UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TIAGO HENRIQUE ORTH DOS SANTOS

CURVAS PARAMÉTRICAS

Curitiba

2019

TIAGO HENRIQUE ORTH DOS SANTOS

CURVAS PARAMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná-UFPR, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto

Curitiba
2019

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S237c Santos, Tiago Henrique Orth dos
Curvas paramétricas[recurso eletrônico] / Tiago Henrique Orth dos Santos – Curitiba, 2019.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Aldemir José da Silva Pinto

1. Curvatura. 2. Curvas Parametrizadas. 3. Curvas Planas. 4. Frenet-referencial de. I. Universidade Federal do Paraná. II. Pinto, Aldemir José da Silva. III. Título.

CDD: 516.36

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **TIAGO HENRIQUE ORTH DOS SANTOS** intitulada: **CURVAS PARAMÉTRICAS** , após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 26 de Abril de 2019.

Aldemir Silva

ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

Lucelina

LUCELINA BATISTA DOS SANTOS

Avaliador Interno (UFPR)

SANI DE CARVALHO RUTZ DA SILVA

Avaliador Externo (UTFPR)

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, á minha esposa Ana Cláudia Zan Orth, pelo apoio, amizade, companhia e paciência nessa etapa de minha vida. Também sou grato aos meus amigos pessoais, pelo incentivo em momentos difí ceis, em especial Débora Rengel pelos seus conselhos e companhia nas inúmeras viagens. Agradeço especialmente ao Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto, meu orientador, por sua disposição, ensinamentos, compreensão e paciência dedicados a mim.

RESUMO

Neste trabalho consideram-se conceitos básicos da Geometria Diferencial, principalmente as Curvas Planas Parametrizadas. Foram utilizados alguns conceitos e propriedades deÁlgebra Linear, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral como preliminares para a abordagem das curvas parametrizadas. O principal objetivo do trabalho é apresentar o que motiva a parametrização das curvas, principalmente secções cônicas: circunferência, elipse, hipérbole, parábola e a apresentação de outras curvas parametrizadas como Ciclóide, Epiciclóide, Hipociclóide, Deltóide, Astróide e Cissóide de Diócles. O estudo também contempla uma breve abordagem sobre curvas no espaço, Triedro de Frenet, e em particular hélices.

Palavras-chave:Curvas Parametrizadas, Curvas Planas, Referencial de Frenet, Curvatura.

ABSTRACT

In this work it is considered basic concepts of Differential Geometry, mainly Parametric Plane Curves. It was used some concepts and properties from Linear Algebra, Analytic Geometry, Differential and Integral Calculus as preliminary for the approach of parametrized curves. The main aim of this work is to present what motivates the parametrization of curves, mainly conic sections: circunference, ellipsis, hyperbola, parabola and the presentation of other parametric curves, like Cycloids, Epicycloids, Hypocycloids, Deltoid, Astroid and Cissoid of Diocles. The study also contemplates a brief approach about curves in space, Frenet Trihedral and particular Helices.

Keywords: Parametric Curves, Plane Curves, Frenet Reference, Curvature.

Sumário

Sumário **7**

1 Introdução **9**

2 Preliminares **11**

2.1 Operações com vetores 14

2.1.1 Soma de vetores 14

2.1.2 Multiplicação de vetor por um número real 16

2.1.3 Soma de ponto com vetor 17

2.2 Dependência e Independência Linear 17

2.3 Base 19

2.4 Produto Interno 22

2.5 Produto vetorial 26

3 Funções com valores vetoriais **27**

4 Curvas **32**

4.1 Curvas Planas 32

4.1.1 Curva Parametrizada Diferenciável, Curva Regular 32

4.1.2 Referencial de Frenet 53

4.1.3 Evolutas no Plano 58

5 Curvas no espaço **63**

5.0.1 Triedro de Frenet 64

5.0.2 Hélices 69

6 Conclusão **74**

Referências Bibliográficas **76**

Capítulo 1

Introdução

O estudo da geometria teve início na Grécia, sendo Euclides de Alexandria o responsável pela reunião de grande parte da matemática desenvolvida em sua época com a obra "Os Elementos", a qual apresenta um grande estudo sobre Geometria.

Para a introdução da geometria diferencial, que é o estudo da geometria com o auxílio do cálculo diferencial integral, e das curvas parametrizadas foram necessários alguns conceitos de geometria analítica, álgebra linear, baseadas em Boldrini [Bol78], Boulos [Bou05], Lima [Lim10], e funções vetoriais baseadas em Tenenblat [Ten88] e Leithold[Lei94].

Apolônio de Perga teve uma grande contribuição no estudo das curvas, principalmente secções cônicas. Ele foi o primeiro que mostrou ser possível obter as secções cônicas a partir de um único cone variando a inclinação do plano de secção, superando os trabalhos de Menecmo, Euclides e Arquimedes, veja Eves [H.04].

As secções cônicas são de grande aplicabilidade e estão presentes no cotidiano. Por exemplo, os planetas do sistema solar, satélites artificiais descrevem órbitas elípticas; há cometas que percorrem trajetórias hiperbólicas; na orientação de barcos faz-se o uso das hipérboles; o trajeto de projéteis é descrito por parábola; também utilizam-se parábolas para construção de pontes, entre muitas outras funções.

Nem sempre é possível escrever matematicamente a equação cartesiana de uma curva, daí vem a motivação para parametrizar as curvas. O movimento de uma partícula é descrito por uma curva parametrizada pelo tempo t, logo, aparece em muitas aplicações da Física. O traço da curva corresponde ao conjunto de pontos por onde a partí?cula passa. O intervalo I corresponde ao intervalo de tempo que dura o movimento, ou seja, é descrever uma curva através de uma função vetorial.

Em seguida foram tratados os conceitos de curva parametrizada diferenciável e curva regular. Ainda, são apresentadas algumas curvas planas, dentre elas: circunferência, elipse, hipérbole, parábola, cicloide, epicicloide, hipocicloide, Cissóide de Diocles e evolutas. Posteriormente, define-se o referencial de Frenet e suas propriedades. (do Carmo,[dC71])

Complementando o capítulo anterior, apresentam-se curvas no espaço generalizando alguns conceitos das curvas planas. Apresentam-se também as fórmulas de Frenet-Serret, as quais são de grande relevância nos estudos das curvas no espaço, bem como plano normal, plano retificante e plano osculador.(O' Neill,[ON69]).

Esse trabalho se divide em cinco capítulos: o Capítulo 1 refere-se à parte introdutória; no Capítulo 2 são abordados alguns conceitos preliminares de vetores, dependência e independência linear, base, produto interno e produto vetorial; o Capítulo 3 é uma breve apresentação de funções com valores vetoriais; no Capítulo 4 serão consideradas curvas planas, bem como a parametrização de algumas delas; por fim, no Capítulo 5, serão apresentados curvas no espaço, sendo abordados o triedro de Frenet e hélices.(Harle, [Har73] e O'Neill, [ON69]).

Capítulo 2

Preliminares

Vetor é uma palavra que provém do latim *vehere*, que significa transportar (Lima [Lim10]) e é uma ferramenta importante para o estudo em diversas áreas como na Matemática, na Física, na Engenharia entre outras. Josiah Willard Gibbs (1839-1903) utilizou o conceito de vetor como um segmento de reta orientado para facilitar o entendimento e aplicabilidade de conteúdos difíceis de dominar com rapidez e de aplicar com facilidade (Eves [H.04]).

Módulo, direção e sentido do vetor, bem como segmento orientado, equipolência, vetor nulo, vetor oposto e norma serão definidos a seguir e se encontram em Boulos [Bou05]:

Definição 2.1. *Um segmento orientado é um par ordenado* (A, B) *de pontos do espaço.* A *é dito origem,* B *extremidade de segmento orientado. Os segmentos orientados da forma* (A, A) *são ditos nulos. Observe que se* $A \neq B$, (A, B) *é diferente de* (B, A)

Definição 2.2. *i. Os segmentos orientados* (A, B) *e* (C, D) *têm o mesmo comprimento se os segmentos geométricos* AB *e* CD *têm o mesmo comprimento.*

ii. Suponha (A, B) *e* (C, D) *não nulos. Então* (A, B) *e* (C, D) *têm mesma direção se* $AB//CD$.

iii. Suponha (A, B) *e* (C, D) *têm mesma direção.*

a) Se as retas AB *e* CD *são distintas,* (A, B) *e* (C, D) *têm mesmo sentido caso os segmentos* AC *e* BD *tenham interseção vazia. Caso* $AB \cap CD \neq \emptyset$, (A, B) *e*

(C, D) têm sentido contrário.

b) Se as retas AB e CD coincidem, tome A', B' tal que A' não pertença à reta AB e (A', B') tenha mesma direção, e mesmo sentido que (A, B). Então (A, B) e (C, D) têm mesmo sentido se (A', B') e (C, D) têm o mesmo sentido. Caso contário (A, B) e (C, D) têm sentido contrário.

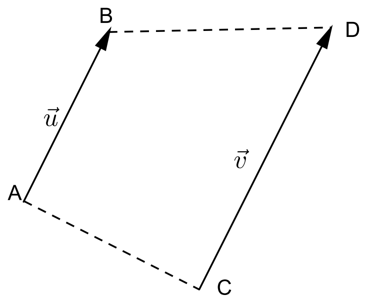

Figura 2.1: Mesmo Sentido

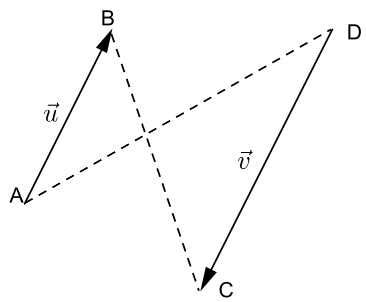

Figura 2.2: Sentido contrário

Definição 2.3. *Os segmentos orientados* (A, B) *e* (C, D) *são equipolentes, e indica-se* (A, B) (C, D)*, se um dos casos seguintes ocorrer:*

a) ambos são nulos;

b) nenhum é nulo, e têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

Em Boulos [Bou05], um segmento orientado (A, B) fixado, chama-se classe de equipolência de (A, B) o conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes a (A, B), gozando das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Definição 2.4. *i. Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados de* $\mathbb{E}^3$ *(conjunto dos pontos do espaço tridimensional). Se* (A, B) *é um segmento orientado, o vetor correspondente será indicado por* $\overrightarrow{AB}$*. Usam-se também letras latinas minúsculas enunciada por uma seta (*$\vec{a}$ *,* $\vec{b}$ *, etc)*

ii. Chama-se de vetor nulo ao vetor cujo representante é um segmento orientado nulo. Indica-se o vetor nulo por $\vec{0}$ *.*

iii. Os vetores $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ *não nulos são paralelos se um representante de* $\vec{x}$ *é paralelo a um representante de* $\vec{y}$*. Se* $\vec{x}//\vec{y}$ *e* $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ *têm mesmo sentido (respectivamente sentido contrário) se um representante de* $\vec{x}$ *e um representante de* $\vec{y}$ *têm mesmo sentido (respectivamente sentido contrário). Considera-se o vetor nulo paralelo a qualquer vetor.*

iv. Chama-se norma (módulo ou comprimento) de um vetor o comprimento de qualquer um de seus representantes; indica-se a norma de $\vec{x}$ *por* $||\vec{x}||$*. Se* $||\vec{x}|| = 1$*, o vetor* $\vec{x}$ *é unitário.*

Definição 2.5. *O vetor* $\overrightarrow{BA}$ *é chamado de vetor oposto do vetor* $\overrightarrow{AB}$*, que tem o mesmo comprimento, mesmo direção e sentido contrário. O vetor oposto do vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é indicado também por* $-\overrightarrow{AB}$*, o vetor oposto de um vetor* $\vec{x}$ *é indicado por* $-\vec{x}$*.*

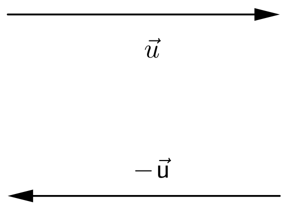

Figura 2.3: Vetor oposto

2.1 Operações com vetores

O conjunto de todos os vetores será indicado por $\mathbb{V}^3$.

A soma de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar serão definidos a seguir.

2.1.1 Soma de vetores

A soma de vetores podem ser interpretada de duas maneiras. Representa-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, por um segmento orientado cujo início seja a extremidade final de $\vec{u}$ do primeiro segmento então define-se a soma $\vec{u} + \vec{v}$ como sendo o vetor $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, figura 2.4. O outro modo de soma que pode ocorrer é se os segmentos orientados têm o mesmo início, seja $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ então $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ que será a diagonal do paralelogramo que tem dois lados consecutivos iguais AB e AC, figura 2.5 sendo que a segunda maneira só faz sentido se os pontos não forem colineares.

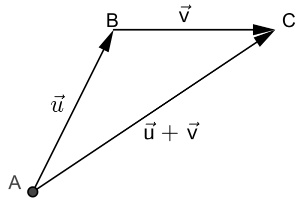

Figura 2.4: Soma de vetores (a)

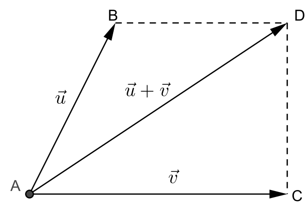

Figura 2.5: Soma de vetores (b)

A soma de vetores em $\mathbb{V}^3$ satisfaz às seguintes propriedades:

1. Associativa
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w});$$

2. Comutativa
$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u};$$

3. Elemento Neutro
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u};$$

4. Elemento Oposto

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$$

2.1.2 Multiplicação de vetor por um número real

Define-se a multiplicação de um número real α a um vetor $\vec{v}$ indicado por $\alpha\vec{v}$, tal que:

i. Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$;

ii. Se $\alpha \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\alpha\vec{v}$ é caracterizado por:

a) $\alpha\vec{v}//\vec{v}$;

b) $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentido contrário se $\alpha < 0$;

c) $||\alpha\vec{v}|| = |\alpha|||\vec{v}||$.

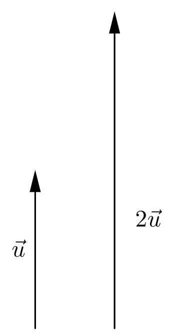

Figura 2.6: Multiplicação do vetor por escalar

Valem as seguintes propriedades de multilicação de vetor por número real:

Distributiva:

1. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

2. $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$;

3. Existência de identidade para a multiplicação por um escalar:
   $1\vec{v} = \vec{v}$;

4. Associativa:
   $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v} = \beta(\alpha\vec{v})$.

2.1.3 Soma de ponto com vetor

Seja um ponto P e um vetor $\vec{v}$, então existe um único segmento orientado (P, Q) representante de $\vec{v}$.

Definição 2.6. *Para cada ponto $P \in \mathbb{E}^3$ e a cada vetor $\vec{v} \in V^3$ associa um único ponto Q de $\mathbb{E}^3$, indicado por $P + \vec{v}$, e é chamado de soma de P com $\vec{v}$. Assim*

$$\forall P \in \mathbb{E}^3, \forall \vec{v} \in V^3 : P + \vec{v} = Q \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{v}$$

donde

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q$$

Segue algumas propriedades dessa operação:

1. $P + \vec{0} = P \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$;

2. $P + \vec{u} = P + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$;

3. $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V^3 \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$;

4. $A + \vec{v} = B + \vec{v} \Rightarrow A = B$;

5. $(P - \vec{v}) + \vec{v} = P$.

2.2 Dependência e Independência Linear

Definição 2.7. *Um espaço vetorial real é um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma, $V \ X \ V \to V$ e a multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \ X \ V \to V$, tais que, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, as propriedades abaixo são satisfeitas:*

i) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;

ii) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;

iii) *Existe* $\vec{0}\in V$ *tal que* $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$;

iv) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$;

v) $(a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v}$;

vi) $(ab)\vec{v}=a(b\vec{v})$;

vii) $1\vec{u}=\vec{u}$.

Definição 2.8. *Sejam* V *um espaço vetorial,* $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\in V$ *e* $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$. *Então o vetor*

$$\vec{v}=\vec{v}_1a_1+\vec{v}_2a_2+...+\vec{v}_na_n$$

é um elemento de V *que é chamado de combinação linear de* $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n$.

Definição 2.9. *Sejam* V *um espaço vetorial e* $\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\in V$. *Então o conjunto* $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ *é linearmente independente se a equação*

$$\vec{v}_1a_1+\vec{v}_2a_2+...+\vec{v}_na_n=0$$

implica que $a_1=a_2=...=a_n=0$. *No caso em que exista algum* $a_i\neq 0$ *então* $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ *é linearmente dependente (LD).*

Proposição 2.1. *Sejam os vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *no plano linearmente independentes. Então qualquer vetor* $\vec{w}$ *nesse plano se escreve, de modo único, como combinação linear de* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *ou seja,* $\vec{w}=s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$.

Demonstração. Geometricamente pode-se obter $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ segmentos orientados com mesmo ponto inicial A. Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares, os eixos AB e AC têm apenas o ponto A em comum.

Dado um vetor qualquer $\vec{w}$ no plano, escreve-se $\vec{w}=\overrightarrow{AP}$ e, pelo ponto P, traça-se paralelas aos eixos AB e AC no ponto C' e a segunda corta AB no ponto B'.

Como A,B e B' são colineares, existe $s\in\mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB'}=s\cdot\overrightarrow{AB}$.

Analogamente, $\overrightarrow{AC'} = t \cdot \overrightarrow{AC}$ com $t \in \mathbb{R}$.

Como AP é diagonal do paralelogramo $AB'PC'$, temos $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$, ou seja, $\vec{w} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$. $\square$

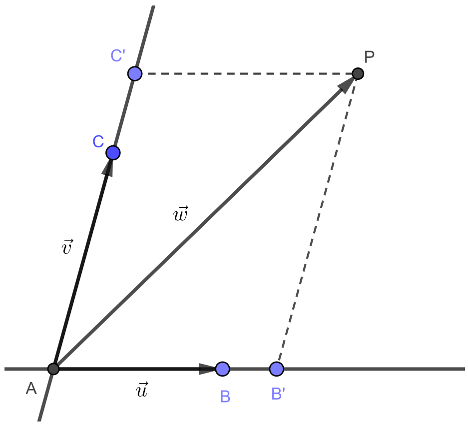

Figura 2.7: Escrevendo $\vec{w}$ como soma de um múltiplo de $\vec{u}$ com um mútiplo de $\vec{v}$.

Exemplo 2.1. *Qualquer vetor do plano se exprime como combinação linear dos vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (-3, 2)$. É possível obter o vetor $\vec{w} = (1, 1)$ como uma combinação linear $\vec{w} = s\vec{u} + t\vec{v}$? De fato:*

$$(1, 1) = s(2, -1) + t(-3, 2)$$
$$(1, 1) = (2s, -s) + (-3t, 2t)$$
$$(1, 1) = (2s - 3t, -s + 2t),$$

ou seja $\begin{cases} 2s - 3t = 1 \\ -s + 2t = 1 \end{cases}$ *. Resolvendo o sistema, obtem-se $s = 5$, $t = 3$. Portanto $\vec{w} = 5\vec{u} + 3\vec{v}$ que é a expressão do vetor $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

2.3 Base

Definição 2.10. *Um conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V será uma base se:*

i. $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é linearmente independente;*

ii. $[v_1, v_2, ..., v_n] = V$.

Em $\mathbb{R}^3$ qualquer tripla ordenada $X = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ linearmente independente de vetores forma uma base. Se $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, todo vetor $\vec{v}$ se escreve de modo único como uma combinação linear de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, isto é, existem escalares a_1, a_2, a_3, tais que $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

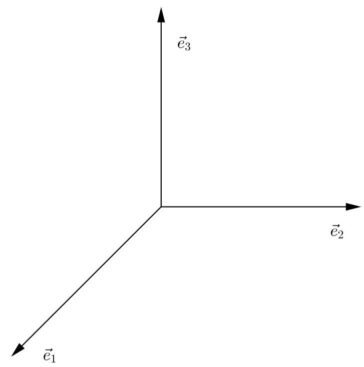

Figura 2.8: Base de $\mathbb{R}^3$

Exemplo 2.2. *O conjunto* $\{(1,1),(0,1)\}$ *é uma base de* $V = \mathbb{R}^2$. *Se* $(0,0) = a(1,1) + b(0,1) = (a, a+b)$, *então* $a = b = 0$. *Isto é,* $\{(1,1),(0,1)\}$ *é linearmente independente.*

Temos ainda $[(1,1),(0,1)] = V$ *pois dado* $\vec{v} = (x,y) \in V$, *temos*

$$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1),$$

ou seja, todo vetor de $\mathbb{R}^2$ *é uma combinação linear dos vetores* $(1,1)$ *e* $(0,1)$.

Definição 2.11. *Sejam* $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ *base de* V *e* $\vec{v} \in V$ *onde* $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n$. *Os números* $a_1, a_2, ..., a_n$ *são chamados de coordenadas de* $\vec{v}$ *em relação à base* β *e denota-se por*

$$[\vec{v}]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Definição 2.12. *Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se um deles é nulo, ou caso contrário, admitirem representantes perpendiculares.*

Proposição 2.2. *Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se e somente se $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2$.*

Demonstração. Trata-se da aplicação do Teorema de Pitágoras e de sua recíproca. Basta observar que, tomando O qualquer, $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se os pontos O, $O+\vec{u}$, $O+\vec{u}+\vec{v}$, são vértices de um triângulo retângulo. $\square$

Definição 2.13. *Uma base $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ é ortonormal se $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ são unitários e dois a dois ortogonais.*

Proposição 2.3. *Se $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é base ortonormal e $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ então*

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Demonstração. Considere a aplicação do Teorema de Pitágoras aos dois triângulos retângulos destacados na figura 2.9

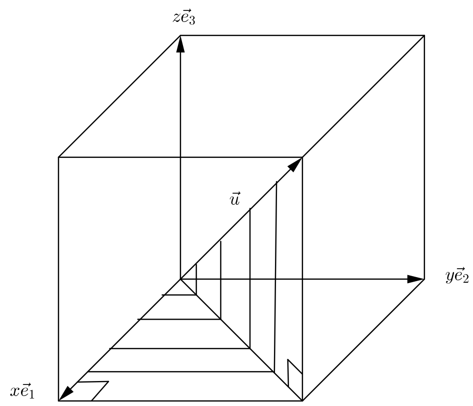

Figura 2.9:

Como $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$ e $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$, resulta $z\vec{e}_3 \perp x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Logo pela proposição anterior, como $\vec{u} = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) + z\vec{e}_3$,

$$||\vec{u}||^2 = ||x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2||^2 + ||z\vec{e}_3||^2.$$

Como também $x\vec{e}_1 \perp y\vec{e}_2$, resulta, pela mesma proposição, que esta relação se escreve

$$||\vec{u}||^2 = ||x\vec{e}_1||^2 + ||y\vec{e}_2||^2 + ||z\vec{e}_3||^2$$

e como $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ são unitários,

$$||x\vec{e}_1||^2 = |x|^2 = x^2;$$

$$||y\vec{e}_2||^2 = |y|^2 = y^2;$$

$$||z\vec{e}_3||^2 = |z|^2 = z^2;$$

então segue

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

□

2.4 Produto Interno

Observando o item (iv) da definição 2.4 o comprimento de um vetor é representado por $||\vec{v}||$. Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ então $||\vec{v}|| = d(A, B)$. Em um sistema de coordenadas ortogonais, se $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ então pela proposição 2.3, temos

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Exemplo 2.3. *Calcule o comprimento do vetor* $\vec{v} = (-4, 5, 1)$.

$$||\vec{v}|| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 1^2}$$
$$||\vec{v}|| = \sqrt{16 + 25 + 1}$$
$$||\vec{v}|| = \sqrt{42}.$$

Definição 2.14. *Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma função que associa a cada par de vetores, $\vec{u}, \vec{v} \in V$ um número real $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, chamado de produto interno de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ de modo que sejam válidas as seguintes propriedades, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:*

i. $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ *e* $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ *se, e somente se* $\vec{u} = 0$;

ii. $\langle \alpha\vec{u}, \vec{v}\rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$;

iii. $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{w}, \vec{v}\rangle$;

iv. $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$.

Definição 2.15. *Seja V um espaço com produto interno, a norma de um vetor $\vec{v}$ em relação a este produto interno é dada por $||\vec{v}|| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}$.*

Seja V um espaço vetorial real com produto interno, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}$ em V e $\alpha \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades:

i. $||\vec{u}|| \geq 0$ e $||\vec{u}|| = 0$ se, e somente se $\vec{u} = 0$;

ii. $||\alpha\vec{v}|| = |\alpha|\ ||\vec{v}||$;

iii. $|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \leq ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$ (Desigualdade de Schwarz);

iv. $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (Desigualdade triangular).

Demonstração. i.

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}$$

Como $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \geq 0 \Rightarrow ||\vec{v}|| \geq 0$.

ii.

$$||\alpha\vec{v}|| = \sqrt{\langle \alpha\vec{v}, \alpha\vec{v}\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle} = |\alpha|\ ||\vec{v}||.$$

iii. Desigualdade de Schwarz

Se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, é imediato, pois ambos os membros se anulam. Se $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$, então para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\langle t\vec{u} + \vec{v}, t\vec{u} + \vec{v}\rangle \geq 0$$

isto é,

$$\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle t^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle t + \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \geq 0.$$

Obtem-se um trinômino do segundo grau que deve ser positivo para qualquer valor de t. Como o coeficiente $\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle$ de t^2 é sempre positivo, o discriminante $\Delta = 4\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2 -$

$4\langle\vec{u},\vec{u}\rangle\langle\vec{v},\vec{v}\rangle \leq 0.$

Isto é, $4\langle\vec{u},\vec{v}\rangle^2 - 4\langle\vec{u},\vec{u}\rangle\langle\vec{v},\vec{v}\rangle \leq 0$, o que implica que $|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| \leq ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$.

iv. Calculemos:

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = \langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}\rangle$$
$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = \langle\vec{u},\vec{u}+\vec{v}\rangle + \langle\vec{v},\vec{u}+\vec{v}\rangle$$
$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = \langle\vec{u},\vec{u}\rangle + \langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{v},\vec{u}\rangle + \langle\vec{v},\vec{v}\rangle$$
$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + \langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{v},\vec{u}\rangle + ||\vec{v}||^2$$

Como $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \langle\vec{v},\vec{u}\rangle$

$$\Rightarrow ||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + ||\vec{v}||^2$$
$$\Rightarrow ||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + ||\vec{v}||^2 \leq ||\vec{u}||^2 + 2|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| + ||\vec{v}||^2$$

Mas, pela desigualdade de Schwarz

$$|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| \leq ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}|| \Leftrightarrow 2|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| \leq 2||\vec{u}||||\vec{v}||$$
$$\Rightarrow ||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2||\vec{u}||||\vec{v}|| + ||\vec{v}||^2$$
$$\Rightarrow ||\vec{u}+\vec{v}||^2 \leq (||\vec{u}|| + ||\vec{v}||)^2$$
$$\Rightarrow ||\vec{u}+\vec{v}|| \leq (||\vec{u}|| + ||\vec{v}||).$$

□

Definição 2.16. *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. Pela desigualdade de Schwarz, tem-se:*

$$|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| \leq ||\vec{u}||||\vec{v}||$$
$$\Rightarrow \frac{|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle|}{||\vec{u}||||\vec{v}||} \leq 1$$
$$\Rightarrow \left|\frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{||\vec{u}||||\vec{v}||}\right| \leq 1$$

Então existe um $\theta \in [0,\pi]$ tal que

$$\frac{|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle|}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = cos\,\theta \Rightarrow \langle\vec{u},\vec{v}\rangle = ||\vec{u}||||\vec{v}||cos\,\theta.$$

Quando $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle > 0$ o ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo, quando $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle < 0$ o ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso, quando $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

Definição 2.17. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Diz-se que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de V são ortogonais se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e escreve-se $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

Segue da definição acima as seguintes propriedades:

i. $0 \perp \vec{u}$ para todo $\vec{u} \in V$;

ii. $\vec{u} \perp \vec{v}$ implica que $\vec{v} \perp \vec{u}$;

iii. Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in V$, então $\vec{v} = 0$;

iv. Se $\vec{u}_1 \perp \vec{v}$ e $\vec{u}_2 \perp \vec{v}$, então $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \perp \vec{v}$;

v. Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ e λ é escalar, $\lambda \vec{u} \perp \vec{v}$.

Proposição 2.4. $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$

Demonstração. Se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, é imediato. senão, decorre de $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{u}||||\vec{v}||cos\theta$, que:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff cos\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \iff \vec{u} \perp \vec{v}$$

□

Exemplo 2.4. *Usando o produto interno usual de vetores em $\mathbb{R}^n$, com $\vec{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\vec{v} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ isto é:*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

observa-se que os vetores $\vec{u} = (-4, 5)$ e $\vec{v} = (10, 8)$ são ortogonais, pois

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (-4) \cdot 10 + 5 \cdot 8$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -40 + 40$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

2.5 Produto vetorial

Definição 2.18. *Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ define-se $\vec{u}\times\vec{v}$,como produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, da seguinte maneira:*

i. se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem linearmente dependentes,

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$$

ii. se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem linearmente independentes, $\vec{u}\times\vec{v}$ será o vetor com as seguintes características:

a) $||\vec{u}\times\vec{v}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||sen\theta$, onde θ é a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) $\vec{u}\times\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

c) $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ é uma base positiva de $\mathbb{R}^3$.

Sejam $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ uma base ortonormal positiva. Se $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ relativamente a essa base, então pode-se demonstrar que

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

onde o determinante formal deve ser interpretado como sendo

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

Exemplo 2.5. *Calcule $\vec{u}\times\vec{v}$ sendo $\vec{u}=(1,2,3)$ e $\vec{v}=(-1,1,2)$.*

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(4-3)\vec{i}+(-3-2)\vec{j}+(1+2)\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(1,-5,3).$$

Capítulo 3

Funções com valores vetoriais

Definição 3.1. *Sejam f e g funções definidas em $I \subseteq \mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$, isto é: $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
Definimos $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = (f(t), g(t))$$

ou

$$\alpha(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$$

; onde $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

A função α é chamada de função com valores vetoriais. As funções f e g são denominadas de funções coordenadas de α.

Exemplo 3.1. *Consideremos a função definida por $\alpha(t) = \sqrt{t-2}\vec{i} + (t-3)^{-1}\vec{j}$. Qual será o domínio de α?*
Tomando $f(t) = \sqrt{t-2}$ e $g(t) = (t-3)^{-1}$ o domínio de α será o conjunto em que estarão definidas as funções coordenadas f (t) e g(t). Observe que f(t) está definida para $t \geq 2$ e g(t) está definida para $t \neq 3$. Portanto o domínio de α é $\{t | t \geq 2, t \neq 3\}$.

Definição 3.2. *Se α e β são funções vetoriais e f uma função real definidas em I, com*

$I \subset \mathbb{R}$, então as funções $\alpha + \beta$, $f\alpha$, $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha \times \beta$ são definidas para todo $t \in I$.

$$(\alpha + \beta)(t) = \alpha(t) + \beta(t);$$
$$(f\alpha)(t) = f(t)\alpha(t);$$
$$\langle \alpha, \beta \rangle(t) = \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle;$$
$$(\alpha \times \beta)(t) = \alpha(t) \times \beta(t).$$

Definição 3.3. *Se $\alpha(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$, então o limite de $\alpha(t)$ quando t tende a t_1, será definido por*

$$\lim_{t \to t_1} \alpha(t) = \lim_{t \to t_1} f(t)\vec{i} + \lim_{t \to t_1} g(t)\vec{j}$$

se $\lim_{t \to t_1} f(t), \lim_{t \to t_1} g(t)$ existirem.

Exemplo 3.2. *Se $\alpha(t) = cost\vec{i} + 2e^t\vec{j}$, então*

$$\lim_{t \to 0} \alpha(t) = (\lim_{t \to 0} cost)\vec{i} + (\lim_{t \to 0} 2e^t)\vec{j}$$
$$\lim_{t \to 0} \alpha(t) = \vec{i} + 2\vec{j}.$$

Definição 3.4. *A função α com valores vetoriais será contínua em t_1 se e somente se as três condições seguintes forem satisfeitas:*

i. $\alpha(t)$ *exisite;*

ii. $\lim_{t \to t_1} \alpha(t)$ *existe;*

iii. $\lim_{t \to t_1} \alpha(t) = \alpha(t_1)$.

Se α e β são funções vetoriais contínuas em I e f é uma função real contínua, então as funções $\alpha + \beta$, $f\alpha$, $\langle \alpha, \beta \rangle$ e $\alpha \times \beta$ são contínuas.

Definição 3.5. *Se α for uma função com valores vetoriais, então a derivada de α também será uma função com valores vetoriais, denotada por α' e definida por*

$$\alpha'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

se esse limite existir.

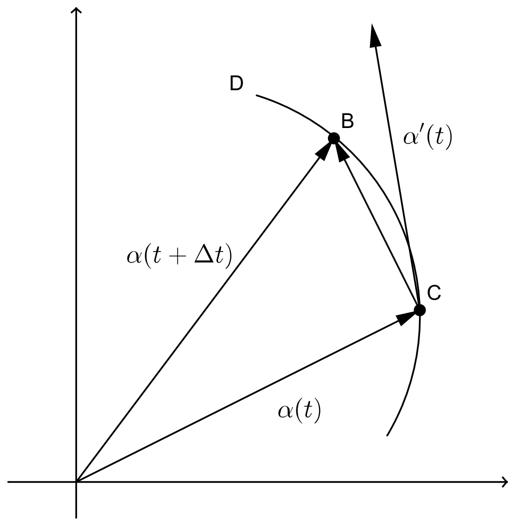

Figura 3.1: Vetor tangente

Uma interpretação geométrica da definição 3.5 pode ser obtida considerando as representações dos vetores $\alpha(t)$, $\alpha(t+\Delta t)$ e $\alpha'(t)$. A curva D é traçada pelo ponto final da representação posicional de $\alpha(t)$ quando t assume todos os valores do domínio de α. Seja $\overrightarrow{OC}$ a representação posicional de $\alpha(t)$ e $\overrightarrow{OB}$ a representação posicional de $\alpha(t+\Delta t)$. Então $\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)$ será um vetor tendo $\overrightarrow{CB}$ como representante. Se o vetor $\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)$ for multiplicado por um escalar$\frac{1}{\Delta t}$, obtem-se um vetor com a mesma direção e cujo o módulo é $\frac{1}{|\Delta t|}$ vezes o módulo de $\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)$. Quando Δt tende a zero, o vetor $\frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t}$ tende a um vetor cuja representação é a tangente a curva D no ponto C.(Leithold,[Lei94])

Definição 3.6. *Uma função com valores vetoriais $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é dita diferenciável se α' existir para todos os valores de t no intervalo.*

Teorema 3.1. *Se α e β forem funções com valores vetoriais diferenciáveis em um intervalo, então $\alpha+\beta$ será diferenciável no intervalo, e*

$$[\alpha(t)+\beta(t)]' = \alpha'(t)+\beta'(t).$$

Demonstração. Leithold [Lei94], página 811. □

Exemplo 3.3. *Seja* $\alpha = t^2\vec{i} + (t-1)\vec{j}$ *e* $\beta = sen\, t\vec{i} + cos\, t\vec{j}$. *Determine* $[\alpha(t) + \beta(t)]'$

Solução

$$\begin{aligned}
[\alpha(t) + \beta(t)]' &= [t^2\vec{i} + (t-1)\vec{j}]' + [sen\, t\vec{i} + cos\, t\vec{j}]' \\
[\alpha(t) + \beta(t)]' &= [(t^2 + sen\, t)\vec{i} + (t - 1 + cos\, t)\vec{j}]' \\
[\alpha(t) + \beta(t)]' &= (2t + cos\, t)\vec{i} + (1 - sen\, t)\vec{j}.
\end{aligned}$$

Teorema 3.2. *Se* α *e* β *forem funções com valores vetoriais diferenciáveis em um intervalo, então* $\alpha \cdot \beta$ *será diferenciável no intervalo e*

$$[\alpha(t) \cdot \beta(t)]' = \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t).$$

Demonstração. Leithold [Lei94], página 811. □

Exemplo 3.4. *Seja* $\alpha = t^2\vec{i} + (t-1)\vec{j}$ *e* $\beta = sen\, t\vec{i} + cos\, t\vec{j}$. *Determine* $[\alpha(t) \cdot \beta(t)]'$

Solução

$$\begin{aligned}
\alpha(t) \cdot \beta(t) &= (t^2 sen\, t)\vec{i} + ((t-1)cos\, t)\vec{j} \\
[\alpha(t) \cdot \beta(t)]' &= (2t sen\, t)\vec{i} + (t^2 cos\, t)\vec{i} + (cos\, t)\vec{j} + ((t-1)(-sen\, t))\vec{j} \\
[\alpha(t) \cdot \beta(t)]' &= ((t+1)sen\, t)\vec{i} + ((t^2+1)cos\, t)\vec{j}.
\end{aligned}$$

Teorema 3.3. *Se* α *for uma função com valores vetoriais, diferenciável em um intervalo e se* f *for uma função com valores reais, diferenciável no intervalo, então*

$$[f(t) \cdot \alpha(t)]' = f'(t)\alpha(t) + f(t)\alpha'(t).$$

Demonstração. Leithold [Lei94], página 812. □

Pode-se demonstrar facilmente que:

Sejam $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ diferenciáveis, então $\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle$ é diferenciável e

$$\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle' = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle$$

Proposição 3.1. *Se* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *for uma função com valores vetoriais, diferenciável em um intervalo e* $||\alpha(t)||$ *for constante para todo* t *no intervalo, então os vetores* $\alpha(t)$ *e* $\alpha'(t)$ *serão ortogonais.*

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} ||\alpha(t)|| &= k \\ \iff \sqrt{\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle} &= k \\ \iff \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle &= k^2. \end{aligned}$$

Derivando

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle &= 0 \\ 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Como o produto interno de $\alpha(t)$ e $\alpha'(t)$ é nulo, segue que $\alpha(t)$ e $\alpha'(t)$ são ortogonais. □

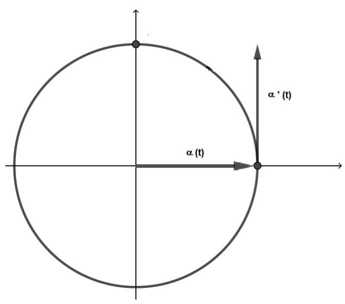

Figura 3.2: vetores ortogonais

Capítulo 4

Curvas

Neste capítulo, é apresentado o conceito de curva parametrizada diferenciável e curvas regulares. Contempla também, os exemplos clássicos de reta, circunferência, elipse, hipérbole e parábola; que muitas vezes aparecem em problemas relacionados à Física, no Ensino Médio.

Outros exemplos de curvas clássicas, como Ciclóide, Epicicloide, Hipocicloide, Deltóide são abordados, assim como a Cissóide de Diócles.

Os conceitos de comprimento de arco, parametrização pelo comprimento de arco e referencial de Frenet de curvas planas aparecem naturalmente no contexto, e no final do capítulo é apresentado uma introdução às Evolutas.

4.1 Curvas Planas

4.1.1 Curva Parametrizada Diferenciável, Curva Regular

Definição 4.1. *Uma curva é uma aplicação* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$*, sendo* I *um intervalo,* $I \subseteq \mathbb{R}$.

Definição 4.2. *Uma curva parametrizada de* $\mathbb{R}^2$ *é uma correspondência que associa a cada* t *de um intervalo aberto* $(a,b) = I \subset \mathbb{R}$*, um ponto* $P(t) = (x_1(t), x_2(t))$*; isto é,*

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = P(t) = (x_1(t), x_2(t)) \end{aligned}.$$

As funções $x_1 = x_1(t)$ *e* $x_2 = x_2(t), a < t < b$ *são diferenciáveis de classe* C^∞*. As expressões* $x_1 = x_1(t)$ *e* $x_2 = x_2(t)$ *são denominadas funções paramétricas da curva.*

Definição 4.3. *Seja* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *diferenciável. O vetor* $\alpha'(t) = (x_1'(t), x_2'(t))$ *é chamado de vetor velocidade de* α *em* t*.*

Exemplo 4.1. *Represente graficamente a curva e elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva* $x(\theta) = 2cos(\theta)$ *e* $y(\theta) = sen^2(\theta)$*.*

Solução:

$$\begin{cases} x(\theta) = 2cos(\theta) \\ y(\theta) = sen^2(\theta) \end{cases}$$

Lembrando que

$$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1.$$

De $x(\theta) = 2cos(\theta) \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = cos^2(\theta)$ *e* $y(\theta) = sen^2(\theta)$*, então,*

$$y + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1$$
$$y(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Exemplo 4.2. *Dada a função* $x(y) = y^4 - 3sen(y)$ *obtem-se o seguinte conjunto de equações parametrizadas.*

$$\begin{cases} x(t) = t^4 - 3sen(t) \\ y(t) = t \end{cases}$$

Definição 4.4. *Uma curva parametrizada* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *é dita plana, se existe um plano que contém* $\alpha(I)$*.*

Exemplo 4.3. *A curva* $\alpha(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{2}\right)$ *é plana, pois está contida no plano* $x - y + z + 1 = 0$.

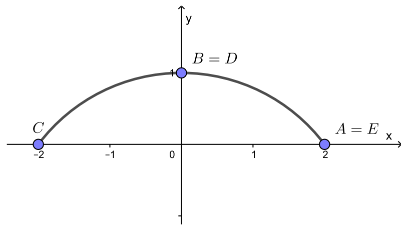

Figura 4.1: Curva $(2cos\theta, sen^2\theta)$

Exemplo 4.4. *Reta*
A aplicação $\alpha(t) = (a+bt, c+dt)$*, com* $t \in \mathbb{R}$*, onde* $b^2+d^2 \neq 0$*, é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma linha reta passando pelo ponto* (a, c) *paralela ao vetor de coordenada* (b, d)*.*

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cujo traço é uma circunferência. Como podemos saber se uma partícula, cujo traço é uma circunferência, está se deslocando no sentido horário ou anti-horário? Essa é uma pergunta natural para os alunos do Ensino Médio. O que responde a essa pergunta, é o conceito de vetor velocidade, como será apresentado nos exemplos a seguir:

Exemplo 4.5. *Circunferência*
Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$*, definida por* $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ *onde*

$$x(t) = r\,cos\,t$$

$$y(t) = r\,sen\,t.$$

Tem-se:

$$\alpha(t) = (r\,cos\,t, r\,sen\,t).$$

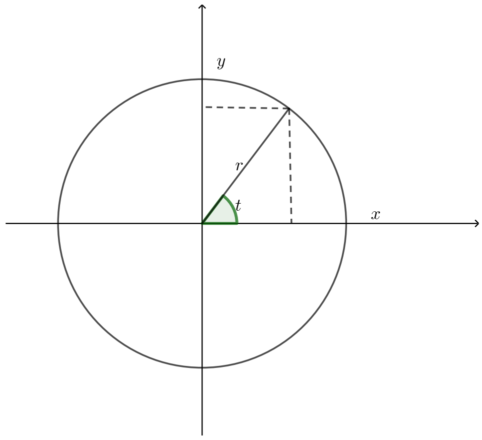

Figura 4.2: Circunferência

Considerando uma circunferência de raio unitário, tem-se

$$\alpha(t) = (cos\,t, sen\,t)$$
$$\alpha'(t) = (-sen\,t, cos\,t),$$

para

$$\alpha(0) = (cos\,0, sen\,0) = (1, 0) = A$$
$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(cos\,\frac{\pi}{2}, sen\,\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1) = B$$
$$\alpha'(0) = (0, 1).$$

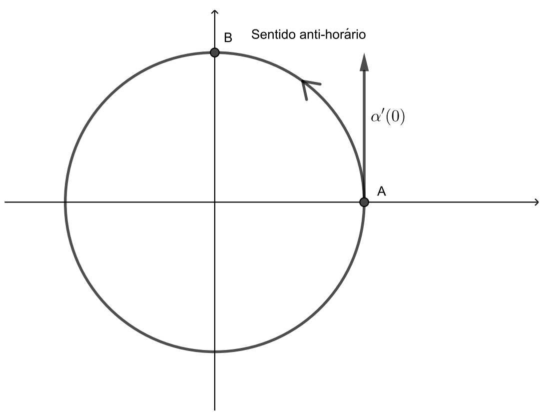

Figura 4.3: Partícula deslocando-se no sentido anti-horário

Tomando outra parametrização tem-se $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, com raio unitário,

$$\beta(t) = (sen\, t, cos\, t)$$

$$\beta'(t) = (cos\, t, -sen\, t),$$

tem-se

$$\begin{aligned} \beta(0) &= (sen\, 0, cos\, 0) = (0, 1) = A \\ \beta\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(sen\, \frac{\pi}{2}, cos\, \frac{\pi}{2}\right) = (1, 0) = B \\ \beta'(0) &= (1, 0). \end{aligned}$$

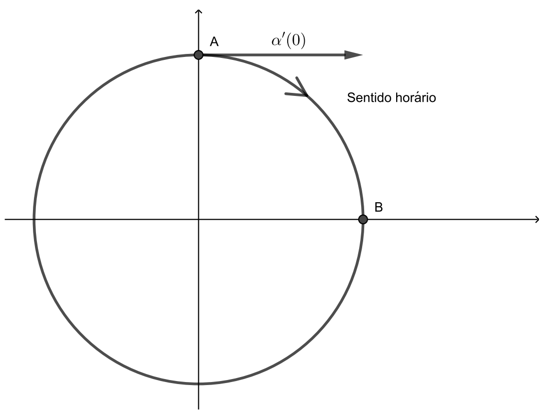

Figura 4.4: Partícula deslocando-se no sentido horário.

Observa-se que α e β têm o mesmo traço, porém percorrem a curva em sentidos opostos (α têm sentido anti-horário e β têm sentido horário).

Exemplo 4.6. *Elipse*
Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (a\, cos(t), b\, sen(t))$; $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Observa-se que o traço de α é uma elipse. De fato, fazendo

$$x(t) = a\, cos(t)$$

e

$$y(t) = b\, sen(t),$$

tem-se

$$\frac{x}{a} = cos(t)$$

e

$$\frac{y}{b} = sen(t),$$

elevando ambos os membros ao quadrado, tem-se:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = cos^2(t)$$

e

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = sen^2(t).$$

Somando, tem-se a equação cartesiana da elipse centrada na origem.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

O sentido em que a partícula se desloca na elipse é determinada de maneira análoga a da circunferência.

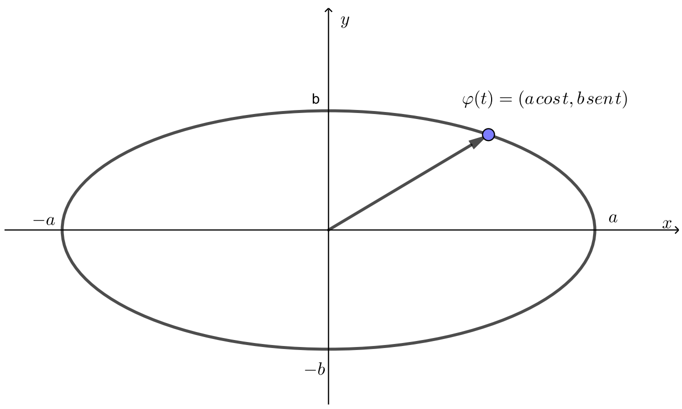

Figura 4.5: Elipse $\alpha(t) = (a\,cos\,t, b\,sen\,t)$

Exemplo 4.7. *Hipérbole*

Da Geometria Analítica tem-se que a equação cartesiana da hipérbole é dada por:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Seja $\frac{x}{a} = \frac{1}{cos\theta}$ *e* $\frac{y}{b} = tg\theta$.

Então:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{cos^2\theta} - tg^2\theta = 1.$$

Portanto, a hipérbole admite a parametrização $\begin{cases} x = x(\theta) = \frac{a}{cos\theta} \\ y = y(\theta) = b\,tg\theta; \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$

Fazendo $t = tg\frac{\theta}{2}$, *obtem-se também a parametrização*

$$x = x(t) = a\frac{(1+t^2)}{1-t^2}$$

$$y = y(t) = b\frac{2t}{1-t^2}.$$

Exemplo 4.8. *Parábola*

Esboce a curva dada pelas equações parametrizadas $x = t^2$, $y = 6 - 3t$. *Indique o sentido em que a curva é traçada.*

Solução:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 6 - 3t \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

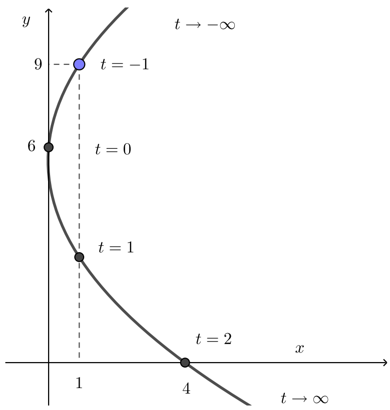

Figura 4.6: Parábola $\alpha(t) = (t^2, 6 - 3t)$

Para observar o sentido tem-se:

$$\alpha(t) = (t^2, 6 - 3t)$$

$$\alpha(0) = (0, 6).$$

Aplicando vetor velocidade no ponto $t = 0$, tem-se:

$$\alpha'(t) = (2t, -3)$$
$$\alpha'(0) = (0, -3).$$

Assim consegue-se determinar o sentido o qual a curva é traçada.

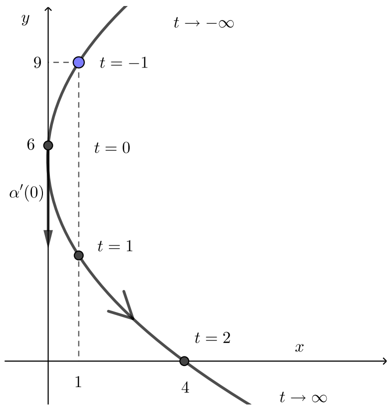

Figura 4.7: Sentido que a parábola é traçada

Exemplo 4.9. *Parábola*

Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, com $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.

Tomando

$$x = t^2 - 2t$$
$$y = t + 1.$$

O traço dessa curva é uma parábola.

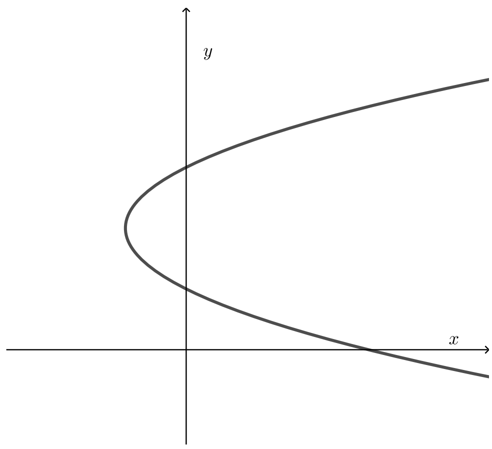

Figura 4.8: Parábola $\alpha(t) = (t^2 - 2t, t + 1)$

Exemplo 4.10. *A aplicação $\alpha(t) = (t, |t|)$, $t \in \mathbb{R}$, não é uma curva parametrizada diferenciável, pois $|t|$ não é diferenciável para $t = 0$.*

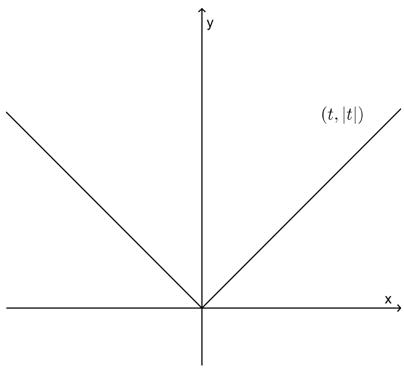

Figura 4.9: $\alpha(t) = (t, |t|)$

A partir de um problema de quadratura do círculo Charles Bouelles apresentou a ciclóide num trabalho de geometria publicado em Paris, em 1501. A cicloide apareceu como solução de alguns problemas como braquistócrona, solucionado por Newton, Leibniz e Bernoulli, e a tautócrona discutido por Huygens, Newton.

Exemplo 4.11. *Seja C um círculo de raio r, s uma reta e P um ponto de C. A curva descrita por um ponto da circunferência de um círculo, conforme esta rola ao longo de* *uma reta sem escorregar é chamada de cicloide.*

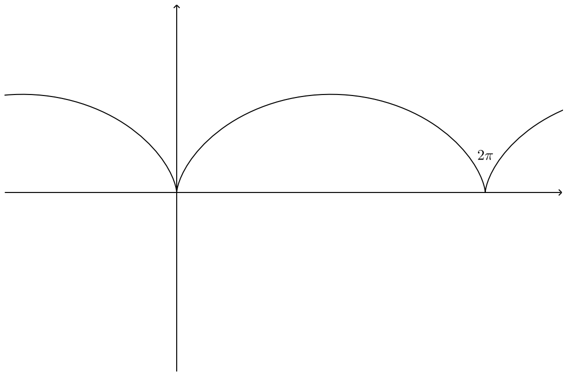

Figura 4.10: Cicloide

Parametrização da Cicloide

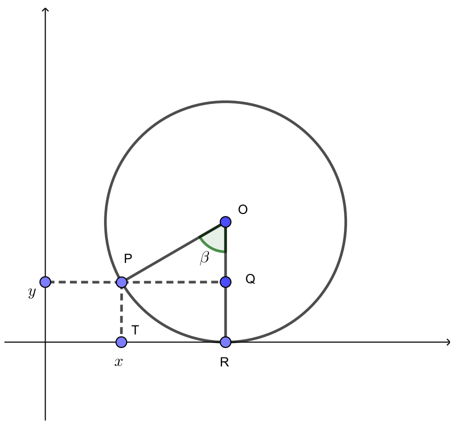

Figura 4.11:

Observa-se que

$$x = \overline{OR} - \overline{OT},$$

$$y = \overline{OR} - \overline{OQ}.$$

No triângulo OPQ, obtém-se a seguinte relação:

$$cos\beta = \frac{\overline{OQ}}{r} \Rightarrow \overline{OQ} = rcos\beta$$

e

$$sen\beta = \frac{\overline{PQ}}{r} \Rightarrow \overline{PQ} = rsen\beta.$$

Observa-se também que 2π está para $2\pi r$, assim como β está para $\overline{PR}$, logo $\overline{PR} = \beta r$, então $\overline{OR} = \overline{PR} = \beta r$.

Fazendo as seguintes substituições obtém-se:

$$x = \overline{OR} - \overline{TR} = \beta r - rsen\beta = r(\beta - sen\beta),$$
$$y = \overline{OR} - \overline{OQ} = r - rcos\beta = r(1 - cos\beta).$$

Logo a Cicloide está parametrizada.

Observa-se que a cicloide é obtida por um ponto fixo de um círculo, que rola com velocidade constante e sem deslizar sobre uma reta. A epicicloide pode ser interpretada de maneira semelhante com a cicloide, porém, troca-se a reta fixada por um círculo fixo.

A epicicloide e suas combinações foram utilizadas por Hiparco, Ptolomeu e Copérnico para estimar as posições da Lua, dos planetas e do Sol.

Exemplo 4.12. *Uma Epicicloide é uma curva descrita por um ponto da circunferência de um círculo que rola externamente sobre um círculo fixo tomado como base.*

Parametrização da Epicicloide

Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da epicicloide e r_1 o raio do círculo fixo tomado como base e r_2 o raio da circunferência que rola externamente sobre o círculo fixo.

$$x = \overline{AB} - \overline{AC}$$
$$y = \overline{RC} + \overline{CP} = \overline{OB} + \overline{CP},$$

pois, $\overline{RC} = \overline{OB}$.

Denotam-se os ângulos $< BOA$ de α, $< CAP$ de γ, $< PAQ$ de β e $< CAQ$ de θ.

$$sen\alpha = \frac{\overline{AB}}{r_1 + r_2} \Rightarrow \overline{AB} = (r_1 + r_2)sen\alpha,$$
$$cos\gamma = \frac{\overline{AC}}{r_2} \Rightarrow \overline{AC} = r_2 cos\gamma.$$

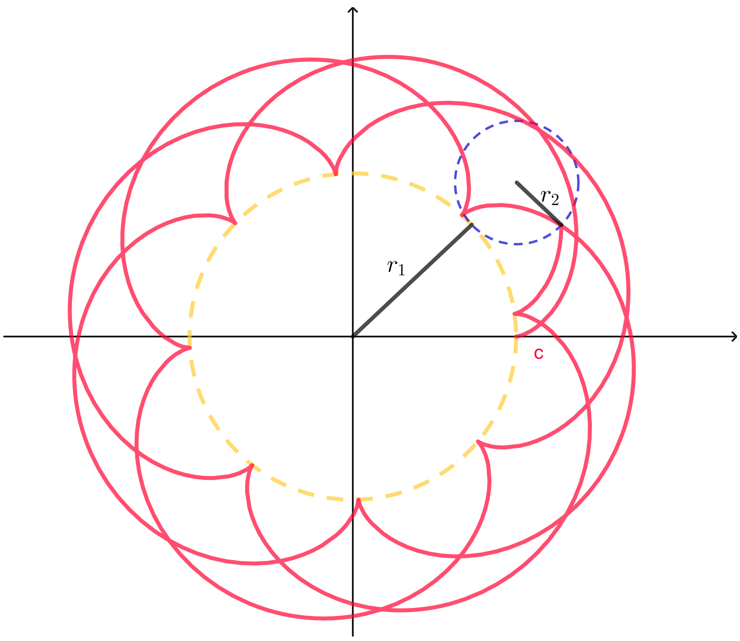

Figura 4.12: Epicicloide

Segue

$$x = (r_1 + r_2)sen\alpha - r_2 cos\gamma.$$

$$cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{r_1 + r_2} \Rightarrow \overline{OB} = (r_1 + r_2)cos\alpha,$$
$$sen\gamma = \frac{\overline{CP}}{r_2} \Rightarrow \overline{CP} = r_2 sen\gamma.$$

Segue

$$y = (r_1 + r_2)cos\alpha + r_2 sen\gamma.$$

Nota-se que $arcDQ = arcPQ \Rightarrow r_1\alpha = r_2\beta \Rightarrow \beta = \frac{r_1}{r_2}\alpha.$

Além disso, tem-se $\beta - \gamma = \theta \Rightarrow \beta - \theta = \gamma.$

Do ΔOBA *tem-se* $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$

Logo

$$\gamma = \beta - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \beta + \alpha - \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow cos\gamma = cos\left(\beta + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\alpha\left(1 + \frac{r_1}{r_2} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$\Rightarrow sen\gamma = sen\left(\alpha\left(1 + \frac{r_1}{r_2} - \frac{\pi}{2}\right)\right) cos\gamma = sen\left(\alpha\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right)$$
$$sen\gamma = -cos\left(\alpha\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right).$$

Agora pode-se concluir a parametrização da Epicicloide com

$$x = (r_1 + r_2)sen\alpha - r_2 sen\left(\alpha\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right),$$
$$y = (r_1 + r_2)cos\alpha - r_2 cos\left(\alpha\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right),$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.

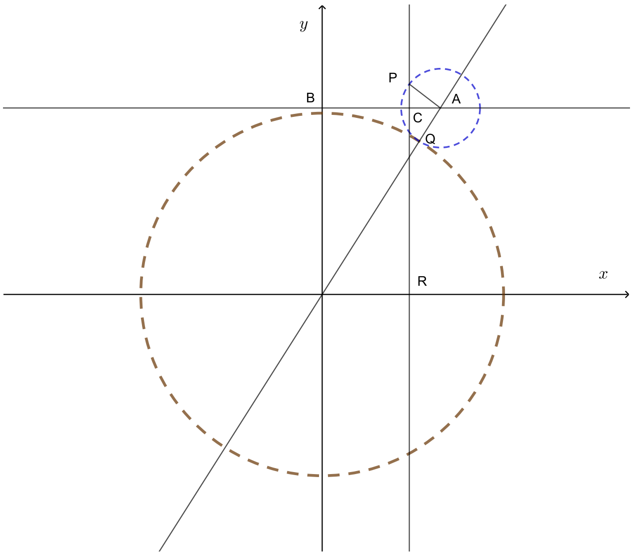

Figura 4.13: Parametrização da Epicicloide

Exemplo 4.13. *Uma Hipocicloide é uma curva descrita por um ponto da circunferência de um círculo que rola internamente sobre um círculo fixo tomado como base.*

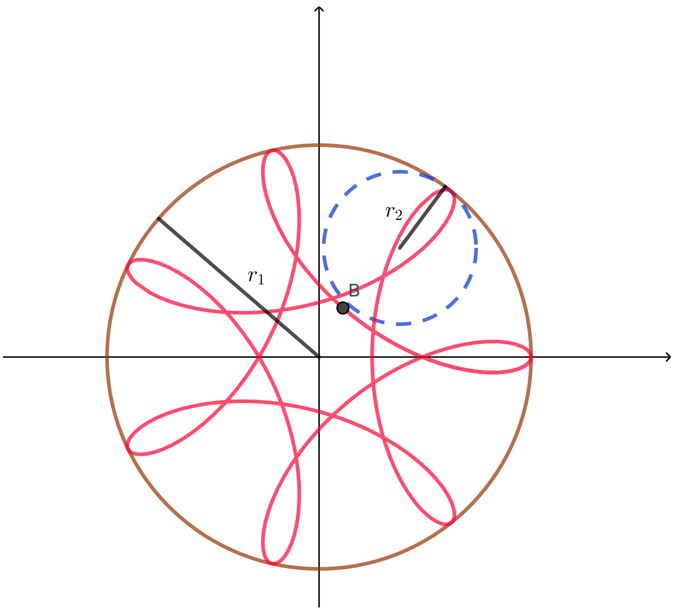

Figura 4.14: Hipocicloide

Parametrização da Hipocicloide

Seja $P = (x, y)$ *um ponto qualquer da hipocicloide e* r_1 *o raio do círculo fixo tomado como base e* r_2 *o raio da circunferência que rola internamente sobre o círculo fixo.*

$$x = \overline{OT} - \overline{CQ},$$

$$y = \overline{TC} + \overline{PQ},$$

$\overline{OT} = (r_1 - r_2)sen\alpha.$

$\overline{TC} = (r_1 - r_2)cos\alpha.$

$\overline{CQ} = r_2 cos\gamma.$

$\overline{PQ} = r_2 sen\gamma.$

Define-se os ângulos $< BOD$ *de* α, $< PCD$ *de* β, $< PCQ$ *de* γ *e* $< PCA$ *de* θ. *Assim obtém-se as seguintes relações entre os ângulos.*

$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta.$

$\theta = \beta - \alpha$.

Expressando x e y em função de α da seguinte maneira:

$$x = (r_1 - r_2)sen\alpha + r_2 sen\left(\alpha\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\right),$$
$$y = (r_1 - r_2)cos\alpha + r_2 cos\left(\alpha\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\right)$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.

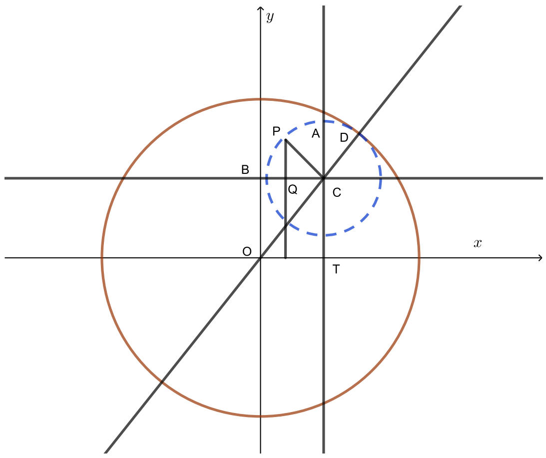

Figura 4.15: Parametrização da Hipocicloide

Exemplo 4.14. *A imagem obtida quando o raio da circunferência que rola internamente é $\frac{1}{3}$ da externa é a Deltóide.*

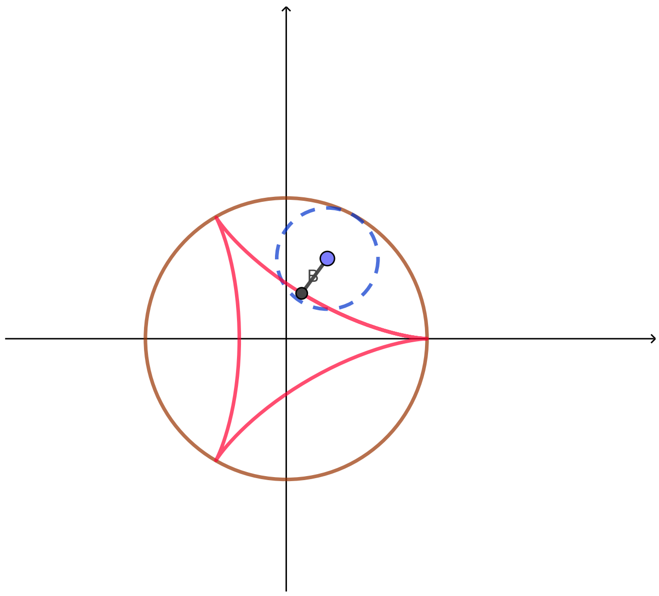

Figura 4.16: Deltoide

Exemplo 4.15. *A imagem obtida quando o raio da circunferência que rola internamente é $\frac{1}{4}$ da externa é a Astróide e sua equação é $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.*
Pode-se parametrizar assim: $\gamma(t) = (rcos^3 t, rsen^3 t)$, *sendo r o raio da circunferência externa.*

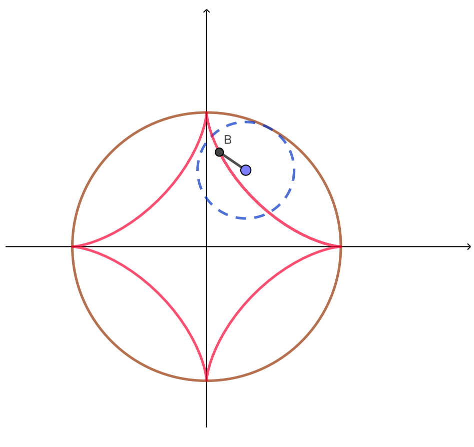

Figura 4.17: Astroide

Exemplo 4.16. *Considere uma circunferência de raio dado, e o diâmetro OB dessa circunferência. Por B traça-se a tangente à circunferência e pela origem uma semi reta que encontre a reta tangente. Chama-se C a intersecção da semi reta com a circunferência e de D a intersecção da semi reta com a reta tangente. Marca-se no segmento OD o ponto P tal que $CD = OP$. O lugar geométrico de P quando a semi reta se desloca no plano em torno da origem é chamado de Cissóide de Diocles.*

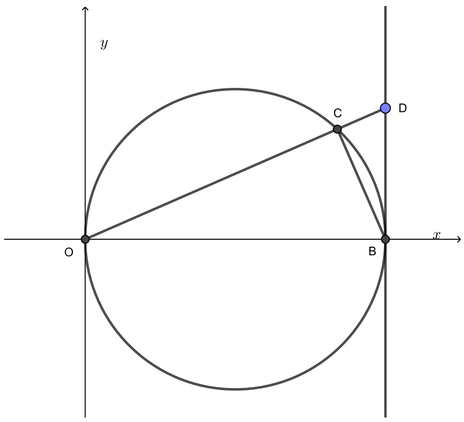

Figura 4.18:

Parametrização da Cissóide.
Seja $\theta =< BOD$ e $||OB|| = 2a$.
Observando os triângulos OBD e OBC tem-se:

$$||OD|| = \frac{2a}{cos\,\theta}.$$
$$||OC|| = 2a\,cos\,\theta.$$

Portanto

$$||OP|| = ||OD|| - ||OC|| = \frac{2a}{cos\theta} - 2a\,cos\,\theta \Rightarrow ||OP|| = \frac{2a\,sen^2\,\theta}{cos\,\theta} = 2a\,sen\,\theta\,tg\,\theta.$$

Note que $P \in OD$, assim P é da forma

$$P = O + \lambda\frac{\overrightarrow{OD}}{||\overrightarrow{OD}||}.$$
$$\Rightarrow \lambda = ||\overrightarrow{OP}||.$$

Mas $\overrightarrow{OD} = (2a, 2a\,tg\,\theta)$ *e* $O = (0,0)$, *assim tem-se* P *da forma:*

$$P = ||\overrightarrow{OP}||\frac{\overrightarrow{OD}}{||\overrightarrow{OD}||} = \frac{2a\,sen\,\theta\,tg\,\theta}{\frac{2a}{cos\,\theta}}(2a, 2a\,tg\,\theta)$$

$P = (2a\,sen\,\theta\,cos\,\theta\,tg\,\theta, 2a\,sen\,\theta\,cos\,\theta\,tg^2\,\theta)$

Observe que

$$sen\,\theta\,cos\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}\frac{cos^2\,\theta}{(cos^2\,\theta + sen^2\,\theta)} = \frac{tg\,\theta}{1 + \frac{sen^2\,\theta}{cos^2\,\theta}}$$

$$sen\,\theta cos\,\theta = \frac{tg\,\theta}{1 + tg^2\,\theta}.$$

Portanto define-se P *em função de* θ

$$P(\theta) = \left(\frac{2a\,tg^2\,\theta}{1 + tg^2\,\theta}, \frac{2a\,tg^3\,\theta}{1 + tg^2\,\theta}\right).$$

Assim definimos uma curva γ *descrita pelos pontos* $P(\theta)$ *chamando* $t = tg\,\theta$.

$$\gamma(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2}\right),$$

com $t \in \mathbb{R}$.

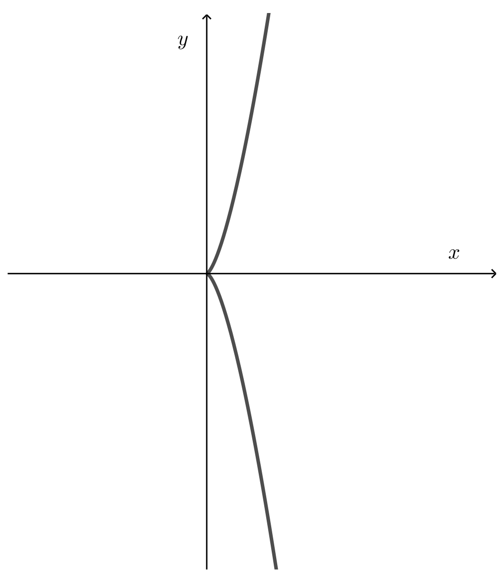

Figura 4.19: Cissóide de Diócles

Definição 4.5. *Uma curva parametrizada diferenciável* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *é dita regular se* $\alpha'(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$.

Exemplo 4.17. *A curva* $\alpha(t) = (cos\,t, sen\,t)$ *é regular, pois* $\alpha'(t) = (-sen\,t, cos\,t) \neq (0,0)\ \forall t.$

Definição 4.6. *O comprimento de arco de uma curva regular* $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$*, a partir de uma origem* $t_0 \in I$ *é o número real*

$$L(\alpha) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(t)||dt$$

com $t \in I$.

Exemplo 4.18. *Calcular o comprimento do arco da curva* $\alpha : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ *sendo* $x(t) = 2t - 1$ *e* $y(t) = 3t + 1$.
Solução:

$$L(\alpha) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(t)||dt$$

$$\Rightarrow L(\alpha) = \int_{1}^{2} \sqrt{|2|^2 + |3|^2}dt$$

$$\Rightarrow L(\alpha) = \sqrt{13}.$$

Definição 4.7. *Seja* $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ *uma curva regular. A função comprimento de arco de* α *relativamente a* t_0 *é a função*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(\Phi)||d\Phi$$

.

Definição 4.8. *Uma curva regular* $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ *está parametrizada pelo comprimento do arco se e, somente se, para todo* $t, t_0 \in I$,

$$L(\alpha)_{t_0,t_1} = |t_1 - t_0|$$

Portanto, α *está parametrizada pelo comprimento do arco*

$$\Leftrightarrow s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(\Phi)||d\Phi = t - t_0.$$

Proposição 4.1. *Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ será parametrizada pelo comprimento do arco, se e só se, para todo $t \in I$, $||\alpha'(t)|| = 1$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) α está parametrizada pelo comprimento do arco, então $s(t) = t - t_0$ para algum $t_0 \in I$.

$$\Rightarrow s'(t) = 1 = ||\alpha'(t)||; \forall t.$$

$$(\Leftarrow) L(\alpha)_{t_0,t} = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(\Phi)|| d\Phi = |t - t_0| \forall t \in I.$$

Portanto, α está parametrizada pelo comprimento do arco. □

Exemplo 4.19. *Calcule o comprimento de arco da curva $\alpha(t) = (e^t sen\ t, e^t cos\ t)$ com $t \in [1, 4]$.*

$$\alpha(t) = e^t sen\, t \vec{i} + e^t cos\, t \vec{j}$$

$$\alpha'(t) = (e^t sen\, t + e^t cos\, t)\vec{i} + (e^t cos\, t - e^t sen\, t)\vec{j}$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(e^t sen\, t + e^t cos\, t)^2 + (e^t cos\, t - e^t sen\, t)^2}$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{e^{2t}(sen^2 t + cos^2 t) + 2e^{2t} sen\, t cos\, t + e^{2t}(sen^2 t + cos^2 t) - 2e^{2t} sen\, t cos\, t}$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{2e^{2t}}$$

$$|\alpha'(t)| = e^t \sqrt{2},$$

pela definição 4.6, tem-se:

$$\int_1^4 e^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} e^t]_1^4$$

$$\int_1^4 e^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2}(e^4 - e).$$

Exemplo 4.20. *A aplicação $\alpha(t) = \left(a \cos\frac{t}{a}, a\, sen\frac{t}{a}\right)$, com $t \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$, é uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco, pois*

$$\alpha(t) = \left(a\, cos\frac{t}{a}, a\, sen\frac{t}{a}\right)$$

$$\alpha'(t) = \left(-a\frac{1}{a} sen\frac{t}{a}, a\frac{1}{a} cos\frac{t}{a}\right)$$

$$\alpha'(t) = \left(-sen\frac{t}{a}, cos\frac{t}{a}\right) \neq 0; \forall t.$$

Portanto α é regular e

$$
\begin{aligned}
||\alpha'(t)|| &= \sqrt{\left(-sen\frac{t}{a}\right)^2 + \left(cos\frac{t}{a}\right)^2} \\
||\alpha'(t)|| &= \sqrt{1} \\
||\alpha'(t)|| &= 1,
\end{aligned}
$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.2. *Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, e $s : I \to s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento do arco de α a partir de t_0. Então existe a função inversa h de s, definida no intervalo aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α, onde β está parametrizada pelo comprimento do arco.*

Demonstração. α é uma curva regular, portanto

$$s'(t) = ||\alpha'(t)|| > 0,$$

isto é, s é uma função estritamente crescente. Logo existe a função inversa de s, $h : J \to I$. Como $h(s(t)) = t$, tem-se que $\frac{\partial h}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = 1$, portanto

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\partial h}{\partial s}s'(t) = 1 \\
\frac{\partial h}{\partial s} &= \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{||\alpha'(t)||} > 0.
\end{aligned}
$$

Definindo a função β como sendo $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, $s \in J$, então β é uma reparametrização de α e $\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||} = 1$. Portanto pela proposição anterior β está parametrizada pelo comprimento de arco. □

Exemplo 4.21. *Considerando $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$, $t \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$. Seja $s(t)$ a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 = 0$, isto é,*

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}dt$$

$$s(t) = \sqrt{a^2 + b^2}t.$$

A função inversa de s é dada por

$$h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$s \in \mathbb{R}$. Portanto $\beta = \alpha \circ h$, que a cada s associa

$$\beta(s) = \left(a\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + c, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + d\right)$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento do arco.

4.1.2 Referencial de Frenet

Definição 4.9. *Seja a curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, com $s \in I$, parametrizada pelo comprimento de arco s. Para cada $s \in I$ $\alpha'(s)$ é uma vetor unitário, chamado de vetor velocidade, e denotado por $t(s)$, isto é,*

$$t(s) = (x'(s), y'(s)).$$

Seja $n(s)$ um vetor unitário ortogonal a $t(s)$, tal que a base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada por $t(s)$ e $n(s)$ tem a mesma orientação que a base canônica $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ de $\mathbb{R}^2$, isto é,

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

O conjunto de vetores $\{t(s), n(s)\}$ é chamado de referencial de Frenet.

Exemplo 4.22. *Considerando $\alpha(s) = (as + c, bs + d)$, $t \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 = 1$, então o referencial de Frenet é*

$$t(s) = (a, b)$$
$$n(s) = (-b, a).$$

Seja a curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ parametrizada pelo comprimento do arco, isto é, $||\alpha'(s)|| = 1$.
Tem-se:

$$\alpha'(s) = t(s) = (x'(s), y'(s)) \Rightarrow ||t(s)|| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1.$$

Também

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)) \Rightarrow ||n(s)|| = \sqrt{(-y'(s))^2 + x'(s)^2} = 1.$$

Observe que $\langle t(s), n(s)\rangle = 0$; isto é $t(s) \perp n(s)$.

Sejam α_1 e α_2 as componentes de $t'(s)$ em relação à base $\{t(s),\, n(s)\}$, isto é,

$$t'(s) = \alpha_1(s)t(s) + \alpha_2(s)n(s). \tag{4.1}$$

Fazendo o produto escalar entre $t'(s)$ e $t(s)$ usando (4.1) temos

$< t'(s), t(s) >= \alpha_1(s) < t(s), t(s) > +\alpha_2(s) < n(s), t(s) >$

Como $t'(s) \perp t(s)$,

$$0 = \alpha_1(s).1 + \alpha_2(s).0$$

Então $\alpha_1(s) = 0$ para todo s.

Portanto

$$t'(s) = \alpha_2(s)n(s).$$

Definição 4.10. *$\alpha_2(s) = k(s)$ é chamado a curvatura de α em s.*

Análogamente, tem-se

$$n'(s) = \tilde{\alpha_1}(s)t(s) + \tilde{\alpha_2}(s)n(s). \tag{4.2}$$

Fazendo o produto interno por $n(s)$, temos

$$< n'(s), n(s) >= \tilde{\alpha_1}(s) < t(s), n(s) > +\tilde{\alpha_2}(s) < n(s), n(s) > .$$

Como $n'(s) \perp n(s)$.

$$0 = \tilde{\alpha_1}(s).0 + \tilde{\alpha_2}(s).1$$

Então $\tilde{\alpha_2}(s) = 0$ para todo s.

Portanto

$$n'(s) = \tilde{\alpha_1}(s)t(s).$$

Como $\alpha_2(s) = k(s)$, calculemos $\langle t'(s), n(s)\rangle$:

$$\langle t'(s), n(s)\rangle = \langle \alpha_2(s)n(s), n(s)\rangle$$
$$\langle t'(s), n(s)\rangle = k(s)\langle n(s), n(s)\rangle$$
$$\langle t'(s), n(s)\rangle = k(s).$$

Segue que,

$$k(s) = \langle \alpha''(s), n(s)\rangle$$
$$k(s) = \langle((x''(s), y''(s)), -y'(s)x'(s))\rangle$$
$$k(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s).$$

De forma análoga, calcula-se $\langle t(s), n'(s)\rangle$

$$\langle t(s), n'(s)\rangle = \langle t(s), \alpha_1(s)t(s)\rangle$$
$$\langle t(s), n'(s)\rangle = \alpha_1(s)\langle t(s), t(s)\rangle$$
$$\langle t(s), n'(s)\rangle = \alpha_1(s).$$

Segue que,

$$\alpha_1(s) = \langle t(s), \alpha''(s)\rangle$$
$$\alpha_1(s) = \langle((x'(s), y'(s)), -y''(s)x''(s))\rangle$$
$$\alpha_1(s) = x''(s)y'(s) - y''(s)x'(s).$$

Portanto,

$$-k(s) = \alpha_1(s).$$

Definição 4.11. *Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco s, então o referencial de Frenet satisfaz as equações*

$$t'(s) = k(s)n(s)$$

$$n'(s) = -k(s)t(s)$$

que são chamadas de fórmulas de Frenet da curva plana α.

Exemplo 4.23. *Seja* $\alpha(s) = (as + x, bs + y)$ *uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco cujo traço é uma reta, com* a *e* b *constantes e* $a^2 + b^2 = 1$. *Como* $t(s) = \alpha'(s)$ *é constante então* $t'(s) = 0$ *e portanto* $k(s) = 0$, *para todo* $s \in I$, *ou seja a curvatura é nula.*

Exemplo 4.24. *Determine a curvatura da curva* $\alpha(s) = (a + b\,cos\frac{s}{b}, c + b\,sen\frac{s}{b})$, *com* $s \in \mathbb{R}$ *e* $b > 0$.

Solução:

Pela definição 4.9, *tem-se:*

$$
\begin{aligned}
t(s) &= (x'(t), y'(t))\\
t(s) &= \left(-sen\frac{s}{b}, cos\frac{s}{b}\right)\\
t'(s) &= \left(-\frac{1}{b}cos\frac{s}{b}, -\frac{1}{b}sen\frac{s}{b}\right).
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
n(s) &= (-y'(s), x'(s))\\
n(s) &= (-cos\frac{s}{b}, -sen\frac{s}{b}).
\end{aligned}
$$

Pela definição 4.10, *tem-se:*

$$
\begin{aligned}
k(s) &= \langle t'(s), n(s)\rangle\\
k(s) &= \langle\left(-\frac{1}{b}cos\frac{s}{b}, -\frac{1}{b}sen\frac{s}{b}\right), \left(-cos\frac{s}{b}, -sen\frac{s}{b}\right)\rangle\\
k(s) &= \frac{1}{b}cos^2\frac{s}{b} + \frac{1}{b}sen^2\frac{s}{b}\\
k(s) &= \frac{1}{b}.
\end{aligned}
$$

Ou seja, a curvatura será igual a $\frac{1}{b}$. *Observe que o traço de* α *é uma circunferência de centro* (a, c) *e raio* b.

Definição 4.12. *Seja* $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ *com* $s \in \mathbb{R}$ *uma curva regular, então define-se o vetor tangente unitário por:*

$$
t(s) = \frac{(x'(s), y'(s))}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{1}{2}}}
$$

Observe que $t(s)$ é um vetor unitário, pela proposição 3.1, $t'(s)$ será ortogonal a $t(s)$, como $t(s)$ é unitário segue que $t'(s)$ também será, sendo chamado de vetor normal unitário, o qual é definido da seguinte maneira:

Definição 4.13. *Se $t(s)$ for o vetor tangente unitário da curva $\alpha(s)$, então o vetor normal unitário será denotado por $n(s)$, sendo*

$$n(s) = \frac{(-y'(s), x'(s))}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Exemplo 4.25. *Dada a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, com $x(s) = s^3 - 3s$ e $y(s) = 3s^2$, determine o vetor tangente unitário e o vetor normal unitário.*

Solução:

Primeiramente obtem-se o vetor tangente unitário, seja a equação vetorial da curva

$$\alpha(s) = (s^3 - 3s, 3s^2)$$

derivando $\alpha(s)$ em relação a s tem-se

$$\alpha'(s) = (3s^2 - 3, 6s)$$

segue

$$\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = \sqrt{(3s^2 - 3)^2 + (6s)^2}$$
$$\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = \sqrt{9(s^4 + 2s^2 + 1)}$$
$$\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 3s^2 + 3$$

pela definição 4.12 tem-se,

$$t(s) = \frac{(x'(s), y'(s))}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}}$$
$$t(s) = \frac{(s^2 - 1, 2s)}{s^2 + 1}$$

o qual é o vetor tangente unitário da curva $\alpha(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Determina-se o vetor normal unitário, pela definição 4.13,

$$n(s) = \frac{(-y'(s), x'(s))}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}}$$
$$n(s) = \frac{(-6s, 3s^2 - 3)}{3s^2 + 3}$$
$$n(s) = \frac{(-2s, s^2 - 1)}{s^2 + 1}$$

o qual é o vetor normal unitário da curva $\alpha(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Definição 4.14. *Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ com $s \in \mathbb{R}$ uma curva regular, sua curvatura será dada por:*

$$k(s) = \frac{|-x''(s)y'(s) + x'(s)y''(s)|}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Exemplo 4.26. *Seja $\alpha(s) = (a\,cos(s), a\,sen(s))$ então sua curvatura será dada por:*

$$\begin{aligned}
k(s) &= \frac{|-x''(s)y'(s) + x'(s)y''(s)|}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}\\
k(s) &= \frac{|a\,cos(s) \cdot -a\,cos(s) + a\,sen(s) \cdot -a\,sen(s)|}{((a\,sen(s))^2 + (-a\,cos(s))^2)^{\frac{3}{2}}}\\
k(s) &= \frac{|-a^2|}{a^3}\\
k(s) &= \frac{|-1|}{a}.
\end{aligned}$$

Portanto a curvatura da curva $\alpha(s)$ no ponto s é dado por $\frac{1}{a}$.

Exemplo 4.27. *Seja $\alpha(s) = (e^s cos(s), e^s sen(s))$ então sua curvatura será dada por:*

$$\begin{aligned}
k(s) &= \frac{|-x''(s)y'(s) + x'(s)y''(s)|}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}\\
k(s) &= \frac{|-(-e^s sen(s))e^s(sen(s) + cos(s)) + e^s(cos(s) - sen(s))2e^s cos(s)|}{(e^{2s}(cos(s) - sen(s))^2 + e^{2s}(cos(s) + sen(s)))^{\frac{3}{2}}}\\
k(s) &= \frac{|2e^{2s}(sen^2(s) + sen(s)cos(s) - sen(s)cos(s) + cos^2(s))|}{(2e^{2s}(cos^2(s) + sen^2(s)))^{\frac{3}{2}}}\\
k(s) &= \frac{2e^{2s}}{\sqrt{(2e^{2s}s)^3}}\\
k(s) &= \frac{\sqrt{2e^{2s}}}{2e^{2s}}.
\end{aligned}$$

4.1.3 Evolutas no Plano

Definição 4.15. *Se k(s) for a curvatura de uma curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ em um ponto s e $k(s) \neq 0$, então o raio de curvatura de α em s será definido por*

$$R(s) = \frac{1}{|k(s)|}$$

Definição 4.16. *Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é uma curva com $k(s) \neq 0$, então sua evoluta é a curva $c : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por*

$$c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s)$$

Como $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, têm-se que as coordenadas de $c(s)$ são:

$$
\begin{aligned}
c(s) &= \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} n(s) \\
c(s) &= (x, y) + \frac{1}{||k(s)||} \frac{(-y'(s), x'(s))}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{1}{2}}} \\
c(s) &= (x, y) + \frac{(-y'(s), x'(s))}{(-x''y' + x'y'')} \\
c(s) &= (c_1(s), c_2(s))
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
c_1(s) &= x - \frac{y'}{y'x'' - x'y''} \\
c_2(s) &= y - \frac{x'}{y''x' - x''y'}
\end{aligned}
$$

(c_1, c_2) são chamados os centros de curvatura de α.

A medida que s varia em I, o centro de curvatura descreve uma curva β, denominada a evoluta de α.

Exemplo 4.28. *Dada a curva parametrizada por $\alpha(s) = (a\,cos(t), b\,sen(t))$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ cujo traço é uma elipse. Como α não está p.p.c.a então usaremos a proposição para cálculo do Triedro de Frenet para curva regulares planas. Temos:*

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \frac{(-a\,sen(t), b\,cos(t))}{\sqrt{a^2 sen^2(t) + b^2 cos^2(t)}} \\
N(t) &= \frac{(-b\,cos(t), -a\,sen(t))}{\sqrt{a^2 sen^2(t) + b^2 cos^2(t)}} \\
K(t) &= \frac{ab}{(a^2\,sen^2(t) + b^2\,cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

Agora considere $\beta(t)$ a evoluta de α

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{K(t)}N(t)$$
$$\beta(t) = (acos(t), bsen(t)) + \frac{(a^2sen^2(t) + b^2cos^2(t))^{3/2}}{ab}\frac{(-bcos(t), -asen(t))}{\sqrt{a^2sen^2(t) + b^2cos^2(t)}}$$
$$\beta(t) = (acos(t), bsen(t)) + \frac{(a^2sen^2(t) + b^2cos^2(t))}{ab}(-bcos(t), -asen(t))$$

Chamaremos de $d = a^2sen^2(t) + b^2sen^2(t)$, *então temos:*

$$\beta(t) = (acos(t), bsen(t)) + \frac{d}{ab}(-bcos(t), -asen(t))$$
$$\beta(t) = ((a - \frac{d}{a})cos(t), (b - \frac{d}{b})sen(t))$$

Note que

$$(a - \frac{d}{a})cos(t) = \left(\frac{a^2 - a^2sen^2(t) - b^2cos^2(t)}{a}\right)cos(t) = \frac{(a^2 - b^2)}{a}cos^3(t)$$
$$(b - \frac{d}{b})sen(t) = \left(\frac{b^2 - a^2sen^2(t) - b^2cos^2(t)}{a}\right)sen(t) = \frac{(b^2 - a^2)}{b}sen^3(t)$$

Portanto

$$\beta(t) = \left(\frac{(a^2 - b^2)}{a})cos^3(t), \frac{(b^2 - a^2)}{b}sen^3(t)\right)$$

Note que o traço dessa curva forma um Astróide.

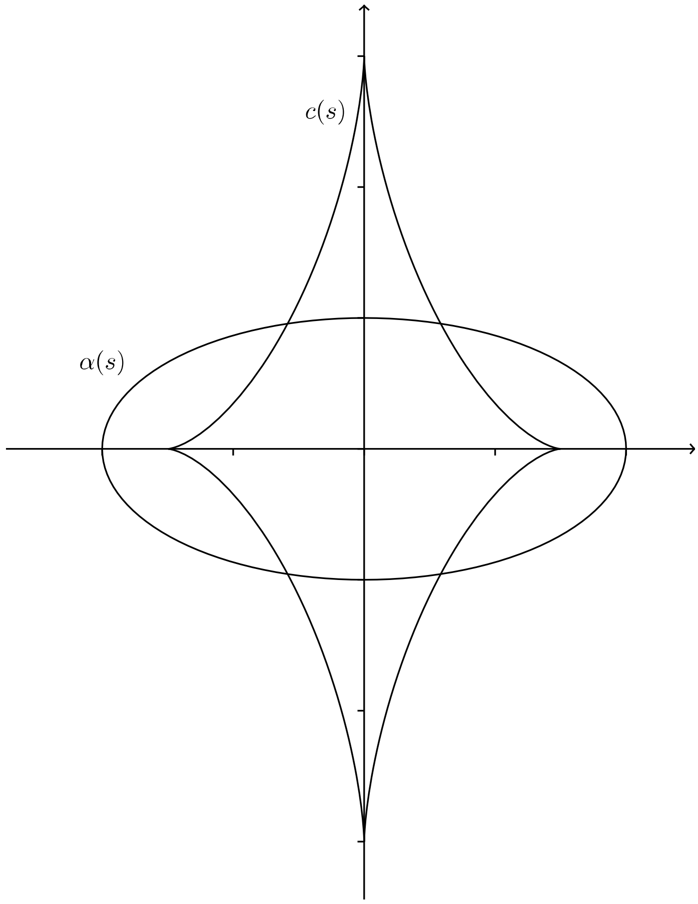

Figura 4.20: Elipse e sua evoluta

Exemplo 4.29. *Dada a cicloide* $\alpha(s) = (s - sen(s), 1 - cos(s))$ *tem-se:*

$$
\begin{aligned}
\alpha'(s) &= (1 - cos(s), sen(s)) \\
\alpha''(s) &= (sen(s), cos(s)) \\
n(s) &= \frac{(-y'(s), x'(s))}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(-sen(s), 1 - cos(s))}{(2(1 - cos(s)))^{\frac{1}{2}}} \\
k(s) &= \frac{|-x''(s)y'(s) + x'(s)y''(s)|}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{cos(s) - 1}{(2(1 - cos(s)))^{\frac{3}{2}}} \\
c(s) &= \alpha(s) + \frac{1}{k(s) \cdot (x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{1}{2}}}(-y'(s), x'(s)) \\
c(s) &= \alpha(s) + \frac{(-y'(s), x'(s))}{k(s) \cdot (x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{1}{2}}} \\
c(s) &= (s - sen(s), 1 - cos(s)) + (2sen(s), -2(1 - cos(s)))
\end{aligned}
$$

Então a evoluta da curva ciclóide é dada por

$$c(s) = (s + sen(s), cos(s) - 1)$$

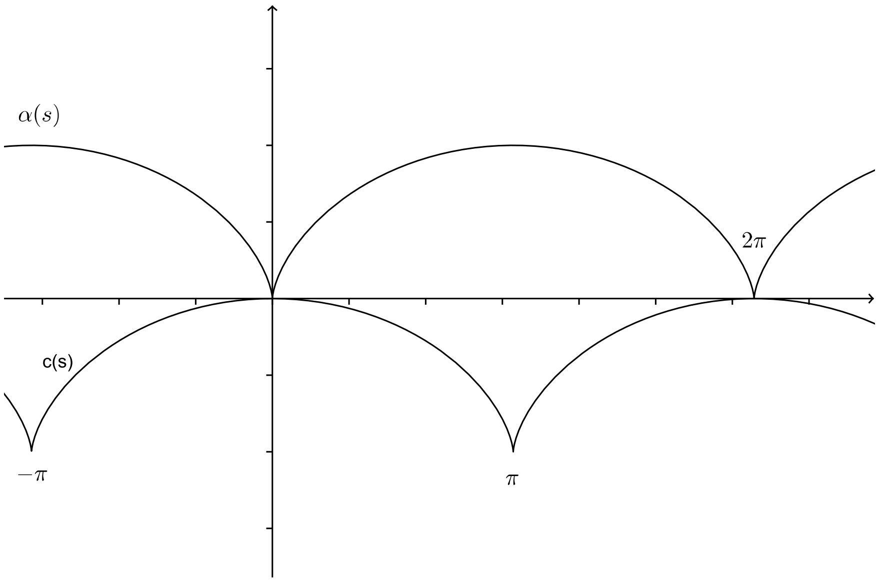

Figura 4.21: Cicloide e sua evoluta

Capítulo 5

Curvas no espaço

Neste capítulo apresentamos as curvas $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e seus principais aspectos geométricos, como velocidade e aceleração. Definimos curva parametrizada regular, comprimento de arco e o Triedro de Frenet $\{T(t), N(t), B(t)\}$. Definimos curvatura, torção e os campos derivados $\{T'(t), N'(t), B'(t)\}$. Como exemplo de curvas, apresentamos as hélices cilíndricas e suas principais características.

Definição 5.1. *Uma curva parametrizada diferenciável de $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável α, de classe C^∞)(isto é, existem as derivadas de todas as ordens de α), de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. A variável $t \in I$ é o parâmetro da curva e o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é o traço da curva.*

A expressão diferenciável na definição acima significa que α é uma correspondência que leva cada $t \in I$ em um ponto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$, de tal modo que as funções reais $x(t), y(t), z(t)$ são diferenciáveis.

Definição 5.2. *Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é dita regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*

Exemplo 5.1. *O vetor tangente a curva $\alpha(t) = \left(cos\, t, r\, sen\, t, 2r\, sen\, \frac{t}{2}\right)$ é $\alpha'(t) = \left(-sen\, t, r\, cos\, t, r\, cos\, \frac{t}{2}\right) \neq (0,0,0)$, $\forall t$. Portanto, a curva é regular.*

Definição 5.3. *Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, é dita parametrizada pelo comprimento do arco, se para o intervalo $[t, t_0] \in I$, o comprimento do arco da curva α de t a t_0 é* *igual a $t - t_0$, logo*

$$L(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(t)||dt = t - t_0$$

com $t \in I$.

Onde $||\alpha'(t)|| = (x'(t)^2 + y'(t)^2, z'(t)^2)^{\frac{1}{2}}$ indica o módulo do vetor $\alpha'(t)$.

Proposição 5.1. *Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento do arco se $\forall t \in I$, $||\alpha'(t)|| = 1$.*

Demonstração. Análoga a demonstração da proposição 4.1.

$\square$

Proposição 5.2. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular, e $s : I \to s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0. Então existe a função inversa h de s, definida no intervalo aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α, onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Análoga a demonstração da proposição 4.2. $\square$

5.0.1 Triedro de Frenet

Definição 5.4. *Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco, então a curvatura de α em $s \in I$, é o número real*

$$K(s) = ||\alpha''(s)||$$

Definição 5.5. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco.*
Seja $T(s) = \alpha'(s)$ e $T'(s) = \alpha''(s)$.
Como α está parametrizada pelo comprimento do arco, tem-se:

$$||T(s)||^2 = 1 \Leftrightarrow \langle T(s), T(s) \rangle = 1.$$

Derivando,

$$2\langle T(s), T'(s) \rangle = 0 \Rightarrow T(s) \perp T'(s), \forall s.$$

Define-se então a função

$$K(s) = ||T'(s)||; s \in I.$$

K(s) é a curvatura de α *em* $s \in I$.

Se $K(s) \neq 0, \forall s$ $(K(s) > 0)$, *então existe um vetor unitário ao longo de* α, *dado por*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{||T'(s)||}$$

chamado de vetor normal (ou campo Normal) de α.

Observa-se que $N(s)//T'(s)$ *e que* $N(s) \perp T(s)$.

Define-se agora

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

B(s) é chamado de vetor binormal (ou campo Binormal) de α.

Observa-se que:

1. $B(s)$ *é unitário;*

2. $B(s) \perp T(s)$ *e* $B(s) \perp N(s)$;

3. $B(s)$ *é diferenciavel.*

Definição 5.6. *Seja* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco tal que* $K(s) \neq 0; \forall s \in I$; *então o referencial ortonormal ao longo de* α *dado por* $\{T(s), N(s), B(s)\}$ *é chamado de referencial de Frenet (ou Triedro de Frenet) de* α.

Como está definido os vetores T(s), N(s) e B(s) é possível definir o plano normal, plano osculador e o plano retificante da seguinte forma:

Definição 5.7. *O plano de* $\mathbb{R}^3$ *que contém* $\alpha(s)$ *e é normal ao vetor* $T(s)$ *é o plano normal à curva* α *em s. O plano que contém* $\alpha(s)$ *e é normal a* $B(s)$ *é denominado plano osculador e o plano que contém* $\alpha(s)$ *e é normal a* $N(s)$ *é o plano retificante da curva* α *em s.*

Definição 5.8. *O número real* $\tau(s)$ *definido por* $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ *é denominado torção da curva em s.*

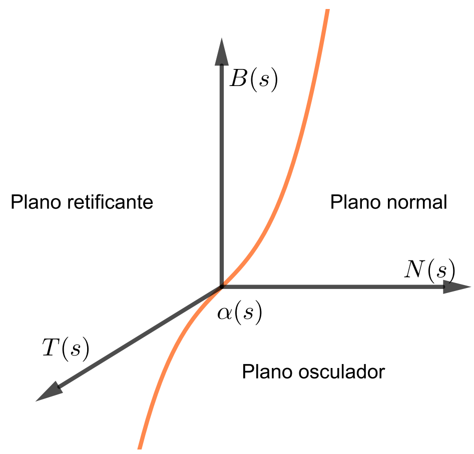

Figura 5.1: Planos

Proposição 5.3. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento do arco com $K > 0$ e $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é o triedro de Frenet de α. Então*

$$\begin{cases} T'(s) &= K(s)N(s) \\ N'(s) &= -K(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

onde τ é definido por:

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

é chamada de torção de α.

Demonstração. Tem-se $T'(s) = K(s)N(s)$ por definição de $K(s)$.

Como $N'(s)$ é um campo ao longo de α, pode-se escrever como combinação linear da base $\{T(s), N(s), B(s)\}$; isto é:

$$N'(s) = a_1T(s) + b_1N(s) + c_1B(s).$$

Calcudando a_1, b_1 e c_1.

1. Cálculo de a_1.

$$\begin{aligned}\langle N'(s), T(s)\rangle &= \langle a_1T(s) + b_1N(s) + c_1B(s), T(s)\rangle \\ =&\langle a_1T(s), T(s)\rangle + \langle b_1N(s), T(s)\rangle + \langle c_1B(s), T(s)\rangle \\ =&a_1\langle T(s), T(s)\rangle + b_1\langle N(s), T(s)\rangle + c_1\langle B(s), T(s)\rangle \\ =&a;\end{aligned}$$

pois $\langle T(s), T(s)\rangle = 1$; $\langle N(s), T(s)\rangle = 0$ e $\langle B(s), T(s)\rangle = 0$.

Mas, $\langle N(s), T(s)\rangle = 0$. Derivando, tem-se:

$$\begin{aligned}&\langle N'(s), T(s)\rangle + \langle N(s), T'(s)\rangle = 0 \\ \Rightarrow&\langle N'(s), T(s)\rangle = -\langle N(s), T'(s)\rangle = -K(s) \\ \Rightarrow&a_1 = -K(s).\end{aligned}$$

2. Cálculo de c_1.

Analogamente $\langle N'(s), B(s)\rangle = c_1$. Como $\langle N(s), B(s)\rangle = 0$, derivando

$$\begin{aligned}&\langle N'(s), B(s)\rangle + \langle N(s), B'(s)\rangle = 0 \\ \Rightarrow&\langle N'(s), B(s)\rangle = -\langle N(s), B(s)\rangle = \tau(s).\end{aligned}$$

3. Cálculo de b_1.

$\langle N'(s), N(s)\rangle = b_1$. Como $\langle N(s), N(s)\rangle = 1$, derivando,

$$\begin{aligned}&\langle N'(s), N(s)\rangle + \langle N(s), N'(s)\rangle = 0 \\ \Rightarrow&2\langle N'(s), N(s)\rangle = 0 \\ \Rightarrow&\langle N'(s), N(s)\rangle = 0 = b_1.\end{aligned}$$

Portanto

$$N'(s) = -K(s)T(s) + \tau(s)B(s).$$

Calculando $B'(s)$.

Tem-se que:

$$B'(s) = a_2T(s) + b_2N(s) + c_2B(s) \Rightarrow \langle B'(s), T(s)\rangle = a_2.$$

1. Cálculo de a_2.

   Como $\langle B(s), T(s)\rangle = 0$, derivando

$$\begin{aligned}
&\langle B'(s), T(s)\rangle + \langle B(s), T'(s)\rangle = 0\\
\Rightarrow &2\langle B'(s), T(s)\rangle = 0\\
\Rightarrow &\langle B'(s), T(s)\rangle = 0 = a_2.
\end{aligned}$$

2. Cálculo de b_2.

   Como $\langle B(s), N(s)\rangle = 0$, derivando,

$$\begin{aligned}
&\langle B'(s), N(s)\rangle + \langle B(s), N'(s)\rangle = 0\\
\Rightarrow &\langle B'(s), N(s)\rangle = -\langle B(s), N'(s)\rangle\\
\Rightarrow &\langle B'(s), N(s)\rangle = -\tau(s) = b_2.
\end{aligned}$$

3. Cálculo de c_2.

   $\langle B'(s), B(s)\rangle = c_2$. Como $\langle B(s), B(s)\rangle = 1$, derivando,

$$\begin{aligned}
&2\langle B'(s), B(s)\rangle = 0\\
\Rightarrow &\langle B'(s), B(s)\rangle = 0 = c_2.
\end{aligned}$$

   Portanto

$$B'(s) = -\tau(s)N(s).$$

□

A próxima proposição nos permite calcular curvatura e torção de uma curva, mesmo ela não estando parametrizada pelo comprimento do arco.

Proposição 5.4. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular de parâmetro t e $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de α pelo comprimento do arco, isto é, $\beta(s(t)) = \alpha(t)$, para todo $t \in I$. Sejam $K(s) > 0$ e $\tau(s)$ a curvatura e a torção de β em s, então, pode-se provar que:*

$$\begin{cases}
K(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}\\
\tau(s(t)) = \frac{\langle\alpha'(t)\times\alpha'''(t), \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2}
\end{cases}$$

Demonstração. Tenenblat [Ten88] página 68. $\square$

Exemplo 5.2. *Dada a curva $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$, com $t \in \mathbb{R}$, determine a curvatura e a torção.*
Tem-se,

$$\alpha'(t) = (e^t, -e^t, \sqrt{2})$$

Observe que $\alpha'(t)$ não está parametrizada pelo comprimento de arco, pois $||\alpha'(t)|| \neq 1$.

$$\alpha''(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$$
$$\alpha'''(t) = (e^t, -e^{-t}, 0).$$

Pela definição acima, a curvatura é dada por

$$K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$
$$K(t) = \frac{\|(-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2)\|}{(\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2})^3}$$
$$K(t) = \frac{\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}.$$

Pela definição acima, a torção é dada por

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$
$$\tau(t) = \frac{\langle (\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 0), (e^t, e^{-t}, 0) \rangle}{(\sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4})^2}$$
$$\tau(t) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4}$$
$$\tau(t) = \frac{\sqrt{2}}{e^{-2t} + e^{2t} + 2}.$$

5.0.2 Hélices

Definição 5.9. *Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é uma hélice cilíndrica $\iff$ existe um vetor unitário $\vec{v}$ tal que $\langle T(s), \vec{v} \rangle =$ constante.*

Proposição 5.5. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular de curvatura e torção não nulas. Então α é uma hélice cilíndrica se, e somente se, $\frac{K}{\tau}$ é constante.*

Demonstração. Supondo que α é parametrizada por comprimento de arco. Se α é uma hélice cilíndrica, então existe um vetor unitário $\vec{v}$ tal que $\langle \alpha'(s), \vec{v} \rangle$ é constante. Portanto, $\langle \alpha''(s), \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \langle K(s)N(s), \vec{v} \rangle = K(s)\langle N(s), \vec{v} \rangle = 0$. Como $K(s) \neq 0$, segue que $\langle N(s), \vec{v} \rangle = 0$, isso significa que $\vec{v}$ e $N(s)$ são ortogonais, logo $\vec{v}$ pertence ao plano determinado por $T(s)$ e $B(s)$, para cada $s \in I$.
Então, seja

$$\vec{v}(s) = cos\theta(s)T(s) + sen\theta(s)B(s)$$

Derivando tem-se

$$0 = -sen\theta(s)\theta'(s)T(s) + cos\theta(s)T'(s) + cos\theta(s)\theta'(s)B(s) + sen\theta(s)B'(s)$$

Utilizando as fórmulas de Frenet segue que

$$0 = -sen\theta(s)\theta'(s)T(s) + (K(s)cos\theta(s) - \tau sen\theta(s))N(s) + cos\theta'(s)B(s)$$

Como $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é L.I., $\forall s \in I$,

$$\Rightarrow \begin{cases} sen\theta(s)\theta'(s) = 0 \\ cos\theta(s)\theta'(s) = 0 \\ K(s)cos\theta(s) + \tau(s)sen\theta(s) = 0 \end{cases}$$

As duas primeiras equações determinam $\theta'(s) = 0, \forall s \in I$. Com efeito, segue que $sen^2\theta(s)\theta'(s)^2 + cos^2\theta(s)\theta'(s)^2 = 0$ donde vem $\theta'(s)^2(sen^2\theta(s) + cos^2\theta(s)) = 0 \Rightarrow \theta'(s) = 0$. Portanto $\theta(s)$ é constante. Além disso, a constante $cos\theta$ é não nula, pois caso contrário $\tau(s)sen\theta = 0$ como obrigatoriamente $sen\theta \neq 0$ o que resulta em $\tau(s) = 0$ o que contradiz a hipótese. Segue da terceira igualdade que

$$\frac{K}{\tau} = \frac{sen\theta}{cos\theta}$$

ou seja, $\frac{K}{\tau}$ é constante. Reciprocamente, se $\frac{K}{\tau}$ é constante, fixa-se θ tal que $tan\theta = \frac{K}{\tau}$. Então seja $\vec{v}(s)$ o campo definido ao longo de α por:

$$\vec{v}(s) = cos\theta T(s) + sen\theta B(s)$$

é um vetor unitário constante e tal que $\forall s \in I$ $\langle T(s), \vec{v} \rangle = cos\theta$ é constante. Portanto α é uma hélice. □

O mesmo vale se α é regular e não está parametrizada pelo comprimento do arco.

Definição 5.10. *Uma hélice cilíndrica* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *é uma hélice circular* $\iff$ *a projeção de* α *sobre o plano* Π, *(*Π *ortogonal a* $\vec{u}$, *tal que* $\langle T(s), \vec{u}\rangle =$ *constante), é uma circunferência.*

Proposição 5.6. *Uma curva regular* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *com* $K(t) > 0$, $\forall t$ *é uma hélice circular* $\Leftrightarrow \tau(t) =$ *constante e* $K(t) =$ *constante.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja α uma hélice circular e Π um plano ortogonal a $\vec{u}$ tal que $T(t) \cdot \vec{u} =$ constante.
Portanto a projeção de α sobre Π é uma circunferência.
Seja (C, E_1, E_2, E_3) um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$ com origem em C, tal que $[E_2, E_3] = \Pi$ e $E_1 = \vec{u}$.
Se $\beta(t)$ é a projeção de $\alpha(t)$ sobre Π, então

$$\beta(t) - C = rcos\phi(t)E_2 + rsen\phi(t)E_3$$

Por outro lado, pode-se escrever

$$\beta(t) - C = (\alpha(t) - C) - h(t)\vec{u}$$

onde

$$h(t) = s(t)cos\theta$$

$$\beta(t) = \alpha(t) - s(t)\vec{u}cos\theta$$

Supondo que α está parametrizada pelo comprimento de arco, assim tem-se

$$K_\beta(t) = \frac{||\beta'(t) \times \beta''(t)||}{||\beta'(t)||^3}$$

Note que $\beta'(t) = \alpha'(t) - cos\theta\vec{u}$

$$||\beta'(t)|| = 1 - cos^2\theta = sen^2\theta$$

Por outro lado tem-se

$$\beta'(t) = T_\alpha(t) - cos\theta\vec{u}$$

$$\beta''(t) = T'_\alpha(t) = K_\alpha(t)N_\alpha(t)$$

Portanto

$$\beta'(t) \times \beta''(t) = (T_\alpha(t) - cos\theta\vec{u}) \times K_\alpha(t)N_\alpha(t)$$
$$\beta'(t) \times \beta''(t) = K_\alpha(t)B_\alpha(t) - K_\alpha(t)cos\theta\vec{u} \times N_\alpha(t)$$
$$\beta'(t) \times \beta''(t) = K_\alpha(t)B_\alpha(t) - K_\alpha(t)cos\theta(cos\theta T_\alpha(t) + sen\theta B_\alpha(t) \times N_\alpha(t))$$
$$\beta'(t) \times \beta''(t) = K_\alpha(t)B_\alpha(t) - K_\alpha(t)cos\theta(cos\theta B_\alpha(t) - sen\theta T_\alpha(t))$$
$$\beta'(t) \times \beta''(t) = K_\alpha(t)sen^2\theta B_\alpha(t) + K_\alpha(t)sen\theta cos\theta T_\alpha(t)$$
$$||\beta'(t) \times \beta''(t)||^2 = K_\alpha^2(t)sen^4\theta + K_\alpha^2(t)sen^2\theta cos^2\theta$$

Portanto

$$||\beta'(t) \times \beta''(t) = K_\alpha(t)|sen\theta|$$

Note que $||\beta'(t)|| = |sen\theta|$, então

$$K_\beta(t) = \frac{||\beta'(t) \times \beta''(t)||}{||\beta'(t)||^3}$$
$$K_\beta(t) = \frac{K_\alpha(t)|sen\theta|}{|sen\theta|^3}$$
$$K_\beta(t) = \frac{K_\alpha(t)}{|sen\theta|^2}$$

ou seja: $K_\alpha(t) = K_\beta(t)sen^2\theta$.

Então, K_α é constante $\Leftrightarrow$ K_β é constante $\Leftrightarrow$ $\beta(I)$ está contida numa circuferência. $\square$

Exemplo 5.3. *A curva parametrizada diferenciável $\alpha(t) = (acos(t), asen(t), bt)$, com $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \neq 0$, tem por traço uma hélice circular de passo $2\pi b$ sobre o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.*

Exemplo 5.4. *Para a hélice $\alpha(s) = \left(acos\frac{s}{c}, asen\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right)$ com $a^2 + b^2 = c^2$, sua curvatura é dada por*

$$\alpha'(s) = \left(\frac{-a}{c}sen\frac{s}{c}, \frac{a}{c}cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)$$
$$\alpha''(s) = \left(\frac{-a}{c^2}cos\frac{s}{c}, \frac{-a}{c^2}sen\frac{s}{c}, 0\right)$$

Portanto, a sua curvatura é $|\alpha''(s)|| = \frac{|a|}{c^2}$.

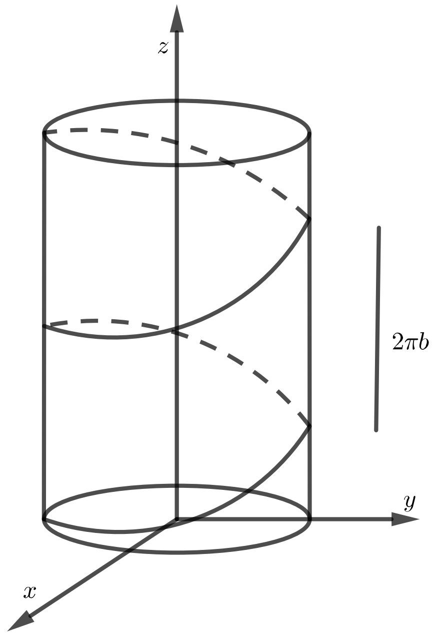

Figura 5.2: Hélice circular

Exemplo 5.5. *Pode-se verificar se a curva* $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ *é uma hélice.*
A curvatura é dada por

$$K(t) = \frac{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||}{||\alpha'(t)||^3}$$
$$K(t) = \frac{\sqrt{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}^3}$$
$$K(t) = \frac{\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}$$

A torção é dada por

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2}$$
$$\tau(t) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2e^{-2t} + 2e^{2t} + 4}$$
$$\tau(t) = \frac{\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}$$

Logo $\frac{K(t)}{\tau(t)} = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *então* α *é uma hélice.*

Capítulo 6

Conclusão

Na Geometria, as curvas parametrizadas aparecem naturalmente, descritas geralmente como a trajetória de uma partícula, em um intervalo de tempo. Devido à aplicabilidade e relevância do assunto em questão em várias áreas da Matemática, Física e Engenharia, esse trabalho contempla alguns conceitos e exemplos de curvas.

Para que fosse possível a abordagem de curva e suas parametrizações, foram necessários conceitos preliminares de vetores, como operações com vetores, dependência e independência linear, base, produto interno e produto vetorial, assim como funções vetoriais. O estudo destes foram imprescindíveis no desenvolvimento desse trabalho.

Em consequência disso, foram apresentadas as parametrizações de algumas curvas, como circunferência, elipse, hipérbole e parábola, e algumas curvas especiais e suas parametrizações, tais como Cissóide de Diócles, Cicloide, Epicicloide, Hipocicloide (dentre elas: Deltóide, Astróide).

Utilizando o referencial de Frenet e suas equações, obtém-se informações importantes sobre as curvas planas, tal como a sua curvatura. Foram contemplados conceitos de comprimento de arco, parametrização pelo comprimento de arco de curvas planas, assim como uma introdução às Evolutas. Em decorrência do estudo das curvas planas, foi realizada uma breve abordagem de curvas no espaço, o que possibilitou a definição do triedro de Frenet e suas fórmulas, as quais permitem obter a curvatura e a torção de uma curva e verificar se esta representa uma hélice ou não.

Esse trabalho foi de grande valia, pois houve a oportunidade de se estudar e ampliar os conhecimentos sobre curvas e suas parametrizações. Além disso, possiblita e contribui para posteriores estudos cujo objetivo seja aprofundar os conhecimentos referentes a curvas parametrizadas, seja na área da Geometria e/ou sua aplicabilidade em demais áreas do conhecimento.

Referências Bibliográficas

[Bol78] J.L. et al Boldrini. álgebra linear, 1978.

[Bou05] I. Boulos, P. e Camargo. Geometria analítica um tratamento vetorial, 2005.

[dC71] M.P. do Carmo. Elementos de geometria diferencial, 1971.

[H.04] Eves. H. Introdução á história da matemática, 2004.

[Har73] C. E. Harle. Geometria diferencial, 1973.

[Lei94] L. Leithold. O cálculo com geometria analítica, 1994.

[Lim10] E.L. Lima. Geometria analítica e álgebra linear, 2010.

[ON69] B. O' Neill. Elementary differential geometry, 1969.

[Ten88] K. Tenenblat. Introdução á geometria diferencial, 1988.