UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL PROFMAT

FÁBIO BERNARDES

ANÁLISE DO EXAME NACIONAL DE ACESSO AO PROFMAT DOS ALUNOS EGRESSOS DO CURSO DE LICENTIATURA PLENA DE MATEMÁTICA DA UNEMAT

SINOP/MT
2019

FÁBIO BERNARDES

ANÁLISE DO EXAME NACIONAL DE ACESSO AO PROFMAT DOS ALUNOS EGRESSOS DO CURSO DE LICENTIATURA PLENA DE MATEMÁTICA DA UNEMAT

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, na Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT como requisito parcial para obtenção do grão de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong

Coorientadora: Prof. Ms. Christiane Valeria Costetti dos Santos Zubler

Sinop/MT
2019

Luiz Kenji Umeno Alencar CRB 1/2037

BERNARDES, Fábio.
B518a Análise do Exame Nacional de Acesso ao Profmat dos Alunos Egressos do Curso de Licenciatura Plena de Matemática da UNEMAT / Fábio Bernardes – Sinop, 2019.
0 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim)

Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) – Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2019.
Orientador: Oscar Antônio González Chong
Coorientador: Christiane Valeria Costetti dos Santos Zubler

1. Exame de Acesso. 2. Profmat. 3. Egressos. I. Fábio Bernardes. II. Análise do Exame Nacional de Acesso ao Profmat dos Alunos Egressos do Curso de Licenciatura Plena de Matemática da UNEMAT: .
CDU 378.091.212.2:378.22

ATA DE DEFESA PÚBLICA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT – UNEMAT – *CAMPUS* UNIVERSITÁRIO DE SINOP/MT

Aos dezesseis dias do mês de agosto de dois mil e dezenove, às catorze horas, na Sala L13 – do CEI, reuniu-se a Banca Examinadora da Defesa Pública de Dissertação, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. **Oscar Antônio González Chong** (UNEMAT/Sinop), Prof. Dr. **Antônio Vicente Marafioti Garnica** (UNESP/BAURU) e Prof. Dr. **Giovane Maia do Vale** (UNEMAT/Sinop), sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública do Trabalho de Conclusão de **Fábio Bernardes**, intitulado "Análise do Exame Nacional de Acesso ao PROFMAT dos alunos egressos do curso de Licenciatura Plena de Matemática da UNEMAT". Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Banca. Em seguida a banca deliberou pela aprovação do discente. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, segue assinada pelos membros. Sinop/MT, 16 de agosto de 2019.

Prof. Dr. **Oscar Antonio González Chong**
Presidente

Prof. Dr. **Antônio Vicente Marafioti Garnica**
Avaliador Externo

Giovane Maia do Vale

Prof. Dr. **Giovane Maia do Vale**
Avaliador Interno

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa Mirian Pereira da Silva e minha filha Laura da Silva Bernardes, por compreenderem a minha ausência e me apoiarem na conquista dos meus objetivos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, que me deu estrutura para não desistir no meio do caminho.

Agradeço à minha família, em especial a minha esposa Mirian e a minha filha Laura, que sempre estiveram ao meu lado e me ajudaram nos mais diversos momentos, para que eu realizasse todas as etapas deste mestrado.

Agradeço, em especial, minha Professora Ms. Christiane Valeria Costetti dos Santos Zubler, por ter aceito o desafio de ser minha coorientadora e pela grande contribuição na elaboração desta dissertação.

Agradeço aos meus colegas de turma que nos momentos mais difíceis sempre estiveram presentes e ajudaram as tornar possível esse projeto.

Agradeço a todos os professores que ministraram aula para minha turma, pela paciência de ensinar e mostrar os caminhos.

Agradeço ao meu orientador, professor Doutor Oscar Antônio Gonzalez Chong, por nunca ter deixado de acreditar em mim e, pelas inúmeras contribuições para a realização deste trabalho.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que de uma forma ou outra contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um diagnóstico das três últimas edições (2017, 2018 e 2019) do Exame Nacional de Acesso (ENA) ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da UNEMAT, *campus* de Sinop, focando as dificuldades dos professores de ensino médio da rede pública, em geral, e em particular as dos graduados de licenciatura em Matemática da UNEMAT para conseguir vagas no Mestrado. O diagnóstico estará orientado a determinar o perfil dos candidatos e os temas da Matemática do Ensino Médio que mais dificultam o acesso ao programa. Para tanto, foi realizada uma pesquisa quantitativa dos resultados obtidos pelos participantes do exame e, a partir das informações coletadas, foram realizadas análises estatísticas com a utilização de planilhas eletrônicas. Conjuntamente, foram realizadas comparações com elementos documentais que constam do banco de registros do programa para verificar e levantar hipóteses das possíveis dificuldades de acesso dos egressos do curso de Licenciatura Plena em Matemática da UNEMAT.

Palavras-chave: Exame de acesso, PROFMAT, Egressos.

ABSTRACT

In this work, we will make a diagnosis of the three last editions (2017, 2018 and 2019) of the National Access Examination (ENA), the Professional Master's Program in Mathematics (PROFMAT), UNEMAT, Sinop campus, focused on predicting professors of high school of the public network in general and in particular of the graduates of degree in Mathematics of the UNEMAT to obtain positions in the Masters. The diagnosis will be oriented to determine the profile of the candidates and the Mathematics subjects of the secondary education that most difficult the access to the program. For this, a quantitative research was carried out of the results obtained by the participants of the exam and from the information collected statistical analyzes were performed using spreadsheets Electronic. In addition, comparisons were made with documentary elements that are part of the database of the program to verify and raise hypotheses about the possible access difficulties of graduates of the Undergraduate Program in Mathematics at UNEMAT.

Keywords: Access exam, Profmat, Egressos.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A UNEMAT é uma instituição de Ensino Superior que oferta, desde o ano de 1991, o curso de Licenciatura Plena em Matemática no município de Sinop e que, a partir de 1994, data da colação de grau da primeira turma, é responsável por um grande número de professores de Matemática que atuam nas redes públicas e privadas do município e da região, visto a sua ampla abrangência.

Desde 2015 a UNEMAT oferta o Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). Inicialmente eram oferecidas 15 vagas e, a partir de 2019, para tentar aumentar o número de concluintes, passou a oferecer 20 vagas aos interessados, principalmente, professores efetivos da rede pública da Educação Básica.

Observa-se que a cada ano o número de interessados no Programa tem aumentado, não só de licenciados em Matemática, mas também de outras áreas de conhecimento tais como as de bacharelado em engenharias, administração e economia. Nesse sentido, a pesquisa aqui relatada visou diagnosticar os erros dentro dos temas e conceitos matemáticos que os participantes do Exame de acesso e, em particular, dos graduados em licenciatura em Matemática da UNEMAT tiveram para acessar o Programa de Mestrado.

Assim, o trabalho encontra-se estruturado em seis partes: introdução, justificativa, referencial teórico, metodologia, análise e resultados obtidos e as considerações finais, conforme descrito abaixo.

Na primeira parte, a justificativa, é apresentada uma pesquisa documental, expondo os objetivos da criação do Programa de Mestrado, bem como, a legislação e as metas do Plano Nacional de Educação que o embasam. Apresenta-se um breve histórico da UNEMAT e as suas contribuições ao longo dos anos para a sociedade local e regional devido sua amplitude de importância e abrangência.

No referencial teórico são apresentados todos os conceitos matemáticos e tecnológicos que sustentaram a pesquisa e nos deram subsídios para as análises e diagnósticos que o presente estudo pretende realizar.

Na quarta parte, destinado à metodologia, apresenta-se a fundamentação teórica, passos procedimentais realizados, no sentido de apresentar a forma como a coleta e a sistematização dos dados foram executados.

Nos resultados obtidos, apresentam-se os dados coletados por meio de gráficos e tabelas e todo o trabalho estatístico de comparação e cruzamento de dados para que pudéssemos analisar juízo às informações levantadas.

Espera-se que esta pesquisa tenha cumprido com os objetivos a que se propõe, de construir um diagnóstico do ENA e, a partir dele, as informações sejam, de alguma forma, utilizadas para refletir sobre os problemas nela descritos.

2. JUSTIFICATIVA

A Matemática, desde o início da humanidade, sempre fez parte da vida e do cotidiano do ser humano. Os saberes matemáticos que se conhece hoje são resultado das descobertas decorrentes das necessidades humanas que ocorreram em diferentes épocas e culturas.

Na sociedade atual, o domínio dos conhecimentos matemáticos acumulados e sistematizados ao longo do tempo se faz cada vez mais necessário e importante para que o indivíduo possa compreender a sua realidade e o auxilie a participar de forma mais efetiva e crítica na resolução de problemas do seu cotidiano.

> A Matemática deve ser entendida como uma construção social proveniente da história da humanidade que estabelece inúmeras relações com outras áreas de conhecimento e tem papel importante na resolução de problemas, não se estreitando somente em aplicações de fórmulas e técnicas, mas também na melhoria dos hábitos de linguagem e pensamento que proporcionam a ampliação do entendimento, interpretação e avaliação daquilo que nos rodeia. (DRC/MT, 2018, pag. 7)

Embora a Matemática seja uma ciência muito presente nas atividades e práticas sociais das pessoas, o seu ensino ainda é um desafio. Ela ainda é vista, por uma grande quantidade de alunos, como uma disciplina de difícil entendimento e, esta vem apresentando, sistematicamente, nos últimos anos, resultados insatisfatórios nas avaliações de larga escala realizadas pelo Ministério da Educação (MEC).

Ao analisarmos mais detalhadamente os resultados de proficiência dessas avaliações que têm por objetivo avaliar a qualidade do ensino ofertado pelas redes de ensino brasileiras, percebe-se que a maior parte dos alunos conclui a educação básica sem os conhecimentos mínimos em Matemática para esta etapa de escolaridade.

Em função desses resultados e de outros indicadores de qualidade, muito tem sido discutido sobre as dificuldades e fragilidades do ensino no Brasil, não só na disciplina de Matemática, mas em todas as áreas do conhecimento.

Vive-se um momento de grandes transformações com a criação e implementação de diversas políticas públicas, como a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), que apresenta novos fundamentos e propõe formas de ensinar a partir de práticas pedagógicas que visam garantir os direitos de aprendizagem dos alunos e proporcionam um ensino pautado no desenvolvimento de competências e habilidades com o objetivo de melhorar a qualidade da educação ofertada.

Desse modo e de acordo com os documentos oficiais orientadores do ensino no Brasil, o ensino da Matemática, oferecido nas instituições de ensino, deve se preocupar não só em abordar conceitos matemáticos necessários para o prosseguimento dos estudos, mas também deve desenvolver competências, habilidades e princípios direcionados à formação integral do sujeito, que, na sociedade moderna, se utiliza cada vez mais dos conhecimentos matemáticos em suas atividades diárias.

> Nessa perspectiva, a educação matemática deverá possibilitar aos estudantes (crianças, adolescentes, jovens e adultos) o desenvolvimento de competências que os permitam aprender a aprender, saber lidar com informações disponíveis nos diversos ambientes, respeitando as diferenças e as diversidades, atuando com responsabilidade nos mais diferentes contextos. (DRC/MT, 2018, pag. 07)

Nesse contexto, o ensino da Matemática é um grande desafio, tanto para os educadores que devem compreender novas formas de promover a aprendizagem dos alunos, quanto das instituições de ensino superior, que têm a função de proporcionar a formação inicial desses profissionais para atender a essas novas demandas sociais.

No plano Nacional de Educação – PNE, Lei Nº13.005 de 25/06/2014 - estão descritas diversas metas e ações que visam garantir a implementação de políticas públicas de qualificação e valorização do professor, no sentido de melhorar a qualidade da educação pública oferecida e, consequentemente, melhorar o nível de proficiência dos alunos.

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) é um programa de mestrado profissional, semipresencial na área de Matemática, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), em parceria com o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa) que surge a partir dessas discussões e, como uma ação induzida pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), vem para atender às metas 14, 16, 17 e 18 do Plano Nacional de Educação.

A oferta do Programa ocorre em todo território nacional e tem, como finalidade atender principalmente os professores da Educação Básica com o objetivo de aprofundar teoricamente os seus conceitos matemáticos indispensáveis à docência.

O PROFMAT prevê que, até o seu último ano de vigência, dentre outras coisas, forme a nível de mestrado, ao menos 50% dos professores que atuam na educação básica, bem como, que a carreira do professor seja valorizada, além de elevar o número de matrículas nos cursos de pós-graduação *stricto sensu*.

De acordo com relatórios de divulgação de dados e histórico do programa, a princípio, em 2011, 48 Instituições de Ensino Superior aderiram à proposta e ofertaram 1.192 vagas. Em 2012, 57 instituições passaram a ofertar o programa e foram oferecidas 1.575 vagas. Já em 2013, foram ofertadas 1.570 vagas em 58 instituições parceiras. Nos anos de 2014 e 2015 foram disponibilizadas, respectivamente, 1.500 e 1.575 vagas. No ano de 2016, embora o número de instituições tenha sido ampliado para 61, o número de vagas foi reduzido e foram oferecidas 1.470 vagas. No ano de 2017, foram disponibilizadas 1.605 vagas, e em 2018, 1785 vagas.

O acesso ao programa se dá por meio de provas anuais, denominadas “Exame Nacional de Acesso (ENA)”, publicadas em editais específicos que apresentam orientações e informações e têm por finalidade selecionar e classificar os interessados.

No estado de Mato Grosso, atualmente, o programa é ofertado pela Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) no campus de Barra do Garças, de Cuiabá e de Rondonópolis e pela Fundação Universidade Estadual de Mato Grosso (UNEMAT) nos campi de Sinop e de Barra do Bugres.

A presente pesquisa pretende analisar os dados de acesso dos alunos egressos do curso de Matemática da UNEMAT, campus Sinop, e verificar suas possíveis dificuldades em ingressar no programa.

O interesse na referida pesquisa nasceu das dificuldades ao realizar a prova de acesso, enfrentados por mim e por colegas da Rede Pública de Ensino da minha cidade, que, em muitos casos, não obtiveram êxito.

Há de se ressaltar que possuímos um campus da UNEMAT na nossa cidade que oferece o curso de licenciatura plena em Matemática, e que mesmo professores formados nesta instituição de ensino, apresentam dificuldades em acessar o programa.

Para compreender essa situação e tentar levantar hipóteses das possíveis causas é que propus a pesquisa aqui relatada, com o objetivo de verificar se os egressos do curso de Matemática da UNEMAT estão conseguindo acessar o programa. Sendo assim, utilizando os dados disponibilizados a partir do ano de 2016 no sistema do PROFMAT, analisou-se os acertos e erros das provas comparando os resultados dos egressos e dos não egressos e, também se analisou o perfil de cada um por meio de um questionário (ANEXO 1) encaminhado aos quatrocentos e trinta e três inscritos no programa nos anos de 2017, 2018 e 2019. Dentre estes, obteve-se retorno de noventa e três inscritos.

A pesquisa almejou ainda os seguintes objetivos específicos:

- Analisar os conteúdos cobrados nos exames de acesso do programa dos últimos três anos disponibilizados na UNEMAT de Sinop;
- Realizar, por meio de questionário, uma pesquisa junto aos inscritos do programa para verificar o perfil dos participantes e as dificuldades apontadas por eles, no que se refere à prova de acesso;
- Levantar as hipóteses das dificuldades dos egressos em acessar o programa.

Para compreender melhor o universo da pesquisa, apresenta-se um breve histórico da referida instituição e seu processo de instalação na cidade de Sinop.

De acordo com os relatos do histórico do *campus* presente na página da instituição na Internet, a Fundação Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT) foi fundada na cidade de Cáceres no ano de 1978, por meio da Lei Municipal Nº 703/78, a princípio, subordinada à Secretaria Municipal de Educação e Assistência Social, com a denominação de Instituto de Ensino Superior de Cáceres – IESC.

No ano de 1985, por meio da Lei nº 4.960 a instituição é estadualizada, passa a se intitular Fundação Centro Universitário de Cáceres (FCUC), vinculada à Secretaria Estadual de Educação (SEDUC).

Por meio da lei 5.495 de 17 de julho de 1989 a FCUC passa a se chamar Fundação Centro de Ensino Superior de Cáceres (FCESC) atendendo à adequação da Legislação Federal em vigor na época.

A partir desse período, a Fundação passa por um processo de expansão por meio de núcleos de ensino superior para o interior do Estado. Inicia suas atividades no município de Sinop no ano de 1990, ofertando os cursos de Licenciatura em Matemática, Letras e Pedagogia, para atender a demanda de profissionais da educação nestas áreas de conhecimento.

A Lei complementar nº 30 de 15 de dezembro de 1993, lhe confere à instituição o título de Fundação Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), uma Instituição de Ensino Superior vinculada à Secretaria de Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, com sua sede na cidade de Cáceres e com núcleos de educação em diversos municípios do estado.

Em 2001 o *campus* de Sinop passa por um processo de ampliação na área de Ciências Sociais e Aplicadas e começa a oferecer também os cursos de Bacharelado em Economia, Ciências Contábeis e Administração. Em 2006 é agregado ao *campus* de Sinop o curso de Engenharia Civil e mais recentemente de Engenharia Elétrica.

Hoje, o *campus* de Sinop, além dos cursos acima citados, oferta programas de mestrado nas áreas de Matemática e Letras.

Com relação ao mestrado profissional de Matemática (PROFMAT), o *campus* de Sinop, já está com a quinta turma em andamento, ou seja, foram realizadas provas de acesso para os de 2015, 2016, 2017, 2018 e 2019.

Para a pesquisa analisa-se os resultados obtidos nos três últimos exames de acesso (2017, 2018 e 2019), estes eram compostos por 30 (trinta) questões de múltipla escolha cada, distribuídos entre os diversos conceitos matemáticos e que fazem parte do histórico de registro do programa.

Feita uma análise documental das avaliações de 67 (sessenta e sete) egressos dos anos de 2017, 2018 e 2019, verificou-se nos acertos e erros, os itens e conceitos matemáticos que os candidatos apresentaram maior dificuldade. Vale ressaltar que o exame de acesso tem como finalidade avaliar os conhecimentos numéricos, geométricos, estatísticos, algébricos e aritméticos de cada candidato.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

Por se tratar de uma pesquisa quantitativa, a análise dos dados se dará por meio de mecanismos, ferramentas e técnicas estatísticas descritivas para inferir e validar hipóteses relativas ao estudo. Utilizaremos as medidas de dispersão e de médias.

3.1 Apresentação dos dados

Existem diversas formas de se representar os dados de uma pesquisa. Neste trabalho, os dados serão apresentados a partir de tabelas e gráficos, conforme definições abaixo.

3.1.1 Tabelas

Uma tabela é uma representação ordenada de dados, onde os elementos estão dispostos em linhas e colunas, com o intuito de apresentar os dados de forma mais simplificada e de fácil entendimento de um conjunto de observações.

3.1.2 Gráficos

Os gráficos são dados de pesquisa ou situações numéricas que podem ser expressas por meio de figuras geométricas com a finalidade de auxiliar na análise das informações, ou seja, a sua representação torna a leitura mais rápida e fácil.

3.2 Planilhas Eletrônicas

Planilha eletrônica é um programa que foi elaborado para realizar cálculos, sistematizar e representar dados por meio de tabelas e gráficos, de forma eficiente e prática e com o auxílio de uma série de recursos que viabiliza produzir e gerar dispositivos para troca de informações de modo que o usuário deseja.

A mais utilizada e conhecida é a MS Excel, do pacote Office, da Microsoft, que atende diversos tipos de público como profissionais, estudantes ou domésticos que desejam efetuar, principalmente, cálculos matemáticos e financeiros. É composta por linhas e colunas que ao se interceptarem formam as células que admitem a inserção de textos, fórmulas, números e funções.

Nesta pesquisa utilizaremos as planilhas de Excel como forma de apresentar, sistematizar e compilar os dados por meio de tabelas e gráficos que facilitem a leitura e interpretação das informações.

3.3 *Software Wolfram Mathematica*

Para a leitura das folhas de respostas dos alunos foi utilizado o *Software Wolfram Mathematica*. Os dados foram compilados e posteriormente transformados em planilhas eletrônicas onde foram feitos cálculos de média, moda, mediana, desvio padrão para que pudéssemos inferir sobre os resultados obtidos.

Abaixo estão descritos os procedimentos e as leituras realizadas pelo *software* no tratamento digital das imagens para obter a quantidade de acerto em cada pergunta do ENA 2017 e 2018.

Procedimento:

```
In[ ]:= respuesta[j_] := Module[{resposta = 0, j0 = j},
                         módulo de código
   For[i = 1, i ≤ 5, i++, If[Length [DominantColors[ImageTake[patron, {n, n + 40}, {j0, j0 + 48}]]] >= 2, resposta = resposta + 1;
   para cada                se  compri…  cores dominantes  extrai parte da imagem
     letra = i, Continue];
                continua operações
    j0 = j0 + 70];
   If[resposta == 1, r = Piecewise[{{a, letra == 1}, {b, letra == 2}, {c, letra == 3}, {d, letra == 4}, {e, letra == 5}}];
   se                    função por partes
    lista = Insert[lista, r, -1], lista = Insert[lista, 0, -1]]]
            insere                      insere
```

Leitura da folha de respostas:

```
In[ ]:= patron = Import[ "H:/patron/respostas1.jpg"]
                 importa
```


EXAME NACIONAL DE ACESSO - PROFMAT/2017

Sinop - MT - UNEMAT

2017-088.057-1 [redacted] CPF [redacted]

Ausente Eliminado

Assinatura: [redacted]

RESPOSTAS

INSTRUÇÕES DE PREENCHIMENTO:

Utilize caneta esferográfica azul ou preta.

Marcações duplas, em branco e marcações diferentes do exposto no exemplo não serão consideradas.

Os campos em vermelho ao lado das alternativas (A,B,C,D,E) e na parte inferior são de uso EXCLUSIVO da comissão de correção.

EXEMPLO:

Marcação correta

X Marcação incorreta

V Marcação incorreta

O Marcação incorreta

Total de acertos na prova:

Construção da lista de repostas de cada aluno:

```
In[•]:= aluno = ImageTake[patron,  {200, 280}, {250, 500}];
                 extrai parte da imagem
        aluno = TextRecognize[aluno]; lista = {aluno}; n = 910;
                 reconhecimento de texto
        For[k = 1, k ≤ 15, k++,
        para cada
         respuesta[170]; n = n + 40]; n = 910; For[k = 1, k ≤ 15, k++,
                                                para cada
         respuesta[750];
         n = n + 41];
        Print[lista]
        apresenta o resultado

Out[•]= $Aborted

Out[•]= $Aborted

In[•]:= lista1 = {"ADEMIR sino AGUIAÍ", a, e, b, C, d, a, a, d, d, d, e, a, e, C, a, a, d, a, b, d, C, a, b, d,
                                                 símbolo de constante          símbolo de constante    símbolo de constante
          e, d, b, e, d, d}

In[•]:= lista2 = {"VADRIANO FERREIRA DE (", 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
          0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

In[•]:= patron = Import[ "H:/patron/respostas2.jpg"]
                 importa
```

Compilação dos dados:

```
In[•]:= datos = ExportString[{lista1, lista2}, "Table",
                exporta uma cadeia de caracteres
          "TableHeadings" → {nome, Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, Q11, Q12, Q13, Q14, Q15, Q16,
            Q17, Q18, Q19, Q20, Q21, Q22, Q23, Q24, Q25, Q26, Q27, Q28, Q29, Q30}]

In[•]:= Export["H:/patron/ena2017_4.txt", datos]
        exporta
```

4. METODOLOGIA

A princípio, em nossa investigação, opta-se por utilizar uma pesquisa exploratória, que nos auxiliou a compreender alguns elementos fundamentais na formulação do problema e elaboração de hipóteses da pesquisa, com a finalidade de buscar possíveis respostas relativas ao objeto de estudo.

Posteriormente, opta-se por uma abordagem quantitativa em função do tipo de investigação a ser realizada, visto que este método se utiliza de diversos instrumentos e técnicas estatísticas para inferir e dimensionar pontos de vista a partir das informações obtidas e análises realizadas. Nestes termos cabe definir que:

> O método quantitativo, como o próprio nome indica, caracteriza-se pelo emprego da quantificação tanto nas modalidades de coleta de informações, quanto no tratamento dessas através de técnicas estatísticas, desde a mais simples como percentual, média, desvio-padrão, ás mais complexas como coeficiente de correlação, análise de regressão etc, (RICHARDSON, 1989, p.29)

Sendo assim, os meios de coletas de dados serão estruturados por meio de questionários de múltipla escolha, análises documentais dos registros que constam do banco de dados do ENA e resultados dos egressos da UNEMAT dos três últimos anos. A finalidade foi de compará-los com a média de aproveitamento dos demais participantes e, a partir das análises dos dados estatísticos, tentar compreender as dificuldades de acesso ao programa.

Para tanto, incialmente realizamos uma pesquisa por meio de um questionário estruturado enviado a todos os quatrocentos e trinta e três participantes, via formulário eletrônico, inscritos no ENA da UNEMAT campus de Sinop, dos anos de 2017, 2018 e 2019, com a finalidade de identificar, de modo geral, o perfil dos candidatos e quais as dificuldades conceituais que os mesmos possuíram em relação ao acesso ao PROFMAT.

A análise dos itens das provas foi feita a partir de uma classificação do tema principal da questão, visto que algumas delas abordam mais de um conhecimento matemático para resolvê-la. Dessa observação classificamos os temas do exame em cinco áreas do conhecimento matemático: Geometria, Álgebra, Aritmética, Trigonometria e Estatística / Probabilidade.

Posteriormente fizemos uma pesquisa documental nos registros do ENA para identificar os egressos do curso de Licenciatura Plena em Matemática da UNEMAT.

Utilizamos também os resultados dos egressos para construir um banco de dados e, a partir destes, com o auxílio de recursos gráficos e de *software*, verificamos o índice de aproveitamentos dos mesmos, com a finalidade de compará-los com os demais candidatos, como forma de, no cruzamento dos dados, levantar hipóteses sobre as dificuldades que esses egressos tiveram ao acessar o PROFMAT.

Cabe aqui ressaltar que para a apresentação dos resultados iremos nos pautamos no uso de técnicas estatísticas, recursos gráficos e computacionais que uma pesquisa quantitativa requer para análise das informações. Posteriormente validamos os dados obtidos e mensuramos seus resultados de maneira estatística, com o uso de uma linguagem matemática própria para descrever os fenômenos observados.

Neste tipo de pesquisa, há que se destacar que o investigador não pode analisar os dados de maneira subjetiva, mas sim, apresentar os dados obtidos de forma estruturada e com o auxílio de recursos que possibilitem uma leitura e interpretação de forma clara e objetiva.

> Amplamente utilizado na condução da pesquisa, o método quantitativo representa, em princípio, a intenção de garantir a precisão dos resultados, evitar distorções de análise e interpretação, possibilitando, consequentemente, uma margem de segurança quanto às inferências. É frequentemente aplicado nos estudos descritivos, naqueles que procuram descobrir e classificar a relação entre variáveis, bem como nos que investigam a relação de causalidade entre fenômenos. (RICHARDSON, 1989, p.29)

5. ANÁLISE E RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo, apresentam-se tabelas e gráficos referentes à dados dos quatrocentos e trinta e três inscritos no ENA. Os meios de referência quantitativos nortearam a pesquisa aqui relatada para obter-se possíveis hipóteses sobre as dificuldades que os inscritos tiveram ao tentar adentrar o PROFMAT.

Na tabela descrita abaixo, a tabela 1, estão contidos dados do quantitativo de participantes em cada edição, desconsiderando os candidatos ausentes. A partir desse total, a última coluna, à direita do leitor, demonstra o total de egressos formados pelo curso de Licenciatura Plena em Matemática da UNEMAT.

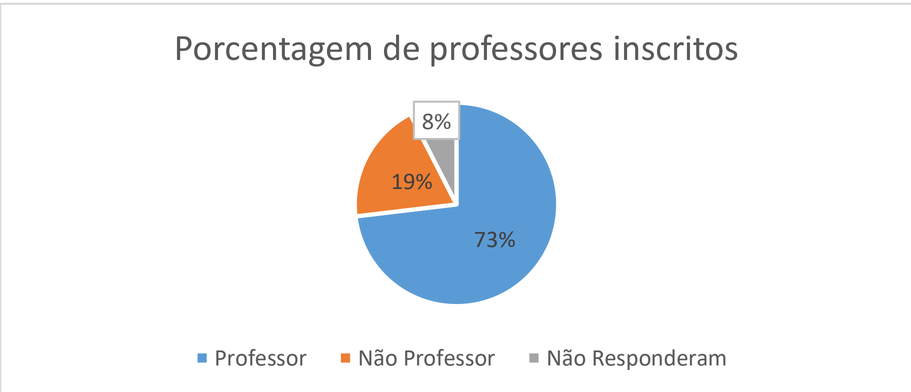
Tabela 1 – Total de inscritos no ENA

Ano	Outras instituições	Egressos – UNEMAT
2017	98	19
2018	133	20
2019	135	28
TOTAL	366	67

Fonte: produzido pelo autor, 2019

Por meio do questionário encaminhado aos inscritos no ENA nos anos de 2017, 2018 e 2019 para o *campus* da UNEMAT Sinop/MT, analisou-se o perfil de 93 candidatos. Assim, levantaram-se alguns pontos de grande relevância à pesquisa aqui relatada e que, a seguir, serão ilustrados com a ajuda de gráficos e tabelas.

Gráfico 1 – Profissão do Candidato



Fonte: produzido pelo autor, 2019

No que diz respeito ao tempo de atuação na docência podemos observar na tabela 2 um grande número de candidatos inscritos que atuam na profissão a menos de 5 anos, o que representa 44,1% dos candidatos, pode-se perceber um maior interesse destes em buscar uma pós-graduação na área, ou seja, um maior interesse pelo PROFMAT.

Tabela 2 – Tempo de atuação na docência

Tempo de atuação	Frequência	%
0 a 5 anos	30	44,1
6 a 10 anos	8	11,8
11 a 15 anos	13	19,1
Mais de 15 anos	17	25,0
	68	100

Fonte: produzido pelo autor, 2019

Fica evidente na tabela 3 que a maior parte dos candidatos ao ENA possuem uma jornada semanal de trabalho de 30 horas semanais. É possível perceber ainda, que alguns profissionais que se candidatam ao exame possuem uma carga horária igual ou superior a 40 horas semanais.

Tabela 3 – Jornada semanal de trabalho

Jornada semanal de trabalho	Frequência	%
20 horas semanais	5	7,4
30 horas semanais	31	45,6
40 horas semanais	17	25,0
Mais de 40 horas semanais	15	22,1
Total	68	100

Fonte: produzido pelo autor, 2019

Dentre os noventa e três questionários obtidos, a faixa etária da maior parte dos candidatos está entre 26 e 30 anos de idade.

Tabela 4 – Idade dos participantes

Idade dos Candidatos		
Idades	Frequência	%
20 ⊢ 25	10	10,8
26 ⊢ 30	21	22,6
31 ⊢ 35	20	21,5
36 ⊢ 40	18	19,4
41 ⊢ 45	12	12,9
45 ⊢ 50	12	12,9
Totais	93	100,0

Fonte: Produzido pelo autor, 2019

Em relação aos municípios que o exame abrange, podemos observar abaixo (tabela 5) que são diversos, sendo quase todos pertencentes ao Estado de Mato Grosso e circunvizinhos ao município de Sinop. A hipótese de o maior número dos candidatos serem do município cede do programa pode estar relacionado às dificuldades e o custo com o transporte, que proporcionam uma baixa participação dos demais.

Tabela 5 – Cidades de origem dos candidatos

Cidades	Frequência	%
Alta Floresta	3	3
Campo Novo Do Parecis	2	2
Cláudia	2	2
Colíder	4	4
Guarantã Do Norte	2	2
Juara	4	4
Juína	8	9
Lucas do Rio Verde	2	2
Marcelândia	3	3
Novo Progresso	2	2
Peixoto de Azevedo	3	3
Rondonópolis	2	2
Sinop	34	37
Sorriso	6	6
Tabaporã	3	3
Tapurah	2	2
Outras	11	12
	93	100

Fonte: Produzido pelo autor, 2019

Com relação a Instituição em que os candidatos concluíram a graduação, pode-se verificar na tabela 6 que a UNEMAT ainda apresenta o maior número de candidatos, e que no decorrer dos anos houve um aumento considerável de alunos advindos da UNEMAT, sendo seguida pela UFMT e UNIC. Pode-se concluir ainda que um grande número de inscritos concluíram o curso de graduação em universidades públicas.

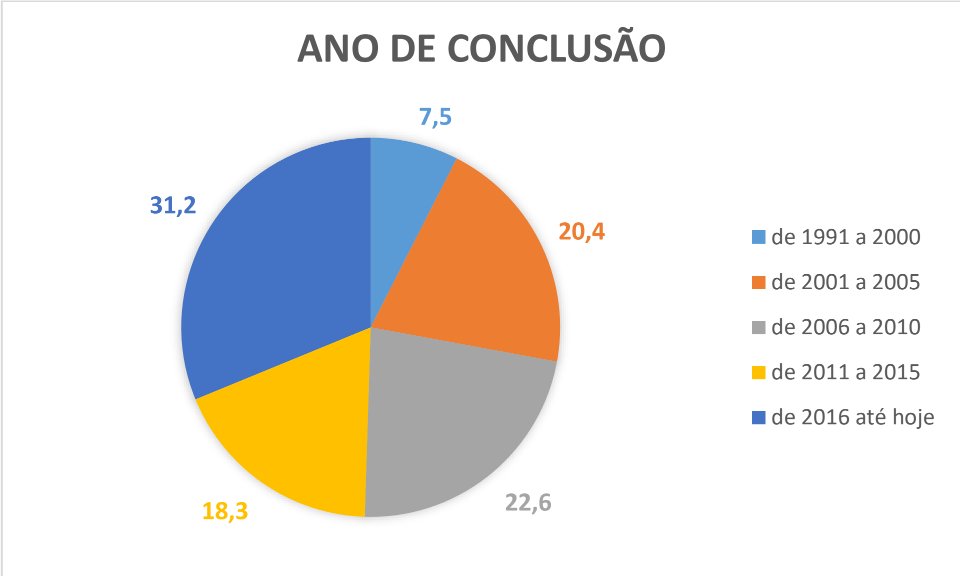
Tabela 6 – Instituição de conclusão da graduação

Instituições	Frequência	%
Universidade Estadual do Mato Grosso (UNEMAT)	34	36,6
Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT)	12	12,9
Universidade de Cuiabá (UNIC)	7	7,5
Faculdade do Vale do Juruena (AJES)	5	5,4
Universidade Federal do Pará (UFPA)	2	2,2
Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul (UEMS)	2	2,2
Universidade Paranaense (UNIPAR)	3	3,2
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)	2	2,2
Universidade Estadual de Tocantins (UNITINS)	3	3,2
Outras	23	24,7
Total	93	100

Fonte: produzido pelo autor, 2019

Com referência ao ano de conclusão pode-se verificar, conforme o gráfico 2, que a maior parte dos inscritos concluiu a graduação a partir de 2016, dados estes importantes pois, inferem que quanto maior o tempo de formação, o interesse pelo mestrado aparentemente diminui.

Gráfico 2 – Ano de conclusão da graduação



Fonte: produzido pelo autor, 2019

Quanto a formação inicial dos candidatos, a pesquisa revelou que o PROFMAT tem atraído não só licenciados em Matemática, mas também profissionais de outras áreas do conhecimento, como mostra a tabela 7.

Tabela 7 – Formação inicial dos candidatos

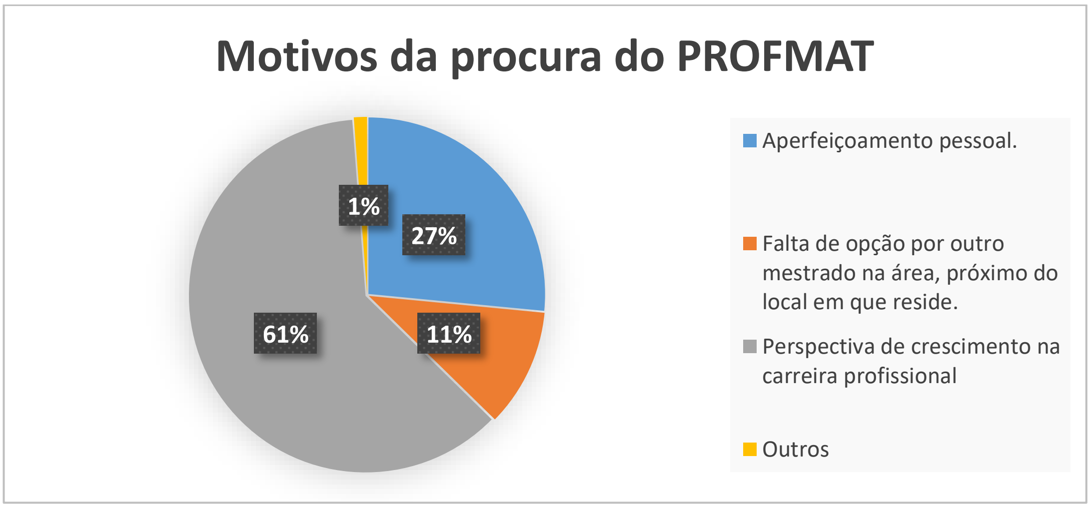
Cursos	Frequência	%
Administração	2	2,2
Agronomia	1	1,1
Ciências Contábeis	1	1,1
Ciências – Matemática	7	7,5
Engenharias	6	6,5
Computação	2	2,2
Pedagogia	1	1,1
Matemática	66	71,0
Outros	7	7,5
Total	93	100

Fonte: produzido pelo autor, 2019

Uma das possíveis hipóteses para a procura de profissionais de outras áreas pela pós-graduação no PROFMAT pode estar relacionada à falta de opção de mestrado nesses campos profissionais, assim como a redução e bloqueio de bolsas aprovadas pela CAPES.

Procura-se entender os motivos pelos quais os candidatos procuram o PROFMAT. De acordo com o gráfico 3, grande parte dos candidatos veem no programa uma perspectiva de crescimento na carreira profissional.

Gráfico 3- Motivos da procura do programa PROFMAT



Fonte: produzido pelo autor, 2019

Evidenciou-se a percepção de dificuldade do candidato em relação ao Exame por meio da pesquisa. A tabela 8 nos mostra que a maior parte dos candidatos considera a avaliação de média complexidade, porém, com muitas questões e pouco tempo para resolver.

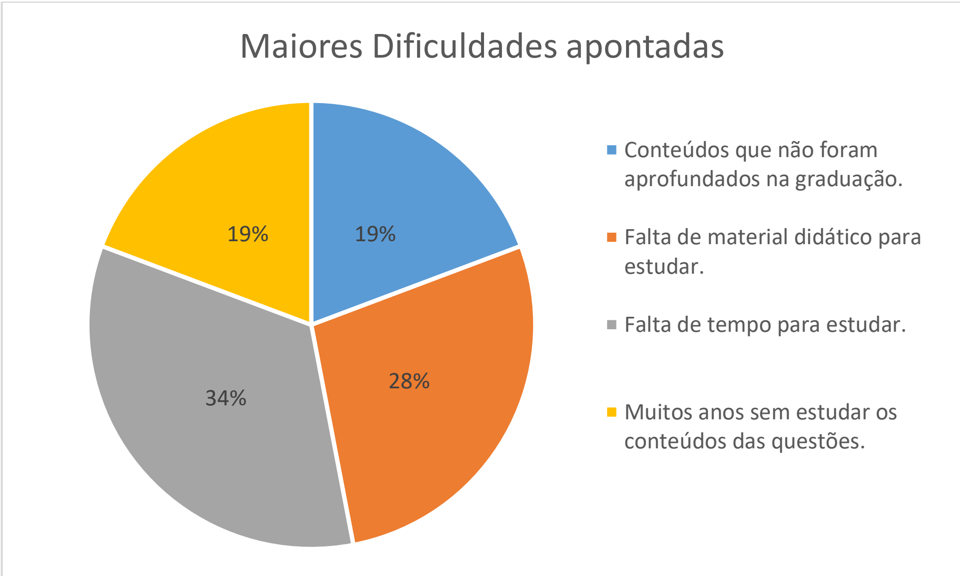
Tabela 8 – Como os candidatos classificam o ENA

	Frequência	%
De alta complexidade.	23	27,7
De baixa complexidade, porém com muitas questões e pouco tempo para resolver.	2	2,4
De baixa complexidade.	2	2,4
De média complexidade, porém com muitas questões e pouco tempo para resolver.	32	38,6
De média complexidade.	11	13,3
De média complexidade, porém com muitos inscritos para o número de vagas ofertadas.	11	13,3
De baixa complexidade, porém com muitos inscritos para o número de vagas ofertadas.	2	2,4
Total	83	100

Fonte: produzido pelo autor, 2019

Na pesquisa verificou-se que a falta de tempo e a carência de matérias didáticos relacionados ao exame de acesso ao programa influenciaram negativamente para a aprovação dos candidatos.

Gráfico 4- Dificuldade do cursista em resolver o ENA



Fonte: produzido pelo autor, 2019

Com os dados coletados neste instrumento de pesquisa, pretendia-se construir o perfil dos candidatos ao exame, pode-se observar que em sua maioria os candidatos são formados a menos de 5 anos; moram no município de Sinop ou em municípios próximos; desempenham a função de docentes; geralmente graduados em Universidades públicas e que veem no PROFMAT uma forma de ascender na carreira ou buscam o aperfeiçoamento profissional. A maioria tem jornada semanal de 30, 40 ou mais horas semanais de trabalho e consideram o exame de média complexidade, porém com muitos itens e pouco tempo para a resolução. Também atribuem ao resultado insatisfatório à falta de tempo para estudar ou à carência de matérias didáticos específicos de acesso ao programa.

Depois de identificar o perfil dos candidatos inscritos no ENA, apresenta-se abaixo dados abrangentes do exame de acesso, importantes para compreender-se a dimensão do programa ofertado pela UNEMAT Sinop/MT.

5.1 ANÁLISE DOS EXAMES DE ACESSO

Para realizarmos essa análise, primeiramente, classificamos os itens do exame de acesso dos anos de 2017, 2018 e 2019 a partir de 5 temas centrais: Geometria, Álgebra, Aritmética, Trigonometria e Estatística/probabilidade. Os dados obtidos estão descritos na tabela 13 abaixo:

Tabela 9 – Número de questões por área de conhecimento.

	Geometria	Álgebra	Aritmética	Estatística Probabilidade	Trigonometria
ENA 2017	8	6	6	5	5
ENA 2018	6	7	6	5	6
ENA 2019	7	6	8	4	5

Fonte: produzido pelo autor, 2019

A tabela 10, mostra a distribuição das questões na classificação nas 5 áreas das questões.

Tabela 10 –Questões por área de conhecimento.

	Geometria	Álgebra	Aritmética	Estatística Probabilidade	Trigonometria
ENA 2017	1/4/8/9 11/13/18/21	3/12/20 25/26/27	2/6/10 17/23/29	2/22/24 28/30	7/14/15 16/19
ENA 2018	8/10/18 26/27/28	1/4/9 15/22/30	6/7/11 17/23/29	3/12/13 14/19	2/5/16 20/21/25
ENA 2019	7/11/13/15 17/21/28	3/4/5 10/12/14	2/6/9/20 22/23/24	25/26 27/29	1/8/16 18/19

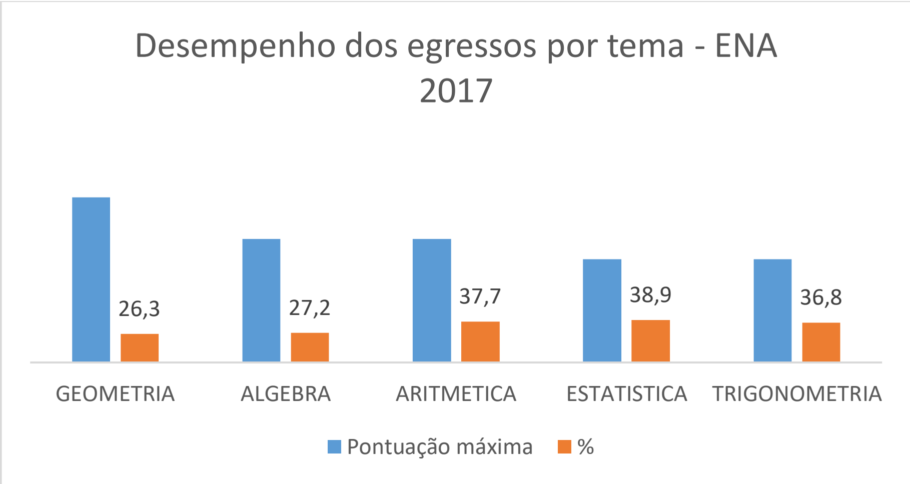
Fonte: produzido pelo autor, 2019

Pode-se observar que nas três edições descritas na tabela acima, o exame de acesso teve um total de 30 questões e os temas foram distribuídos de forma adequada.

Ao realizar uma análise do desempenho dos egressos, por tema dos itens do ENA das três edições já mencionadas pode-se verificar, além do rendimento, quais os temas que se obteve os menores índices de aproveitamento.

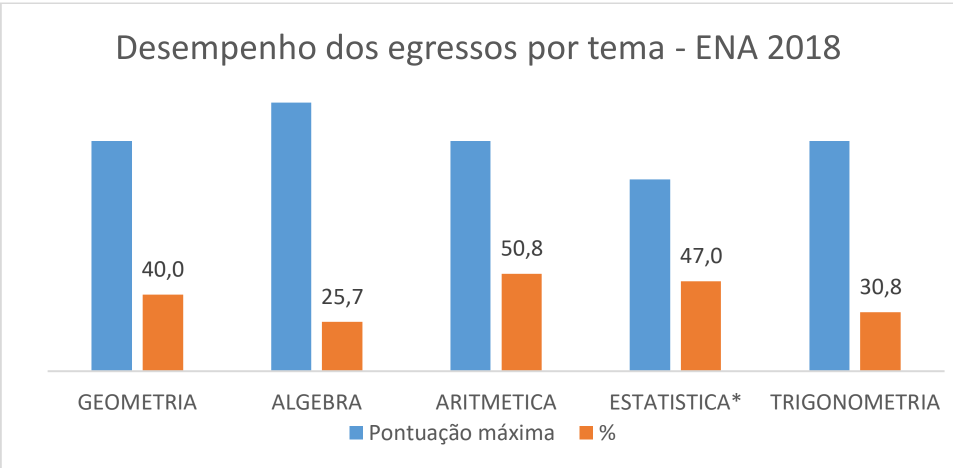
Os gráficos 5, 6 e 7 demonstram os dados obtidos e, a partir dessas análises estatísticas, é possível inferir que o menor aproveitamento se deu no tema Geometria que, nos anos de 2017 e 2019, obteve as menores porcentagens de acertos. O tema álgebra também merece destaque pois em 2018 foi o tema com a porcentagem de êxito mais baixa.

Gráfico 5 – Desempenho geral dos egressos por tema do ENA 2017



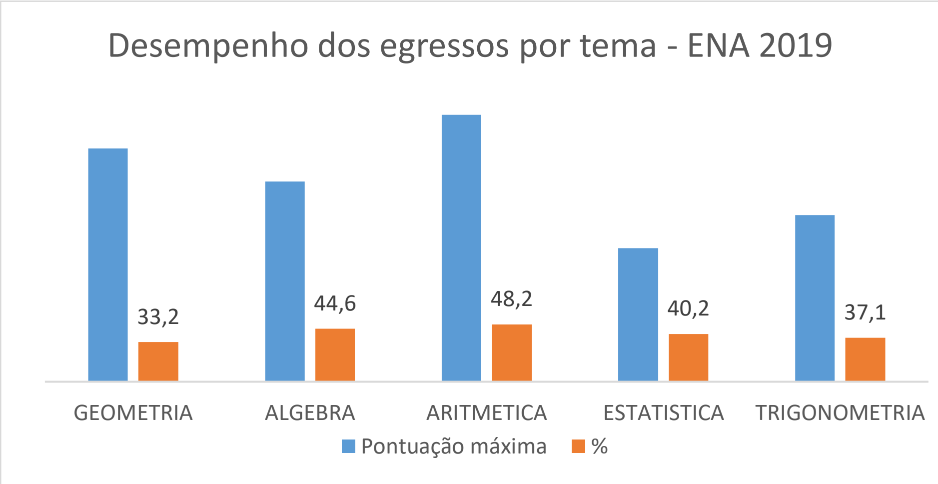
Fonte: produzido pelo autor, 2019

Gráfico 6 – Desempenho geral dos egressos por tema do ENA 2018



Fonte: produzido pelo autor, 2019

Gráfico 7 – Desempenho geral dos egressos por tema do ENA 2019

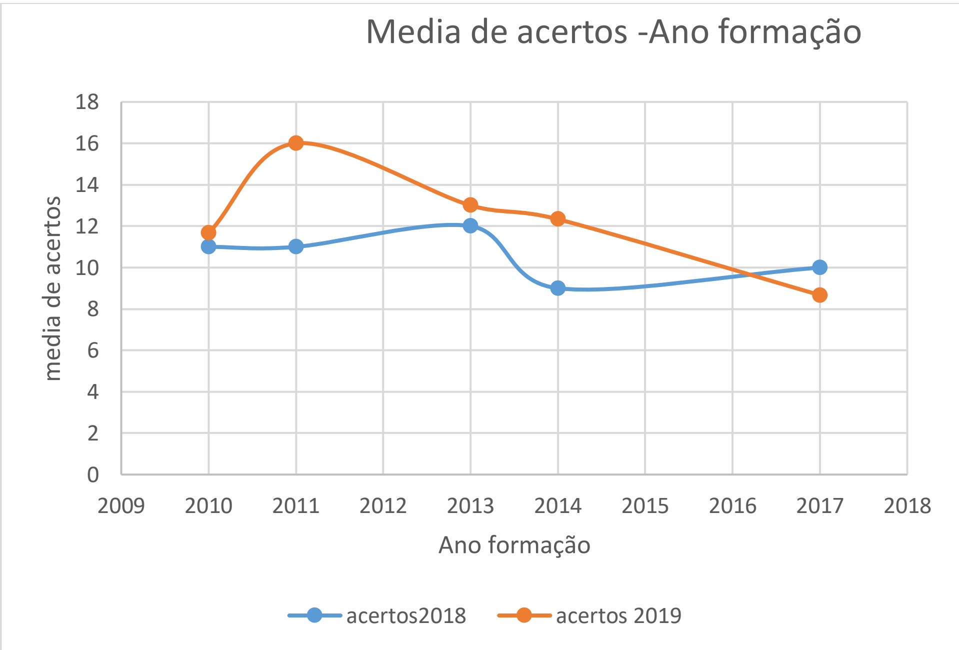


Fonte: produzido pelo autor, 2019

Pode-se inferir também que do ano de 2017 para o de 2018 o tema geometria obteve um aumento significativo no desempenho, e uma das hipóteses para essa variação na melhora dos acertos pode estar relacionada aos professores do mestrado serem os mesmos que trabalham na graduação, além do surgimento de cursos especializados na preparação para o exame de acesso.

Ainda neste aspecto elaborou-se um gráfico relacionando a média de acertos nas avaliações ao tempo de formação.

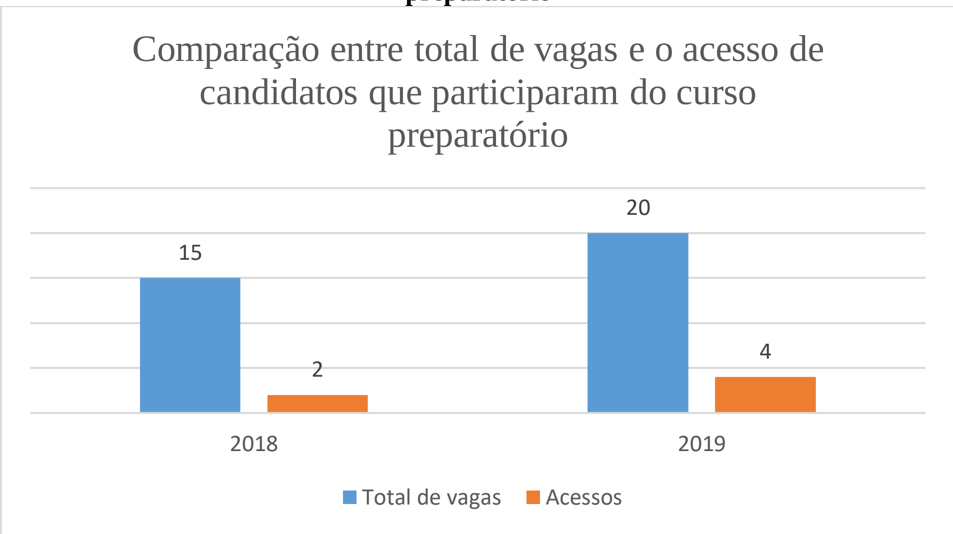
Gráfico 8 - Média de acertos por ano de formação



Fonte: produzido pelo autor, 2019

O gráfico 9 abaixo mostra a evolução no número de acessos dos participantes do curso preparatório ofertado pela instituição nos últimos dois anos. Em 2018, dos quinze candidatos que acessaram o programa, dois deles participaram do curso. Já em 2019 das vinte vagas oferecidas, quatro delas foram preenchidas por candidatos oriundos do curso preparatório.

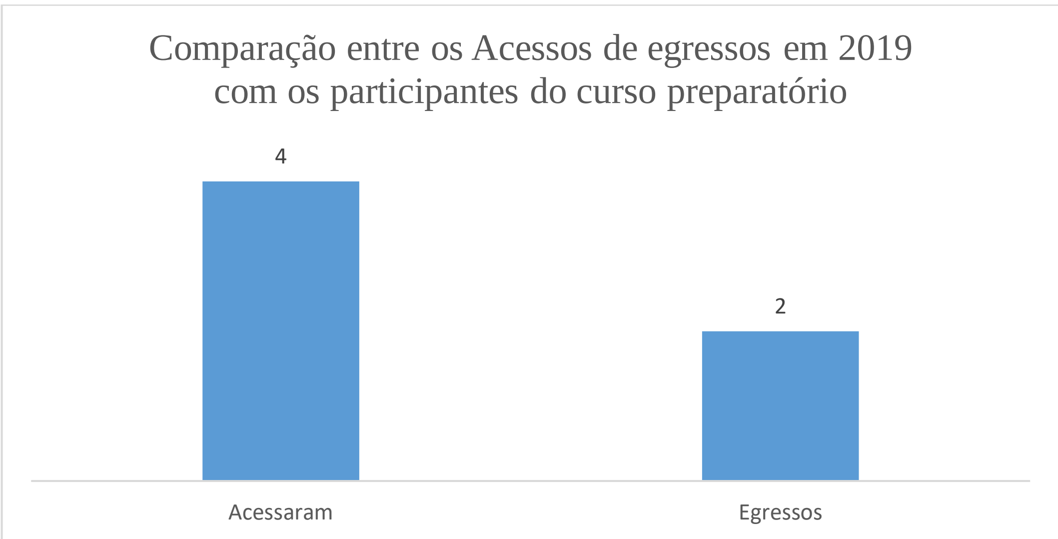
Gráfico 9– Comparação entre total de vagas e o acesso de candidatos que participaram do curso preparatório



Fonte: produzido pelo autor, 2019

Fazendo uma análise mais aprofundada dos candidatos que participaram do curso preparatório, selecionamos os egressos do curso de Licenciatura Plena em Matemática da UNEMAT que concluíram a formação preparatória, temos o seguinte:

Gráfico 10– Comparação entre os Acessos de egressos em 2019 com os participantes do curso preparatório



Fonte: produzido pelo autor, 2019

Quando empregamos outros recursos estatísticos, para analisar os resultados de erros e acertos dos candidatos e comparar com os resultados dos egressos, descritos na tabela 11 abaixo:

Tabela 11 – Média de acertos e Desvio padrão dos egressos

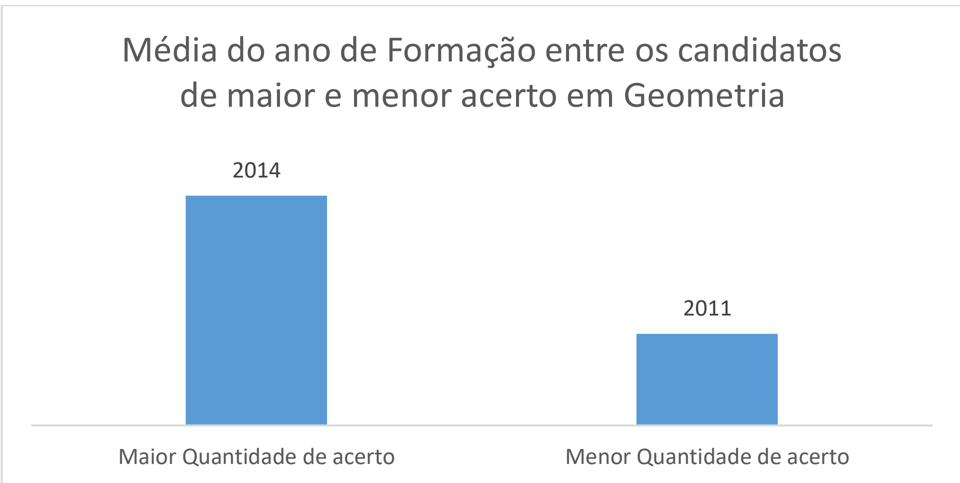
Candidatos Egressos da UNEMAT											
	Quant.	Geometria		Trigonometria		Álgebra		Aritmética		Estatística/ Probabilidade	
		$\bar{x}$	dp(x)	$\bar{x}$	dp(x)	$\bar{x}$	dp(x)	$\bar{x}$	dp(x)	$\bar{x}$	dp(x)
2017	19	2,1	1,3	1,8	1,1	2,0	1,0	2,3	1,2	2,0	1,0
2018	20	2,4	1,0	1,9	1,1	1,8	1,5	3,1	1,4	2,4	1,1
2019	28	2,3	1,9	1,9	1,2	2,7	1,2	3,9	1,8	1,6	1,0

Fonte: produzido pelo autor, 2019

Podemos inferir que, de modo geral, a média de acerto em todos os temas matemáticos dos egressos da UNEMAT, no decorrer dos anos tem aumentado. Observamos também que no tema Geometria, o desvio padrão teve um aumento significativo, o que implica em dizer que, existe uma disparidade muito grande em relação à médias de acertos. Alguns egressos tiveram uma média de acertos muito alta e outros muito baixa.

A média aqui descrita com o auxílio de tabelas, nos possibilita evidenciar quais os pontos de maior dispersão entre a mesma e o seu desvio padrão. Os resultados podem ser utilizados para trabalhar essas áreas na graduação de Licenciatura Plena em Matemática, ocasionando resultados mais satisfatórios no que diz respeito ao exame de acesso do PROFMAT.

Gráfico 11– Média do ano de Formação entre os candidatos de maior e menor acerto em Geometria



Fonte: produzido pelo autor, 2019

Quando observamos a mesma evolução dos candidatos oriundos de outras instituições (tabela 12) verificamos que os temas álgebra e aritmética obtiveram crescimento em relação aos anos. Já os temas de probabilidade e estatística, geometria e trigonometria, as médias de acertos diminuíram em relação aos anos do Exame de Acesso, conforme descrito abaixo:

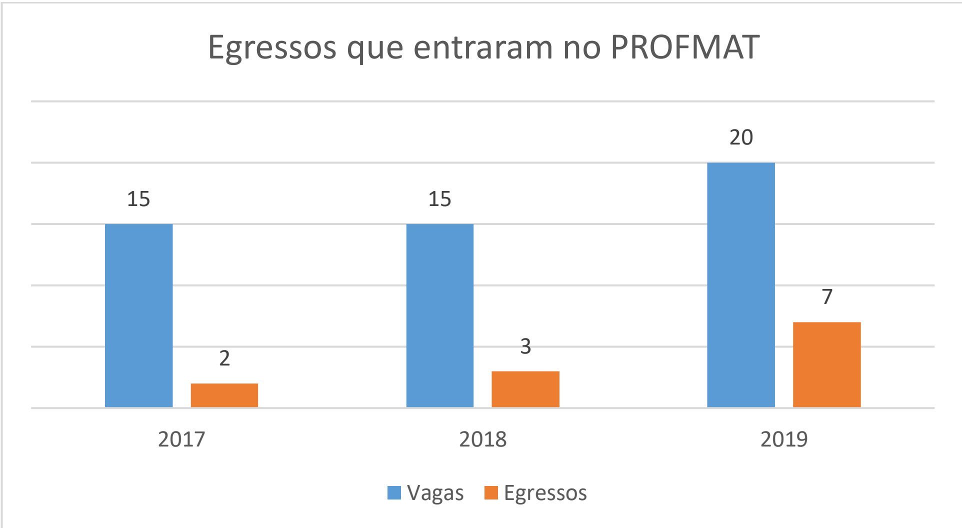
Tabela 12 – Média de acertos e Desvio padrão dos candidatos de outras instituições

Candidatos de outras instituições											
Ano	Quant.	Geometria		Trigonometria		Álgebra		Aritmética		Estatística/ Probabilidade	
		$\bar{x}$	dp(x)	$\bar{x}$	dp(x)	$\bar{x}$	dp(x)	$\bar{x}$	dp(x)	$\bar{x}$	dp(x)
2017	83	2,9	1,5	1,4	0,9	1,8	1,4	2,1	1,4	2,0	1,1
2018	133	2,2	1,1	1,9	1,3	1,9	1,5	2,7	1,2	2,0	0,9
2019	135	1,5	1,3	1,3	1,2	2,1	1,2	3,3	1,6	1,1	1,0

Fonte: produzido pelo autor, 2019

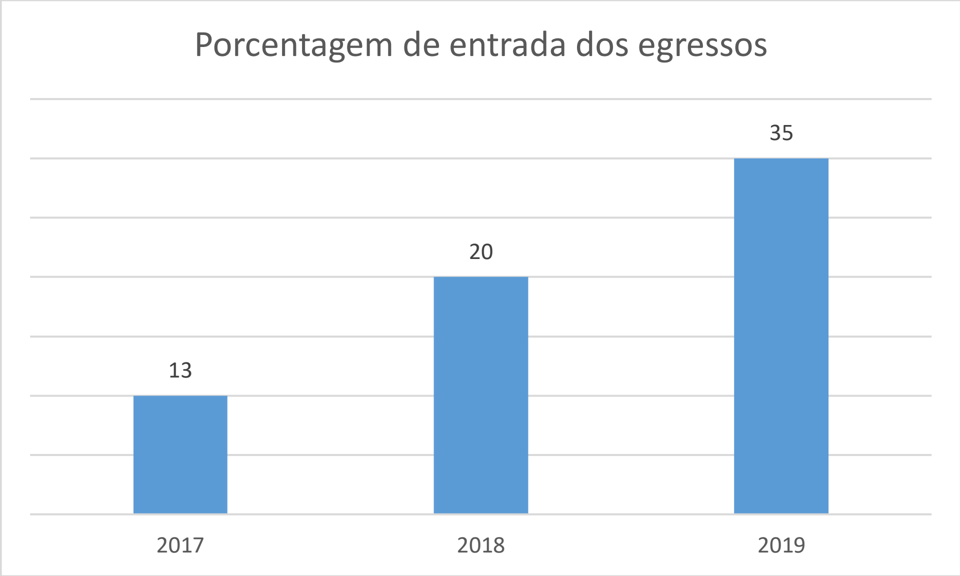
Ao comparar os dados de egressos aprovados em relação ao número de vagas ofertadas pelo programa (gráficos 12 e 13), é possível perceber que no decorrer dos anos houve um aumento considerável de alunos advindos da UNEMAT.

Gráfico 12 – Número egressos que adentraram ao programa em relação ao total de vagas



Fonte: produzido pelo autor, 2019

Gráfico 13 – Porcentagem egressos que adentraram ao programa em relação ao total de vagas.



Fonte: produzido pelo autor, 2019

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo fazer um diagnóstico das três últimas edições (2017, 2018 e 2019) do Exame Nacional de Acesso (ENA) ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UNEMAT, *campus* de Sinop e, a partir dos dados levantados, tentar levantar as dificuldades dos professores de ensino médio da rede pública em geral e, em particular, dos graduados de Licenciatura Plena em Matemática da UNEMAT em acessar no Mestrado.

O diagnóstico destinado a determinar os temas da Matemática do Ensino Médio, que mais dificultam o acesso ao programa foi realizado a partir de uma pesquisa quantitativa apoiado nos resultados apresentados pelos participantes do exame apoiado em análises estatísticas com a utilização de planilhas eletrônicas e do *software Wolfram Mathematica*.

Conjuntamente, foram realizadas comparações com elementos documentais que constam do banco de registros do programa para verificar e levantar hipóteses das possíveis dificuldades de acesso dos egressos do curso de Licenciatura Plena em Matemática da UNEMAT.

Aliado à visibilidade crescente do mestrado na área de Matemática e à falta de programas de mestrado em outras áreas profissionais, pode-se concluir que vem ocorrendo um aumento no número de inscritos no programa nos últimos três anos.

Alicerçado em todas as análises estatísticas realizadas foi possível perceber que os resultados obtidos, pelos alunos egressos da UNEMAT no decorrer dos anos, apresentaram uma melhora significativa.

Observou-se ao decorrer da pesquisa aqui citada que o ano de formação implica nos resultados obtidos, ou seja, quanto menor o tempo de formação desde a formatura, maiores são os acertos.

O tema geometria é o que apresenta maior variância com relação aos acertos entre os participantes que acertaram mais e o que obtiveram os menores resultados. Esses dados, quando comparados a média do tempo de formação, verifica-se que os candidatos que obtiveram o maior número de acertos tem formação mais recente, o que implica dizer que o corpo docente da UNEMAT que, nos últimos anos teve um aumento no número de doutores em seu quadro, tem contribuído, gradativamente, com a melhora na proficiência dos alunos e, por conseguinte, melhorado o desempenho no exame de acesso.

Outro aspecto que deve ser levado em consideração é a participação de candidatos de diversas cidades do Estado de Mato Grosso e até de outros estados, que, segundo a pesquisa realizada, representa 73% dos inscritos no ENA nos anos de 2017, 2018 e 2019 para o campus da UNEMAT Sinop/MT, ou seja, é um exame que atrai um grande público tanto local, quanto regional, mas que em função das distâncias e dificuldades de deslocamento e permanência na cidade não conseguem dar continuidade ao curso.

Uma análise nos dados dos que foram aprovados no programa, nos últimos três anos, é possível perceber que essa particularidade influencia negativamente a permanência dos aprovados nos programa. Para se ter uma ideia da dimensão do problema, na turma de 2017, dos quinze (15) aprovados, seis (6) eram de outras localidades e, destes, dois (2) nem iniciaram o curso. Já na turma de 2019, dos vinte (20) aprovados, treze (13) eram de outras cidades e, destes, dois (2) nem iniciaram o curso. Isso significa dizer que antes mesmo do programa iniciar já temos um índice significativo de desistência que, somados aos que no decorrer do programa não conseguem aprovação nas disciplinas e na qualificação, fazem com que o programa não consiga formar a quantidade de profissionais que a Universidade tem capacidade de orientar.

Algumas medidas estão sendo tomadas, no sentido de tentar minimizar esses problemas, como o aumento do número de vagas à disposição no exame de acesso que que eram de 15 vagas e, a partir de 2019, passou para 20.

Outra medida é a de restringir o acesso ao programa só para profissionais da educação básica pública, o principal objetivo do programa, o qual nas últimas edições havia se perdido em função da abertura para o acesso à profissionais de outras áreas de formação.

Essas medidas se tornam necessárias para que o programa tenha maior sucesso e cumpra com seus propósitos e objetivos de criação, que é o de melhorar a qualificação dos professores da Rede Pública de Ensino.

.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

http://sinop.unemat.br/site/historico-campus-sinop/

https://www.researchgate.net/publication/319532129_Fundamentos_de_Estatistica_para_Analise_de_Desempenho

https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/pedagogia/metodologia-cientifica-tipos-de-pesquisa/50264

PROFMAT; **Profmat: Uma reflexão e alguns resultados**, 2017. Disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/07/PROFMAT-relatorio_DIGITAL.pdf. Acesso 10 de abril de 2019

RICHARDSON, Roberto Jarry. Pesquisa social: métodos e técnicas. São Paulo: Atlas, 1989.

SZWARCWALD, C. L.; CASTILHO, E. A. de. The paths of statistics and its incursions through epidemiology. Caderno Saúde Pública. Rio de Janeiro, V. 8, n. 1, p.5-21. jan/mar. 1992. Disponível em: https://www.scielosp.org/article/csp/1992.v8n1/5-21/ acesso em 05/04/2019

TOLEDO, Geraldo Luciano; OVALLE, Ivo Izidoro. Estatística básica. 2. ed. São Paulo, SP: Atlas, 1985. 459 p

TRIOLA, Mário F. Introdução à Estatística. LTC. 7a edição 1999.

ANEXOS

Anexo 1 - Questionário aplicado aos inscritos

Prezado colega,

Este questionário destina-se exclusivamente para uma pesquisa e elaboração de uma dissertação que visa investigar os problemas que os inscritos no exame nacional de acesso ao programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) têm encontrado em realizar a prova. Pretende também analisar as dificuldades que os professores da rede pública de ensino, em especial os egressos do curso de licenciatura plena em matemática da UNEMAT em acessar o programa.

Gostaria de contar com a sua colaboração no preenchimento do mesmo, pois sua participação é muito importante.

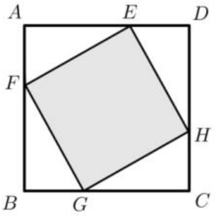
I- INFORMAÇÕES GERAIS		
Nome:		
Cidade que reside:		
Fone:	Idade:	Sexo:
II- PERFIL PROFISSIONAL		
Formação acadêmica: (Graduação)	Curso:	
	Instituição:	
	Ano de conclusão:	
Atua como professor? ( ) Sim, Educação Básica. ( ) Sim, Ensino Superior ( )Não		
Se atua como professor, a quantos anos leciona?	( ) 0 a 5 anos	
	( ) 6 a 10 anos	
	( ) 11 a 15 anos	
	( ) mais de 15 anos	
Situação funcional	( ) Efetivo ( ) contratado	
Regime de trabalho	( ) 20 horas semanais	
	( ) 30 horas semanais	
	( ) 40 horas semanais	
	( ) mais de 40 horas semanais	
Se não atua como professor, qual a sua profissão?	( ) Engenheiro	
	( ) Funcionário Público	
	( ) Outros Qual?	
II PERFIL DO PROGRAMA		
Porque você se inscreveu no programa de mestrado do Profmat? ( ) Perspectiva de crescimento na carreira profissional ( ) Aperfeiçoamento pessoal		

( ) Falta de opção por outro mestrado na área, próximo do local em que reside. ( ) Outros
Como você classifica o exame de acesso? ( ) De baixa complexidade. ( ) De baixa complexidade, porém com muitas questões e pouco tempo para resolver. ( ) De baixa complexidade, porém com muitos inscritos para o número de vagas ofertadas. ( ) De média complexidade. ( ) De média complexidade, porém com muitas questões e pouco tempo para resolver. ( ) De média complexidade, porém com muitos inscritos para o número de vagas ofertadas. ( ) De alta complexidade.
Na sua opinião, qual a maior dificuldade em realizar o exame de acesso: ( ) Falta de tempo em resolver as questões. ( ) Conteúdos que não foram aprofundados na graduação. ( ) Muitos anos sem estudar os conteúdos das questões. ( ) Falta de tempo para estudar. ( ) Falta de material didático para estudar.
Na sua opinião, os candidatos que se formaram a mais tempo tem mais dificuldade em realizar a prova? ( ) Sim. Por quê? ____ ( ) Não. Por quê? ____
Quantas vezes você já realizou o exame de acesso do programa de mestrado do Profmat? ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) mais de 4

Anexo 2 – Prova dos ENA 2017

EXAME NACIONAL DE ACESSO 2017 (22/10/2016)
PROVA 1 – GABARITO

[01] Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado 1 e $\overline{AF} = \overline{BG} = \overline{CH} = \overline{DE} = x$. Qual o valor de x para que o quadrado $EFGH$ tenha a menor área possível?



(A) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 1

Solução
Resposta: D

Se ℓ é o comprimento do lado do quadrado $EFGH$ então, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $\ell^2 = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$.

Mas $x^2 - 2x + 1 = 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$.

Assim o menor valor para ℓ^2 ocorre quando $x - \frac{1}{2} = 0$, ou seja, para $x = \frac{1}{2}$.

[02] A equação de estado de um gás ideal é

$$PV = nRT,$$

onde P é a pressão em Pascal, V é o volume ocupado pelo gás em metros cúbicos, n é o número de mols da amostra gasosa, R é a constante universal dos gases perfeitos e T é a temperatura em Kelvin. Supondo que para uma certa amostra o número de mols se mantenha constante, é correto afirmar que:

(A) quanto maior o volume ocupado, maior a pressão.

(B) n e T são proporcionais.

(C) $\frac{T}{P}$ é inversamente proporcional a V.

(D) nR é proporcional a T.

(E) P e $\frac{V}{T}$ são inversamente proporcionais.

Solução
Resposta: E

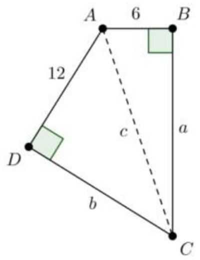
P é proporcional ao inverso de $\frac{V}{T}$, pois $P = nR \cdot \frac{T}{V}$ com nR constante.

Portanto são grandezas inversamente proporcionais.

[03] No quadrilátero $ABCD$, os ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são retos. Sendo $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CD} = b$ e $\overline{AD} = 12$, o valor de $\sqrt{a^2 - b^2}$ é

(A) $6\sqrt{3}$ (B) $6\sqrt{5}$ (C) 3 (D) $8\sqrt{3}$ (E) 6

Solução
Resposta: A



Se chamarmos de c a medida da diagonal AC, teremos, pelo Teorema de Pitágoras,

$$6^2 + a^2 = c^2$$

$$12^2 + b^2 = c^2.$$

Assim, $6^2 + a^2 = 12^2 + b^2$, logo $a^2 - b^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$.

Com isso, $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

---

[04] As ternas abaixo são medidas dos comprimentos dos lados de triângulos. Em qual das alternativas temos, nessa ordem, as medidas de um triângulo acutângulo, de um triângulo retângulo e de um triângulo obtusângulo?

(A) $(2,3,4)$, $(3,4,5)$ e $(4,7,8)$.

(B) $(4,7,8)$, $(5,12,13)$ e $(4,8,9)$.

(C) $(6,7,9)$, $(4,5,6)$ e $(4,8,9)$.

(D) $(8,9,11)$, $(3,4,5)$ e $(4,6,7)$.

(E) $(8,10,13)$, $(6,8,10)$ e $(4,5,7)$.

Solução
Resposta: B

Vamos analisar algumas ternas que aparecem nas respostas e comparar o quadrado do maior lado com a soma dos quadrados dos dois lados menores. Se o quadrado do lado maior for maior, o triângulo é obtusângulo; se for igual ele é retângulo; se for menor, é acutângulo.

$(4,7,8)$: $8^2 = 64 < 65 = 49 + 16 = 7^2 + 4^2$, assim temos um triângulo acutângulo e o item (A) está incorreto.

$(4,5,6)$: $6^2 = 36 < 41 = 16 + 25 = 4^2 + 5^2$, assim temos um triângulo acutângulo e o item (C) está errado.

$(5,12,13)$: $13^2 = 169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$, assim temos um triângulo retângulo.

$(4,8,9)$: $9^2 = 81 > 80 = 64 + 16 = 8^2 + 4^2$, assim temos um triângulo obtusângulo. Juntando os dois cálculos acima, segue que o item (B) está correto.

$(4,6,7)$: $7^2 = 49 < 52 = 36 + 16 = 6^2 + 4^2$, assim temos um triângulo acutângulo e o item (D) está incorreto.

$(8,10,13)$: $13^2 = 169 > 164 = 100 + 64 = 10^2 + 8^2$, assim temos um triângulo obtusângulo e o item (E) está incorreto.

---

[05] Um dado não viciado será lançado duas vezes. Seja p_i a probabilidade da soma dos resultados obtidos ser igual a i. Então é correto afirmar que:

(A) $p_5 < p_6 < p_7$ (B) $p_5 < p_6 < p_8$ (C) $p_6 = p_8 < p_9$

(D) $p_5 = p_9 > p_8$ (E) $p_5 < p_8 < p_9$

Solução
Resposta: A

Listamos as maneiras que pode ser obtida cada uma das somas abaixo:

$5 : (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$

$6 : (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$

$7 : (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$

$8 : (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)$

$9 : (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)$

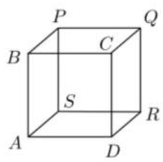
Como a quantidade de resultados possíveis é igual a 36 segue que:

$p_5 = \frac{4}{36}, p_6 = \frac{5}{36}, p_7 = \frac{6}{36}, p_8 = \frac{5}{36}, p_9 = \frac{4}{36}$

Assim a única alternativa correta é a (A).

---

[06] A seguinte figura mostra um cubo.



O número de triângulos equiláteros que podem ser formados cujos vértices coincidam com os do cubo é:

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 24

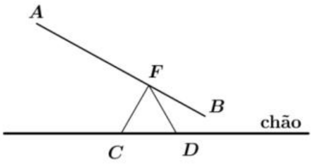
Solução
Resposta: C

Os vértices do cubo podem ser ligados de três maneiras: por uma aresta do cubo, por uma diagonal da face, por uma diagonal interna do cubo. Dessas três, a única maneira de formarmos um triângulo equilátero é com as diagonais das faces.

Note que de cada vértice é possível formar três triângulos distintos, por exemplo, com o vértice A formamos os triângulos ACP, ACR e APR. Sendo assim, com os 8 vértices do cubo teremos um total de 24 triângulos equiláteros. No entanto cada um dos triângulos foi contado três vezes, por cada vértice de cada triângulo, logo teremos 8 triângulos equiláteros distintos.

---

[07] A figura esquematiza o perfil de uma máquina simples, conhecida como *alavanca*. O triângulo equilátero CDF do esquema tem lados de medida $\sqrt{3}$ metros, estando o lado CD em contato com o chão horizontal. O segmento AB representa uma haste rígida e retilínea, de comprimento 6 metros, que gira em torno do ponto fixo F, sendo $\overline{BF} = 2$ m.

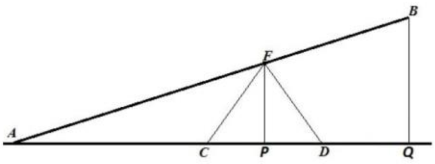


Quando A tocar o chão, a altura de B, em metros, em relação ao chão será

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{9}{4}$ (E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Solução
Resposta: D

A figura abaixo mostra a situação do problema, onde P e Q são, respectivamente, as projeções de F e B sobre o chão horizontal.



Como todos os pontos são coplanares, inclusive P e Q, então FP é altura do triângulo equilátero CDF. Sendo $\ell = \sqrt{3}$ metros o lado desse triângulo, então:

$$\overline{FP} = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ m} = \frac{3}{2} \text{ m}.$$

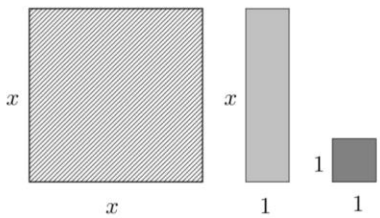
Como $A\hat{P}F = A\hat{Q}B = 90^\circ$ e $P\hat{A}F = Q\hat{A}B$ (ângulo comum), então os triângulos AFP e ABQ são semelhantes pelo critério *ângulo-ângulo*. Disso e sabendo-se que $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{FB} = 4$ metros, tem-se:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} \Rightarrow \frac{\overline{BQ}}{\frac{3}{2}} = \frac{6}{4},$$

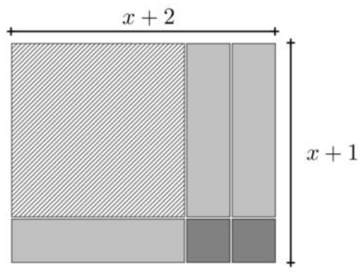
donde conclui-se que a altura do ponto B em relação ao chão é $\overline{BQ} = \frac{9}{4}$ m.

---

[08] O *Algeplan* é um material manipulativo utilizado como ferramenta no ensino de polinômios. Em sua versão mais simples, ele consiste em 3 tipos de peças (conforme figura abaixo) que representam os monômios e a unidade. Um quadrado grande de área x^2, um retângulo de área x e um quadrado pequeno de área 1.



Usando essas peças, sem sobreposição, é possível montar retângulos maiores cujas áreas podem ser calculadas de duas formas: pela soma das áreas das peças que compõem a figura e pelo produto da base pela altura, obtendo assim a fatoração, conforme o exemplo a seguir.
Determine qual dos polinômios abaixo **não** é possível ser representado por um retângulo usando somente as peças do *Algeplan*.



$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

(A) x^2+5x+6 (B) $3x^2+8x+4$ (C) $2x^2+4x+2$

(D) x^2+6x+9 (E) $2x^2+5x+4$

Solução
Resposta: E

O item (E) é o único polinômio que não pode ser fatorado como produto de monômios com coeficientes inteiros positivos. De fato, as raízes da equação correspondente são complexas.

(A) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.
(B) $3x^2+8x+4=(3x+2)(x+2)$.
(C) $2x^2+4x+2=(2x+2)(x+1)$.
(D) $x^2+6x+9=(x+3)(x+3)$.
(E) $2x^2+5x+4=(2x+1)(x+2)+2$.

---

[09] Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1. \end{cases}$$

Com a solução $(1,0)$ do sistema acima construímos o segundo sistema

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

cuja solução $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ é usada para formar o terceiro sistema

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2} \\[2ex] x-y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Prosseguindo desse modo, qual é a solução do décimo sistema?

(A) $\left(1,\frac{1}{32}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{32},0\right)$ (C) $(1,1)$ (D) $\left(1,-\frac{1}{32}\right)$ (E) $\left(\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)$

Solução
Resposta: E

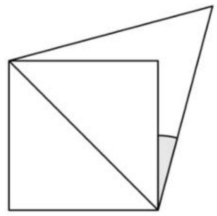
Observando quea solução do sistema $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=a \end{cases}$ é $(a,0)$ e a solução dos sistema $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=0 \end{cases}$ é $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$, concluímos que as soluções dos sistemas são:

$$(1,0), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},0\right), \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4},0\right), \left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{8},0\right), \left(\frac{1}{16},\frac{1}{16}\right), \left(\frac{1}{16},0\right), \left(\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)$$

Portanto, a resposta é $\left(\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)$.

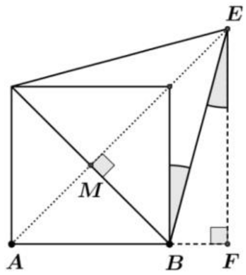
---

[10] Na figura abaixo, tem-se um quadrado e um triângulo equilátero, coplanares. Qual o seno do ângulo destacado?



(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ (E) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

Solução
Resposta: C



Seja ℓ a medida do lado do quadrado e α a medida do ângulo cujo seno queremos obter. Na figura acima, como EF é paralelo aos lados verticais do quadrado, temos que $B\hat{E}F = \alpha$. Além disso, AM é metade da diagonal do quadrado, logo $\overline{AM} = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

O lado do triângulo equilátero terá medida igual à da diagonal do quadrado, ou seja $\ell\sqrt{2}$. Com isso, a altura EM deste triângulo terá medida

$$\overline{EM} = \left(\ell\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{6}}{2}.$$

Assim,

$$\overline{AE} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} + \frac{\ell\sqrt{6}}{2} = \frac{\ell\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{2} = \frac{\ell\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Como $F\hat{A}E = 45^\circ$, temos

$$\overline{AF} = \overline{AE}\cdot\cos 45^\circ = \frac{\ell\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ell\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Logo

$$\overline{BF} = \overline{AF} - \overline{AB} = \frac{\ell\left(1+\sqrt{3}\right)}{2} - \ell = \frac{\ell\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}.$$

Com isso,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} = \frac{\frac{\ell(\sqrt{3}-1)}{2}}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

Outra solução:

O ângulo α cujo seno queremos é a diferença entre um ângulo interno do triângulo equilátero (60°) e o ângulo entre o lado do quadrado e sua diagonal ($90^\circ/2 = 45^\circ$). Assim,

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(60^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen}(60^\circ)\cos(45^\circ) - \operatorname{sen}(45^\circ)\cos(60^\circ) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

[11] Em uma urna há 7 bolas vermelhas, 5 azuis e 4 brancas, todas do mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual a probabilidade de que tenham sido retiradas uma bola vermelha e uma branca?

(A) $\frac{7}{60}$ (B) $\frac{7}{30}$ (C) $\frac{23}{120}$ (D) $\frac{7}{16}$ (E) $\frac{1}{8}$

Solução
Resposta: B

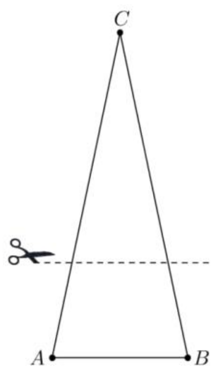
O espaço amostral é o conjunto de todos os pares de bolas distintas que tem $16 \times 15 = 240$ elementos.

Há duas maneiras de retirarmos uma bola vermelha e um branca, a saber:
a primeira é vermelha e a segunda é branca, isso pode ser feito de $7 \times 4 = 28$ modos;
a primeira é branca e a segunda é vermelha, isso pode ser feito de $4 \times 7 = 28$ modos.

Portanto a probabilidade de que tenham sido retiradas uma branca e uma vermelha é igual a $\frac{28+28}{240} = \frac{56}{240} = \frac{7}{30}$.

---

[12] Considere um triângulo isósceles de base 5 e de altura 12. Decide-se cortar o triângulo paralelamente à base de modo que as duas novas figuras geradas (um novo triângulo isósceles e um trapézio) possuam a mesma área.

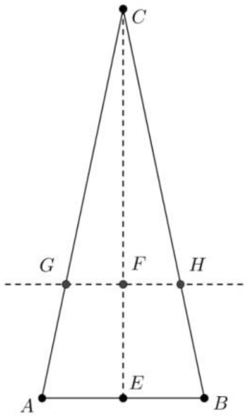


Nestas condições, a medida da base do novo triângulo isósceles será igual a

(A) $5\sqrt{2}$ (B) $6\sqrt{2}$ (C) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (D) $3\sqrt{2}$ (E) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

Solução
Resposta: C

Denominamos os novos pontos após o corte da seguinte forma:



Através da semelhança dos triângulos retângulos BCE e CFH que

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{FH}}.$$

Denominando a altura do novo triângulo CGH por h e a sua base por b, temos da relação anterior que

$$\frac{12}{h} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{b}{2}} \Rightarrow h = \frac{12b}{5}.$$

Ora, o corte do triângulo original foi feito de forma que a área do novo triângulo fosse metade do original, então temos que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow b \cdot h = 30.$$

Utilizando a igualdade encontrada para h anteriormente, temos que

$$b \cdot \frac{12b}{5} = 30 \Rightarrow b^2 = \frac{150}{12} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{50}{4}} \Rightarrow b = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Outra Solução:

Sejam $h = \overline{CF}$ e $x = \overline{GH}$. Logo $\overline{FE} = 12 - h$.

A área do triângulo ABC é igual a $\frac{5 \times 12}{2} = 30$.

Como desejamos que o triângulo GCH e o trapézio $AGHB$ tenham a mesma

área, segue que $\frac{xh}{2} = 15$ e $\frac{5+x}{2} \cdot (12-h) = 15$.

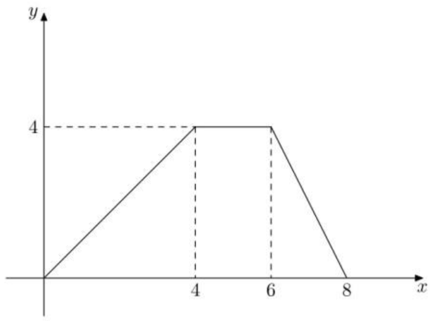
Assim temos que $xh = 30$ e $60 + 12x - 5h - xh = 30$.

Substituindo xh por 30 na última equação temos que $12x - 5h = 0$, ou seja, $h = \frac{12}{5}x$.

Portanto $x\frac{12}{5}x = 30$, ou seja, $x^2 = \frac{25}{2}$ e assim $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

---

[13] O gráfico da função $y = f(x)$, formado por três segmentos de reta, está representado na figura abaixo.



Sobre a função f podemos afirmar que:

(A) $f(2) + f(3) = f(5)$

(B) $f(1) + f(2) = f(7)$

(C) $f(2) + f(4) = f(5)$

(D) $f(5) - f(3) = f(7)$

(E) $f(7) - f(2) = f(8)$

Solução
Resposta: E

A equação da reta que passa pelos pontos $(6, 4)$ e $(8, 0)$ é dada por $y = -2x + 16$, logo $f(7) = 2$.

Além disso, temos que $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 4, f(8) = 0$.

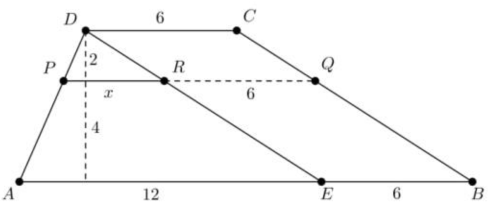
A única afirmação correta é $f(7) - f(2) = 2 - 2 = f(8)$.

---

[14] As medidas das bases AB e CD de um trapézio $ABCD$ são, respectivamente, 18 e 6. Uma reta paralela às bases intersecta os lados AD e BC nos pontos P e Q. Sabendo que a distância desta paralela a CD é 2 e a distância a AB é 4, a medida do segmento PQ é:

(A) 16 (B) 14 (C) 10 (D) 9 (E) 6

Solução
Resposta: C



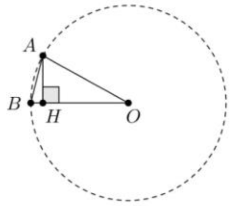
Traçando o segmento DE, paralelo ao lado BC, como na figura acima, os triângulos ADE e PDR serão semelhantes, pois PQ é paralelo a AB. Com isso, sendo $x = \overline{PR}$, como as alturas dos triângulos ADE e PDR são 2 e 6, respectivamente, temos

$$\frac{x}{12} = \frac{2}{6},$$

logo $x = 4$. Assim, $\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ} = x + 6 = 10$.

---

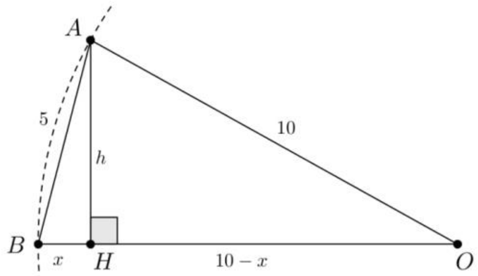
[15] Na figura, a corda AB tem medida 5 e o raio OA mede 10.



A medida do segmento AH, perpendicular ao raio OB, é igual a

(A) $\frac{5\sqrt{15}}{4}$ (B) 5 (C) $5\sqrt{3}$ (D) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ (E) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Solução
Resposta: A



Chamando de x a medida do segmento BH, como na figura acima, temos, aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos AHB e AHO,

$$h^2 + x^2 = 5^2 \text{ e } h^2 + (10 - x)^2 = 10^2.$$

Com isso, $h^2 = 25 - x^2$ e $h^2 = 100 - (10 - x)^2 = 20x - x^2$.
Logo $25 - x^2 = 20x - x^2$ e assim $x = \frac{5}{4}$.
Substituindo na equação $h^2 + x^2 = 5^2$, temos

$$h^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 25,$$

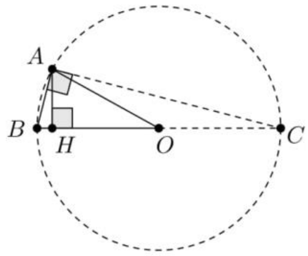
logo

$$h^2 = 25 - \frac{25}{16} = \frac{400}{16} - \frac{25}{16} = \frac{375}{16}.$$

Com isso,

$$\overline{AH} = h = \sqrt{\frac{375}{16}} = \frac{5\sqrt{15}}{4}.$$

Outra solução:



Traçando o diâmetro BC e a corda AC da figura, o triângulo ABC será retângulo em A, pois o ângulo $B\hat{A}C$ determina um arco de $180°$.

Chamando de y a medida de AC, como $\overline{BC} = 20$ pelo Teorema de Pitágoras,

$$y^2 + 5^2 = 20^2,$$

logo $y^2 = 375$, e então $y = 5\sqrt{15}$.

Temos ainda, pela semelhança dos triângulos ABH e ABC, que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, logo

$$5 \cdot 5\sqrt{15} = 20 \cdot \overline{AH}$$

e, com isso

$$\overline{AH} = \frac{25\sqrt{15}}{20} = \frac{5\sqrt{15}}{4}.$$

---

[16] Em um determinado momento, o preço da gasolina pura na refinaria era de R\$ 1,60 por litro e o preço do álcool anidro na usina era de R\$ 1,20 por litro. Sabe-se que a gasolina vendida nos postos contém 75% de gasolina pura e 25% de álcool anidro e que o preço dessa mistura corresponde a 40% do preço de venda da gasolina nos postos. O preço pago pelo consumidor por litro de gasolina nos postos é

(A) R\$ 3,37 (B) R\$ 3,42 (C) R\$ 3,49 (D) R\$ 3,62 (E) R\$ 3,75

Solução
Resposta: E

O preço da gasolina na refinaria, sem impostos, é

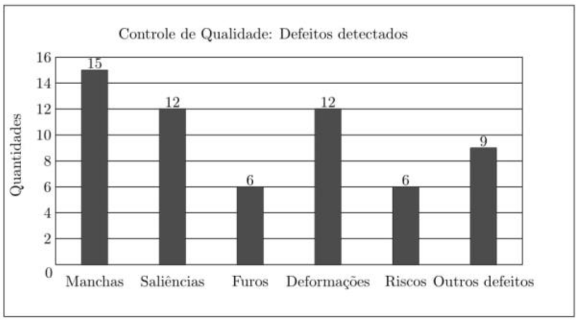
$$\text{R\$ } 1,60 \times 0,75 + \text{R\$ } 1,20 \times 0,25 = \text{R\$ } 1,50.$$

Visto que o preço na refinaria compõe 40% do preço final, o preço final é

$$\text{R\$ } 1,50 \times \frac{100}{40} = \text{R\$ } 3,75.$$

---

[17] O administrador responsável pelo controle de qualidade de uma fábrica de artigos plásticos registrou, em um gráfico, os diversos defeitos nas peças não aprovadas segundo critérios de qualidade durante um certo período, conforme abaixo.



É correto afirmar que

(A) Os defeitos referentes às manchas superam em 15% as deformações.

(B) As deformações consistem em 30% dos defeitos detectados.

(C) 35% dos defeitos detectados correspondem a riscos ou manchas.

(D) 45% dos defeitos detectados são de manchas, saliências ou furos.

(E) Os problemas de deformação superam em 15% os problemas de furos nos produtos.

Solução
Resposta: C

Foi detectado um total de $15+12+6+12+6+9=60$ defeitos através do controle de qualidade. Inicialmente calculemos o valor percentual referente a cada tipo de defeito:

- Manchas: $\dfrac{15}{60}\times 100=25\%$;
- Saliências: $\dfrac{12}{60}\times 100=20\%$;
- Furos: $\dfrac{6}{60}\times 100=10\%$;
- Deformações: $\dfrac{12}{60}\times 100=20\%$;
- Riscos: $\dfrac{6}{60}\times 100=10\%$;
- Outros: $\dfrac{9}{60}\times 100=15\%$.

Analisando as alternativas, concluímos que 35% dos defeitos detectados (10% + 25%) correspondem a riscos ou manchas.

---

[18] Dois números reais são tais que a *média aritmética* entre eles é 25 e a *média geométrica* é 20. Quais são esses números?

(A) 10 e 30 (B) 20 e 30 (C) 10 e 40 (D) 15 e 35 (E) 5 e 45

Solução
Resposta: C

Chamando de x e de y os números procurados, temos que $\dfrac{x+y}{2}=25$ e $\sqrt{xy}=20$, onde se usou a definição de média aritmética e geométrica entre dois números, respectivamente. Assim, $x+y=50$ e $xy=400$. Isolando y na primeira e substituindo na segunda igualdade obtém-se a equação de segundo grau $-x^2+50x-400=0$ cujas raízes são $x=10$ e $x=40$ e substituindo $x=10$ em uma das equações obtém-se $y=40$. Se $x=40$ obtém-se $y=10$.

---

[19] Numa liquidação, uma camisa sofreu um desconto de 10%, no mês seguinte, outro desconto de 10% e, no terceiro mês, mais um desconto de 10%. Qual foi o desconto total?

(A) $27,10\%$ (B) $27,70\%$ (C) $27,90\%$ (D) 30% (E) $30,10\%$

Solução
Resposta: A

Podemos pensar no preço inicial da camisa sendo x reais. No primeiro mês passou para $x\cdot\dfrac{90}{100}=0,9x$ (desconto de 10%), no segundo para $0,9x\cdot\dfrac{90}{100}=0,81x$ e no terceiro $0,81x\cdot\dfrac{90}{100}=0,729x$.

Portanto, o desconto total é igual a $x-0,729x=0,271x$, que corresponde a um percentual de $27,10\%$.

---

[20] Francisco escreveu todos os números de 144 até 2017. Quantas vezes ele escreveu o dígito 5?

(A) 188 (B) 288 (C) 388 (D) 478 (E) 578

Solução
Resposta: E

Faremos a contagem dos algarismos 5 que aparecem na casa das unidades, depois na das dezenas e finalmente na das centenas.

Os números terminados em 5 ocorrem de dez em dez a partir de 145 e são $145, 155, \ldots 2015$. Com isso temos $201-13=188$ números terminados em 5.

Os números que têm o algarismo 5 na casa das dezenas de 144 a 2017 são $19\times 10=190$, pois antes do 5 podem ser colocados os inteiros $1, 2, \ldots, 19$ e depois do 5, os inteiros $0, 1, \ldots, 9$.
Temos 200 números que têm o algarismo 5 na casa das centenas que são os números de 500 a 599 e de 1500 a 1599.

Portanto ele escreveu $188+190+200=578$ vezes o algarismo 5.

Outra Solução:

Faremos a contagem dos algarismos 5 que aparecem na casa das unidades, depois na das dezenas e finalmente na das centenas.

- Números com o algarismo das unidades igual a 5 são: $145, 155, 165, \ldots, 2015$.
- Números com o algarismo das dezenas igual a 5 são: $150, 151, 152, \ldots, 1958, 1959$.
- Números com o algarismo das centenas igual a 5 são: $500, 501, 502, \ldots, 1598, 1599$.

Na primeira lista, temos $201 - 13 = 188$ números, na segunda $10 \times 19 = 190$ e na terceira 200. Portanto a resposta é $188 + 190 + 200 = 578$.

Mais uma solução:

1) Calculemos de 1 até 2017 :

Como algarismos das unidades : temos 202 possibilidades, pois antes do 5 colocamos os naturais de 0 a 201.

Como algarismos das dezenas : temos $20 \times 10 = 200$ possibilidades, pois antes do 5 colocamos os naturais de 0 a 19 e, depois do 5, os naturais de 0 a 9.

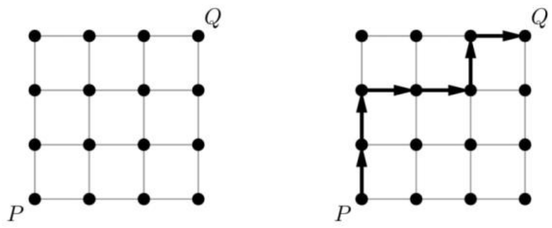
Como algarismos das centenas : temos $2 \times 100 = 200$ possibilidades, pois antes do cinco colocamos os naturais de 0 a 1 e, depois de 00 a 99. Totalizando : 602.

2) calculemos de 1 até 144 : usando a mesma ideia temos um total de 24.

Portanto a resposta é $602 - 24 = 578$.

---

[21] Um jogo é disputado em uma malha de 16 pontos, conforme a figura da esquerda abaixo. O jogador A inicia no ponto P e deve chegar ao ponto Q, podendo se deslocar apenas ao longo das retas que unem os pontos e atingir apenas um novo ponto a cada rodada. Em contrapartida, o jogador B inicia no ponto Q e deve chegar ao ponto P sob as mesmas condições. As jogadas acontecem alternadamente, iniciando com o jogador A. Em sua vez, um jogador não pode se deslocar para um ponto que esteja sendo ocupado pelo outro jogador.



Em uma partida já encerrada, o jogador A percorreu a trajetória destacada na figura da direita acima, atingindo o ponto Q em 6 jogadas. De quantas maneiras diferentes o jogador B pode ter se deslocado, sabendo que ele alcançou o ponto P também em 6 jogadas?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

Solução
Resposta: D

Tomando o ponto P como sendo (0,0) e o ponto Q como (3,3), temos que R (1,2) poderá ser o único ponto de encontro na terceira jogada de A e de B, já que a trajetória de A foi destacada na figura.

Começamos calculando o total de trajetórias possíveis de B ao fazer o percurso de Q até P. Teremos 3 movimentos na vertical e 3 na horizontal, perfazendo um total de $\frac{6!}{3!3!} = 20$.

Agora calculamos calcular o total de trajetórias possíveis de B passando obrigatoriamente por R.
De Q a R : $\frac{3!}{2!1!} = 3$ e, de R a P : $\frac{3!}{2!1!} = 3$; ou seja, passando por R teremos um total de 9 trajetórias.

Logo a resposta é $20 - 9 = 11$.

---

[22] A soma das raízes reais da equação $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{3x-4}+\dfrac{1}{x-6}$ é igual a

(A) 12 (B) $\dfrac{29}{2}$ (C) $4\sqrt{6}$ (D) $\dfrac{5}{2}+4\sqrt{6}$ (E) $\dfrac{5}{2}$

Solução
Resposta: B

Começamos somando as frações em ambos os lados e assim temos que

$\dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{4x-10}{(3x-4)(x-6)}$ que, para $x\notin\left\{2,3,\dfrac{4}{3},6\right\}$, pode ser reescrito como $(2x-5)(3x-4)(x-6)=2(2x-5)(x-2)(x-3)$.

Se $2x-5=0$ a identidade acima é verificada e assim $x=\dfrac{5}{2}$ é uma solução.

Para $2x-5\neq 0$ dividimos a equação por $2x-5$ e obtemos a equação do segundo grau

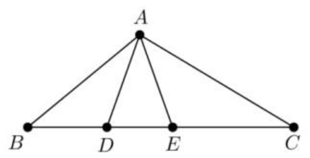
$3x^2-22x+24=2x^2-10x+12$, ou seja, $x^2-12x+12=0$.

As soluções desta equação são $6+2\sqrt{6}$ e $6-2\sqrt{6}$.

Portanto a soma das soluções da equação original é igual a $\dfrac{29}{2}$.

---

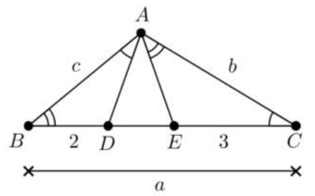
[23] No triângulo ABC da figura abaixo, $A\hat{B}C=E\hat{A}C$, $A\hat{C}B=D\hat{A}B$, $\overline{BD}=2$ e $\overline{CE}=3$.



Com base nas informações acima, podemos afirmar que a razão $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ é igual a

(A) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (B) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{2}$ (E) $\dfrac{4}{9}$

Solução
Resposta: A



Denotando $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=c$ e $\overline{AC}=b$, queremos determinar $\dfrac{c}{b}$.

Pelos ângulos conhecidos, podemos afirmar que os triângulos ABC e DBA são semelhantes e assim

$$\frac{c}{a}=\frac{2}{c},\ \text{ou seja, } c^2=2a.$$

Podemos também afirmar que os triângulos ABC e EAC são semelhantes, logo

$$\frac{b}{a}=\frac{3}{b},\ \text{ou seja, } b^2=3a.$$

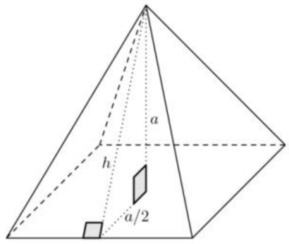
Com isso,

$$\frac{c^2}{b^2}=\frac{2a}{3a}=\frac{2}{3},\ \text{portanto } \frac{c}{b}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

[24] As quatro faces triangulares de uma pirâmide de base quadrada são congruentes, e a altura desta pirâmide é igual à medida das arestas da base. A razão entre a área lateral total e a área da base é:

(A) 2 (B) $\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$ (E) 1

Solução
Resposta: B



Na figura, está representado o triângulo retângulo formado pela altura da pirâmide, pelo apótema da base e pela altura de uma das faces (também chamado de apótema da pirâmide). Sendo a a medida das arestas da base (o lado do quadrado) e h a altura de uma das faces laterais, o triângulo representado tem hipotenusa h e catetos a e $a/2$.

Assim, pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$h^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

A área S_ℓ de cada face lateral é dada por

$$S_\ell = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{4},$$

portanto, a área lateral total da pirâmide é

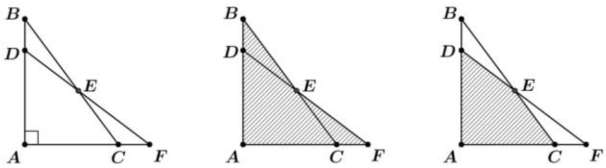
$$4S_\ell = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{5}}{4} = a^2\sqrt{5}.$$

Por outro lado, a área S_b da base é dada por a^2. Sendo assim, a razão $\frac{4S_\ell}{S_b}$ é igual a

$$\frac{4S_\ell}{S_b} = \frac{a^2\sqrt{5}}{a^2} = \sqrt{5}.$$

---

[25] Os triângulos retângulos ABC e AFD são congruentes e sobrepostos, conforme a figura abaixo à esquerda, sendo $\overline{AB} = 4$ e $\overline{AC} = 3$.



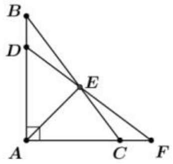
Sabendo que área do polígono $ABEF$, destacado na figura do meio, é S, a área do quadrilátero $ADEC$, destacado na figura da direita, é igual a

(A) $\frac{3\,S}{4}$ (B) $\frac{S}{2}$ (C) $\frac{9\,S}{16}$ (D) $\frac{7\,S}{8}$ (E) $\frac{2\,S}{3}$

Solução
Resposta: A

Como os triângulos ABC e AFD são congruentes, temos $\overline{AF} = \overline{AB} = 4$ e $\overline{AD} = \overline{AC} = 3$. Traçando AE, como $\overline{AC} = \frac{3}{4}\overline{AF}$, teremos

$$\text{Área}(ACE) = \frac{3}{4}\text{Área}(AFE).$$



Da mesma forma, como $\overline{AD} = \frac{3}{4}\overline{AB}$, teremos

$$\text{Área}(ADE) = \frac{3}{4}\text{Área}(ABE).$$

Assim segue que

$$\begin{aligned} \text{Área}(ADEC) &= \text{Área}(ACE) + \text{Área}(ADE) \\ &= \frac{3}{4}\text{Área}(AFE) + \frac{3}{4}\text{Área}(ABE) \\ &= \frac{3}{4}\left(\text{Área}(AFE) + \text{Área}(ABE)\right) \\ &= \frac{3}{4}\text{Área}(ABEF) \\ &= \frac{3S}{4}. \end{aligned}$$

---

[26] Se x e y são dois números reais tais que $4x^2 + 9y^2 - 4x + 12y + 5 = 0$, então $x + y$ é igual a

(A) $\frac{5}{6}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{3}$

Solução
Resposta: D

Completando os quadrados, a expressão $4x^2 + 9y^2 - 4x + 12y + 5 = 0$ pode ser escrita na forma

$(2x-1)^2 + (3y+2)^2 = 0$.

Assim temos que $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{2}{3}$.

Portanto $x + y = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$.

---

[27] João deseja comprar uma determinada calça. Para isto, decide observar os valores e promoções do produto em duas lojas diferentes. Na loja A a calça custa 140 reais, mas, se comprada à vista, João ganharia 15% de desconto. Na loja B a mesma calça custa 150 reais. Como promoção de aniversário da empresa, a loja B tem uma urna que contém 5 bolas, onde estão escritos os seguintes descontos: 5%, 10%, 15%, 20% e 25%. Ao realizar a compra, o cliente deve sortear desta urna duas bolas com reposição. Após o sorteio, o cliente recebe a soma dos dois descontos sobre o valor da peça adquirida.
Qual a probabilidade de João pagar menos, comprando na loja B em vez de comprar na loja A?

(A) 64% (B) 76% (C) 80% (D) 88% (E) 95%

Solução
Resposta: B

Realizando a compra da calça na loja A, o preço final será de 119 reais. Para que o custo da mesma calça seja inferior comprando na loja B é preciso que o desconto seja maior que 20%, pois se o desconto for de 20%, então o preço final seria de 120 reais.

Sendo o sorteio com reposição, temos um total de 25 possibilidades. Analisando os valores dos descontos e atentos ao fato de que há reposição, temos 6 possibilidades em que o desconto é menor ou igual a 20%: 5% mais 5%, 5% mais 10%, 10% mais 5%, 5% mais 15% e 15% mais 5%.
Logo percebemos que 19 possibilidades implicam em um desconto superior a 20%.

Portanto a probabilidade é igual a $\frac{19}{25} = 76\%$.

---

[28] Considere a seguinte distribuição de frequências das alturas, em metros, dos alunos de uma determinada turma:

Classe	Frequência
1,50 |— 1,60	3
1,60 |— 1,70	9
1,70 |— 1,80	12
1,80 |— 1,90	2

Lembre que a notação 2|— 3 é comumente usada em Estatística para representar o intervalo $[2, 3)$.

Sobre a distribuição é correto afirmar que:

(A) a média aritmética é inferior a 1,60 m.

(B) a média aritmética pertence ao último quartil.

(C) a mediana é igual à média aritmética.

(D) a mediana pertence à terceira classe.

(E) a pessoa mais alta da turma tem 1,90 m.

Solução
Resposta: D

Somando as frequências, obtemos um total de 26 alunos na turma. O que significa que a mediana é a média aritmética entre as alturas que ocupam as posições de número 13 e 14 na distribuição. Como as duas primeiras classes somam 12 alunos, podemos concluir que a mediana está na terceira classe. Logo a resposta correta é a (D).

---

[29] A diferença entre um número de dois algarismos e outro escrito com os mesmos algarismos, em ordem inversa é 54. Sabendo que a soma dos algarismos é igual a 12, podemos afirmar que a soma dos seus quadrados é igual a

(A) 72 (B) 74 (C) 80 (D) 90 (E) 112

Solução
Resposta: D

Vamos representar o número na forma $AB = 10A + B$, onde A e B são algarismos de 0 a 9 e $A \geqslant B$. Assim temos que $AB - BA = 54$ e $A + B = 12$.

$$10A + B - (10B + A) = 54$$
$$9A - 9B = 54$$
$$A - B = 6$$

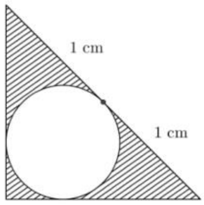
Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} A + B = 12 \\ A - B = 6 \end{cases}$$

Chegamos a $A = 9$ e $B = 3$, e então $9^2 + 3^2 = 90$.

---

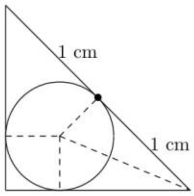
[30] Inscreve-se uma circunferência em um triângulo retângulo. O ponto de tangência divide a hipotenusa em dois segmentos que medem, cada um, 1 cm. Qual é a área, em cm^2, da região sombreada, interna ao triângulo e externa à circunferência?



(A) $2 + \pi(\sqrt{3} - 2)$ (B) $1 + \pi(2\sqrt{2} - 3)$ (C) $2 + \pi(2\sqrt{2} - 3)$

(D) $1 + \pi(1 - 2\sqrt{3})$ (E) $1 + \pi(\sqrt{3} - 3)$

Solução
Resposta: B



Seja r o raio da circunferência inscrita. Como o triângulo é retângulo, cada cateto mede $(1 + r)$ cm.

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que $(1 + r)^2 + (1 + r)^2 = 2^2 = 4$, donde $(1 + r)^2 = 2$. Assim, a área do triângulo mede

$$\frac{(r+1)(r+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}^2$$

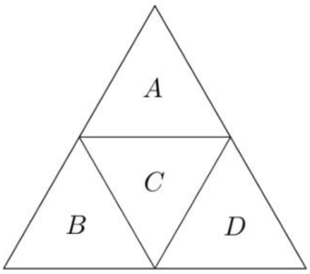
Resolvendo a equação $(1 + r)^2 = 2$, encontramos $r = \sqrt{2} - 1$ cm e assim a área do círculo é $\pi(\sqrt{2} - 1)^2 = \pi(3 - 2\sqrt{2})$ cm^2.

Portanto a área da região sombreada é $1 - \pi(3 - 2\sqrt{2}) = 1 + \pi(2\sqrt{2} - 3)$ cm^2.

Anexo 3 – Prova dos ENA 2018

EXAME NACIONAL DE ACESSO 2018 (21/10/2017)

[01] Para colorir os quatro triângulos, indicados na figura abaixo por A, B, C e D, pode-se usar uma mesma cor mais de uma vez, desde que dois triângulos com um lado em comum tenham cores diferentes. Obedecendo essa regra e usando no máximo quatro cores, de quantas maneiras distintas pode-se colorir os quatro triângulos?



(A) 96

(B) 98

(C) 104

(D) 108

(E) 128

Solução
Resposta: D

Começamos colorindo o triângulo C, o que pode ser feito de 4 modos distintos. Em seguida, podemos colorir o triângulo A de 3 modos distintos. De modo análogo, temos 3 modos distintos para colorir B e 3 modos distintos para colorir D. Portanto, a resposta é $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$.

[02] Um retângulo tem área igual ao quadrado da metade de sua diagonal. A razão entre o lado maior e o lado menor é igual a

(A) $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

(B) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

(C) $2-\sqrt{3}$

(D) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

(E) $2+\sqrt{3}$

Solução
Resposta: E

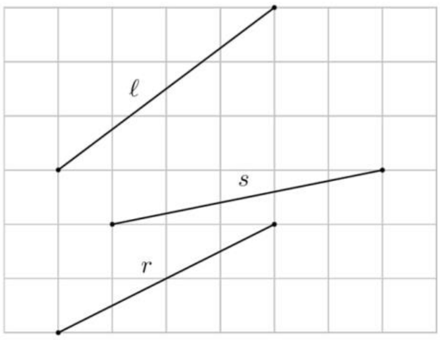
Sejam x e y os lados do retângulo, com $x \geqslant y$, e d a diagonal. Pelo Teorema de Pitágoras segue que $x^2 + y^2 = d^2$.
Por hipótese temos que $xy = \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = \dfrac{d^2}{4}$. Assim segue que $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = d^2 - 2 \cdot \dfrac{d^2}{4} = \dfrac{d^2}{2}$. Como $x \geqslant y$ segue que $x - y = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$. Logo $x = y + \dfrac{d}{\sqrt{2}}$. Substituindo esse valor de x na equação que relaciona a área com a

diagonal, obtemos uma equação do segundo grau em y, dada por $y^2 + \frac{d}{\sqrt{2}}y - \frac{d^2}{4} = 0$, cujas raízes são $y = \frac{d(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$ ou $y = \frac{d(-\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$. Este último valor de y não serve por ser negativo e assim $y = \frac{d(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$. Voltando à expressão de x obtemos $x = \frac{d(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$.

Portanto $\frac{x}{y} = 2 + \sqrt{3}$.

---

[03] Na figura abaixo temos três segmentos dispostos em uma malha formada por quadrados congruentes. Sobre os comprimentos ℓ, r e s dos três segmentos é correto afirmar que:



(A) $s < \ell < r$

(B) $s = r < \ell$

(C) $r = \ell < s$

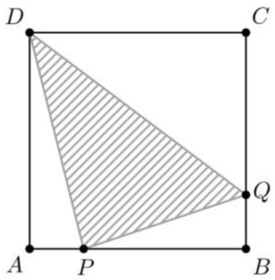
(D) $r < \ell < s$

(E) $r < \ell = s$

Solução
Resposta: D
Os três segmentos são hipotenusas de triângulos retângulos com vértices na malha.
Os catetos do triângulo com hipotenusa ℓ medem 3 e 4, logo $\ell = \sqrt{25}$.
Os catetos correspondentes à hipotenusa s medem 1 e 5, logo $s = \sqrt{26}$.
Os catetos do triângulo com hipotenusa r medem 2 e 4, logo $r = \sqrt{20}$.
Então, $r < \ell < s$.

---

[04] No quadrado $ABCD$ abaixo, de lado 8, $\overline{AP} = \overline{BQ}$.



Qual o menor valor de $\overline{AP}$ para que a área do triângulo DPQ seja igual a 28?

(A) $4 - 2\sqrt{11}$

(B) $-4 + 2\sqrt{20}$

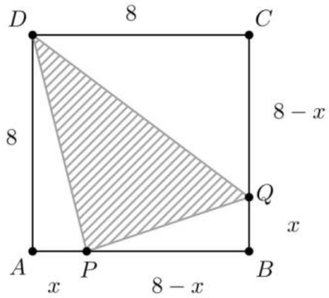
(C) $4 - 2\sqrt{2}$

(D) $4 + 2\sqrt{2}$

(E) $4 + 2\sqrt{11}$

Solução
Resposta: C

Chamando $\overline{AP} = \overline{BQ} = x$ temos o seguinte



A área do triângulo DPQ pode ser calculada subtraindo do quadrado $ABCD$ as áreas dos triângulos ADP, BPQ e CDQ. Sendo assim, temos

$$\text{área}(DPQ) = 64 - \frac{1}{2}\left[8x + x(8-x) + 8(8-x)\right] = 32 - 4x + \frac{x^2}{2}.$$

Igualando a última expressão a 28 chegamos à equação $x^2 - 8x + 8 = 0$ que tem raízes $4 - 2\sqrt{2}$ e $4 + 2\sqrt{2}$. Logo, a menor distância é $4 - 2\sqrt{2}$.

---

[05] No começo de um experimento, a quantidade de bactérias de uma amostra é igual a P_0. A cada hora, esta população aumenta em 20%. A expressão que fornece a população $P(t)$, quando decorridas exatamente t horas do início do experimento, para t inteiro positivo é

(A) $P(t) = P_0 \cdot (1,2)^t$

(B) $P(t) = P_0 \cdot 1,2\,t$

(C) $P(t) = P_0 \cdot (0,2)^t$

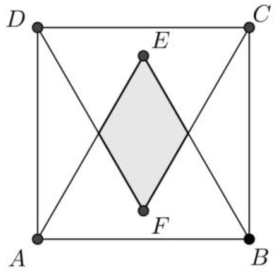
(D) $P(t) = P_0 + 1,2\,t$

(E) $P(t) = P_0 + 0,2\,t$

Solução
Resposta: A
A população ao final de uma hora é $P(1) = P_0 + 20\%P_0 = 1,2 \cdot P_0$. Ao final de 2 horas teremos $P(2) = 1,2 \cdot P(1) = P_0 \cdot (1,2)^2$. Analogamente, ao final de 3 horas teremos, $P(3) = P_0 \cdot (1,2)^3$. Assim, teremos $P(t) = P_0 \cdot (1,2)^t$.

---

[06] Sobre os lados AB e CD de um quadrado $ABCD$, e internamente a ele, são construídos os triângulos equiláteros ABE e CDF, como indicado na figura. Sendo 1cm a medida do lado do quadrado, a área do losango destacado na figura é dada por:



(A) $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$

(B) $\frac{4\sqrt{3}-6}{3}$

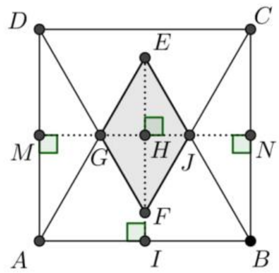
(C) $\frac{8\sqrt{3}-12}{3}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Solução
Resposta: A

Considere os pontos M, G, H, J e N da figura abaixo, de forma que M e N são pontos médios dos lados do quadrado sobre os quais estão.



O triângulo ADG é isósceles, pois os ângulos $G\hat{A}D = G\hat{D}A = 30°$. Com isso, $\overline{AM} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{1}{2}$. Com isso $\overline{HI} = \frac{1}{2}$.

Desta forma, como $\overline{EI} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (altura do triângulo equilátero ABE de lados de medida 1), temos

$$\overline{EH} = \overline{EI} - \overline{HI} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

O triângulo EGJ é equilátero, pois o triângulo ABE é equilátero e o lado GJ é paralelo a AB. Assim, EH é altura de um triângulo equilátero de lado GJ e, portanto

$$\overline{EH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{GJ},$$

logo

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{GJ},$$

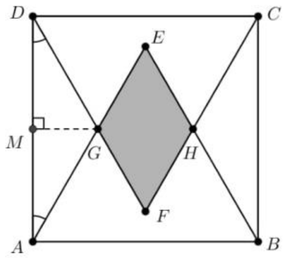
e, portanto,

$$\overline{GJ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{área}(EGFJ) &= 2 \cdot \text{área}(EGJ) \\
&= 2 \cdot \frac{\overline{GJ} \cdot \overline{EH}}{2} \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \\
&= \frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}.
\end{aligned}$$

Solução alternativa



O triângulo ADG é isósceles, pois os ângulos $G\hat{A}D = G\hat{D}A = 30^\circ$. Com isso, $\overline{AM} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{1}{2}$.
Como $\frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg}(30^\text{o}) = \frac{\overline{GM}}{\overline{AM}}$, temos que $\overline{GM} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, que é a altura do triângulo ADG. Por isso sua área é igual a $\frac{\overline{AD} \cdot \overline{GM}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$, que é também a área de BCH.

Note que ainda que

$$\text{área}(ABE) = \text{área}(CDF) = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

A área do quadrado pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\text{área}(ABCD) = \text{área}(ADG) + \text{área}(BCH) + \text{área}(ABE) + \text{área}(CDF) - \text{área}(EFGH).$$

Sendo assim, temos

$$1 = \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \text{área}(EFGH).$$

O que nos leva a

$$\text{área}(EFGH) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{4\sqrt{3}-6}{6} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

---

[07] Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, é equivalente à equação $a\,(x+k)^2 + h = 0$, e denotando $\Delta = b^2 - 4ac$, pode-se afirmar que

(A) $k = -\frac{b}{2a}$ e $h = -\frac{\Delta}{4a}$

(B) $k = \frac{b}{2a}$ e $h = \frac{\Delta}{4a}$

(C) $k = \frac{\Delta}{4a}$ e $h = \frac{b}{2a}$

(D) $k = -\frac{\Delta}{4a}$ e $h = -\frac{b}{2a}$

(E) $k = \frac{b}{2a}$ e $h = -\frac{\Delta}{4a}$

Solução
Resposta: E

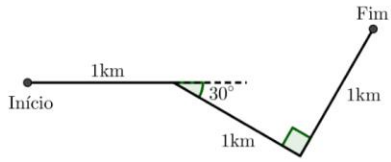
Temos que

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto $k=\frac{b}{2a}$ e $h=-\frac{\Delta}{4a}$.

---

[08] Uma pessoa anda 1km em linha reta, depois gira 30° à sua direita e anda mais 1 km. Por fim, gira 90° à sua esquerda e anda mais 1km. A figura abaixo ilustra o deslocamento.



Qual a distância, em km, entre os pontos inicial e final deste deslocamento?

(A) $\sqrt{4+\sqrt{3}}$

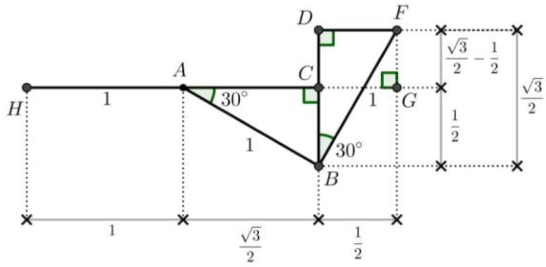
(B) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

(B) $1+\sqrt{2}$

(D) $\dfrac{\sqrt{11+2\sqrt{3}}}{2}$

(E) $\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

Solução
Resposta: A



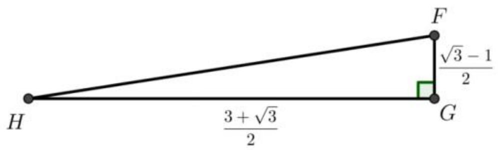
Na figura acima, os triângulos ABC e BDF são retângulos, com $B\hat{A}C = D\hat{B}F = 30°$ e hipotenusas AB e BF de medida 1. Assim,

$$\overline{AC}=\overline{BD}=1\cdot\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\overline{BC}=\overline{DF}=1\cdot \operatorname{sen} 30°=\frac{1}{2}.$$

Com isso,

$$\overline{HG}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2},$$
$$\overline{FG}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

De acordo com a figura abaixo,



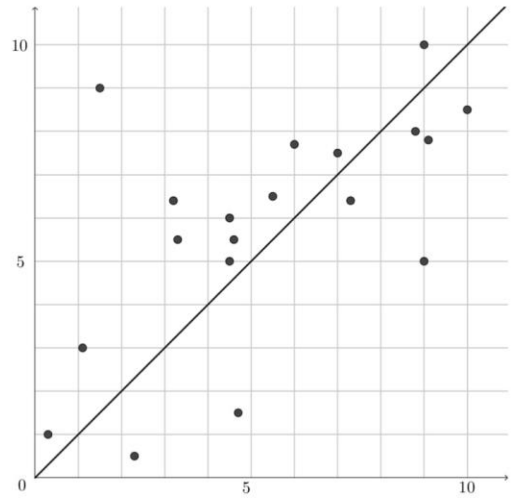
a distância $\overline{HF}$ entre os pontos de início e fim do deslocamento, é dada por

$$\begin{aligned}
\overline{HF}^2 &= \overline{HG}^2 + \overline{FG}^2 \\
&= \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{9+6\sqrt{3}+3}{4} + \frac{3-2\sqrt{3}+1}{4} \\
&= \frac{16+4\sqrt{3}}{4} \\
&= 4+\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{HF} = \sqrt{4+\sqrt{3}}$.

---

[09] O gráfico abaixo mostra as notas de uma determinada turma nas disciplinas de Geografia e História. No eixo horizontal estão as notas de Geografia e no eixo vertical as notas de História. Ou seja, um par ordenado (g, h) representa as notas de um mesmo aluno que obteve nota g em Geografia e h em História.



Analisando o gráfico podemos afirmar que

(A) Quatro alunos tiveram nota menor que 4 nas duas disciplinas.

(B) Dentre os que tiveram nota maior que 6 nas duas disciplinas, mais alunos tiveram melhor nota em Geografia.

(C) Todos os alunos tiveram nota melhor em História do que em Geografia.

(D) A maioria dos alunos foram melhor em Geografia do que em História.

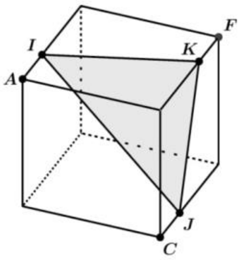
(E) Houve alunos que tiveram a mesma nota nas duas disciplinas.

Solução
Resposta: B

A região abaixo da diagonal representa os alunos que tiveram nota melhor em Geografia, isto é, $\{(g,h) \mid g > h\}$, a região acima da diagonal representa os alunos que tiveram nota melhor em História, isto é, $\{(g,h) \mid g < h\}$ e a diagonal são os alunos que tiveram a mesma nota nas duas disciplinas.
Assim, apenas três alunos tiveram nota menor que 4 nas duas disciplinas. Seis alunos tiveram nota maior do que 6 nas duas disciplinas, dos quais 4 tiveram nota melhor em Geografia.

---

[10] O cubo da figura abaixo tem aresta de medida 3. Se $\overline{AI} = \overline{CJ} = \overline{FK} = 1$, o perímetro do triângulo IJK é



(A) $2\sqrt{10} + 3\sqrt{2}$

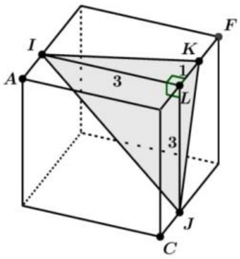
(B) $3\sqrt{10}$

(C) $9\sqrt{2}$

(D) $2\sqrt{13} + 3\sqrt{2}$

(E) $2\sqrt{10} - 3\sqrt{2}$

Solução
Resposta: A



Como $\overline{AI} = \overline{FK} = 1$, marcando o ponto L da figura acima, tal que $\overline{KL} = 1$, os trinângulos LIK e LIJ serão retângulos, e tais que

$$\overline{IK}^2 = \overline{IL}^2 + \overline{LK}^2 = 3^2 + 1^2 = 10,$$
$$\overline{IJ}^2 = \overline{IL}^2 + \overline{LJ}^2 = 3^2 + 3^2 = 18,$$

logo

$$\overline{IK} = \sqrt{10},\ \overline{IJ} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Além disso, os triângulos ILK e JLK são congruentes (triângulos retângulos com os mesmos catetos), logo

$$\overline{JK} = \overline{IK} = \sqrt{10}.$$

Assim, o perímetro do triângulo IJK é dado por

$$\overline{IK} + \overline{IJ} + \overline{JK} = \sqrt{10} + 3\sqrt{2} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10} + 3\sqrt{2}.$$

[11] Em uma fila de cinco pessoas, todas com alturas diferentes, qual a probabilidade de as duas pessoas mais altas ocuparem os dois primeiros lugares da fila?

(A) $\frac{3}{10}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{10}$

(D) $\frac{1}{20}$

(E) $\frac{1}{60}$

Solução
Resposta: C

Digamos que a pessoa mais alta seja A e a segunda mais alta seja B. Com cinco pessoas é possível formar $5! = 120$ filas. Dessas, temos $3! = 6$ em que A está em primeiro e B em segundo, e 6 em que B está em primeiro e A em segundo. Com isso a probabilidade de que as duas mais altas ocupem os dois primeiros lugares é igual a

$$\frac{6+6}{120} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}.$$

---

[12] Já vivi cinco sétimos do tempo que falta para eu chegar aos noventa anos. Qual a minha idade?

(A) 37 anos e meio

(B) $\frac{450}{7}$ anos

(C) $\frac{180}{7}$ anos

(D) 56 anos e um quarto

(E) 7 anos e meio

Solução
Resposta: A

Seja x a minha idade. Temos que $x = \frac{5}{7}(90 - x)$. Logo $7x = 450 - 5x$ e assim $x = \frac{450}{12} = 37,5$.

---

[13] Quantos números inteiros satisfazem a inequação $(2x-1)(2x+1) < 99$?

(A) 8

(B) 9

(C) 10

(D) 11

(E) 12

Solução
Resposta: B

Temos que

$$(2x-1)(2x+1) < 99 \iff x^2 - 25 < 0 \iff -5 < x < 5.$$

Portanto, temos 9 números inteiros satisfazendo a inequação.

---

[14] A soma dos quadrados das raízes da equação $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ é igual a

(A) 0

(B) 5

(C) 10

(D) 20

(E) 26

Solução
Resposta: C

Tomando $y = x^2$, a equação $y^2 - 5y + 6 = 0$, possui raízes iguais a 2 e 3. As raízes da equação original serão $\pm\sqrt{2}$ e $\pm\sqrt{3}$. Logo, a soma dos quadrados das raízes da equação $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ é igual a 10.

---

[15] Sabendo que

$$\begin{cases} 1 + \cos x = a \cdot \operatorname{sen} x \\ 1 - \cos x = b \cdot \operatorname{sen} x \end{cases}$$

onde a e b são números reais e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, podemos afirmar que

(A) $a + b = 2$

(B) $a + b = -2$

(C) $a^2 + b^2 = 2$

(D) $a^2 - b^2 = 0$

(E) $a \cdot b = 1$

Solução
Resposta: E

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos que $\operatorname{sen} x \neq 0$ e assim $a = \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$ e $b = \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$.
Portanto $a \cdot b = \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = 1$.

---

[16] No ano passado uma turma tinha 31 estudantes. Neste ano o número de meninas aumentou em 20% e o número de meninos diminuiu em 25%. Como resultado, a turma deste ano tem um estudante a menos. Qual o percentual de meninas na turma deste ano?

(A) 20%

(B) 30%

(C) 40%

(D) 50%

(E) 60%

Solução
Resposta: E
Sejam x o número de meninas e y o número de meninos da turma do ano passado. Segue que

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ 1,2x + 0,75y = 30. \end{cases}$$

Logo $x = 15$ e a quantidade de meninas deste ano é $1,2x = 18$. Portanto o percentual corresponde a $\frac{18}{30} = 60\%$.

---

[17] Quantos números distintos de 8 dígitos é possível formar usando dois algarismos 1 e seis algarismos 2?

(A) 12

(B) 24

(C) 28

(D) 32

(E) 256

Solução
Resposta: C

A distribuição dos 8 algarismos é dado por 8!. Como existem dois algarismos 1 e seis algarismos 2, temos que a resposta é $\frac{8!}{6!2!} = 28$.

Outra solução:

Basta escolher as posições dos algarismos 1, ou seja, $\binom{8}{2}$ e assim as posições dos algarismos 2 ficarão definidas.
Logo, a resposta é $\binom{8}{2} = 28$.

---

[18] Se a é um número real tal que $0 < a < 1$, qual dos números abaixo é o maior?

(A) $\sqrt[3]{a^2}$

(B) $\sqrt[3]{a}$

(C) $\sqrt{a}$

(D) a

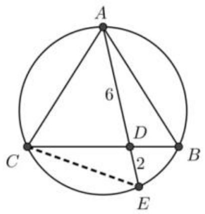
(E) a^2

Solução
Resposta: B

Como $0 < a < 1$ segue que $a^2 < a$ e $a^3 < a^2$. Logo temos que $a^3 < a^2 < a$.
Agora aplicando a raiz cúbica e a raiz sexta, respectivamente, vemos que $\sqrt[3]{a^3} < \sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{a}$ e $\sqrt[6]{a^3} < \sqrt[6]{a^2}$.
Portanto já temos que $a^2 < a < \sqrt[3]{a^2} < \sqrt[3]{a}$ e $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$ e assim $\sqrt[3]{a}$ é o maior valor.

---

[19] Pelo vértice A de um triângulo isósceles ABC, com $\overline{AB} = \overline{AC}$, é traçada uma reta que encontra BC em um ponto D e o círculo circunscrito a esse triângulo em um ponto E. Sabendo que as medidas de DE e AD são respectivamente 2 e 6, a medida de AC é igual a



(A) $4\sqrt{3}$

(B) $2\sqrt{3}$

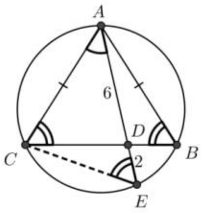
(C) $4\sqrt{2}$

(D) $6\sqrt{2}$

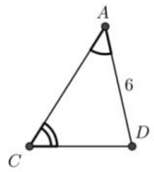
(E) $3\sqrt{3}$

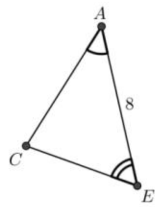
Solução
Resposta: A

Como o triângulo ABC é isósceles, temos $A\hat{B}C = A\hat{C}B$. Como $A\hat{B}C$ e $A\hat{E}C$ são ângulos inscritos e determinam o mesmo arco AB, temos $A\hat{B}C = A\hat{E}C$. Com isso, $A\hat{E}C = A\hat{C}B$, como mostra a figura abaixo.



Desta forma, os triângulos ACD e AEC são semelhantes.





Teremos então

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}},$$

logo

$$\frac{\overline{AC}}{8} = \frac{6}{\overline{AC}},$$

e portanto

$$\overline{AC}^{\,2} = 6 \cdot 8,$$

o que nos dá

$$\overline{AC} = 4\sqrt{3}.$$

---

[20] Comprei garrafas de vinho, todas por um mesmo preço, pagando um total de 3600 reais, que era todo dinheiro que eu tinha. Como obtive um desconto de 20% no preço de cada garrafa, consegui comprar 10 garrafas a mais do que previra originalmente. Quantas garrafas comprei?

(A) 100

(B) 90

(C) 50

(D) 40

(E) 36

Solução
Resposta C

Seja p o preço de cada garrafa e x a quantidades de garrafas que seriam compradas originalmente. Temos que $p \cdot x = 3600$. Com o desconto de 20% o preço de cada garrafa foi de $0,8 \cdot p$ e a quantidade comprada foi $x + 10$, logo

$$\begin{aligned} 0,8 \cdot p \cdot (x+10) &= 3600 \\ 0,8 \cdot \frac{3600}{x} \cdot (x+10) &= 3600 \\ 8 \cdot (x+10) &= 10x \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Portanto, comprei 50 garrafas.

---

[21] O conjunto solução, nos reais, da inequação $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} > 1$, é:

(A) $(1,2)$

(B) $(-\infty,2)$

(C) $(-\infty,2) \cup (3,+\infty)$

(D) $(2,3)$

(E) $\emptyset$

Solução
Resposta: D
A inequação dada é equivalente a

$$\frac{x^2-5x+7}{(x-2)(x-3)} < 0.$$

Como o numerador é positivo para todo x real, basta analisar quando $(x-2)(x-3) < 0$. Nesse caso temos duas situações:
(i) $x-2 < 0$ e $x-3 > 0$. Mas isso implicaria $x < 2$ e $x > 3$, o que é impossível.
(ii) $x-2 > 0$ e $x-3 < 0$. Isso implica $2 < x < 3$.

Portanto o conjunto solução é o intervalo $(2,3)$.

---

[22] I. O triângulo de lados $4, 8$ e 9 é acutângulo

PORQUE

II. $4^2 + 8^2 < 9^2$.

A respeito dessas asserções, assinale a alternativa correta.

(A) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.

(B) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.

(C) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

(D) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

(E) As assserções I e II são proposições falsas.

Solução
Resposta: D

Num triângulo, o maior lado é oposto ao maior ângulo. Sejam $a = 9, b = 8$ e $c = 4$ e $\hat{A}$ o maior ângulo do triângulo (oposto ao lado de comprimento 9). Pela lei dos cossenos temos que

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{64+16-81}{2\cdot 8\cdot 4} = -\frac{1}{64} < 0.$$

Portanto o ângulo $\hat{A}$ é obtuso e o triângulo é obtusângulo. Assim a asserção I é falsa.
A asserção II é claramente verdadeira.

---

[23] Um dado não viciado com seis faces numeradas de 1 a 6 é lançado três vezes. Qual a probabilidade de o produto dos resultados obtidos ser igual 20?

(A) $\frac{1}{72}$

(B) $\frac{1}{36}$

(C) $\frac{1}{24}$

(D) $\frac{1}{18}$

(E) $\frac{1}{12}$

Solução
Resposta: C

O número de casos possíveis é igual a $6^3 = 216$. Para que o produto de resultados seja igual a 20, temos duas situações favoráveis:

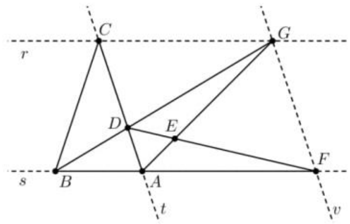
(i) as faces de números $1, 4$ e 5, que perfazem um total de $3! = 6$ situações, ou

(ii) as faces de números $2, 2$ e 5, que perfazem um total de 3 situações.

Logo, a probabilidade pedida é $p = \dfrac{9}{216} = \dfrac{1}{24}$.

---

[24] Na figura abaixo, r é paralela a s, t é paralela a v, D é a interseção de BG com AC e E é a interseção de DF com AG.



Se as áreas dos triângulos ADE e BCD são, respectivamente, 1 e 3, a área do triângulo AEF é igual a

(A) 1

(B) 2

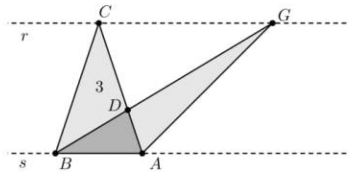
(C) 3

(D) 4

(E) 5

Solução
Resposta: B

Como as retas r e s são paralelas, os triângulos ABC e ABG têm mesma altura. E, como possuem a mesma base AB, suas áreas serão iguais. Assim, de acordo com a figura abaixo,



temos área$(ABD) + 3 =$ área$(ABD) +$ área(ADG), logo área$(ADG) = 3$. E, como

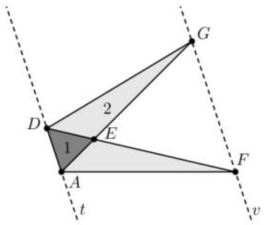
$$\text{área}(ADG) = \text{área}(ADE) + \text{área}(DEG),$$

temos

$$3 = 1 + \text{área}(DEG),$$

logo área$(DEG) = 2$.

Os triângulos ADF e ADG têm mesma base AD e mesma altura, pois as retas t e v são paralelas. Com isso, suas áreas serão iguais, e, pela figura abaixo,



temos

$$\text{área}(ADE) + \text{área}(DEG) = \text{área}(ADE) + \text{área}(AEF),$$

logo

$$1 + 2 = 1 + \text{área}(AEF),$$

portanto

$$\text{área}(AEF) = 2.$$

---

[25] Em outubro de 2017, três primos têm 41, 13 e 7 anos completos. Em outubro de que ano a idade de um deles será a soma das idades dos outros dois?

(A) 2027

(B) 2029

(C) 2030

(D) 2038

(E) 2053

Solução
Resposta: D

Indicando por x uma quantidade de anos, em outubro de $2017 + x$ os primos terão $41 + x, 13 + x$ e $7 + x$ anos completos. Então, devemos ter $41 + x = (13 + x) + (7 + x)$, donde $x = 41 - 20 = 21$.
Portanto, a resposta é igual a $2017 + 21 = 2038$.

---

[26] Escolhendo ao acaso três vértices de um hexágono regular, qual a probabilidade de se formar com eles um triângulo equilátero?

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{3}{10}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{10}$

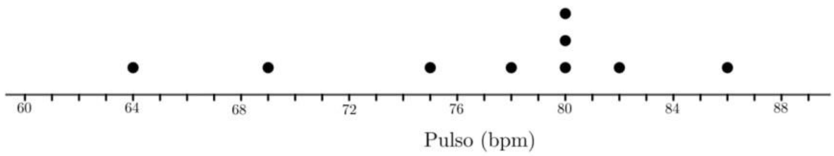
(E) $\frac{1}{20}$

Solução
Resposta: D

Indicamos por 1, 2, 3, 4, 5 e 6 os vértices consecutivos de um hexágono regular. O número de elementos do espaço amostral é dado por $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$.
Para se obter um triângulo equilátero temos 2 possibilidades: 1, 3, 5 ou 2, 4, 6.
Portanto a probabilidade é igual a $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

---

[27] Nas últimas seis horas, Angélica mediu onze vezes os seus batimentos cardíacos através do seu pulso e obteve os resultados apresentados em batimentos por minuto (bpm) no seguinte diagrama de pontos:



Sobre os dados obtidos por Angélica é correto afirmar que:

(A) A média é igual a 78,5 bpm.

(B) A moda é igual à mediana.

(C) A mediana é igual à média.

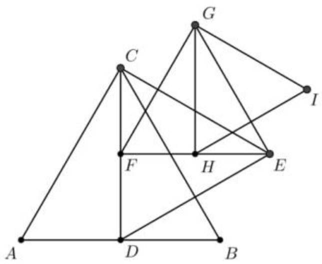
(D) A mediana é menor que a média.

(E) A moda, a média e a mediana são iguais.

Solução
Resposta: (QUESTÃO ANULADA)

---

[28] Na figura, os triângulos ABC, CDE, EFG e GHI são equiláteros, sendo CD uma altura de ABC, EF uma altura de CDE e GH uma altura de EFG. Se $\overline{AB} = 1$, a medida $\overline{GI}$ é igual a



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\dfrac{3}{4}$

(C) $\dfrac{9}{16}$

(D) $\dfrac{27}{64}$

(E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

Solução
Resposta: E

Como CD é a altura do triângulo equilátero ABC de lado 1, temos que

$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Agora EF é a altura do triângulo equilátero CDE de lado $\overline{CD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e assim

$$\overline{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Da mesma forma, GH é a altura do triângulo equilátero EFG de lado $\overline{EF}$, logo

$$\overline{GH} = d\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{GH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Logo $\overline{GI} = \overline{GH}$ e portanto

$$\overline{GI} = \overline{GH} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

---

[29] Uma grandeza G, que depende das variáveis x, y e z, é diretamente proporcional ao quadrado de x, diretamente proporcional à quarta potência de y e inversamente proporcional ao cubo de z. Se as três grandezas x, y e z dobrarem de valor, pode-se dizer que G

(A) terá seu valor multiplicado por 512.

(B) terá seu valor multiplicado por 8.

(C) terá seu valor multiplicado por 2.

(D) não muda de valor.

(E) terá seu valor reduzido à metade.

Solução
Resposta: B

Temos que $G = k \cdot \frac{x^2y^4}{z^3}$. Nas condições do problema a grandeza G será multiplicada por $\frac{2^2 \cdot 2^4}{2^3} = 8$.

---

[30] Em um triângulo retângulo ABC, o lado AB excede em 8 unidades o lado BC que por sua vez mede uma unidade a mais que o lado AC. A hipotenusa deste triângulo mede

(A) 20

(B) 21

(C) 25

(D) 27

(E) 29

Solução
Resposta: E
Chamando $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$ e $\overline{AC} = z$, chegamos às relações $x = y + 8$, $y = z + 1$. Logo as medidas dos lados são, $z, z+1, z+9$. Aplicando o Teorema de Pitágoras temos $z^2 + (z+1)^2 = (z+9)^2$, o que nos leva a $z^2 - 16z - 80 = 0$ que tem raízes $z = 20$ ou $z = -4$. Assim a hipotenusa mede 29.

Anexo 4 – Prova dos ENA 2019

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

SBM

ENA – 2019 – GABARITO COM SOLUÇÕES

---

[01] Se ℓ é o lado e A é a área de um triângulo equilátero, então é correto afirmar que:

(A) A e ℓ são grandezas diretamente proporcionais.

(B) A e ℓ^2 são grandezas diretamente proporcionais.

(C) A e ℓ são grandezas inversamente proporcionais.

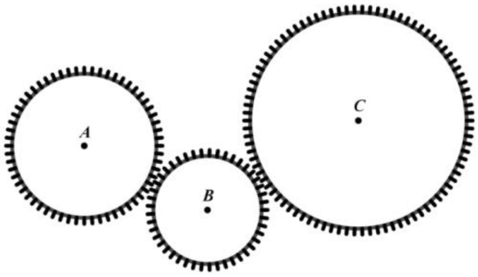
(D) A^2 e ℓ são grandezas inversamente proporcionais.

(E) A^2 e ℓ^2 são grandezas inversamente proporcionais.

Solução
Resposta: B
A área do triângulo equilátero de lado ℓ é dada por $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \ell^2$, logo A e ℓ^2 são diretamente proporcionais.

---

[02] Na figura, estão representadas as engrenagens A, B e C, que possuem, respectivamente, 60, 45 e 90 dentes cada uma. Quantas voltas completas dará a engrenagem A se a engrenagem C der 4 voltas completas e mais $\dfrac{2}{3}$ de volta?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Solução
Resposta: C
A engrenagem B não é relevante para o problema. O que realmente importa é a relação entre o número de dentes das engrenagens A e C. Como a razão entre o número de dentes das engrenagens A e C é $\dfrac{60}{90} = \dfrac{2}{3}$, isto significa que a cada 3 voltas da engrenagem A, a engrenagem C dará 2 voltas. Como $4 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$, chamando de n o número de voltas dados pela engrenagem A quando a engrenagem C dá 4 voltas completas mais $\dfrac{2}{3}$ de volta temos que:

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{14}{3}}{n}, \text{ ou seja, } n = 7.$$

[03] Qual é a soma dos valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $\dfrac{k}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}=0$ não possua solução real?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Solução
Resposta: E
Temos que $\dfrac{k}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}=0 \Longleftrightarrow \dfrac{k+x-2}{x^2-4}=0$.

A equação possui solução real se, e somente se, $k=2-x$, com $x\neq -2$ e $x\neq 2$.

Portanto, para $k=0$ ou $k=4$ a equação não possui solução real e a resposta é igual a $0+4=4$.

---

[04] Quantas raízes reais possui a equação $3+\sqrt{3+x^4}=x^2$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Solução

Resposta: A
Consideremos a equação $3+\sqrt{3+x^4}=x^2$, ou equivalentemente, $\sqrt{3+x^4}=x^2-3$ e assim $x^2-3\geqslant 0$.

Elevando ao quadrado, obtemos $3+x^4=x^4-6x^2+9$, logo $x^2=1$.

Como devemos ter $x^2-3\geqslant 0$, a equação não tem solução.

---

[05] Considere as asserções abaixo e a relação proposta entre elas.

I. A soma e o produto das raízes da equação $2x^2+5x+2=0$ são -5 e 2, respectivamente.

PORQUE

II. Se s e p são, respectivamente, a soma e o produto das raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, com $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, então $s=-b$ e $p=c$.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta.

(A) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa da I.

(B) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.

(C) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

(D) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

(E) As asserções I e II são proposições falsas.

Solução
Resposta: E
Se s e p são, respectivamente, a soma e o produto das raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, com $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, então $s=-\dfrac{b}{a}$ e $p=\dfrac{c}{a}$. Portanto, as asserções I e II são proposições falsas.

[06] Que número inteiro pode ser escrito como $\sqrt{19+6\sqrt{10}} - \sqrt{19-6\sqrt{10}}$?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Solução
Resposta: D
Considere $n = \sqrt{19+6\sqrt{10}} - \sqrt{19-6\sqrt{10}}$. Note que $n > 0$.
Elevando os dois membros da igualdade ao quadrado obtemos

$$n^2 = 19+6\sqrt{10} - 2\sqrt{19+6\sqrt{10}} \cdot \sqrt{19-6\sqrt{10}} + 19 - 6\sqrt{10},$$

logo

$$n^2 = 38 - 2\sqrt{\left(19+6\sqrt{10}\right)\left(19-6\sqrt{10}\right)}$$

e assim

$$n^2 = 38 - 2\sqrt{(19)^2 - \left(6\sqrt{10}\right)^2} = 38 - 2\sqrt{361-360} = 36.$$

Como $n > 0$, segue que $n = 6$.

Solução alternativa: Notemos que

$$\sqrt{19+6\sqrt{10}} = \sqrt{10+6\sqrt{10}+9} = \sqrt{(\sqrt{10}+3)^2} = \sqrt{10}+3.$$

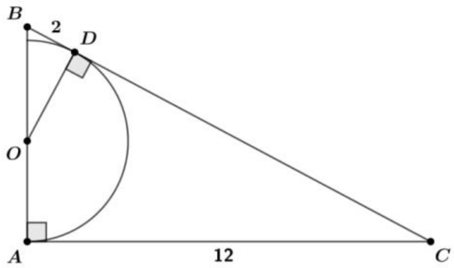
Analogamente,

$$\sqrt{19-6\sqrt{10}} = \sqrt{10-6\sqrt{10}+9} = \sqrt{(\sqrt{10}-3)^2} = \sqrt{10}-3.$$

Assim, $n = \sqrt{19+6\sqrt{10}} - \sqrt{19-6\sqrt{10}} = 6$.

---

[07] Na figura abaixo, o semicírculo de centro O é tangente à hipotenusa BC e ao cateto AC do triângulo retângulo ABC. Se $\overline{BD} = 2$ e $\overline{AC} = 12$, determine o raio do semicírculo.



(A) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

(B) $\dfrac{7}{\sqrt{13}}$

(C) $\dfrac{12}{\sqrt{13}}$

(D) $\dfrac{13}{\sqrt{13}}$

(E) $\dfrac{15}{\sqrt{13}}$

Solução
Resposta: C
Observe que $\overline{AC} = \overline{DC}$, pois ambos são segmentos determinados por retas tangentes ao círculo, com extremos no mesmo ponto C. Assim, $\overline{DC} = 12$.

Aplicando Pitágoras nos triângulos retângulos BAC e ODB obtemos $\overline{AB}^2 = (14)^2 - (12)^2 = 196 - 144 = 52$ e $\overline{OB}^2 = 4 + r^2$.

Temos ainda que, $\overline{OB} = \overline{AB} - r = \sqrt{52} - r$.

Logo $4 + r^2 = (\sqrt{52} - r)^2$ e assim $4 + r^2 = 52 - 2r\sqrt{52} + r^2$, ou seja, $2r\sqrt{52} = 48$.

Portanto $r = \dfrac{24}{\sqrt{52}} = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$.

Solução alternativa: Chamemos $\overline{OB} = x$ e $\overline{OA} = r$. Por propriedades de tangência segue que $\overline{CD} = 12$.

Os triângulos OBD e ABC são semelhantes, logo valem as relações: $\dfrac{2}{r+x} = \dfrac{r}{12} = \dfrac{x}{14}$.

Então $x = \dfrac{7}{6}r$ e $r^2 + \dfrac{7}{6}r^2 = 24$, logo $\dfrac{13}{6}r^2 = 24$; portanto $r = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$.

---

[08] A hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles T_1, cujos catetos medem ℓ, é o cateto de um triângulo retângulo isósceles T_2. A hipotenusa de T_2 é o cateto de um triângulo retângulo isósceles T_3, cuja hipotenusa é cateto do triângulo retângulo isósceles T_4 e assim por diante. O valor de ℓ que torna a medida da hipotenusa de T_{100} igual a 2^{50} é:

(A) $\sqrt{2}$

(B) 1

(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(D) 2

(E) $2\sqrt{2}$

Solução
Resposta: B
Utilizando o teorema de Pitágoras pode-se concluir facilmente que as hipotenusas de $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$, ... medem, respectivamente, $\ell\sqrt{2}, 2\ell, 2\ell\sqrt{2}, 4\ell, 4\ell\sqrt{2}, 8\ell$, ... Assim, se considerarmos apenas os triângulos de índice par T_2, T_4, T_6, T_8, ..., veremos que suas hipotenusas medem $2^1\ell, 2^2\ell, 2^3\ell, 2^4\ell$, ..., isto é, que a hipotenusa de T_{2n} medirá $2^n\ell$. Como para $n = 100$ temos que a hipotenusa de T_{100} mede $2^{50}\ell$, concluímos que $\ell = 1$.

---

[09] Dois carros partem da cidade A para a cidade B pela mesma estrada, cujo trecho entre A e B mede 120km. O primeiro carro parte às 10h com velocidade constante de 60km/h e o segundo carro sai às 10h10min com velocidade constante de 80km/h. A que horas o segundo carro alcançará o primeiro?

(A) 10h30min

(B) 10h40min

(C) 10h50min

(D) 11h10min

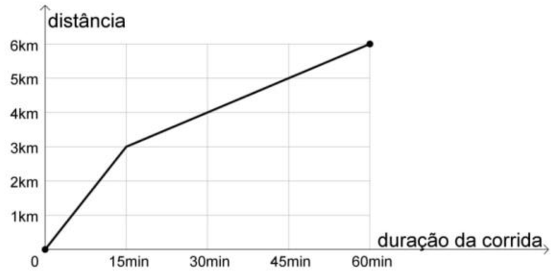
(E) 11h20min

Solução
Resposta: B
Indicaremos por d a distância percorrida pelos carros quando o segundo encontra o primeiro. Sejam t_1 e t_2 os tempos gastos, em horas, para o primeiro e o segundo carro percorrerem a distância d, respectivamente.
Temos que $t_1 = t_2 + \dfrac{1}{6}$, logo $\dfrac{d}{60} = \dfrac{d}{80} + \dfrac{1}{6}$.

Resolvendo a equação do primeiro grau, acima, obtemos $d = 40$ e assim $t_1 = \dfrac{2}{3}$.

Portanto, a resposta correta é 10h40min.

[10] O gráfico abaixo mostra o progresso de um corredor, em uma corrida de 6km de extensão.



Costuma-se chamar de *pace* a razão $\frac{t}{d}$, onde t é o tempo, em minutos, que um corredor leva para percorrer uma distância d, em quilômetros. Desta forma, considerando a corrida representada pelo gráfico acima, é correto afirmar que

(A) o *pace* do corredor foi maior nos 15 primeiros minutos do que na corrida inteira.

(B) o *pace* do corredor foi menor nos 15 últimos minutos do que na corrida inteira.

(C) o *pace* do corredor foi menor nos 30 últimos minutos do que na corrida inteira.

(D) o *pace* do corredor foi menor nos 3 primeiros quilômetros do que na corrida inteira.

(E) o *pace* do corredor foi menor nos 3 últimos quilômetros do que na corrida inteira.

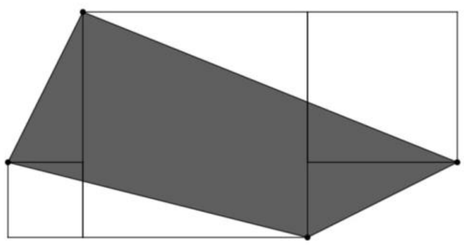
Solução
Resposta: D
Calculando o *pace* em cada um dos intervalos de tempo ou distância citados, a partir das informações do gráfico, temos

- *pace* na corrida inteira: $\frac{60\text{min}}{6\text{km}} = 10\text{min/km}$
- *pace* nos 15 primeiros minutos: $\frac{15\text{min}}{3\text{km}} = 5\text{min/km}$
- *pace* nos 15 últimos minutos: $\frac{15\text{min}}{1\text{km}} = 15\text{min/km}$
- *pace* nos 30 últimos minutos: $\frac{30\text{min}}{2\text{km}} = 15\text{min/km}$
- *pace* nos 3 primeiros quilômetros: $\frac{15\text{min}}{3\text{km}} = 5\text{min/km}$
- *pace* nos 3 últimos quilômetros: $\frac{45\text{min}}{3\text{km}} = 15\text{min/km}$

Assim, de todos os itens, o único que se aplica é o D.

---

[11] O quadrado central da figura abaixo tem seus lados inferior e superior alinhados com os quadrados da esquerda e da direita, respectivamente. O lado superior do quadrado da esquerda está alinhado com o lado inferior do quadrado da direita.



Sabendo que a área do quadrado central é igual a 9 e que os quadrados possuem lados de medidas distintas, a área do quadrilátero destacado é um

(A) número par.

(B) quadrado perfeito.

(C) número primo.

(D) múltiplo de 5.

(E) cubo perfeito.

Solução
Resposta: B
Vamos indicar por x a medida do lado do quadrado da esquerda. Como o lado do quadrado central mede 3, a medida do lado do quadrado da direita é igual a $3 - x$. Fazendo prolongamentos dos lados dos quadrados completamos a área formada pelos três quadrados de modo a formar um retângulo cujos lados medem 3 e 9.
A área A do quadrilátero destacado é igual a diferença entre a área do retângulo obtido e a soma das áreas dos 4 triângulos retângulos que completam o retângulo, isto é,

$$A = 18 - \left[\frac{(3-x)x}{2} + \frac{(6-x)(3-x)}{2} + \frac{(3-x)x}{2} + \frac{(3+x)x}{2}\right].$$

Fazendo as contas obtemos

$$A = 18 - \left[\frac{3x - x^2 + 18 - 6x - 3x + x^2 + 3x - x^2 + 3x + x^2}{2}\right] = 18 - 9 = 9.$$

Portanto a resposta é um quadrado perfeito.

---

[12] Dado $n \in \mathbb{Z}$, com $n \geqslant 1$, para quantos valores **inteiros** de m a equação

$$x^2 + mx + mn = 0$$

não possui soluções reais?

(A) $4n - 1$

(B) $4n$

(C) $4n + 1$

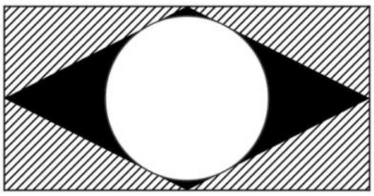
(D) $4n + 2$

(E) infinitos valores

Solução
Resposta: A
Considerando a equação $x^2 + mx + mn = 0$ temos que
$\Delta = m^2 - 4mn = m(m - 4n) < 0$ se, e somente se, $0 < m < 4n$.
Portanto, para $m \in \{1, 2, \ldots, 4n - 1\}$ a equação não possui soluções reais.

---

[13] Na figura abaixo temos um círculo inscrito em um losango cujos vértices são os pontos médios dos lados de um retângulo, cuja base tem o dobro da altura. A razão entre a área preenchida de preto e a área listrada é dada por:



(A) $\dfrac{1-\pi}{5}$

(B) $\dfrac{1+\pi}{5}$

(C) $2-\dfrac{5}{\pi}$

(D) $1-\dfrac{\pi}{5}$

(E) $\dfrac{5}{\pi}-1$

Solução
Resposta: D
Como queremos calcular a razão entre as áreas podemos supor que a base do retângulo mede 2 unidades e a altura mede uma unidade.
Cada lado do losango mede $\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Indicando por r o raio do círculo, por semelhança de triângulos obtemos $\frac{r}{1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$, logo $r=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Calculando as áreas obtemos:

a área do losango é igual a $2\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=1$.

a área da região listrada é igual a $2-1=1$.

a área do cìrculo é igual a $\frac{\pi}{5}$.

a área preenchida de preto é igual a $1-\frac{\pi}{5}$.

Portanto, a razão entre a área preenchida de preto e a área listrada é dada por $\dfrac{1-\frac{\pi}{5}}{1}=1-\frac{\pi}{5}$.

---

[14] Denomina-se terno pitagórico um trio (a,b,c) de números inteiros positivos tais que satisfazem a expressão $a^2+b^2=c^2$. Se $(x+2,2x,5\sqrt{x})$ é um terno pitagórico, então x é

(A) múltiplo de 5.

(B) primo.

(C) divisível por 3.

(D) divisível por 7.

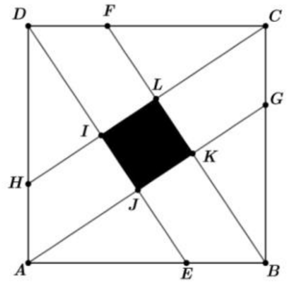
(E) par.

Solução
Resposta: E
Como $(x+2,2x,5\sqrt{x})$ é um terno pitagórico, aplicando a definição temos que

$$(x+2)^2+(2x)^2=(5\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow 5x^2-21x+4=0.$$

Nas condições do problema os valores do terno precisam ser inteiros positivos, logo, resolvendo a equação acima, temos que $x=4$. Portanto, x é par.

[15] Na figura, $ABCD$ é um quadrado. Além disso, AG é paralelo a CH, BF é paralelo a DE, $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{DF}$ e $\overline{DH} = 2 \cdot \overline{AH}$. A área do quadrilátero $IJKL$, que possui como vértices os pontos de interseção dos segmentos AG, CH, BF e DE, representa que fração da área do quadrado $ABCD$?



(A) $\dfrac{1}{9}$

(B) $\dfrac{1}{8}$

(C) $\dfrac{1}{13}$

(D) $\dfrac{1}{16}$

(E) $\dfrac{1}{17}$

Solução
Resposta: C
Por argumentos de simetria é fácil ver que os triângulos AEJ, BGK, CFL e DHI são todos triângulos retângulos congruentes entre si, bem como os triângulos ABK, BCL, CDI e DAJ. Designaremos a área de cada um dos quatro primeiros por s e a área de cada um dos quatro últimos por S. Como $EJ//BK$, então AEJ e ABK são semelhantes e como $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \dfrac{2}{3}$, isso significa que a razão entre as áreas desses dois triângulos é $\dfrac{s}{S} = \dfrac{4}{9}$, já que é o quadrado da razão de semelhança. Note ainda que ABG, cuja área é a soma das áreas de ABK com BGK, possui $\dfrac{1}{3}$ da área de $ABCD$, que designaremos por Q. Assim, $\dfrac{Q}{3} = S + s = S + \dfrac{4S}{9} = \dfrac{13S}{9}$, isto é, $S = \dfrac{3Q}{13}$. Agora, designando por q a área de $IJKL$, temos que $q = Q - 4S = Q - 4 \cdot \dfrac{3Q}{13} = \dfrac{Q}{13}$. Logo a área do quadrado $IJKL$ corresponde a $\dfrac{1}{13}$ da área de $ABCD$.

---

[16] Considere dois triângulos isósceles ABC e DEF de mesma área, não congruentes e tais que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{DE} = \overline{DF}$. Podemos afirmar que se $\overline{BC} < \overline{EF}$, então a razão $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ entre as bases desses dois triângulos é igual a:

(A) $\dfrac{\text{sen}\,\hat{A}}{1 + \cos\,\hat{A}}$

(B) $\dfrac{\text{sen}\,\hat{A}}{1 - \cos\,\hat{A}}$

(C) $\dfrac{1 - \cos\,\hat{A}}{1 + \cos\,\hat{A}}$

(D) $\dfrac{\cos\,\hat{A}}{1 + \text{sen}\,\hat{A}}$

(E) $\dfrac{\cos\,\hat{A}}{1 - \text{sen}\,\hat{A}}$

Solução
Resposta: A
Como os triângulos ABC e DEF possuem a mesma área, então $\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot \text{sen}\,\hat{A}}{2} = \dfrac{\overline{DE}\cdot\overline{DF}\cdot \text{sen}\,\hat{D}}{2}$ e como os lados AB, AC, DE e DF têm todos a mesma medida, concluímos que sen $\hat{A}$ = sen $\hat{D}$ e que, portanto, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são suplementares, com $\hat{A}$ agudo, já que $\overline{BC} < \overline{EF}$.
Utilizando a lei dos cossenos e o fato de que $\cos\hat{D} = -\cos\hat{A}$, já que são suplementares, chegamos à:

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{EF}^2} = \frac{2\overline{AB}^2 - 2\overline{AB}^2\cos\hat{A}}{2\overline{AB}^2 + 2\overline{AB}^2\cos\hat{A}} = \frac{1-\cos\hat{A}}{1+\cos\hat{A}}$$

Multiplicando o numerador e o denominador do segundo membro por $1+\cos\hat{A}$ obtemos:

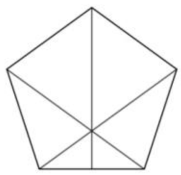
$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{EF}^2} = \frac{1-\cos^2\hat{A}}{(1+\cos\hat{A})^2} = \frac{\text{sen}^2\,\hat{A}}{(1+\cos\hat{A})^2}$$

e assim

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\text{sen}\,\hat{A}}{1+\cos\hat{A}}.$$

---

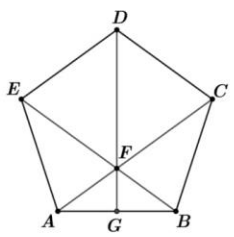
[17] A figura abaixo representa um pentágono regular, duas de suas diagonais e um segmento ligando um de seus vértices ao ponto médio do lado oposto a este vértice. Quantos triângulos isósceles aparecem na figura?



(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

Solução

Resposta: D
Na Figura aparecem 9 triângulos: ABC, ABE, ABF, AFG, AEF, DEF, CDF, BCF e BFG. Destes, apenas AFG e BFG não são isósceles.



Vejamos, ABC e ABE são isósceles porque $AB = BC$ e $AB = AE$, já que $ABCDE$ é regular.
Quanto a ABF verifica-se facilmente que é isósceles por argumentos de simetria.
Vamos provar que BCF é isósceles. Utilizando o fato de que ABC é isósceles de base AC e de que ABF é isósceles de base AB, concluímos que $C\hat{A}B = A\hat{C}B = F\hat{A}B = F\hat{B}A = \alpha$. Assim, pelo teorema do ângulo externo, $B\hat{F}C = 2\alpha$ e como a soma dos ângulos internos de BCF deve ser igual a $180°$, então $C\hat{B}F = 180° - 3\alpha$. Portanto, como $A\hat{B}C = A\hat{B}F + C\hat{B}F$ e cada ângulo interno de um pentágono regular mede $108°$, temos $A\hat{B}C = 180° - 2\alpha = 108°$, de modo que $\alpha = 36°$. Desta forma $B\hat{F}C = 2\alpha = 72° = 180° - 3\alpha = C\hat{B}F$. Logo, BCF é isósceles de base BF. Por argumento análogo prova-se que AEF é isósceles de base AF.
Para provar que CDF é isósceles (a prova para DEF se faz de forma completamente análoga) basta observarmos que CD=BC, pois são lados do pentágono regular e que BC=CF uma vez que já provamos que BCF é isósceles de base BF. Logo CD=CF e, portanto, CDF é isósceles de base DF.
Quanto aos triângulos AFG e BFG, percebe-se facilmente que não são isósceles, pois são ambos retos em G e temos $G\hat{A}F = G\hat{B}F = \alpha = 36° \neq 45°$.

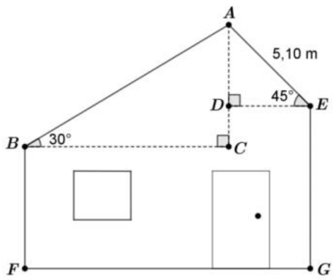
[18] Um triângulo retângulo ABC, possui hipotenusa BC de medida 6cm. A maior área possível, em cm^2, para ABC é

(A) 9 (B) $\sqrt{83}$ (C) $\sqrt{87}$ (D) 10 (E) 12

Solução
Resposta: A
Indicando por b e c as medidas dos catetos, temos que $b^2 + c^2 = 36$.
Assim a área, dada por $A = \dfrac{b \cdot c}{2}$, será a maior possível se, e somente se, $A^2 = \dfrac{b^2 \cdot c^2}{4} = \dfrac{b^2 \cdot (36 - b^2)}{4}$ assumir o maior valor.
Logo vamos analisar A^2.
Colocando $b^2 = t$, segue que $A^2 = \dfrac{t(36-t)}{4}$ terá valor máximo quando $t = 18$.
Portanto, $b^2 = 18$, $A^2 = \dfrac{18 \cdot 18}{4} = 81$ e $A = 9$.

---

[19] Adotando $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ e $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ e sabendo que o segmento AC é dividido pelo ponto D na razão de 2 para 1, com $\overline{AD} > \overline{DC}$, podemos afirmar, com base nas informações contidas na figura, que representa a vista frontal de uma casa, que a largura $\overline{FG}$ da casa, em metros, é aproximadamente igual a



(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

Solução
Resposta: C

Deseja-se saber o comprimento do segmento FG, ou seja, $\overline{FG} = \overline{BC} + \overline{DE}$. Sabemos que $cos\,45° = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$, concluímos que $\overline{DE} \approx 3,57$. Como $\hat{A}$ e $\hat{E}$ são complementares, $\hat{A} = 45°$, de modo que ADE é isósceles e, portanto, $\overline{AD} = \overline{DE}$. Como a razão entre $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ é de 2 para 1, então $\overline{DC} = \dfrac{\overline{DE}}{2} \approx 1,79$. Assim, $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 5,36$. Como $tg\,30° = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ temos que $\overline{BC} \approx 9,46$. Portanto, $\overline{FG} \approx 9,46 + 3,57 = 13,03$.

---

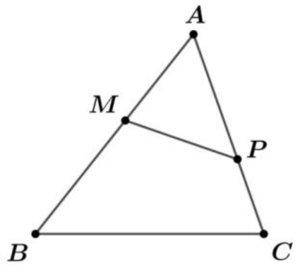
[20] Quantos números pares com quatro algarismos distintos existem?

(A) 1848 (B) 2230 (C) 2268 (D) 2296 (E) 2520

Solução

Resposta: D
Começamos a contagem pelos números que terminam com zero : $a_1a_2a_30$. Temos 9 escolhas para a_1. A partir daí 8 escolhas para a_2 e 7 para a_3. Portanto, um total de $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.
Agora, a contagem dos números que terminam com $2, 4, 6$ ou 8 : $a_1a_2a_3a_4$. Temos 4 escolhas para a_4. A partir daí, 8 escolhas para a_1 (descartamos o zero), 8 para a_2 e 7 para a_3. Assim temos um total de $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$.
A resposta é igual a $504 + 1792 = 2296$.

[21] Os triângulos ABC e AMP da figura abaixo são semelhantes e os lados MP e BC não são paralelos.



É sempre correto afirmar que:

(A) Os triângulos ABC e BPC são semelhantes.

(B) Os triângulos BPC e BMP são semelhantes.

(C) Os ângulos $A\hat{M}P$ e $A\hat{B}P$ são suplementares.

(D) Os ângulos $A\hat{B}C$ e $M\hat{P}C$ são suplementares.

(E) Os ângulos $M\hat{P}B$ e $M\hat{B}P$ são congruentes.

Solução
Resposta: D
De acordo com o enunciado, temos que os ângulos $A\hat{M}P$ e $A\hat{C}B$ são congruentes; o mesmo ocorrendo com os ângulos $A\hat{P}M$ e $A\hat{B}C$. Segue-se então que os ângulos $A\hat{B}C$ e $M\hat{P}C$ são suplementares.

---

[22] Considere as seguintes afirmações sobre porcentagem:

I. $\sqrt{144\%} = 12\%$.

II. $\sqrt[3]{12{,}5\%} = 50\%$

III. $3\% \cdot 5\% = 15\%$.

É correto o que se afirma em

(A) II, apenas.

(B) I e II, apenas.

(C) I e III, apenas.

(D) III, apenas.

(E) I, II e III.

Solução
Resposta: A
Temos que

$$\sqrt{144\%} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{12}{10} = \frac{120}{100} = 120\%,$$

$$\sqrt[3]{12,5\%} = \sqrt[3]{\frac{12,5}{100}} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%$$

e

$$3\% \cdot 5\% = \frac{3}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{15}{100} \cdot \frac{1}{100} = 0,15\%.$$

Portanto, apenas II está correta.

[23] No mês de janeiro um lojista aumentou o preço das roupas em 10% e em fevereiro aumentou o novo preço em mais 10%. No mês de março resolveu fazer uma liquidação e ofereceu um desconto de 20%. Em relação ao preço antes dessas três alterações, podemos afirmar que

(A) houve uma diminuição de 3, 2%.

(B) houve um aumento de 3, 2%.

(C) houve um aumento de 3, 9%.

(D) houve uma diminuição de 3, 9%.

(E) permaneceu o mesmo.

Solução
Resposta: A
Seja x o preço inicial de uma roupa. Em janeiro, passou a custar $x + \frac{10}{100}x = 1,1x$.

Em fevereiro, $1,1x + \frac{10}{100}1,1x = 1,21x$.

Em março, $1,21x - \frac{20}{100}1,21x = 0,968x = (1 - 0,032)x = x - \frac{3,2}{100}x$.

Portanto, houve uma diminuição de 3, 2%.

---

[24] Em um estacionamento há 5 vagas exclusivamente para carros e 7 vagas mais estreitas exclusivamente para motos. De quantas formas é possível estacionar 3 carros e 4 motos nessas vagas?

(A) 25.200

(B) 50.400

(C) 52.000

(D) 100.800

(E) 104.000

Solução
Resposta: B
Para o primeiro carro a ser estacionado temos 5 possibilidades de escolha. Uma vez estacionado o primeiro carro, sobram 4 escolhas para o segundo, logo temos $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades para estacionar dois carros. Para cada uma destas possibilidades sobram três vagas para o terceiro carro. Logo, o número total de possibilidades para o estacionamento dos carros é igual a $20 \cdot 3 = 60$.
De modo análogo, temos $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ possibilidades para estacionar as motos.
Para cada uma das 60 possibilidades do estacionamento dos carros temos 840 escolhas para o estacionamento das motos, portanto a resposta é igual a $60 \cdot 840 = 50.400$.

---

[25] Uma pesquisa sobre renda familiar foi realizada com os alunos ingressantes de um curso e mais tarde com aqueles que conseguiram concluí-lo.

Sabendo que houve evasão durante o curso e que, ao longo deste, alguns alunos mudaram sua faixa de renda, podemos afirmar, com base nos gráficos e no fato de que novos alunos não mais adentraram no curso desde então, que:

(I) certamente houve diminuição no número de alunos que recebiam mais de 5 salários mínimos do início para o final do curso.

(II) 12% dos alunos que recebiam de 2 a 3 salários mínimos não concluíram o curso.

(III) é possível que a quantidade de alunos que recebiam de 4 a 5 salários mínimos quando concluíram o curso seja menor do que a quantidade de alunos que, quando ingressaram, pertenciam a esta faixa de renda.

É correto o que se afirma em:

(A) I, apenas.

(B) II, apenas.

(C) I e III, apenas.

(D) II e III, apenas.

(E) I, II e III.

Solução
Resposta: C
Como o total de alunos do curso diminuiu, em valor absoluto, com a evasão, e também o percentual de alunos que recebem mais de 5 salários mínimos diminuiu, então, certamente houve diminuição do número de alunos nesta faixa de renda, logo (I) é verdadeira.
Já a afirmação (II) é falsa, pois mesmo que não houvesse evasão entre aqueles que recebiam de 2 a 3 salários mínimos, o fato de que alguns alunos mudarem sua faixa de renda seria suficiente para justificar uma redução no percentual de alunos nesta faixa de renda.
Agora a assertiva (III) é verdadeira, porque se, por exemplo, tivessem ingressado 300 alunos no curso e evadido 200, teríamos inicialmente 39 alunos (13% de 300) recebendo de 4 a 5 salários e teriam concluído o curso apenas 32 alunos (32% de 100) nesta faixa de renda.

---

[26] Uma prova possui 30 questões de múltipla escolha, cada questão possui 5 itens, dentre os quais há sempre um único item correto. Se João acertou todas as 26 questões que sabia resolver e marcou aleatoriamente todas as que não sabia, qual é a probabilidade de João errar no máximo uma questão?

(A) $\frac{1}{625}$ (B) $\frac{16}{625}$ (C) $\frac{21}{625}$ (D) $\frac{17}{625}$ (E) $\frac{624}{625}$

Solução
Resposta: D
Já sabemos que João acertou 26 questões, então há apenas 4 questões que ele pode errar na prova. Como cada questão possui 5 itens, dos quais apenas um é correto, a probabilidade de João errar uma questão é igual a $\frac{4}{5}$ e a de ele acertar é igual a $\frac{1}{5}$.
Assim, a probabilidade de João errar no máximo uma questão corresponde a probabilidade de ele acertar todas as questões, que é igual a $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ mais a probabilidade de ele errar uma única questão, que é igual a $4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$, isto é, $\frac{1}{625} + \frac{16}{625} = \frac{17}{625}$.

---

[27] Um dado não viciado é lançado duas vezes. Neste contexto, 25% é a probabilidade de

(A) obter um número par e um número ímpar, independentemente da ordem em que aconteçam.

(B) obter dois números menores do que 3.

(C) obter dois números de mesma paridade (ambos pares ou ambos ímpares).

(D) o resultado do segundo lançamento ser menor que o do primeiro.

(E) obter dois números pares.

Solução
Resposta: E
O espaço amostral é formado por todos os pares de resultados possíveis. Como em cada lançamento há 6 possibilidades, o número de casos possíveis é $6 \cdot 6 = 36$, todos com a mesma possibilidade de ocorrência.

(A) No primeiro lançamento temos 6 possibilidades. Para cada escolha, como a paridade no segundo lançamento tem que ser diferente, temos 3 possibilidades, logo 18 casos favoráveis. Portanto, a probabilidade, neste caso, é igual a $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

(B) No primeiro lançamento temos 2 possibilidades e no segundo também 2 possibilidades, logo 4 casos favoráveis. Portanto, a probabilidade, neste caso, é igual a $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

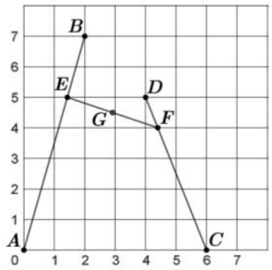
(C) Usando o item (A) concluimos que a probabilidade, neste caso, é igual a $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

(D) O número de casos favoráveis é igual a $\frac{36-6}{2} = 15$. A probabilidade, neste caso, é igual $\frac{15}{36}$.

(E) No primeiro lançamento temos 3 possibilidades e no segundo também 3 possibilidades, logo 9 casos favoráveis. Portanto, a probabilidade, neste caso, é igual a $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$.

---

[28] Sendo A, B, C e D pontos de coordenadas inteiras e E e F os pontos de interseção dos segmentos AB e CD com as linhas horizontais da malha, podemos afirmar que a abscissa do ponto médio G do segmento EF é dada por:



(A) $\frac{20}{7}$

(B) $\frac{102}{35}$

(C) $\frac{29}{10}$

(D) $\frac{32}{11}$

(E) $\frac{62}{21}$

Solução
Resposta: B
Sejam I, J, K e L, respectivamente, os pontos de coordenadas $(2, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 5)$ e $(4, 4)$. Podemos afirmar, a partir da semelhança dos triângulos ABI e EBK que o segmento EK mede $\frac{4}{7}$ e que, portanto, a abscissa x_1 do ponto E é dada por $x_1 = 2 - \frac{4}{7} = \frac{10}{7}$. Tendo em vista também a semelhança dos triângulos CDJ e FDL concluímos que o segmento LF mede $\frac{2}{5}$ e que, portanto, a abscissa x_2 do ponto F é dada por $x_2 = 4 + \frac{2}{5} = \frac{22}{5}$. Como G é ponto médio de EF, então a abscissa x de G corresponde a média aritmética das abscissas de E e de F. Desse modo temos:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{102}{35}.$$

[29] As médias aritméticas das notas das turmas A e B são, respectivamente, iguais a 6 e 5. Sabendo que a turma A tem 30 alunos e a turma B tem 45 alunos, a média aritmética das notas dos 75 alunos das duas turmas é igual a

(A) 5, 30 (B) 5, 35 (C) 5, 40 (D) 5, 42 (E) 5, 50

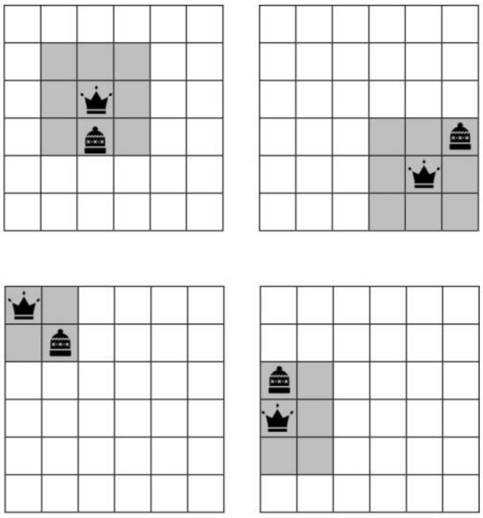
Solução
Resposta: C
A média aritmética da turma A é dada por $M_A = \frac{S_A}{30}$, onde S_A é a soma das notas dos 30 alunos.
A média aritmética da turma B é dada por $M_B = \frac{S_B}{45}$, onde S_B é a soma das notas dos 45 alunos.
A média dos 75 alunos das turmas A e B é igual a

$$M = \frac{S_A + S_B}{75} = \frac{30}{75} \cdot \frac{S_A}{30} + \frac{45}{75} \cdot \frac{S_B}{45}$$

Como $M_A = 6$ e $M_B = 5$, obtemos $M = \frac{30}{75} \cdot 6 + \frac{45}{75} \cdot 5 = \frac{405}{75} = 5,40$.

---

[30] Duas peças distintas devem ser dispostas em um tabuleiro 6×6, de forma que não ocupem a mesma casa ou casas adjacentes, isto é, casas com um lado ou vértice em comum. Como exemplo, a figura abaixo mostra quatro situações que **não são admitidas**.



Observamos que, em cada uma das figuras acima, uma vez posicionada a peça com a coroa, as casas marcadas em cinza são todas aquelas onde a outra peça não poderia estar.
De quantas formas distintas é possível dispor as duas peças segundo as regras acima?

(A) 520 (B) 516 (C) 996 (D) 1032 (E) 1040

Solução
Resposta: E
Fixada a posição da coroa numa das 36 posições do tabuleiro, faremos a contagem das possibilidades de colocação da segunda peça, obedecendo as regras. Chamaremos de posições laterais as da primeira e última linha e as da primeira e última coluna, as outras posições serão chamadas de posições centrais.

- Fixando a coroa numa das 16 posições centrais sobram $36 - 9 = 27$ posições para a segunda peça, logo temos $16 \cdot 27 = 432$ possibilidades.
- Fixando a coroa num dos 4 cantos das laterais sobram $36 - 4 = 32$ posições para a segunda peça, logo temos $4 \cdot 32 = 128$ possibilidades.
- Fixando a coroa nos 16 lugares restantes nas laterais sobram $36 - 6 = 30$ posições para a segunda peça, logo $30 \cdot 16 = 480$ possibilidades.

Portanto, temos um total de $432 + 128 + 480 = 1040$ possibilidades.