaço e forma”.

4.2.1 Atividade 1 - Conhecendo a balhestilha

A atividade proposta tem o intuito de fazer os alunos conhecerem o instrumento náutico do século XVI intitulado balhestilha, isto é, suas características e sua história. Como sugestão, essa atividade deve ser aplicada para alunos do 9º ano do ensino fundamental e deve ser realizada em 2 horas/aulas.

Como objetivos de aprendizagem o aluno deve alcançar: conhecer esse instrumento náutico e sua história; compreender sua função e conhecer as peças de sua fabricação; identificar os instrumentos semelhantes a ela.

Ressaltamos também que é necessário a reserva do *Datashow* e computador da escola, além de algumas cópias do texto para serem entregues aos alunos. Dessa forma, o professor inicia a aula fazendo alguns questionamentos, como: Alguém ouviu falar do instrumento náutico chamado de balhestilha? Se sabem para que serve? Quais os instrumentos náuticos que o vídeo apresenta, além da balhestilha?

Dessa discussão, o professor pode apresentar um vídeo de instrumentos náuticos, conforme a Figura 39 que retrata um pouco a história da balhestilha e de outros instrumentos de utilização no meio náutico.

Figura 39 - Vídeo de instrumentos náuticos

Fonte: Siqueira (2016).

Em seguida, a turma será dividida em grupos de cinco alunos e um texto será distribuído falando sobre a balhestilha e um roteiro de leitura (Apêndice 1).

O texto sugerido para essa leitura é retirado do capítulo 3 intitulado conhecimentos históricos e matemáticos da balhestilha, dos tópicos, o que é a balhestilha, o surgimento da balhestilha, nomenclatura e função, instrumentos semelhantes à balhestilha, já construídos e situados nas páginas 34 a 36.

O docente pode solicitar para cada grupo fazer a leitura do texto, direcionando para responder os seguintes questionamentos:

1. O que é a balhestilha?
2. Qual a função da balhestilha?
3. Quais os nomes dos instrumentos semelhantes a balhestilha?
4. Quais os nomes das peças da balhestilha?

Após a leitura, o docente escolhe um componente de cada grupo para ler as respostas, mudando cada componente à medida que mudar a pergunta. Dessa forma, ao final, todos os alunos terão participado da atividade e assim adquirido os conhecimentos necessários para identificar e caracterizar uma balhestilha e seus instrumentos similares não deixando de lado as partes que a compõem.

Essa atividade irá contribuir para a próxima atividade, pois os alunos estarão prontos para conhecer como se faz a graduação do virote e o tamanho que deve ter a soalha e o mesmo, pois deverão determinar a posição do ângulo na balhestilha.

4.2.2 Atividade 2 – Determinar a posição do ângulo na balhestilha

A atividade proposta tem o intuito de fazer os alunos localizarem a posição do ângulo no virote de medida 100 cm dada e a soalha de 50 cm a partir do triângulo retângulo formado pela meia-soalha e o virote. Como sugestão, essa atividade deve ser aplicada aos alunos do 9º ano do ensino fundamental depois de concluída a atividade 1 que precisa ser realizada em 2 horas/aulas.

Como objetivos de aprendizagem o aluno deve aprender: conhecer o tamanho das peças desse instrumento náutico e identificar o triângulo retângulo para aplicar a razão trigonométrica no sentido de determinar a posição do ângulo no virote.

Ressalta-se também que será necessário imprimir cópias acerca de informações sobre a determinação do ângulo no virote dessa ferramenta para serem entregues aos alunos, a balhestilha e trena.

Deste modo, o professor inicia a aula relembrando o nome do mecanismo, a balhestilha, e das suas peças que são o virote e a soalha.

Em seguida, a turma será dividida em grupos de 5 alunos, sendo distribuído um roteiro de leitura (Apêndice 2) e uma balhestilha para cada grupo. O texto sugerido para essa leitura é retirado do capítulo 3 intitulado conhecimentos históricos e matemáticos da balhestilha dessa dissertação, do tópico, a fabricação da balhestilha já construído situado na página 39.

O docente pedirá para cada grupo fazer a leitura do roteiro, direcionando para responder os seguintes questionamentos:

1. Que tamanho deve ter o virote?
2. Qual o tamanho da soalha que será trabalhada?
3. Qual o polígono formado pelo virote e a meia soalha quando estiver a 35 cm do cós?
4. Qual o ângulo formado quando a soalha estiver a 35 cm do cós?

Após a leitura, o docente escolherá um componente de cada grupo para ler as respostas, mudando cada componente à medida que mudar a pergunta. Dessa forma, ao final, todos os alunos terão participado da atividade e assim adquirido os conhecimentos necessários para identificar e determinar o tamanho das partes que o compõem e calcular o ângulo dado à distância sugerida no manual.

Esse exercício pode contribuir para a próxima atividade, pois os alunos estarão prontos para calcular a altura do prédio utilizando a balhestilha.

4.2.3 Atividade 3 - Calcular a altura do prédio utilizando a balhestilha

Na atividade proposta, os alunos devem calcular a altura do prédio da escola, de acordo com as dimensões da balhestilha e a distância dela ao prédio.

Como sugestão, essa atividade deve ser aplicada aos alunos do 9º ano do ensino fundamental depois de concluída a atividade 2 realizada em 2 horas/aulas.

Como objetivos de aprendizagem o aluno deve aprender: calcular a altura do prédio usando a balhestilha.

Para essa finalidade, torna-se necessário imprimir cópias de informações cedidas pelo professor sobre a determinação do ângulo utilizado e a altura do prédio em relação à pessoa que estará com a balhestilha e trena para serem entregues aos alunos.

Dessa maneira, o professor inicia a aula mostrando como posicionar a balhestilha em relação à altura do prédio para determinar as medidas necessárias e assim realizar os cálculos conforme as dimensões da balhestilha e a distância dela ao prédio.

Em seguida, os alunos são divididos em grupos de 5 e efetuada a distribuição de um roteiro de leitura (Apêndice 3), quando será entregue uma balhestilha para cada grupo. O texto sugerido para essa atividade será retirado do capítulo 4 dessa dissertação, intitulado algumas atividades utilizando a balhestilha no ensino da matemática, constante nos tópicos que aborda a metodologia e os caminhos metodológicos da pesquisa e atividades utilizando a balhestilha situado nas páginas 50 a 51.

O docente pedirá para cada grupo fazer a leitura do roteiro, direcionando para responder os seguintes questionamentos:

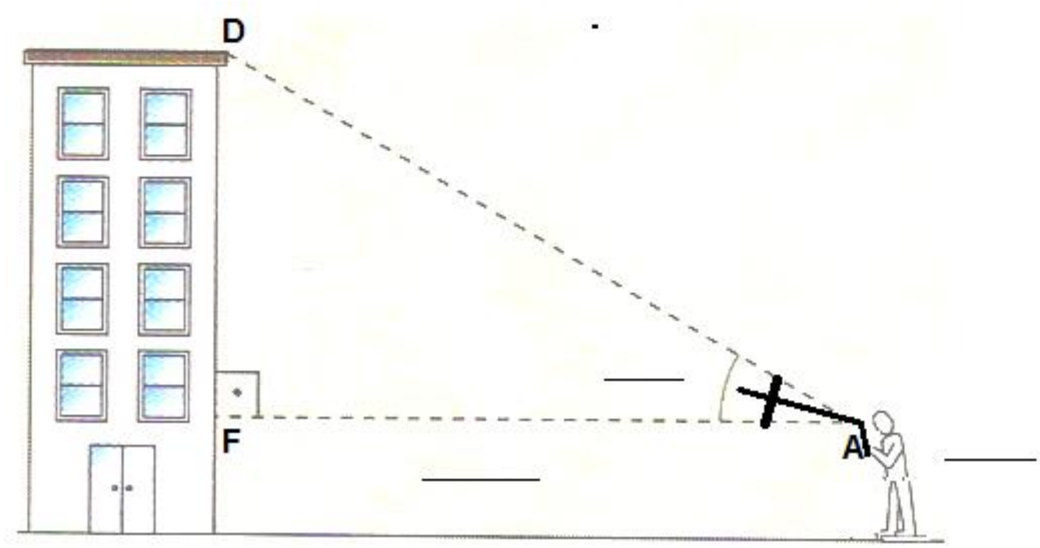
1) Como calcular a altura do prédio da escola?

2) Como utilizar a balhestilha no cálculo de alturas?

3) Qual o tipo de triângulo que você deve usar com esse instrumento?

Após a leitura, o docente escolherá um componente de cada grupo para ler as respostas, trocando cada componente à medida que mudar a pergunta. Dessa forma, ao final todos os alunos terão participado da atividade e assim adquirido os conhecimentos necessários para determinar a altura do prédio como mostra a Figura 40.

Figura 40 - Altura do prédio



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, observa-se que para determinar a altura do prédio, o aluno deverá se posicionar de frente ao prédio e permanecer numa distância, de tal forma que possa observar o prédio utilizando a balhestilha, quando as extremidades da soalha estiverem coincidindo com as extremidades do prédio. Feito essa localização, o aluno deverá medir, exatamente o comprimento dele ao prédio e o ângulo determinado pela balhestilha para posteriormente realizar os cálculos formando assim o triângulo retângulo como mostra a Figura 40, acima exposta.

4.2.4 Atividade 4 - Calcular o comprimento da janela

Na atividade proposta os alunos devem calcular o comprimento da janela com o uso da balhestilha.

Como sugestão, essa atividade deve ser aplicada com alunos do 9º ano do ensino fundamental depois de concluída a atividade 3 e ser realizada em 2 horas/aulas.

Como objetivos de aprendizagem o aluno deve alcançar: saber calcular o comprimento da janela.

Para essa finalidade, torna-se necessário fazer cópias de informações cedidas pelo professor, sobre a determinação do ângulo utilizado para calcular o comprimento da janela em relação à pessoa que estará com a balhestilha e trena para serem entregues aos alunos.

Dessa maneira, o professor inicia a aula mostrando como posicionar a balhestilha em relação ao comprimento da janela para determinar as medidas necessárias e assim realizar os cálculos conforme as dimensões da balhestilha. Em seguida, os alunos serão divididos em grupos de 5, sendo efetuada a distribuição de um roteiro de leitura (Apêndice 4) e uma balhestilha para cada grupo. O texto sugerido para essa atividade é retirado do capítulo 4 dessa dissertação, intitulado algumas atividades utilizando a balhestilha no ensino da matemática, constante nos tópicos que abordam a metodologia e os caminhos metodológicos da pesquisa e atividades utilizando a balhestilha situado nas páginas 53 a 54. O docente pedirá para cada grupo fazer a leitura do roteiro, direcionando para responder os seguintes questionamentos:

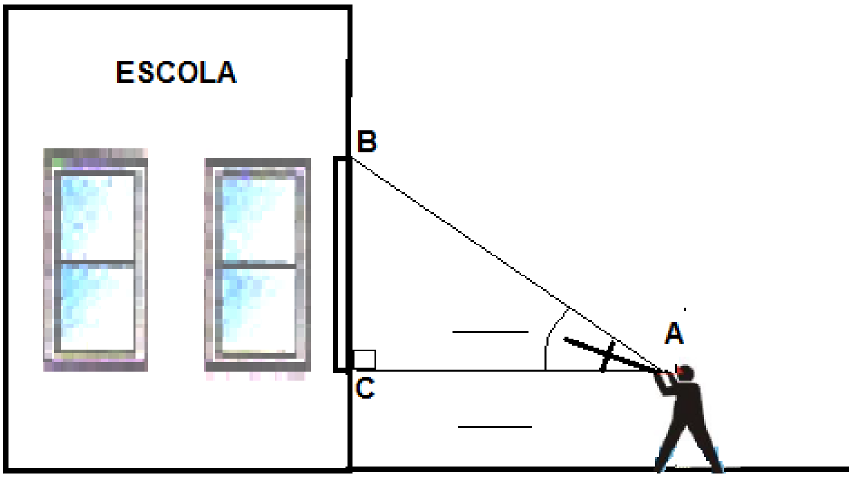
1) Como calcular o comprimento da janela?

2) Como utilizar a balhestilha no cálculo do comprimento da janela?

3) Qual o tipo de triângulo que você deve usar com esse instrumento?

Após a leitura, o docente escolherá um componente de cada grupo para ler as respostas, mudando cada componente à medida que mudar a pergunta. Dessa forma, ao final todos os alunos terão participado da atividade e assim adquirido os conhecimentos necessários para determinar o comprimento da janela como mostra a Figura 41.

Figura 41 - Comprimento da janela



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, observa-se que para determinar o comprimento da janela, o aluno deverá se posicionar de frente da janela e permanecer numa distância, de tal forma que possa observar a janela utilizando a balhestilha, quando as extremidades da soalha estiverem coincidindo com as extremidades da janela. Feito essa localização, o aluno deverá medir exatamente o comprimento dele até a janela e o ângulo determinado pela balhestilha para posteriormente realizar os cálculos formando assim o triângulo retângulo como mostra a Figura 41, acima disposta.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo que envolve atividades didáticas para o ensino de razões trigonométricas com o auxílio da balhestilha é de suma importância, uma vez que as dificuldades envolvendo trigonometria é algo que se percebe no dia a dia da sala de aula, pois os alunos não conseguem assimilar esses conceitos fundamentais no ensino médio. O primeiro conceito trigonométrico que o aluno começa a desenvolver é a partir do nono ano do ensino fundamental em que o estudo do seno, cosseno e tangente torna-se mais prescindível, uma vez que, esse problema surge, principalmente devido à abstração que é dada ao conteúdo.

Os alunos muitas vezes não entendem o porquê das fórmulas das razões trigonométricas e nem sequer sabem aplicar em exercícios que não possuem situações problemas, por não conseguirem desenvolver a ideia cognitiva para tal questão.

O tempo de exposição das razões trigonométricas é bastante reduzido devido ao grande número de conteúdos contidos no 9º ano do ensino fundamental, consequentemente o docente trata apenas de repassar informações teóricas com poucas situações problemas vivenciadas por parte do aluno e por isso é importante estudar uma atividade didática por meio da balhestilha para facilitar o estudo de razões trigonométricas.

Diante de todas essas possibilidades de recursos capazes de minimizar essas dificuldades em trigonometria estão os instrumentos matemáticos, em particular, a balhestilha, pois é um dispositivo de fácil fabricação, manipulação e composto por material bastante acessível, fazendo com que possa ser utilizado e fabricado facilmente no meio escolar.

A princípio espera-se por parte do discente que possa fazer uso da balhestilha, um instrumento histórico, para determinar distâncias utilizando as razões trigonométricas, tornando assim a assimilação desse conteúdo mais prazeroso para os alunos desenvolverem cálculos com situações reais, não deixando de lado a história e construção desse material.

Neste sentido, constata-se que o objetivo geral, no sentido de analisar o uso da balhestilha através de atividades para o ensino das razões trigonométricas foi consolidado, quando foram propostas quatro atividades didáticas para conhecer a balhestilha, assim como para determinar a posição do ângulo na balhestilha e ainda calcular a altura de um prédio e o comprimento de uma janela por meio deste instrumento matemático, pois, efetivamente foi possível desenvolver atividades para auxiliar na compreensão do assunto.

Para tal finalidade, foi realizado um estudo para conhecer como funciona esse instrumento e sua fabricação no qual compreende as razões trigonométricas para graduá-la, e assim descrevemos os conhecimentos matemáticos que envolvem os conceitos trigonométricos no triângulo retângulo para posteriormente trabalhar atividades encontradas no meio escolar, a fim de mostrar esse conteúdo de uma forma mais interessante.

Depois de realizar todo esse processo de estudo histórico e de manipulação desse material sugere-se que o aluno trabalhe com esse instrumento e tenha a liberdade de determinar a altura e outras medidas utilizando as razões trigonométricas e a semelhança de triângulos. No decorrer desse percurso também foi observado que além de trabalhar as razões trigonométricas com esse material tem-se a possibilidade de revisar semelhança de triângulos e um pouco da história desse instrumento matemático, que é a balhestilha e onde ele foi utilizado no passado.

O primeiro objetivo específico no intuito de identificar conhecimentos ou conceitos matemáticos das relações métricas no triângulo retângulo, do instrumento náutico de balhestilha foi atingido, visto que a balhestilha proporcionou rever todas as razões trigonométricas no seu desenvolvimento sem deixar de lado a utilização prática do conteúdo. O segundo objetivo especifico, no sentido de conhecer o uso do instrumento náutico da balhestilha no ensino do conceito das relações métricas no triângulo retângulo, foi também alcançado, uma vez que foi efetuado um estudo desse instrumento para garantir o domínio e assim desenvolver atividades nesse contexto.

No terceiro objetivo especifico, sobre apresentar atividades didáticas para o ensino de razões trigonométricas utilizando a balhestilha, também foi atingido, pois, foi possível desenvolver quatro atividades relacionadas ao seu manuseio com o assunto sugerido.

No decorrer do processo do trabalho surgiram algumas dificuldades, como o espaço físico da escola, em se tratando dos devidos objetos, como um prédio para determinar as atividades sugeridas. Com esse método didático de mostrar exemplos depois da explanação acerca das razões trigonométricas torna-se possível fixar com maior facilidade as fórmulas das razões trigonométricas.

Esse é apenas um dos exemplos metodológicos que podemos utilizar para facilitar o ensino da matemática, em particular a trigonometria, com isso o docente terá a possibilidade de enriquecer sua aula fazendo com que os discentes aprendam o assunto na prática e como era realizado há muito tempo atrás com os matemáticos da época.

Finalmente os resultados do estudo apresentado atenderam a expectativa prevista, no tocante ao conteúdo e atividades desenvolvidas. Entretanto, no final desse estudo foi possível perceber algumas dificuldades que contribuíram para torná-lo mais laborioso, como por exemplo, pouca informação sobre o assunto.

Entretanto, a perspectiva é que o presente documento possa servir como uma ajuda adicional para o docente, que muitas vezes, adota um tema sem base histórica, tornando limitado um assunto fácil de ser apresentado e explanado aos discentes. Assim, pretende-se estimular o discente a desenvolver-se de maneira concreta, despertando o interesse pela pesquisa e sendo estimulado a tornar-se um verdadeiro investigador e construtor do próprio conhecimento.

Enfim, o desejo do autor é que esse trabalho possa inspirar estudos futuros, contribuindo para o desenvolvimento dessa ciência tão necessária e apreciada por aqueles que conhecem a importância da matemática.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Luís. **A balhestilha.** Comissão Nacional para as comemorações dos descobrimentos portugueses, instrumentos de navegação. Lisboa. CNCDP. pp 10-29, 1988.

BARROSO, J.M. **Conexões com a matemática**. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

BATISTA, Antonia Naiara de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Ensinando conceitos geométricos e trigonométricos envolvidos na construção e utilização da Balestilha. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 11, 2015, Natal. **Anais**... Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2015. p. 1 - 12.

BATISTA, Antonia Naiara de Sousa. **A balhestilha:** um instrumento histórico de medida para explorar conceitos matemáticos na formação inicial de professores. 2016. 79 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2016.

BATISTA, Antonia Naiara de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Balhestilha: um instrumento náutico como recurso para abordar conceitos matemáticos. **Comunicação Científica.** v. 2, n.1, p. 40-51, jun. 2017.

BATISTA, A.N.S. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso da balhestilha, inserida no documento chronographia, reportorio dos tempos..., aplicado na formação de professores.** 2018. 113 f. (Mestrado em Matemática). Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

BEUREN, I.M (org.). **Como elaborar trabalhos monográficos.** São Paulo: Atlas, 2003.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo. Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: DF. INEP, 2011. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 25 mar. 2019.

______. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: 25 mar. 2019.

CATHARINA, Carlos Ronaldo de Melo. **Uma proposta para a aprendizagem de conceitos trigonométricos no ensino fundamental.** (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Laboratório de Ciências Matemáticas. Centro de Ciência e Tecnologia. Campos dos Goytacazes, 2017.

CORRÊA, I. C. S. **A balhestilha e seu uso.** Instituto de Geociências – UFRGS. Museu de Topografia Prof.Laureano Ibrahim Chave, Brasil. pp 23, 2012.

COSTA, Nilce M. Lobo da. **A história da trigonometria**. 2008. Disponível em: <https://monografias.brasilescola. com.br/matematica/ensinando-trigonometria.htm>. Acesso em: 25 nov. 2018.

DOLCE, O; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar.** Geometria espacial, posição e métrica. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

FAZZIONI, Ione. **História da semelhança de triângulos.** 2012. Disponível em: <http://semelhancadetrianguloscom/2012/02/historia-da-semelhanca-de-triangulos.html>. Acesso em: 2 jul. 2019.

FIGUEIREDO, M. **Chronographia.** Portugal, 1603. 296 p. Disponível em: <https://studylibpt.com/doc/3662700/c%C3%A1lculo-de-dist%C3%A2ncias-com-a-balestilha>. Acesso em: 20 nov. 2018.

GOLDSTEIN, Bernard Raphael. Levi ben Gerson and the Cross Staff Revisited. In: **Aleph** 11.2 (2011) pp. 365-383

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2015.

GOUVEIA, Rosimar. **Semelhança de triângulos.** 2011. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/semelhanca-de-triangulos/>. Acesso em: 25 nov. 2018.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar.** São Paulo: Saraiva, 2007.

FERNANDES, Telma Cristina Dias; LONGHINI, Marcos Daniel. A construção de um antigo instrumento para navegação marítima e seu emprego em aulas de astronomia e matemática. **I Simpósio Nacional de Educação em Astronomia.** Rio de Janeiro. 2011. Disponível em: <https://www.sab-astro.org.br/wp-content/uploads/2017/ 03/SNEA2011_TCO14.pdf.>. Acesso em: 25 nov. 2018.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

MARQUES, Paulo. **Matemática:** Trigonometria**.** 2008. Disponível em: <https://monografias. brasilescola.com.br/matematica/ensinando-trigonometria.htm>. Acesso em: 25 nov. 2018.

MELO, Anderson da Silva. **O ensino das razões trigonométricas com auxílio de um software de geometria dinâmica.** Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). IMPA, Rio de Janeiro, 2013.

MOREY; B; SAD, L.A. História da matemática para professores. **Revista de história da matemática para professores**, ano 2, n. 2, set. 2015. Disponível em: <http://www.amop.org.br/wp-content/uploads/2015/09/Revista-Hist-Prof-Mat-n2.pdf> Acesso em: 20 jun. 2019.

ORIENTAÇÃO pelos astros e por instrumentos. SIQUEIRA, Santiago. Direção. [s.1: s.n], 2016. 1 Vídeo (1m 28 seg). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=KPW0VKYDvKo>. Acesso em: 20 jun. 2019.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2003.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. Construindo instrumentos históricos para o estudo de conceitos matemáticos na formação inicial de professores da UECE. In: ARAÚJO, Raphael Alves de; ARAÚJO, Rute Pereira Alves de. **Pesquisa em educação:** olhares múltiplos. Jundiaí: Paco Editorial, 2015. Cap. 12. p. 221-239.

PEREIRA, José Manuel Malhão. **Experiências com instrumentos e métodos antigos de navegação.** Lisboa: Academia de Marinha, 2000. Disponível em: <http://chcul.fc.ul.pt/textos/malhao_pereira_2000.pdf >. Acesso em: 20 jun. 2019.

PIMENTEL, M. **Arte de navegar.** Lisboa: Officina de Miguel Manescal da Costa; Impressor do Santo Officio, 1762.

RAMOS, C.H.M.C. **Geometria e trigonometria aplicadas na topografia:** uma alternativa para a interdisciplinaridade e a contextualização (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

ROCHE, John J. The radius astronomicus. **Annals of Science,** [s.l.], v. 38, n. 1, p.1-32, jan. 1981. Disponível em: <http://pgecm.fortaleza.ifce.edu.br/wp-content/uploads/2018/11/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Antonia-Naiara-de-Sousa-Batista.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2019.

SANTOS, F.G. **Cálculo de distâncias com a Balhestilha.** 2013. 58 f. (Mestrado Profissional em Matemática). Centro de Ciências da Natureza. Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

SCHÖNER, Johannes. **Radio Astronômico.** 1544. Disponível em: <ttps://www.academia.edu/.../O_tratado_SCRIPTA_CLARISSIMI_...>. Acesso em: 20 abr. 2019.

SILVA, A.F. **Uma proposta de atividades envolvendo o estudo da proporção áurea na educação básica**. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia. Fortaleza, 2019.

SILVA, Daniel Duarte da. **Semelhança de triângulos.** 2015. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/semelhanca-de-triangulos/>. Acesso em: 20 jun. 2019.

SONZA, Jean Paulo de Deus e Silva. **Ensinando trigonometria.** Disponível em: <https://monografias. brasilescola.com.br/matematica/ensinando-trigonometria.htm>. Acesso em: 25 nov. 2018.

TEIXEIRA, Sidney Farias. **O laboratório de ensino de matemática temático centrado nos instrumentos de navegação [manuscrito]:** uma proposta para o IFRN de Mossoró. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Natal: Rio Grande do Norte, 2014.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA. **Prova de vestibular.** Questão 27. 2003. Disponível em: < http://www.mat.ufpb.br/vestibular/gab032.htm>. Acesso em: 20 Jun. 2019.

VERGARA, Sylvia Constant. **Projetos e relatórios de pesquisas em administração.** 15. ed. São Paulo: Atlas, 2014.

VICTÓRIO, J.R.S. **Abordagens do origami e dobraduras no ensino de geometria.** Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Rio de Janeiro, 2018.

WERNER, Johannes. **In hoc opere haec continentur:** Nova translatio primi libri geographia Cl. Ptolomaei: Nuremberg. 1614.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CADERNO DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DA BALHESTILHA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CADERNO DE ATIVIDADES
ATIVIDADES DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DA BALHESTILHA

CRISTIANO HOLANDA ARAUJO GOMES

FORTALEZA - CEARÁ

2019

1 INTRODUÇÃO

Prezado docente, o material contido aqui tem o objetivo de ser utilizado no auxílio do estudo das Atividades de Ensino utilizando a balhestilha para o ensino da Trigonometria.

Procurou-se explanar o tema de maneira prática e didática, seguindo uma coerência lógica que focaliza um contexto histórico do surgimento da balhestilha, nomenclatura e função. A balhestilha tinha dupla utilidade, pois era utilizada para medir a distância angular e utilizada também para medir a distância entre dois astros.

Esse instrumento por apresentar essas duas funções foi muito utilizado pelos navegantes portugueses para se orientarem no mar e possivelmente foi o primeiro a empregar o horizonte com o objetivo de determinar a localização do navio e também foi instrumento de trabalho do agrimensor e topógrafo para estabelecer a altura de torres e a largura e o comprimento de rios.

Dessa forma, esse caderno de atividades é composto por quatro atividades que podem ser aplicadas para alunos do 9º ano do ensino fundamental. Essas atividades procuram atingir os seguintes objetivos:

1) Conhecer esse instrumento náutico e sua história; Compreender sua função; Conhecer as peças de sua fabricação; Identificar os instrumentos semelhantes a ela;

2) Conhecer o tamanho das peças desse instrumento náutico e identificar o triângulo retângulo para aplicar a razão trigonométrica no sentido de determinar a posição do ângulo no virote;

3) Saber calcular a altura do prédio usando a balhestilha;

4) Saber calcular o comprimento da janela.

Assim, espera-se que o presente documento possa servir como uma ajuda adicional para o docente, que muitas vezes, adota um tema sem base histórica, tornando limitado um assunto fácil de ser apresentado e explanado aos discentes.

Assim, pretende-se estimular o discente a desenvolver-se de maneira concreta, despertando o interesse pela pesquisa e sendo estimulado a tornar-se um verdadeiro investigador e construtor do próprio conhecimento.

Portanto, o desejo do autor é que esse trabalho possa inspirar estudos futuros, contribuindo para o desenvolvimento dessa ciência tão necessária e apreciada por aqueles que conhecem a importância da matemática.

SUMÁRIO

ROTEIRO DE ATIVIDADE 1

EIXO TEMÁTICO	Espaço e Forma
TEMA :	A história da balhestilha
TÓPICO:	**Balhestilha**
ANO:	9º Ano do ensino fundamental
DURAÇÃO:	2 horas/aulas

Objetivos do roteiro de atividade:

- Conhecer um instrumento náutico, a balhestilha, e sua história.
- Compreender a sua função.
- Conhecer os nomes das peças que formam esse instrumento.
- Identificar os instrumentos semelhantes a ele.

Pré-requisitos:

- Sem pré-requisito.

Descrição dos procedimentos:

O professor inicialmente deverá solicitar a coordenação da escola para tirar cópias de um texto e reservar a sala de vídeo no qual será necessário o *Datashow*, computador e internet da escola para mostrar um filme de um minuto e vinte oito segundos retirados do *youtube* que retrata a balhestilha e outros instrumentos náuticos e também levar o mecanismo que será trabalhado na aula, a balhestilha.

No primeiro momento o docente, já na sala de vídeo com os alunos explicará que a aula será sobre instrumento matemático utilizado na época das grandes navegações que pode ser utilizado no cálculo das atividades já estudadas no 9º ano, ou seja, razões trigonométricas.

Assim pedirá para fazer uma leitura silenciosa do texto para posteriormente ver o filme, após esses dois procedimentos os discente formarão grupos de 5 alunos para socializarem o que entenderam sobre essa ferramenta, desta forma preparando-se para as perguntas que o professor fará acerca do assunto.

Depois desses processos o professor mostrará a ferramenta e as peças que formam a balhestilha, dando o nome de cada uma delas, e em seguida falará dos instrumentos semelhantes a ele e sua função.

Enfim com todas essas informações, o aluno estará preparado para a próxima atividade.

Material utilizado: Balhestilha; *Datashow*, computador da escola, internet e cópias de um texto.

Avaliação: Na avaliação da atividade será levado em consideração à participação e o interesse dos alunos pelo assunto, destacando a contribuição de eventuais alunos na elaboração de conceitos, bem como, o desenvolvimento no momento da resolução dos problemas. Sugere-se que os alunos façam após cada atividade um relatório, em forma de portfólio, tendo como objetivo o acompanhamento das atividades desenvolvidas por cada aluno, identificando os pontos fortes e as defasagens no decorrer da aprendizagem.

Referências:

MOREY; B; SAD, L.A. História da matemática para professores. **Revista de história da matemática para professores** Ano 2, n 2, Set. 2015. Disponível em: <http://www.amop.org.br/wp-content/uploads/2015/09/Revista-Hist-Prof-Mat-n2.pdf> Acesso em: 20 jun. 2019.

ORIENTAÇÃO pelos astros e por instrumentos. SIQUEIRA, Santiago. Direção. [s.1: s.n], 2016. 1 Vídeo (1m 28 seg). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=KPW0VKYDvKo>. Acesso em: 20 jun. 2019.

ROTEIRO DE ATIVIDADE 2

EIXO TEMÁTICO	**Espaço e Forma**
TEMA :	Determinação da posição do ângulo na balhestilha
TÓPICO:	**Balhestilha**
ANO:	9º Ano do ensino fundamental
DURAÇÃO:	2 horas/aulas

Objetivos do roteiro de atividade:

- Identificar o tamanho das peças da balhestilha.
- Conhecer o polígono formado entre a meia soalha e o virote.
- Identificar a posição do ângulo no virote utilizando razão trigonométrica.

Pré-requisitos:

- Razões trigonométricas.

Descrição dos procedimentos:

Professor inicialmente deverá solicitar a coordenação da escola para fazer cópias de um texto que servirá de manual para a realização da atividade e 6 balhestilhas que devem ser distribuídas entre as equipes.

No primeiro momento o docente irá relembrar os conceitos da balhestilha e seus componentes.

No segundo momento será dividida em equipes de 5 alunos, onde cada equipe receberá uma balhestilha e cada aluno, um manual mostrando os passos a serem seguidos. Assim pedirá para fazer os procedimentos sugeridos no texto para posteriormente socializarem, em cada grupo, os resultados encontrados pelas atividades do manual, desta forma preparando-se para as perguntas que o professor fará acerca do assunto, para cada equipe.

Depois desses processos o docente mostrará como encontrar o ângulo desse instrumento usando as razões trigonométricas retirados dos dados sugeridos pelo texto e assim as equipes poderão determinar o ângulo desse instrumento de acordo com as perguntas efetuadas pelo professor.

Enfim, com todas essas informações o aluno estará preparado para determinar esse ângulo sugerido no texto e apto a resolver a próxima atividade.

Material utilizado: Balhestilha, trena e cópias de um texto, caderno, lápis, caneta e borracha.

Avaliação: Na avaliação da atividade será levado em consideração à participação e o interesse dos alunos pelo assunto, destacando a contribuição de eventuais alunos na elaboração de conceitos, bem como, o desenvolvimento no momento da resolução dos problemas. Sugere-se que os alunos façam após cada atividade um relatório, em forma de portfólio, tendo como objetivo o acompanhamento das atividades desenvolvidas por cada aluno, identificando os pontos fortes e as defasagens no decorrer da aprendizagem.

Referências:

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar.** São Paulo: Saraiva, 2007.

MOREY; B; SAD, L.A. História da matemática para professores. **Revista de história da matemática para professores**, ano 2, n. 2, set. 2015. Disponível em: <http://www.amop.org.br/wp-content/uploads/2015/09/Revista-Hist-Prof-Mat-n2.pdf> Acesso em: 20 jun. 2019.

ROTEIRO DE ATIVIDADE 3

EIXO TEMÁTICO	Espaço e Forma
TEMA :	Cálculo da altura do prédio utilizando a balhestilha
TÓPICO:	**Balhestilha**
ANO:	9º Ano do ensino fundamental
DURAÇÃO:	2 horas/aulas

Objetivos do roteiro de atividade:

- Identificar o ângulo na balhestilha para determinar a altura do prédio.
- Conhecer a razão trigonométrica para esse cálculo.
- Identificar a altura do prédio.

Pré-requisitos:

- Razões trigonométricas.

Descrição dos procedimentos:

Professor inicialmente deverá solicitar a coordenação da escola para tirar cópias de um texto que servirá de manual para fazer a atividade, 6 balhestilhas e 6 trenas que devem ser distribuídas entre as equipes e colocar os alunos em frente ao prédio.

No primeiro momento o professor mostrará como utilizar a balhestilha para todos os alunos no pátio de frente ao prédio para determinar as devidas medidas que ajudarão no cálculo dessa altura.

No segundo momento a turma será dividida em equipes de 5 alunos, onde cada equipe receberá uma balhestilha e um manual mostrando os passos a serem seguidos. Assim pedirá para fazer os procedimentos sugeridos no texto para posteriormente socializarem, em cada grupo, os resultados encontrados pelas atividades do manual, desta forma preparando-se para as perguntas que o professor fará acerca do assunto, para cada equipe.

Depois desses processos os discentes mostrarão como foi calculada a altura do prédio usando esse instrumento e as razões trigonométricas

Enfim com todas as informações dadas aos alunos eles poderão estar aptos para determinar qualquer altura usando a balhestilha.

Material utilizado: Balhestilha, calculadora científica, trena e cópias de um texto, caderno, lápis, caneta e borracha.

Avaliação: Na avaliação da atividade será levado em consideração à participação e o interesse dos alunos pelo assunto, destacando a contribuição de eventuais alunos na elaboração de conceitos, bem como, o desenvolvimento no momento da resolução dos problemas. Sugere-se que os alunos façam após cada atividade um relatório, em forma de portfólio, tendo como objetivo o acompanhamento das atividades desenvolvidas por cada aluno, identificando os pontos fortes e as defasagens no decorrer da aprendizagem.

Referências:

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar.** São Paulo: Saraiva, 2007.

MOREY; B; SAD, L.A. História da matemática para professores. **Revista de história da matemática para professores**, ano 2, n. 2, set. 2015. Disponível em: <http://www.amop.org.br/wp-content/uploads/2015/09/Revista-Hist-Prof-Mat-n2.pdf> Acesso em: 20 jun. 2019.

ROTEIRO DE ATIVIDADE 4

EIXO TEMÁTICO	Espaço e Forma
TEMA :	Cálculo do comprimento da janela utilizando a balhestilha
TÓPICO:	**Balhestilha**
ANO:	9º Ano do ensino fundamental
DURAÇÃO:	2 horas/aulas

Objetivos do roteiro de atividade:

- Identificar o ângulo na balhestilha para determinar o comprimento da janela.
- Conhecer a razão trigonométrica para esse cálculo.
- Identificar o comprimento da janela.

Pré-requisitos:

- Razões trigonométricas.

Descrição dos procedimentos:

Professor inicialmente deverá solicitar a coordenação da escola para tirar cópias de um texto que servirá de manual para fazer a atividade, 6 balhestilhas e 6 trenas que devem ser distribuídas entre as equipes e colocar os alunos em frente a janela.

No primeiro momento o professor mostrará como utilizar a balhestilha para todos os alunos em frente a janela para determinar as devidas medidas que ajudarão no cálculo desse comprimento.

No segundo momento a turma será dividida em equipes de 5 alunos, onde cada equipe receberá uma balhestilha e um manual mostrando os passos a serem seguidos. Assim pedirá para fazer os procedimentos sugeridos no texto para posteriormente socializarem, em cada grupo, os resultados encontrados pelas atividades do manual, desta forma preparando-se para as perguntas que o professor fará acerca do assunto, para cada equipe.

Depois desses processos os discentes mostrarão como foi calculado o comprimento da janela usando esse instrumento e as razões trigonométricas

Enfim com todas as informações dadas aos alunos eles poderão estar aptos para determinar qualquer comprimento utilizando a balhestilha.

Material utilizado: Balhestilha, calculadora científica, trena e cópias de um texto, caderno, lápis, caneta e borracha.

Avaliação: Na avaliação da atividade será levado em consideração à participação e o interesse dos alunos pelo assunto, destacando a contribuição de eventuais alunos na elaboração de conceitos, bem como, o desenvolvimento no momento da resolução dos problemas. Sugere-se que os alunos façam após cada atividade um relatório, em forma de portfólio, tendo como objetivo o acompanhamento das atividades desenvolvidas por cada aluno, identificando os pontos fortes e as defasagens no decorrer da aprendizagem.

Referências:

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar.** São Paulo: Saraiva, 2007.

MOREY; B; SAD, L.A. História da matemática para professores. **Revista de história da matemática para professores**, ano 2, n. 2, set. 2015. Disponível em: <http://www.amop.org.br/wp-content/uploads/2015/09/Revista-Hist-Prof-Mat-n2.pdf> Acesso em: 20 jun. 2019.

APÊNDICE B - TEXTO REFERENTE AO ESTUDO SOBRE BALHESTILHA

A origem da palavra Balhestilha vem de natureza castelhana do vocábulo *ballesta* que representa (besta), ou do árabe *balisti* que significa altura. Portanto podemos falar que a Balhestilha era um instrumento para medir a altura através da determinação dos ângulos.

Até hoje não é possível determinar o surgimento exato da Balhestilha, mas existem alguns relatos que foram utilizados nas grandes navegações do século XVI e existem descrições dela próximas de 1529. Os cosmógrafos, pilotos e construtores de instrumentos portugueses, no qual poderiam estar mais interessados na Balhestilha, não deram a devida importância.

Existem indícios que em janeiro de 1529 foi assaltado um navio pesqueiro de João Gomes no qual foi relatado que foi subtraído entre outros objetos, o Astrolábio e a Balhestilha que eram utilizados pelos corsários franceses Dumenille e Belleville na costa da Guiné.

Alguns historiadores legitimam sua existência no aperfeiçoamento do báculo de Jacob, instrumento medieval utilizado na agrimensura. Outros acreditam ser de concepção portuguesa.

A primeira citação acerca da balhestilha foi encontrada no livro da marinharia de João Lisboa onde se encontra algumas informações associadas a sua utilização para análise solar durante as viagens marítimas.

A balhestilha chegou a possuir dupla função, a primeira era para medir a distância angular, ou seja, altura de uma estrela em relação à linha do horizonte e uma segunda utilidade que era para medir a distância entre dois astros. Por possuir essas duas funções ela se destacava em relação aos outros instrumentos da época, como o quadrante e o astrolábio, que surgiram depois dela, mas só serviam para determinar a altura dos astros.

Durante os séculos XIV ao século XVIII foram construídos vários tipos de balhestilhas por estudiosos diferentes, mas tinham algumas características comuns, no qual consideramos o mesmo instrumento. No caso o Bastão de Levi, Bastão de Jacob e Radio astronômico. Esse instrumento é constituído de duas peças chamadas de virote e soalha.

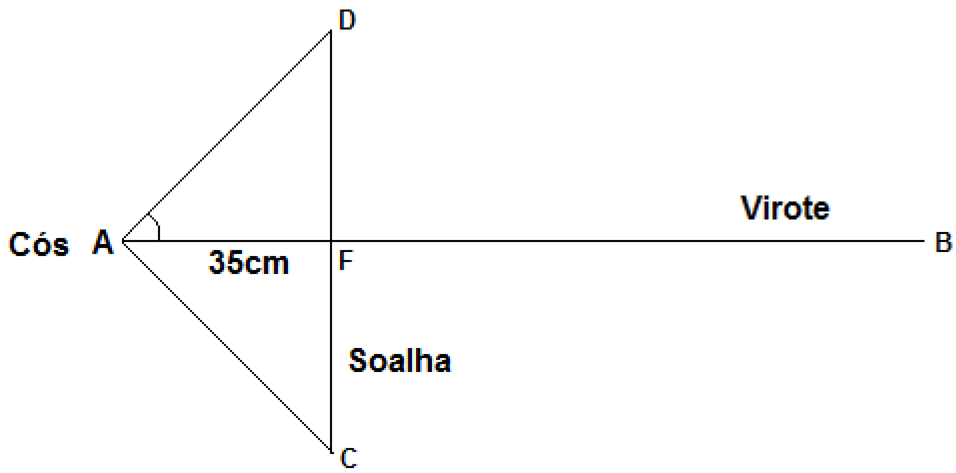
APÊNDICE C - TEXTO REFERENTE A DETERMINAR A POSIÇÃO DO ÂNGULO NA BALHESTILHA

Caro aluno é importante que você siga essas instruções para entender e desenvolver essa atividade.

1º momento: Medir o tamanho do virote e da soalha com uma trena para completar a frase a seguir:

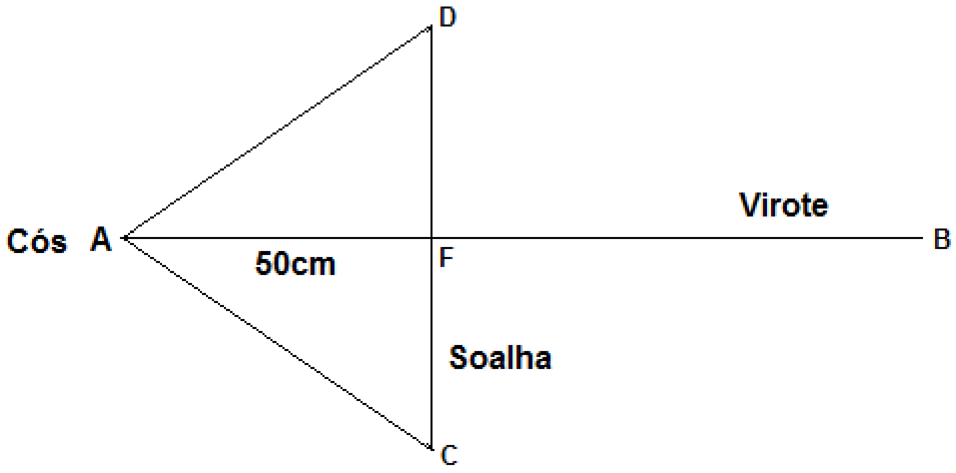
A balhestilha que a equipe recebeu é formada por um virote de _____ e uma soalha de ______.

2º momento: Colocar a soalha DC a 35 cm do cós representado pelo ponto A no virote, como mostra a Figura a seguir.



3º momento: Determinar o ângulo DÂF no triângulo DAF dadas às medidas da meia soalha e a distância AF representada na figura do segundo momento.

4º momento: Determinar o ângulo DÂF no triângulo DAF dadas às medidas da meia soalha e a distância AF= 50 cm representada na Figura a seguir.


D
Virote
Cós A
F
B
50cm
Soalha
C

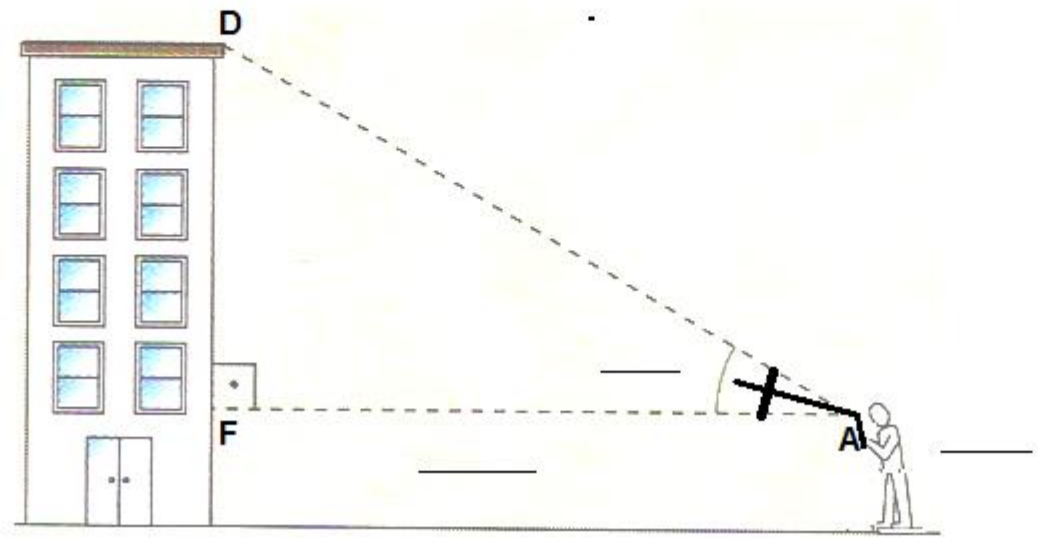
APÊNDICE D - TEXTO REFERENTE AO CÁCULO DA ALTURA DO PRÉDIO USANDO A BALHESTILHA

Caro aluno é importante que você siga essas instruções para entender e desenvolver essa atividade.

1º momento: Um aluno com a balhestilha se coloque em uma posição que possa ver todo o prédio a partir do cós da balhestilha usando o ângulo dela.

2º momento: Depois de posicionado o aluno com a balhestilha, os outros discentes devem medir a distância dela ao prédio.

3º momento: Colocar as medidas do ângulo DÂF e a distância do cós ao prédio na figura a seguir para calcular a altura do mesmo, não esquecendo a altura do observador.



APÊNDICE E - TEXTO REFERENTE AO CÁLCULO DO COMPRIMENTO DA JANELA DO PRÉDIO USANDO A BALHESTILHA

Caro aluno é importante que você siga essas instruções para entender e desenvolver essa atividade.

1º momento: Um aluno com a balhestilha se coloque em uma posição que possa ver toda a janela do prédio a partir do cós da balhestilha usando o ângulo dela.

2º momento: Depois de posicionado o aluno com a balhestilha, os outros discentes devem medir a distância dela até a janela.

3º momento: Colocar as medidas do ângulo DÂF e a distância do cós até a janela na figura a seguir para calcular o comprimento da mesma, não esquecendo a altura do observador.